МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Н.С. Кравченко, О.Г. Ревинская

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В УЧЕБНОМ ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ

Издание второе, переработанное

Издательство
Томского политехнического университета
2017

ББК 22.3; 22.12
УДК 53.08; 004.9
К 78

Кравченко Н.С.

К 78 Методы обработки результатов измерений и оценки погрешностей в учебном лабораторном практикуме: учебное пособие; издание второе / Н.С. Кравченко, О.Г. Ревинская; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2017. – 121 с.

ISBN

Материалы, представленные в пособии, позволяют обосновать методику оценки погрешностей экспериментальных результатов в курсе общей физики технических и классических университетов. Пособие предназначено для студентов младших курсов физико-математических и технических специальностей, приобретающих начальные навыки в области экспериментальных исследований.

В пособии описаны методы количественного и графического представления экспериментальных результатов, опирающиеся на элементы теории вероятности и математической статистики, а также на математический анализ. Для практического применения изложенных методов даны рекомендации по использованию электронных таблиц на примере MS Excel 2010.

УДК 53.08; 004.9
ББК 22.3; 22.12

Рецензент

доктор физико-математических наук, доцент
Томского государственного университета
С.И. Борисенко

доктор физико-математических наук, профессор
Томского государственного педагогического университета
Ю.П. Кунашенко

ISBN

© ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», 2017
© Н.С. Кравченко, О.Г. Ревинская, 2017
© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Физика как естественная наука представляет собой совокупность теоретических и экспериментальных исследований. Теоретическая и экспериментальная составляющие физики развиваются взаимосвязано, взаимно дополняя друг друга. Новые экспериментальные достижения подчас требуют создания новых теорий. И наоборот, достижения в области теоретической физики создают основания для постановки новых экспериментов.

При изучении физики как учебной дисциплины важно получить навыки как экспериментальных, так и теоретических исследований. Основные навыки экспериментальных исследований в курсе общей физики приобретаются в рамках лабораторного практикума.

Основными методами экспериментальных исследований принято считать наблюдение и эксперимент.

Наблюдение – это систематическое, целенаправленное восприятие того или иного объекта, явления или процесса без воздействия на него. Наблюдение позволяет получить первоначальную информацию об изучаемом объекте, явлении или процессе.

Эксперимент – метод изучения объекта (явления, процесса), при котором исследователь активно и целенаправленно воздействует на него путем создания искусственных условий или использует естественные условия, необходимые для выявления некоторых свойств данного объекта (явления, процесса). Можно выделить следующие принципиальные отличия эксперимента по сравнению с наблюдением.

1. Эксперимент дает возможность изучения процесса, явления или объекта без влияния побочных факторов, затеняющих его основную суть.
2. В искусственных условиях эксперимента результат можно получить быстрее и точнее, чем в естественных условиях.
3. В процессе эксперимента можно проводить испытания столько раз, сколько это необходимо.

Целью эксперимента является количественное и качественное изучение определенных свойств изучаемого процесса, явления или объекта, выявление взаимосвязей между ними. Эти исследования выполняются на основе измерений.

ВИДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

В эксперименте свойства физических процессов, явлений и объектов изучаются с помощью планомерных измерений соответствующих физических величин.

Измерить какую-либо физическую величину значит сравнить ее с другой однородной ей физической величиной, принятой за единицу меры. За единицу меры длины, например, принят 1 м, массы – 1 кг и др. При измерении физических величин пользуются, разумеется, не эталонами, которые хранятся в специальных государственных метрологических учреждениях, а измерительными приборами, которые тем или иным способом сверены с эталонами.

Виды выполняемых при проведении экспериментов измерений зависят от физического характера измеряемой величины, требуемой точности измерения, необходимой скорости измерения, условий и режима измерений и т.д. Классификация видов измерений приведена на рис. 1. Несмотря на то, что существует множество видов измерений, число их постоянно увеличивается.

По количеству проводимых опытов, например, измерения можно разделить на многократные и однократные. Измерения называют ***однократными***, когда для получения значения некоторой физической величины в опыте проводят только одно измерение. Измерения называют ***многократными***, если для получения значения физической величины выполняют несколько измерений одними и теми же приборами при одних и тех же условиях.

По способу получения результата в учебной физической лаборатории обычно выделяют прямые (непосредственные) и косвенные измерения. При ***прямых измерениях*** искомое значение физической величины определяют соответствующим физическим прибором (непосредственное сравнение с эталоном). Например, длину измеряют непосредственно линейкой, температуру – термометром, силу – динамометром и т.д. Если искомое значение физической величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, полученными путем прямых измерений, то эти измерения называют ***косвенными.*** Например, объем параллелепипеда может быть найден путем умножения трех его линейных размеров (длины, ширины и высоты), которые в свою очередь измеряются непосредственно.

Рис. 1. Классификация видов измерений

По условиям измерений различают равноточные и неравноточные измерения. Если измерения какой-либо физической величины выполняются одинаковыми по точности приборами в одних и тех же условиях с одинаковой тщательностью, такие измерения считают ***равноточными***. Измерения, выполненные различающимися по точности приборами и (или) при разных условиях, называют ***неравноточными***. В учебной физической лаборатории, как правило, все измерения являются равноточными. Это связано с фиксированным набором приборов и ограниченным временем выполнения работ лабораторного практикума.

В соответствии с РМГ 29-99 (рекомендации по межгосударственной стандартизации ГСИ) различают измерения, полученные следующими методами:

1. Метод непосредственной оценки, при котором значение величины определяют непосредственно по отсчетному устройству измерительного прибора.
2. Метод сравнения с мерой, где измеряемую величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой. Например, измерение массы на рычажных весах путем уравновешивания гирями.
3. Метод дополнения, если значение измеряемой величины дополняется мерой этой же величины с таким расчетом, чтобы на прибор сравнения воздействовала их сумма, равная заранее заданному значению.
4. Дифференциальный метод характеризуется измерением разности между измеряемой величиной и известной величиной, воспроизводимой мерой. Если разность между измеряемой величиной и мерой сводится к нулю, то такой метод измерений называется нулевым.
5. Метод замещения – метод сравнения с мерой, в которой измеряемую величину замещают известной величиной, воспроизводимой мерой.
6. Нестандартизованные методы измерения. К ним можно отнести метод противопоставления (при котором измеряемая величина и величина, воспроизводимая мерой, одновременно воздействуют на прибор сравнения), метод совпадений (где разность между сравниваемыми величинами измеряют, используя совпадение отметок шкал или периодических сигналов), а также ряд других методов.

Лабораторный физический практикум помогает студентам приобрести навыки проведения экспериментальных исследований, освоить наиболее важные методы измерений физических величин, глубже осознать суть основных физических законов и явлений. Каждая из лабораторных работ физического практикума посвящена изучению определенного физического процесса, явления, объекта, и, как обязательный компонент, включает измерение той или иной физической величины, характеризующей предмет изучения. В соответствии со схемой, изображенной на рис. 1, ***измерения***, проводимые ***при выполнении лабораторных работ*** по общей физике можно характеризовать как ***равноточные, многократные или однократные, прямые или косвенные***, выполняемые с использованием различных методов измерений.

Лабораторные измерения всегда обладают некоторой неточностью (погрешностью), оценка которой является неотъемлемой составляющей любого экспериментального исследования.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Вследствие неточности измерительных приборов, несовершенства органов чувств человека, неполноты его знаний, трудности учета всех побочных явлений при многократном повторении одного и того же измерения получаются разные числовые значения изучаемой физической величины. Так бывает, даже если производить измерения в совершенно одинаковых условиях (равноточные измерения). Поэтому при практическом использовании результатов тех или иных измерений возникает вопрос об истинном значении изучаемой физической величины и о точности этих измерений.

Понятие ***«точность измерения»***, т.е. степень приближения результатов измерений к некоторому действительному значению, используется для качественного сравнения измерительных операций. Для количественной оценки используется понятие ***«погрешность измерений»***. Эти понятия тесно связаны друг с другом: чем меньше погрешность, тем выше точность. Оценка погрешности измерений – одно из важных мероприятий по обеспечению достоверности выполненных измерений.

Количество факторов, влияющих на точность измерений, достаточно велико, и любая классификация погрешностей измерений в известной мере условна. На схеме, изображенной на рис. 2, приведена одна из возможных классификаций, которая может служить основой для оценки погрешности измерений в учебной физической лаборатории. Рассмотрим некоторые из приведенных на схеме видов погрешностей подробнее.

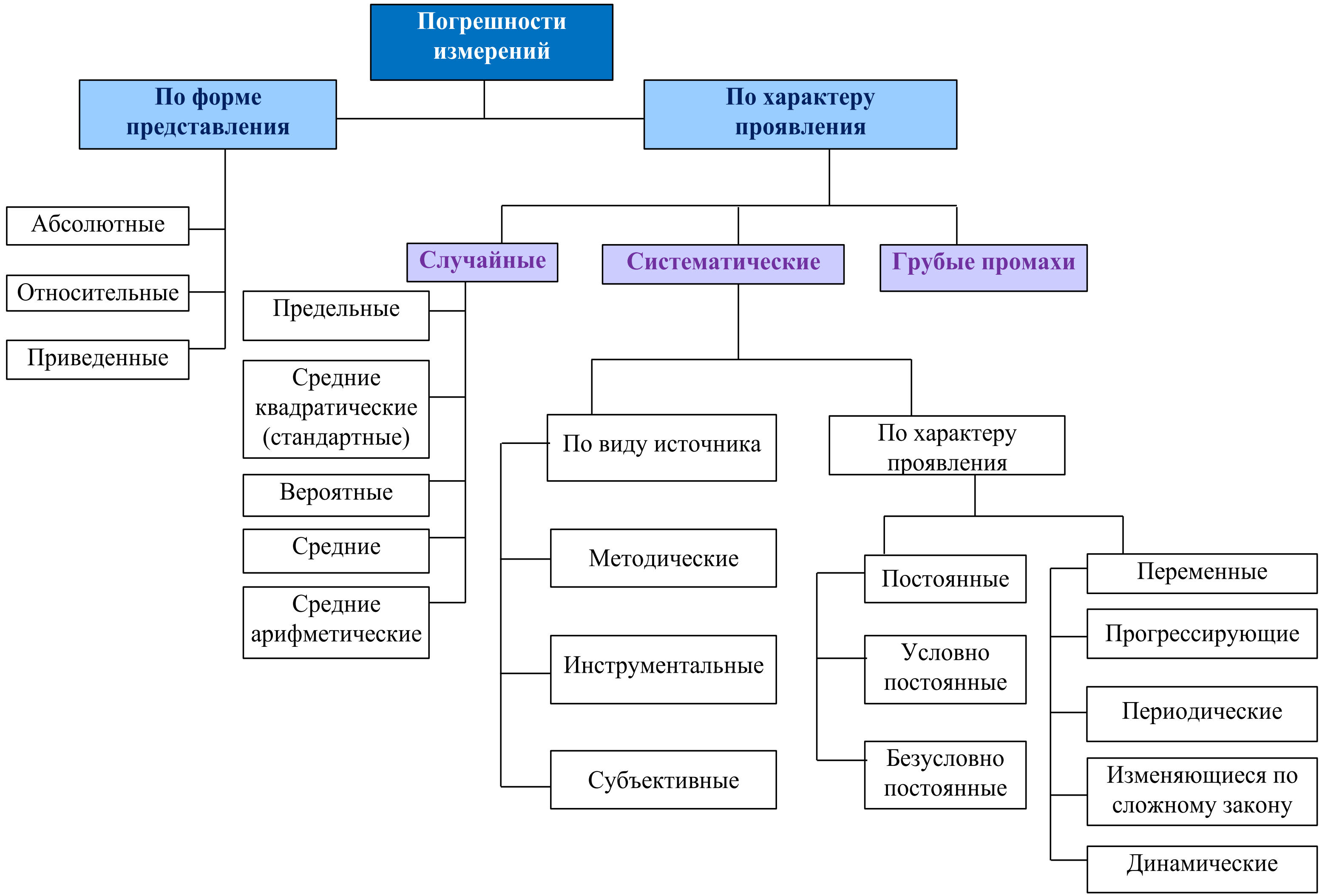


Рис. 2. Классификация погрешности измерений

Обозначим через x результат измерения некоторой физической величины, а через x_0 – ее истинное значение, которое всегда неизвестно человеку, проводящему эксперимент.

Погрешность измерения – это отклонение результата измерений x от истинного x_0 (действительного) значения измеряемой величины.

В зависимости от формы представления различают абсолютную, относительную и приведенную погрешности измерений.

Абсолютная погрешность Δx измерения определяется через разность $x_0 - x$ между истинным x_0 и измеренным x значениями физической величины. Эта разность может быть положительной или отрицательной в зависимости от того уменьшен или увеличен результат измерения по отношению к истинному значению. Под абсолютной погрешностью, обычно, понимают модуль разности $\Delta x = |x_0 - x|$ между истинным x_0 и измеренным x значениями физической величины.

Относительная погрешность δ – отношение абсолютной погрешности Δx к истинному значению x_0 или к результату измерения x. Относительная погрешность выражается в долях единицы или в процентах.

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} \text{ или } \delta = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%\,; \; \delta = \frac{\Delta x}{x_0} \text{ или } \delta = \frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\%\,.$$

Приведенная погрешность γ – отношение абсолютной погрешности Δx к нормированному значению $x_н$, также выраженное в долях единицы или в процентах: $\gamma = \frac{\Delta x}{x_н}$ или $\gamma = \frac{\Delta x}{x_н} \cdot 100\%$. В качестве нормированного значения может быть взято, например, максимальное $x_{\max}$ из возможных значений изучаемой физической величины $x_н = x_{\max}$.

По определению абсолютная Δx, относительная δ и приведенная γ погрешности всегда являются положительными, а истинное значение x_0 может отличаться от измеренного x как в большую, так и в меньшую сторону. Это записывают следующим образом (если δ и γ выражены в процентах):

$$x = x_0 \pm \Delta x,\; x = x_0 \pm x_0 \cdot \frac{\delta}{100\%},\; x = x_0 \pm x_н \cdot \frac{\gamma}{100\%}\,.$$

В зависимости от характера проявления, причин возникновения и возможностей устранения различают систематическую и случайную погрешности (составляющие погрешности) измерений, а также грубые погрешности (промахи).

Систематические погрешности – это погрешности, при которых разность между истинным и измеренным значениями физической величины сохраняет свою величину и знак от опыта к опыту при равноточных измерениях. Типичными источниками систематических погрешностей считаются:

- несовершенство используемой измерительной аппаратуры,
- несовершенство настройки измерительной аппаратуры;
- несовершенство используемого метода измерений;
- несовершенство навыков экспериментатора;
- несовершенство условий опыта;
- однотипное влияние окружающей среды.

Систематические погрешности считаются потенциально устранимыми. Чтобы избежать или уменьшить систематические погрешности необходимо критически относиться к условиям и методам исследования, совершенствуя их, применяя более точные приборы, следя за их исправностью и т.д.

Случайные погрешности – это погрешности, при которых величина и (или) знак разности между истинным и измеренным значениями физической величины изменяются от опыта к опыту при измерениях, выполненных одинаковым образом и при одинаковых условиях. Случайные погрешности обуславливаются большим числом случайных причин, действующих в каждом отдельном измерении различным, неизвестным образом. К числу таких причин относятся случайные вибрации отдельных частей прибора, кратковременные случайные изменения в окружающей среде (температурные, оптические, электрические, магнитные воздействия, изменение влажности, колебание воздуха), трение, физиологическое изменение органов чувств экспериментатора (например, утомление) и множество других причин, которые практически невозможно исключить. Предсказать величину случайной погрешности для одного измерения в принципе невозможно. Поэтому приходится повторять измерения до определенного разумного предела, а полученную совокупность экспериментальных результатов обрабатывать с помощью методов теории вероятностей и математической статистики, которые являются основой, так называемой, теории погрешностей.

Промахи или грубые погрешности – это ошибочные измерения или наблюдения, возникающие в результате небрежности при отсчете по прибору или неразборчивой записи измеренных значений, при неправильном включении прибора, или при нарушении условий, в которых должен проводиться опыт (изменение напряжения, загрязнение материала и т.д.). Такие ошибочные данные следует отбросить или сделать повторные (контрольные) измерения.

Если влияния систематических погрешностей и грубых промахов на полученные в эксперименте результаты, так или иначе, можно избежать или уменьшить, то случайные погрешности являются неустранимыми. Поэтому познакомимся с основными методами оценки случайных погрешностей при многократных равноточных прямых и косвенных измерениях физических величин в лабораторном практикуме.

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При выполнении экспериментальных исследований на значение измеряемой величины влияет множество случайных факторов, не имеющих прямого отношения к изучаемому процессу, явлению или объекту. Эти факторы (помехи) могут весьма значительно исказить результаты отдельных измерений, но при этом не иметь закономерного (постоянного) характера. Поэтому все получаемые из эксперимента величины являются случайными. Погрешности, возникающие при этом, также называют случайными. Случайные погрешности устранить нельзя, но благодаря тому, что они подчиняются закономерностям теории вероятностей, при достаточно большом количестве измерений можно указать пределы, внутри которых заключено истинное значение измеряемой величины.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайными величинами называются величины, которые в опытах, проведенных при одних и тех же условиях, могут принимать различные числовые значения. Случайная величина называется дискретной, если она может принимать в заданном диапазоне только фиксированные числовые значения. Случайная величина называется непрерывной, если она может принимать в заданном диапазоне любые значения. Так, измеряя длину стола многократно, можно, в принципе, получить непрерывный ряд различных ее значений, расположенных в некотором диапазоне. Рассмотрим основные свойства непрерывных случайных величин.

Свойства случайных величин

Проведем ***прямые многократные равноточные измерения одной и той же физической величины*** x.

Если измеряемая случайная величина x непрерывна, то в результате достаточно большого количества n измерений можно получить n ее значений x_1, x_2,…, x_n. Представим результаты измерений графически. Для этого область, в которой расположены все полученные значения, разделим на некоторое количество p интервалов одинаковой длины Δa

и подсчитаем количество значений, попавших в каждый из этих интервалов. Обозначим m_1, m_2, m_3,… m_p – количество значений, попавших, соответственно в первый, второй, и т.д. интервалы длиной Δa. Относительная частота попадания результатов измерений в какой-либо интервал $(a_i, a_i + \Delta a)$ равна $\frac{m_i}{n}$ (где i – номер интервала).

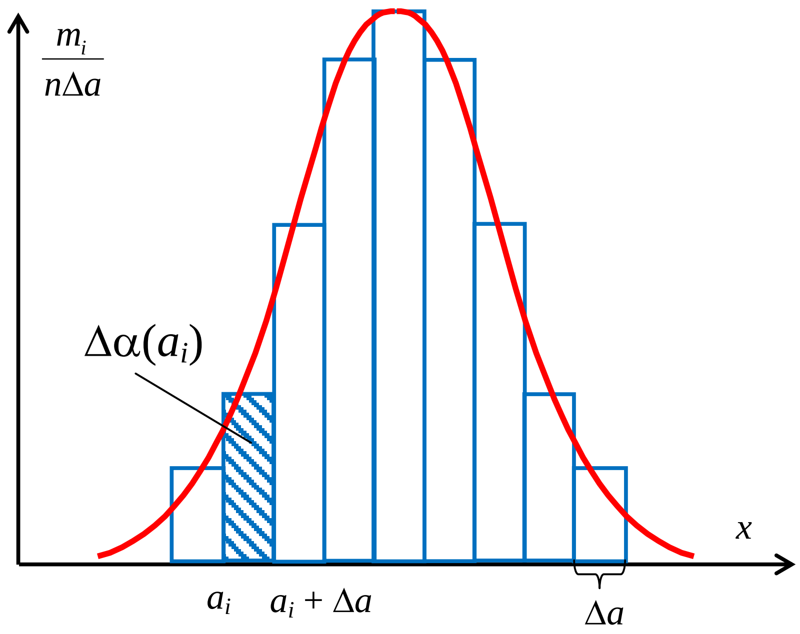


Рис. 3. Пример частотного распределения серии измерений

При построении графика ось абсцисс разобьем на конечное число граничащих друг с другом отрезков длиной Δa каждый. Над каждым отрезком $(a_i, a_i + \Delta a)$ построим прямоугольник высотой, равной относительной частоте $\frac{m_i}{n}$ попадания результатов измерений в данный интервал (или величине $\frac{m_i}{n\Delta a}$). Получившийся при этом ступенчатый график называется ***гистограммой*** (рис. 3). Такое частотное распределение позволяет наглядно изобразить результаты серии измерений. Хотя результат каждого измерения определяется случайными причинами, при большом количестве измерений эта случайность подчиняется определенному закону (рис. 3).

При большом количестве измерений ($n \to \infty$) относительную частоту $\frac{m_i}{n}$ того, что величина x принимает значения в интервале от a_i до

$a_i + \Delta a$, называют ***вероятностью***: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m_i}{n} = \Delta\alpha(a_i)$. Вероятность – безразмерная положительная величина, принимающая значения от нуля до единицы (или от 0 до 100%).

Вероятность, приходящаяся на единичный интервал (при большом количестве измерений n) $\dfrac{1}{\Delta a}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m_i}{n} = \dfrac{\Delta\alpha(a_i)}{\Delta a}$ называется ***плотностью вероятности***. С увеличением количества интервалов до бесконечности, длина каждого интервала Δa стремится к нулю. Тогда в предельном переходе (при $n \to \infty$, $\Delta a \to 0$) множество значений a_i совпадает с множеством возможных значений случайной величины x, а ступенчатая гистограмма $\dfrac{m_i}{n\Delta a}$ (рис. 3) заменится гладкой кривой $f(x)$:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta a\to 0}}\frac{m_i}{n\Delta a} = \lim_{\Delta a\to 0}\frac{\Delta\alpha(a_i)}{\Delta a} = \frac{d\alpha(a_i)}{da} = f(a_i) \Rightarrow f(x) = \frac{d\alpha(x)}{dx},$$

которая называется ***функцией распределения*** непрерывной случайной величины x. На рис. 4 приведена функция распределения $f(x)$, симметричная относительно максимума.

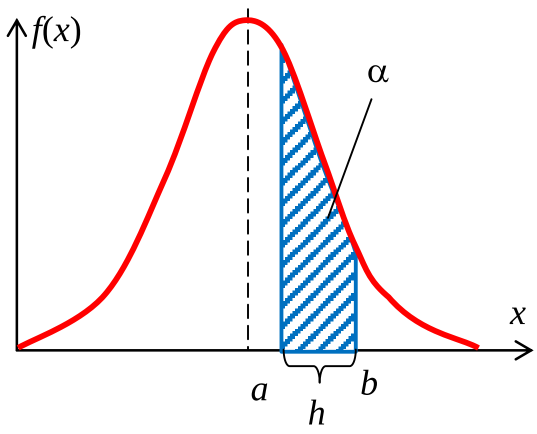


Рис. 4. Пример функции распределения непрерывной случайной величины

Следовательно, для любого бесконечно малого интервала длиной dx вероятность $d\alpha(x)$ того, что в результате измерения величины x получится значение, принадлежащее интервалу от x до $x + dx$, зависит от значения функции распределения $f(x)$ и длины dx интервала:

$$f(x) = \frac{d\alpha(x)}{dx} \Rightarrow d\alpha(x) = f(x)dx.$$

А вероятность α попадания результата измерения величины x в произвольный интервал от a до b численно равна площади под кривой функции распределения $f(x)$ на этом интервале (заштрихованный участок над отрезком длиной $h = b - a$ на рис. 4), которая вычисляется путем интегрирования функции распределения на заданном интервале:

$$\alpha = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h} f(x)dx.$$

Так как $b = a + h$, то для фиксированного значения a, чем больше длина интервала h, тем больше соответствующая ему вероятность α (тем больше площадь).

Рассмотрим интервал бесконечной длины ($a \to -\infty$, $h \to \infty$). Вероятность того, что измеряемая случайная величина принимает какое-либо значение в интервале от $-\infty$ до ∞, равна 1 (достоверное событие – событие, которое происходит всегда). Это означает, что площадь под кривой функции распределения $f(x)$ равна единице: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Это выражение называют условием нормировки функции распределения.

Рассмотрим другой предельный случай: $h \to 0$ – устремим длину интервала к нулю (т.е. зафиксируем одно конкретное значение a случайной величины x). Площадь под кривой функции распределения при этом тоже обратится в ноль. Это значит, что вероятность получить при измерении конкретное фиксированное значение непрерывной случайной величины равна нулю. То есть для непрерывной случайной величины можно указать лишь интервал ее возможных значений и вероятность ее пребывания в этом интервале.

Если вероятность получить значение данной случайной величины x в некотором интервале вычисляется с помощью функции распределения $f(x)$, то говорят, что случайная величина x подчиняется распределению, описываемому функцией $f(x)$.

Основные статистические характеристики непрерывной случайной величины

Так как поведение непрерывной случайной величины задается функцией распределения $f(x)$, которому подчиняется данная величина, то все статистические характеристики случайной величины также определяются на основе этой функции $f(x)$.

1. ***Среднее значение (математическое ожидание)*** непрерывной случайной величины определяется по формуле

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

2. ***Дисперсия*** характеризует степень рассеяния значений случайной величины относительно среднего значения. Дисперсия непрерывной случайной величины определяется следующим образом

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x} - x)^2 f(x) dx.$$

3. ***Среднеквадратичным отклонением*** называется квадратный корень из дисперсии $\sqrt{\sigma^2}$. Среднеквадратичное отклонение характеризует абсолютное значение среднего отклонения случайной величины от среднего значения.

4. ***Модой*** называется такое значение непрерывной случайной величины, вблизи которого ее значения появляются чаще всего. То есть для непрерывной случайной величины моде соответствует максимум функции распределения $f(x)$.

Таким образом, если известен аналитический вид функции распределения $f(x)$ случайной величины x, то такие статистические характеристики, как среднее значение, среднеквадратичное отклонение и наиболее вероятное значение (мода) могут быть легко подсчитаны.

Теория вероятностей изучает различные законы распределения, каждому из которых соответствует определенная функция распределения. Они получены путем обработки большого числа наблюдений за различными случайными величинами. Эти законы могут быть использованы для обработки результатов измерений, но предварительно необходимо установить, какому закону распределения подчиняется данная измеряемая (случайная) величина. Для определения типа распределения, которому подчиняется измеряемая величина, необходимо обладать квалификацией в проведении статистических исследований. Студенты младших курсов не обладают такой квалификацией. Поэтому в лабораторном практикуме курса общей физики этот вопрос изучают не студенты во время выполнения лабораторной работы, а преподаватели или методисты на этапе постановки (подготовки) соответствующей работы. Методы определения типа распределения, которому подчиняется измеряемая величина, в данном пособии не рассматриваются.

СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В теории погрешностей для анализа экспериментальных данных наиболее часто используется распределение Гаусса (нормальное распределение), распределение Стьюдента и равномерное распределение.

Закон нормального распределения (Гаусса) играет в теории погрешностей особую роль. Это связано, прежде всего, с тем, что в теории вероятностей существует центральная предельная теорема, которая утверждает, что сумма большого количества независимых случайных величин является случайной величиной, которая подчиняется нормальному распределению, даже если складываемые величины подчиняются распределениям, отличным от нормального. Результаты многократных измерений при наличии случайных погрешностей формируются под влиянием большого количества одновременно и независимо действующих физических факторов. Если никакой из этих факторов нельзя считать доминирующим, то полагают, что измеряемая величина подчиняется нормальному распределению (или распределению близкому к нормальному).

Нормальное распределение непрерывной случайной величины

Закон нормального распределения был получен К.Ф. Гауссом (1777–1855 гг). Это распределение является самым распространенным в природе, экономике и т.д. Кроме того, многие другие распределения в некоторых предельных случаях переходят в нормальное распределение.

Случайная величина x, подчиняющаяся нормальному распределению, может принимать любые значения в интервале от $-\infty$ до ∞. Для нормального распределения (закона Гаусса) функция распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\bar{x}$ – абсцисса, соответствующая максимуму функции распределения $f(x)$; σ^2 – характеризует рассеяние, разброс результатов измерений относительно наиболее вероятного значения $\bar{x}$, и называется генеральной дисперсией; $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ называют генеральным среднеквадратичным отклонением.

Основные статистические характеристики нормального распределения:

1. Функция распределения симметрична относительно точки $x = \bar{x}$.

2. Математическое ожидание, которое вычисляется как $\bar{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$, для нормального распределения совпадает с наиболее вероятным значением (модой) случайной величины.

3. Дисперсия определяется, как $\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\bar{x} - x)^2 f(x) dx$ и совпадает с генеральной дисперсией, а среднеквадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ – с генеральным среднеквадратичным отклонением.

4. Функция распределения $f(x)$ имеет максимум в точке $x = \bar{x}$, равный $f(\bar{x}) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, и две точки перегиба при $x_1 = \bar{x} - \sigma$ и $x_2 = \bar{x} + \sigma$.

5. Условие нормировки записывается в виде $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

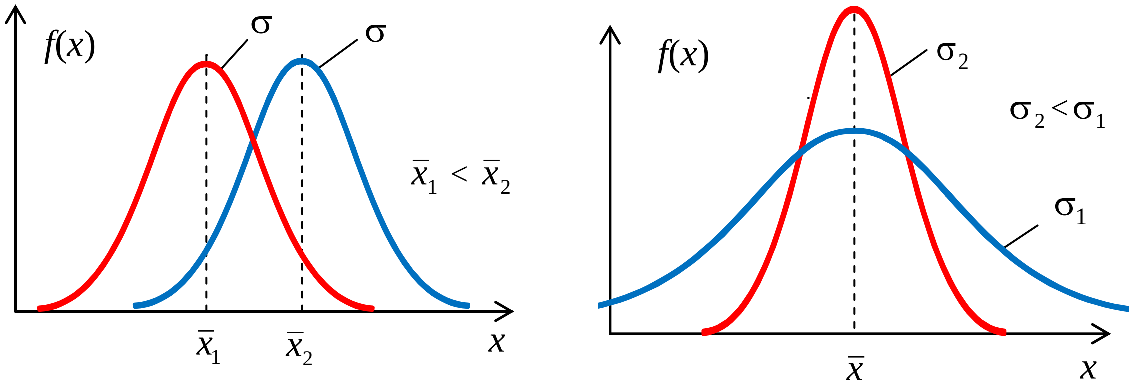
В теории погрешностей считают, что значение, появляющееся в эксперименте чаще всего (при бесконечном количестве опытов), является ***истинным значением измеряемой физической величины***. Следовательно, истинное значение x_0 является модой и для физической величины, подчиняющейся нормальному распределению, ***совпадает с математическим ожиданием*** $\bar{x}$: $x_0 = \bar{x}$.

Тогда применительно к задаче оценки погрешности экспериментальных измерений параметры нормального распределения (Гаусса) $\bar{x}$ и σ^2 можно интерпретировать следующим образом.

Выполним серию измерений некоторой физической величины, математическое ожидание (истинное значение) которой равно $\bar{x}_1$. Затем в тех же условиях тем же прибором измерим другую физическую величину, математическое ожидание (истинное значение) которой равно $\bar{x}_2$. Максимум функции распределения для второй величины будет смещен относительно максимума функции распределения первой величины (рис. 5а), а ширины графиков этих функций между точками перегиба будут одинаковыми (равными 2σ).

Если одна и та же величина измерена различными методами, например, разными приборами, то разброс результатов относительно одного и того же истинного значения $\bar{x}$, вызванный случайной погрешностью, будет разным. Если метод измерения является более точным, то разброс результатов измерений будет меньше (σ_2 меньше, чем σ_1 на рис. 5, б), и график функции распределения между точками перегиба будет уже, чем график функции распределения при менее точных измерениях.

Таким образом, среднеквадратичное отклонение σ характеризует прибор или метод измерения, а математическое ожидание $\bar{x}$ – истинное значение измеряемой величины (при бесконечном количестве опытов).



а б

Рис. 5. Распределение Гаусса (нормальное распределение)

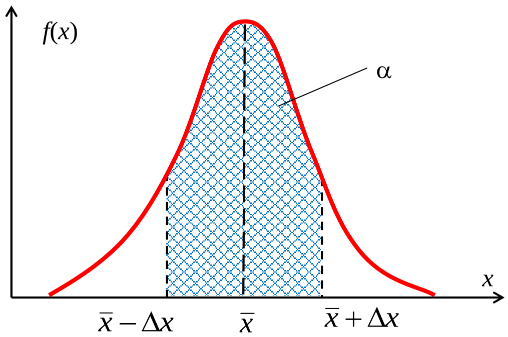


Рис. 6. Вероятность того, что измеряемая величина, подчиняющаяся нормальному распределению, лежит в интервале $(\bar{x} - \Delta x,\ \bar{x} + \Delta x)$

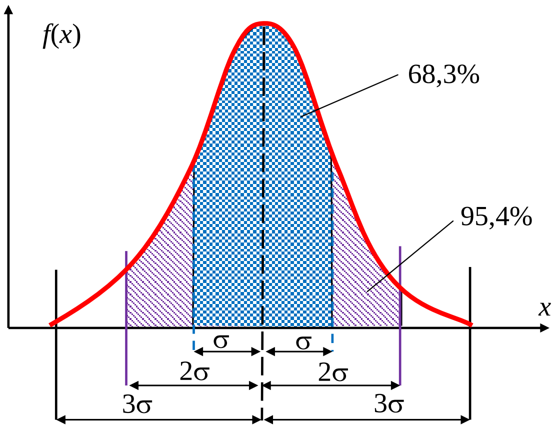


Рис. 7. Вероятность того, что измеряемая величина, подчиняющаяся нормальному распределению, лежит в интервалах $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$ относительно $\bar{x}$

Доверительная вероятность и доверительный интервал

Так как $\bar{x}$ соответствует истинному значению измеряемой величины, для экспериментальных исследований важно определить вероятность α того, что измеренные значения лежат вблизи $\bar{x}$, т.е. в некотором интервале $(\bar{x} - \Delta x,\ \bar{x} + \Delta x)$, симметричном относительно $\bar{x}$ (рис. 6). Для такого интервала Δx принято считать его длинной. Как было показано ранее, вероятность α определяется как площадь под кривой функции распределения $f(x)$ на соответствующем интервале и вычисляется путем интегрирования: $\alpha = \int\limits_{\bar{x}-\Delta x}^{\bar{x}+\Delta x} f(x)dx$. Значения вероятности того, что измеренная величина принимает значения в интервале, длина Δx которого пропорциональна σ, приведены в табл. 1. На рис. 7 представлены значения вероятности α для интервалов $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$ относительно $\bar{x}$ для нормального распределения.

Из табл. 1 не трудно заметить, что существует взаимосвязь между длиной интервала Δx и вероятностью α получить в эксперименте значения измеряемой величины в этом интервале. Если длину интервала Δx выражать через среднеквадратичное отклонение σ: $\Delta x = k_\alpha \sigma$, то можно утверждать, что коэффициент пропорциональности k_α зависит от вероятности α. Чем больше вероятность α, тем больше интервал Δx, в котором находятся измеренные значения, следовательно, тем больше коэффициент k_α.

Таблица 1

Вероятность обнаружить измеряемую величину в заданном интервале значений

Интервал $\bar{x} - k_\alpha\sigma \le x \le \bar{x} + k_\alpha\sigma$	Коэффициент k_α	Вероятность α, %
$\bar{x} - \sigma \le x \le \bar{x} + \sigma$	**1,00**	**68,3**
$\bar{x} - 1{,}282 \cdot \sigma \le x \le \bar{x} + 1{,}282 \cdot \sigma$	1,282	80,0
$\bar{x} - 1{,}44 \cdot \sigma \le x \le \bar{x} + 1{,}44 \cdot \sigma$	1,44	85,0
$\bar{x} - 1{,}645 \cdot \sigma \le x \le \bar{x} + 1{,}645 \cdot \sigma$	1,645	90,0
$\bar{x} - 1{,}96 \cdot \sigma \le x \le \bar{x} + 1{,}96 \cdot \sigma$	1,960	95,0
$\bar{x} - 2 \cdot \sigma \le x \le \bar{x} + 2 \cdot \sigma$	**2,00**	**95,4**
$\bar{x} - 2{,}577 \cdot \sigma \le x \le \bar{x} + 2{,}577 \cdot \sigma$	2,577	99,0
$\bar{x} - 2{,}81 \cdot \sigma \le x \le \bar{x} + 2{,}81 \cdot \sigma$	2,81	99,5
$\bar{x} - 3 \cdot \sigma \le x \le \bar{x} + 3 \cdot \sigma$	**3,00**	**99,7**
$\bar{x} - 3{,}292 \cdot \sigma \le x \le \bar{x} + 3{,}292 \cdot \sigma$	3,292	99,9

Так как на результаты измерения влияет множество случайных независимых факторов, не все полученные в эксперименте результаты в равной мере могут достоверно характеризовать изучаемый процесс, явление или объект. Возможна ситуация, когда влияние сторонних факторов окажется настолько значительным, что измеренное значение нельзя считать относящимся к изучаемой физической величине. Вероятность, с которой в условиях данного эксперимента полученные экспериментальные данные можно считать надежными (достоверными), называют ***доверительной вероятностью*** или ***надежностью***. Величина доверительной вероятности определяется характером производимых измерений. При выполнении учебных ***лабораторных работ в курсе общей физики*** доверительная вероятность обычно считается равной ***0,95*** (***95%***).

Интервал длиной Δx, соответствующий доверительной вероятности α, называется ***доверительным интервалом***. Доверительному интервалу длиной $\Delta x = \sigma$ (коэффициент $k_\alpha = 1$) соответствует доверительная вероятность 0,683 (68,3%). По определению вероятности 68,3% измеренных значений попадают в интервал ($\bar{x} - \sigma;\ \bar{x} + \sigma$), а остальные 31,7% находятся вне этого интервала. С другой стороны, если доверительная вероятность равна 0,954 (95,4%), это означает, что 95,4% экспериментальных значений находятся в интервале ($\bar{x} - 2\sigma;\ \bar{x} + 2\sigma$) и заслуживают доверия с этой вероятностью, а $k_\alpha = 2$.

Так как при фиксированных условиях эксперимента доверия заслуживают только результаты измерений, лежащие внутри доверительного интервала диной Δx, то абсолютная погрешность этих значений измеряемой физической величины (абсолютное отклонение измеренного значения от истинного) не превосходит длину доверительного интервала Δx. То есть ***абсолютная случайная погрешность серии экспериментальных измерений (абсолютная случайная погрешность многократных измерений)*** равна ***длине доверительного интервала*** Δx. Но для измеряемой величины, подчиняющейся нормальному распределению, абсолютная погрешность $\Delta x = k_\alpha \sigma$ определяется не только среднеквадратичным отклонение σ этой величины, но и доверительной вероятностью α данной серии экспериментов. Поэтому для характеристики абсолютной случайной погрешности многократных измерений всегда используют два числа: величину доверительного интервала Δx и величину соответствующей ему доверительной вероятности α.

Оценка истинного значения и случайной погрешности измеряемой физической величины

Когда перед исследователем стоит задача измерения конкретной физической величины, то число опытов ограничено, а параметры $\bar{x}$ и σ нормального распределения, которому подчиняется измеряемая физическая величина, неизвестны. Возникает вопрос, каким образом из ограниченного числа измерений оценить истинное значение и случайную погрешность измерений.

Предположим, что в результате n равноточных измерений получено n значений физической величины, истинное значение $x_0 = \bar{x}$ которой неизвестно, а измеряемая величина x подчиняется распределению Гаусса. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ результаты отдельных измерений, а через $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x$ – отклонения результатов измерений от истинного значения $x_0 = \bar{x}$:

$$\begin{array}{lcl} \Delta_1 x = \bar{x} - x_1, & & x_1 = \bar{x} - \Delta_1 x, \\ \Delta_2 x = \bar{x} - x_2, & & x_2 = \bar{x} - \Delta_2 x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{или} & \ldots\ldots\ldots \\ \Delta_n x = \bar{x} - x_n, & & x_n = \bar{x} - \Delta_n x,. \end{array}$$

Отклонения $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots \Delta_n x$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

По определению математическое ожидание $\bar{x}$ непрерывной случайной величины вычисляется как интеграл $\bar{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. В математической статистике интегрирование по функции распределения заменяется статистическим суммированием по всем измеренным значениям следующим образом

$$\bar{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \ldots.. + x_n}{n}.$$

Подставив $x_1 = \bar{x} - \Delta_1 x$, $x_2 = \bar{x} - \Delta_2 x \ldots x_n = \bar{x} - \Delta_n x$, получим

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots.. + x_n}{n} = \bar{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x) \text{ или } \bar{x} = \tilde{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x),$$

где

$$\tilde{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} \text{ или } \tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Величина $\tilde{x}$ называется ***средним арифметическим*** для данной серии n измерений случайной величины x.

Из симметрии кривой Гаусса видно (рис. 6), что при большом количестве измерений вероятность получить значения, близкие к значению больше истинного на $\Delta_i x$, такая же, как вероятность получить значения, близкие к значению меньше истинного на $\Delta_i x$ (т.е. для каждого отклонения $\Delta_i x$ найдется равное по модулю и противоположное по знаку). Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)\right)=0$$

– среднее значение отклонений измеряемой величины от истинного значения при большом числе измерений ($n\to\infty$) стремится к нулю. Следовательно, если число измерений достаточно велико ($n\to\infty$), а случайная величина x подчиняется распределению Гаусса, то

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{x}=\bar{x}$$

– среднее арифметическое значение результатов измерений стремится к истинному значению измеряемой величины.

Для вычисления дисперсии σ^2 функции распределения измеряемой величины x по конечному количеству измерений n аналогичным образом заменяют интегрирование статистическим суммированием

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(\bar{x}-x)^2 f(x)dx \Rightarrow \frac{(\bar{x}-x_1)^2+(\bar{x}-x_2)^2+\ldots+(\bar{x}-x_n)^2}{n}.$$

Подставив $x_1 = \bar{x} - \Delta_1 x$, $x_2 = \bar{x} - \Delta_2 x$, …, $x_n = \bar{x} - \Delta_n x$, можно получить

$$\frac{(\bar{x}-x_1)^2+(\bar{x}-x_2)^2+\ldots+(\bar{x}-x_n)^2}{n}=$$

$$=\frac{(\Delta_1 x)^2+(\Delta_2 x)^2+\ldots..+(\Delta_n x)^2}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)^2 .$$

С увеличением количества измерений ($n\to\infty$) среднее значение квадратов отклонений измеряемой величины от истинного значения стремиться к дисперсии σ^2 распределения Гаусса:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)^2\right)=\sigma^2 .$$

С другой стороны сумму $\frac{(\bar{x}-x_1)^2+(\bar{x}-x_2)^2+\ldots+(\bar{x}-x_n)^2}{n}$, которую можно также записать в виде $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2$, заменив неизвестное $\bar{x}$

на $\bar{x} = \tilde{x} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\Delta_j x)$, раскрыв квадрат и перекомпоновав слагаемые, можно записать в виде

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{x} - x_i + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\Delta_j x)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((\tilde{x} - x_i)^2 + 2(\tilde{x} - x_i)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\Delta_j x) + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}(\Delta_j x)\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\Delta_j x) + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}(\Delta_j x)\right)^2.$$

А последнее слагаемое можно расписать как:

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}(\Delta_j x)\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} const_{ij}\cdot(\Delta_i x)\cdot(\Delta_j x),$$

где через $const_{ij}$ обозначены числовые константы при соответствующих произведениях $(\Delta_i x)\cdot(\Delta_j x)$ (для $i \neq j$).

Тогда исходное выражение $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2$ можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)^2 +$$

$$+ \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\Delta_j x) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} const_{ij}\cdot(\Delta_i x)(\Delta_j x).$$

Скомпоновав подобные слагаемые, получим

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)^2 +$$

$$+ \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\Delta_j x) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} const_{ij}\cdot(\Delta_i x)(\Delta_j x),$$

а после деления на $(n - 1)/n$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)^2 +$$

$$+ \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\Delta_j x) + \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} const_{ij}\cdot(\Delta_i x)(\Delta_j x)$$

или $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)^2 = \tilde{\tilde{\sigma}}^2 + \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}-x_i)\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\Delta_j x) + $$

$$+ \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} const_{ij}\cdot(\Delta_i x)(\Delta_j x),$$

где $$\tilde{\tilde{\sigma}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}-x_i)^2 .$$

Величина $\tilde{\tilde{\sigma}}^2$ называется дисперсией, а $\tilde{\tilde{\sigma}}$ – среднеквадратичным отклонением данной серии из *n* измерений случайной величины *x*.

Так как для распределения Гаусса при большом количестве измерений ($n \to \infty$) вероятность получить значения, близкие к значению больше истинного на $\Delta_i x$, такая же, как вероятность получить значения, близкие к значению меньше истинного на $\Delta_i x$ (т.е. для каждого отклонения $\Delta_i x$ найдется равное ему по модулю и противоположное по знаку), то в полученном выражении

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)\right) = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} const_{ij}\cdot(\Delta_i x)(\Delta_j x)\right) = 0,$$

$$\text{т.е. } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)^2\right) = \lim_{n\to\infty}\tilde{\tilde{\sigma}}^2 .$$

А учитывая, что по определению $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)^2\right) = \sigma^2$, можно записать

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\tilde{\sigma}}^2 = \sigma^2 \text{ или } \lim_{n\to\infty}\tilde{\tilde{\sigma}} = \sigma .$$

Если для вычисления абсолютной случайной погрешности (доверительного интервала) использовать среднеквадратичное отклонение $\tilde{\tilde{\sigma}}$, то с увеличением количества измерений ($n \to \infty$) длина доверительного интервала $\Delta\tilde{\tilde{x}} = k_\alpha\tilde{\tilde{\sigma}}$ будет стремиться к $\Delta x = k_\alpha\sigma$ (при доверительной вероятности α). Так как при равноточных измерениях $\sigma = const$ не зависит от количества измерений, то, не смотря на то, что при увеличении количества измерений среднее арифметическое $\tilde{x}$ стремится к истинному значению $\bar{x}$ случайной величины *x*, наименьшее значение абсолютной погрешности, которое можно получить, для этой величины равно $\Delta x = k_\alpha\sigma$. Следовательно, для большого, но конечного количества измерений значение среднего арифметического будет изменяться, но внутри одного и того же доверительного интервала (при разных *n*). Это мешает сделать обоснованный вывод об истинном значении измеряемой величины, сколько бы измерений не проводилось.

Однако согласно центральной предельной теореме (из теории вероятностей) сумма n независимых случайных величин является случайной величиной, подчиняющейся распределению близкому к распределению Гаусса, не зависимо от того, какому распределению подчиняется каждая из складываемых случайных величин. Доказано, что чем больше случайных величин входит в такую сумму, тем ближе распределение, которому она подчиняется, к распределению Гаусса. При этом математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий каждой из них, а дисперсия суммы таких величин – сумме дисперсий каждой из них, не зависимо от того, каким распределениям подчиняются складываемые случайные величины.

Поэтому рассмотрим другую случайную величину: среднее арифметическое n независимых равноточных измерений. Так как равноточные измерения подчиняются одному и тому же распределению с математическим ожиданием $\bar{x}$ и дисперсией σ^2, то среднее арифметическое значение результатов таких измерений также является случайной величиной, подчиняющейся распределению Гаусса с математическим ожиданием равным $\bar{x}$ и дисперсией равной σ^2/n , которую обозначают $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2/n$ и называют дисперсией среднего значения n измерений (или $\tilde{\sigma} = \sigma/\sqrt{n}$ –***среднеквадратичное отклонение среднего значения*** n ***измерений***).

Так как при равноточных измерениях $\sigma = const$ не зависит от количества измерений, то среднеквадратичное отклонение $\tilde{\sigma}$ среднего значения с увеличением количества измерений n уменьшается. Следовательно, при увеличении количества измерений не только среднее арифметическое $\tilde{x}$ будет стремиться к истинному значению $\bar{x}$ измеряемой величины, но и доверительный интервал $\Delta\tilde{x} = k_\alpha \tilde{\sigma}$ вокруг истинного значения будет сужаться (при одной и той же доверительной вероятности α). Это позволит более достоверно определять истинное значение измеряемой величины, а также указать рациональный способ уменьшения абсолютной случайной погрешности путем увеличения количества измерений.

Поэтому при проведении конечного количества равноточных измерений в качестве оценки математического ожидания (истинного значения) функции распределения измеряемой величины используют среднее арифметическое $\tilde{x}$, а в качестве оценки среднеквадратичного отклонения этой же функции распределения – среднеквадратичное отклонение $\tilde{\sigma}$ среднего арифметического значения n измерений.

Как было показано ранее, $\sigma = \tilde{\tilde{\sigma}}$ при $n \to \infty$, тогда среднеквадратичное отклонение $\tilde{\sigma}$ можно вычислить следующим образом:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\tilde{\tilde{\sigma}}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)^2} ,$$

Этому среднеквадратичному отклонению $\tilde{\sigma}$ и доверительной вероятности α соответствует доверительный интервал $\Delta\tilde{x} = k_\alpha \tilde{\sigma}$ (абсолютная случайная погрешность n измерений).

Таким образом, для оценки истинного значения и абсолютной случайной погрешности измерений на основе конечного количества n равноточных измерений необходимо выполнить следующие вычисления

$$\tilde{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} \text{ или } \tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{(\tilde{x} - x_1)^2 + (\tilde{x} - x_2)^2 + \ldots + (\tilde{x} - x_n)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)^2}{n(n-1)}} ,$$

$$\Delta\tilde{x} = k_\alpha \tilde{\sigma}.$$

Тогда результаты серии из n равноточных измерений физической величины x записывают в виде:

$$x = \tilde{x} \pm \Delta\tilde{x} \text{ с доверительной вероятностью } \alpha$$

и считают, что истинное значение измеряемой физической величины находится на интервале $(\tilde{x} - \Delta\tilde{x}, \tilde{x} + \Delta\tilde{x})$ с доверительной вероятностью α.

При этом выбор истинного значения измеряемой величины в виде $\bar{x} = \tilde{x}$ и доверительного интервала (абсолютной случайной погрешности многократных измерений) в виде $\Delta\tilde{x} = k_\alpha \tilde{\sigma}$ предполагает, что количество измерений велико $n \geq 50$. Тогда для определения коэффициента k_α можно воспользоваться распределением Гаусса (табл. 1).

Количество измерений, достаточное для получения истинного значения измеряемой физической величины с заданной погрешностью

Так как величина доверительного интервала $\Delta\tilde{x} = k_\alpha \tilde{\sigma}$ пропорциональна среднеквадратичному отклонению среднего значения измеряемой физической величины, то чтобы истинное значение этой величины определить с погрешностью, не больше $\Delta\tilde{x}$, достаточно выполнить такое количество измерений *n*, при которых $k_\alpha\tilde{\sigma} \le \Delta\tilde{x}$. Если измеряемая величина подчиняется нормальному распределению со среднеквадратичным отклонением равным σ, то (согласно следствиям из центральной предельной теоремы теории вероятностей) среднее арифметическое значение измеряемой величины является случайной величиной, подчиняющейся распределению (близкому к нормальному) со среднеквадратичным отклонением $\tilde{\sigma} = \sigma/\sqrt{n}$. Тогда

$$k_\alpha\tilde{\sigma} \le \Delta\tilde{x} \Rightarrow k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \Delta\tilde{x} \Rightarrow \sqrt{n} \ge k_\alpha \frac{\sigma}{\Delta\tilde{x}} \text{ или } n \ge k_\alpha^2 \frac{\sigma^2}{(\Delta\tilde{x})^2}.$$

То есть, чтобы при заданной доверительной вероятности α истинное значение измеряемой в эксперименте величины определить со случайной погрешностью, не больше $\Delta\tilde{x}$, достаточно выполнить не меньше, чем $k_\alpha^2 \frac{\sigma^2}{(\Delta\tilde{x})^2}$ измерений, где коэффициент пропорциональности k_α определяется по табл. 1. Например, если измеряемая случайная величина подчиняется нормальному распределению с дисперсией $\sigma^2 = 3$ см^2, тогда чтобы при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ (при $\alpha = 95\%$ из табл. 1 $k_\alpha = 1{,}96$) определить истинное значение этой величины с погрешностью $\Delta\tilde{x}$ не больше 2 см, необходимо выполнить не меньше, чем 3 измерения, т.к. $n \ge k_\alpha^2 \frac{\sigma^2}{(\Delta\tilde{x})^2} = (1{,}96)^2 \frac{3\,\text{см}^2}{(2\,\text{см})^2} = 2{,}88 \Rightarrow$ $n \ge 2{,}88$. А если истинное значение этой величины необходимо получить с погрешностью $\Delta\tilde{x}$ не больше 1 см, то придется выполнить не меньше, чем 12 измерений, т.к. $n \ge k_\alpha^2 \frac{\sigma^2}{(\Delta\tilde{x})^2} = (1{,}96)^2 \frac{3\,\text{см}^2}{(1\,\text{см})^2} = 11{,}52 \Rightarrow$ $n \ge 11{,}52$.

Если истинное значение дисперсии σ^2 измеряемой случайной величины не известно, то при определении достаточного количества измерений $n \ge k_\alpha^2 \frac{\sigma^2}{(\Delta\tilde{x})^2}$ вместо σ^2 используют дисперсию $\tilde{\tilde{\sigma}}^2$, вычисленную по нескольким измерениям, которые проводят заранее. Так как $\tilde{\tilde{\sigma}}^2 \to \sigma^2$ только при очень большом количестве измерений, то на этапе подготовки эксперимента выполняют много (>> 20) предварительных измерений, результаты которых используют для того, чтобы вычислить дисперсию $\tilde{\tilde{\sigma}}^2$ как можно точнее, а затем с ее помощью определить количество измерений n, достаточное для получения истинного значения измеряемой величины с заданной случайной погрешностью $\Delta\tilde{x}$.

Однако при последующем выполнении измерений все же следует помнить, что если количество измерений физической величины невелико, то среднее арифметическое $\tilde{x}$ может существенно отличаться от истинного значения $x_0 = \bar{x}$ измеряемой величины, т.к. $\tilde{x} = \bar{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x)$, а при малом количестве измерений $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x) \neq 0$. На рис. 8 приведен пример расположения истинного значения $\bar{x}$ измеряемой величины и среднего арифметического $\tilde{x}$ значения, полученного из большого (но конечного) количества измерений. А при малом количестве измерений истинное значение $\bar{x}$ измеряемой величины x может оказаться ВНЕ доверительного интервала ($\tilde{x} - \Delta\tilde{x}, \tilde{x} + \Delta\tilde{x}$), длина которого вычислена через коэффициент k_α нормального распределения. В этом случае значения, близкие к истинному, будут неправомерно отнесены к недостоверным экспериментальным данным. Поэтому при малом количестве измерений n для определения доверительного интервала $\Delta\tilde{x} = k_\alpha\tilde{\sigma}$ по вероятности α пользоваться распределением Гаусса нельзя.

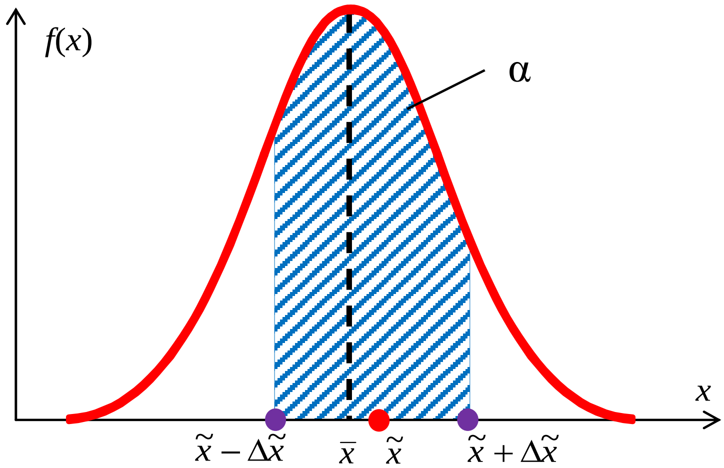


Рис. 8. Расхождение между истинным $\bar{x}$ значением измеряемой величины и средним арифметическим $\tilde{x}$, полученным из большого количества измерений

Распределение Стьюдента

При малом количестве ($2 \leq n \leq 10$) измерений доверительный интервал $\Delta\tilde{x}$ определяется с помощью распределения Стьюдента.

Предположим, что в результате n равноточных измерений случайной величины x, подчиняющейся нормальному распределению с параметрами $\bar{x}$ и σ, получены значения x_1, x_2, …, x_n. Английский математик и химик В.С. Госсет (псевдоним Стьюдент) в 1908 году рассмотрел случайную величину вида

$$t = \frac{\bar{x} - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}},$$

где $\tilde{\sigma}$ – среднеквадратичное отклонение среднего арифметического значения $\tilde{x}$ для данной серии из n равноточных измерений.

Значения $\tilde{x}$ и $\tilde{\sigma}$ зависят от количества измерений n. Поэтому при количестве n_1 измерений величина t принимает числовое значение t_1, при n_2 – значение t_2 и т.д. Стьюдент получил функцию распределения $S_n(t)$ случайной величины t, зависящую от n и t (в этом пособии явный вид функции $S_n(t)$ не приводится). Закон Стьюдента – это закон распределения отклонений среднего арифметического от истинного значения для n измерений случайной величины, подчиняющейся нормальному (Гауссовскому) распределению. Эта функция распределения имеет максимум при $t = 0$, когда $\bar{x} = \tilde{x}$. На рис. 9 приведен график функции распределения Стьюдента.

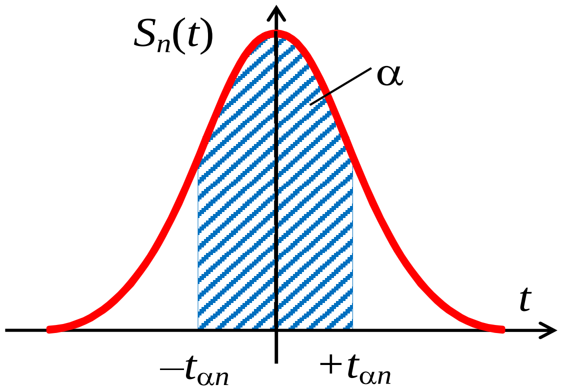


Рис. 9. Распределение Стьюдента

Как и для других случайных величин, вероятность α того, что величина t принимает значение из интервала от $-t_{\alpha n}$ до $+t_{\alpha n}$ (площадь заштрихованной фигуры на рис. 9), вычисляется с помощью функции распределения Стьюдента $S_n(t)$ следующим образом:

$$\alpha = \int_{-t_{\alpha n}}^{+t_{\alpha n}} S_n(t)dt.$$

Границы $t_{\alpha n}$ интервала $(-t_{\alpha n}, t_{\alpha n})$, в который случайная величина t, возникающая при n равноточных измерениях и подчиняющаяся распределению Стьюдента, попадает с доверительной вероятностью α, называются ***коэффициентами Стьюдента***. В табл. 2 приведены коэффициенты Стьюдента для разных значений доверительной вероятности α и количества n измерений.

В пределе при $n \to \infty$ распределение Стьюдента переходит в нормальное (распределение Гаусса). При одинаковой доверительной вероятности α коэффициенты $t_{\alpha n}$ совпадают (с точностью до второго десятичного знака после запятой) с коэффициентами k_α распределения Гаусса уже при $n \geq 50$. Для малого количества измерений (при одной и той же доверительной вероятности) коэффициенты $t_{\alpha n}$ и k_α существенно отличаются ($t_{\alpha n} > k_\alpha$ при $n < \infty$).

Таблица 2

Коэффициенты Стьюдента (часть полной таблицы)

Количество измерений n	Доверительная вероятность α, %			
	90	95	99	99,9
2	6,31	12,71	63,66	636,62
3	2,92	4,30	9,92	31,60
4	2,35	3,18	5,84	12,92
5	2,13	2,78	4,60	8,61
6	2,02	2,57	4,03	6,87
7	1,94	2,45	3,71	5,96
8	1,89	2,36	3,50	5,41
9	1,86	2,31	3,36	5,04
10	1,83	2,26	3,25	4,78
15	1,76	2,14	2,98	4,14
20	1,73	2,09	2,86	3,88
∞	1,645	1,960	2,577	3,292

Каждому значению переменной t (для серии из n равноточных измерений) соответствует определенное значение $\bar{x} - \tilde{x}$ отклонения среднего арифметического от истинного значения измеряемой величины

$$t = \frac{\bar{x} - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}} \Rightarrow \bar{x} - \tilde{x} = t\tilde{\sigma}.$$

Если для данного количества n измерений случайная величина t с вероятностью α принимает значение в интервале от $-t_{\alpha n}$ до $+t_{\alpha n}$

$$-t_{\alpha n} \leq t \leq t_{\alpha n},$$

то для этих же измерений случайная величина $\bar{x} - \tilde{x}$ с той же вероятностью принимает значения в интервале от $-t_{\alpha n}\tilde{\sigma}$ до $+t_{\alpha n}\tilde{\sigma}$, соответственно

$$-t_{\alpha n} \le t \le t_{\alpha n} \Rightarrow -t_{\alpha n} \le \frac{\bar{x} - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}} \le t_{\alpha n} \Rightarrow -t_{\alpha n}\tilde{\sigma} \le \bar{x} - \tilde{x} \le t_{\alpha n}\tilde{\sigma}.$$

Тогда $$\bar{x} - t_{\alpha n}\tilde{\sigma} \le \tilde{x} \le \bar{x} + t_{\alpha n}\tilde{\sigma} \text{ или } \bar{x} - \Delta\tilde{x} \le \tilde{x} \le \bar{x} + \Delta\tilde{x},$$

где $\Delta\tilde{x} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}$.

То есть, каждому доверительному интервалу длиной $t_{\alpha n}$ случайной величины t соответствует доверительный интервал длиной $\Delta\tilde{x} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}$ для среднего арифметического $\tilde{x}$ значения для той же доверительной вероятности α и количества измерений n случайной величины x, что и для случайной величины t.

Сравнивая значения коэффициентов Стьюдента $t_{\alpha n}$ при разных n с коэффициентами $k_\alpha = t_{\alpha\infty}$ (табл. 2), легко заметить, что доверительный интервал $\Delta\tilde{x} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}$, вычисленный с помощью коэффициента Стьюдента для малого количества измерений, значительно шире, чем доверительный интервал $\Delta\tilde{x} = k_\alpha\tilde{\sigma}$, вычисленный с помощью коэффициента нормального распределения (при одинаковых α). Например, при $\alpha = 0{,}95$ (95%) для трех измерений доверительный интервал $\Delta\tilde{x} = t_{\alpha 3}\tilde{\sigma} = 4{,}30\cdot\tilde{\sigma}$ в 2,19 раза шире, чем $\Delta\tilde{x} = k_\alpha\tilde{\sigma} = 1{,}96\cdot\tilde{\sigma}$. Поэтому использование коэффициентов Стьюдента для вычисления длины доверительного интервала позволяет избежать неправомерного отбрасывания значений, близких к истинному, при малом количестве измерений, как это происходило при вычислении доверительного интервала через коэффициент нормального распределения. При большом количестве измерений ($n \to \infty$) значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha n}$ стремится к значению коэффициента k_α нормального распределения (при одной и той же доверительной вероятности). Поэтому и при большом, и при малом количестве измерений абсолютную случайную погрешность (доверительный интервал) $\Delta\tilde{x}$ можно вычислять, используя не коэффициент k_α нормального распределения, а коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$:

$$\Delta\tilde{x} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}.$$

Это повысит вероятность того, что истинное значение измеряемой величины будет действительно находиться внутри полученного доверительного интервала.

Тогда на основе соотношения $\Delta\tilde{x} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}$ также как и для нормального распределения можно определить, какое количество измерений необходимо выполнить, чтобы случайная погрешность определения истинного значения случайной величины не превышала $\Delta\tilde{x}$. Для этого $t_{\alpha n}\tilde{\sigma}$ должно быть не больше, чем $\Delta\tilde{x}$:

$$t_{\alpha n}\tilde{\sigma} \le \Delta\tilde{x}.$$

Так как при равноточных измерениях для вычисления среднего арифметического используются n значений случайной величины, подчиняющейся одному и тому же распределению со среднеквадратичным отклонением σ, то среднеквадратичное отклонение среднего арифметического значения равно $\tilde{\sigma} = \sigma / \sqrt{n}$. Тогда количество измерений n, достаточное для определения истинного значения измеряемой величины со случайной погрешностью, не превышающей $\Delta\tilde{x}$, при заданной доверительной вероятности α, должно удовлетворять следующему неравенству:

$$t_{\alpha n}\tilde{\sigma} \le \Delta\tilde{x} \Rightarrow t_{\alpha n}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \Delta\tilde{x} \text{ или } \frac{t_{\alpha n}}{\sqrt{n}} \le \frac{\Delta\tilde{x}}{\sigma}.$$

Для нахождения количества измерений n, удовлетворяющего этому неравенству, обычно используют таблицу, аналогичную табл. 2, в которой значения коэффициентов Стьюдента $t_{\alpha n}$ заменены их значениями, деленными на $\sqrt{n}$ (табл. 3) для каждой доверительной вероятности α.

Практически, чтобы определить достаточное количество измерений n, необходимо разделить допустимую погрешность $\Delta\tilde{x}$ на среднеквадратичное отклонение σ распределения, которому подчиняется измеряемая величина: $\Delta\tilde{x}/\sigma$. Далее полученное значение следует сравнить со значениями отношения $t_{\alpha n}/\sqrt{n}$, приведенными в табл. 3, и определить наименьшее количество измерений n, начиная с которого для заданной доверительной вероятности α значение $t_{\alpha n}/\sqrt{n}$ перестает превосходить $\Delta\tilde{x}/\sigma$.

Например, пусть измеряемая случайная величина подчиняется распределению с дисперсией $\sigma^2 = 3$ см^2, тогда чтобы при доверительной вероятности α = 0,95 (95%) определить истинное значение этой величины со случайной погрешностью $\Delta\tilde{x}$ не больше 2 см, необходимо вычислить $\frac{\Delta\tilde{x}}{\sigma} = \frac{2\,\text{см}}{\sqrt{3\,\text{см}^2}} = 1{,}15$. Из табл. 3 видно, что для данной доверительной вероятности необходимо выполнить не менее 6 измерений, т.к. начиная с $n = 6$ отношение $t_{\alpha n}/\sqrt{n}$ = 1,049 < 1,15 (при α = 95%). А если истинное значение этой же измеряемой величины необходимо получить со случайной погрешностью $\Delta\tilde{x}$ не больше 1 см, то $\dfrac{\Delta\tilde{x}}{\sigma} = \dfrac{1\text{см}}{\sqrt{3\text{см}^2}} = 0{,}577$, и придется выполнить не меньше, чем 14 измерений, т.к. только начиная с $n = 14$ отношение $t_{\alpha n}/\sqrt{n} = 0{,}577 \le \Delta\tilde{x}/\sigma$ (при α = 95%).

Таблица 3

Коэффициенты Стьюдента, деленные на корень квадратный количества измерений, $t_{\alpha n}/\sqrt{n}$ (часть полной таблицы)

Количество измерений n	Доверительная вероятность α, %			
	90	95	99	99,9
2	4,46	8,99	45,01	450,2
3	1,69	2,49	5,73	18,24
4	1,18	1,59	2,92	6,46
5	0,953	1,24	2,06	3,85
6	0,823	1,049	1,65	2,80
7	0,734	0,925	1,40	2,25
8	0,670	0,836	1,24	1,91
9	0,620	0,769	1,12	1,68
10	0,580	0,715	1,028	1,51
13	0,494	0,604	0,847	1,20
14	0,473	0,577	0,805	1,13
15	0,455	0,554	0,769	1,069
20	0,387	0,468	0,640	0,868
∞	0,000	0,000	0,000	0,000

Если истинное значение дисперсии σ^2 измеряемой случайной величины неизвестно, то при определении достаточного количества измерений $\dfrac{t_{\alpha n}}{\sqrt{n}} \le \dfrac{\Delta\tilde{x}}{\sigma}$ (как и для нормального распределения) вместо σ используют среднеквадратичное отклонение $\tilde{\tilde{\sigma}}$, вычисленное по нескольким измерениям, которые проводят заранее. Так же как и при использовании нормального распределения для повышения корректности замены σ на $\tilde{\tilde{\sigma}}$ следует выполнить большое количество предварительных опытов, по результатам которых вычисляется $\tilde{\tilde{\sigma}}$.

Следует отметить, что при выполнении учебных лабораторных работ на младших курсах вузов определение количества измерений, достаточного для получения результата с определенной погрешностью, как правило, осуществляется на этапе подготовки эксперимента преподавателем или методистом. Хотя студенты, выполняющие лабораторные работы, самостоятельно не определяют, какое количество измерений изучаемой величины необходимо выполнить, они должны иметь представление, на каком основании им рекомендовано сделать указанное количество измерений этой величины.

Случайная погрешность многократных измерений (выводы)

Изложенные выше рассуждения проводились для определения случайной погрешности прямых многократных равноточных измерений. Подчеркнем случайный характер анализируемой погрешности, обозначив соответствующий доверительный интервал через $\Delta\tilde{x}_{СЛ}$.

Итак, для оценки случайной погрешности прямых многократных равноточных измерений некоторой величины x необходимо выполнить следующие расчеты:

1. Вычислить среднее арифметическое значение результатов измерений $\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
2. Вычислить среднеквадратичное отклонение

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{(\tilde{x}-x_1)^2 + (\tilde{x}-x_2)^2 + \ldots + (\tilde{x}-x_n)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}-x_i)^2}{n(n-1)}}.$$

3. Выбрать доверительную вероятность $\alpha = 0{,}95$ (для большинства лабораторных работ в курсе общей физики).
4. По таблице определить коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$.
5. Определить доверительный интервал (абсолютную случайную погрешность серии многократных равноточных измерений)

$$\Delta\tilde{x}_{СЛ} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}.$$

6. Записать результат в виде:

$x = \tilde{x} \pm \Delta\tilde{x}_{СЛ}$ с доверительной вероятностью α.

ПОГРЕШНОСТЬ ОДНОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При единичных (однократных) измерениях также существует определенная вероятность получить неточный результат. Эта вероятность связана, в частности, с точностью используемых измерительных приборов. В этом случае результат однократных измерений – это случайная величина подчиняется равномерному распределению.

Равномерное распределение непрерывной случайной величины

При равномерном распределении различные значения непрерывной случайной величины x появляются в заданном диапазоне с одинаковой вероятностью, а функция распределения $f(x)$ этой случайной величины имеет постоянное значение на некотором интервале (a, b) и равна нулю вне этого интервала (рис. 10).

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a < x < b; \\ 0, & \text{при } x > b. \end{cases}$$

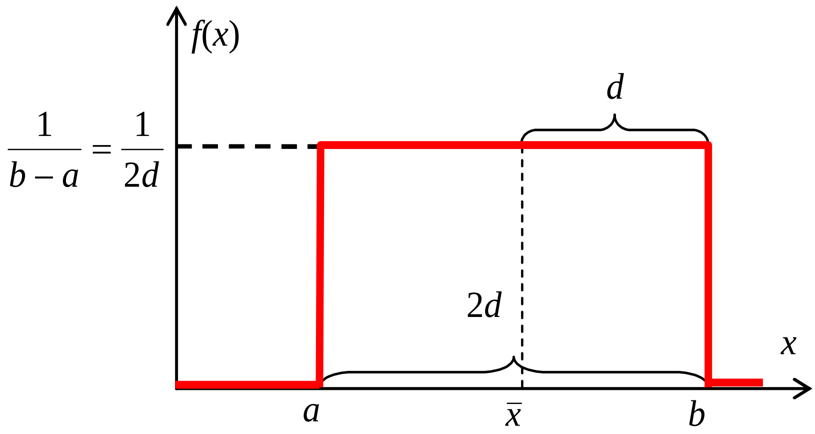


Рис. 10. Равномерное распределение

Математическое ожидание $\bar{x}$ для этого закона распределения равно

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}.$$

Для равномерного распределения условие нормировки записывается в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = 1.$$

Обозначим длину интервала (a, b) через $2d$: $b - a = 2d$. Тогда d называют ***параметром равномерного распределения***. Границы интервала, внутри которого функция распределения $f(x)$ отлична от нуля, теперь можно выразить через параметр распределения: $a = \bar{x} - d$, $b = \bar{x} + d$. А значение функции распределения на интервале (a, b) можно записать в виде $f(x) = \dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{2d}$.

Дисперсия для равномерного распределения равна

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x} - x)^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (\bar{x} - x)^2 dx = \frac{1}{2d} \int_{\bar{x}-d}^{\bar{x}+d} (\bar{x} - x)^2 dx = \frac{d^2}{3} .$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{d}{\sqrt{3}} = 0{,}577 \cdot d .$$

Для сравнения оценим вероятность α того, что измеряемая величина x лежит в интервале $(\bar{x} - \sigma,\ \bar{x} + \sigma)$:

$$\alpha = \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} f(x) dx = \frac{1}{2d} \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} dx = \frac{\sigma}{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577 \, (\text{или } 57{,}7\%).$$

Обратим внимание, что в случае нормального распределения, вероятность того, что случайная величина x будет лежать в интервале $(\bar{x} - \sigma,\ \bar{x} + \sigma)$, была равна 68,3% (табл. 1), а для равномерного распределения эта вероятность оказалась равной 57,7%.

Нетрудно определить, что вероятность получить значение случайной величины x в интервале $(\bar{x} - 0{,}95d,\ \bar{x} + 0{,}95d)$, равна 95%:

$$\alpha = \int_{\bar{x}-0{,}95d}^{\bar{x}+0{,}95d} f(x) dx = \frac{1}{2d} \int_{\bar{x}-0{,}95d}^{\bar{x}+0{,}95d} dx = \frac{0{,}95d}{d} = 0{,}95 \, (\text{или } 95\%).$$

То есть случайная величина, подчиняющаяся равномерному распределению, с вероятностью α попадает в интервал $(\bar{x} - \alpha d,\ \bar{x} + \alpha d)$ длиной αd.

Значит, доверительной вероятности α соответствует доверительный интервал $\Delta\tilde{x}_{ОИ}$, в который с этой вероятностью попадают значения случайной величины x, подчиняющейся равномерному распределению, имеющему параметр d. Длина доверительного интервала при этом равна произведению доверительной вероятности α на параметр равномерного распределения d: $\Delta\tilde{x}_{ОИ} = \alpha d$ или $\Delta\tilde{x}_{ОИ} = 0{,}95d$ для $\alpha = 0{,}95$ (95%).

Так как однократные измерения подчиняются равномерному распределению, то доверительный интервал $\Delta\tilde{x}_{ОИ} = \alpha d$, соответственно, называют ***абсолютной погрешностью однократных измерений***.

Абсолютная погрешность однократных измерений связана с точностью используемых в эксперименте измерительных приборов.

Способы определения погрешности однократных измерений

Погрешность однократных измерений $\Delta\tilde{x}_{ОИ}$ определяется погрешностью отсчета $\Delta\tilde{x}_{ОТ}$ и погрешностью прибора $\Delta\tilde{x}_{ПР}$, используемого для измерений.

Случайная погрешность отсчета

Для определения значения измеряемой величины приборы оснащаются шкалами с подвижными указателями (аналоговые приборы) или цифровыми табло (цифровые приборы).

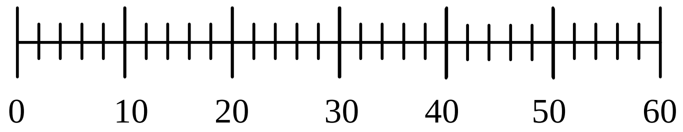


Рис. 11. Пример шкалы измерительного прибора (без указателя)

Под шкалой понимают пронумерованную последовательность делений (рис. 11), снабженную подвижным указателем. Шкалы бывают равномерные, неравномерные и частично неравномерные. В учебных экспериментах чаще всего используют приборы с равномерной шкалой. Если прибор имеет шкалу, то погрешность отсчета для такого прибора связана с его ценой деления. *Цена деления (Ц) прибора* – значение измеряемой величины, соответствующее самому малому делению шкалы вблизи положения указателя. При выполнении отсчета по шкале экспериментатор должен определить, с каким делением шкалы совпадает (или к какому делению шкалы ближе расположен) указатель прибора.

У цифровых приборов измерительная шкала отсутствует. Случайная погрешность отсчета по такому прибору связана с количеством разрядов, отображаемых на табло прибора.

Для аналоговых (шкальных) и цифровых приборов погрешность отсчета связана с необходимостью округлением измеряемой величины, которую выполняет либо экспериментатор, либо сам прибор. Считается, что погрешности округления подчиняются равномерному распределению. Перечислим основные способы определения ***параметра равномерного распределения*** $d_{ОТ}$, которому подчиняется погрешность отсчета по прибору при однократных измерениях:

1. Если указатель значения измеряемой величины может занимать любое положение между делениями на шкале прибора (линейки, рулетки, микрометра, стрелочных весов, термометра и т.п.), в этом случае параметр равномерного распределения для погрешности отсчета по шкале равен половине цены деления прибора $d_{OT} = Ц/2$. Например: цена деления барабана микрометра равна 0,01 мм, линейки – 1 мм. Тогда параметр равномерного распределения для микрометра: $d_{OT} = 0{,}5 \cdot Ц = 0{,}005$ мм, для линейки: $d_{OT} = 0{,}5 \cdot Ц = 0{,}5$ мм.

2. Если указатель значения измеряемой величины может занимать определенные (дискретные) положения, совпадающее с делениями шкалы (например, нониус штангенциркуля и т.п.), то параметр равномерного распределения погрешности отсчета по такому прибору равен цене деления прибора $d_{OT} = Ц$. Например, цена деления нониуса штангенциркуля равна 0,05 мм, тогда параметр равномерного распределения погрешности отсчета по шкале штангенциркуля равен $d_{OT} = Ц = 0{,}05$ мм.

3. Если измерения выполняются цифровым прибором (например, электронными часами, секундомером, цифровыми измерителями напряжений, счетчиками импульсов и т.п.), то параметр равномерного распределения погрешности отсчета по такому прибору равен половине последнего разряда, отображаемого на табло прибора. Например, если электронный секундомер показывает значение 00:00:03.23, то параметр равномерного распределения для него равен $d_{OT} = 0{,}005$ с.

4. В некоторых экспериментах параметр равномерного распределения погрешности отсчета может в несколько раз превосходить цену деления используемого прибора. Например, при измерении больших расстояний малой мерой (линейкой) для получения одного значения прибор прикладывается несколько раз. При каждом применении прибора присутствует погрешность равная цене деления прибора. Тогда параметр равномерного распределения d_{OT} при таких измерениях во столько раз больше цены деления прибора $Ц$, сколько раз k его приходилось прикладывать, чтобы измерить одно расстояние: $d_{OT} = kЦ$.

Приборы, не имеющие внутреннего технического устройства, обладают только погрешностью отсчета, описываемой соответствующим параметром равномерного распределения. Остальные измерительные приборы кроме погрешности отсчета обладают погрешностью, связанной с внутренним техническим устройством прибора, которая называется случайной погрешностью прибора.

Случайная погрешность прибора

Погрешность прибора – это погрешность, вносимая в показания прибора элементами его внутреннего технического устройства. Например, внутреннее техническое устройство имеется у электроизмерительных приборов, таких как вольтметры, амперметры, у электронных приборов, таких как электронные весы и т.д. Если погрешность прибора носит систематический (постоянный) характер, то такой прибор нуждается в правильной настройке или ремонте. Случайные погрешности прибора, как правило, связаны с нерегулярным воздействием условий эксплуатации прибора на отдельные элементы его внутреннего технического устройства. В технической документации к приборам всегда указывается, в каких условиях (температуре, влажности, освещенности, уровне электромагнитных излучений и т.д.) рекомендуется эксплуатировать данный прибор. Эти условия называются нормальными. Соблюдение нормальных условий не исключает случайную погрешность прибора. Но при этих условиях случайная погрешность прибора минимальна и соизмерима с погрешностью отсчета.

В качестве характеристики случайной погрешности прибора при нормальных условиях используют *класс точности прибора* – значение приведенной погрешности γ для наибольшего $x_{\max}$ и (или) наименьшего $x_{\min}$ значений, которые можно измерить данным прибором. В качестве нормирующего значения $x_н$ для вычисления приведенной погрешности γ, как правило, используется наибольшее $x_{\max}$ доступное для измерения значение. Погрешности измерения значений, близких к наибольшим, и значений, близких к наименьшим, выполненные одним и тем же прибором могут отличаться. Для большинства приборов абсолютная погрешность $\Delta x_{ПР}$ изменяется от $\Delta x_{\min}$ до $\Delta x_{\max}$ по линейному закону

$$\Delta x_{ПР} = \Delta x_{\max} - \frac{\Delta x_{\max} - \Delta x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}(x_{\max} - x).$$

При $x = x_{\min}$ абсолютная погрешность прибора равна $\Delta x_{ПР} = \Delta x_{\min}$, а при $x = x_{\max}$, соответственно, $\Delta x_{ПР} = \Delta x_{\max}$.

Учитывая известную связь между абсолютной и приведенной погрешностями

$$\gamma_{x\min} = \frac{\Delta x_{\min}}{x_{\max}} \Rightarrow \Delta x_{\min} = \gamma_{x\min} \cdot x_{\max}; \ \gamma_{x\max} = \frac{\Delta x_{\max}}{x_{\max}} \Rightarrow \Delta x_{\max} = \gamma_{x\max} \cdot x_{\max},$$

можно выразить абсолютную погрешность прибора

$$\Delta x_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot x_{\max} - (\gamma_{x\max} - \gamma_{x\min}) \frac{x_{\max}}{x_{\max} - x_{\min}}(x_{\max} - x)$$

и показать, что

$$\Delta x_{ПР} = \Delta x_{\min} = \gamma_{x\min} \cdot x_{\max} \text{ при } x = x_{\min},$$

$$\text{а } \Delta x_{ПР} = \Delta x_{\max} = \gamma_{x\max} \cdot x_{\max} \text{ при } x = x_{\max}.$$

Тогда относительная погрешность прибора $\delta_{ПР} = \Delta x_{ПР} / x$ зависит от измеряемого значения следующим образом

$$\delta_{ПР} = \frac{\Delta x_{ПР}}{x} = \gamma_{x\max} \cdot \frac{x_{\max}}{x} - (\gamma_{x\max} - \gamma_{x\min}) \frac{x_{\max}}{x_{\max} - x_{\min}} \left(\frac{x_{\max}}{x} - 1 \right).$$

Легко заметить, что при $x = x_{\max}$ относительная $\delta_{ПР}$ погрешность прибора равна $\delta_{ПР} = \gamma_{x\max}$, а при $x = x_{\min}$, соответственно, $\delta_{ПР} = \gamma_{x\min} \dfrac{x_{\max}}{x_{\min}}$.

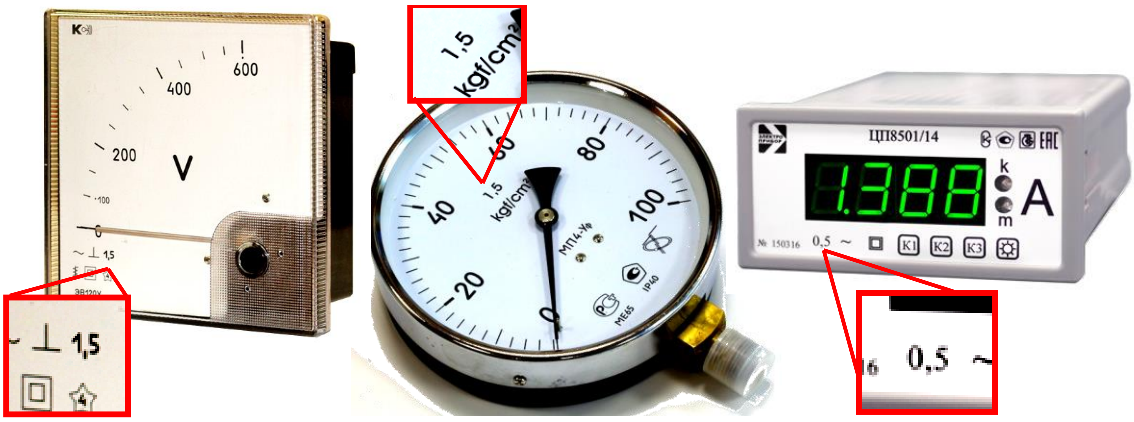
Для $x_{\min} = 0$ (шкала измерительного прибора начинается с нуля) формулы для вычисления абсолютной и относительной погрешностей несколько упрощаются:

$$\Delta x_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot x_{\max} - (\gamma_{x\max} - \gamma_{x\min}) \cdot (x_{\max} - x),$$

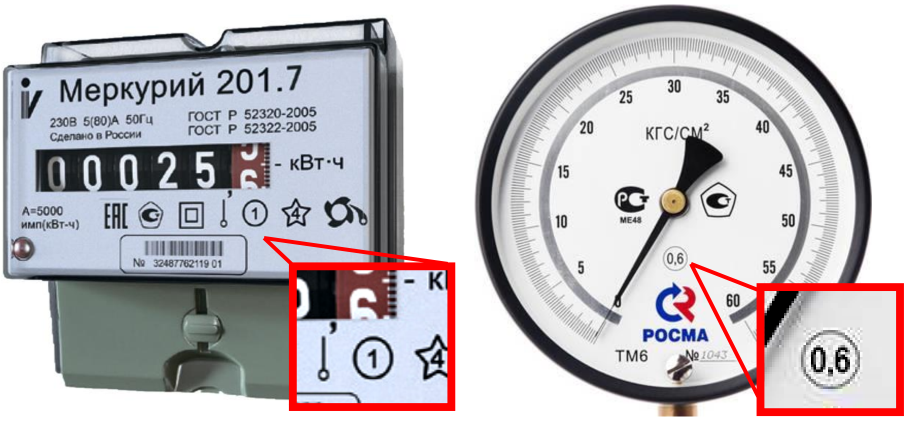
$$\delta_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot \frac{x_{\max}}{x} - (\gamma_{x\max} - \gamma_{x\min}) \cdot \left(\frac{x_{\max}}{x} - 1 \right).$$

Так как и абсолютная $\Delta x_{ПР}$, и относительная $\delta_{ПР}$ погрешности прибора выражаются через приведенные погрешности $\gamma_{x\max}$ и $\gamma_{x\min}$, то для обозначения класса точности используют значения $\gamma_{x\max}$ и (или) $\gamma_{x\min}$, выраженные в процентах.

Если $\gamma_{x\min} = \gamma_{x\max}$, то относительная погрешность прибора равна $\delta_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot \dfrac{x_{\max}}{x}$, а абсолютная погрешность прибора $\Delta x_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot x_{\max}$ постоянна (одинакова) во всем диапазоне измерений. Для обозначения класса точности таких приборов достаточно одного числа, равного $\gamma_{x\max} \cdot 100\%$. Это число указывается на шкале (рис. 12, а) или корпусе прибора (без обрамления и символа %). Для некоторых приборов этого типа ($\gamma_{x\min} = \gamma_{x\max}$) в качестве нормирующего значения приведенной погрешности $\gamma_{x\max}$ вместо $x_н = x_{\max}$ используют $x_н = x_{\max} - - x_{\min} = x_{\max} + |x_{\min}|$ (длину шкалы прибора при $x_{\min} < 0$). Тогда $\delta_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{x}$, $\Delta x_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot (x_{\max} - x_{\min})$, а класс точности таких приборов также обозначается одним числом (без обрамления), равным $\gamma_{x\max} \cdot 100\%$, но под ним изображается дополнительный символ $\vee$.



а



б

Рис. 12. Примеры приборов, класс точности которых обозначается (а) одним числом без обрамления, (б) одним числом в обрамлении окружности

Если $\gamma_{x\min} = 0$, то абсолютная и относительная погрешности прибора выражаются следующим образом: $\Delta x_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot \dfrac{x_{\max}}{x_{\max} - x_{\min}} (x - x_{\min})$, $\delta_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot \dfrac{x_{\max}}{x_{\max} - x_{\min}} \left(1 - \dfrac{x_{\min}}{x}\right)$. При $x_{\min} = 0$ (наименьшее значение, которое может быть измерено данным прибором равно нулю) относительная погрешность прибора $\delta_{ПР} = \gamma_{x\max}$ постоянна (одинакова) во всем диапазоне измерений, а абсолютная погрешность $\Delta x_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot x$ пропорциональна измеряемой величине. Для обозначения класса точности таких приборов также достаточно одного числа, равного $\gamma_{x\max} \cdot 100\%$. Но на шкале (рис. 12, б) или корпусе прибора это число указывается в обрамлении окружности (также без символа %). Следует отметить, что приборы, для которых наименьшее измеряемое значение отлично от нуля ($x_{\min} \neq 0$), как правило, не могут иметь $\gamma_{x\min} = 0$.

В остальных случаях на шкале или корпусе прибора указывают два числа ($\gamma_{x\max} \cdot 100\%$ и $\gamma_{x\min} \cdot 100\%$), разделенные символом /. При этом (как было показано выше) ни абсолютную, ни относительную погрешность такого прибора нельзя считать постоянной.

Таким образом, класс точности прибора содержит информацию не только о величине погрешности прибора в начале и в конце измерительной шкалы, но и о характере зависимости этой погрешности от измеряемого значения.

Также как для случайных погрешностей отсчета считается, что случайные погрешности прибора, подчиняются равномерному распределению, но с параметром $d_{ПР}$, равным абсолютной погрешности прибора $\Delta x_{ПР}$ для измеренного значения x. Поэтому остановимся на способах определения ***параметра равномерного распределения*** $d_{ПР}$, которому подчиняется погрешность прибора при однократных измерениях:

1. Если на шкале (корпусе) прибора класс точности прибора указан в виде одного числа K, написанного в обрамлении окружности K, то параметр равномерного распределения равен абсолютной погрешности прибора $\Delta x_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot x$ и вычисляется следующим образом: $d_{ПР} = \frac{K}{100} \cdot x$. Например, для напряжения 400 В, измеренного вольтметром с классом точности 2,5, позволяющим выполнять измерения в интервале от 0 до 600 В, параметр равномерного распределения равен $d_{ПР} = \frac{2{,}5 \cdot 400}{100}$ = 10 (В).

2. Если на шкале (корпусе) прибора класс точности прибора указан в виде одного числа K, но не обрамленного окружностью и другими символами, то параметр равномерного распределения равен абсолютной погрешности прибора $\Delta x_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot x_{\max}$ и вычисляется следующим образом: $d_{ПР} = \frac{K}{100} \cdot x_{\max}$. Например, для любого значения напряжения (в том числе для значения 400 В), измеренного вольтметром с классом точности 2,5, позволяющим выполнять измерения в интервале от 0 до 600 В, параметр равномерного распределения равен $d_{ПР} = \frac{2{,}5 \cdot 600}{100}$ = = 15 (В).

3. Если на шкале (корпусе) прибора класс точности прибора указан в виде $K_1/\ K_2$ (двух чисел K_1 и K_2, разделенных символом /), то параметр равномерного распределения равен абсолютной погрешности прибора $\Delta x_{ПР} = \gamma_{x\max} \cdot x_{\max} - (\gamma_{x\max} - \gamma_{x\min}) \dfrac{x_{\max}}{x_{\max} - x_{\min}} (x_{\max} - x)$ и вычисляется следующим образом:

$$d_{ПР} = \frac{K_1}{100} \cdot x_{\max} - \frac{(K_1 - K_2)}{100} \frac{x_{\max}}{x_{\max} - x_{\min}} (x_{\max} - x)$$

или $d_{ПР} = \dfrac{K_1}{100} \cdot x_{\max} - \dfrac{(K_1 - K_2)}{100} (x_{\max} - x)$ при $x_{\min} = 0$.

Например, для напряжения 400 В, измеренного вольтметром с классом точности 2,5/1,5, позволяющим выполнять измерения в интервале от 0 до 600 В, параметр равномерного распределения равен

$$d_{ПР} = \frac{K_2}{100} \cdot x_{\max} + \frac{(K_1 - K_2)}{100} \cdot x = \frac{1{,}5}{100} \cdot 600 + \frac{2{,}5 - 1{,}5}{100} \cdot 400 = 13 \text{ (В)}.$$

4. Для приборов обладающих большой погрешностью (> 4%) класс точности на шкале (корпусе) прибора не указывается. Порядок вычисления погрешности таких приборов описывается в документации. Для приборов, не имеющих внутреннего технического строения, класс точности также не указывается (ни на приборе, ни в документации). В этом случае считается, что погрешность прибора пренебрежимо мала.

Из числа приборов, используемых в учебной лаборатории, к приборам первого (класс точности обозначается одним числом, обрамленным окружностью) и второго (класс точности обозначается одним числом без обрамления) типа относятся, как правило, вольтметры и амперметры (миллиамперметры); к приборам четвертого тип (класс точности на приборе не указан) – например, электронные весы, механические секундомеры, линейки и т.д. Приборы третьего типа (класс точности обозначается двумя числами) в учебной лаборатории используются редко.

Во всех случаях, когда класс точности наносится на шкалу (корпус) прибора, он вместе с описанием условий эксплуатации прибора указывается в технической документации. Если прибор эксплуатируется в условиях, отличающихся от описанных в документации как нормальные, то возникает дополнительная погрешность. Способы вычисления дополнительной погрешности прибора также изложены в документации. Отступление от нормальных условий эксплуатации прибора может привести к значительному увеличению погрешности прибора и изменению характера ее зависимости от измеряемого значения.

Класс точности используется для сравнения друг с другом приборов по точности измерений. Чем меньше число, используемое для обозначения класса точности, тем точнее сделанные с помощью такого прибора измерения.

В некоторых случаях для обозначения класса точности вместо арабских используются римские цифры или буквы. Порядок вычисления погрешности прибора в этом случае также описывается в технической документации.

Полная погрешность однократных измерений

В общем случае при оценке абсолютной случайной погрешности $\Delta\tilde{x}_{ОИ}$ однократных измерений необходимо учитывать как погрешность отсчета $\Delta\tilde{x}_{ОТ}$, так и погрешность прибора $\Delta\tilde{x}_{ПР}$. Факторы, способствующие появлению каждой из этих случайных погрешностей, действуют независимо друг от друга. Поэтому для определения полной погрешности $\Delta\tilde{x}_{ОИ}$ однократных измерений используют принятое в теории вероятностей правило сложения независимых случайных величин: дисперсия функции распределения суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий функций распределения этих величин. Следовательно, полная абсолютная погрешность однократных измерений равна

$$\Delta\tilde{x}_{ОИ} = \sqrt{\Delta\tilde{x}_{ОТ}^2 + \Delta\tilde{x}_{ПР}^2},$$

где $\Delta\tilde{x}_{ОТ}$ – доверительный интервал, соответствующий случайной погрешности отсчета по прибору, $\Delta\tilde{x}_{ПР}$ – доверительный интервал, соответствующий случайной погрешности используемого прибора, имеющего внутреннее техническое устройство.

Если прибор эксплуатируется при условиях, являющихся для него нормальными, то и случайная погрешность отсчета $\Delta\tilde{x}_{ОТ}$, и случайная погрешность прибора $\Delta\tilde{x}_{ПР}$ подчиняются равномерным распределениям с параметрами $d_{ОТ}$ и $d_{ПР}$, соответственно, и пропорциональны доверительной вероятности α:

$$\Delta\tilde{x}_{ОТ} = \alpha \cdot d_{ОТ}, \; \Delta\tilde{x}_{ПР} = \alpha \cdot d_{ПР}.$$

Тогда $$\Delta\tilde{x}_{ОИ} = \sqrt{\Delta\tilde{x}_{ОТ}^2 + \Delta\tilde{x}_{ПР}^2} = \sqrt{\alpha^2 d_{ОТ}^2 + \alpha^2 d_{ПР}^2} = \alpha\sqrt{d_{ОТ}^2 + d_{ПР}^2}$$

или $\Delta\tilde{x}_{ОИ} = \alpha \cdot d$, где $d = \sqrt{d_{ОТ}^2 + d_{ПР}^2}$.

То есть абсолютная погрешность $\Delta\tilde{x}_{ОИ}$ однократных измерений также пропорциональна доверительной вероятности α.

Если используемый прибор не имеет внутреннего технического устройства (класс точности считают равным нулю, $d_{ПР} = 0$), то абсолютная погрешность однократных измерений определяется только погрешностью отсчета: $\Delta\tilde{x}_{ОИ} = \Delta\tilde{x}_{ОТ} = \alpha \cdot d_{ОТ}$. Например, если измерения выполняются штангенциркулем с ценой деления нониуса 0,05 мм, то при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ (95%) абсолютная погрешность однократных измерений этим прибором равна $\Delta\tilde{x}_{ОИ} = \alpha \cdot d_{ОТ} = 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 0{,}0475$ (мм).

В некоторых случаях, если $d_{ОТ} << d_{ПР}$, погрешностью отсчета можно пренебречь. Тогда абсолютная погрешность однократных измерений определяется только классом точности (погрешностью) прибора: $\Delta\tilde{x}_{ОИ} \approx \Delta\tilde{x}_{ПР} = \alpha \cdot d_{ПР}$. Например, если для измерения значения силы тока используется стрелочный миллиамперметр с классом точности $К = 2{,}5$ (без обрамления) и ценой деления $Ц = 0{,}1$ мА, позволяющий измерять силу тока в диапазоне от 0 до 20 мА, то $d_{ОТ} = Ц/2 = 0{,}05$ мА, $d_{ПР} = \frac{К}{100} \cdot x_{\max} = \frac{2{,}5 \cdot 20}{100} = 0{,}5$ мА, $d = \sqrt{d_{ОТ}^2 + d_{ПР}^2} = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}5^2} = 0{,}50249 \approx 0{,}5$. То есть можно считать, что $d_{ОТ} << d_{ПР}$ – погрешностью отсчета можно пренебречь, поэтому при вычислении абсолютной погрешности однократных измерений можно учитывать только параметр равномерного распределения погрешности прибора: $\Delta\tilde{x}_{ОИ} = \alpha \cdot d_{ПР} = 0{,}95 \cdot 0{,}5 = 0{,}475$ (мА) для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ (95%).

Так как все приборы с внутренним техническим устройством конструируются так, чтобы погрешность прибора была соизмерима с погрешностью отсчета при одной и той же доверительной вероятности α, при использовании этих приборов при нормальных условиях, как правило, ни той, ни другой погрешностью пренебречь нельзя. Поэтому для этих приборов погрешность однократных измерений всегда равна $\Delta\tilde{x}_{ОИ} = \alpha \cdot d$, где $d = \sqrt{d_{ОТ}^2 + d_{ПР}^2}$.

СОВМЕСТНЫЙ УЧЕТ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ МНОГОКРАТНЫХ И ОДНОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В случае многократных измерений некоторой величины x каждое отдельное измерение можно рассматривать как однократное. Поэтому необходимо одновременно учитывать случайные погрешности как многократных (подчиняющихся распределению Гаусса), так и однократных (подчиняющихся равномерному распределению) измерений. Факторы, способствующие формированию погрешностей того и другого типа, действуют независимо друг от друга. Поэтому для определения суммарной погрешности результата также используют принятое в теории вероятностей правило сложения независимых случайных величин (дисперсия функции распределения суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий функций распределения этих величин). Поэтому доверительный интервал $\Delta\tilde{x}$ (общая абсолютная погрешность) измеряемой в серии опытов величины x вычисляется следующим образом:

$$\Delta\tilde{x} = \sqrt{\Delta\tilde{x}_{СЛ}^2 + \Delta\tilde{x}_{ОИ}^2},$$

где $\Delta\tilde{x}_{СЛ}$ – доверительный интервал, соответствующий случайной погрешности многократных измерений, $\Delta\tilde{x}_{ОИ}$ – доверительный интервал, соответствующий случайной погрешности однократных измерений.

Погрешность прямых равноточных измерений (выводы)

Итак, если в результате непосредственных (прямых) измерений некоторой физической величины x получены значения x_1, x_2, x_3, … x_n, то оценку погрешности этих измерений рекомендуется проводить следующим образом:

1. По результатам измерений величины x определяется среднее арифметическое значение для n измерений

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

2. Вычисляется среднеквадратичное отклонение результатов измерений от среднего арифметического значения

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)^2}{n(n-1)}} .$$

3. Для доверительной вероятности α (например, для $\alpha = 0{,}95$) и количества измерений n по табл. 2 определяется коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$ (стр. 29).

4. Рассчитывается длина доверительного интервала (абсолютная случайная погрешность) для многократных измерений

$$\Delta\tilde{x}_{СЛ} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}.$$

5. Оценивается длина доверительного интервала (абсолютная случайная погрешность) однократных измерений

$$\Delta\tilde{x}_{ОИ} = \alpha \cdot d\,,$$

где d – параметр равномерного распределения, связанный с ценой деления и (или) классом точности измерительного прибора (стр. 45). Если параметр равномерного распределения зависит от значения измеряемой величины, то в качестве этого значения используется $\tilde{x}$.

6. Определяется общая абсолютная погрешность серии измерений (доверительный интервал)

$$\Delta\tilde{x} = \sqrt{\Delta\tilde{x}_{СЛ}^2 + \Delta\tilde{x}_{ОИ}^2}\,.$$

7. Окончательный результат записывается в виде

$x = \tilde{x} \pm \Delta\tilde{x}$ с доверительной вероятностью α.

8. Оценивается относительная погрешность результата измерений

$$\delta = \frac{\Delta\tilde{x}}{\tilde{x}} \cdot 100\%\,.$$

Относительная погрешность позволяет сравнивать неточности измерений разных по значению и (или) по размерности физических величин.

ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В большинстве физических экспериментов представляют интерес физические величины, которые не измеряется непосредственно какими-либо приборами, а рассчитываются на основе прямых измерений других величин. При этом каждая искомая величина, связана функциональной зависимостью с измеряемыми величинами. Полученные таким образом значения принято называть ***косвенными измерениями***.

В этом случае встает задача вычисления погрешности косвенных измерений при условии, что погрешности (границы доверительных интервалов) величин, полученных из прямых измерений, известны.

Связь погрешности косвенных измерений с погрешностями прямых измерений

Пусть для косвенных измерений значения некоторой величины y, связанной с независимыми друг от друга величинами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ формулой $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, были выполнены серии по n прямых независимых измерений, в каждом из которых измеренное значение $x_{k\,i}$ отличалось от истинного значения $\bar{x}_k$ этой величины на $\Delta_i x_k = x_{k\,i} - \bar{x}_k$ (где $i = 1 \ldots n$, $k = 1 \ldots m$), т.е.

для x_1: $x_{1\,1} = \bar{x}_1 + \Delta_1 x_1, \ \ldots, \ x_{1\,i} = \bar{x}_1 + \Delta_i x_1, \ \ldots, \ x_{1\,n} = \bar{x}_1 + \Delta_n x_1;$

для x_2: $x_{2\,1} = \bar{x}_2 + \Delta_1 x_2$, …, $x_{2\,i} = \bar{x}_2 + \Delta_i x_2$, …, $x_{2\,n} = \bar{x}_2 + \Delta_n x_2$ и т.д.

Для каждой непосредственно измеренной величины заблаговременно вычислены $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, …, $\tilde{x}_k$, …, $\tilde{x}_m$ (средние арифметические значения) и $\Delta\tilde{x}_1$, $\Delta\tilde{x}_2$, …, $\Delta\tilde{x}_k$, …, $\Delta\tilde{x}_m$ (погрешности прямых измерений).

Как было показано ранее (см. стр. 22), математическое ожидание $\bar{x}_k$ и дисперсия σ_k^2 функции распределения каждой из непосредственно измеренных случайных величин связаны с полученными при измерениях значениями следующим образом:

$$\bar{x}_k = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{k\,i}\right) \text{ и } \sigma_k^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x_k)^2\right) \text{ для } k = 1\ldots\, m.$$

Получим параметры (математическое ожидание и дисперсию) функции распределения, которой подчиняется искомая величина y.

Учитывая, что $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, принято считать, что истинным значениям $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, …, $\bar{x}_k$, …, $\bar{x}_m$ (математическим ожиданиям) измеряемых величин соответствует истинное значение (математическое ожидание) искомой величины $\bar{y} = F(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots, \bar{x}_m)$. Другим значениям $x_{1\,i}$, $x_{2\,i}$, …, $x_{m\,i}$ измеряемых величин соответствуют значения $y_i = F(x_{1\,i}, x_{2\,i}, \ldots, x_{m\,i})$, отличающиеся от истинного. Дисперсию σ_y^2 искомой величины y вычислим по аналогии с дисперсиями измеряемых величин в виде:

$$\sigma_y^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i y)^2\right), \text{ где } \Delta_i y = y_i - \bar{y}.$$

Чтобы вычислить, насколько $\Delta_i y$ значение y_i искомой величины отличается от истинного значения $\bar{y}$, воспользуемся функциональной зависимостью $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Предполагая, что измеренные значения $x_{1\,i}$, $x_{2\,i}$, …, $x_{m\,i}$ мало отличаются от истинных ($|\Delta_i x_k| \ll \bar{x}_k$), вблизи $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ можно разложить в ряд Тейлора, ограничив его производными первого порядка:

$$y = F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m) \Rightarrow$$

$$y = F(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_m) + \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_k - \bar{x}_k) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m}(x_m - \bar{x}_m)$$

$$\text{или } y = \bar{y} + \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_k - \bar{x}_k) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m}(x_m - \bar{x}_m),$$

где $\partial F / \partial x_k$ – частная производная функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ по x_k, в которую вместо аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ подставлены истинные значения $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_m$.

Так как $y_i = F(x_{1\,i}, x_{2\,i}, \ldots, x_{m\,i})$, то если в выражение

$$+\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_k - \bar{x}_k) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m}(x_m - \bar{x}_m)$$

вместо $x_1, x_2, \ldots, x_m$ подставить значения $x_{1\,i} = \bar{x}_1 + \Delta_i x_1, \ldots, x_{k\,i} = \bar{x}_k + \Delta_i x_k, \ldots, x_{m\,i} = \bar{x}_m + \Delta_i x_m$, отличающиеся от истинных $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ на $\Delta_i x_1, \ldots, \Delta_i x_k, \ldots, \Delta_i x_m$, соответственно, то тоже получится y_i:

$$y_i = \bar{y} + \frac{\partial F}{\partial x_1}\Delta_i x_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_k}\Delta_i x_k + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m}\Delta_i x_m.$$

Тогда $\Delta_i y = y_i - \bar{y} \Rightarrow \Delta_i y = \frac{\partial F}{\partial x_1}\Delta_i x_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_k}\Delta_i x_k + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m}\Delta_i x_m$.

Как было показано ранее, для вычисления дисперсии σ_y^2 случайной величины y просуммируем все квадраты отклонений $(\Delta_i y)^2$, а эту сумму разделить на количество измерений n:

$$\sigma_y^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i y)^2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i y)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\Delta_i x_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_k}\Delta_i x_k + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m}\Delta_i x_m\right)^2$$

или, раскрыв квадрат в правой части, получим

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i y)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x_1)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x_k)^2 + \ldots$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial x_m}\right)^2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x_m)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x_1)\cdot(\Delta_i x_2) + \ldots$$

$$+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_p}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x_k)\cdot(\Delta_i x_p) + \ldots \text{ (для всех } p \neq k)$$

По определению

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x_k)^2\right) = \sigma_k^2 \ (k = 1 \ldots m) \text{ и } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i y)^2\right) = \sigma_y^2.$$

Поэтому, вычислив предел, полученное выражение можно записать в виде

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_k^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_m}\right)^2 \sigma_m^2 +$$

$$+\ 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x_1)\cdot(\Delta_i x_2) + \ldots + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_p}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x_k)\cdot(\Delta_i x_p) + \ldots$$

(для всех $p \neq k$).

Если все измеряемые независимые величины $x_1, x_2, \ldots, x_m$ подчиняются нормальному распределению, функция распределения которого симметрична относительно истинного значения, то вероятности равных по модулю и противоположных по знаку отклонений от истинного значения одинаковы (т.е. для большого количества измерений каждому значению $\Delta_i x_k$ найдется равное по модулю и противоположное по знаку). Поэтому при большом числе измерений ($n \to \infty$) все суммы вида $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i x_k)\cdot(\Delta_i x_p)$ при $p \neq k$ стремятся к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ p\neq k}}^{n}(\Delta_i x_k)\cdot(\Delta_i x_p) = 0.$$

Поэтому для большого количества измерений:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_k^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_m}\right)^2 \sigma_m^2.$$

Заметим, что из этого равенства можно получить использовавшееся ранее утверждение: дисперсия функции распределения суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий функций распределения каждой из них. Т.е. для частного случая, когда $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, все частные производные $\partial F/\partial x_k = 1$, а дисперсия $\sigma_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_m^2$.

Обозначим значение функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, которое получается в результате подстановки в нее в качестве аргументов средних арифметических значений $x_1 = \tilde{x}_1$, $x_2 = \tilde{x}_2$, …, $x_m = \tilde{x}_m$ измеряемых величин, через $\tilde{y}$:

$$\tilde{y} = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m).$$

Это значение принято называть (по аналогии с непосредственно измеряемыми величинами) средним арифметическим значением искомой величины y или ***значением искомой величины*** y, ***полученным в результате серии экспериментов*** (***искомым значением***). Учитывая, что с увеличением количества измерений $\tilde{x}_k \to \bar{x}_k$ ($k = 1\ldots m$), очевидно и $\tilde{y} \to \bar{y}$ при $n \to \infty$.

Так как для большого количества измерений $\tilde{x}_k \to \bar{x}_k$ ($k = 1\dots m$) и $\tilde{y} \to \bar{y}$, то в полученном ранее общем выражении для σ_y^2 можно в частные производные $\partial F / \partial x_k$ подставлять не истинные, а средние арифметические значения $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, …, $\tilde{x}_m$ измеряемых величин. Обозначим значения производных $\partial F / \partial x_k$, в которые вместо аргументов x_1, x_2, …, x_m подставлены средние значения $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, …, $\tilde{x}_m$ через $\partial \tilde{F} / \partial x_k$ соответственно. При $n \to \infty$ значения $\partial \tilde{F} / \partial x_k$ будут стремиться к $\partial F / \partial x_k$. Тогда общее выражение для вычисления дисперсии примет вид

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_k^2 + \dots + \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_m}\right)^2 \sigma_m^2 .$$

Как было показано ранее (стр. 19), если искомая величина y подчиняется нормальному распределению, зная дисперсию σ_y^2 искомой величины y, можно вычислить среднеквадратичное отклонение $\tilde{\sigma}_y = \sigma_y / \sqrt{n}$ среднего значения $\tilde{y}$ и абсолютную случайную погрешность $\Delta\tilde{y} = k_\alpha \tilde{\sigma}_y$ (доверительный интервал относительно среднего арифметического значения $\tilde{y}$) для этой величины. Полученное для σ_y^2 общее выражение разделим на количество измерений n и домножим на коэффициент k_α нормального распределения, возведенный в квадрат:

$$(\Delta\tilde{y})^2 = \frac{k_\alpha^2 \sigma_y^2}{n} =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \left(\frac{k_\alpha \sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2 \left(\frac{k_\alpha \sigma_k}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_m}\right)^2 \left(\frac{k_\alpha \sigma_m}{\sqrt{n}}\right)^2 .$$

Если среднее значение $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, …, $\tilde{x}_m$ каждой из непосредственно измеренных величин также подчиняется нормальному распределению со среднеквадратичными отклонениями $\tilde{\sigma}_k = \sigma_k / \sqrt{n}$ ($k = 1\dots m$), то $k_\alpha \tilde{\sigma}_k = \Delta\tilde{x}_k$ – доверительные интервалы (абсолютные случайные погрешности) для соответствующей измеряемой величины относительно ее среднего значения, которые были вычислены заблаговременно. Тогда для искомой величины y получим доверительный интервал, симметричный относительно известного среднего арифметического $\tilde{y}$, длина которого равна $\Delta\tilde{y}$:

$$(\Delta\tilde{y})^2 = \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_1)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_k}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_k)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_m}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_m)^2,$$

где $\dfrac{\partial\tilde{F}}{\partial x_k} = \left.\dfrac{\partial F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)}{\partial x_k}\right|_{\substack{x_1 = \tilde{x}_1 \\ x_2 = \tilde{x}_2 \\ \cdots\cdots \\ x_m = \tilde{x}_m}}$ – частная производная функции $F(x_1, x_2,\ \ldots, x_m)$ по x_k, в которую вместо аргументов $x_1, x_2,\ \ldots, x_m$ подставлены значения $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m$.

Таким образом, ***абсолютная случайная погрешность*** $\Delta\tilde{y}$ (доверительный интервал) ***серии косвенных измерений искомой величины*** y вычисляется через абсолютные погрешности $\Delta\tilde{x}_1$, $\Delta\tilde{x}_2$, …, $\Delta\tilde{x}_k$, …, $\Delta\tilde{x}_m$ непосредственно измеряемых величин следующим образом:

$$\Delta\tilde{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_1)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_k}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_k)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_m}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_m)^2}$$

или короче $$\Delta\tilde{y} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_k}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_k)^2}\ .$$

Эта формула выведена в предположении, что все участвующие в ней случайные величины подчиняются нормальному распределению. Однако можно показать, что аналогичный результат получается и для случайных величин, подчиняющихся другим распределениям. Например, если искомая и измеряемые величины подчиняются распределению Стьюдента, то, как было показано ранее, для вычисления доверительного интервала среднеквадратичное отклонение $\tilde{\sigma}_y$ необходимо умножить не на коэффициент k_α нормального распределения, а на коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$.

Функция $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$, связывающая искомую величину y с непосредственно измеряемыми величинами $x_1, x_2, \ldots, x_m$, может оказаться сложной для непосредственного дифференцирования. Например, функция $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ может содержать большое количество сомножителей в числителе и в знаменателе, выраженных через измеряемые величины $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$. Тогда частные производные такой функции имеют громоздкий вид. В то же время частная производная логарифма такой функции будет иметь более компактный вид. Для более комфортного вычисления случайной погрешности косвенных измерений, связанных с прямыми измерениями такой функцией F, выразим $\frac{\partial F}{\partial x_k}$ через $\frac{\partial(\ln F)}{\partial x_k}$. По правилам вычисления производной легко показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\ln F) = \frac{1}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_k} \text{ или } \frac{\partial F}{\partial x_k} = F \cdot \frac{\partial(\ln F)}{\partial x_k}.$$

Учитывая, что в формуле для расчета погрешности используются значения производных $\partial\tilde{F} / \partial x_k$, вычисленные при значениях аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$, равных $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m$, причем $F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m) = \tilde{y}$, получим

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_k} = \frac{\partial F}{\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_1 = \tilde{x}_1 \\ x_2 = \tilde{x}_2 \\ \cdots\cdots \\ x_m = \tilde{x}_m}} = \left(F \cdot \frac{\partial(\ln F)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_{\substack{x_1 = \tilde{x}_1 \\ x_2 = \tilde{x}_2 \\ \cdots\cdots \\ x_m = \tilde{x}_m}} = \tilde{y} \cdot \frac{\partial(\ln F)}{\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_1 = \tilde{x}_1 \\ x_2 = \tilde{x}_2 \\ \cdots\cdots \\ x_m = \tilde{x}_m}}.$$

Обозначим $\frac{\partial(\ln F)}{\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_1 = \tilde{x}_1 \\ x_2 = \tilde{x}_2 \\ \cdots\cdots \\ x_m = \tilde{x}_m}} = \frac{\partial(\ln \tilde{F})}{\partial x_k}$. Тогда $\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_k} = \tilde{y}\,\frac{\partial(\ln \tilde{F})}{\partial x_k}$.

Подставим эту взаимосвязь между производной от функции и производной от ее логарифма в полученное ранее выражение для абсолютной погрешности $\Delta\tilde{y}$:

$$\Delta\tilde{y} = \tilde{y}\sqrt{\left(\frac{\partial(\ln \tilde{F})}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_1)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial(\ln \tilde{F})}{\partial x_k}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_k)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial(\ln \tilde{F})}{\partial x_m}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_m)^2}$$

или короче $\Delta\tilde{y} = \tilde{y}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial(\ln \tilde{F})}{\partial x_k}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_k)^2}$.

Не смотря на то, что формулы

$$\Delta\tilde{y} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_k}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_k)^2} \text{ и } \Delta\tilde{y} = \tilde{y}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial(\ln \tilde{F})}{\partial x_k}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_k)^2}$$

отличаются друг от друга, они дают одинаковую оценку абсолютной погрешности для одних и тех же косвенных измерений. Но используя последнюю формулу, легко выразить ***относительную погрешность***

$\delta_y = \Delta\tilde{y} / \tilde{y}$ ***косвенных измерений*** через относительные погрешности $\delta_1 = \Delta\tilde{x}_1 / \tilde{x}_1$, …, $\delta_k = \Delta\tilde{x}_k / \tilde{x}_k$, …, $\delta_m = \Delta\tilde{x}_m / \tilde{x}_m$ прямых измерений:

$$\delta_y = \frac{\Delta\tilde{y}}{\tilde{y}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\tilde{x}_k \cdot \frac{\partial(\ln\tilde{F})}{\partial x_k}\right)^2 \left(\frac{\Delta\tilde{x}_k}{\tilde{x}_k}\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\tilde{x}_k \cdot \frac{\partial(\ln\tilde{F})}{\partial x_k}\right)^2 \delta_k^2}\ .$$

Примеры получения формулы для расчета абсолютной погрешности при косвенных измерениях

Пусть искомая величина y связана с измеряемыми в эксперименте величинами x, u, z следующей функциональной зависимостью:

$$y = F(x,u,z) = \frac{x^2}{2u} \cdot z\,,$$

причем для каждой из непосредственно измеряемых в эксперименте величин уже определены средние арифметические значения $\tilde{x}$, $\tilde{u}$, $\tilde{z}$ и доверительные интервалы $\Delta\tilde{x}$, $\Delta\tilde{y}$ и $\Delta\tilde{z}$. Тогда значение искомой величины y можно рассчитать с помощью известной функции F, подставив в нее вместо аргументов средние арифметические значения непосредственно измеряемых величин: $\tilde{y} = \dfrac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}} \cdot \tilde{z}$.

Пример 1. Согласно формуле $\Delta\tilde{y} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\dfrac{\partial\tilde{F}}{\partial x_k}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_k)^2}$ найдем абсолютную погрешность $\Delta\tilde{y}$ следующим образом:

$$\Delta\tilde{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x}\right)^2 (\Delta\tilde{x})^2 + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u}\right)^2 (\Delta\tilde{u})^2 + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial z}\right)^2 (\Delta\tilde{z})^2}$$

Продифференцируем функцию $F(x,u,z) = \dfrac{x^2}{2u} \cdot z$ по x, u, z и подставим в каждую из производных значения $x = \tilde{x}$, $u = \tilde{u}$ и $z = \tilde{z}$:

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x} = \frac{x}{u} z \Bigg|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}\\ z=\tilde{z}}} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{u}}\tilde{z}\,,\quad \frac{\partial\tilde{F}}{\partial u} = -\frac{x^2}{2u^2} z \Bigg|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}\\ z=\tilde{z}}} = -\frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}^2}\tilde{z}\,,\quad \frac{\partial\tilde{F}}{\partial z} = \frac{x^2}{2u} \Bigg|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}\\ z=\tilde{z}}} = \frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}}\,.$$

Тогда формула для расчета абсолютной погрешности $\Delta\tilde{y}$ примет вид

$$\Delta\tilde{y} = \sqrt{\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{u}}\tilde{z}\right)^2 (\Delta\tilde{x})^2 + \left(-\frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}^2}\tilde{z}\right)^2 (\Delta\tilde{u})^2 + \left(\frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}}\right)^2 (\Delta\tilde{z})^2}\ .$$

Вынося из под корня общие множители, получим

$$\Delta\tilde{y} = \frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}}\tilde{z}\sqrt{\left(\frac{2}{\tilde{x}}\right)^2(\Delta\tilde{x})^2 + \left(\frac{1}{\tilde{u}}\right)^2(\Delta\tilde{u})^2 + \left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^2(\Delta\tilde{z})^2}$$

или $\Delta\tilde{y} = \tilde{y}\sqrt{\left(\frac{2}{\tilde{x}}\right)^2(\Delta\tilde{x})^2 + \left(\frac{1}{\tilde{u}}\right)^2(\Delta\tilde{u})^2 + \left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^2(\Delta\tilde{z})^2}$.

Пример 2. Найдем абсолютную погрешность $\Delta\tilde{y}$ через логарифм имеющейся функциональной зависимости $F(x,u,z) = \frac{x^2}{2u}\cdot z$. Прологарифмируем эту функцию:

$$\ln F = 2\ln x - \ln 2 - \ln u + \ln z.$$

Вычислим производные от получившегося выражения по x, u, z и подставим в каждую из них значения $x = \tilde{x}$, $u = \tilde{u}$ и $z = \tilde{z}$:

$$\frac{\partial \ln \tilde{F}}{\partial x} = \frac{2}{x}\bigg|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}\\ z=\tilde{z}}} = \frac{2}{\tilde{x}},\quad \frac{\partial \ln \tilde{F}}{\partial u} = -\frac{1}{u}\bigg|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}\\ z=\tilde{z}}} = -\frac{1}{\tilde{u}},\quad \frac{\partial \ln \tilde{F}}{\partial z} = \frac{1}{z}\bigg|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}\\ z=\tilde{z}}} = \frac{1}{\tilde{z}}.$$

Согласно формуле $\Delta\tilde{y} = \tilde{y}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial \ln \tilde{F}}{\partial x_k}\right)^2(\Delta\tilde{x}_k)^2}$ получим следующее выражение для абсолютной погрешности

$$\Delta\tilde{y} = \tilde{y}\sqrt{\left(\frac{\partial \ln \tilde{F}}{\partial x}\right)^2(\Delta\tilde{x})^2 + \left(\frac{\partial \ln \tilde{F}}{\partial u}\right)^2(\Delta\tilde{u})^2 + \left(\frac{\partial \ln \tilde{F}}{\partial z}\right)^2(\Delta\tilde{z})^2}$$

$$\Delta\tilde{y} = \tilde{y}\sqrt{\left(\frac{2}{\tilde{x}}\right)^2(\Delta\tilde{x})^2 + \left(-\frac{1}{\tilde{u}}\right)^2(\Delta\tilde{u})^2 + \left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^2(\Delta\tilde{z})^2}.$$

Таким образом, расчет по обеим формулам позволяет получить одинаковый результат для оценки абсолютной погрешности косвенных измерений.

Погрешность косвенных измерений (выводы)

При обработке результатов косвенных измерений рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Если это необходимо, преобразуйте формулу, связывающую измеряемые величины с искомой так, чтобы функциональная зависимость содержала все измеряемые величины непосредственно (без промежуточных формул).

2. Выполните оценку абсолютной погрешности прямых измерений всех непосредственно измеряемых величин, входящих в формулу для искомой величины, с учетом погрешности многократных и однократных измерений (см. стр. 47). При этом для всех измеряемых величин следует задавать одно и то же значение доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$.

3. С помощью средних арифметических значений измеряемых величин $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, …, $\tilde{x}_m$ рассчитайте значение искомой величины

$$\tilde{y} = F(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \tilde{x}_3,\ \ldots,\ \tilde{x}_m).$$

4. Получите выражение для абсолютной погрешности косвенных измерений по одной из формул

$$\Delta\tilde{y} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_k}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_k)^2} \text{ или } \Delta\tilde{y} = \tilde{y}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial \ln\tilde{F}}{\partial x_k}\right)^2 (\Delta\tilde{x}_k)^2}\ .$$

Рассчитайте абсолютную погрешность косвенных измерений.

5. Запишите окончательный результат в виде

$y = \tilde{y} \pm \Delta\tilde{y}$ с доверительной вероятностью α.

6. Вычислите относительную погрешность (в процентах) искомой величины:

$$\delta = \frac{\Delta\tilde{y}}{\tilde{y}} \cdot 100\%.$$

В некоторых случаях наоборот сначала вычисляют относительную δ, а затем абсолютную $\Delta\tilde{y}$ погрешность искомой величины. Тогда пункты 4–6 выполняют в следующем порядке:

4. Получите выражение для относительной погрешности косвенных измерений по формуле:

$$\delta = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\tilde{x}_k \cdot \frac{\partial(\ln\tilde{F})}{\partial x_k}\right)^2 \left(\frac{\Delta\tilde{x}_k}{\tilde{x}_k}\right)^2} \text{ и } \delta\cdot 100\%.$$

Вычислите относительную погрешность искомой величины (в долях единицы и в процентах).

5. Рассчитайте абсолютную погрешность косвенных измерений, умножив относительную погрешность δ на значение $\tilde{y}$ искомой величины:

$$\Delta\tilde{y} = \delta\cdot\tilde{y}\,.$$

6. Запишите окончательный результат в виде

$y = \tilde{y} \pm \Delta\tilde{y}$ с доверительной вероятностью α.

Если по каким-либо причинам данный метод оценки погрешности неприменим, можно вычислить значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ искомой величины y по значениям $x_1, x_2, \ldots, x_m$, измеренным в каждом из n опытов, отдельно, а затем оценить погрешность искомой величины y как при прямых измерениях:

- найти среднее арифметическое значение $\tilde{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$;
- вычислить среднеквадратичное отклонение $\tilde{\sigma}_y = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{y} - y_i)^2}{n(n-1)}}$;
- определить коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$ для $\alpha = 0{,}95$;
- рассчитать абсолютную погрешность (доверительный интервал) искомой величины $\Delta\tilde{y} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}_y$;
- вычислить относительную погрешность $\delta = \Delta\tilde{y} / \tilde{y}$ и $\delta \cdot 100\%$ (в долях единицы и в процентах);
- результат записать в виде:

  $y = \tilde{y} \pm \Delta\tilde{y}$ при доверительной вероятности α.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА С УЧЕТОМ ПОГРЕШНОСТИ

В зависимости от погрешности измерений цифры в числе, полученном из экспериментальных исследований, подразделяют на верные (заслуживающие доверия) и неверные. Цифра в числе считается ***верной***, если абсолютная погрешность не превосходит половины разряда, в котором расположена данная цифра. Например, в числе 23,836, полученном из эксперимента с абсолютной погрешностью 0,6, верными считаются все цифры, используемые для записи целой части числа, а также цифра 8 из дробной части. Цифры 3 и 6 в этом случае – неверные (не заслуживающие доверия). Как правило, запись результатов измерений должна содержать только верные цифры.

При записи значений, полученных в результате прямых измерений по шкале или цифровому табло прибора, (исходных экспериментальных данных) все цифры считаются верными, так как абсолютная погрешность отсчета меньше половины разряда каждой из них. Поэтому ***никакое округление значений, непосредственно измеренных в эксперименте, не допускается***.

Десятичная запись одних и тех же значений может быть выполнена по-разному (например, 0,0057 и $5{,}7 \cdot 10^{-3}$). Для корректного сравнения различных экспериментальных результатов вводят понятие ***значащей цифры*** в записи результата.

Все цифры от 1 до 9 и нуль, если он стоит в середине или в конце числа, называются ***значащими***. В числе 6100 – четыре значащих цифры, а в числе $6{,}1 \cdot 10^{3}$ только две, в числе 0,00209 – три, так как нули слева от двойки не являются значащими. Запись числа 2,39 означает, что в данном числе три значащие цифры, а запись 2,3900 – что значащих цифр пять, если это число записать в виде 2,39, то останется только три значащие цифры.

Когда информация о погрешности экспериментальных данных в явном виде отсутствует, ***по количеству значащих цифр в числе определяет точность вычисления или измерений***. В числе 6,30 три значащих цифры и это означает, что при измерении учитывали не только единицы, но и десятые, и сотые; в числе 6,3 – только две значащих цифры и это означает, что учитывали только целые и десятые, а точность, с которой получено (измерено или рассчитано) это число, в 10 раз меньше, чем у предыдущего. Поэтому при записи результатов измерений (и прямых, и косвенных) нельзя отбрасывать цифры (нули), расположенные в последних разрядах соответствующего числа. Это равносильно увеличению абсолютной погрешности измерений в 10 раз.

Правила записи промежуточных результатов измерений и вычислений без учета погрешностей

Как было показано ранее, в процессе получения результатов косвенных измерений и оценки погрешностей приходится выполнять различные вычисления. В большинстве случаев невозможно выполнить все необходимые вычисления абсолютно точно, и приходится округлять полученные значения. ***Любое округление вносит*** в результат вычислений определенную ***погрешность***. Если погрешность округления промежуточных результатов окажется больше погрешности измерений, то действия по оценке погрешностей измерений теряют смысл. Поэтому, вычисления необходимо проводить так, чтобы погрешность округления результата вычислений была на порядок меньше случайной погрешности результата измерений. Тогда погрешностью округления можно будет пренебречь по сравнению с погрешностью измерений. Но обычно вычисления выполняются прежде, чем получена оценка погрешности. Поэтому для выполнения этого условия ***все вычисления*** в экспериментальных исследованиях следует ***производить*** с определенным запасом точности ***так, чтобы количество значащих цифр в рассчитанном числе на единицу превышало количество значащих цифр в исходных данных***. Например, если в результате непосредственных измерений получены значения 2,74; 2,73; 2,76 м с точностью до двух десятичных знаков после запятой, то среднее арифметическое значение такой величины следует вычислять уже с точностью до трех десятичных знаков после запятой: $\tilde{x} = (2{,}74 + + 2{,}73 + 2{,}76)/3 \approx 2{,}743$ м.

Правила округления промежуточных результатов измерений и вычислений

Если при записи промежуточных результатов прямых или косвенных измерений или вычислений необходимо выполнить округление полученного значения (отбросить одну и все следующие за ней слева направо значащие цифры), рекомендуется придерживаться следующих правил:

1. Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не изменяется.

2. Если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Последняя сохраняемая цифра увеличивается также и в том случае, когда первая из отбрасываемых цифр 5, а за ней есть одна или несколько цифр, отличных от нуля. Например, при округлении числа 35,856 можно получить: 36; 35,9; 35,86.

3. Если отбрасываемая цифра 5, а за ней нет значащих цифр, то округление производится до ближайшего четного числа, т.е. последняя сохраняемая цифра остается неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная. Например, 0,435 округляем до 0,44; а 0,465 округляем до 0,46.

4. Отброшенные цифры в целой части числа заменяются нулями. Например, при округлении числа 358,56 можно получить: 358,6 359; 360; 400.

Если придерживаться этих правил, то погрешность округления будет подчиняться равномерному распределению, параметр d которого равен половине разряда последней сохраняемой цифры.

Правила записи результатов математических операциях

Чтобы избежать увеличения погрешности результатов прямых и косвенных измерений за счет чрезмерного округления промежуточных вычислений, при выполнении математических операций рекомендуется придерживаться следующих правил:

1. При ***сложении и вычитании*** в результирующем значении сохраняют на один десятичный знак больше, чем их содержится в числе с наименьшим количеством десятичных знаков. Например: 23,2 + 0,44 + + 7,247 = 30,887 $\approx$ 30,89

2. При ***умножении и делении*** в результирующем значении следует записать на одну значащую цифру больше, чем их имеет число с наименьшим количеством значащих цифр. Например: $30{,}9 \cdot 3{,}8364 = 118{,}54476 \approx 119{,}5$.

Отступление от этого правила допускается в тех случаях, когда один из сомножителей начинается с единицы, а сомножитель, имеющий наименьшее количество значащих цифр, – с любой другой цифры. В этом случае результат должен содержать на две значащие цифру больше, чем число с наименьшим количеством значащих цифр. Например: $30{,}9 \cdot 1{,}8364 = 56{,}74476 \approx 56{,}745$.

3. Результаты вычислений значения ***функций*** x^n, $\sqrt[n]{x}$, $\ln x$ и т.д. должны содержать на одну значащую цифру больше, чем их аргумент x. Например: $(11{,}38)^2 = 129{,}5044 \approx 129{,}50$.

Все вычисления выполняются раньше, чем происходит подсчет погрешности и запись окончательного результата. Следовательно, все вычисления, выполняемые при обработке экспериментальных данных, можно считать промежуточными. Поэтому все перечисленные выше правила предусматривают получение дополнительных значащих цифр по сравнению с исходными данными. Это делается для того, чтобы уменьшить систематическую погрешность округления при вычислениях, и в дальнейшем иметь возможность правильно округлить результаты измерений с учетом погрешности. Например, при вычислении среднего арифметического $\tilde{x}$ некоторой величины по результатам измерений рассчитанное значение должно содержать после запятой хотя бы на одну значащую цифру больше, чем в исходных данных.

Этот принцип позволяет при изучении периодически повторяющихся процессов в некоторых случаях уменьшить погрешность измерений. Например, если процесс повторяется во времени, то измеряют время, за которое процесс повториться несколько (больше одного) раз. Затем вычисляют время, за которое процесс произошел один раз (промежуточные вычисления), при записи результата сохраняют после запятой на одну цифру больше, чем в измеренном прибором времени. В результате точность определения времени, за которое процесс произошел один раз, возрастает.

Запись окончательного результата измерений с учетом погрешности измерений

Округление окончательных результатов измерений и вычислений выполняется по тем же правилам, что и округление промежуточных результатов, но выбор последней (слева направо) сохраняемой цифры в округляемом числе осуществляется с учетом погрешности следующим образом:

1. ***Величину абсолютной погрешности*** (доверительного интервала) округляют до второй (слева направо) значащей цифры, если первая из них единица, и до первой значащей цифры во всех остальных случаях.
2. ***Результат измерений*** (среднее арифметическое значение величины, полученное в результате прямых или косвенных измерений) округляют до того же разряда, что и абсолютная погрешность. Число значащих цифр окончательного результата определяется порядком величины абсолютной погрешности (доверительного интервала).

Например: 13,828 – результат измерений некоторой величины, который получен с абсолютной погрешностью 0,045. Тогда окончательный результат следует записать в виде

$$13{,}83 \pm 0{,}04.$$

Далее необходимо указать единицы измерения данной величины и доверительную вероятность α, соответствующую абсолютной погрешности.

ПРИМЕР РАСЧЕТА ПОГРЕШНОСТИ И ЗАПИСИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Пусть в эксперименте выполнялись измерения размеров тела правильной геометрической формы (параллелепипеда) с целью определения его объема. Результаты измерений приведены в табл. 4. Все измерения проводились штангенциркулем с ценой деления нониуса 0,1 мм.

Таблица 4

Результаты измерений линейных размеров параллелепипеда

№ п/п	Длина a, мм	Ширина b, мм	Высота h, мм
1	12,7	12,7	14,8
2	12,7	12,8	14,9
3	12,7	12,9	14,7
Среднее:	$\tilde{a}$ = 12,70	$\tilde{b}$ = 12,80	$\tilde{h}$ = 14,80

Обработка экспериментальных результатов

1. Рассчитаем ***погрешность прямых измерений величины b*** (см. стр. 47). Значения величины b измерялись три раза (n = 3).

Среднее арифметическое значение: $\tilde{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$ =12,80 мм.

Среднеквадратичное отклонение $\tilde{\sigma}_b$:

$$\tilde{\sigma}_b = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{b} - b_i)^2} = \sqrt{\frac{0{,}1^2 + 0 + (-0{,}1)^2}{3 \cdot 2}} =$$

$$= \sqrt{33{,}3 \cdot 10^{-4}} = 5{,}77 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

При n = 3 и α = 0,95 коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$ = 4,30, следовательно, абсолютная случайная погрешность многократных измерений:

$$\Delta\tilde{b}_{СЛ} = t_{\alpha n} \cdot \tilde{\sigma}_b = 4{,}30 \cdot 5{,}77 \cdot 10^{-2} = 0{,}2481 \text{ мм.}$$

Измерения выполнялись по нониусу штангенциркуля с ценой деления 0,1 мм. Прибор не имеет внутреннего технического устройства, поэтому (см. стр. 38) параметр равномерного распределения для погрешности однократных измерений равен цене деления прибора: d = 0,1 мм (т.к. указатель прибора не может занимать промежуточные положения между делениями на шкале прибора). Тогда погрешность однократных измерений:

$$\Delta\tilde{b}_{ОИ} = \alpha \cdot d = 0{,}95 \cdot 0{,}1 = 0{,}095 \text{ мм.}$$

Полная абсолютная погрешность прямых измерений величины b:

$$\Delta\tilde{b} = \sqrt{\Delta\tilde{b}_{сл}^2 + \Delta\tilde{b}_{ои}^2}\ ; \ \Delta\tilde{b} = \sqrt{0{,}2481^2 + 0{,}095^2} = 0{,}2657 \text{ мм.}$$

Если это необходимо для дальнейшего представления результатов исследования, запишем полученное из эксперимента значение величины b с учетом погрешности

$$b = \tilde{b} \pm \Delta\tilde{b} = (12{,}8 \pm 0{,}3) \text{ мм.}$$

При этом абсолютная погрешность округляется до первой значащей цифры $\Delta\tilde{b} \approx 0{,}3$ мм, а среднее арифметическое значение – до того же разряда, что и абсолютная погрешность, т.е. $\tilde{b} \approx 12{,}8$ мм.

2. Аналогично рассчитаем ***погрешность прямых измерений величины h*** (см. стр. 47). Значения величины h тоже измерялись три раза (n = 3).

Среднее арифметическое значение: $\tilde{h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i$ =14,80 мм.

Среднеквадратичное отклонение $\tilde{\sigma}_h$:

$$\tilde{\sigma}_h = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{h} - h_i)^2} = 5{,}77 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

При α = 0,95 и n = 3 (количество опытов для измерения всех трех величин a, b, h было одинаковым) коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$ = 4,30.

Абсолютная случайная погрешность многократных измерений:

$$\Delta\tilde{h}_{СЛ} = t_{\alpha n} \cdot \tilde{\sigma}_h = 4{,}30 \cdot 5{,}77 \cdot 10^{-2} = 0{,}2481 \text{ мм.}$$

Погрешность однократных измерений (такая же, как для величины b, так как измерения проводились одним и тем же прибором):

$$\Delta\tilde{h}_{ОИ} = \alpha \cdot d = 0{,}95 \cdot 0{,}1 = 0{,}095 \text{ мм.}$$

Полная абсолютная погрешность прямых измерений величины h:

$$\Delta\tilde{h} = \sqrt{\Delta\tilde{h}_{СЛ}^2 + \Delta\tilde{h}_{ОИ}^2}; \ \Delta\tilde{h} = 0{,}2657 \text{ мм.}$$

Если это необходимо для дальнейшего представления результатов исследования, запишем значение величины h с учетом погрешности

$$h = \tilde{h} \pm \Delta\tilde{h} = (14{,}8 \pm 0{,}3) \text{ мм.}$$

При этом абсолютная погрешность округляется до первой значащей цифры $\Delta\tilde{h} \approx 0{,}3$ мм, а среднее арифметическое значение – до того же разряда, что и абсолютная погрешность, т.е. $\tilde{h} \approx 14{,}8$ мм.

3. Рассчитаем ***погрешность прямых измерений величины a*** (см. стр. 47).

Так как в результате трех измерений величины a получены одинаковые значения, среднеквадратичное отклонение $\tilde{\sigma}_a = 0$, и абсолютная случайная погрешность многократных измерений тоже $\Delta\tilde{a}_{СЛ} = 0$.

Так как измерения всех трех величин a, b и h выполнялись одним и тем же прибором, то погрешность однократных измерений для этой величины такая же, как и для двух предыдущих $\Delta\widetilde{a}_{ОИ} = \alpha \cdot d = 0{,}95 \cdot 0{,}1 =$ $= 0{,}095$ мм.

Тогда полная абсолютная погрешность прямых измерений величины a:

$$\Delta\widetilde{a} = \sqrt{\Delta\widetilde{a}_{СЛ}^{2} + \Delta\widetilde{a}_{ОИ}^{2}} = \Delta\widetilde{a}_{ОИ} = 0{,}095 \text{ мм}.$$

Если это необходимо для дальнейшего представления результатов исследования, запишем значение величины a с учетом погрешности

$$a = \widetilde{a} \pm \Delta\widetilde{a} = (12{,}70 \pm 0{,}10) \text{ мм}.$$

При этом абсолютная погрешность округляется до второй значащей цифры (т.к. первая значащая цифра 1) $\Delta\widetilde{a} \approx 0{,}10$ мм, а среднее арифметическое значение – до того же разряда, что и абсолютная погрешность, т.е. $\widetilde{a} \approx 12{,}70$ мм.

4. Рассчитаем искомое ***значение объема параллелепипеда*** (косвенные измерения), используя средние арифметические значения $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{h}$ непосредственно измеряемых величин:

$$\widetilde{V} = \widetilde{a} \cdot \widetilde{b} \cdot \widetilde{h} = 12{,}7 \cdot 12{,}8 \cdot 14{,}8 = 2405{,}888 \text{ мм}^3.$$

5. Рассчитаем ***абсолютную погрешность объема параллелепипеда*** $\Delta\widetilde{V}$ – абсолютную погрешность косвенных измерений (см. стр. 56).

Прологарифмируем связь объема с измеряемыми величинами $V = a \cdot b \cdot h$:

$$\ln V = \ln a + \ln b + \ln h.$$

Вычислим частные производные и подставим в полученные выражения значения $a = \widetilde{a}$, $b = \widetilde{b}$, $h = \widetilde{h}$:

$$\frac{\partial(\ln\widetilde{V})}{\partial a} = \frac{1}{\widetilde{a}}, \quad \frac{\partial(\ln\widetilde{V})}{\partial b} = \frac{1}{\widetilde{b}}, \quad \frac{\partial(\ln\widetilde{V})}{\partial h} = \frac{1}{\widetilde{h}}.$$

Тогда согласно одной из формул для определения абсолютной погрешности косвенных измерений

$$\Delta\widetilde{V} = \widetilde{V}\sqrt{\left(\frac{\partial(\ln\widetilde{V})}{\partial a}\right)^2 (\Delta\widetilde{a})^2 + \left(\frac{\partial(\ln\widetilde{V})}{\partial b}\right)^2 (\Delta\widetilde{b})^2 + \left(\frac{\partial(\ln\widetilde{V})}{\partial h}\right)^2 (\Delta\widetilde{h})^2}$$

получим окончательную формулу

$$\Delta\widetilde{V} = \widetilde{V}\sqrt{\left(\frac{\Delta\widetilde{a}}{\widetilde{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\widetilde{b}}{\widetilde{b}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\widetilde{h}}{\widetilde{h}}\right)^2}.$$

По отношению к погрешности объема $\Delta\widetilde{V}$ средние значения $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{h}$ и погрешности $\Delta\widetilde{a}$, $\Delta\widetilde{b}$, $\Delta\widetilde{h}$ измерения линейных размеров являются промежуточными результатами. Поэтому в дальнейших расчетах используются их значения без округления.

$$\Delta\widetilde{V} = 2405{,}888\sqrt{\left(\frac{0{,}095}{12{,}70}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2657}{12{,}80}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2657}{14{,}80}\right)^2}$$

Или $\Delta\widetilde{V} = 2405{,}888 \cdot 2{,}8445 \cdot 10^{-2} = 68{,}4355\,\text{мм}^3$.

Абсолютную погрешность необходимо округлить до первой (слева) значащей цифры

$$\Delta\widetilde{V} \approx 70\ \text{мм}^3.$$

Значение объема следует округлить до того же разряда

$$\widetilde{V} \approx 2410\ \text{мм}^3.$$

Окончательный результат косвенных измерений объема параллелепипеда запишем в виде:

$V = \widetilde{V} \pm \Delta\widetilde{V}$ = (2410 ± 70) мм^3 с доверительной вероятностью α = 0,95.

6. ***Относительная погрешность*** косвенных измерений объема параллелепипеда (округляется до двух значащих цифр):

$$\delta = \frac{\Delta\widetilde{V}}{\widetilde{V}} = \frac{70}{2410} = 0{,}029 \text{ или } 2{,}9\%.$$

СПОСОБЫ УМЕНЬШЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ И КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Для практического уменьшения каждого из рассмотренных ранее видов погрешностей существуют технические и методические способы. К техническим способам относятся, как правило, замена и разработка всех или некоторых измерительных приборов, входящих в состав экспериментальной установки. Методические способы уменьшения погрешности – это совокупность операций, последовательное выполнение которых позволяет на той же установке выполнить измерения с большей точностью. Рассмотрим некоторые из этих способов, наиболее распространенные в учебной лаборатории.

Погрешность однократных измерений. Для уменьшения погрешности однократных измерений используют более точные измерительные приборы (с меньшей ценой деления или с меньшим классом точности). Если такие приборы не существуют, то прибегают к конструированию новых приборов с заданной погрешностью прибора и погрешностью отсчета. С экономической точки зрения это самый дорогой и не всегда доступный способ уменьшения погрешности однократных измерений.

Другой способ уменьшения погрешности однократных измерений состоит в оптимальном выборе соотношения между измеряемой величиной и диапазоном измерений прибора. Если для используемого прибора разные значения измеряемой величины x имеют одинаковую абсолютную погрешность $\Delta\tilde{x}_{ОИ}$ однократных измерений, но относительная погрешность $\delta_{ОИ} = \Delta\tilde{x}_{ОИ} / x$ будет меньше у той величины x, абсолютное значение которой больше. Таким характером зависимости погрешности однократных измерений от измеряемого значения обладают либо приборы с постоянной ценой деления, не имеющие внутреннего технического устройства, либо приборы, класс точности которых обозначается одним числом без обрамления (см. стр. 40). Поэтому если измерения выполняются прибором с постоянной абсолютной погрешностью, то диапазон измерений этого прибора должен быть таким, чтобы ожидаемое значение измеряемой величины (показание прибора) находилось в последней трети диапазона измерений. При постоянной абсолютной погрешности это позволит уменьшить относительную погрешность однократных измерений этим прибором. Если для используемого прибора относительная погрешность $\delta_{ОИ}$ однократных измерений одинакова для любого измеряемого значения x, то абсолютная погрешность $\Delta\tilde{x}_{ОИ} = \delta_{ОИ} \cdot x$ будет меньше у той величины, абсолютное значение которой меньше. Поэтому если погрешность отсчета пренебрежимо мала, а класс точности прибора обозначается одним числом, обрамленным окружностью, то диапазон измерений этого прибора должен быть таким, чтобы ожидаемое значение измеряемой величины (показание прибора) находилось в первой трети диапазона измерений. При постоянной относительной погрешности это позволит уменьшить абсолютную погрешность однократных измерений этим прибором. Для остальных приборов, погрешность однократных измерений которых зависит от значения измеряемой величины более сложным образом, диапазон измерений следует выбирать так, чтобы ожидаемое значение измеряемой величины (показание прибора) находилось во второй трети диапазона измерений.

Этот способ уменьшения погрешности однократных измерений за счет оптимального выбора соотношения между измеряемой величиной и диапазоном измерений прибора чаще всего применяется при изучении характеристик периодически повторяющихся процессов (например, вращений, колебаний и т.д.). Некоторые характеристики таких процессов пропорциональны количеству периодов (оборотов, повторений), например, продолжительность вращения пропорциональна количеству оборотов и т.д. Если для измерения таких характеристик используется прибор с постоянной абсолютной погрешностью $\Delta\tilde{x}_{ОИ}$, то можно выбрать такое количество периодов (оборотов, повторений), чтобы измеряемое значение находилось в последней трети диапазона измерений (близко к концу диапазона измерений). Такой выбор измеряемой величины позволяет на том же самом приборе получить результат с меньшей относительной погрешностью $\delta_{ОИ} = \Delta\tilde{x}_{ОИ} / x$, чем при измерении, соответствующем одному периоду. Следует напомнить, что специальный выбор измеряемой величины относится к методическим способам уменьшения погрешности однократных измерений. Этот способ уменьшения погрешности широко используется в лабораторном практикуме.

Случайная погрешность. Абсолютная случайная погрешность $\Delta\tilde{x}_{СЛ}$ (доверительный интервал) многократных равноточных измерений обратно пропорциональна квадратному корню из количества измерений: $\Delta\tilde{x}_{СЛ} = t_{\alpha n}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, поэтому для уменьшения абсолютной погрешности $\Delta\tilde{x}_{СЛ}$ следует увеличить количество измерений одной или нескольких измеряемых величин.

Создание и поддержание в течение всего эксперимента определенных условий (температурных, барометрических, вибрационных, электромагнитных и т.д.) его проведения также позволяет в большинстве случаев уменьшить случайную, а в некоторых случаях и систематическую погрешность. Для уменьшения случайной погрешности принимают меры для устранения кратковременных (по сравнению с длительностью экспериментов) изменений температуры, давления и т.д., а для уменьшения систематической погрешности – меры для устранения стационарных отличий реальных условий проведения эксперимента от запланированных. Для создания и поддержания условий проведения эксперимента чаще всего используются различные технические приспособления, например, изолирующие кожухи, камеры и т.д. Но в некоторых экспериментах для поддержания определенных условий в процессе выполнения эксперимента используют и различные методические приемы. Например, чтобы избежать дополнительной ошибки при измерении давления газа в баллоне большого объема, необходимо нагнетать газ в баллон постепенно, небольшими порциями, а перед измерением выждать определенное время, в течение которого давление в разных частях баллона выровняется. Это правило становится особенно актуальным, если измерения давления осуществляются с помощью одного датчика (прибора), фиксирующего значение давления в определенной части сосуда. Поэтому важно, чтобы на момент измерения давление во всех частях сосуда было одинаковым.

Систематическая погрешность. Одним из широко используемых в учебном эксперименте способов уменьшения систематической погрешности является индивидуальная градуировка прибора. Характеристики некоторых приборов, таких, например, как термопары, могут плавно изменяться в течение длительных промежутков времени, но при этом считаться постоянными в течение кратковременных экспериментов. Такие приборы перед использованием необходимо градуировать (определить цену деления и диапазон измерений для этого прибора).

Для исключения систематических погрешностей прибегают также к информационной избыточности – такому способу проведения эксперимента, при котором одна и та же величина измеряется несколькими приборами, имеющими разные технические характеристики. Кроме того для уменьшения систематической погрешности используют тестовые сигналы, метод сравнения с мерой, метод обратных преобразований и т.д.

Погрешность косвенных измерений. Для уменьшения погрешности косвенных измерений важно, чтобы погрешность промежуточных вычислений была много меньше погрешности прямых измерений. Если в промежуточных вычислениях используются физические константы (такие как гравитационная постоянная, скорость света и т.д.), в них должны быть приняты во внимание на 1–2 значащие цифры больше, чем в данных, полученных с помощью прямых измерений. Например, если измерения времени движения тела при равноускоренном падении содержат две значащие цифры (например, t = 0,23 с), то для вычисления по формуле $h = gt^2/2$ ускорение свободного падения g необходимо записать с точностью не менее трех значащих цифр, например, g = 9,78 м/с^2. Результаты всех промежуточных вычислений также должны содержать на 1–2 значащие цифры больше, чем в данных, полученных с помощью прямых измерений. Чрезмерное округление промежуточных результатов увеличивает систематическую погрешность косвенных измерений.

Для уменьшения погрешности косвенных измерений можно использовать электронные таблицы (например, MS Excel) или самостоятельно написанные компьютерные программы (Mathcad, MatLab, Pascal, C# и т.д.). Если при этом не использовать округление, все вычисления будут выполняться с такой точностью, которую поддерживает используемый компьютер, а сохранение последовательности математических операций в файле позволяет сократить вероятность случайных ошибок, возникающих при вычислениях и связанных с невнимательность экспериментатора. Поэтому автоматизация эксперимента, как при получении, так и при обработке экспериментальных данных является перспективным направлением уменьшения погрешности как косвенных, так и прямых измерений.

В процессе выполнения эксперимента и обработки экспериментальных данных необходимо помнить и принимать меры для уменьшения всех видов погрешностей. Далее можно сравнить, какая из погрешностей дает наибольший вклад в погрешность искомого результата. Так как в физическом эксперименте, как правило, измеряемые и вычисляемые величины имеют разные размерности, сравнивать можно только относительные погрешности: $\Delta\tilde{a}/\tilde{a}$, $\Delta\tilde{b}/\tilde{b}$, $\Delta\tilde{h}/\tilde{h}$ и $\Delta\tilde{V}/\tilde{V}$ (для примера, приведенного на стр. 62). Относительную погрешность чаще всего выражают в процентах и округляют до двух значащих цифр. Так в приведенном ранее примере (стр. 62)

$$\frac{\Delta\tilde{a}}{\tilde{a}} = \frac{0{,}095\,\text{мм}}{12{,}7\,\text{мм}} \cdot 100\% = 0{,}75\%; \quad \frac{\Delta\tilde{b}}{\tilde{b}} = \frac{0{,}2657\ \text{мм}}{12{,}8\,\text{мм}} \cdot 100\% = 2{,}1\%;$$

$$\frac{\Delta\tilde{h}}{\tilde{h}} = \frac{0{,}2657\ \text{мм}}{14{,}8\ \text{мм}} \cdot 100\% = 1{,}8\%; \quad \frac{\Delta\tilde{V}}{\tilde{V}} = \frac{68{,}4355\ \text{мм}^3}{2405{,}888\ \text{мм}^3} \cdot 100\% = 2{,}8\%$$

наибольший вклад в относительную погрешность объема параллелепипеда вносят относительные погрешности измерения стороны b и высоты h. Как видно из проведенных ранее расчетов эти погрешности больше относительной погрешности измерения стороны a за счет наличия случайной составляющей погрешности. Поэтому для уменьшения погрешности величин b и h можно увеличить количество их прямых измерений. При тех же условиях эксперимента это должно привести к уменьшению случайной погрешности прямых измерений этих величин, а, следовательно, и к уменьшению погрешности измерения объема.

ГРАФИЧЕСКАЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Следует отметить, что одной из типичных задач, решаемых в учебном эксперименте, является выявление функциональных зависимостей между различными физическими величинами, характеризующими изучаемый процесс, явление или объект. Как правило, искомые зависимости представляют либо в аналитическом виде, либо в виде графиков.

ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Графическое представление результатов обладает большой наглядностью и информативностью. Графики экспериментальных зависимостей позволяют легко визуально определять характер этих зависимостей, судить о величине разброса экспериментальных данных по сравнению с предсказаниями теории и т.д.

Отличительной особенностью графиков, изображающих физические зависимости, является размерный характер отложенных по осям величин.

Для того чтобы графики, построенные при выполнении лабораторных работ, были максимально информативными, необходимо соблюдать определенные правила их построения.

Основные требования, предъявляемые к построению графиков

1. Графики строят на ***бумаге форматом*** 14×18 см, 14×14 см или 18×14 см с помощью линейки и карандаша либо с помощью специальных компьютерных средств для построения графиков, которые предоставляют такие программные продукты, например, как MS Excel, Origin, Mathematica и др.
2. На ***координатных осях*** должны быть указаны обозначения (наименования) откладываемых величин и единицы их измерения.
3. ***Начало координат*** выбирают таким образом, чтобы площадь графика была использована максимально. Поэтому оно (начало координат) может не совпадать с нулевым значением на одной или обоих координатных осях.

4. ***Экспериментальные точки*** изображаются четко и крупно в виде кружков, крестиков, квадратов, ромбов и т.п.

5. ***Масштабные деления на координатных осях*** следует наносить равномерно. Координаты экспериментальных точек на осях не указывают, и линии, определяющие эти координаты, не проводят.

6. ***Масштаб*** выбирают таким образом, чтобы:

a. Кривая, изображающая график зависимости, была максимально растянута вдоль обеих осей (например, если график представляет собой прямую, а область построения графика является квадратной, то угол наклона этой прямой к осям должен быть близок к 45°).

b. Положение любой точки можно было определить легко и быстро. Масштаб считается удобным, если в одном масштабном делении (миллиметре или сантиметре), нанесенном на оси графика, содержится одна или две (пять, десять, пятьдесят и т. д.) единиц измеренной величины.

7. Учитывая, что экспериментальные данные содержат определенную случайную погрешность, ***кривую (прямую)***, изображающую экспериментальную зависимость, следует проводить не по экспериментальным точкам, а между ними – так, чтобы количество экспериментальных точек по обе стороны от нее было одинаковым. В большинстве случаев кривая должна быть гладкой.

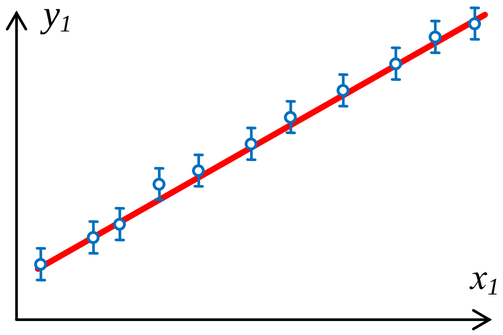


Рис. 13. График зависимости $y_1 = F_1(x_1)$ с указанием погрешности измерений физической величины y_1

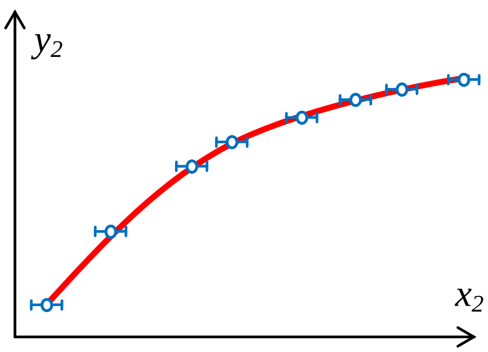


Рис. 14. График зависимости $y_2 = F_2(x_2)$ с указанием погрешности измерений физической величины x_2

8. При необходимости на графике можно ***отложить погрешности прямых или косвенных измерений*** соответствующих величин (доверительные интервалы). Делается это с помощью вертикальных или

горизонтальных отрезков (⊥○⊤, ⊢○⊣) симметрично расположенных относительно экспериментальных точек.

На рис. 13 и рис. 14 приведены примеры изображения погрешностей измерений на графиках некоторых физических зависимостей $y_1 = F_1(x_1)$ и $y_2 = F_2(x_2)$. В пределах погрешности эксперимента по экспериментальным данным можно провести несколько кривых, проходящих достаточно близко к экспериментальным точкам.

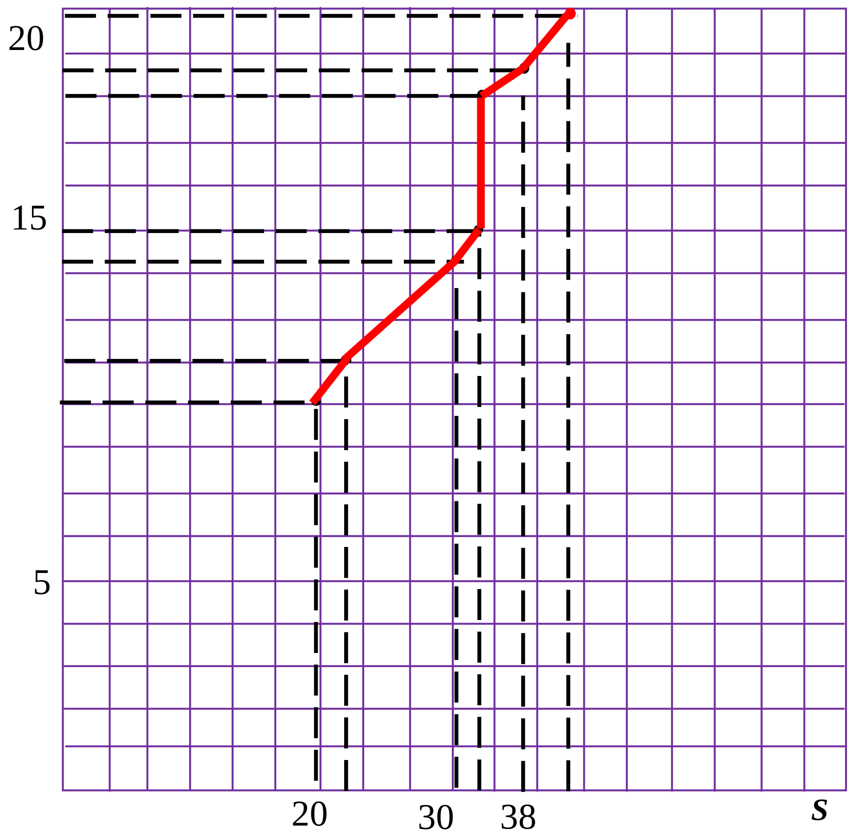


Рис. 15. Пример несоблюдения требований к построению графика

Наиболее типичные ошибки при построении графиков

Пусть требуется построить график зависимости пути от времени $S = F(t)$ для равномерно движущегося тела. Результаты измерений длины пути S, пройденного телом в разные моменты времени t приведены в табл. 5.

На рис. 15 показаны основные наиболее типичные ошибки, допускаемые студентами при построении графиков.

При построении графика, изображенного на рис. 15, допущены следующие ошибки:

Таблица 5

Результаты измерения длины пути *S* и времени *t*

t, с	10	12	14	15	16	18	19	22
S, м	20	23	30	31	34	34	38	43

1. Неправильно выбраны направления осей координат: время *t* является независимой переменной (аргументом) и должно быть отложено по оси абсцисс (по горизонтали), а зависимая переменная (функция) – путь *S* – по оси ординат (по вертикали).
2. На оси ординат не указана отложенная величина (время *t*) и единицы ее измерения (с), а на оси абсцисс – единицы измерения пути (м).
3. Площадь графика использована не полностью. Из экспериментальных данных, приведенных в табл. 5, не следует, что оси координат должны начинаться с нулевой отметки, поэтому начало координат можно сместить и за счет этого увеличить масштаб, как по оси абсцисс, так и по оси ординат.
4. Экспериментальные точки не выделены.
5. На оси абсцисс нанесены не масштабные деления, а координаты некоторых экспериментальных точек, по оси ординат масштабные деления нанесены неравномерно.

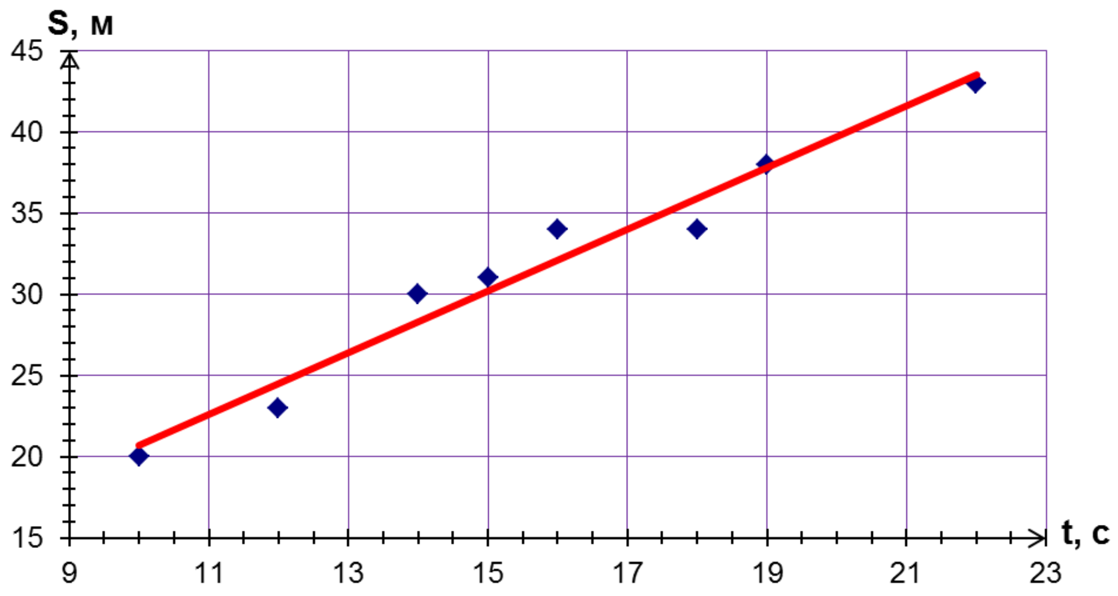


Рис. 16. Пример соблюдения требований к построению графика

6. Благодаря неправильно выбранному началу координат и неудачному (слишком мелкому) масштабу график сжат по оси абсцисс, и его чтение затруднено.

7. Неправильно соединены экспериментальные точки: зависимость пути от времени при равномерном движении заведомо линейна, и график должен представлять прямую линию, расположенную как можно ближе к экспериментальным точкам.

На рис. 16 представлен график этой же зависимости $S = F(t)$, построенный правильно.

ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ, СВЯЗЫВАЮЩИХ ИЗМЕРЯЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть в результате эксперимента получены следующие значения двух измеряемых величин: $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ и $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, которые связаны некоторой функциональной зависимостью $y = F(x)$, вид которой (математическая формула) заранее не известен. На примере линейной зависимости рассмотрим несколько методов, позволяющих получить неизвестную аналитическую функцию (математическую формулу).

Графический метод получения параметров функциональной зависимости

По имеющимся экспериментальным данным $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ и $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ построим график зависимости $y = F(x)$. По виду графика (с учетом погрешности измерений) определим, можно ли имеющуюся зависимость считать линейной. Если изучаемую зависимость можно считать линейной, то она может быть выражена формулой $y = ax + b$, где a и b – неизвестные числовые коэффициенты, подлежащие определению.

Обязательные условия применения данного метода: начало отсчета по обеим осям должно совпадать с нулем; обе оси должны иметь равномерный масштаб.

Таблица 6

Исходные (например, полученные в результате измерений) значения величин x и y

x	0,4	**1,5**	2,5	3,5	4,6	5,5	6,5	7,5	8,4	9,5	10,7	11,7	13	**13,5**
y	3,5	**4,1**	4,9	5,3	5,3	6,4	7,2	7,5	7,9	8,9	9,1	10,6	11	**11,1**
		M												**N**

На построенном графике зависимости $y = F(x)$ проводят предполагаемую (искомую) прямую до пересечения с осью ординат. Прямая проводится по линейке на глаз как можно ближе к экспериментальным точкам.

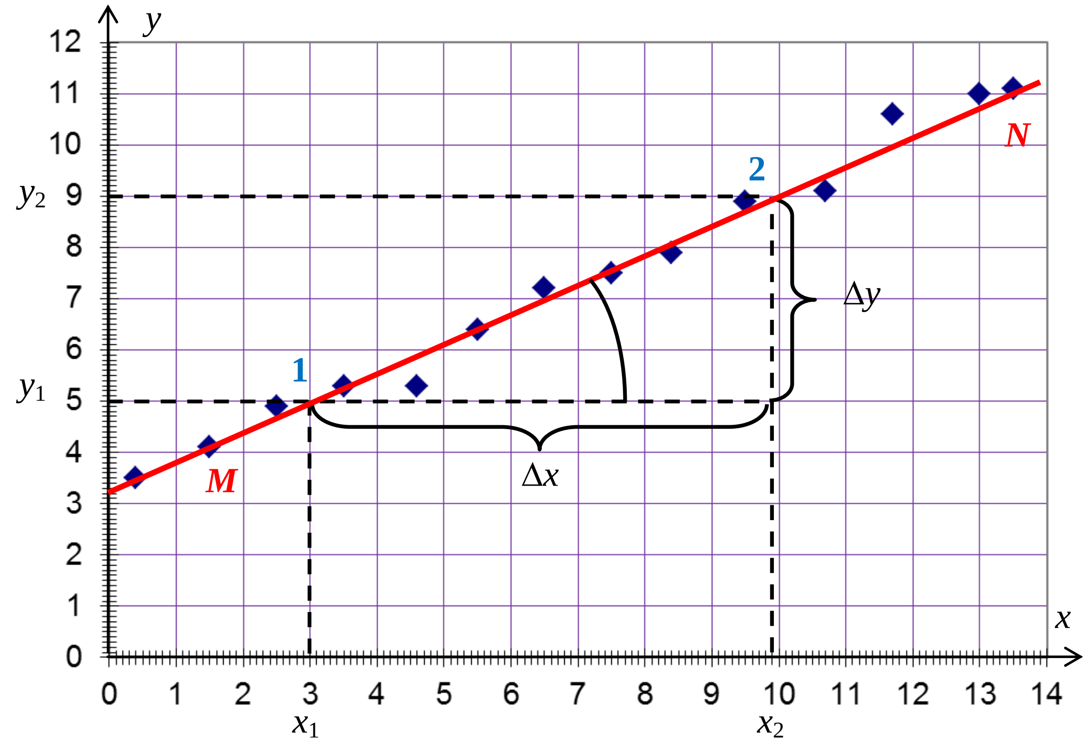


Рис. 17. Использование графика $y = F(x)$ для получения коэффициентов линейной зависимости между величинами x и y

На рис. 17 приведен график, построенный по значениям, приведенным в табл. 6. Рассмотрим два способа определения неизвестных коэффициентов a и b на основе этого графика.

Способ 1. Из математического анализа известно, что отрезок, отсекаемый искомой прямой от оси ординат, равен коэффициенту b, а тангенс угла наклона прямой по отношению к оси абсцисс (с учетом масштаба) – коэффициенту a.

Из рис. 17 видно, что график пересекает вертикальную ось в точке с координатами (0; 3,2). Следовательно, $b = 3{,}2$.

Для нахождения тангенса угла наклона нужно на построенном графике прямой выбрать две точки 1 и 2, расположенные достаточно далеко друг от друга, и определить их координаты (значения аргумента x_1, x_2 и функции y_1, y_2). Через точки 1 и 2 следует провести прямые, параллельные осям. В результате получится прямоугольный треугольник, катеты которого равны $\Delta x = x_2 - x_1$ и $\Delta y = y_2 - y_1$, соответственно, а гипотенуза лежит на графике (на искомой прямой). Тогда тангенс угла между графиком и проведенной через точку 1 горизонтальной прямой равен отношению противолежащего по отношению к углу катета Δy к прилежащему катету Δx. Следовательно и коэффициент a равен отношению этих катетов: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Для уменьшения погрешности вычислений коэффициента a точки 1 и 2 выбирают так, чтобы одно из значений $\Delta x = x_2 - x_1$ или $\Delta y = y_2 - y_1$ содержало целое количество делений соответствующей оси в выбранном масштабе. Например, $y_1 = 5{,}0$, $y_2 = 9{,}0$. Тогда из рисунка $a = \frac{4}{6{,}9} = 0{,}58$.

Следовательно, уравнение искомой прямой: $y = 0{,}58\,x + 3{,}2$.

Способ 2. Формально для определения коэффициентов a и b на проведенной на глаз прямой достаточно взять две произвольные точки с координатами $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Подстановка значений этих координат в уравнение $y = ax + b$ позволяет получить систему из двух уравнений для определения неизвестных коэффициентов a и b.

$$ax_1 + b = y_1;$$
$$ax_2 + b = y_2.$$

Решая систему уравнений, находим:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};\ b = y_1 - ax_1 \text{ или } b = y_2 - ax_2.$$

Этот способ можно применять, если искомая прямая проведена так, что хотя бы две экспериментальные точки, расположенные далеко друг от друга, точно лежат на ней. Из графика видно, что точки M и N принадлежат искомой прямой. Из табл. 6 видно, что эти точки имеют координаты: M (1,5; 4,1) и N (13,5; 11,1). Тогда найдем коэффициенты a и b:

$$a = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{11{,}1 - 4{,}1}{13{,}5 - 1{,}5} = \frac{7}{12} = 0{,}583;$$
$$b = y_M - ax_M = y_N - ax_N = 11{,}1 - 0{,}583 \cdot 13{,}5 = 3{,}229.$$

Таким образом: $y = 0{,}583x + 3{,}23$.

Линеаризация функциональных зависимостей

В случае если экспериментальная зависимость имеет нелинейный характер, путем замены переменных ее можно привести к линейному виду, при этом используется новая система координат. После этого можно вновь применить графический метод определения параметров аналитической зависимости в этой системе координат. Этот прием называют ***линеаризацией функциональных зависимостей***.

Рассмотрим, например, квадратичную зависимость $y \sim x^2$. Если на ось OY нанести равномерную шкалу, а на ось OX_1 – шкалу квадратов $x_1 = x^2$, то получится система координат, где уравнение параболы изображается в виде прямой линии ($y \sim x_1$).

Особенно часто используются различные логарифмические системы координат, с помощью которых можно «выпрямлять» графики степенных и показательных функций. Например, $y = be^{ax} \Rightarrow \ln y = a \cdot x + \ln b$. Полагая $\ln y = y_1$; $\ln b = b_1$, преобразуем уравнение $\ln y = a \cdot x + \ln b$ к виду $y_1 = ax + b_1$. Отсюда видно, что оставив равномерной ось OX и выбрав логарифмическую ось OY_1, в этой системе координат можно изобразить исходное уравнение в виде прямой линии. Полученная система координат называется полулогарифмической.

Таблица 7

Линеаризация некоторых функций

Исходная формула	Преобразованная формула	Замена переменных	Линеаризованная формула
$y = bx^a$	$\ln y = a \cdot \ln x + \ln b$	$\ln y = y_1$ $\ln x = x_1$ $\ln b = b_1$	$y_1 = ax_1 + b_1$
$y = a \cdot \ln x + b$	—	$\ln x = x_1$	$y = ax_1 + b$
$y = e^{ax+b}$	$\ln y = ax + b$	$\ln y = y_1$	$y_1 = ax + b$
$y = be^{ax}$	$\ln y = ax + \ln b$	$\ln y = y_1$ $\ln b = b_1$	$y_1 = ax + b_1$
$y = \frac{a}{x} + b$	—	$\frac{1}{x} = x_1$	$y = ax_1 + b$
$y = \frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{y} = ax + b$	$\frac{1}{y} = y_1$	$y_1 = ax + b$
$y = \frac{x}{bx+a}$	$\frac{1}{y} = \frac{a}{x} + b$	$\frac{1}{y} = y_1$ $\frac{1}{x} = x_1$	$y_1 = ax_1 + b$

Очевидно, что такого рода преобразования возможны и в более общем случае. Всякая неявная функция, заданная соотношением вида

$$a\varphi(x) + b\psi(y) + c = 0,$$

(где a, b, c – константы) будет изображаться прямой линией в функциональной системе координат, где по оси OX_1 отложены значения функции $\varphi(x)$, а по оси OY_1 – значения функции $\psi(y)$. Используемые при этом функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ в пределах графика должны быть непрерывными и монотонными. В табл. 7 приведены примеры линеаризации некоторых функций.

Когда исследуемая экспериментальная зависимость представляет собой нелинейную кривую, по графику на глаз трудно судить, какого типа функцией ее лучше всего описать. Переведя полученные экспериментальные данные в различные функциональные системы координат, можно оценить на какой из них эта зависимость ближе всего к линейной и, следовательно, какой функцией лучше всего ее описать.

Аналитические методы получения параметров функциональной зависимости

Описанный выше графический метод получения параметров функциональной зависимости обладает хорошей наглядностью и относительной простотой. Однако его результаты содержат определенную субъективность и обладают довольно большой погрешностью.

Аналитические методы лишены, в какой-то степени, указанных недостатков и позволяют получить результат для более широкого класса функций с большей точностью, чем графический метод, но уступают ему в наглядности.

На примере линейной зависимости $y = ax + b$ рассмотрим некоторые из существующих методов аналитического расчета параметров a и b этой функции.

Методы вычисления параметров линейных зависимостей

Пусть в результате эксперимента по-прежнему получены значения двух измеряемых величин ($y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ и $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$), между которыми предполагается линейная зависимость вида $y = ax + b$. Наблюдаемые значения y_i величины y будут отличаться от значений, полученных по формуле $ax_i + b$, вследствие наличия экспериментальных погрешностей измерения. Обозначим через Δ_i соответствующие отклонения измеренного значения от линейной зависимости

$$\Delta_i = y_i - (ax_i + b) \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Метод средней

Если выбирать параметры a и b так, чтобы все n отклонений от линейной зависимости уравновешивались, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0 \ (\text{при } n \neq \infty),$$

то это условие позволяет записать только одно уравнение, тогда как для нахождения двух коэффициентов a и b требуются два уравнения. Поэтому предположим, что уравновешивание происходит не для всех произведенных измерений в целом, а по отдельности для двух групп, каждая из которых содержит половину (или почти половину) всех измеренных значений. Это предположение позволяет записать систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} (y_i - ax_i - b) = 0; \\ \sum_{i=m+1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0, \end{cases}$$

где m – число измерений в первой группе.

Данную систему уравнений можно переписать в виде

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{m} x_i + mb = \sum_{i=1}^{m} y_i; \\ a\sum_{i=m+1}^{n} x_i + (n-m)b = \sum_{i=m+1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Для нахождения коэффициентов a и b необходимо решить полученную систему уравнений, предварительно рассчитав четыре несложные суммы.

Для иллюстрации этого метода используем те же экспериментальные данные, как и для иллюстрации графического метода (стр. 75). Тогда удобно данные из табл. 6 разделить на две части и переписать в виде табл. 8: все 14 измерений (n = 14) разделим на две группы, m = 7 в первой и $n - m$ = 7 во второй.

Рассчитаем суммы, которые необходимы для записи системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 24{,}5; \ \sum_{i=1}^{7} y_i = 36{,}7; \ \sum_{i=8}^{14} x_i = 74{,}3; \ \sum_{i=8}^{14} y_i = 66{,}1.$$

Подставив полученные значения в систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} a \cdot 24{,}5 + 7 \cdot b = 36{,}7; \\ a \cdot 74{,}3 + 7 \cdot b = 66{,}1. \end{cases}$$

Таблица 8

Исходные (например, полученные в результате измерений) значения величин *x* и *y*

№ п/п	x_i	y_i	№ п/п	x_i	y_i
1	0,4	3,5	8	7,5	7,5
2	1,5	4,1	9	8,4	7,9
3	2,5	4,9	10	9,5	8,9
4	3,5	5,3	11	10,7	9,1
5	4,6	5,3	12	11,7	10,6
6	5,5	6,4	13	13	11
7	6,5	7,2	14	13,5	11,1
	$\sum_{i=1}^{7} x_i = 24{,}5$	$\sum_{i=1}^{7} y_i = 36{,}7$		$\sum_{i=8}^{14} x_i = 74{,}3$	$\sum_{i=8}^{14} y_i = 66{,}1$

Решая систему уравнений, найдем коэффициенты *a* и *b*:

$$(74{,}3 - 24{,}5)\ a = 66{,}1 - 36{,}7;$$

$$49{,}8\ a = 29{,}4;$$

$$a = 0{,}5904; \qquad b = 3{,}176.$$

Тогда уравнение прямой (линейной зависимости) примет вид:

$$y = 0{,}5904\,x + 3{,}176.$$

Метод наименьших квадратов

Надежным и научно обоснованным способом определения коэффициентов экспериментальных зависимостей является метод наименьших квадратов. Суть его заключается в подборе таких значений коэффициентов *a* и *b*, при которых сумма квадратов отклонений (отличий Δ_i) измеренных в эксперименте значений y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) от искомой кривой $y = ax + b$ была бы минимальна.

Найдем сумму квадратов отклонений (отличий $\Delta_i = y_i - (ax_i + b)$)

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\Delta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2 .$$

Под знаком суммирования раскроем квадрат. В результате получим

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 - 2ax_i y_i - 2by_i + a^2 x_i^2 + 2abx_i + b^2)$$

$$\Rightarrow\ S = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - 2b\sum_{i=1}^{n} y_i + a^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2ab\sum_{i=1}^{n} x_i + b^2\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\text{или } S = S_{yy} - 2aS_{xy} - 2bS_y + a^2 S_{xx} + 2abS_x + nb^2,$$

$$\text{где } S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2;\; S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i;\; S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i;\; S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2;\; S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Значения y_1, y_2, y_3, …, y_n и x_1, x_2, x_3, …, x_n – известные экспериментальные данные. Сумма квадратов отклонений S зависит от значений коэффициентов a и b. Выбирая разные значения коэффициентов a и b, можно получить разные значения S. Таким образом, сумма квадратов отклонений является функцией двух независимых переменных a и b. Для нахождения минимума функции S необходимо приравнять к нулю ее частные производные (по a и по b соответственно):

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2S_{xy} + 2aS_{xx} + 2bS_x = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2S_y + 2aS_x + 2nb = 0.$$

Полученные выражения позволяют записать систему уравнений для отыскания «наилучших» значений коэффициентов a и b в виде:

$$S_{xx}a + S_x b = S_{xy};$$

$$S_x a + nb = S_y.$$

Решая эту систему, можно получить:

$$a = \frac{1}{D}(nS_{xy} - S_x S_y);\quad b = \frac{1}{D}(S_{xx}S_y - S_x S_{xy}), \text{ где } D = nS_{xx} - S_x^2.$$

Для иллюстрации этого метода вновь используем те же данные, как и для иллюстрации графического метода (стр. 75). Тогда удобно данные из табл. 6 представить в виде табл. 9, дополнительно вычислив значения x_i^2 и $x_i y_i$ ($i = 1 \dots n$), необходимые для расчета величин S_{xy} и S_{xx}.

Рассчитаем все необходимые суммы:

$$S_x = 98{,}8;\; S_{xx} = 934{,}26;\; S_{xy} = 866{,}13;\; S_y = 102{,}8.$$

Учитывая, что количество измерений $n = 14$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} S_{xx}a + S_x b = S_{xy} \\ S_x a + nb = S_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 934{,}26\,a + 98{,}8\,b = 866{,}13; \\ 98{,}8\,a + 14b = 102{,}8. \end{cases}$$

Тогда $D = nS_{xx} - S_x^2 = 14 \cdot 934{,}26 - (98{,}8)^2 = 3318{,}2;$

$$a = \frac{1}{D}(nS_{xy} - S_x S_y) = \frac{1}{3318{,}2}(14 \cdot 866{,}13 - 102{,}8 \cdot 98{,}8) = 0{,}5934;$$

$$b = \frac{1}{D}(S_{xx}S_y - S_x S_{xy}) = \frac{1}{3318,2}(934,26 \cdot 102,8 - 98,8 \cdot 866,13) = 3,1548.$$

В результате получим следующее уравнение прямой:

$$y = 0,5934\, x + 3,1548.$$

Таблица 9

Исходные (например, полученные в результате измерений) значения величин x и y

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
0,4	3,5	0,16	1,4
1,5	4,1	2,25	6,15
2,5	4,9	6,25	12,25
3,5	5,3	12,25	18,55
4,6	5,3	21,16	24,38
5,5	6,4	30,25	35,2
6,5	7,2	42,25	46,8
7,5	7,5	56,25	56,25
8,4	7,9	70,56	66,36
9,5	8,9	90,25	84,55
10,7	9,1	114,49	97,37
11,7	10,6	136,89	124,02
13	11	169	143
13,5	11,1	182,25	149,85
$S_x = 98,8$	$S_y = 102,8$	$S_{xx} = 934,26$	$S_{xy} = 866,13$

Как видно, метод наименьших квадратов достаточно громоздок. Поэтому его применение становится наиболее эффективным при использовании вычислительной техники.

Метод наименьших квадратов также применяется и при построении нелинейных зависимостей. Например, для получения коэффициентов квадратичной зависимости вида $y = ax^2 + bx + c$ этим методом необходимо найти минимальное значение суммы квадратов отклонений вида $\Delta_i = y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\Delta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2 .$$

В результате для нахождения коэффициентов a, b, c необходимо решить систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты a, b, c можно либо получить самостоятельно, решив данную систему уравнений, либо посмотреть формулы для их вычисления в математических справочниках.

Использование современных специализированных программных продуктов (например, MS Excel, Origin, Mathematica и др.) позволяет строить по методу наименьших квадратов не только линейные и квадратичные, но и более сложные функциональные зависимости.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ НА ПРИМЕРЕ MS EXCEL 2010

Электронные таблицы MS Excel представляют собой один из широко распространенных специализированных программных продуктов, позволяющих существенно автоматизировать и облегчить выполнение расчетов и построение графических зависимостей.

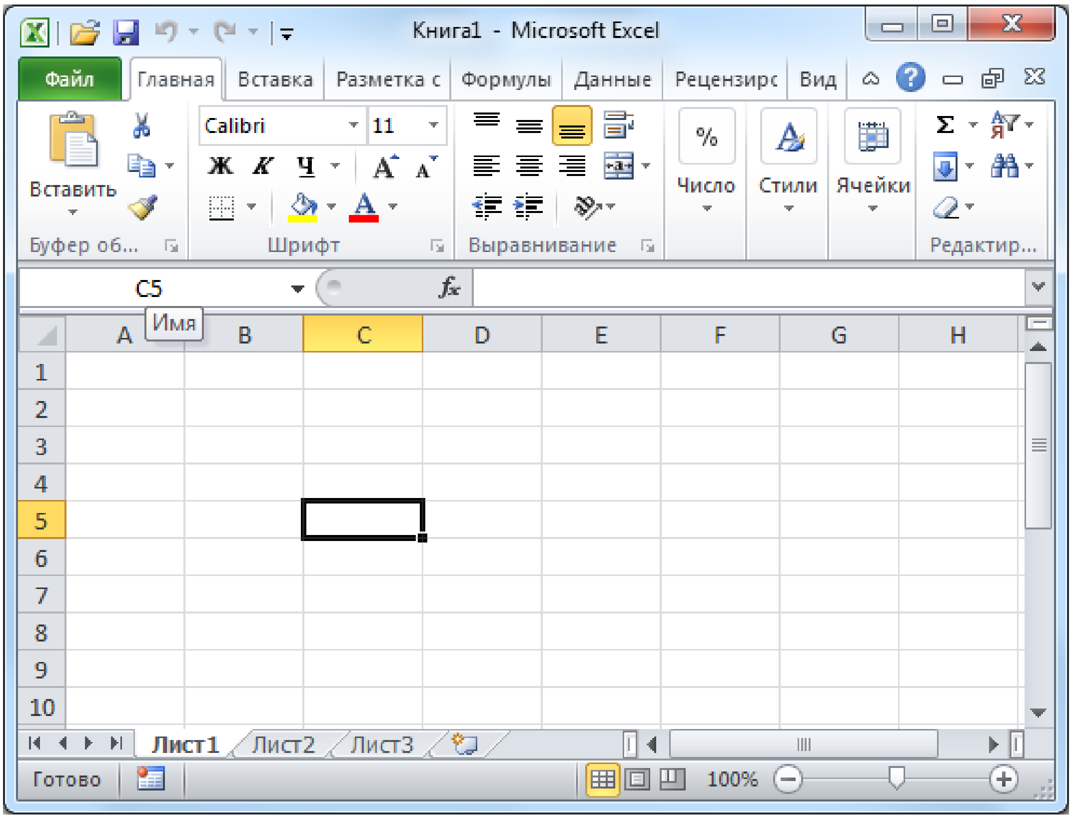


Рис. 18. Ячейка электронной таблицы MS Excel

Во всех приведенных далее иллюстрациях и примерах используются электронные таблицы MS Excel версии 2010. Однако весь изложенный далее материал также справедлив для MS Excel 2007, 2013 и последующих версий.

РАСПОЛОЖЕНИЕ ДАННЫХ И ОТОБРАЖЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В MS EXCEL 2010

Рабочая область в MS Excel представляет собой таблицу из большого числа ячеек, расположенных по строкам и столбцам. Строки и столбцы нумеруются автоматически: строки – с помощью арабских цифр, начиная с единицы; а столбцы – с помощью латинских букв. Номера строк и столбцов расположены слева и сверху от рабочей области, соответственно. Каждая ячейка однозначно определяется ее адресом, состоящим из номера столбца и номера строки. Например, на рис. 18 курсор находится в столбце с именем C и строке с номером 5, то есть в ячейке с адресом C5, выделенной жирной рамкой.

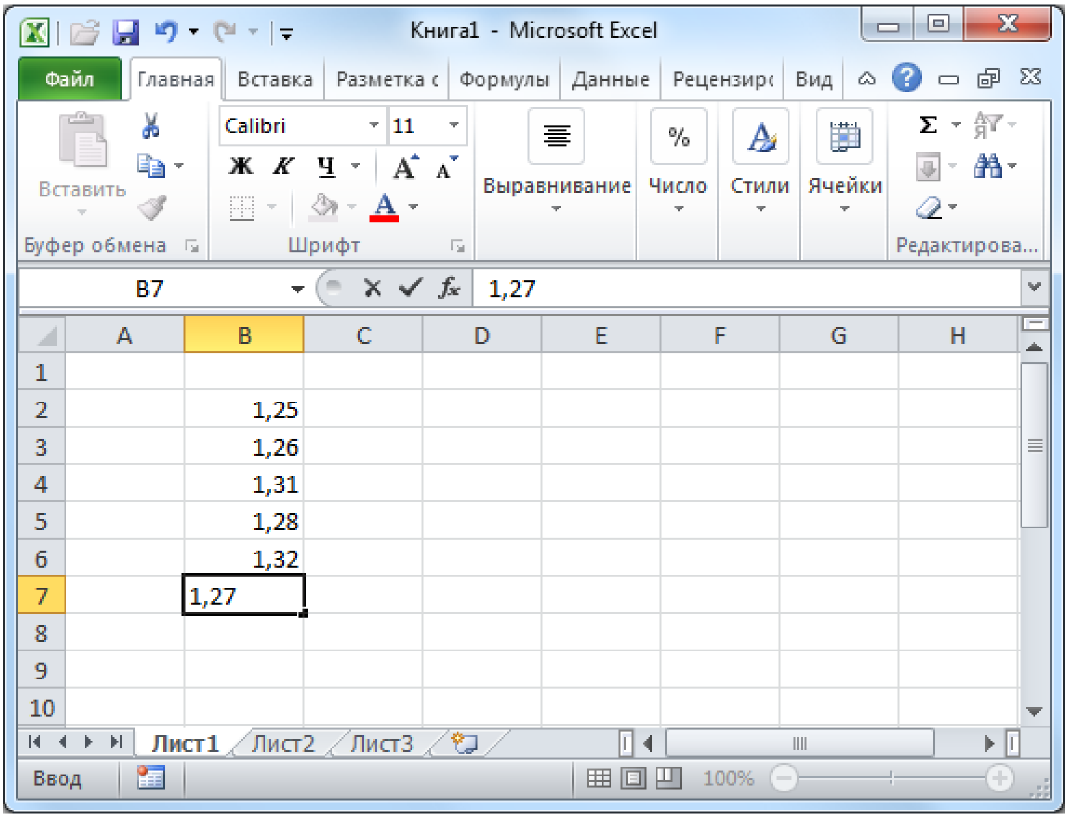
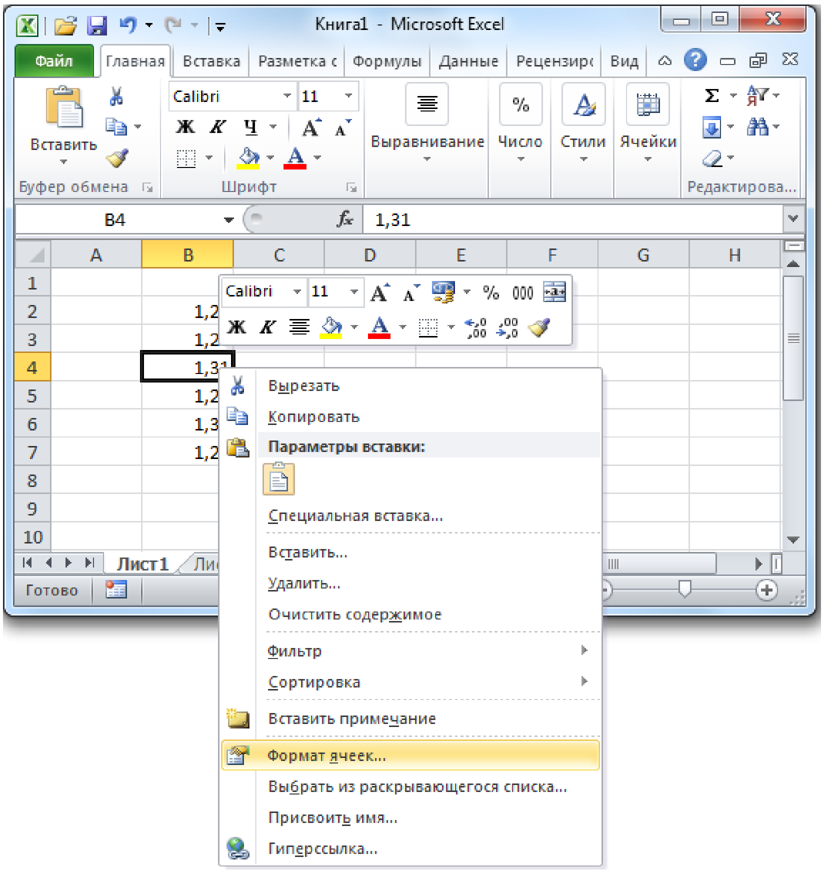


Рис. 19. Размещение однотипных данных в столбце B

Ячейка считается активной, если в ней расположен курсор. Активная ячейка выделяется жирной рамкой. Номера строки и столбца активной ячейки выделены другим цветом. Слева над таблицей расположено небольшое поле «Имя», в котором автоматически указывается адрес (имя) активной ячейки (рис. 18). Название этого поля автоматически появляется в виде всплывающей подсказки при наведении на него курсора мыши.



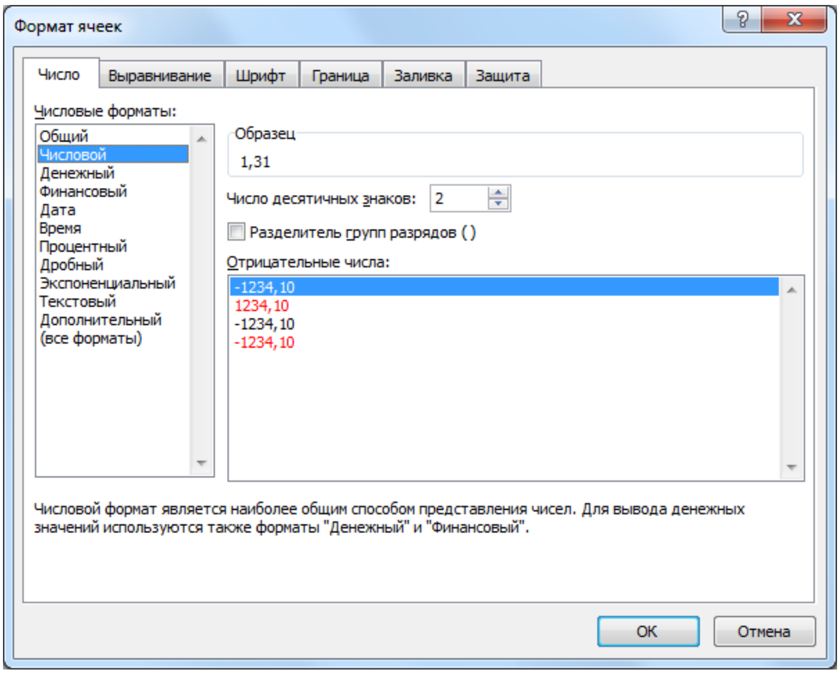


Рис. 20. Назначение ячейке числового формата отображения данных

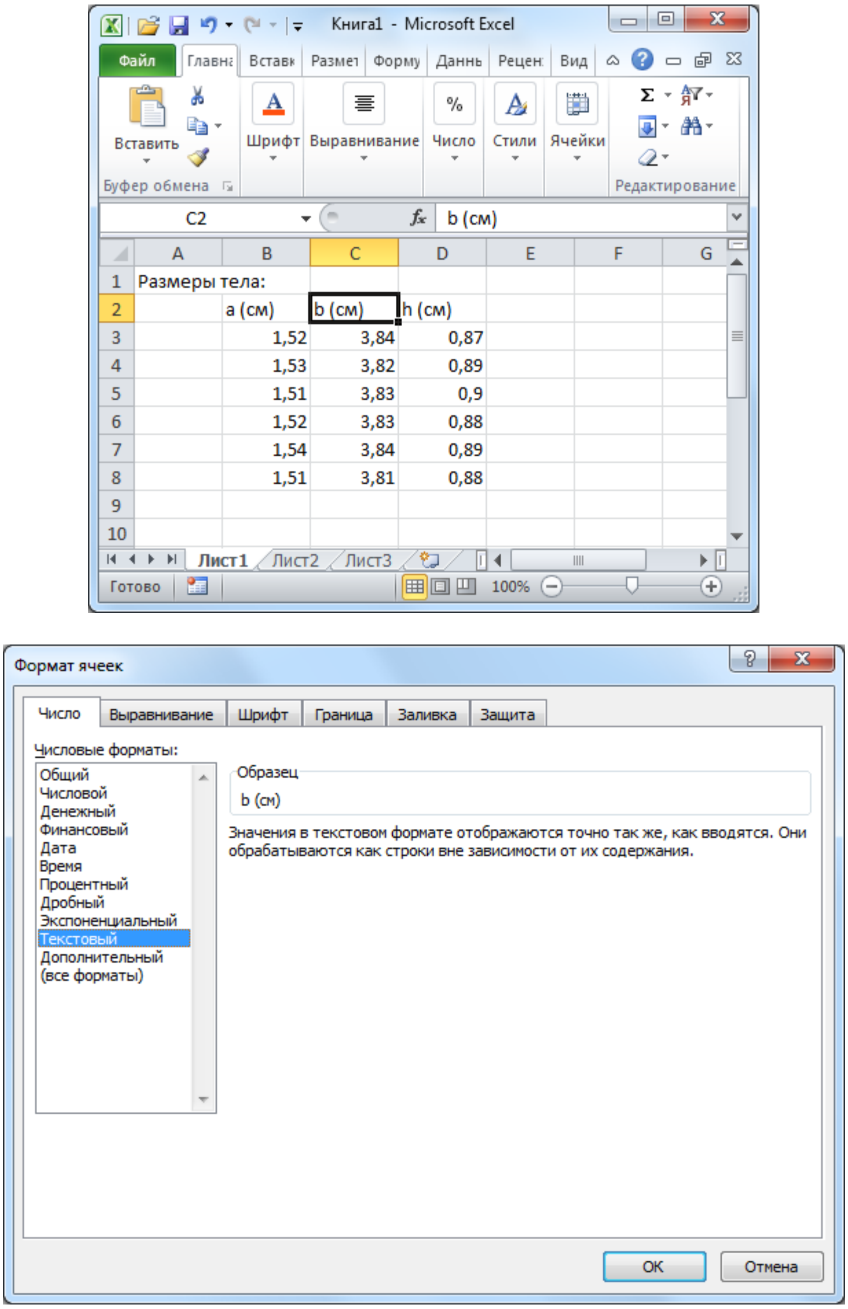


Рис. 21. Назначение ячейке текстового формата отображения данных

Многие встроенные функции применяются либо к столбцу, либо к строке, поэтому однотипные данные в электронных таблицах удобно располагать либо в одном и том же столбце, либо в одной и той же строке. При этом в русифицированных версиях MS Excel для отделения дробной части числа, записанного в десятичном формате, используется запятая (рис. 19).

Введенные или рассчитанные значения удобно отображать в определенном виде (формате), который можно настроить следующим образом.

Щелкнув над соответствующей ячейкой правой клавишей мыши, вызовите контекстное меню (рис. 20), в котором выберите пункт «Формат ячейки». В результате появится диалоговое окно «Формат ячеек» с несколькими вкладками. Это же окно можно вызвать, если на расположенной в верхней части окна MS Excel панели инструментов выбрать вкладку «Главная», а на этой вкладке из раскрывающегося списка «Формат», относящегося к группе инструментов «Ячейки», выбрать пункт «Формат ячеек». Следует отметить, что при малых размерах окна MS Excel группа инструментов «Ячейки» может принимать вид раскрывающейся панели (рис. 20, рис. 21).

По умолчанию во всех ячейках таблицы используется формат «Общий». Для корректного отображения числовых данных следует выбрать формат «Числовой», указав необходимое количество десятичных знаков после запятой на вкладке «Число» диалогового окна «Формат ячеек» (рис. 20). Применение этого формата НЕ ПРИВОДИТ к округлению хранящегося в ячейке значения, а позволяет управлять только способом отображения этого значения в таблице.

Для более комфортной работы с электронной таблицей рекомендуется в некоторых ее ячейках вводить поясняющий текст, позволяющий лучше ориентироваться в имеющихся данных. Для таких ячеек удобнее использовать формат «Текстовый» (рис. 21), который также задается с помощью диалогового окна «Формат ячеек».

ВЫПОЛНЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ В MS EXCEL 2010

Простейшие вычисления

На основе внесенных в электронную таблицу данных можно выполнять математические расчеты. При этом в файле сохраняются не только результаты вычислений, но и формулы, использованные для получения этих результатов.

Для этого в ячейку, в которой предполагается расположить результат вычислений, необходимо ввести формулу в соответствии со следующими правилами:

1) формула начинается со знака «равно» (=);

2) формула записывается в строку с явным указанием всех математических операций (+ – сложение; – – вычитание; * – умножение; / – деление; ^ – возведение в степень);

3) в записи математических операций можно использовать не только числовые значения, но и адреса (имена) ячеек, в которых хранятся эти значения.

Например, необходимо найти площадь основания прямоугольного параллелепипеда по данным расположенным в строке 3 (рис. 22). Для этого в ячейку E3 введем следующую формулу:

=B3*C3

Нажав Enter (ввод), увидим результат вычислений в ячейке E3.

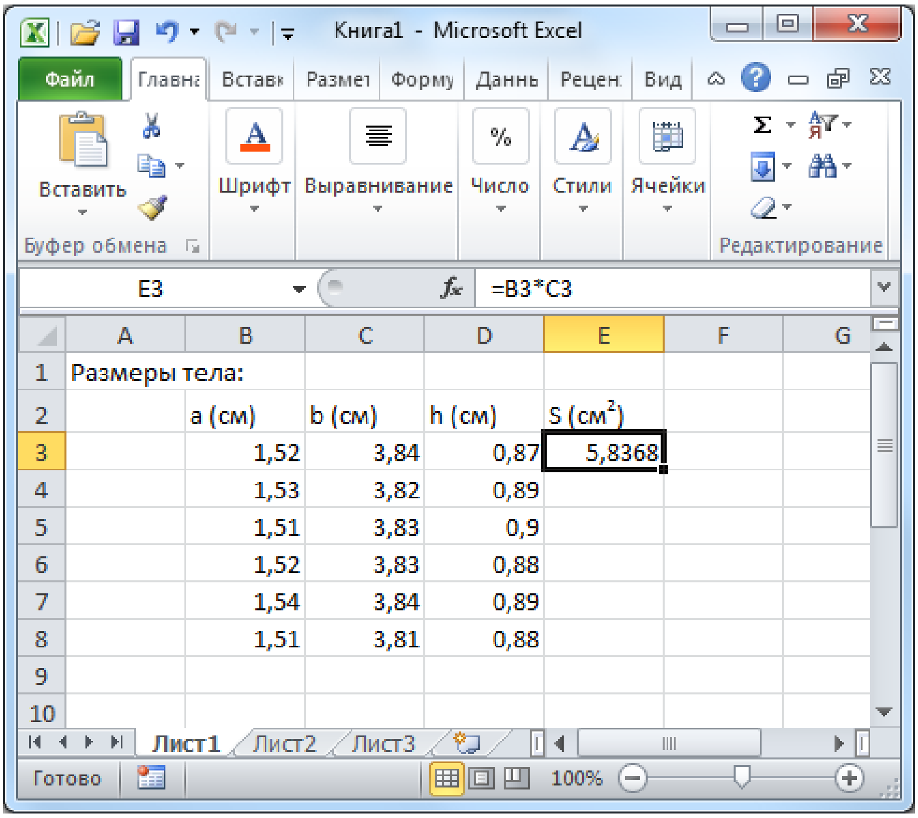


Рис. 22. Ввод формулы в ячейку E3

Непосредственно над таблицей помимо поля «Имя» также расположено поле «Строка формул», помеченное слева значок *fx*. Если в активной (выделенной) ячейке находится введенное пользователем число или текст, то в строке формул отображается то же значение, что и в ячейке таблицы (рис. 19, рис. 21). В этом случае строку формул можно использовать для редактирования введенных значений. Если в активную ячейку введена формула (и ввод завершен нажатием кнопки Enter), то в строке формул отображается соответствующая формула, а в самой ячейке – результат вычислений (рис. 22). В этом случае строка формул используется для редактирования записанной ранее формулы.

Если аналогичные расчеты необходимо выполнить и для других строк того же столбца таблицы, то достаточно записать формулу в одной ячейке, а затем воспользоваться механизмом протягивания.

На рамке, выделяющей активную ячейку, справа внизу имеется жирный квадратик. Протягивание – это перемещение рамки активной ячейки за этот квадратик на другие ячейки, которое позволяет скопировать записанные в активной ячейке формулы в необходимое количество ячеек. Так, потянув рамку ячейки E3 на рис. 22 за квадратик вниз, можно скопировать записанную в ней формулу в ячейки E4, E5 … E8 (рис. 23). При этом в каждой из этих ячеек формула автоматически записывается через ячейки той же строки. Перемещаясь по ячейкам (после протягивания) можно заметить, что в ячейке E3 записана формула =B3*C3, а в ячейке E5 – формула =B5*C5 и т.д.

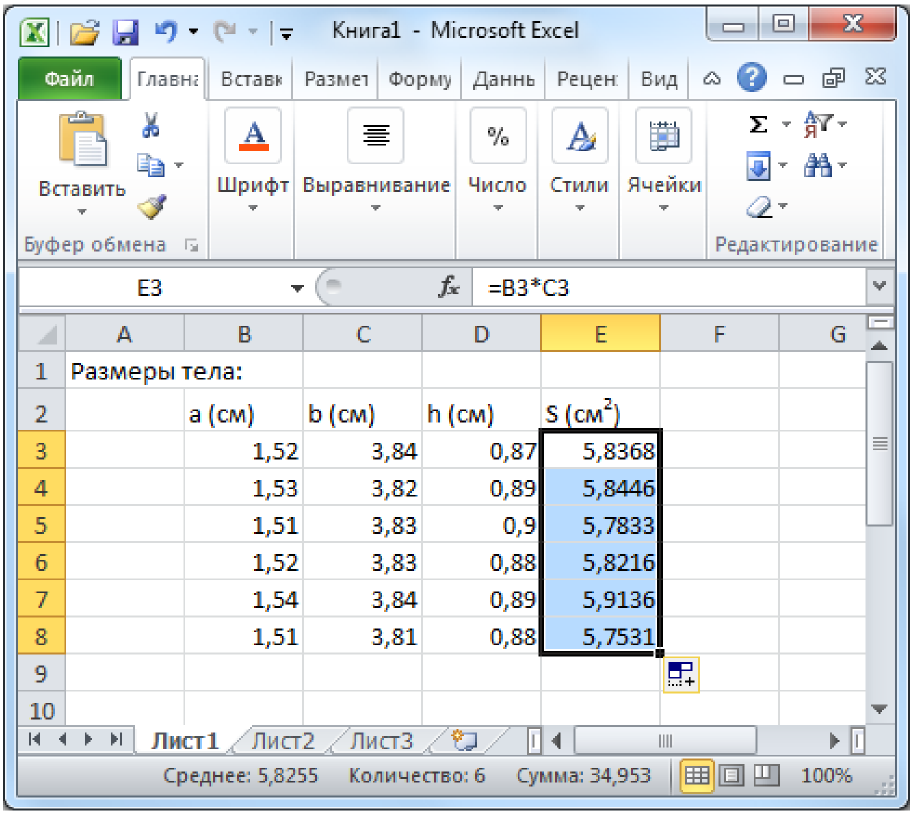


Рис. 23. Использование механизма протягивания для внесения в соседние ячейки таблицы аналогичных формул

Кроме того для перемещения или копирования значений или формул из одной ячейки таблицы в другую можно использовать стандартные средства Windows (стандартные комбинации кнопок, контекстное меню и т.д.). Но в этом случае информация копируется только в одну ячейку таблицы, а при использовании механизма протягивания – сразу в несколько.

При протягивании или копировании из одной ячейки в другую (возможно, не соседнюю) адреса в формулах меняются следующим образом: 1) при протягивании (копировании) вниз увеличиваются номера строк; 2) при протягивании (копировании) вправо увеличиваются номера столбцов.

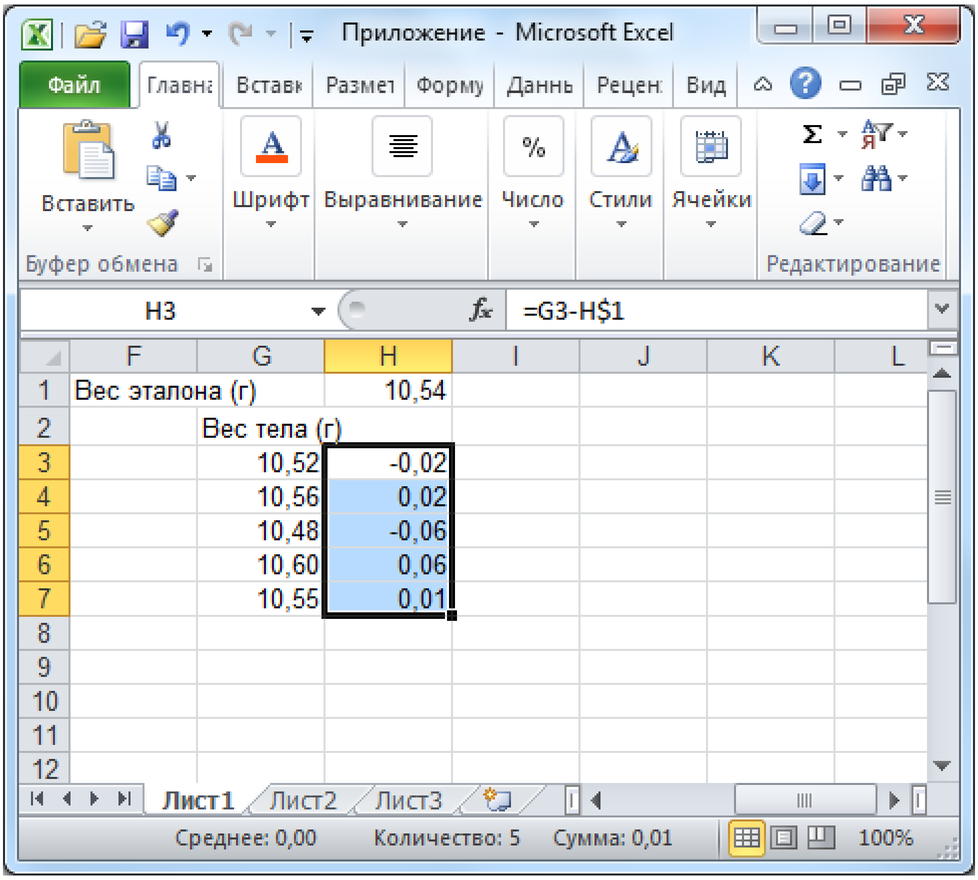


Рис. 24. Фиксирование номера строки ячейки H1 для предотвращения его изменения при протягивании (по строкам) формулы, записанной в ячейку H3

Адрес (имя) ячейки можно принудительно зафиксировать, так чтобы при протягивании (копировании) номер строки (или столбца) не изменялся. Для этого в MS Excel используется знак $. Если в адресе ячейки необходимо зафиксировать строку, знак $ ставится перед номером строки (например, E$5). Если в адресе ячейки необходимо зафиксировать столбец, знак $ ставится перед номером столбца (например, $E5). Если необходимо зафиксировать адрес ячейки полностью, знак $

ставится дважды, и перед номером строки, и пред номером столбца (например, E5).

В следующем примере рассчитаем, насколько отличается каждое значение из столбца G от значения, расположенного в ячейке H1. Для этого в ячейку H3 запишем формулу

=G3-H1

Так как формулу, написанную в ячейке H3, необходимо будет протянуть (скопировать) вниз, это приведет к изменению номеров строк в адресах всех ячеек, указанных в формуле. А по условиям задачи из каждого значения, расположенного в столбце G, необходимо всегда вычитать одну и ту же ячейку H1. Поэтому выделим (сделаем активной) ячейку H3 и, перемещая курсор по строке формул, расположенной над ячейками, в написанной формуле зафиксируем строку в ячейке H1 с помощью символа $

=G3-H$1

После протягивания (копирования) этой формулы в ячейки таблицы, расположенные ниже ячейки H3, получим результаты, представленные на рис. 24.

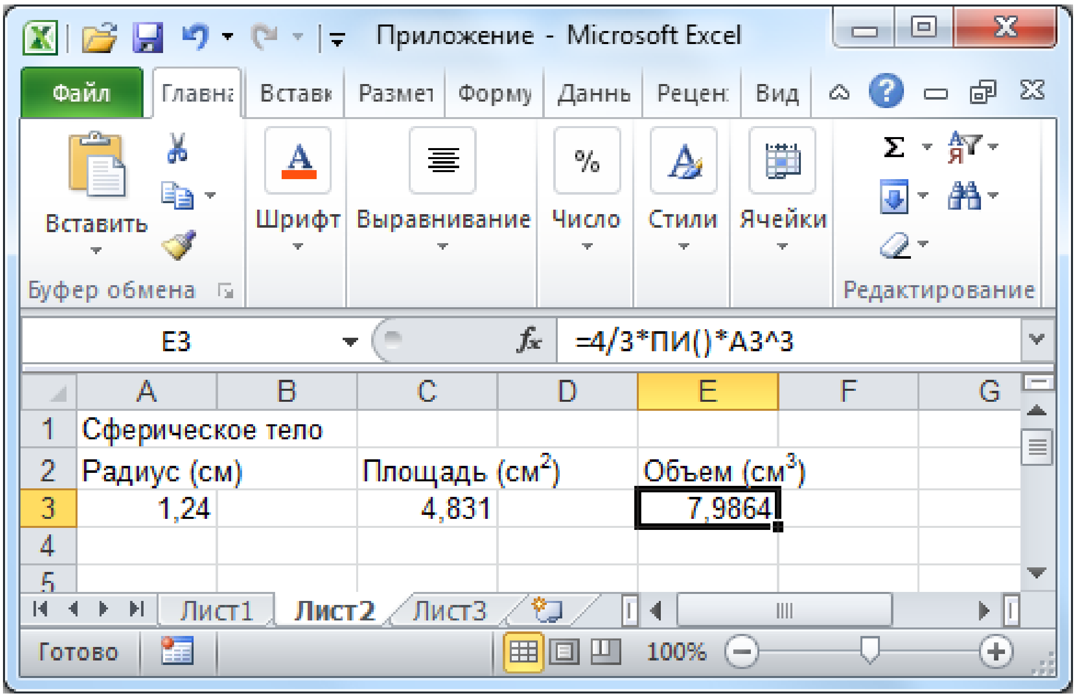


Рис. 25. Пример формулы, содержащей число π

Кроме адресов ячеек формулы могут также содержать числовые константы. Для некоторых широко распространенных констант в MS Excel предусмотрены специальные обозначения. Например, число π часто встречается в расчетах, поэтому в MS Excel введена стандартная функция для обозначения этой константы:

ПИ()

Тогда формула, содержащая число π, может быть записана, например, как на рис. 25 (см. строку формул).

Использование встроенных функций

Электронные таблицы MS Excel содержат большое количество встроенных функций. Правила написания некоторых из них приведены в табл. 10. В качестве аргумента каждой из них, как правило, используется одно или несколько значений. Любой аргумент функции может быть записан в виде числа или арифметического выражения. Например, с помощью формулы

=ГРАДУСЫ(ПИ()/4)

записанной в одной из ячеек таблицы, можно получить значение 45. Кроме того, в качестве аргумента функции можно использовать адрес ячейки, в которой хранится или вычисляется соответствующее значение. Например, если сначала в ячейку D7 записать формулу =ПИ()/4, а затем в ячейку D8 – формулу =ГРАДУСЫ(D7), то в ячейке D8 тоже получится 45 (как в предыдущем примере).

Таблица 10

Правила записи в MS Excel некоторых математических функций

Математическая функция	**Правила написания в MS Excel**
$\lvert x \rvert$ (модуль)	ABS(x)
$\arccos x$	ACOS(x)
$\arcsin x$	ASIN(x)
$\mathrm{arctg}\, x$	ATAN(x)
$\cos x$	COS(x)
$\sin x$	SIN(x)
e^{x}	EXP(x)
$\ln x$	LN(x)
$\lg x$	LOG10(x)
$\mathrm{tg}\, x$	TAN(x)
радианы $\rightarrow$ градусы	ГРАДУСЫ(x)
$\sqrt{x}$	КОРЕНЬ(x)
градусы $\rightarrow$ радианы	РАДИАНЫ(x)
a^{x}	СТЕПЕНЬ(a; x)

Здесь x – адрес одной из ячеек таблицы или математическое выражение.

Кроме того в электронных таблицах существует ряд функций, которые применяются к значениям, расположенным в нескольких ячейках. Например, функция СУММ позволяет вычислить сумму значений, расположенных в нескольких ячейках одного столбца или одной строки. Функция СРЗНАЧ позволяет вычислить, соответственно, среднее арифметическое значение по данным расположенным в нескольких ячейках одного столбца или одной строки.

Например, если данные, по которым необходимо вычислить среднее, расположены в столбце B, необходимо сначала выбрать (сделать активной) ячейку, в которую предполагается поместить результат вычисления. На рис. 26 искомое среднее значение будем располагать в ячейке B9.

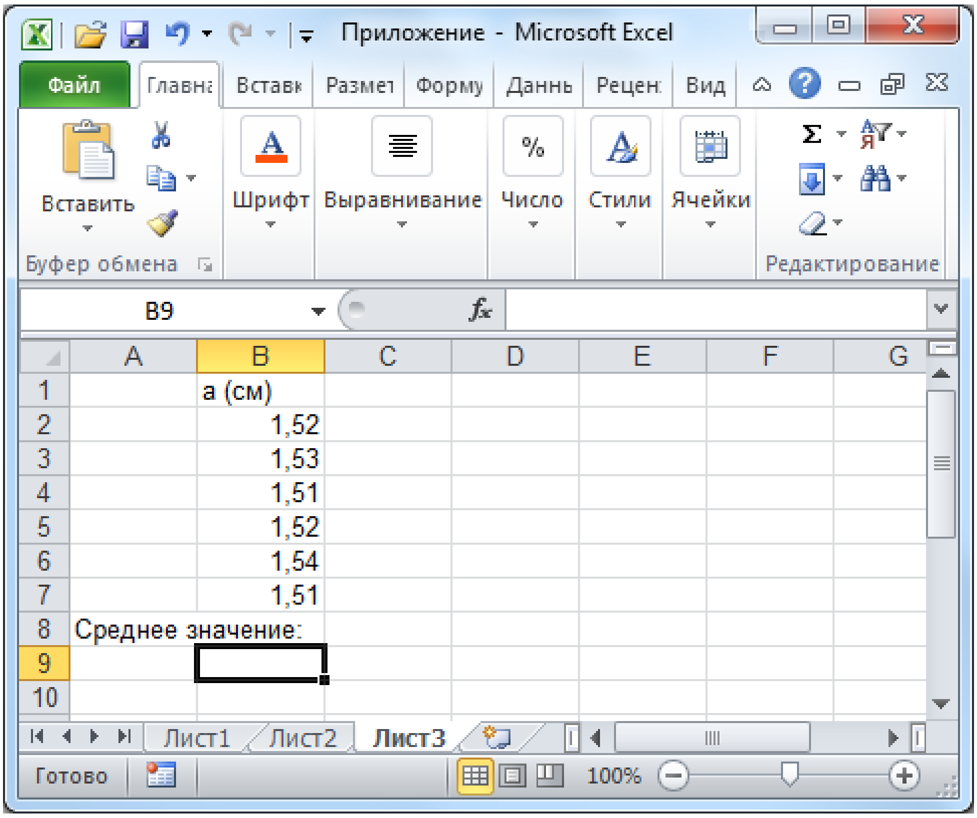
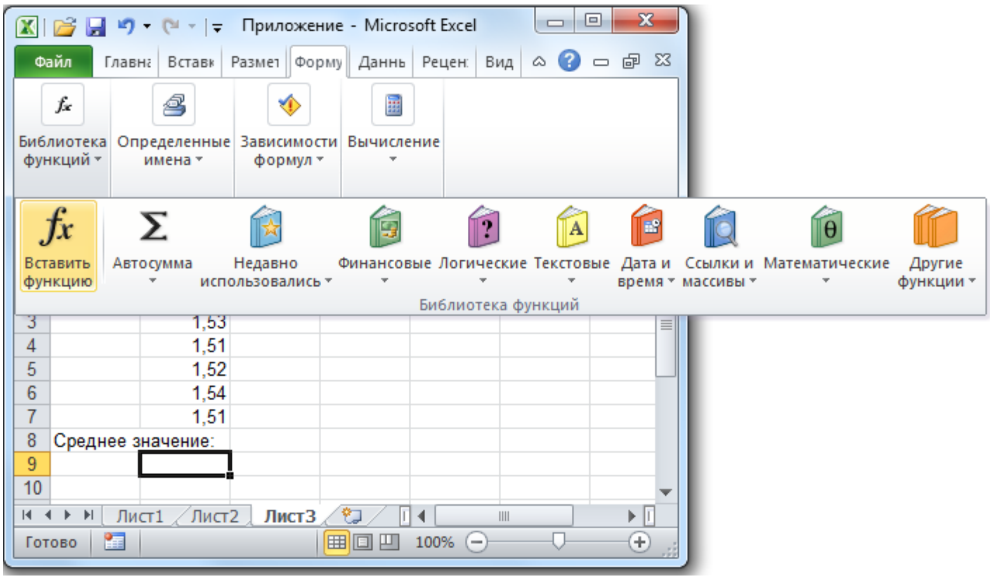
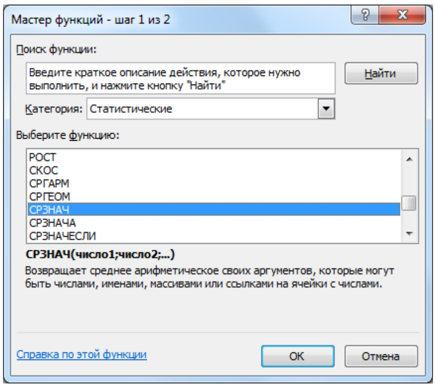


Рис. 26. Выбор ячейки для размещения результата вычислений

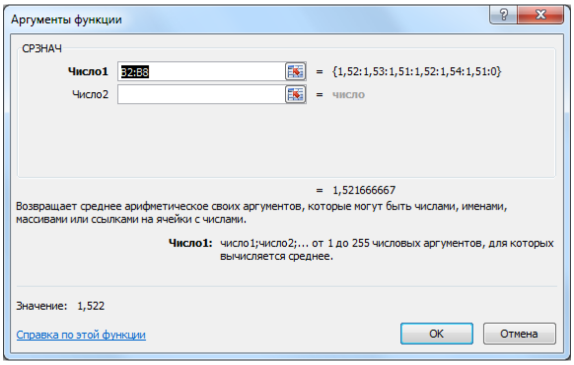
Далее на расположенной в верхней части окна MS Excel панели инструментов выберите вкладку «Формулы», на этой вкладке – группу инструментов «Библиотека функций», а в этой группе – кнопку «Вставить функцию». Если размеры окна MS Excel малы, то группа инструментов «Библиотека функций» может отображаться как раскрывающаяся панель (рис. 27, а).



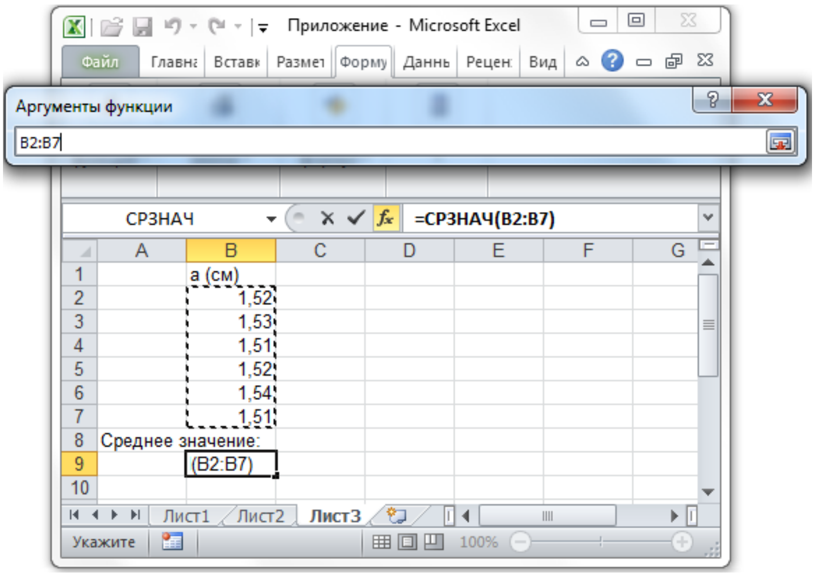
а



б



в



г

Рис. 27. Последовательность операций при выполнении вычислений с использованием стандартных функций MS Excel на примере функции СРЗНАЧ

В появившемся дополнительном окне «Мастер функций» можно увидеть все встроенные в MS Excel функции (рис. 27, б). Они сгруппированы по категориям (см. поле «Категория»). Функция СРЗНАЧ относится к категории «Статистические». Для выбранной функции в нижней части окна выводится пояснение о ее назначении. Выбрав из списка нужную функцию, нажмите на кнопку «ОК».

Каждой встроенной функции соответствует определенное количество полей (аргументов), которые необходимо заполнить, чтобы функция работала правильно. Это происходит в окне «Аргументы функции», которое появляется после того, как была выбрана функция.

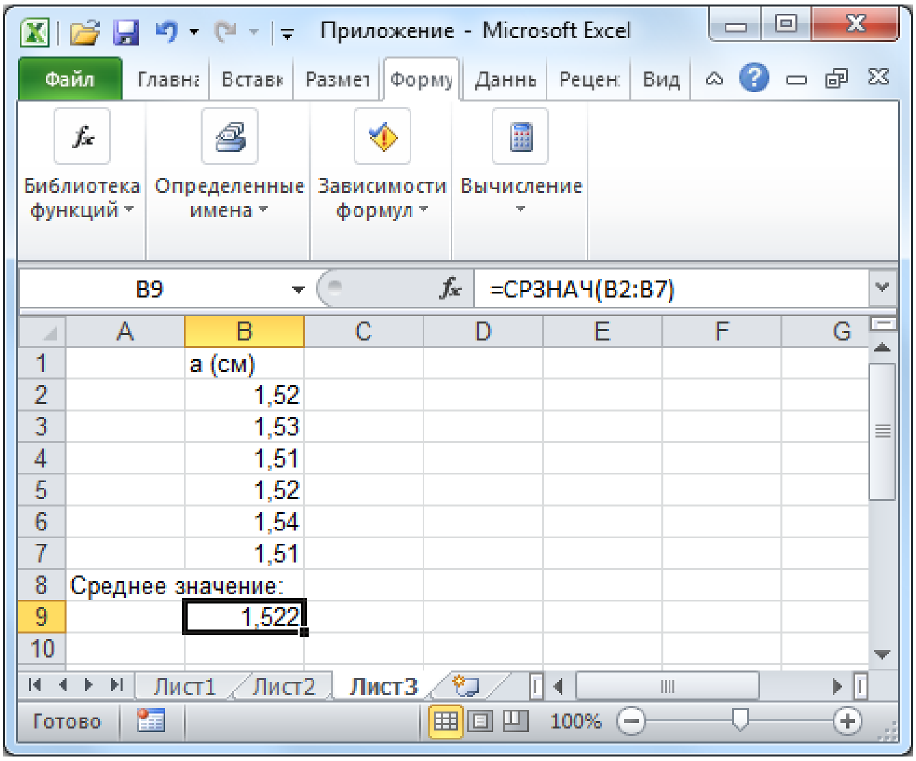


Рис. 28. Результат использования стандартной функции СРЗНАЧ для вычисления среднего значения по данным, расположенным в ячейках B2 … B7

Для функции СРЗНАЧ (в большинстве случаев) достаточно заполнить только одно поле «Число1» (рис. 27, в). Справа от этого поля расположен элемент управления в виде цветного квадрата. Этот элемент позволяет непосредственно в таблице указать ячейки, к которым нужно применять данную функцию. После нажатия на этот элемент (цветной квадрат) окно «Аргументы функции» сворачивается до размеров поля «Число1», а данные в электронной таблице становятся хорошо видны. Перемещая мышь, одновременно удерживая нажатой ее левую клавишу, охватите (выделите) ячейки, по данным которых нужно вычислить среднее значение. Номера выбранных ячеек автоматически отобразятся в поле «Число1». Если выбраны ячейки B2, B3, … B7, то в поле «Число1» будет записано B2:B7 (рис. 27, г). После этого вновь нажмите на управляющий элемент в виде цветного квадрата, чтобы восстановить прежний вид окна «Аргументы функции», и нажмите в этом окне кнопку «ОК» для завершения операции.

В результате (рис. 28) в ячейке B9 появится посчитанное среднее, а в строке формул для этой ячейки будет написана формула:

=СРЗНАЧ(B2:B7)

Чтобы получить тот же результат, можно написать этот же текст в строке формул вручную. При вводе в активную ячейку или строку формул нескольких первых букв названия функции автоматически появляется подстрочное меню со списком всех одинаково начинающихся встроенных функций. Чтобы из этого списка выбрать нужную функцию, необходимо сделать двойной щелчок левой клавишей мыши на ее названии. После этого следует задать обязательные поля (аргументы) функции.

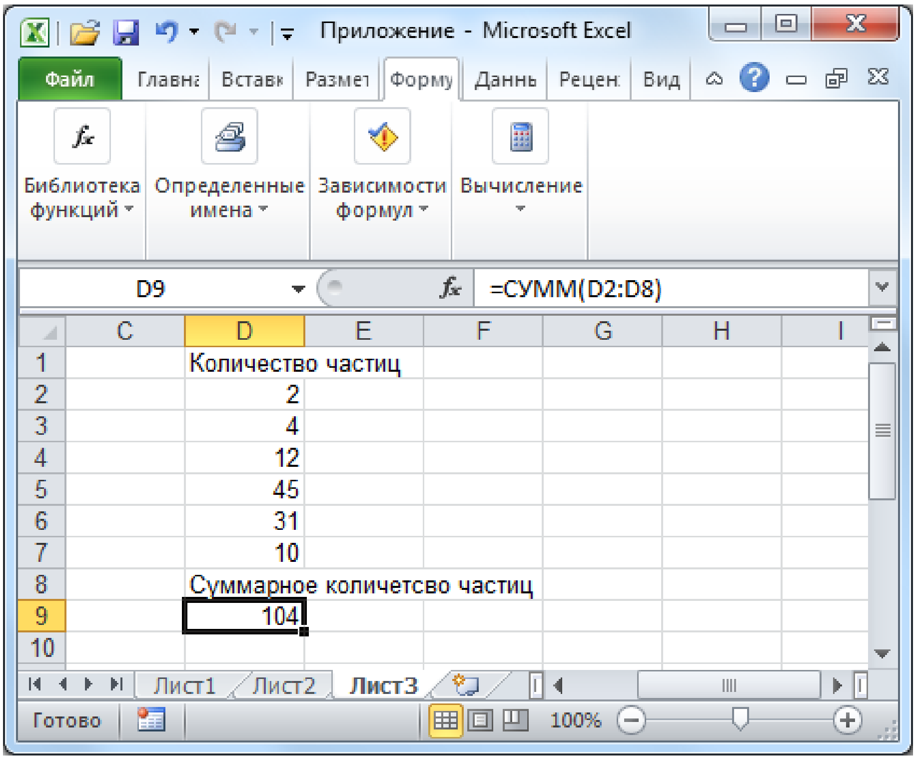


Рис. 29. Результат использования стандартной функции СУММ для вычисления суммы значений, расположенных в ячейках D2 … D7

Аналогичным образом используют функцию СУММ, вычисляющую сумму значений, расположенных в нескольких ячейках (рис. 29). В отличие от функции СРЗНАЧ функция СУММ относится к категории «Математические».

Функция КВАДРОТКЛ вычисляет сумму квадратов отклонений от среднего для указанного набора данных. Если в таблицу внесены данные, соответствующие измерениям некоторой величины x, то результат применения функции КВАДРОТКЛ к этим данным эквивалентен вычислениям по формуле $\sum_i (\tilde{x} - x_i)^2$, где $\tilde{x}$ – среднее арифметическое значение измеряемой величины, которое функция КВАДРОТКЛ вычисляет автоматически, но в таблице не отображает. Данную функцию можно найти в категории «Статистические».

Как было показано ранее при обработке экспериментальных данных необходимо учитывать коэффициенты статистических распределений. В MS Excel имеется большое количество встроенных функций, позволяющих рассчитывать различные характеристики статистических распределений в том числе и коэффициенты.

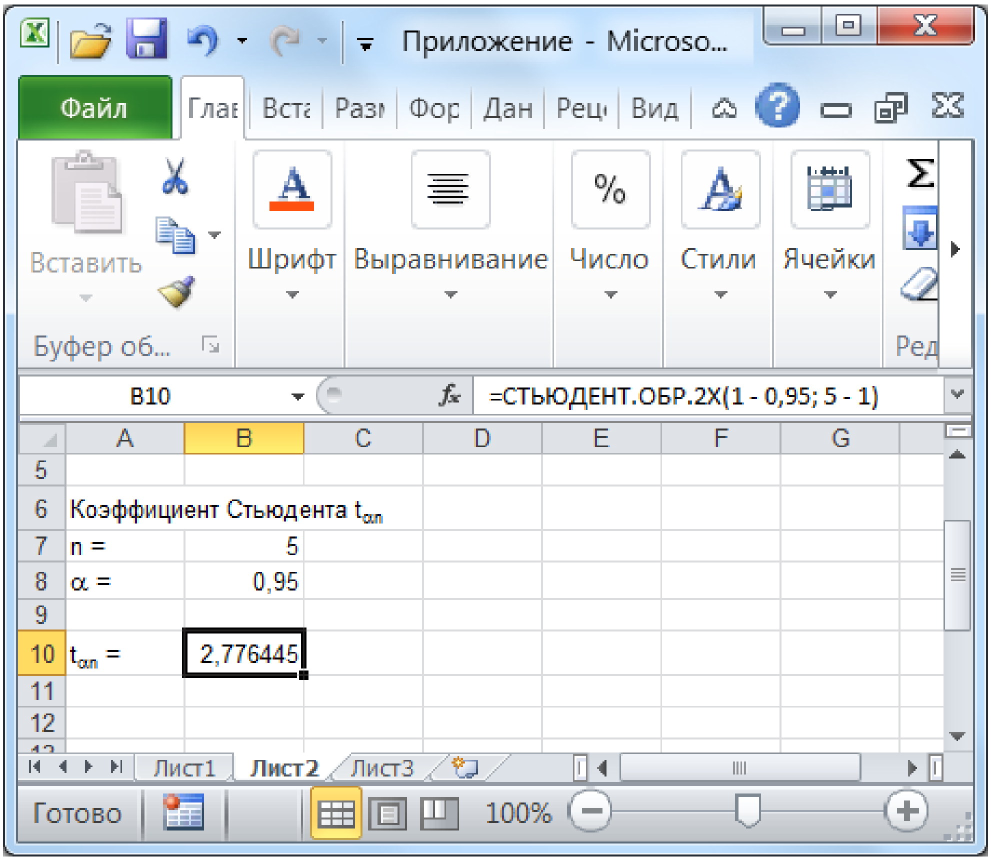


Рис. 30. Результат использования стандартной функции СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х для вычисления коэффициента Стьюдента

При расчетах погрешности экспериментальных результатов обычно применяют коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha n}$. Встроенная функция СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х позволяет получить нужные коэффициенты для заданного числа степеней свободы N и вероятности p:

=СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х (p; N)

Если в расчетах погрешности используются экспериментальные данные, полученные в результате n измерений, то число степеней свободы определяется как $N = n - 1$. Если для данной серии измерений известна доверительная вероятность α (выраженная в долях единицы), то вероятность $p = 1 - \alpha$. Тогда коэффициент Стьюдента для n измерений при доверительной вероятности α в MS Excel (для версии 2010 и выше) можно рассчитать следующим образом:

=СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х (1 – α; n – 1)

Пример использования данной функции для 5 измерений при доверительной вероятности 0,95 (95%) приведен на рис. 30. Функция может быть вызвана как для фиксированных значений параметров

=СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х (1-0,95;5-1)

так и для значений параметров α и n, расположенных в разных ячейках таблицы. Если значение α хранится в ячейке B8, а значение n хранится в ячейке B7, тогда результат, приведенный на рис. 30, можно получить, записав в одной из ячеек таблицы:

= СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х(1-B8; B7-1)

В версиях, предшествующих MS Excel 2010, для вычисления коэффициентов Стьюдента использовалась функция СТЬЮДРАСПОБР.

Правила использования этой функции аналогичны правилам использования функции СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х.

В отличии от опубликованных в справочниках таблиц, в которых коэффициенты Стьюдента приводятся чаще всего с точность до трех, а иногда даже до двух значащих цифр, в результате использования встроенной функции СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х (или СТЬЮДРАСПОБР) в MS Excel коэффициенты Стьюдента можно получить с точностью до 10 значащих цифр. Это позволяет уменьшить погрешность округления вычислений при обработке результатов измерений.

Пример расчета погрешности результатов физического эксперимента в MS Excel 2010

Использование электронных таблиц позволяет избежать округления результатов промежуточных вычислений (если округление результатов прямых и косвенных измерений выполнять только после вычисления погрешности). В некоторых случаях это способствует уменьшению погрешности конечных результатов.

Пусть в эксперименте измеряли линейные размеры параллелепипеда с целью определить его объем. Высота h, длина a и ширина b параллелепипеда измерялись по 3 раза с помощью штангенциркуля с ценой деления нониуса 0,1 мм. В результате чего были получены данные, представленные в табл. 4 (см. стр. 62).

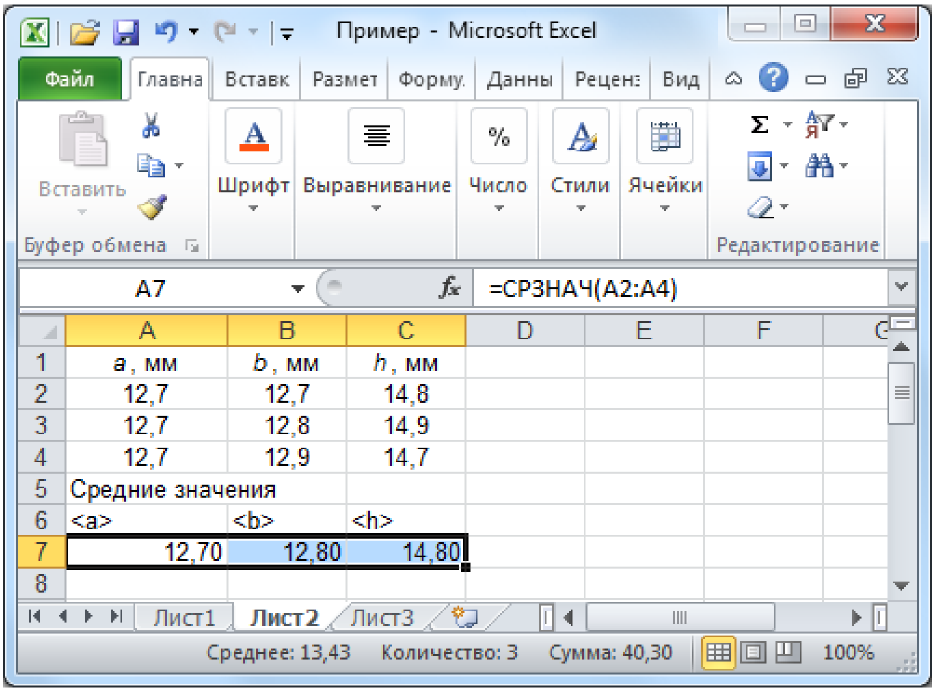


Рис. 31. Вычисление средних значений линейных размеров параллелепипеда по экспериментальным данным

Расположим эти данные в электронной таблице MS Excel в столбцах A, B и C соответственно (рис. 31). Оставив место на поясняющие подписи, в ячейках A7, B7 и C7 вычислим соответствующие средние арифметические значения для каждой непосредственно измеряемой величины. Для этого в ячейку A7 одним из описанных ранее способов запишем формулу

=СРЗНАЧ(A2:A4)

и протянем (скопируем) ее вправо на ячейки B7 и C7 (рис. 31).

Для расчета среднеквадратичного отклонения каждой из измеренных величин необходимо просуммировать квадраты разности между каждым измеренным значение и его средним арифметическим. Например, для величины a нужно найти значение $\sum_{i=1}^{3}(\tilde{a}-a_i)^2$, где a_i – это измеренные значения, $\tilde{a}$ – их среднее арифметическое значение. Для вычисления суммы квадратов разностей используем встроенную функцию КВАДРОТКЛ. В ячейке A9 запишем (рис. 32) формулу:

=КВАДРОТКЛ(A2:A4)

Среднеквадратичное отклонение $\tilde{\sigma}_a$ вычисляется следующим образом: $\tilde{\sigma}_a = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{3}(\tilde{a}-a_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{3\cdot 2}\sum_{i=1}^{3}(\tilde{a}-a_i)^2}$. Так как сумма квадратов уже посчитана в ячейке A9, то для вычисления среднеквадратичного отклонения необходимо вычислить корень из деленного на 6 значения, расположенного в ячейке A9:

=КОРЕНЬ(A9/6)

Запишем эту формулу в ячейку A10.

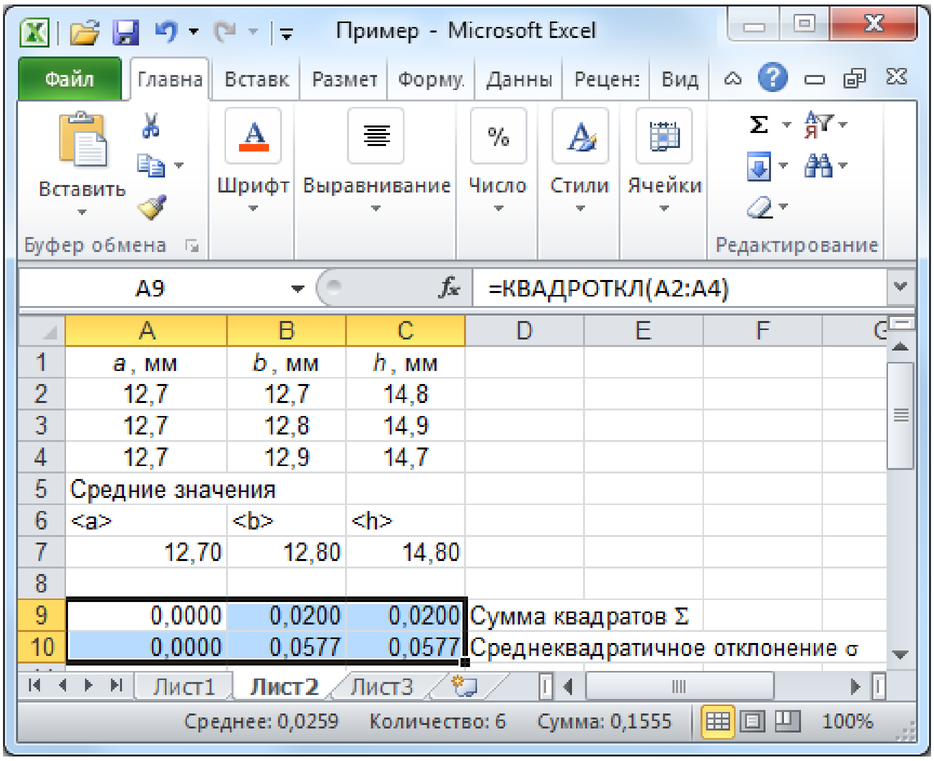


Рис. 32. Вычисление суммы квадратов отклонений и среднеквадратичного отклонения для измеренных в эксперименте линейных размеров параллелепипеда

Выделив и протянув (скопировав) ячейки A9 и A10 вправо, получим сумму квадратов и среднеквадратичное отклонение для двух других измеренных в эксперименте величин (рис. 32).

Далее необходимо рассчитать абсолютную случайную погрешность многократных измерений, которая для величины *a* вычисляется по формуле

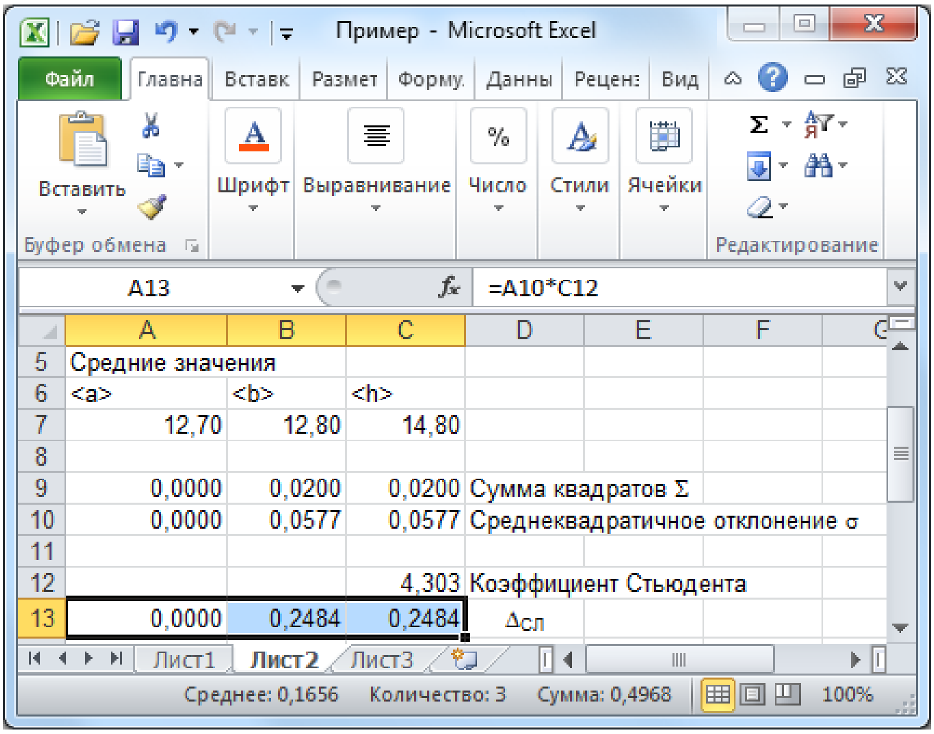


Рис. 33. Вычисление случайной погрешности многократных измерений линейных размеров параллелепипеда

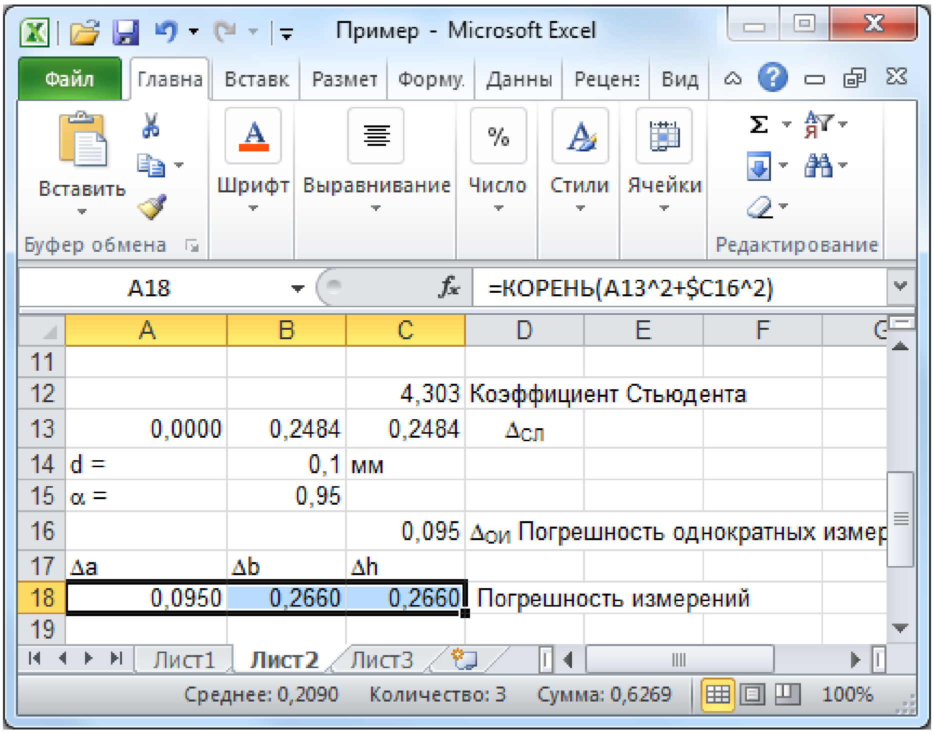


Рис. 34. Вычисление полной погрешности измерений линейных размеров параллелепипеда

$$\Delta\tilde{a}_{СЛ} = t_{\alpha n}\cdot\tilde{\sigma}_a,$$

где $t_{\alpha n}$ – коэффициент Стьюдента. Для $n = 3$ (три измерения) и доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ (выраженной в долях единицы) в ячейке C12 получим коэффициент Стьюдента

=СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х(1-0,95; 3-1)

А в ячейках A13, B13, C13 рассчитаем абсолютные случайные погрешности многократных измерений для величин a, b, h соответственно (рис. 33):

=A10*C12
=B10*C12
=C10*C12

В этом эксперименте все три величины a, b, h измерялись одним и тем же прибором без внутреннего технического строения – штангенциркулем с ценой деления нониуса 0,1 мм. Поэтому абсолютная погрешность однократных измерений $\Delta_{ОИ}$ всех трех величин будет одинаковой и вычисляется с учетом доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ и параметром равномерного распределения $d = 0{,}1$ мм (см. стр. 62) следующим образом:

$$\Delta_{ОИ} = d\cdot\alpha = 0{,}1\cdot 0{,}95 = 0{,}095 \text{ мм}.$$

Данную величину нетрудно рассчитать в уме, но для большей наглядности также внесем эти вычисления в электронную таблицу: параметр равномерного распределения d – в ячейку B14, доверительную вероятность α – в ячейку B15, а результат вычисления абсолютной погрешности однократных измерений $\Delta_{ОИ}$ по формуле =B14*B15 – в ячейку C16 (рис. 34).

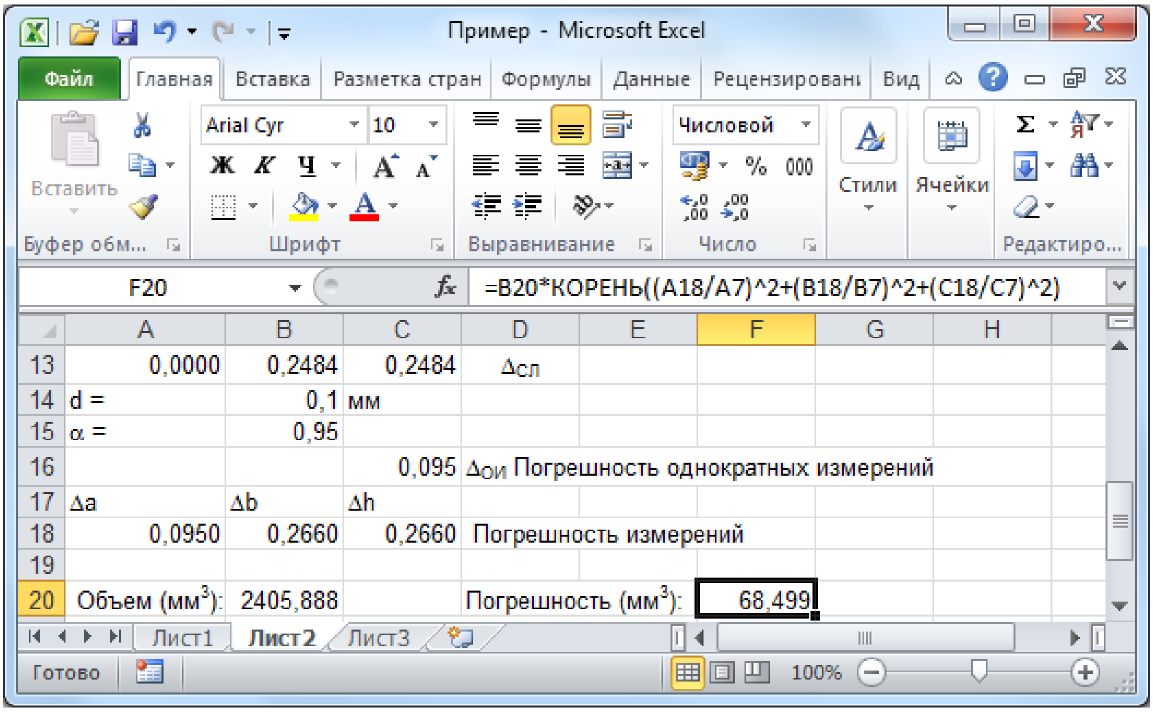
Для каждой измеренной величины необходимо рассчитать полную погрешность. Для величины a это следует сделать по формуле $\Delta\tilde{a} = \sqrt{\Delta\tilde{a}_{СЛ}^2 + \Delta_{ОИ}^2}$. Запишем эту формулу в ячейку A18 в виде:

=КОРЕНЬ(A13^2+$C16^2)

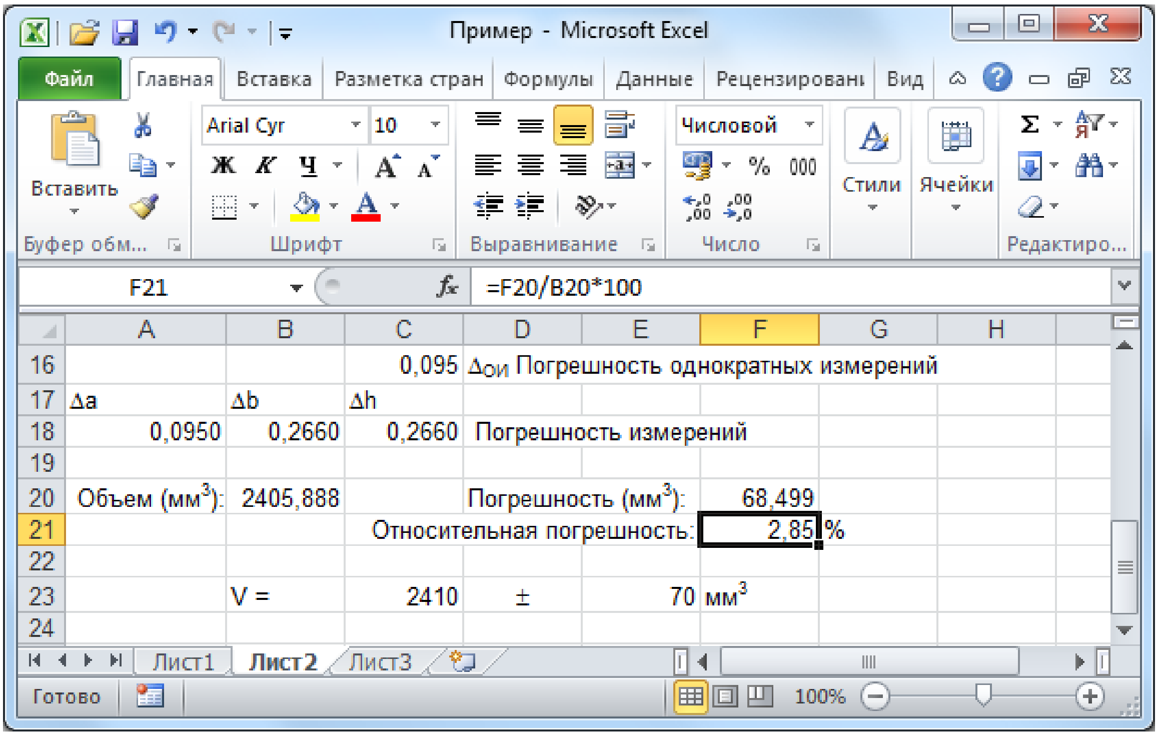
У ячейки C16, в которой расположено значение погрешности однократных измерений, с помощью символа $ уже зафиксирован номер столбца. Протянем (скопируем) ее вправо (по столбцам), чтобы получить погрешности $\Delta\tilde{b}$ и $\Delta\tilde{h}$ измерений двух других величин b и h. На рис. 34 погрешность $\Delta\tilde{a}$ озаглавлена как Δa, $\Delta\tilde{b}$ – как Δb, $\Delta\tilde{h}$ – как Δh.

Искомый объем тела рассчитаем, используя средние арифметические значения $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{h}$ каждой измеренной величины (в обозначениях, используемых на рисунках $\tilde{a} = \langle a\rangle$, $\tilde{b} = \langle b\rangle$ и $\tilde{h} = \langle h\rangle$):

$$\langle V\rangle = \langle a\rangle\cdot\langle b\rangle\cdot\langle h\rangle.$$



а



б

Рис. 35. Вычисление абсолютной и относительной погрешности измерения объема параллелепипеда (погрешности косвенных измерений)

Учитывая, что значения, необходимые для расчета по этой формуле расположены в таблице следующим образом: $<a>$ – в ячейке A7, $<b>$ – в ячейке B7, $<h>$ – в ячейке C7, запишем эту формулу в ячейку B20 в виде:

```
=A7*B7*C7
```

С учетом обозначений, используемых на рисунках, абсолютная погрешность объема рассчитывается по формуле (как погрешность косвенных измерений, см. стр. 62):

$$\Delta V = <V> \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{<a>}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{<b>}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{<h>}\right)^2} .$$

Все необходимые для расчета по этой формуле значения расположены в таблице следующим образом: $<a>$ – в ячейке A7, $<b>$ – в ячейке B7, $<h>$ – в ячейке C7, $<V>$ – в ячейке B20, Δa – в ячейке A18, Δb – в ячейке B18, Δh – в ячейке C18. Поэтому в ячейку F20 запишем формулу для расчета погрешности объема в виде (рис. 35, а):

```
=B20*КОРЕНЬ((A18/A7)^2+(B18/B7)^2+(C18/C7)^2)
```

Относительная погрешность (в процентах) объема параллелепипеда:

$$\delta = \frac{\Delta V}{<V>} \cdot 100\% .$$

Учитывая расположение данных в таблице, эту формулу запишем в ячейку F21 в виде (рис. 35, б):

```
=F20/B20*100
```

Согласно результатам вычислений искомое значение объема и его абсолютную погрешность (окончательный результат) необходимо округлить до десятков (до первой значащей цифры в абсолютной погрешности) и записать в виде:

$$V = (2410 \pm 70)\ \text{мм}^{3.}$$

Это также можно выполнить в электронной таблице MS Excel (рис. 35, б) с помощью встроенной функции ОКРУГЛ(число; порядок), использование которой нетрудно освоить самостоятельно.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ В MS EXCEL 2010

В MS Excel существует встроенный мастер диаграмм, который позволяет не только строить диаграммы и графики различных видов, но и выполнять сглаживание экспериментальных результатов.

Рассмотрим возможности MS Excel для построения двумерных графиков на примере зависимости координат тела при прямолинейном движении в плоскости XOY. Пусть в эксперименте выполнялись измерения координат *x* и *y* тела в различные моменты времени *t*. Результаты измерений представлены в табл. 11.

Таблица 11

Результаты измерений координат *x* и *y* при прямолинейном движении тела на плоскости

x, м	0,4	1,5	2,5	3,5	4,6	5,5	6,5	7,5	8,4	9,5	10,7	11,7	13	13,5
y, м	3,5	4,1	4,9	5,3	5,3	6,4	7,2	7,5	7,9	8,9	9,1	10,6	11	11,1

В этом примере используются те же данные, что и при описании методов аналитического построения линейной зависимости: метода средней, метода наименьших квадратов и графического метода (см. табл. 6, 8, 9, стр. 75, 80, 81, соответственно).

Поместим эти данные во вторую и третью строки электронной таблицы (рис. 36). Выделим (перемещая мышь, удерживая при этом нажатой ее левую клавишу) ячейки: B2, C2, … O2, B3, C3, … O3 (или B2:O3), в которых расположены исходные значения.

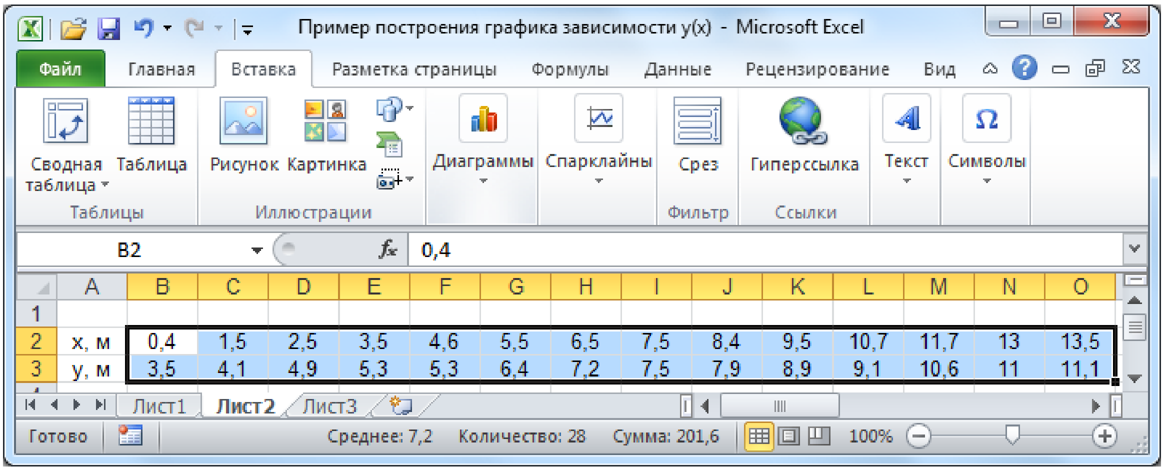
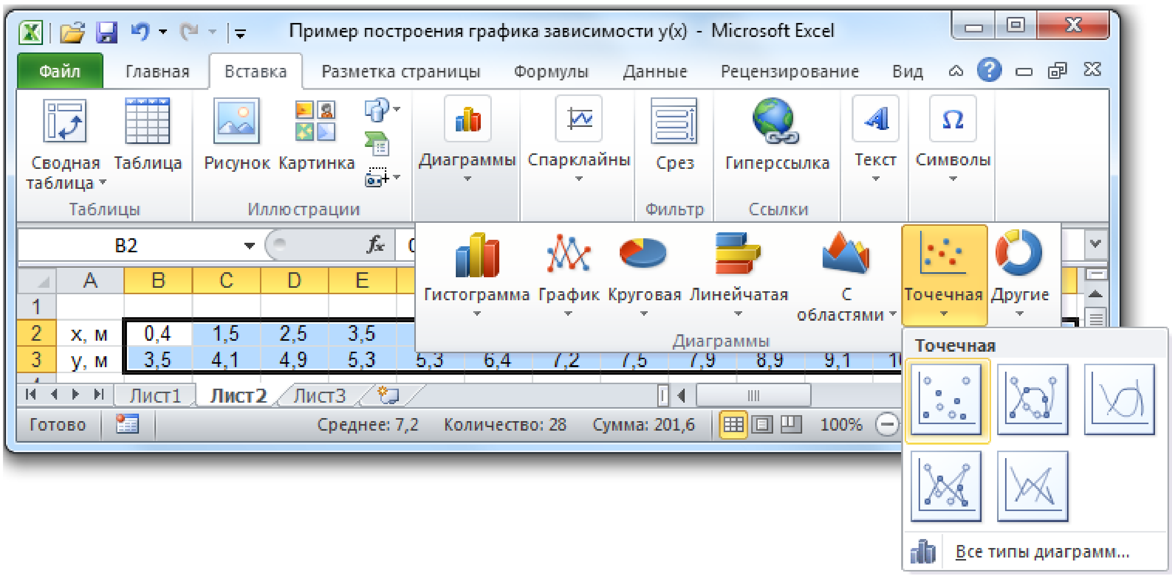


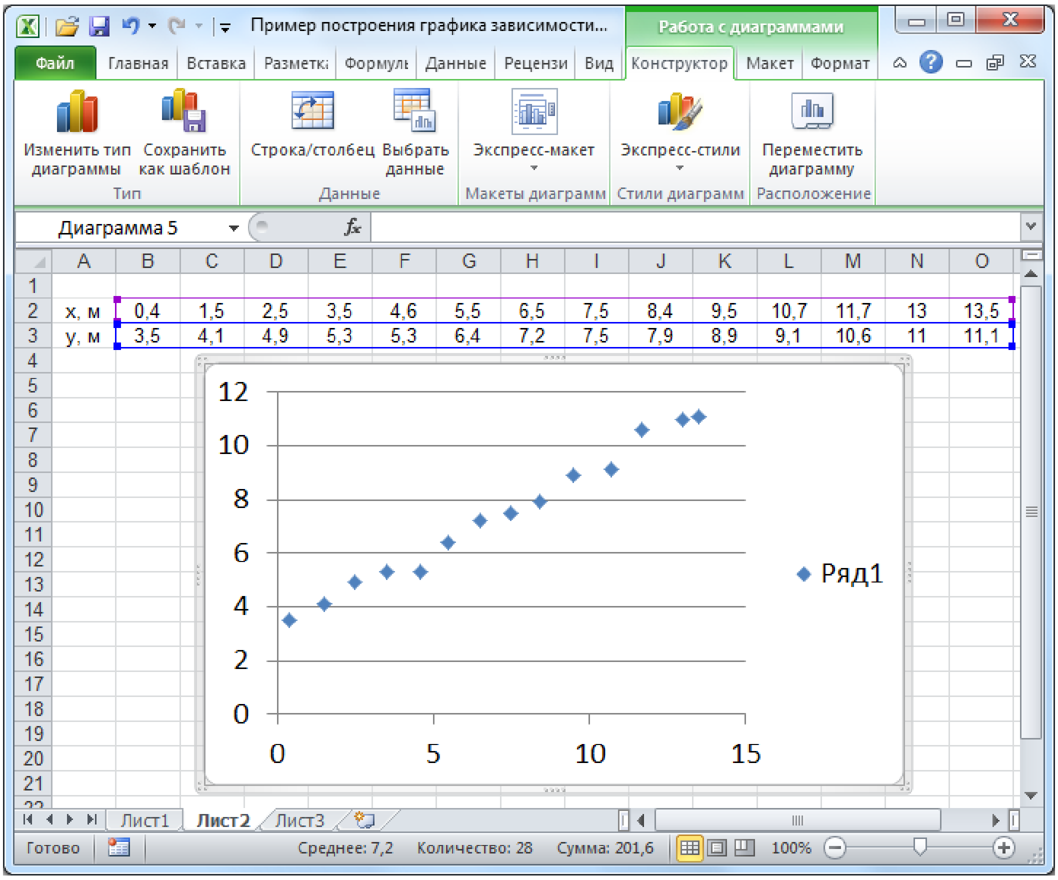
Рис. 36. Выбор данных для построения диаграммы

Далее на расположенной над таблицей панели инструментов выберите вкладку «Вставка», на которой находится группа инструментов «Диаграммы», принимающая вид раскрывающейся панели при малом размере окна MS Excel (рис. 36).

Из группы (панели) инструментов «Диаграммы» (рис. 37, а) выберите **тип диаграммы «Точечная»** без соединения экспериментальных

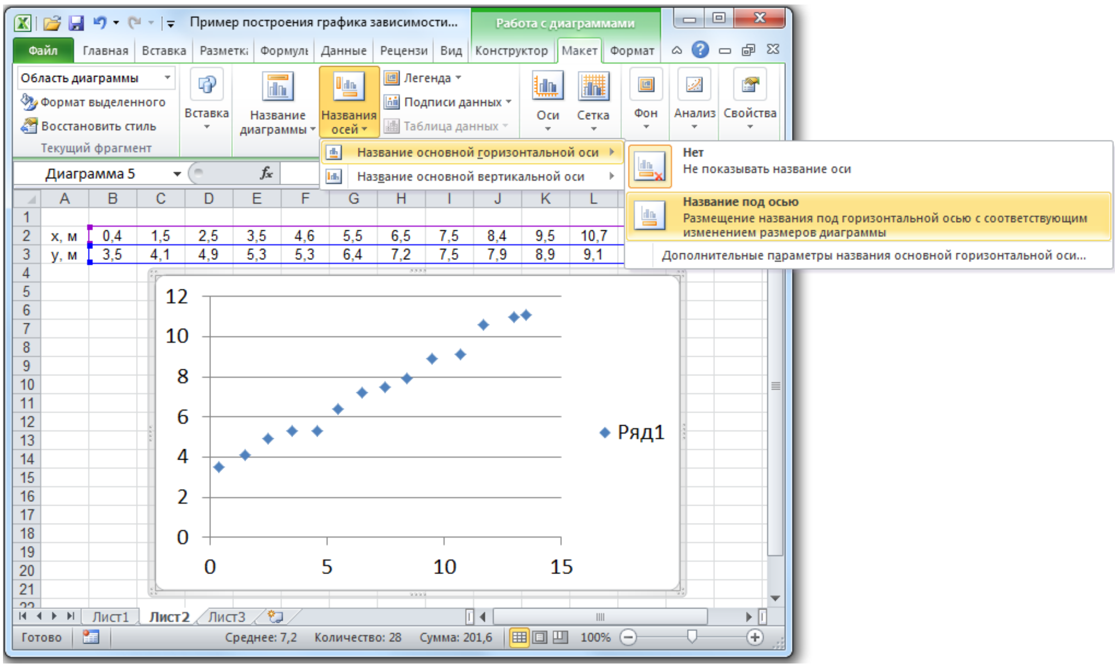


а

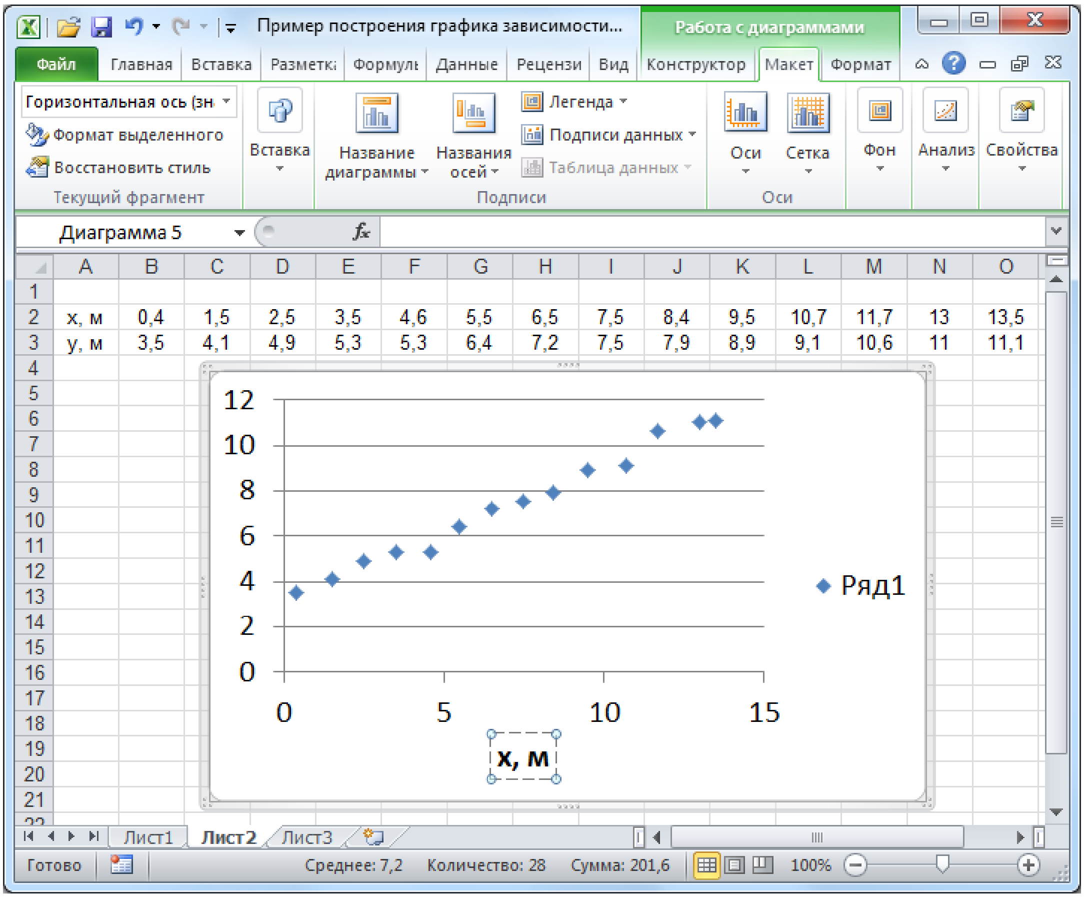


б

Рис. 37. Выбор типа диаграммы (а); результат вставки точечной диаграммы (б)



а



б

Рис. 38. Добавление наименования горизонтальной оси координат точек между собой (как показано на рисунке). Этот тип диаграммы позволяет задавать значения координат точек по обеим осям. В отличие от «Точечной» тип диаграммы «График» позволяет задавать значения координат точек только по вертикальной оси, поэтому редко подходит для отображения результатов физического эксперимента. Для каждого типа диаграммы существует несколько видов, которые отображаются на дополнительной панели кнопок при выборе типа диаграммы. В нашем примере будет использован вид (рис. 37, а), при котором точки графика не соединяются между собой.

В результате в электронной таблице появится диаграмма (рис. 37, б), которая (как правило) нуждается в дополнительных настройках.

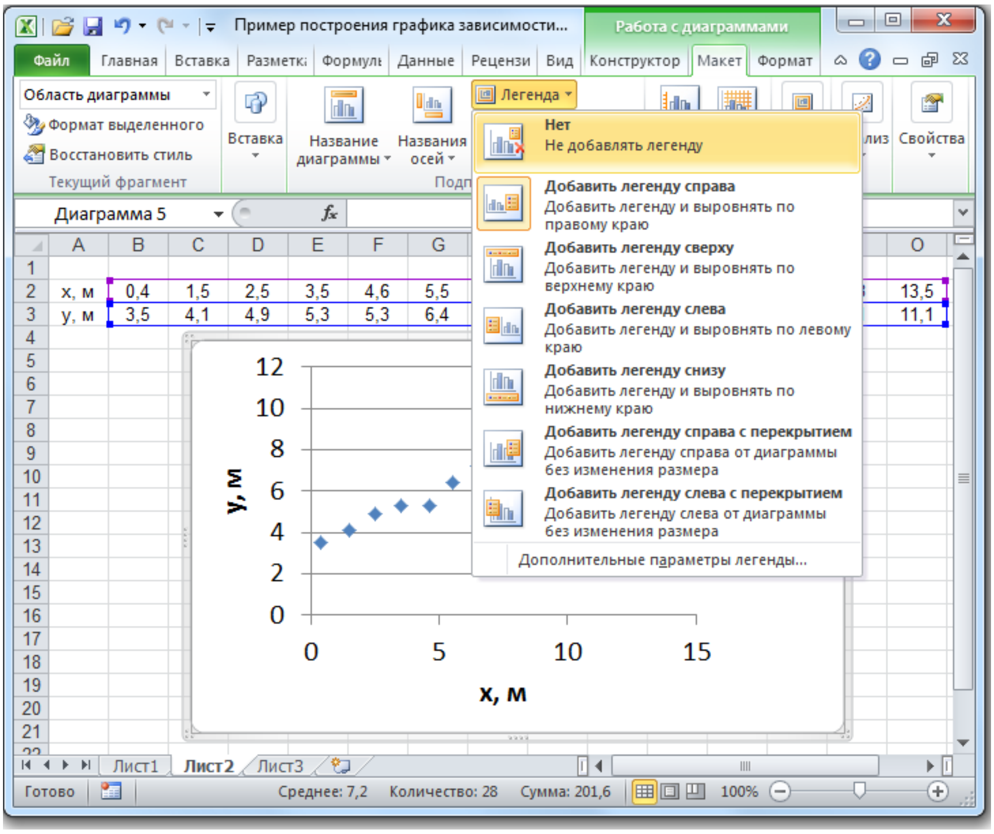


Рис. 39. Удаление условных обозначений

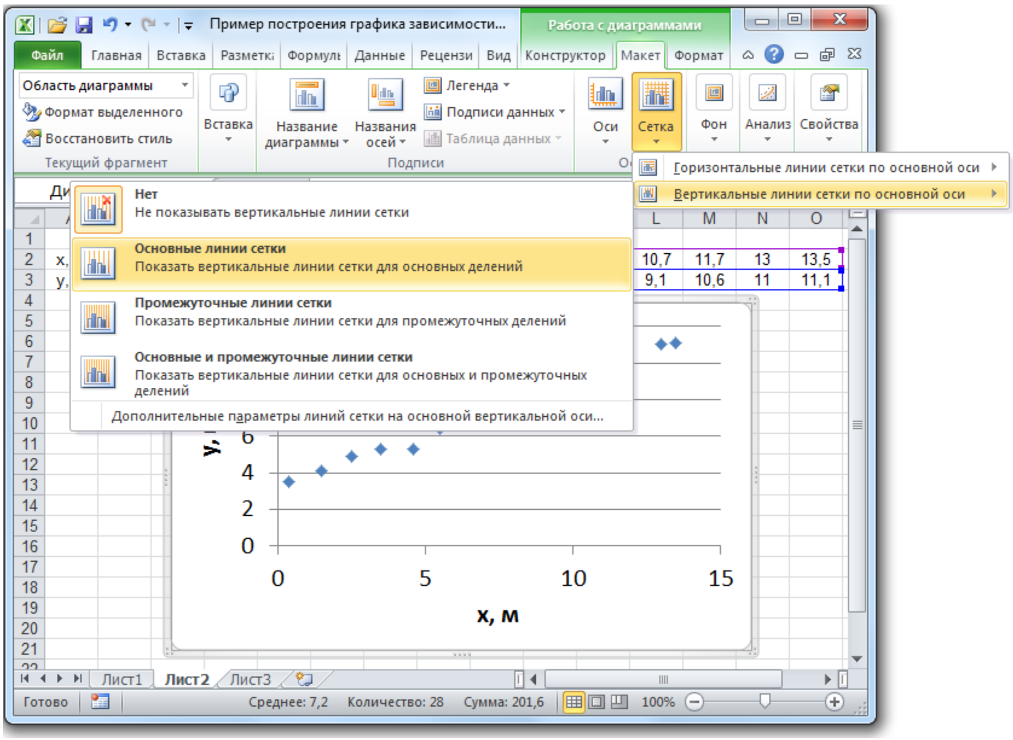
После вставки диаграммы расположенная над таблицей панель инструментов автоматически дополняется группой вкладок «Работа с диаграммами». На одной из них – на вкладке «Конструктор» расположена кнопка «Выбрать данные», после нажатия на которую появляется дополнительное диалоговое окно «Выбор источника данных», позволяющее регулировать, из каких строк или столбцов будут использоваться данные для построения графика. Так как перед вставкой диаграммы мы выделили область таблицы, где расположены необходимые для построения графика данные, то они и используются (автоматически) при построении диаграммы в данном примере. Если данные на диаграмме изображаются неправильно, можно вызвать диалоговое окно «Выбор источника данных» с помощью кнопки «Выбрать данные» и отрегулировать (добавить, изменить, удалить) строки или столбцы, значения из которых будут изображаться на диаграмме. В нашем случае данные изображаются правильно, поэтому в использовании этих кнопок нет необходимости.

Для выполнения других настроек перейдите к вкладке «Макет», которая доступна, если активной является не ячейка таблицы, а диаграмма. Вкладка «Макет» содержит несколько раскрывающихся списков и панелей (рис. 38–40), с помощью которых можно задать подписи осей координат и всей диаграммы, отрегулировать расположение легенды, линий сетки и т.д.

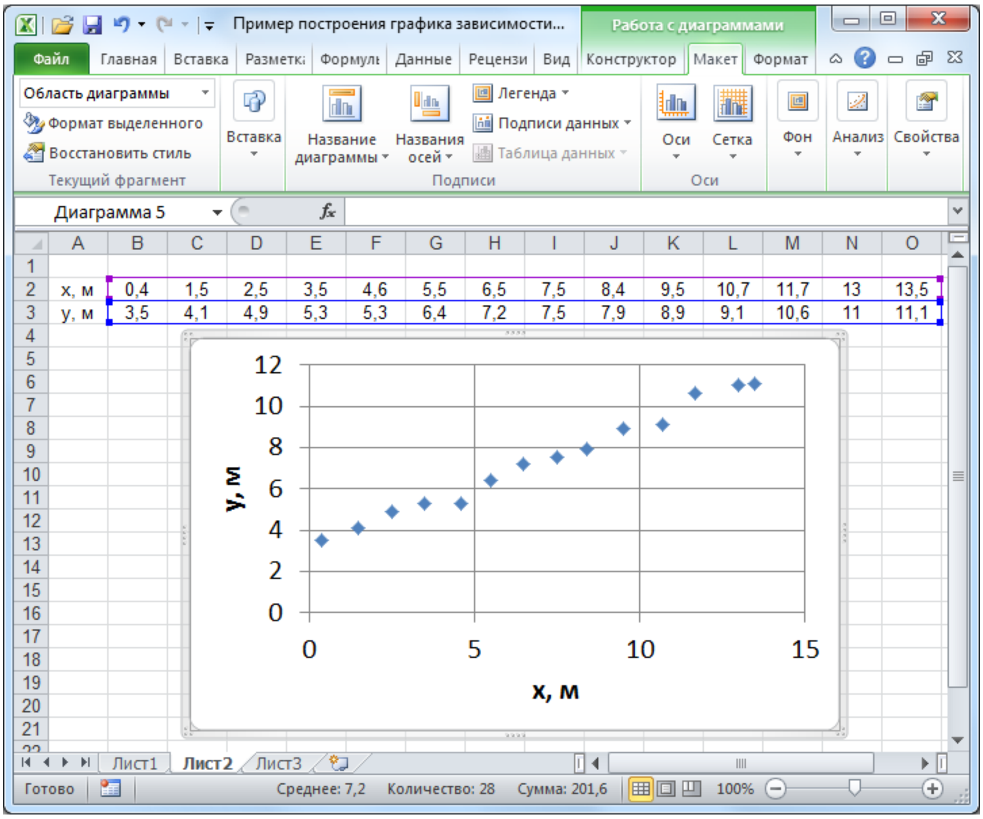
Для того чтобы подписать наименование и единицы измерения величин, откладываемых по осям координат, используют раскрывающийся список «Названия осей» (группа инструментов «Подписи») на вкладке «Макет». После выбора в раскрывающемся списке «Названия осей» пункта «Название основной горизонтальной оси» и подпункта «Название под осью» (рис. 38, а) ниже горизонтальной оси появится редактируемое поле «Название оси». В это поле введите текст «x, м» (рис. 38, б). Ввод завершается после однократного щелчка мыши вне данного поля. Аналогично в качестве названия основной вертикальной оси введите текст «y, м».

Так как на графике будет изображаться только одна экспериментальная зависимость, нанесение на диаграмму условных обозначений (легенды) теряет смысл. Поэтому в раскрывающемся списке «Легенда» (в группе инструментов «Подписи») выберите пункт «Нет» (рис. 39). Если на графике изображают несколько кривых, то с помощью раскрывающегося списка «Легенда» можно регулировать расположение и другие параметры списка условных обозначений.

Раскрывающийся список «Сетка» из группы инструментов «Оси» позволяет управлять отображением вертикальных и горизонтальных линий сетки. Горизонтальные линии сетки отображаются на графике по умолчанию, поэтому в раскрывающемся списке «Сетка» выберите пункт «Вертикальные линии сетки по основной оси» и подпункт «Основные линии сетки» (рис. 40, а). В результате график примет вид, изображенный на рис. 40, б.

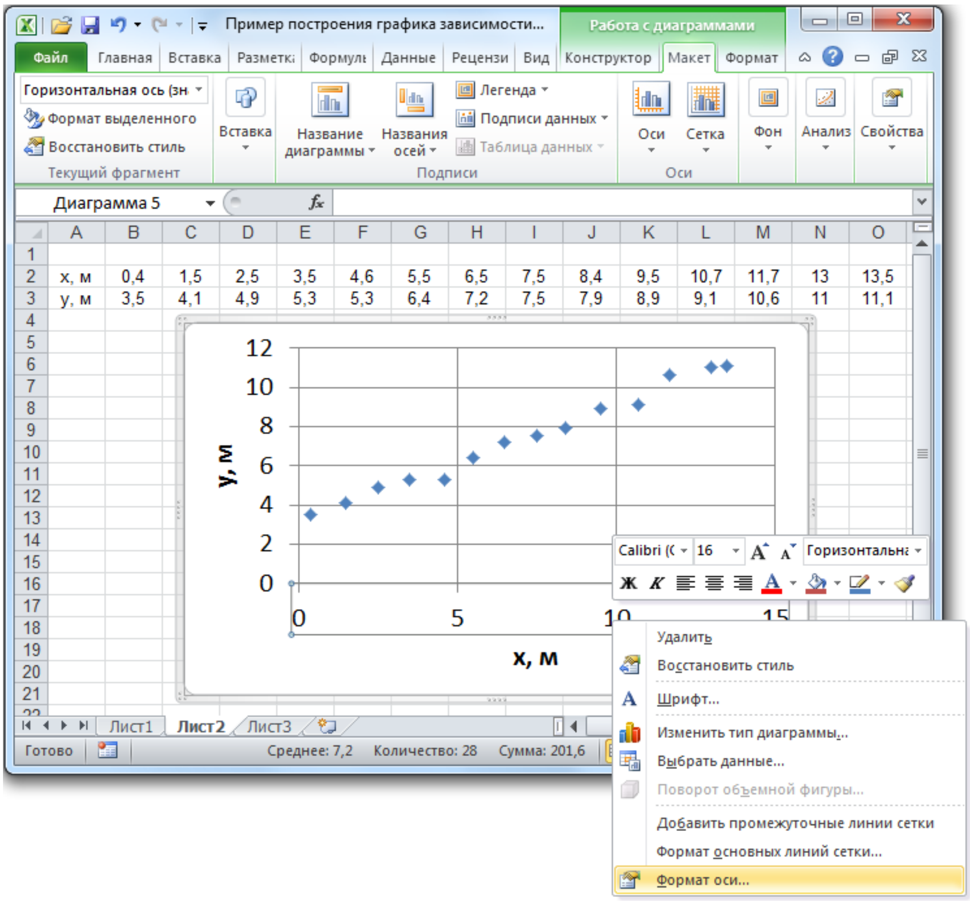


а

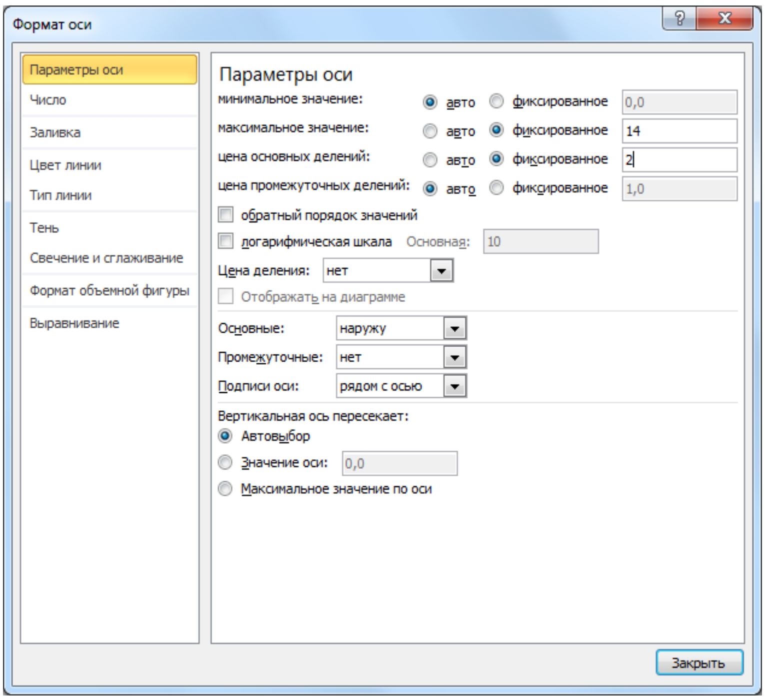


б

Рис. 40. Добавление вертикальных линий сетки



а



б

Рис. 41. Изменение параметров горизонтальной оси координат

Каждый элемент диаграммы имеет контекстное меню, с помощью которого также можно регулировать его отдельные параметры.

Так, например, диапазон значений, откладываемых по осям, на графике по умолчанию всегда шире, чем те данные, по которым он построен. Измените этот диапазон для горизонтальной оси. Для этого на одной из цифр, подписанных вдоль горизонтальной оси, щелкните правой клавишей мыши для вызова контекстного меню, в котором выберите пункт «Формат оси» (рис. 41, а).

Появится дополнительное диалоговое окно «Формат оси» (рис. 41, б). В разделе «Параметры оси» этого окна в поля «Минимальное значение» и «Максимальное значение» вместо значений 0 и 15 введите 0 и 14 соответственно, а значение поля «Цена основных делений» задайте равным 2. Нажмите кнопку «Закрыть».

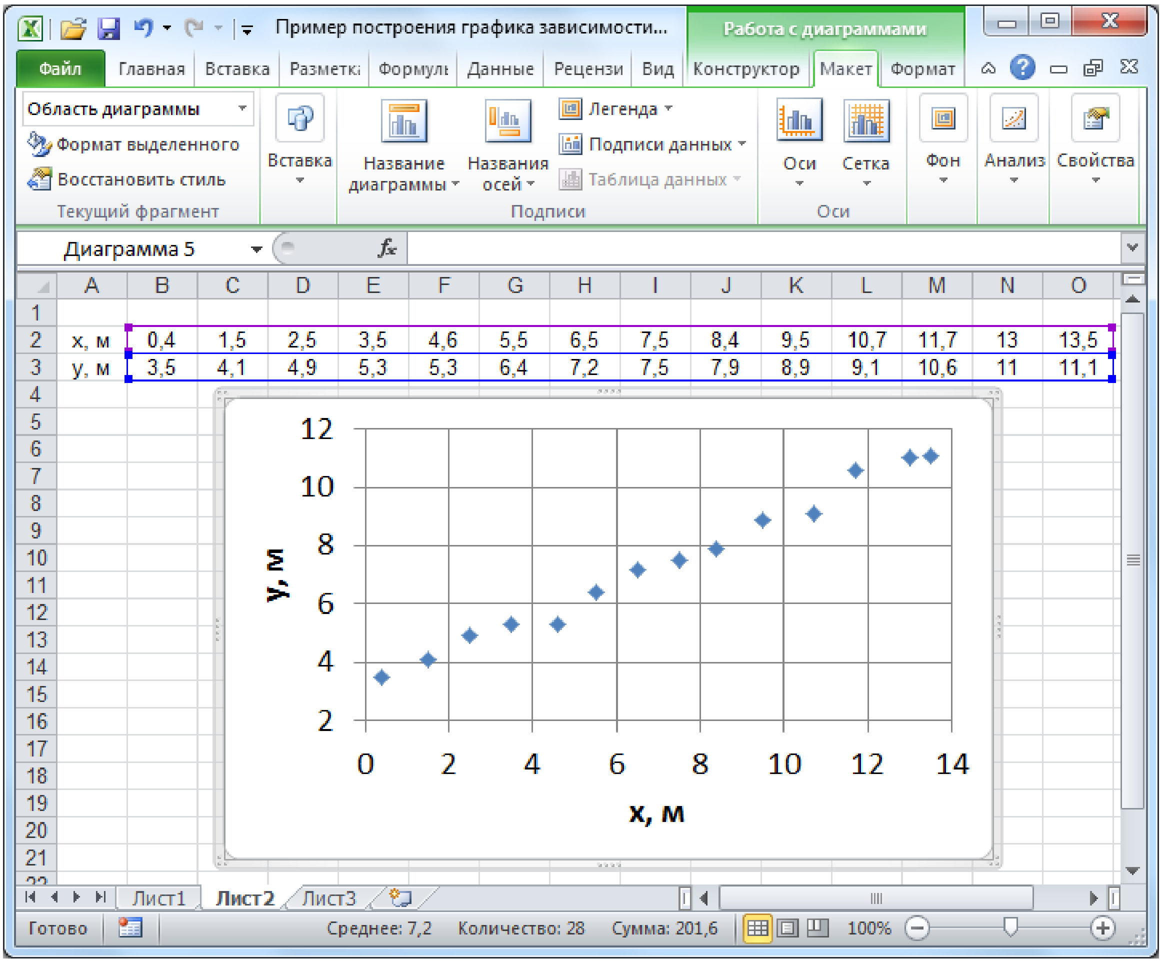
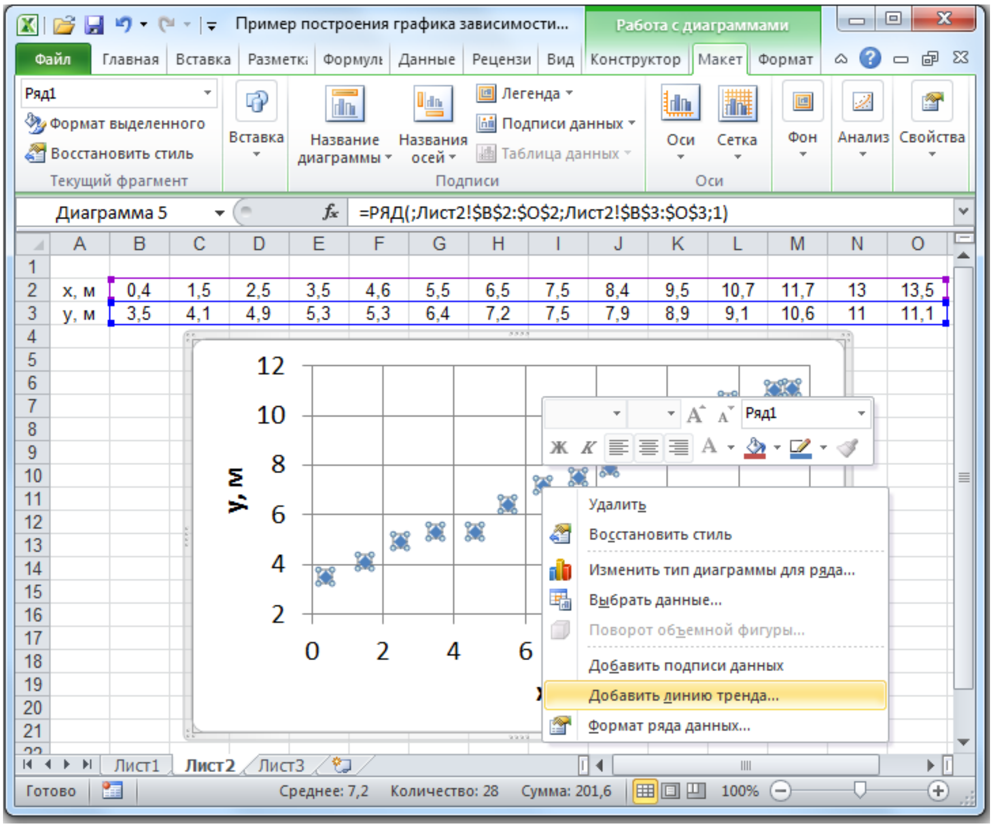
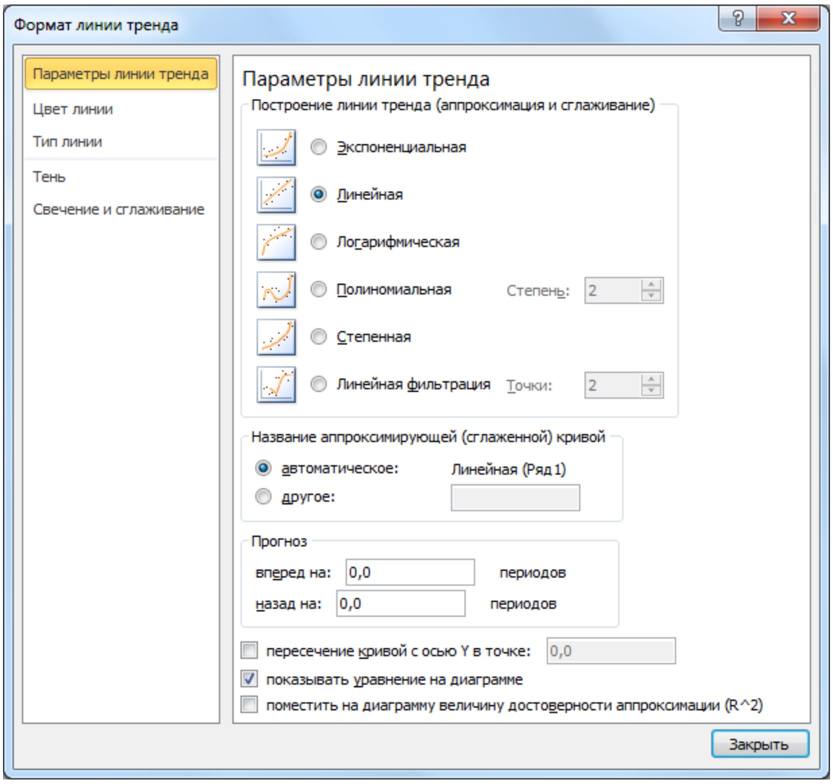


Рис. 42. График зависимости $y = F(x)$, построенный с помощью диаграммы MS Excel (тип «Точечная»)

Аналогично для вертикальной оси задайте минимальное значение равное 2, максимальное 12, а цену основных делений 2.



а



б

Рис. 43. Добавление сглаживающей кривой

В результате получится график, изображенный на рис. 42.

Контекстное меню позволяет также ***построить сглаживающую кривую***. Для этого щелкните правой клавишей мыши на одной из точек графика, в появившемся контекстовом меню выберите пункт «Добавить линию тренда» (рис. 43, а).

В результате появится дополнительное диалоговое окно «Формат линии тренда» (рис. 43, б). В этом окне можно настроить тип и параметры сглаживающей кривой. В разделе «Параметры линии тренда» доступны шесть типов сглаживания. В эксперименте, результаты которого обрабатываются в данном примере, изучалось прямолинейное движение тела на плоскости, поэтому зависимость $y = F(x)$ должна носить линейный характер. Поэтому выберите тип линии тренда «Линейная» (рис. 43, б).

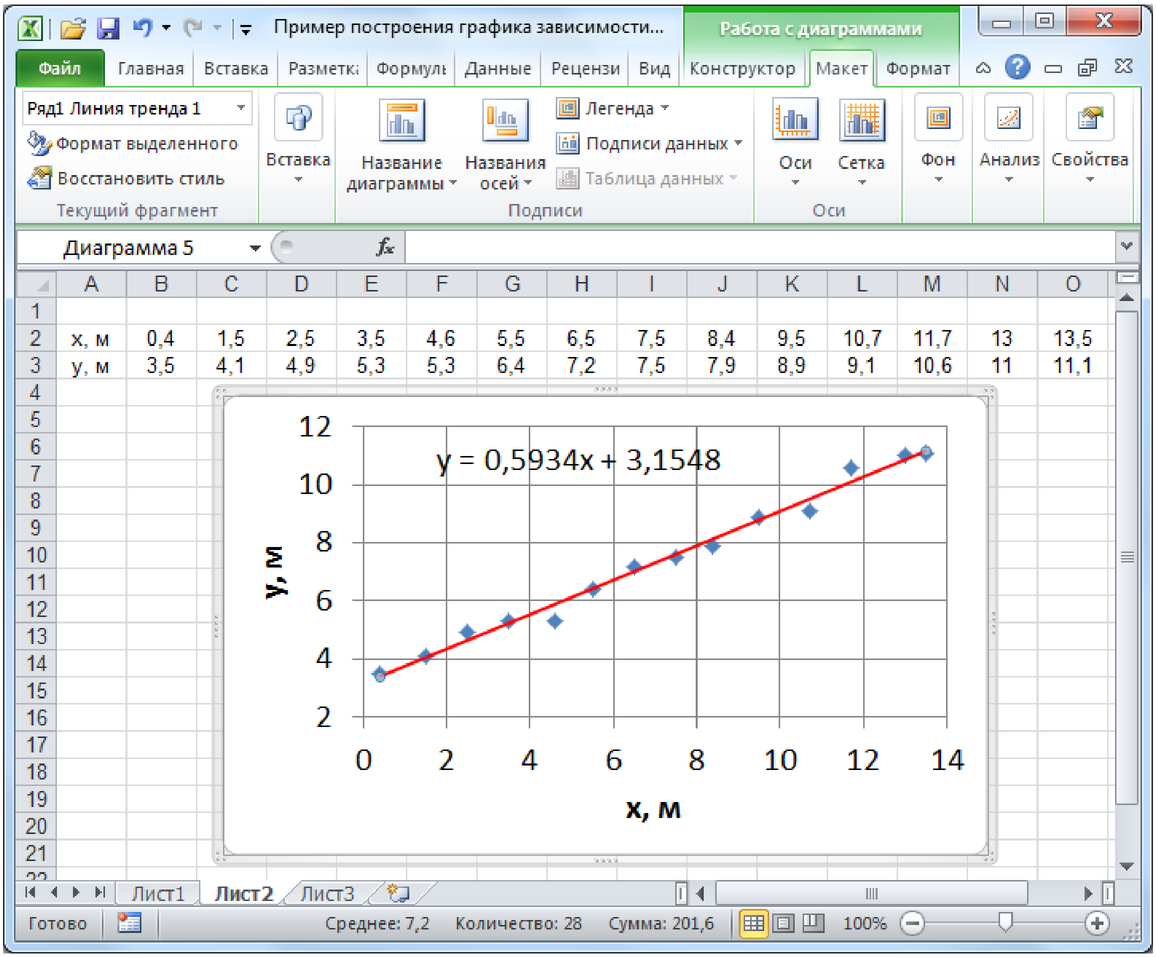


Рис. 44. График зависимости $y = F(x)$, построенный с помощью диаграммы MS Excel (тип «Точечная»), и аналитический вид соответствующей линейной зависимости

В нижней части этого окна отметьте «галочкой» поле «Показать уравнение на диаграмме» и нажмите кнопку «Закрыть».

Коэффициенты сглаживающей прямой (линии тренда) рассчитываются по методу наименьших квадратов.

В результате получится график, представленный на рис. 44.

Диаграммы MS Excel имеют большое количество настраиваемых параметров. Работу с этими параметрами можно освоить самостоятельно, опираясь на принципы описанные выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кортнев А.В., Рублев Ю.В., Куценко А.Н. Практикум по физике. М.: Издательство «Высшая школа», 1965. 568 с.
2. Кунце Х.-И. Методы физических измерений: Пер. с нем. М: Мир, 1989. 216 с.
3. Савчук В.П. Обработка результатов измерений. Физическая лаборатория. Ч. 1. Одесса: ОНПУ, 2002. 54 с.
4. Горбоконенко В.Д., Шикина В.Е. Метрология в вопросах и ответах. Ульяновск: УлГТУ, 2005. 196 с.
5. Сергеев А.Г. Метрология. М: Логос, 2005. 272 с.
6. Корнелл П. Анализ данных в Excell. Просто как дважды два / П. Корнелл; пер. с англ. М.: Эксмо, 2006. 224 с.
7. Симонович С.В., Евсеев Г.А., Алексеев А.Г. Специальная информатика: Учебное пособие. М.: АСТ-Пресс Книга, 2004. 480 с.
8. Информатика. Базовый курс / Симонович С.В. и др. СПб: Издательство «Питер», 2000. 640 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **3**
Виды измерений **4**
Классификация погрешностей измерений **7**

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ **12**
Случайные величины **12**
Свойства случайных величин 12
Случайные погрешности прямых многократных измерений **17**
Нормальное распределение непрерывной случайной величины 17
Оценка истинного значения и случайной погрешности измеряемой физической величины 22
Распределение Стьюдента 29
Случайная погрешность многократных измерений (выводы) 35
Погрешность однократных измерений **35**
Равномерное распределение непрерывной случайной величины 36
Способы определения погрешности однократных измерений 38
Совместный учет случайных погрешностей многократных и однократных измерений **46**
Погрешность прямых равноточных измерений (выводы) 47
Погрешности косвенных измерений **48**
Связь погрешности косвенных измерений с погрешностями прямых измерений 48
Погрешность косвенных измерений (выводы) 56
Представление результатов эксперимента с учетом погрешности **58**
Правила записи промежуточных результатов измерений и вычислений без учета погрешностей 59
Запись окончательного результата измерений с учетом погрешности измерений 62
Пример расчета погрешности и записи результатов экспериментальных исследований **62**
Способы уменьшения погрешности прямых и косвенных измерений **66**

ГРАФИЧЕСКАЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ.................................71
Графическое представление результатов эксперимента 71
Получение аналитических зависимостей, связывающих измеряемые величины...75
Графический метод получения параметров функциональной зависимости..75
Аналитические методы получения параметров функциональной зависимости..79

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ НА ПРИМЕРЕ MS EXCEL 2010........85
Расположение данных и отображение числовых результатов в MS Excel 2010...86
Выполнение вычислений в MS Excel 2010 89
Простейшие вычисления 89
Использование встроенных функций...94
Пример расчета погрешности результатов физического эксперимента в MS Excel 2010...100
Построение графических зависимостей В MS Excel 2010 106

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ...118

Учебное издание

КРАВЧЕНКО Надежда Степановна
РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В УЧЕБНОМ ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ

Учебное пособие

Компьютерная верстка *О.Г. Ревинской*
Дизайн обложки

Подписано к печати __.__.2017. Формат 60х84/16. Бумага «Классика».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 6,80. Уч.-изд.л. 6,16.
Заказ . Тираж 40 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru