

Лабораторная работа №1.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

1.1. Цель работы

При работе с электрическими сигналами одним из самых важных вопросов, связанным с их обработкой, является получение информации о входящих в его состав частотах. Информация о частотном спектре сигнала позволяет построить правильную систему, которая будет принимать, сохранять, усиливать, фильтровать и пр.

При формировании математической модели сигнала наибольшее распространение получила система, в которой базис образуют ортогональные гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) функции. Это объясняется тем, что гармоническая функция является единственной, которая сохраняет свою форму при прохождении через линейную электрическую цепь. Представление произвольного сигнала в виде суммы гармонических колебаний называют *спектральным разложением* этого сигнала в базисе гармонических функций, или *гармоническим анализом* сигнала.

Целью работы является определение практической ширины спектра сигналов, подбор оптимальных характеристик для фильтров.

1.2. Основные понятия и расчетные формулы

Пусть исследуемый сигнал описывается периодической функцией времени $x(t)$, которая в пределах периода T ее изменения удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда функцию $x(t)$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t) \quad (1.1)$$

коэффициенты которого определяются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (1.2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(n\omega_1 t) dt \quad (1.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(n\omega_1 t) dt \quad (1.4)$$

Таким образом, в общем случае периодический сигнал $x(t)$ содержит в себе не зависящую от времени постоянную составляющую $a_0/2$ и бесконечный набор гармонических составляющих с частотами $\omega_n = 2\pi n/T$ ($n=1, 2, 3, \dots$), кратными основной частоте $\omega_1 = 2\pi/T$ периодического сигнала.

Распространена и другая форма записи ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (1.5)$$

где амплитуды A_n и φ_n гармонических составляющих вычисляются по формулам:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = \arg(a_n - jb_n)$$

Гармоническую составляющую

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

называют основной гармоникой, а гармоническую составляющую

$$x_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

– n -й гармоникой.

Совокупности величин A_n и φ_n $n = 1, 2, \dots$ называют соответственно *амплитудным и фазовым* частотными спектрами сигнала или, иначе, спектром амплитуд и спектром фаз. Частотные спектры являются функциями, зависящими от номера гармоники n как независимой переменной. Графически частотные спектры изображают в виде отрезков A_n и φ_n , проведенных перпендикулярно к оси, на которую наносятся значения $\omega_n = n\omega_1$ (рис. 1.1). Графическое изображение амплитудного и фазового частотных спектров принято называть *амплитудной и фазовой спектральными диаграммами*.

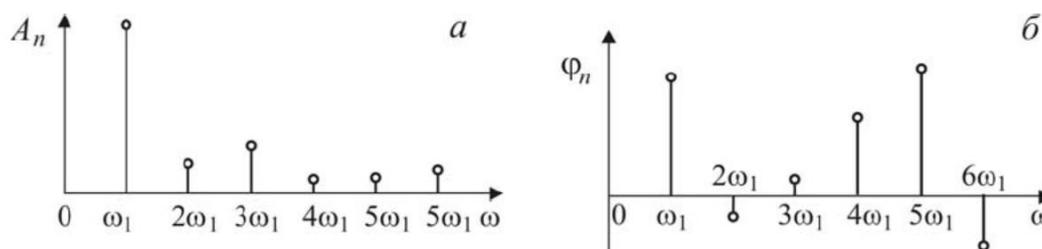


Рис. 1.1. Амплитудная и фазовая спектральные диаграммы

Ряд Фурье обеспечивает наилучшее в смысле среднеквадратической погрешности приближение к исходной функции. Это означает, что если число членов ряда Фурье ограничено и исходный сигнал $x(t)$ аппроксимирован функцией

$$x^*(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n),$$

то наименьшая средняя квадратическая ошибка

$$\sigma^2 = \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t) - x^*(t)]^2 dt \quad (1.6)$$

имеет место в том случае, когда коэффициенты ряда Фурье определены по формулам (1.2)–(1.4).

При увеличении числа членов ряда Фурье до бесконечности средняя квадратическая ошибка σ^2 стремится к нулю. Однако это вовсе не означает, что ряд точно стремится к функции при любом значении времени t . Например, если функция $x(t)$ имеет разрыв в точке t_1 , то есть

$$x(t_1 - 0) \neq x(t_1 + 0),$$

то ряд Фурье в этой точке, согласно теореме Дирихле, сходится к среднеарифметическому значению:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x^*(t) = \frac{x(t_1 - 0) + x(t_1 + 0)}{2}.$$

Таким образом, сходимость ряда Фурье во многом зависит от аналитических свойств разлагаемой функции. Более гладкой функции $x(t)$ соответствует лучшая сходимость ее ряда Фурье.

Средняя мощность периодического сигнала

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1.7)$$

если известен амплитудный спектр сигнала, может быть рассчитана, согласно теореме Парсеваля, по формуле

$$P_{cp} = \frac{A_0^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

Для сигнала, описываемого усеченным рядом Фурье, можно найти приближенное значение средней мощности

$$P_{cp} = \frac{A_0^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2 \quad (1.7)$$

1.3. Методические указания

В настоящей работе проводится гармонический анализ периодического сигнала, образованного из импульсов заданной формы. На рис. 1.2 для примера изображен график сигнала, полученного из периодическим повторением одиночных импульсов.

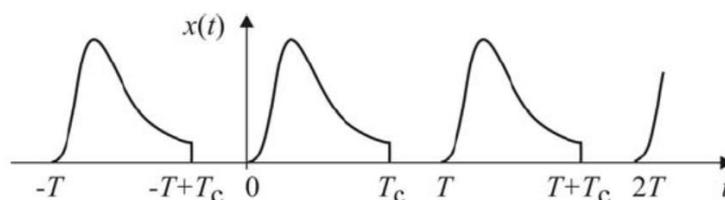


Рис. 1.2. Пример периодического сигнала

При расчете коэффициентов ряда Фурье требуется задать начальный момент t_0 периода интегрирования в формулах (1.2)–(1.4). Как правило, значение t_0 выбирают из условия упрощения вычислений. Для исследуемых в работе сигналов рекомендуем принять $t_0=0$. При этом нижний и верхний пределы интегрирования в формулах (1.2)–(1.4) будут соответственно равны 0 и T_c .

Обращаем внимание на то, что стандартная функция $\arctg(x)$ в системе программирования MatchCAD определяет главные значения, ограниченные пределами:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctg(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

Поэтому, если при определении фазы гармоники использовать рекомендуемую в литературе формулу

$$\varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n}$$

можно получить неверные результаты.

Чтобы получить правильные результаты при использовании функции $\arctg(x)$, следует учесть знаки коэффициентов a_n , b_n и внести необходимые поправки в расчетные формулы.

При выполнении работы предлагаем использовать имеющуюся в системе MatchCAD функцию

$$\varphi_n = \arg(a_n - jb_n)$$

которая определяет значения φ_n от $-\pi$ до π .

1.4. Программа работы

Предварительное задание:

Получить аналитические выражения для коэффициентов разложения в ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных импульсов (рис. 1.3). Рассчитать значения A_n , φ_n первых пяти гармоник для произвольных τ , T .

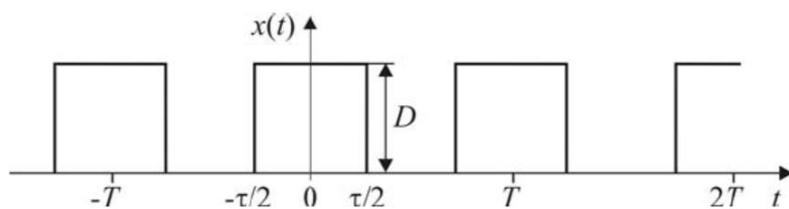


Рис. 1.3. Последовательность прямоугольных импульсов

1. Для пары сигналов, в соответствие с заданным преподавателем вариантом сформировать в среде MathCAD математическую модель периодических сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Построить графики сигналов, подтвердив правильность полученной математической модели.
2. Составить программу для расчет коэффициентов a_n , b_n , A_n , φ_n ряда Фурье для заданных сигналов. Построить графики амплитудных и фазовых спектров сигналов. Сделать выводы о различиях полученных спектров.
3. Определить для каждого из сигналов практическую ширину спектра при условии 5% и 1% допустимых потерь мощности. Сравнить получившиеся результаты.
4. Восстановить сигналы по усеченным спектрам, ограничив расчет последней гармоникой практической ширины спектра. Сделать выводы о качестве восстановления сигнала. Для сравнения привести график усеченного ряда, в котором выбрать N в 2 раза меньше расчетного из практической ширины спектра.

1.5. Контрольные вопросы и задания

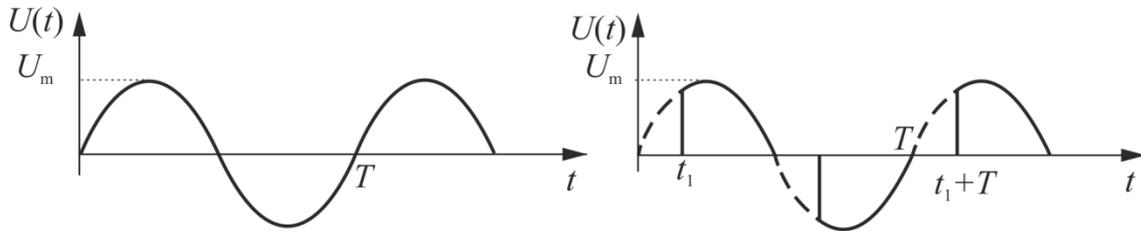
1. Опишите основные свойства периодических сигналов.
2. Изобразите графики нескольких первых базисных функций ряда Фурье.
3. Поясните особенности разложения нечетных и четных функций в ряд Фурье.
4. Запишите формулы, связывающие коэффициенты тригонометрического и комплексного рядов Фурье.
5. Как отразится изменение положения отсчета времени $t = 0$ периодического сигнала

на значениях A_n и φ_n ряда Фурье?

6. Как изменится спектр периодического сигнала, если изменить масштаб по оси времени?
7. Как изменится спектр последовательности прямоугольных импульсов, если уменьшить длительность τ и период T импульсов в два раза?
8. Почему разрывные функции не могут иметь точного приближения рядами Фурье?
9. В чем состоит эффект Гиббса?

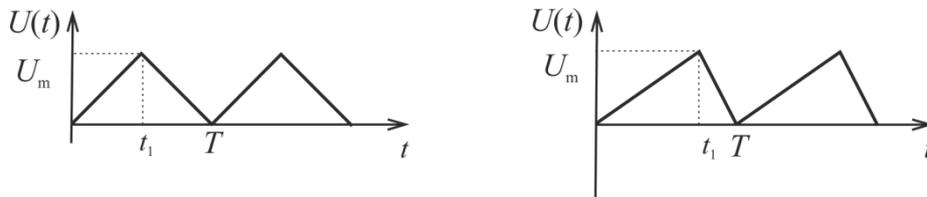
Варианты заданий

Артамонов Игорь Сергеевич



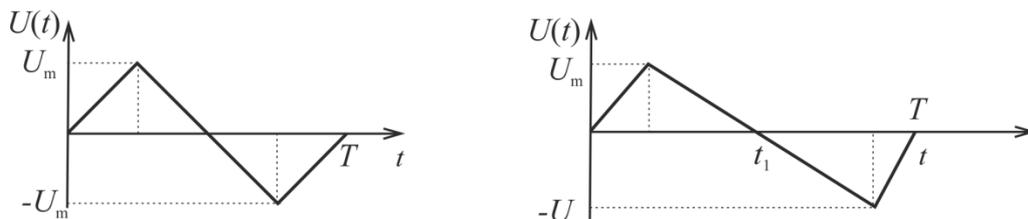
$T = 200\text{мкс}$, $U_m = 2\text{В}$; угол регулировки = 20°

Ахтырский Кирилл Александрович



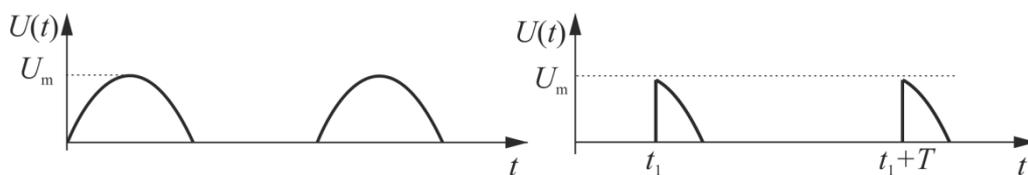
$T = 20\text{мкс}$, $U_m = 5\text{В}$; Для первого графика $t_1 = T/2$, для второго графика $t_1 = 3T/4$

Бургэд Энхжин



$T = 200\text{мкс}$, $U_m = 2\text{В}$; Для первого графика $t_1 = T/2$, для второго графика $t_1 = T/4$

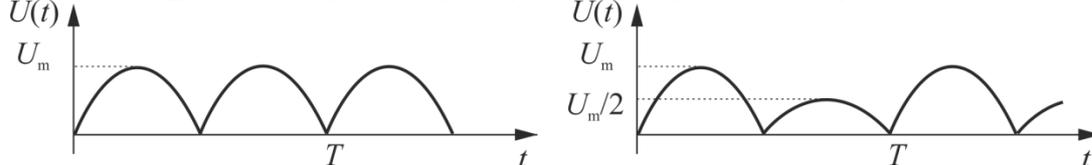
Жуков Даниил Вадимович



$T = 100\text{мкс}$, $U_m = 1\text{В}$; угол регулировки = 110°

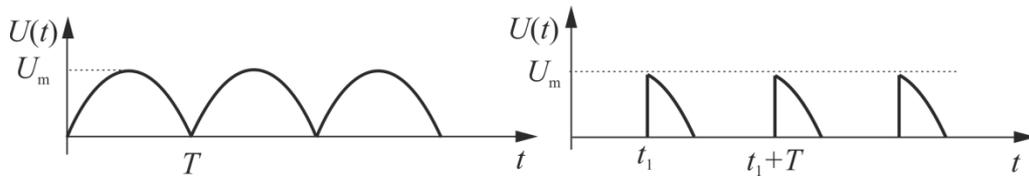
Каратаев Мурат Азаматович

$T = 150\text{мкс}$, $U_m = 2\text{В}$; Для первого графика $t_1 = T/2$, для второго графика $t_1 = T/4$



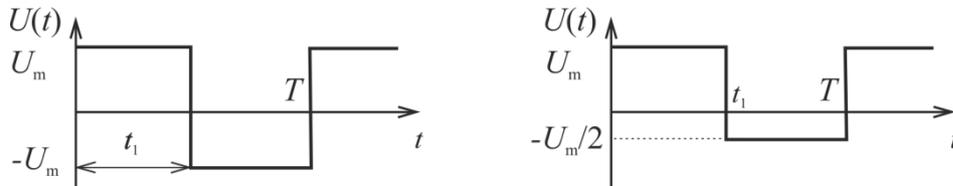
$T = 100\text{мкс}$, $U_m = 5\text{В}$;

Костров Вячеслав Александрович



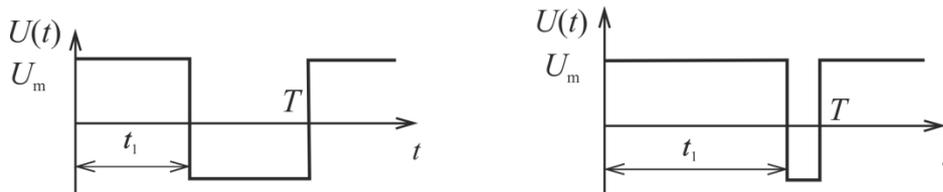
$T = 50\text{мкс}$, $U_m = 5\text{В}$; угол регулировки = 120°

Максуль Ирина Олеговна



$T = 20\text{мкс}$, $U_m = 5\text{В}$;

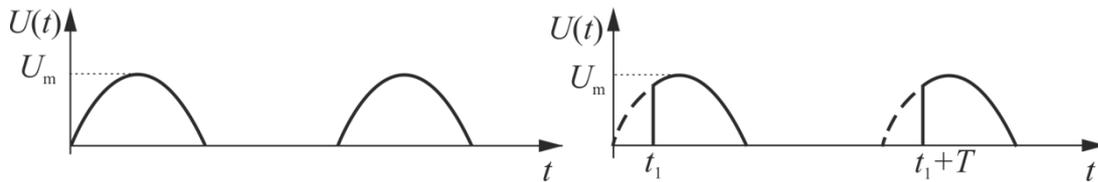
Михайлова Татьяна Евгеньевна



$T = 10\text{мкс}$, $U_m = 2\text{В}$;

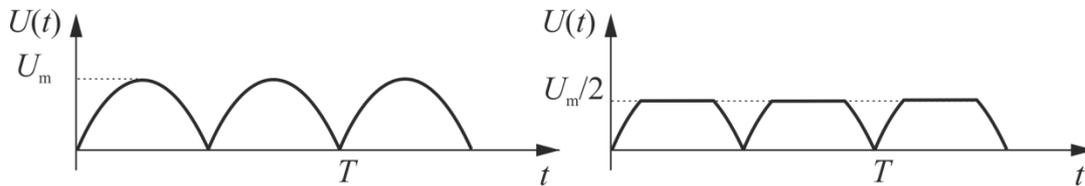
Для первого графика $t_1 = T/2$, для второго графика $t_1 = 3T/4$

Пайгин Кирилл Денисович



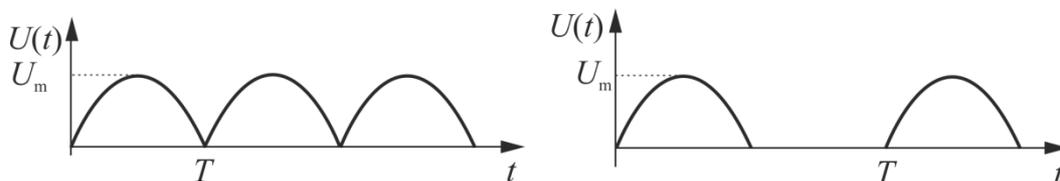
$T = 10\text{мкс}$, $U_m = 2\text{В}$; угол регулировки = 30°

Тетервак Дмитрий Андреевич



$T = 20\text{мкс}$, $U_m = 5\text{В}$;

Шарубин Владимир Николаевич



$T = 20\text{мкс}$, $U_m = 5\text{В}$