ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Колесников Олег Валерьевич

Решение квантовомеханической задачи пяти тел для системы $\eta - 4N$

Специальность 01.04.16 – Физика атомного ядра и элементарных частиц

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

Фикс А.И.

Томск – 2022 г.

Оглавление

Введение **4**

1 Уравнения Альта-Грассбергера-Сандхаса для задачи пяти тел **18**

1.1 Вывод уравнений АГС для системы пяти частиц 19

1.2 Сепарабельное разложение ядер интегральных уравнений 32

1.3 Заключение к главе 1 34

2 Решение задачи пяти тел для системы тождественных бозонов **36**

2.1 Формализм АГС для системы пяти тождественных бозонов 36

2.2 Результаты и их обсуждение 39

2.3 Заключение к главе 2 41

3 Решение задачи пяти тел для системы $\eta - 4N$ **44**

3.1 Двухчастичные взаимодействия 44

3.2 Чувствительность низкоэнергетического η-ядерного взаимодействия к свойствам амплитуды ηN рассеяния 49

3.3 Результаты и их обсуждение 54

3.3.1 Сходимость сепарабельного разложения 54

3.3.2 Обсуждение результатов 55

3.3.3 Важность N-частичного подхода к исследованию η-ядерных систем . . 60

3.4 Сравнение с результатами других авторов 63

3.5 Заключение к главе 3 67

Заключение **69**

Приложения **73**

I. Формализм Альта-Грассбергера-Сандхаса 73

II. Сепарабельное разложение 79

III. Учет тождественности частиц 82

Список литературы **89**

Введение

Взаимодействие мезонов с ядрами и возможное существование связанных мезон-ядерных состояний в последнее время стали одним из наиболее важных объектов теоретических и экспериментальных исследований. Мезонные атомы (мезоатомы), являющиеся примером водородоподобной системы с электроном, замененным на отрицательно заряженный π- или K-мезон, хорошо известны и на сегодняшний день достаточно детально изучены. В частности, имеется обширная информация о действительной и мнимой частях пион-ядерного и каон-ядерного потенциалов, которая была получена при подгонке модельных расчетов к существующим наборам данных о сдвигах уровней, ширинах и дифференциальных сечениях для довольно большого числа мезоатомов, включая наиболее ранние результаты для глубоко связанных пионных состояний. Очевидно, что основным взаимодействием, отвечающим за образование мезоатома, является кулоновское притяжение между отрицательно заряженным мезоном и протонами ядра, тогда как сильное взаимодействие выступает здесь лишь в качестве поправки. Эксперименты, в которых задействованы мезонные атомы, нацелены на исследование сильного мезон-ядерного взаимодействия лишь вблизи поверхности ядра и, таким образом, дают информацию об этом взаимодействии только для относительно малых ядерных плотностей.

Основным объектом исследования данной работы являются связанные мезон-ядерные состояния, возникающие при взаимодействии ядер с нейтральными мезонами (то есть в отсутствие кулоновского притяжения), где основную роль играет сильное взаимодействие между мезоном и ядерными нуклонами. При экспериментальном поиске этих объектов использовались процессы, в которых в качестве налетающих на ядро частиц применялись фотоны, пионы, протоны, легкие и даже тяжелые ионы. Эксперименты проводились в широком диапазоне энергий от пороговых значений до ультрарелятивистских столкновений в процессах с тяжелыми ионами.

Представленные в настоящей работе исследования относятся главным образом к диапазону энергий, близких к порогу рождения мезона. Именно эта область в наибольшей степени связана с возможным образованием мезон-ядерных связанных состояний, поскольку ядро, очевидно, может захватывать лишь медленные мезоны даже в случае достаточно сильного

притяжения. Полученные результаты относятся к мезонам, имеющим время жизни, достаточное для образования квазисвязанного мезон-ядерного состояния. Это, в первую очередь, псевдоскалярные мезоны K^+, K^0, K^-, η, η', а также векторные мезоны ω и ϕ. В то же время, развитые нами методы не применимы, например, к взаимодействию ρ-мезонов с ядрами ввиду исключительно малого времени жизни ρ-мезона.

Можно указать несколько причин, которыми обусловлен интерес к мезон-ядерному взаимодействию. Во-первых, оно является удобным полигоном для проверки теории сильного взаимодействия – квантовой хромодинамики (КХД) – в непертурбативном режиме. Исследования в этой области были мотивированы, в частности, теоретическими предсказаниями, указывающими на то, что свойства мезонов могут существенно изменяться в ядрах из-за частичного восстановления киральной симметрии. В рамках КХД мезоны рассматриваются как возбуждения вакуума КХД, имеющего сложную структуру, характеризующуюся ненулевым киральным, глюонным и кварковым конденсатами (то есть вакуумными средними типа $\langle\overline{\varphi}\varphi\rangle$). Предполагается, что значения этих конденсатов могут претерпевать значительные изменения при переходе от вакуума к адронной среде, что, как следствие, должно приводить к изменению массового спектра мезонов. Эта идея стала генератором множества теоретических и экспериментальных исследований, результаты которых можно найти в недавно опубликованных обзорах [1, 2].

Важно отметить, что псевдоскалярные мезоны являются наиболее подходящим инструментом для изучения эффектов восстановления киральной симметрии в ядрах. Спонтанное нарушение этой симметрии порождает псевдоскалярный нонет (π, K, $\overline{K}$, η, η') безмассовых бозонов Намбу–Голдстоуна. Кроме того, нарушенная $U(1)_A$-симметрия избирательно сдвигает массу синглета η_0, приводя в итоге к образованию безмассового $SU(3)$ октета пионов, каонов и η_8-мезона. В связи с тем, что нарушение симметрии довольно сильно влияет на массы мезонов, можно ожидать, что частичное восстановление симметрии в сильно взаимодействующей среде будет приводить к значительному изменению этих масс по сравнению с их вакуумными значениями. Следствия этих эффектов могут выходить за рамки адронной и ядерной физики. В частности, уменьшение массы мезона K^- в ядерной среде может указывать на возникновение конденсации K^- в плотной ядерной материи, например, внутри нейтронных звезд, как было показано, например, в работах [3, 4].

В качестве конкретного псевдоскалярного мезона в диссертационной работе рассматривается мезон $\eta(547)$, который в рамках КХД представлен смесью состояний η_8 и η_0:

$$|\eta\rangle = \cos\theta\,|\eta_8\rangle - \sin\theta\,|\eta_0\rangle\,. \tag{1}$$

Угол смешивания $\theta = -11,5^\circ$ достаточно мал, что говорит о преимущественной доле компоненты η_8 в комбинации (1).

Очевидно, что особенности мезон-ядерного взаимодействия обусловлены свойствами элементарного, то есть мезон-нуклонного, взаимодействия. Поэтому, для понимания этих особенностей требуется детальное изучение мезон-нуклонной динамики. В этой связи интересно отметить, что, несмотря на то, что изовекторный мезон $\pi(139)$ и изоскалярный мезон $\eta(547)$ являются членами одного и того же мультиплета (нонета) нестранных псевдоскалярных мезонов, их взаимодействие с нуклоном оказывается принципиально различным.

Действительно, s-волновое πN взаимодействие в области малых энергий характеризуется очень низкой интенсивностью. По этой причине, начиная с энергии в несколько МэВ выше порога в πN рассеянии доминирует p-волна, связанная с возбуждением p-волнового резонанса $\Delta(1232)\frac{3}{2}^+$.

В противоположность π-мезону, свойства низкоэнергетического ηN взаимодействия практически полностью определяются наличием в ηN амплитуде s-волнового резонанса $N(1535)\frac{1}{2}^-$, имеющего довольно большую моду распада в канал ηN (около 50 %). Резонансный характер ηN взаимодействия приводит к тому, что, в отличие от взаимодействия в системе πN, оно является довольно интенсивным и, что наиболее важно, в околопороговой области имеет характер притяжения. Последнее связано с тем, что масса $M_R \approx 1535$ МэВ резонанса $N(1535)\frac{1}{2}^-$ оказывается лишь на 45 МэВ выше значения пороговой энергии $W \approx 1480$ МэВ рассеяния в системе центра масс ηN (то есть суммы масс η-мезона и нуклона). По этой причине амплитуда ηN рассеяния $f_{\eta N}(W)$ имеет положительную вещественную часть в области энергий $W < 1535$ МэВ, что и определяет притягивающий характер ηN взаимодействия. Эти простые качественные рассуждения находят подтверждение в рамках различных парциально-волновых анализов, учитывающих, в том числе, связь канала ηN с другими адронными каналами, такими как πN, $\pi\pi N$ и др.

На основе результатов, определивших основные динамические свойства системы ηN – преимущественно s-волновой характер и сравнительно сильное притяжение – появилась гипотеза существования связанных состояний η-мезонов с ядрами (η-ядер). А именно, была выдвинута идея о том, что хотя интенсивность ηN взаимодействия, по-видимому, недостаточна для образования связанного ηN состояния, увеличение числа нуклонов может привести к тому, что сложение отдельных ηN «притяжений» может связать η мезон с системой нескольких нуклонов, то есть, с ядром.

В наиболее ранних работах, посвященных анализу ηN взаимодействия (см., например, [6]), была получена длина ηN рассеяния, характеризующаяся относительно небольшой веще-

ственной частью,

$$a_{\eta N} = (0,27 + i\,0,22)\ \text{Фм}\,. \tag{2}$$

Используя найденное значение (2) в рамках оптического подхода к η-ядерному потенциалу, Хайдер и Лиу [7] показали, что η-мезон может образовывать связанные состояния с ядрами с массовым числом $A \geq 12$. Аналогичные результаты были получены другими авторами в более поздних работах [8, 9, 10].

В течение следующих 40 лет было предпринято довольно много попыток экспериментального обнаружения η-ядер. Первый экспериментальный поиск этих объектов в лабораториях BNL и LAMPF [11] с использованием техники *missing mass* в реакциях (π^+, p) дал отрицательный результат. В качестве одного из объяснений этого факта была выдвинута и теоретически обоснована идея о том, что η-ядра должны иметь довольно большую ширину. Как следствие, это должно приводить к значительному уширению ожидаемых пиков в экспериментальном спектре, что, в свою очередь, существенно затрудняет их обнаружение стандартным *missing mass* методом.

По-видимому, единственным экспериментом, результаты которого сегодня интерпретируются как свидетельство образования η-ядра с большим числом нуклонов, можно считать исследования, проведенные коллаборацией COSY-GEM [12] по измерению сечения реакции

$$p + {}^{27}\text{Al} \to {}^{3}\text{He} + p + \pi^- + X\,. \tag{3}$$

Важной особенностью этого эксперимента является специальный выбор кинематических условий, при которых импульс образующегося η-мезона оказывается близким к нулю, что увеличивает вероятность его «застревания» в ядре. Наблюдаемый спектр представлен на рисунке 1 в виде функции полной энергии системы $\eta\,{}^{25}\text{Mg}$ за вычетом масс частиц. Максимум, наблюдаемый при энергии $E = -13$ МэВ, был интерпретирован как сигнал образования η-ядра ${}^{25}_{\eta}\text{Mg}$.

Необходимо отметить, что значение вещественной части длины рассеяния $\mathcal{R}e\,a_{\eta N} = 0,27$ Фм (см. (2)), которое использовалось в работе Хайдера и Лиу [7], является довольно малым. Оно заметно меньше среднего значения $\mathcal{R}e\,a_{\eta N} \approx 0,5$ Фм, которое может быть получено на основе результатов современных анализов ηN взаимодействия (см., например, Таблицу 1). По этой причине, как было отмечено выше, связанные η-ядерные состояния в моделях, использующих значение (2), образуются лишь при взаимодействии η-мезона со сравнительно тяжелыми ядрами, начиная с углерода ^{12}C. Вместе с тем, как видно из Таблицы 1, имеющиеся сегодня модели ηN взаимодействия, в том числе кварковые модели, дают довольно большой разброс значений $\mathcal{R}e\,a_{\eta N}$ вплоть до $\mathcal{R}e\,a_{\eta N} = 1$ Фм. Простые оценки в рамках оптического подхода

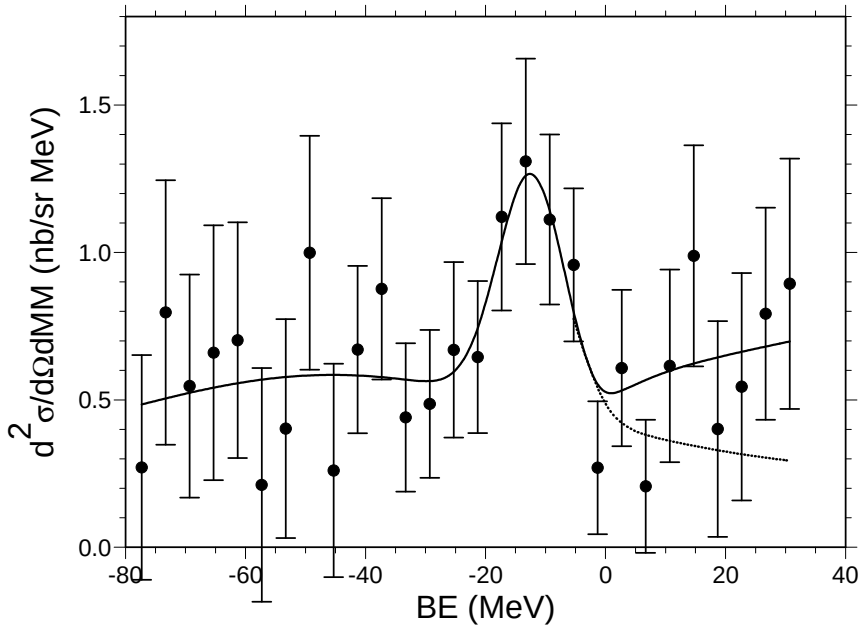

Рисунок 1. *Missing-mass* спектр реакции $p+{}^{27}\mathrm{Al} \to {}^{3}\mathrm{He}+p+\pi^{-}+X$. Сплошная и пунктирная кривые – результаты модельных расчетов. Взято из работы [13].

показывают, что для значений выше 0,75 Фм связанные состояния могут образовываться уже с такими легкими ядрами, как ^{3}He [16]. В связи с этим, основное внимание исследователей переключилось на поиск легких η-ядер, то есть связанных состояний η-мезона с малонуклонными системами (как правило, $A \leq 4$).

В области эксперимента следует упомянуть два основных подхода к исследованию η-ядерного взаимодействия. В первом случае [29, 30, 31, 32] в реакции регистрируются на совпадение пион-нуклонные пары, в которых угол между направлениями импульсов пиона и нуклона составляет 180^o в общей системе центра масс. Идея эксперимента заключается в том, что значительная часть распадов η-ядер происходит за счет $\eta N \to \pi N$ перехода. Поэтому реакция образования пиона идет по схеме

$$b + A \to {}_{\eta}A \to \pi + N + (A-1)\,, \tag{4}$$

где b – бомбардирующая частица, через ${}_{\eta}A$ обозначено связанное состояние η-мезона и ядра A (η-ядро), и $A-1$ есть конечное ядро с числом нуклонов $A-1$. Если пренебречь эффектом размазывания за счет Ферми-движения нуклонов в ядре, образующийся π-мезон и нуклон (протон) отдачи должны после распада η-ядра двигаться в противоположные стороны в системе покоя конечного ядра (так называемая *back-to-back* кинематика). По этой причине превышение *back-to-back* событий над фоном в области энергий, близкой к порогу образования η-мезонов, как правило, используется в качестве основного критерия при поиске η-ядер

Таблица 1. Значения длины ηN рассеяния $a_{\eta N}$, полученные в рамках резонансных моделей (PM), T- или K-матричных подходов, а также методом киральных эффективных лагранжианов (χEL). В ссылках указан только первый автор вместе с годом публикации. В последней колонке приведены каналы, включенные в анализы. Данные взяты из работы [5].

$a_{\eta N}$ (Фм)	Ссылка	Год	Модель	Каналы
0,27 + i0,22	Bhalerao [6]	1985	PM	$\pi N \to \pi N, \eta N, \pi\Delta$
0,25 +i0,16	Bennhold [14]	1991	PM	$\pi N \to \pi N, \eta N,$ $\pi\pi N;\ \gamma N \to \eta N$
0,98 + i0,37	Arima [15]	1992	T	$\pi N \to \pi N, \eta N$
0,55 +i0,30	Wilkin [16]	1993		$\pi N \to \eta N$
0,51 +i0,21	Sauermann [17]	1995	K	$\pi N \to \pi N, \eta N$
0,68 + i0,24	Kaiser [18]	1995	χEL	$\pi N \to \pi N, \eta N,$ $K\Lambda, K\Sigma$
0,888+i0,279	Batinić [19]	1995	T	$\pi N \to \pi N, \eta N$
0,476 +i0,279	Fäldt [20]	1995	PM	$\pi N \to \eta N$ $\gamma N \to \eta N$
0,621+i0,306	Abaev [21]	1996	T	$\pi N \to \eta N$ $\bar{K} N \to \eta \Lambda$
0,51 +i0,21	Deutsch-Sauermann [22]	1997	K	$\pi N \to \pi N, \eta N$ $\gamma N \to \pi N, \eta N$
0,20 + i0,26	Kaiser [23]	1997	χEL	$\pi N \to \pi N, \eta N,$

в экспериментах этого типа. Эффект образования η-ядра в этом случае проявляется в виде пика в спектре образующегося π-мезона. При этом положение и ширина пика определяют энергию связи и ширину связанного η-ядерного состояния. Следует, однако, отметить, что значения энергии связи, предсказываемые для η-ядер, довольно малы (порядка нескольких мегаэлектронвольт), так что соответствующие пионные пики должны располагаться в непосредственной близости от порога образования η-мезона. По этой причине их трудно отличить от эффектов простого увеличения выхода реакции, возникающего вследствие притяжения между конечными продуктами (ядром и η-мезоном). Сделанные в работах [33, 34] оценки

Таблица 2. Продолжение таблицы 1.

$a_{\eta N}$ (Фм)	Ссылка	Год	Модель	Каналы
0,87 + i0,27	Green [24]	1997	K	$\pi N \to \pi N, \eta N$
				$\gamma N \to \pi N, \eta N$
1.05+i0,27	Green [25]	1999	K	$\pi N \to \pi N, \eta N$
				$\gamma N \to \pi N, \eta N$
0,32 + i0,25	Caro Ramon [26]	2000	χEL	$\pi N \to \pi N, \eta N,$
0,772+i0,217	Nieves [27]	2001	χEL	$\pi N \to \pi N, \eta N, K\Lambda, K\Sigma$
0,54+i0,49	Krippa [28]	2001	χEL	$\pi N \to \pi N, \eta N$

показали, что для однозначной регистрации сигнала образования η-ядра необходима как довольно малая статистическая погрешность, так и большая точность определения энергии вылетающих π-мезонов.

В экспериментах другого типа [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44] регистрируются события, в которых образованный в реакции η-мезон и конечное ядро движутся с малыми относительными импульсами. В этом случае притягивающий характер взаимодействия в системе η-мезон–ядро должен проявляться в увеличении интенсивности реакции. Это становится очевидным, если учесть, что притяжение между продуктами реакции стремится удержать их в той области, в которой действует «основное» взаимодействие, приводящее к образованию этих частиц. Так как сечение пропорционально вероятности нахождения этих продуктов в области взаимодействия (в независящей от времени теории рассеяния), то очевидно, что притяжение будет приводить к увеличению выхода частиц.

В этой связи, наблюдаемая резкая зависимость выхода медленных η-мезонов от энергии является указанием на сильное притяжение между образующимся мезоном и ядром. Дальнейший анализ предполагает экстраполяцию экспериментальных результатов в область ниже порога образования η-мезона, то есть, к энергиям, при которых может существовать полюс, отвечающий связанному состоянию.

Одним из процессов, наиболее интенсивно используемых в этой группе экспериментов, является образование η-мезонов в дейтрон-протонном столкновении

$$d + p \to \eta + {}^3\mathrm{He}\,. \tag{5}$$

Экспериментальные данные для полного сечения этой реакции, представленные в работах [34, 37, 38, 39, 40], отчетливо демонстрируют наличие полюса в ее амплитуде.

Для исследования системы $\eta\,^4$He в основном используется процесс

$$d + d \to \eta + {}^4\mathrm{He}\,, \tag{6}$$

сечение которого, измеренное в работах [41, 42, 43], приблизительно в 50 раз меньше сечения реакции (5). В этом случае экспериментальные данные также демонстрируют довольно сильный рост с приближением энергии к пороговому значению, однако степень этого роста существенно меньше по сравнению с той, которая наблюдается в реакции с ^{3}He (5). В работе [42] этот факт интерпретируется как прямое указание на то, что система $\eta\,^4$He является связанной. Действительно, разумно предположить, что при переходе от ^{3}He к ^{4}He в виду увеличения числа нуклонов результирующее притяжение в системе η-мезон-ядро возрастает. Если s-волновое состояние η^3He является «почти» связанным или даже слабо связанным, как предсказывается некоторыми моделями, то система η^4He с большой вероятностью является связанной. При этом естественно ожидать, что соответствующий полюс в амплитуде будет расположен на физическом листе дальше от порогового значения энергии, чем в случае с $\eta\,^3$He. Как следствие, эффект роста сечения, который должен быть тем сильнее, чем ближе полюс к физической области, в реакции (6) оказывается меньше.

Эта на первый взгляд согласованная картина не учитывает важный факт, который, как будет показано в основной части диссертации, является решающим для η-ядерных систем. Речь идет о сильной зависимости амплитуды ηN рассеяния от энергии в области ниже упругого ηN порога, вследствие которой притяжение в системе $\eta\,^4$He оказывается слабее, чем в $\eta\,^3$He. По этой причине приведенные выше рассуждения, указывающие на связность системы $\eta\,^4$He, по всей видимости, ошибочны.

Сегодня накоплена достаточно обширная экспериментальная информация, относящаяся ко второй из упомянутых выше групп экспериментов, в которых η-мезон образуются вместе с ядрами d, ^{3}He и ^{4}He. Во всех случаях измеренные сечения демонстрируют заметный рост в области малых кинетических энергий. Основным недостатком такого подхода является невозможность разделения истинных и виртуальных связанных состояний. Как известно из квантовой теории столкновений, полюс матрицы рассеяния, находящийся вблизи пороговой энергии, и соответствующий связанному состоянию в системе, приводит к такому росту сечения, что и виртуальный полюс, расположенный на том же удалении от нулевой энергии. Другими словами, имеющиеся экспериментальные результаты, демонстрирующие аномальный рост сечения образования медленных η-мезонов на легких ядрах, просто подтверждают

притягивающий характер η-ядерного взаимодействия и ни в коем случае не являются однозначным свидетельством образования η-ядер.

Следует также отметить процессы электромагнитного рождения η-мезонов на легких ядрах. Первые измерения сечения $\gamma\,^3\mathrm{He} \to \pi^0 pX$ [40] продемонстрировали отчетливое превышение вылета *back-to-back* пар $\pi^0 p$ в области нескольких МэВ ниже $\eta\,^3$He порога, что могло бы быть сигналом рождения η-ядра ${}^3_\eta$He с его последующим распадом в канал $\pi^0 p(pn)$. Однако, более поздние исследования показали, что аналогичные флуктуации наблюдаются и при других значениях энергии, что в итоге было отнесено к особенностям измеряемого спектра. Таким образом, первоначальный результат объясняется простым совпадением, при котором максимум в спектре оказался в непосредственной близоси от порога образования η-мезона.

Метод *back-to-back* был также использован в экспериментах с дейтрон-дейтронным столкновением [30], в котором поиск η-ядер проводился в канале

$$dd \to {}^4_\eta\mathrm{He} \to \pi^- p\ {}^3\mathrm{He}\,. \tag{7}$$

Как и в предыдущих экспериментах, в данном случае отчетливый сигнал не был зафиксирован, на основании чего была определена лишь верхняя граница сечения образования ядра ${}^4_\eta$He (около 20 нб, в зависимости от ширины связанного состояния).

Таким образом, несмотря на многочисленные попытки, предпринятые различными научными группами в течение последних 40 лет, экспериментальный поиск η-ядер пока не дал однозначного ответа на вопрос о возможности их существования. Основным результатом подавляющего большинства исследований является отсутствие полезного сигнала, что в некоторых случаях позволило лишь установить верхнюю границу соответствующего сечения. Общий качественный вывод, который может быть сделан на основе экспериментов по поиску η-ядер: несмотря на кажущуюся простоту самой физической картины, связанной с этими объектами, а также многочисленные указания различных моделей на возможность их образования в той или иной области энергий, имеющиеся сегодня прецизионные экспериментальные данные не подтверждают гипотезу их существования.

Что касается теории, на сегодняшний день построено довольно большое число моделей, в которых основной акцент сделан именно на описание η-ядерного взаимодействия в области низких энергий, в пределах 10-20 мегаэлектронвольт выше порога. Существенная часть этих моделей [16, 45, 46, 47] использует концепцию оптического потенциала, основанную на применении так называемого локального и импульсного приближений к описанию взаимодействия налетающей частицы (мезона) с системой рассеивателей (нуклонов). В таком подходе мезон-ядерное взаимодействие описывается в терминах взаимодействия мезона с ядерной материей,

выступающей в качестве преломляющей среды для мезонной волны. Следует отметить, что теория оптического потенциала хорошо зарекомендовала себя в качестве удобной феноменологической модели в пион-ядерной физике, где имеется простая аналогия между рассеянием пиона на системе нуклонов и дипольным рассеянием света в среде. Физическим обоснованием введения простейшего оптического потенциала в этом случае является прямая связь между амплитудами пион-нуклонного и пион-ядерного рассеяний. Эта связь, в свою очередь, обусловлена сравнительно большим межнуклонным расстоянием в ядрах, значительно превышающим характерный радиус взаимодействия между пионом и нуклоном.

Напротив, резонансный характер ηN взаимодействия приводит к тому, что, как импульсное, так и локальное приближение становятся, вообще говоря, неприменимыми в случае η-мезонов. Действительно, вследствие того, что резонансное взаимодействие связано с временной задержкой (то есть, промежуток времени, в течение которого осуществляется акт взаимодействия, не является пренебрежимо малым, как в случае с пионом, а определяется временем жизни резонанса), амплитуда ηN рассеяния может претерпевать значительные изменения в ядерном многотельном окружении. Например, взяв для ширины резонанса $N(1535)\frac{1}{2}^-$ значение $\Gamma = 75$ MeV, получим для временной задержки (времени столкновения) величину $\Delta t = 2\hbar/\Gamma \approx 2 \cdot 10^{-23}$ сек. Это существенно больше времени $\Delta t = \hbar/m_\pi \approx 5 \cdot 10^{-24}$ сек, в течение которого нуклоны в ядре обмениваются переносчиком взаимодействия, то есть виртуальным пионом. По этой причине применимость упомянутой выше простейшей оптической модели к η-ядерным явлениям оказывается сомнительной, так что для их описания требуются более рафинированные модели, учитывающие влияние ядерного окружения на взаимодействие мезона с отдельным нуклоном.

Необходимо также отметить работы [48, 49], в которых динамика η-ядерных систем исследовалась в рамках так называемого приближения конечного ранга (finite-rank approximation). В рамках этого приближения происходит отбрасывание вклада виртуальных возбуждений ядерной подсистемы между двумя последовательными актами столкновения η-мезона с нуклонами ядра. Наряду с оптической моделью такой подход позволяет существенно упростить исходную многотельную задачу и фактически сводит ее к задаче двух тел. В то же время, очевидно, что исключение из спектра ядерной подсистемы возбужденных состояний с неизбежностью приводит к нарушению унитарности. При этом сама модель, вообще говоря, не позволяет оценить эффект, связанный с этим нарушением.

Несостоятельность отмеченных выше основных приближений, используемых для исследования взаимодействия η-мезонов с малонуклонными системами, послужила главной причиной появления методов, основанных на точном решении малочастичных задач мезон-ядерной

физики. Один из таких методов используется в настоящей диссертации для решения задачи о взаимодействии в системе пяти тел, содержащей η-мезон и четыре нуклона.

Принципиальная трудность решения уравнения Липпмана-Швингера для нескольких частиц заключается в том, что ядро уравнения не имеет конечной нормы Шмидта. Например, в системе трех частиц возможны события, в которых две частицы взаимодействуют, в то время как третья остается свободной. Свободной частице в уравнении соответствует δ-функция $\delta(\vec{p}-\vec{p}\,')$, отвечающая сохранению ее импульса. Появление δ-функции в ядре уравнения приводит к нарушению основного условия однозначности решения – конечности нормы Шмидта ядра. Избавиться от нежелательных δ-функций, то есть, устранить неоднозначность позволяет перестройка уравнений, впервые примененная Фаддеевым в работе [50] и развитая затем для случая произвольного числа частиц в статьях Якубовского [51] и Альта-Грассбергера-Сандхаса [52].[1]

Принципиально другое направление в квантовомеханической теории взаимодействия нескольких частиц связано с вариационной формулировкой проблемы. В этом случае, как правило, используют вариационный принцип Релея-Ритца, где в качестве функционала берется энергия

$$E[\Psi] = \frac{\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle}\,. \tag{8}$$

Ключевую роль в вариационном подходе играет лемма, согласно которой значение функционала энергии на любой пробной функции $|\Psi\rangle$ всегда больше энергии основного состояния системы и равно ей в случае, когда $|\Psi\rangle$ совпадает с точной функцией основного состояния. Таким образом, исходная задача сводится к вариационной задаче вида

$$\delta\, E[\Psi] = 0. \tag{9}$$

Как правило, пробные функции $|\Psi\rangle$ выбираются в параметрическом виде. В этом случае задача решается путем нахождения набора параметров, обеспечивающих минимум функционала (8).

Различные вариационные модели, используемые в ядерной и мезон-ядерной физике, можно разделить на две основных группы в зависимости от критерия, который применяется при выборе пробных функций. К первой группе можно отнести модели, в которых $|\Psi\rangle$ берутся в виде разложения по полному набору квадратично интегрируемых функций $|\phi_n\rangle$

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{N} c_n|\phi_n\rangle\,. \tag{10}$$

[1] Существует также ряд других методов непосредственного решения N-частичных задач, однако лишь в указанных двух работах доказана эквивалентность выведенных уравнений соответствующему уравнению Шредингера.

В этом случае процедура минимизации функционала эквивалентна решению задачи на собственные значения

$$(H - ES)c = 0\,, \tag{11}$$

где матрицы H и S определены как

$$H_{mn} = \langle\phi_m|\hat{H}|\phi_n\rangle\,, \quad S_{mn} = \langle\phi_m|\phi_n\rangle\,. \tag{12}$$

Элементами N-компонентного вектора c являются искомые параметры c_n, $n = \overline{1,N}$. При увеличении размерности базиса N результаты расчетов приближаются к точному значению энергии сверху. Преимущество моделей первой группы заключается, в первую очередь, в том, что основанные на них расчеты являются более контролируемыми. Требуемая точность может быть достигнута простым увеличением N.

Вторая группа включает модели, в которых при выборе затравочных функций руководствуются физическими соображениями. Например, при расчетах энергии основного состояния для некоторых ядер, имеющих хорошо выраженную кластерную структуру, используется кластерные функции (метод резонирующих групп). В некоторых случаях за основу берется хорошо определенная форма потенциала (вариационный метод Монте-Карло).

Вариационные методы позволяют также найти и саму волновую функцию основного состояния. Необходимо, однако, иметь в виду, что разница между точным решением $|\Psi_0\rangle$ и решением $|\tilde{\Psi}_0\rangle$, полученным вариационном методом, является малой величиной более низкого порядка, чем соответствующая разность энергий.

В качестве общего недостатка вариационных методов можно отметить то, что все они нацелены в первую очередь на нахождение энергии основного состояния системы (в некоторых случаях также первых возбужденных уровней) и неудобны при решении задач рассеяния, где главным объектом является амплитуда перехода из одного состояния системы в другое.

Необходимость создания модели для описания взаимодействия η-мезона с ядром ^{4}He, свободной от перечисленных выше недостатков, присущих оптическим и вариационным моделям, определяет **актуальность** темы диссертации. Несмотря на эффективность упомянутого выше метода Альта-Грассбергера-Сандхаса (АГС), до сих пор он применялся лишь для систем с числом частиц $N \leq 4$. **Целью** настоящей работы является применение процедуры сепарабельного разложения и вывод соответствующих уравнений для случая пяти тел.

Основными **задачами** диссертации являлись следующие:

- Вывод уравнений для системы пяти частиц с использованием формализма АГС;

- Решение задачи пяти тел для взаимодействия псевдоскалярного мезона с системой четырех нуклонов;

- Исследование динамических особенностей взаимодействия η-мезонов с ядрами d, ^{3}He и ^{4}He.

Материал диссертации изложен в трех главах.

В главе 1 дается краткий вывод уравнений АГС для системы пяти тел. В отличие от уравнений, возникающих в вариационной формулировке задачи, уравнения АГС получены непосредственно для операторов перехода, что делает их наиболее удобными для анализа именно процессов рассеяния. По аналогии с трехчастичной задачей вводятся разбиения системы пяти частиц и соответствующие этим разбиениям канальные гамильтонианы. Использование сепарабельного разложения для ядер интегральных уравнений позволяет свести исходную задачу пяти тел к эффективной четырехчастичной задаче, которая в свою очередь последовательно сводится к трех- и затем к двухчастичной задаче. Получающиеся таким образом динамические уравнения оказываются сходными по форме с уравнениями Липпмана-Швингера для системы связанных каналов, где каждый канал соответствует возможному разбиению исходной системы на две подсистемы типа $(1+4)$ и $(2+3)$. В итоге трехкратное использование итерационной процедуры дает необходимые уравнения. Возникающие в этих уравнениях эффективные потенциалы описывают взаимодействие между кластерами, входящими в отдельные подсистемы, как обмен частицами или группами частиц.

В главе 2 полученный формализм применяется к задаче о взаимодействии в системе пяти тождественных бозонов. Отдельно рассмотрены математические вопросы, касающиеся сходимости сепарабельного разложения. Анализ как самих собственных чисел, так и норм Шмидта для ядер пятичастичных уравнений показывает, что степень сходимости является вполне достаточной для практических целей. Несмотря на то, что полученные в этой главе результаты имеют в основном академический характер и призваны продемонстрировать особенности метода, они могут быть использованы при решении конкретных физических задач, например в задаче о взаимодействии пяти атомов ^{4}He (гелиевый пентамер).

В главе 3 решается основная задача диссертации – исследование взаимодействия η-мезона с ядром ^{4}He на основе уравнений Альта-Грассбергера-Сандхаса (АГС). Как отмечено выше, наблюдаемый в отдельных реакциях рост сечения при малых энергиях не позволяет подтвердить или опровергнуть возможность образования связанных η-ядерных состояний. В то же время, более однозначный результат может быть получен, если проводится систематический анализ нескольких процессов в рамках одной и той же микроскопической модели. Основная

задача формулируется следующим образом: подобрать амплитуду $f_{\eta N}$ элементарного ηN взаимодействия так, чтобы вычисленная с ее помощью амплитуда $f_{\eta A}$ взаимодействия η-мезона с ядром воспроизводила на количественном уровне рост сечения одновременно для реакций образования η-мезонов на разных ядрах. Формулируя такую задачу, мы руководствуемся идеей о том, что механизм образования η-мезонов имеет короткодействующий характер (потенциал взаимодействия сосредоточен в основном в малой пространственной области), и поэтому форма сечения в области малых относительных энергий в системе η-ядро определяется преимущественно зависимостью от энергии E квадрата амплитуды $f_{\eta A}$.

В заключительной части главы 3 проводится сравнение результатов данной работы с результатами других авторов, полученными двумя разными методами: в модели оптического потенциала и с помощью стохастической вариационной процедуры. Отмечается принципиальный недостаток обоих методов, который существенно снижает качество любого основанного на них исследования η-ядерного взаимодействия. Этот недостаток связан с необходимостью выбора эффективной энергии, при которой η-мезон взаимодействует с отдельным ядерным нуклоном или, другими словами, выбора значения аргумента W амплитуды ηN взаимодействия $f_{\eta N}(W)$, которая явно входит в выражение для потенциала. Обе модели, вообще говоря, не дают рецепта для определения значения W. Существуют различные способы выбора W, основанные на разумных, как правило, чисто умозрительных соображениях, но все они являются эвристическими, так что использование того или иного рецепта в качестве наиболее предпочтительного не имеет строгого обоснования.

В заключении приведены основные результаты диссертации. Формальный материал, который использовался в вычислительной части работы, оформлен в виде приложений. Результаты, положенные в основу исследования, опубликованы в работах [53, 54, 55, 56].

Глава 1

Уравнения Альта-Грассбергера-Сандхаса для задачи пяти тел

Краткий вывод «классических» уравнений Альта-Грассбергера -Сандхаса (АГС) для квантовомеханической задачи трех тел приведен в приложении I.. Обобщение уравнений Фаддеева на системы с числом частиц $N > 3$ является сложной задачей, о чем свидетельствуют многочисленные попытки распространить методы задачи трех тел на большее число частиц. Из них лишь два метода можно считать удачными в том смысле, что для них доказано соответствие между получаемыми уравнениями и уравнением Шредингера. Во-первых, Якубовским в работе [51] были представлены уравнения для квантово-механической задачи N частиц, ядра которых становятся связными после $N-1$ итераций. Второй метод, приводящий к эквивалентным уравнениям, основанный на методе квазичастиц (методе Шмидта), был реализован Альтом, Грассбергером и Сандхасом в работах [52, 57]. Как уже отмечено, оба метода дают систему уравнений, однозначно соответствующих уравнению Шредингера для N-частичной задачи. Однако преимущество АГС формализма состоит в том, что он не только формально корректен, но и очень удобен с точки зрения практического применения.

Одним из важных этапов метода АГС является представление исходного потенциала (реального или эффективного) в виде суммы конечного числа сепарабельных членов и несепарабельного остатка,

$$V = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n |g_n\rangle\langle g_n| + V' \,. \tag{1.1}$$

Это позволяет преобразовать уравнения для N частиц в многоканальные уравнения Липпмана-Швингера для системы $N-1$ частиц, где одна из составляющих представляет собой двухчастичный кластер (квазичастицу). Ключевым свойством метода является то, что полученные таким образом уравнения могут быть снова преобразованы в уравнения фаддеевского типа, так что редукционная процедура может быть проведена повторно. Применяя эту технику снова и снова, мы после $N-1$ итерации получаем эффективные двухчастичные уравнения.

В данной главе представлен вывод уравнений Альта-Грассбергера-Сандхаса для системы пяти тел. В качестве конкретного примера с целью иллюстрации формул рассматривается

система, включающая четыре фермиона со спином 1/2 (нуклоны) и псевдоскалярный мезон (η-мезон). Затем дано обобщение метода на случай пяти тождественных бозонов.

1.1 Вывод уравнений АГС для системы пяти частиц

Следуя работе [51] мы используем концепцию разбиений общей системы N частиц на подсистемы. Отдельное разбиение обозначается символом α_n, смысл которого в том, что система разделена на n подсистем (фрагментов), в дальнейшем называемых также квазичастицами или кластерами. При этом всегда подразумевается, что в данном разбиении взаимодействовать между собой могут лишь частицы, принадлежащие одному и тому же кластеру, входящему в это разбиение. Запись $\alpha_{n+1} \subset \alpha_n$ означает, что разбиение α_{n+1} получено из α_n путем деления кластера (или одного из кластеров), входящих в α_n, на два фрагмента $\alpha + \beta$. Приведенная масса этих фрагментов, то есть $M_\alpha M_\beta/(M_\alpha + M_\beta)$, будет обозначаться как $\mu_{\alpha_n\alpha_{n+1}}$. В предельных случаях $n = 1$ и $n = 4$ один из индексов, очевидно, становится лишним, и соответствующие массы обозначены просто как μ_{α_2} и μ_{α_4}, соответственно. Мы не вводим отдельных обозначений для относительных импульсов в подсистемах. Вместо этого мы иллюстрируем обобщенные потенциалы диаграммами, на которых поясняется смысл этих импульсов.

Если система включает тождественные частицы (в нашем случае нуклоны), амплитуды, для которых выписываются уравнения, должны быть соответствующим образом симметризованы. Как правило, в этом случае при выводе уравнений каждой из тождественных частиц присваивается номер, и все манипуляции проводятся так, как если бы эти частицы были различными. Лишь после получения самих уравнений учитывается тождественность частиц, и осуществляется переход к симметризованным состояниям. Процедура симметризации изложена в приложении III.. Важным является то, что учет тождественности частиц приводит к сокращению числа уравнений. При этом, естественно, сами симметризованные уравнения уже не содержат номеров частиц. Для сокращения формальной части мы приводим все выкладки для симметризованных состояний. Все возможные разбиения исходной $\eta - 4N$ системы с тождественными нуклонами приведены в таблице 1.1.

Следуя стандартной схеме, мы учитываем во всех подсистемах лишь s-волновую часть взаимодействия. Это объясняется как доминированием s-волн в затравочных двухчастичных NN и ηN взаимодействиях, так и тем, что мы рассматриваем лишь область низких энергий, в которых вклад высших орбитальных моментов подавлен. В этом случае, в связи с тем, что спин мезона равен нулю, суммарный спин S нуклонной подсистемы является

Таблица 1.1. Используемая в работе нумерация разбиений системы $\eta - 4N$.

α_n	$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$
1	$(NN) + N + N + \eta$	$(NNN) + N + \eta$	$\eta + (NNNN)$
2	$(\eta N) + N + N + N$	$(\eta NN) + N + N$	$(\eta N) + (NNN)$
3		$(\eta N) + (NN) + N$	$(\eta NN) + (NN)$
4		$(NN) + (NN) + \eta$	$(\eta NNN) + N$

хорошим квантовым числом. Кроме того, так как в наших расчетах четыре нуклона связываются в основное состояние ядра ^{4}He, имеющего нулевой спин, легко понять, что достаточно рассматривать лишь состояния трехнуклонной подсистемы со спином $S = 1/2$, тогда как конфигурация $S = 3/2$ в задаче не возникает.

Рассмотрим систему пяти частиц с гамильтонианом

$$H = H_0 + V = H_0 + \sum_{\alpha_4} V_{\alpha_4}, \tag{1.2}$$

где H_0 - оператор кинетической энергии (свободный гамильтониан), а потенциал V_{α_4} описывает взаимодействие между двумя частицами, входящими в кластер α_4. Мы можем формально записать уравнение Липпмана-Швингера для задачи с гамильтонианом (1.2)

$$T = V + V\,G_0\,T\,, \tag{1.3}$$

где $G_0 = (z - H_0)^{-1}$ – свободная функция Грина. Ядро уравнения (1.3) определяется суммой двухчастичных членов V_{α_4} и поэтому является сингулярным. Это свойство становится очевидным, если учесть, что в каждом члене взаимодействуют лишь две частицы, тогда как остальные движутся свободно. В импульсном пространстве свободному движению отвечает δ-функция $\delta(\vec{p} - \vec{p}\,')$. Наличие этих множителей в операторе $V\,G_0$ приводит к расходимости нормы Шмидта, так что стандартные методы решения интегральных уравнений в данном случае не могут быть использованы. Кроме того, вследствие некомпактности оператора $V\,G_0$ уравнение (1.3) не имеет единственного решения. Ниже для вывода уравнений со связанными ядрами, в которых отсутствуют «опасные» δ-функции, используется редукционная процедура, впервые предложенная в работе [52].

На начальном этапе процедуры вводятся гамильтонианы отдельных каналов

$$H_{\alpha_4} = H_0 + V_{\alpha_4}\,, \tag{1.4}$$

и соответствующие им резольвенты

$$G_{\alpha_4} = (z - H_{\alpha_4})^{-1} \,. \tag{1.5}$$

Каждый канал содержит квазичастицу (то есть двухчастичный кластер) α_4 и три свободных частицы. Волновые функции $|\phi_{\alpha_4 m}\rangle$ канала α_4, удовлетворяющие уравнению

$$H_{\alpha_4}|\phi_{\alpha_4 m}\rangle = E_{\alpha_4 m}|\phi_{\alpha_4 m}\rangle \,, \tag{1.6}$$

представляют собой произведение связанного состояния в двухчастичной подсистеме α_4 и плоских волн, соответствующих свободному распространению остальных частиц. Элемент S-матрицы соответствующий переходу из состояния $|\phi_{\alpha_4 m}\rangle$ в состояние $|\phi_{\beta_4 n}\rangle$ может быть представлен выражением

$$S_{\alpha_4 m,\,\beta_4 n} = \delta_{\beta_4\alpha_4}\,\delta_{nm} - 2\pi i\,\delta(E_{\alpha_4 m} - E_{\beta_4 n})\,\langle\phi_{\beta_4 n}|U_{\beta_4\alpha_4}|\phi_{\alpha_4 m}\rangle \,, \tag{1.7}$$

в котором операторы перехода $U_{\beta_4\alpha_4}$ по аналогии с трехчастичной задачей (см. приложение I.) определяются как

$$U_{\beta_4\alpha_4} = (1 - \delta_{\beta_4\alpha_4})\,G_{\alpha_4}^{-1} + \overline{V}_{\beta_4} + \overline{V}_{\beta_4} G \overline{V}_{\alpha_4} \,, \tag{1.8}$$

где

$$\overline{V}_{\alpha_4} \equiv V - V_{\alpha_4} \,. \tag{1.9}$$

Используя второе резольвентное уравнение

$$G(z) = G_{\alpha_4}(z) + G(z)\overline{V}_{\alpha_4} G_{\alpha_4}(z) \,, \tag{1.10}$$

для операторов $U_{\beta_4\alpha_4}$ получаем уравнения фаддеевского типа

$$U_{\alpha_4\beta_4} = (1 - \delta_{\alpha_4\beta_4})\,G_0^{-1} + \sum_{\gamma_4}(1 - \delta_{\alpha_4\gamma_4})\,t_{\gamma_4} G_0 U_{\gamma_4\beta_4} \,, \tag{1.11}$$

где t_{γ_4} – двухчастичная t-матрица, относящаяся к кластеру γ_4, вложенная в гильбертово пространство всей системы пяти тел. Она удовлетворяет уравнению

$$t_{\gamma_4}(z) = V_{\gamma_4} + V_{\gamma_4} G_0(z) t_{\gamma_4} \,. \tag{1.12}$$

Следующий шаг заключается в замене матрицы t_{γ_4} ее сепарабельным разложением

$$t_{\gamma_4} = \sum_{kl} |\gamma_4 k\rangle\,\Delta_{kl}^{\gamma_4}\,\langle\gamma_4 l| \,, \tag{1.13}$$

которое является обобщением сепарабельного представления 1-го ранга, рассмотренного в приложении II. (смотри выражение (B.4)). Используя разложение (1.13) в уравнении (1.11)

и беря последнее в обкладках векторов $\langle\alpha_4 m|G_0$ и $G_0|\beta_4 n\rangle$, получим систему уравнений, аналогичную системе (B.13), возникающей в задаче трех тел

$$X_{\alpha_4 m,\beta_4 n} = Z_{\alpha_4 m,\beta_4 n} + \sum_{\gamma_4,kl} Z_{\alpha_4 m,\gamma_4 k}\,\Delta^{\gamma_4}_{kl}\,X_{\gamma_4 l,\beta_4 n}\,, \tag{1.14}$$

где

$$\begin{aligned} X_{\alpha_4 m,\beta_4 n} &\equiv \langle\alpha_4 m|G_0 U_{\alpha_4\beta_4} G_0|\beta_4 n\rangle\,, \\ Z_{\alpha_4 m,\beta_4 n} &\equiv (1-\delta_{\alpha_4\beta_4})\langle\alpha_4 m|G_0|\beta_4 n\rangle\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Необходимо отметить, что пропагатор Δ^{γ_4} в уравнении (1.14) относится не к отдельному кластеру γ_4, а ко всей системой пяти тел, содержащей помимо этого кластера три свободных частицы. Он выражается через соответствующий пропагатор $\tilde{\Delta}^{\gamma_4}$, определенный в двухчастичном гильбертовом пространстве, как

$$\begin{aligned} \langle\vec{q}\,'_{\gamma_4},\,\vec{p}\,'_i,\,\vec{p}\,'_j,\,\vec{p}\,'_k\,|\Delta^{\gamma_4}(z)|\vec{q}_{\gamma_4},\,\vec{p}_i,\,\vec{p}_j,\,\vec{p}_k\,\rangle &= \delta(\vec{p}_i-\vec{p}\,'_i)\,\delta(\vec{p}_j-\vec{p}\,'_j)\,\delta(\vec{p}_k-\vec{p}\,'_k) \\ \times\,\langle\vec{q}\,'_{\gamma_4}|\tilde{\Delta}^{\gamma_4}\Big(z-\frac{p_i^2}{2M_i}-\frac{p_j^2}{2M_j}-\frac{p_k^2}{2M_k}\Big)|\vec{q}_{\gamma_4}\rangle\,. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Присутствие в пропагаторе (1.16) частиц, не входящих в γ_4, помимо появления δ-функций, отражающих закон сохранения импульса для свободного движения, приводит, как видим, к сдвигу энергии z на суммарную кинетическую энергию свободных частиц. Как будет показано в главе 3, это обстоятельство имеет решающее значение для понимания того, как результаты для всей системы частиц зависят от свойств затравочного двухчастичного взаимодействия.

Формально уравнения (1.14) представляют собой эффективные четырехчастичные уравнения в которых две частицы из пяти образуют квазичастицу. Введя матрицы

$$\begin{aligned} \{\mathbf{T}\}_{\alpha_4 m,\beta_4 n} &= X_{\alpha_4 m,\beta_4 n}\,, \\ \{\mathbf{V}\}_{\alpha_4 m,\beta_4 n} &= Z_{\alpha_4 m,\beta_4 n}\,, \\ \{\mathbf{G}_0\}_{\alpha_4 m,\beta_4 n} &= \delta_{\alpha_4\beta_4}\Delta^{\alpha_4}_{mn}\,, \end{aligned} \tag{1.17}$$

можем переписать (1.14) в форме уравнений Липпмана-Швингера для связанных каналов

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{T}\,. \tag{1.18}$$

Представление (1.18) имеет большое эвристическое значение. Как показано в работе [52], процедура АГС может быть применена к уравнению (1.18) точно также, как она была применена к исходному уравнению Липпмана-Швингера для пяти частиц (1.3), что дало нам

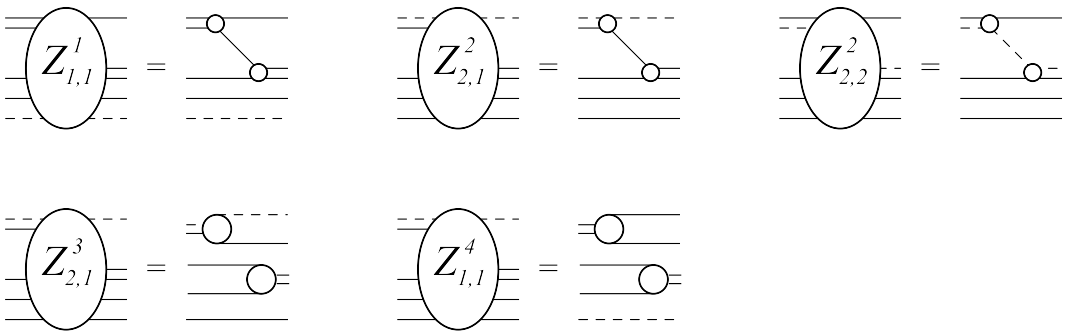

Рисунок 1.1. Диаграммное представление обобщенных потенциалов $Z^{\alpha_3}_{\alpha_4,\beta_4}$. Потенциалы $Z^2_{1,2}$ и $Z^3_{1,2}$ могут быть получены из $Z^2_{2,1}$ и $Z^3_{2,1}$ путем поворота вокруг вертикальной оси. Штриховыми и сплошными кривыми показаны, соответственно, η-мезон и нуклоны.

операторное уравнение (1.14). Действительно, введем разложение обобщенного потенциала

$$\mathbf{V} = \sum_{\alpha_3} \mathbf{V}^{\alpha_3}\,, \tag{1.19}$$

которое, очевидно, эквивалентно разложению соответствующих матричных элементов

$$Z_{\alpha_4 m,\beta_4 n} = \sum_{\alpha_3} Z^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n}\,. \tag{1.20}$$

Здесь $Z^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n}$ отличен от нуля только при условии $\alpha_4 \subset \alpha_3$ и $\beta_4 \subset \alpha_3$. Диаграммное представление ненулевых потенциалов $Z^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n}$ приведено на рис. 1.1.

Амплитуды $X^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n}$, являющиеся решениями уравнения

$$X^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n} = Z^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n} + \sum_{\gamma_4,kl} Z^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\gamma_4 k}\,\Delta^{\gamma_4}_{kl}\,X^{\alpha_3}_{\gamma_4 l,\beta_4 n} \tag{1.21}$$

с потенциалами (1.20), описывают рассеяние частиц только в подсистеме α_3, тогда как другие частицы остаются свободными. В импульсном представлении операторные уравнения (1.21) становятся интегральными уравнениями. Опуская дельта-функции, соответствующие сохранению импульса свободных частиц, а также коэффициенты, связанные со спин-изоспиновой структурой состояний, можем записать (после парциально-волнового разложения и выделения s-волны):

$$\begin{aligned} &X^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n}(E;p,p') = Z^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n}(E;p,p') \\ &+ \sum_{\gamma_4,kl} \int \frac{p''^2 dp''}{2\pi^2}\, Z^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\gamma_4 k}(E;p,p'')\,\Delta^{\gamma_4}_{kl}\left(E - \frac{p''^2}{2\mu_{\alpha_3\gamma_4}}\right) X^{\alpha_3}_{\gamma_4 l,\beta_4 m}(E;p'',p')\,. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Здесь E представляет собой энергию относительного движения частиц, входящих в кластер α_3, если $\alpha_3 = 1,2$, или сумму относительных энергий в двухчастичных фрагментах, если

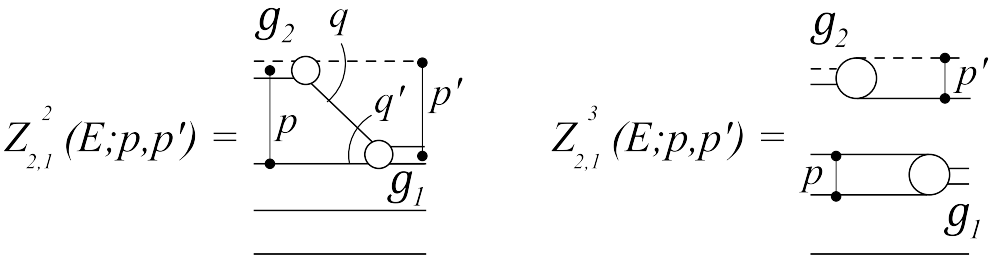

Рисунок 1.2. Эффективные потенциалы $Z^2_{2,1}$ и $Z^3_{2,1}$ определенные выражениями (1.23) и (1.24). Обозначения те же, что на рис. 1.1.

$\alpha_3 = 3, 4$ (см. Таблицу 1.1). Спин-изоспиновые коэффициенты могут быть вычислены непосредственно, либо с использованием формул, приведенных, например, в работе [58].

При $\alpha_3 = 1, 2$ уравнения (1.22) есть обычные квази-двухчастичные уравнения типа (B.13), определяющие взаимодействие в системах NNN и ηNN. При $\alpha_3 = 3, 4$ мы имеем две невзаимодействующие двухчастичные подсистемы $(NN) + (\eta N)$ и $(NN) + (NN)$, между которыми возможен обмен энергией.

S-волновая компонента эффективного потенциала имеет вид

$$Z^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n}(E;p,p') = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{g_{\alpha_4 m}(\omega,\vec{q})\, g_{\beta_4 n}(\omega',\vec{q}')}{E - \frac{p^2}{2\mu_{\alpha_3\alpha_4}} - \frac{q^2}{2\mu_{\alpha_4}}}\, d(\hat{p}\cdot\hat{p}') \tag{1.23}$$

для $\alpha_3 = 1, 2$, и

$$Z^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n}(E;p,p') = \frac{g_{\alpha_4 m}(\omega',p')\, g_{\beta_4 n}(\omega,p)}{E - \frac{p^2}{2\mu_{\beta_4}} - \frac{p'^2}{2\mu_{\alpha_4}}} \tag{1.24}$$

для $\alpha_3 = 3, 4$. Вершинные функции

$$g_{\alpha_4 m}(\omega,\vec{q}) = \langle \alpha_4 m;\, \omega|\vec{q}\rangle \tag{1.25}$$

зависят в общем случае как от относительного импульса $\vec{q}$ частиц в кластере α_4, так и от энергии их относительного движения ω. Масса μ_{α_4} есть приведенная масса NN или ηN системы при $\alpha_4 = 1, 2$, соответственно. Для иллюстрации общей структуры выражений (1.23) и (1.24) на рис. 1.2 в качестве примера приведены потенциалы $Z^2_{2,1}$ и $Z^3_{2,1}$.

После того, как разложение (1.19) введено, мы можем снова определить канальные гамильтонианы $\mathbf{H}_{\alpha_3}$ как

$$\mathbf{H}_{\alpha_3} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}_{\alpha_3}\,, \tag{1.26}$$

где свободный Гамильтониан $\mathbf{H}_0$ в свою очередь определен через резольвенту $\mathbf{G}_0$ (1.17):

$$\mathbf{H}_0 = z - \mathbf{G}_0^{-1}(z)\,. \tag{1.27}$$

Полный Гамильтониан $\mathbf{H}$ имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V} = \mathbf{H}_0 + \sum_{\alpha_3} \mathbf{V}_{\alpha_3} \,. \tag{1.28}$$

Второе резольвентное уравнение для $\mathbf{G}(z) = (z - \mathbf{H})^{-1}$ приводит к уравнениям для операторов перехода, аналогичным по структуре уравнениям (1.11), но имеющим матричную форму:

$$\mathbf{U}_{\alpha_3\beta_3} = (1 - \delta_{\alpha_3\beta_3})\mathbf{G}_0^{-1} + \sum_{\gamma_3}(1 - \delta_{\alpha_3\gamma_3})\mathbf{T}_{\gamma_3}\mathbf{G}_0\mathbf{U}_{\gamma_3\beta_3} \,. \tag{1.29}$$

Здесь матрицы $\mathbf{T}_{\gamma_3}$ составлены из элементов $X^{\gamma_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n}$, удовлетворяющих уравнениям (1.21). Матрицы $\mathbf{U}_{\alpha_3\beta_3}$ определены как

$$\mathbf{U}_{\alpha_3\beta_3} = (1 - \delta_{\alpha_3\beta_3})\mathbf{G}_0^{-1} + \overline{\mathbf{V}}_{\beta_3} + (1 - \delta_{\alpha_3\beta_3})\mathbf{V}_{\alpha_3} + \overline{\mathbf{V}}_{\beta_3}\mathbf{G}\overline{\mathbf{V}}_{\alpha_3} \,, \tag{1.30}$$

где

$$\overline{\mathbf{V}}_{\alpha_3} \equiv \mathbf{V} - \mathbf{V}_{\alpha_3} \,. \tag{1.31}$$

Для матричных элементов уравнение (1.29) будет иметь вид

$$\begin{aligned} U^{\alpha_3\beta_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n} = (1 - \delta_{\alpha_3\beta_3})(\mathbf{G}_0^{-1})_{\alpha_4 m,\beta_4 n} + \\ + \sum_{\gamma_3}\sum_{\gamma_4,kl}(1 - \delta_{\alpha_3\gamma_3})\, X^{\gamma_3}_{\alpha_4 m,\gamma_4 k}\, \Delta^{\gamma_4}_{kl}\, U^{\gamma_3\beta_3}_{\gamma_4 l,\beta_4 n} \,. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Теперь, используя сепарабельное разложение

$$X^{\alpha_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n} = \sum_{kl} \left| \begin{array}{c} \alpha_3 k \\ \alpha_4 m \end{array} \right\rangle \Delta^{\alpha_3}_{kl} \left\langle \begin{array}{c} \alpha_3 l \\ \alpha_4 n \end{array} \right| \tag{1.33}$$

в уравнении (1.32) и беря последнее в обкладках векторов

$$(\mathbf{G}_0|\alpha_3 m\rangle)_{\alpha_4 k} = \sum_l \Delta^{\alpha_4}_{kl} \left| \begin{array}{c} \alpha_3 m \\ \alpha_4 l \end{array} \right\rangle , \tag{1.34}$$

будем иметь

$$X_{\alpha_3 m,\beta_3 n} = Z_{\alpha_3 m,\beta_3 n} + \sum_{\gamma_3,kl} Z_{\alpha_3 m,\gamma_3 k}\, \Delta^{\gamma_3}_{kl}\, X_{\gamma_3 l,\beta_3 n} \,, \tag{1.35}$$

где

$$X_{\alpha_3 m,\beta_3 n} = \sum_{\alpha_4,kl}\sum_{\beta_4,l'p} \left\langle \begin{array}{c} \alpha_3 m \\ \alpha_4 k \end{array} \right| \Delta^{\alpha_4}_{kl}\, U^{\alpha_3\beta_3}_{\alpha_4 l,\beta_4 l'}\, \Delta^{\beta_4}_{l'p} \left| \begin{array}{c} \beta_3 n \\ \beta_4 p \end{array} \right\rangle , \tag{1.36}$$

$$Z_{\alpha_3 m,\beta_3 n} = (1 - \delta_{\alpha_3\beta_3}) \sum_{\alpha_4,kl} \left\langle \begin{array}{c} \alpha_3 m \\ \alpha_4 k \end{array} \right| \Delta^{\alpha_4}_{kl} \left| \begin{array}{c} \beta_3 n \\ \alpha_4 l \end{array} \right\rangle . \tag{1.37}$$

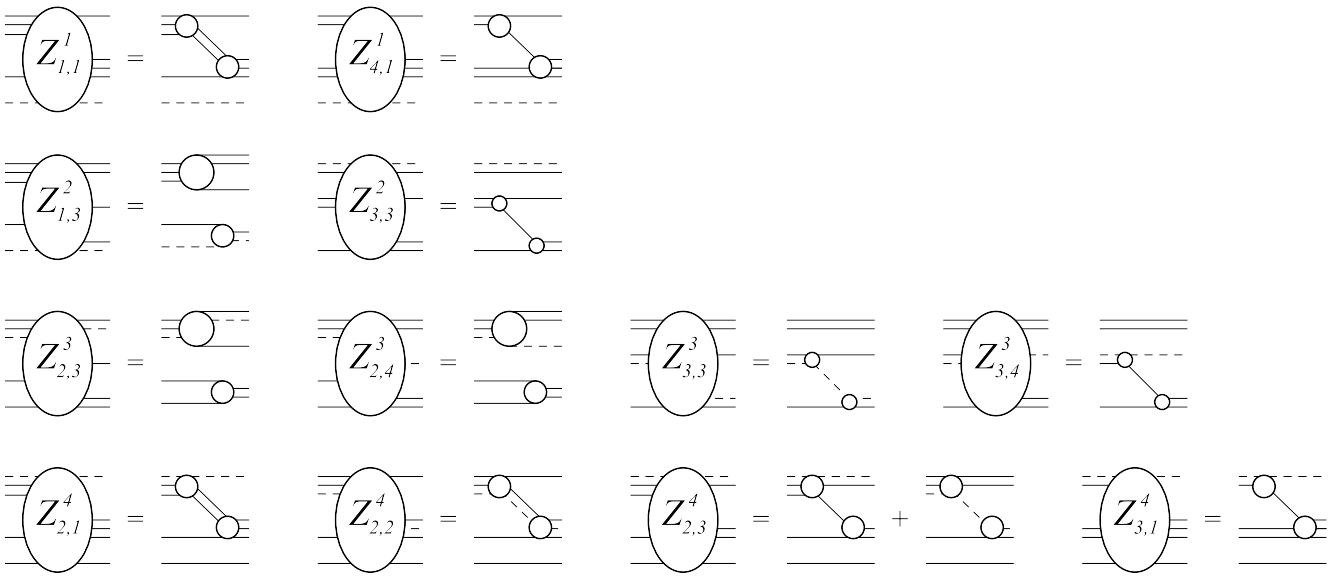

Рисунок 1.3. Диаграммное представление потенциалов $Z^{\alpha_2}_{\alpha_3,\beta_3}$. Обозначения те же, что на рис. 1.1. Остальные потенциалы могут быть получены из представленных на рисунке путем поворота вокруг вертикальной оси.

Важно отметить, что, как видно из (1.36) и (1.37), в отличие от операторов $U^{\alpha_3\beta_3}_{\alpha_4 m,\beta_4 n}$, амплитуды $X_{\alpha_3 m,\beta_3 n}$ и потенциалы $Z_{\alpha_3 m,\beta_3 n}$ не являются матрицами относительно индексов $\alpha_4 m$ и $\beta_4 n$. Этот результат есть прямое следствие использования сепарабельного представления (1.33).

Для системы четырех частиц интегральные уравнения (1.35) уже имеют непрерывные ядра. В нашем случае редукционную схему необходимо применить еще один раз. По аналогии с описанной выше процедурой мы опять вводим канальные потенциалы $Z^{\alpha_2}_{\alpha_3,\beta_3}$:

$$Z_{\alpha_3 m,\beta_3 n} = \sum_{\alpha_2} Z^{\alpha_2}_{\alpha_3 m,\beta_3 n}\,, \tag{1.38}$$

которые генерируют амплитуды X, удовлетворяющие уравнениям

$$X^{\alpha_2}_{\alpha_3 m,\beta_3 n} = Z^{\alpha_2}_{\alpha_3 m,\beta_3 n} + \sum_{\gamma_3,kl} Z^{\alpha_2}_{\alpha_3 m,\gamma_3 k}\,\Delta^{\gamma_3}_{kl}\,X^{\alpha_2}_{\gamma_3 l,\beta_3 n}\,. \tag{1.39}$$

В импульсном представлении уравнения (1.39) имеют структуру, аналогичную (1.22). Ненулевые потенциалы $Z^{\alpha_2}_{\alpha_3\beta_3}$ изображены на рис. 1.3. Потенциалы типа (1+4) ($\alpha_2 = 1, 4$) и соответствующие уравнения (1.39), определяющие рассеяние в системах $4N$ и $\eta - 3N$, подробно рассмотрены в работах [59] и [60]. Помимо потенциалов типа $(1 + 4)$ у нас также имеются потенциалы, соответствующие фрагментации $(2 + 3)$, а именно $Z^{\alpha_2}_{\alpha_3\beta_3}$ с $\alpha_2 = 2, 3$, которые определяют две невзаимодействующих друг с другом группы частиц, между которыми, как и в случае $(2 + 2)$, возможен обмен энергией. Иными словами, энергия каждой из подсистем

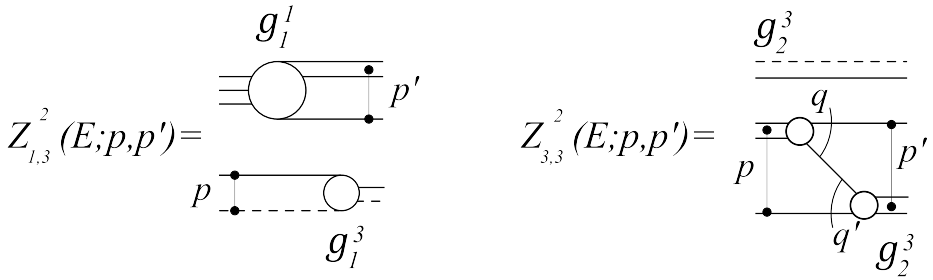

Рисунок 1.4. Потенциалы $Z^2_{1,3}$ и $Z^2_{3,3}$ определенные выражениями (1.40) и (1.41). Форм-фактор $g^3_2(q)$ определяет взаимодействие двух нуклонов в присутствии взаимодействующей пары ηN. Он отличается от формфактора $g_1(q)$ в потенциале $Z^2_{2,1}$ на рис. 1.2.

может изменяться, в то время как сумма этих энергий сохраняется. При этом потенциалы $Z^2_{1,3}$, $Z^3_{2,3}$ и $Z^3_{2,4}$ аналогичны по структуре потенциалам типа $(2+2)$ (см. $Z^3_{2,1}$ и $Z^4_{1,1}$ на рис. 1.1) и в импульсном представлении имеют вид (сравни с формулой (1.24))

$$Z^{\alpha_2}_{\alpha_3 m,\beta_3 n}(E;p,p') = \sum_{\alpha_4,kl} g^{\alpha_3 m}_{\alpha_4 k}(\omega',p')\,\Delta^{\alpha_4}_{kl}\left(E-\frac{p^2}{2\mu_{\alpha_2\beta_3}}-\frac{p'^2}{2\mu_{\alpha_2\alpha_3}}\right) g^{\beta_3 n}_{\alpha_4 l}(\omega,p)\,. \tag{1.40}$$

В то же время, потенциалы $Z^2_{3,3}$, $Z^3_{3,3}$ и $Z^3_{3,4}$ более сложны по структуре:

$$\begin{aligned} Z^{\alpha_2}_{\alpha_3 m,\beta_3 n}(E;p,p') = \frac{1}{2}\sum_{\alpha_4,kl}\int_{-1}^{+1} g^{\alpha_3 m}_{\alpha_4 k}(\omega,\vec{q}\,) \\ \times\,\Delta^{\alpha_4}_{kl}\left(E-\frac{p^2}{2\mu_{\alpha_2\alpha_3}}-\frac{q^2}{2\mu_{\alpha_3\alpha_4}}\right) g^{\beta_3 n}_{\alpha_4 l}(\omega',\vec{q}\,')\,d(\hat{p}\cdot\hat{p}\,') \end{aligned} \tag{1.41}$$

и, что особенно важно, не имеют аналогов в разбиениях α_3. Структура потенциалов (1.40) и (1.41) иллюстрируется диаграммами на рис. 1.4 на примере $Z^2_{1,3}$ и $Z^2_{3,3}$. В приведенных выше формулах E представляет собой сумму внутренних энергий невзаимодействующих кластеров.

Диаграммное представление уравнений (1.39) для $\alpha = 2,3$ с учетом тождественности нуклонов дано на рис. 1.5 и 1.6.

Нам осталось повторить процедуру, которая привела нас от выражения (1.21) к уравнениям (1.35). Операторы перехода, эффективные потенциалы и свободная функция Грина имеют вид

$$\begin{aligned} \{\mathbf{T}\}_{\alpha_3 m,\beta_3 n} &= X_{\alpha_3 m,\beta_3 n}\,, \\ \{\mathbf{V}\}_{\alpha_3 m,\beta_3 n} &= Z_{\alpha_3 m,\beta_3 n}\,, \\ \{\mathbf{G}_0\}_{\alpha_3 m,\beta_3 n} &= \delta_{\alpha_3\beta_3}\Delta^{\alpha_3}_{mn}\,. \end{aligned} \tag{1.42}$$

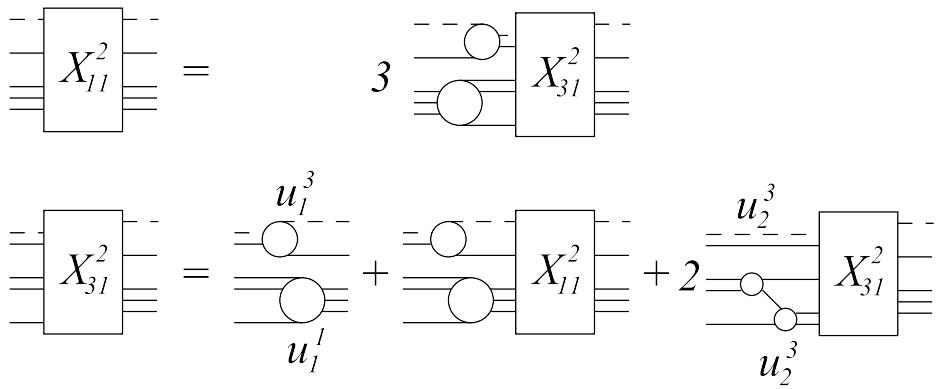

Рисунок 1.5. Эффективные двухчастичные уравнения для амплитуд $X^2_{\alpha_3,\beta_3}$, возникающих в разбиении $(\eta N) - (NNN)$. Обозначения те же, что на рис. 1.1. Нижние и верхние индексы в обозначении $u^{\alpha_3}_{\alpha_4}$ относятся к номерам, соответственно, двух- и трехчастичных разбиений в таблице 1.1. Целочисленные коэффициенты появились вследствие учета тождественности нуклонов и перехода к симметризованным состояниям.

Используя сепарабельное разложение амплитуд

$$X^{\alpha_2}_{\alpha_3 m,\beta_3 n} = \sum_{kl} \left| \begin{array}{c} \alpha_2 k \\ \alpha_3 m \end{array} \right\rangle \Delta^{\alpha_2}_{kl} \left\langle \begin{array}{c} \alpha_2 l \\ \beta_3 n \end{array} \right| , \tag{1.43}$$

мы приходим к квази-двухчастичной форме исходных уравнений задачи пяти тел

$$X_{\alpha_2 m,\beta_2 n} = Z_{\alpha_2 m,\beta_2 n} + \sum_{\gamma_2,kl} Z_{\alpha_2 m,\gamma_2 k}\, \Delta^{\gamma_2}_{kl}\, X_{\gamma_2 l,\beta_2 n} , \tag{1.44}$$

где

$$Z_{\alpha_2 m,\beta_2 n} = (1 - \delta_{\alpha_2\beta_2}) \sum_{\alpha_3,kl} \left\langle \begin{array}{c} \alpha_2 m \\ \alpha_3 k \end{array} \right| \Delta^{\alpha_3}_{kl} \left| \begin{array}{c} \beta_2 n \\ \alpha_3 l \end{array} \right\rangle . \tag{1.45}$$

Потенциалы (1.45) представлены в виде диаграмм на рис. 1.7. В импульсном представлении они имеют стандартный вид (сравни с выражением (1.23)):

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_2 m,\beta_2 n}(E;p,p') = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_3,kl} \int_{-1}^{+1} & g^{\alpha_2 m}_{\alpha_3 k}(\omega,\vec{q}) \\ & \times \Delta^{\alpha_3}_{kl}\left(E - \frac{p^2}{2\mu_{\alpha_2}} - \frac{q^2}{2\mu_{\alpha_2\alpha_3}}\right) g^{\beta_2 n}_{\alpha_3 l}(\omega',\vec{q}\,')\, d(\hat{p}\cdot\hat{p}\,') , \end{aligned} \tag{1.46}$$

который схематически проиллюстрирован в форме диаграмм на рис. 1.8 на примере потенциала $Z_{4,2}$. Здесь E есть энергия всей системы пяти тел $\eta - 4N$.

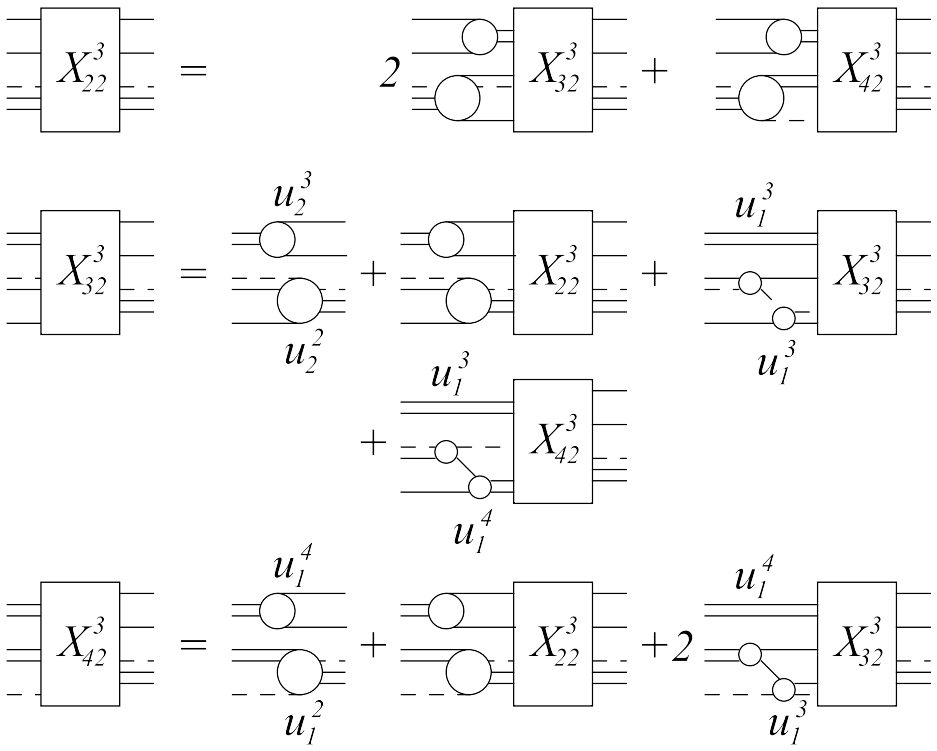

Рисунок 1.6. То же, что на рис. 1.5 для амплитуд $X^3_{\alpha_3,\beta_3}$ в разбиении $(\eta NN) - (NN)$.

Уравнения (1.44) в которых корректно учтена тождественность нуклонов, представлены на рис. 1.9. Как и ранее, потенциалы $Z_{\alpha_2 m,\beta_2 n}$ и амплитуды $X_{\alpha_2 m,\beta_2 n}$ не имеют матричной структуры по индексам $\alpha_3 m$ и $\beta_3 n$. Как показано в работе [52], если формфакторы $|\alpha_2 m\rangle$ и $|\beta_2 n\rangle$ соответствуют связанным состояниям в подсистемах α_2 и β_2, то матрица $X_{\alpha_2 m,\beta_2 n}$ (вычисленная на энергетической поверхности) определяет рассеяние из состояния $|\alpha_2 m\rangle$ в состояние $|\beta_2 n\rangle$.

Приведенный выше вывод уравнений (1.44) для задачи пяти тел, имеющих непрерывные ядра, показывает, что используемый нами сепарабельный метод позволяет свести пятичастичные (в общем случае N-частичные) расчеты к довольно прозрачной рекуррентной схеме, в которой амплитуды подсистем в разбиении α_{n-2} определяются амплитудами, относящимися только к разбиениям $\alpha_{n-1} \subset \alpha_{n-2}$ и $\alpha_n \subset \alpha_{n-1}$. В рамках этой схемы формфакторы и пропагаторы, возникающие в сепарабельном представлении матриц X в разбиениях α_n и α_{n-1}

$$X^{\alpha_n}_{\alpha_{n+1}a,\beta_{n+1}b} = \sum_{kl} \left| \begin{matrix} \alpha_n k \\ \alpha_{n+1} a \end{matrix} \right\rangle \Delta^{\alpha_n}_{kl} \left\langle \begin{matrix} \alpha_n l \\ \beta_{n+1} b \end{matrix} \right|, \tag{1.47}$$

$$X^{\alpha_{n-1}}_{\alpha_n a,\beta_n b} = \sum_{kl} \left| \begin{matrix} \alpha_{n-1} k \\ \alpha_n a \end{matrix} \right\rangle \Delta^{\alpha_{n-1}}_{kl} \left\langle \begin{matrix} \alpha_{n-1} l \\ \beta_n b \end{matrix} \right|,$$

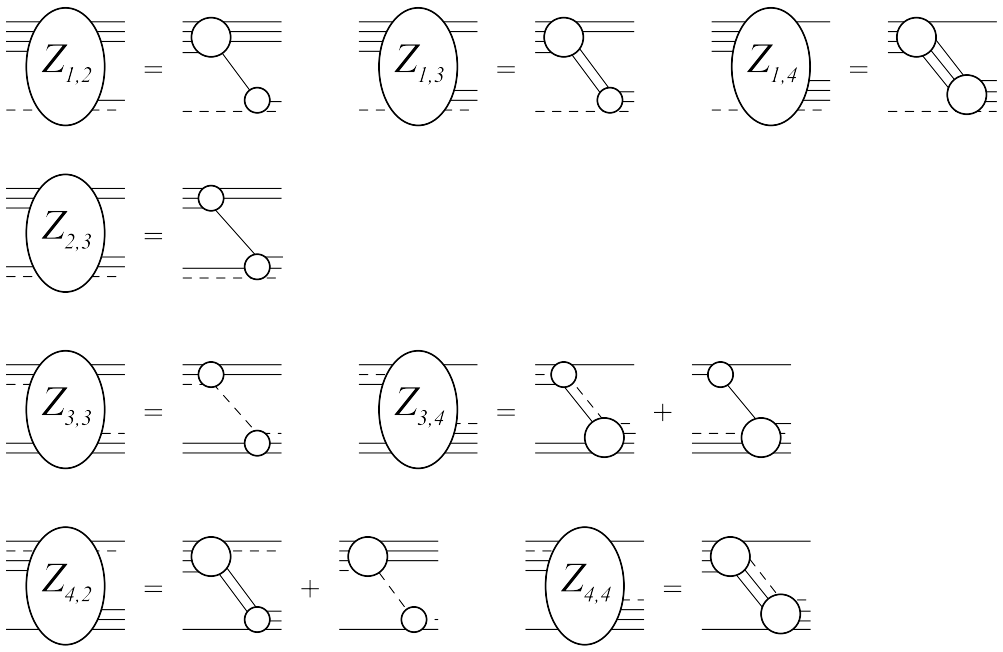

Рисунок 1.7. Потенциалы Z_{α_2,β_2} (1.45). Обозначения как на рис. 1.1.

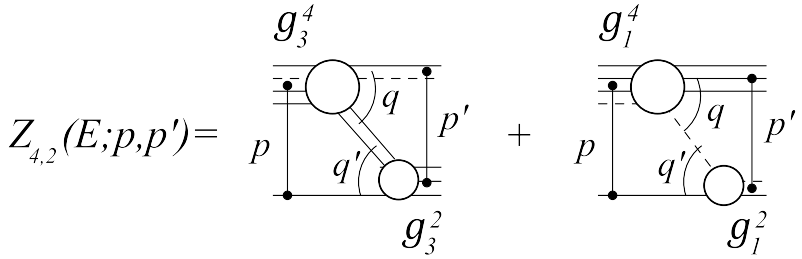

Рисунок 1.8. Структура потенциала $Z_{4,2}$ согласно общей формуле (1.46).

используются для построения эффективных потенциалов $Z^{\alpha_{n-2}}_{\alpha_{n-1}a,\beta_{n-1}b}$ согласно общему выражению

$$Z^{\alpha_{n-2}}_{\alpha_{n-1}a,\beta_{n-1}b} = (1-\delta_{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}) \sum_{\gamma_n,kl} \left\langle \begin{array}{c} \alpha_{n-1}a \\ \gamma_n k \end{array} \middle| \Delta^{\gamma_n}_{kl} \middle| \begin{array}{c} \beta_{n-1}b \\ \gamma_n l \end{array} \right\rangle , \qquad (1.48)$$

$$\gamma_n \subset \alpha_{n-1},\ \gamma_n \subset \beta_{n-1},\ \alpha_{n-1},\, \beta_{n-1} \subset \alpha_{n-2}.$$

Потенциалы (1.48) порождают матрицы X в разбиении α_{n-2}:

$$X^{\alpha_{n-2}}_{\alpha_{n-1}a,\beta_{n-1}b} = Z^{\alpha_{n-2}}_{\alpha_{n-1}a,\beta_{n-1}b} + \sum_{\gamma_{n-1},kl} Z^{\alpha_{n-2}}_{\alpha_{n-1}a,\gamma_{n-1}k}\, \Delta^{\gamma_{n-1}}_{kl}\, X^{\alpha_{n-2}}_{\gamma_{n-1}l,\beta_{n-1}b}\,,$$

$$\alpha_{n-1},\beta_{n-1},\gamma_{n-1} \subset \alpha_{n-2}\,. \qquad (1.49)$$

На практике, уравнения (1.49) в таком виде решаются лишь для нахождения амплитуд $X_{\alpha_2 m,\beta_2 n}$. В других разбиениях α_n с $n > 2$ используются фактически только их ядра для получения сепарабельного представления амплитуды $X^{\alpha_{n-2}}_{\alpha_{n-1}a,\beta_{n-1}b}$. Начав с $n = 4$ после трехкратного повторения описанной выше рекуррентной схемы мы приводим исходные уравнения

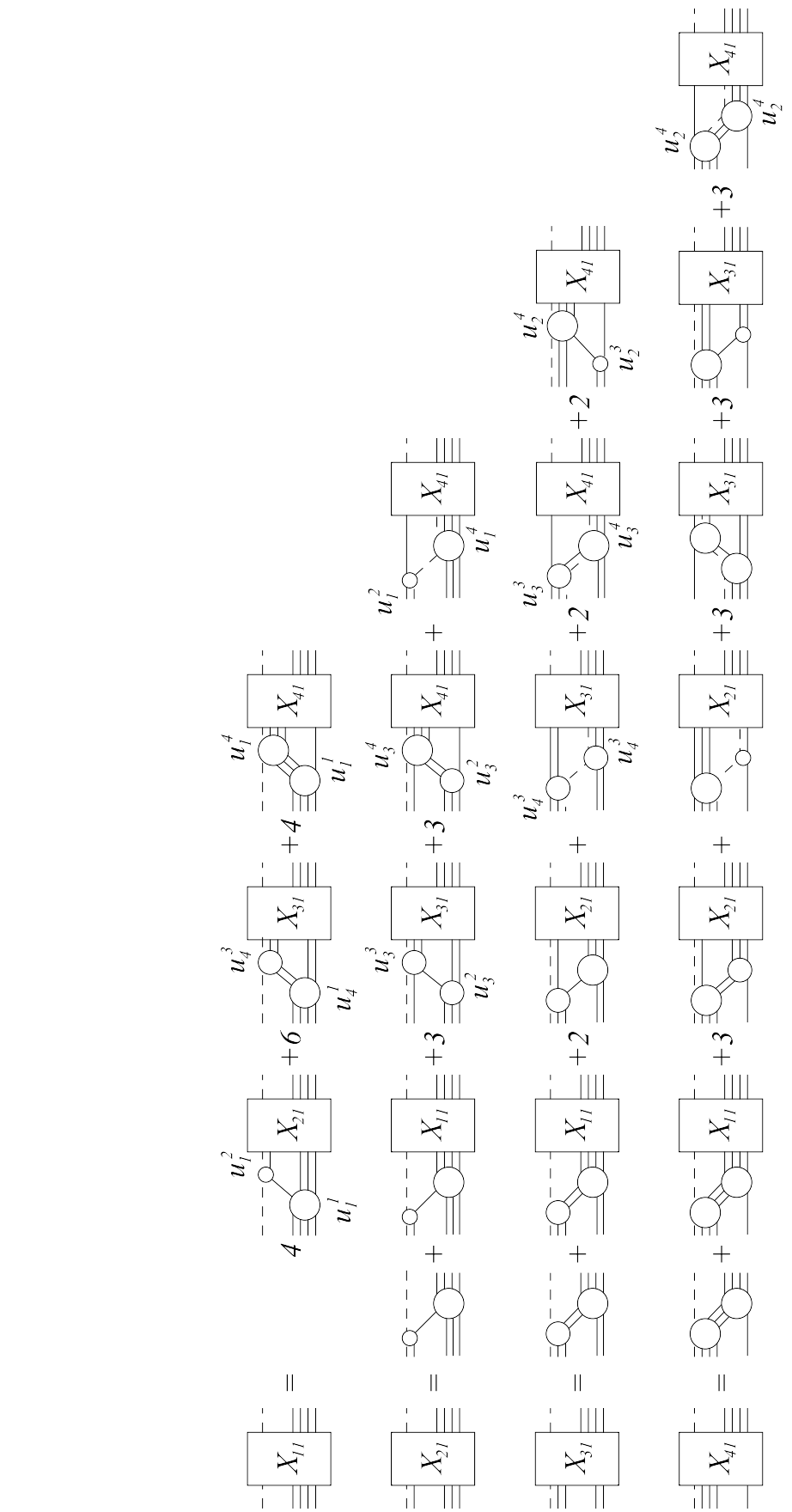

Рисунок 1.9. Графическое представление эффективных двухчастичных уравнений для рассеяния в системе пяти тел $\eta-4N$. Штриховыми и сплошными кривыми показаны, соответственно, η-мезон и нуклоны.

для пяти частиц к эффективным двухчастичным уравнениям, имеющим структуру уравнений Липпмана-Швингера для связанных каналов.

1.2 Сепарабельное разложение ядер интегральных уравнений

Как следует из материала предыдущей части, одним из ключевых моментов процедуры, позволяющей привести исходные уравнения к системе уравнений типа Липпмана-Швингера для связанных каналов, является сепарабельное разложение ядер интегральных уравнений соответственно для двух-, трех- и четырехчастичных задач. Общая схема использования сепарабельного разложения рассмотрена в приложении I. на примере решения трехчастичной задачи. Ниже изложены детали, относящиеся к используемому нами методу EDPE (Energy Dependent Pole Expansion), который, в отличие от более традиционных методов, оказался очень эффективным при решении задач с числом частиц $N > 3$.

Во многих более ранних работах для нахождения вершинных функций и пропагаторов в выражениях вида (1.33) или (1.43) применялся метод Гильберта-Шмидта. Его идея основана на использовании собственных функций $g_n(E;q)$ ядра интегрального уравнения вида

$$X(E;q,q') = Z(E;q,q') + \int Z(q,p)\ \tau(E;p)\ X(E;p,q')\ \frac{p^2dp}{2\pi^2}\,, \tag{1.50}$$

удовлетворяющих соответствующему однородному уравнению

$$\lambda_n(E)\, g_n(E;q) = \int Z(E;q,p)\ \tau(E;p)\ g_n(E;p)\ \frac{p^2dp}{2\pi^2}\,. \tag{1.51}$$

Энергия E входит в набор аргументов функции $g_n(E;q)$ и собственных чисел $\lambda_n(E)$ в качестве параметра. Сами функции $g_n(E;q)$ имеют конечную норму (являются элементами гильбертова пространства).

Уравнение (1.50) относится к классу уравнений с симметричным ядром с нагрузкой $\tau(E;p)$. Простым преобразованием

$$\tilde{g}_n(E;q) = g_n(E;q)\,\sqrt{\tau(E;q)} \tag{1.52}$$

оно приводится к уравнению

$$\lambda_n(E)\,\tilde{g}_n(E;q) = \int \tilde{Z}(E;q,q')\ \tilde{g}_n(E;q')\ \frac{q'^2dq'}{2\pi^2} \tag{1.53}$$

с симметричным ядром

$$\tilde{Z}(E;q,q') = \sqrt{\tau(E;q)}\,Z(E;q,q')\,\sqrt{\tau(E;q')}\,. \tag{1.54}$$

Так как преобразования (1.52), (1.54) являются преобразованиями подобия, то собственные числа λ_n не изменяются.

Собственные функции $\tilde{g}_n(E;q)$, очевидно, также являются элементами гильбертова пространства. Легко видеть, что если система $\tilde{g}_n(E;q)$ $(n = \overline{1,\infty})$ представляет собой ортонормированную систему собственных функций ядра $\tilde{Z}(E;q,q')$ с условием нормировки

$$\int \tilde{g}_n(E;q)\ \tilde{g}_{n'}(E;q)\ \frac{q^2dq}{2\pi^2} = -\delta_{nn'}\,, \tag{1.55}$$

то $g_n(E;q)$, $(n = \overline{1,\infty})$ – ортонормированная система собственных функций ядра $Z(E;q,q')$ с весом $\tau(E;q)$, для которой условие нормировки имеет вид

$$\int g_n(E;q)\ \tau(E;q)\ g_{n'}(E;q)\ \frac{q^2dq}{2\pi^2} = -\delta_{nn'}\,. \tag{1.56}$$

Несмотря на то, что система $g_n(E;q)$ не является полной, свободный член $Z(E;q,q')$ интегрального уравнения (1.50), а также сама амплитуда $X(E;q,q')$ всегда могут быть представлены в виде разложения по этой системе:

$$Z(E;q,q') = -\sum_n \lambda_n(E)\, g_n(E;q)\, g_n(E;q')\,, \tag{1.57}$$

$$X(E;q,q') = -\sum_n\ g_n(E;q)\, \Delta_n(E)\, g_n(E;q')\,, \tag{1.58}$$

где множитель $\Delta_n(E)$, равный

$$\Delta_n(E) = \frac{\lambda_n(E)}{1-\lambda_n(E)} \tag{1.59}$$

имеет смысл пропагатора.

Основной недостаток метода Гильберта-Шмидта заключается в необходимости решать однородное уравнение (1.51) при каждом значении энергии E. В задаче с четырьмя и особенно с пятью частицами это приводит к большим затратам компьютерного времени. В этой связи для наших целей более удобным является так называемый энергозависимый метод сепарабельного разложения EDPE (Energy Dependent Pole Expansion), представленный в работе [61]. Проиллюстрируем схему применения EDPE метода на примере уравнений для тождественных бесспиновых частиц (бозонов со спином 0). Более детальное описание с выводом основных формул можно найти в работе [61].

Метод позволяет найти функции $g_n(E;q)$, удовлетворяющие однородному уравнению (1.51), без нахождения решения этого уравнения при каждом значении параметра E, как это требуется в рассмотренном только что методе Гильберта-Шмидта. Результирующая матрица X в этом случае имеет вид

$$X(E;q,q') = -\sum_{mn}\ g_m(E;q)\, \Delta_{mn}(E)\, g_n(E;q') \tag{1.60}$$

и отличается от (1.58) тем, что матрица «пропагаторов» Δ теперь не диагональна.

Исходным пунктом метода является решение задачи на собственные значения при некоторой, вообще говоря, произвольной энергии $E = B$:

$$\lambda_n(B)\, g_n(B;q) = \int Z(B;q,p)\ \tau(B;p)\ g_n(B;p)\ \frac{p^2 dp}{2\pi^2}\,. \tag{1.61}$$

В конкретных расчетах в качестве B, как правило, берется значение энергии связи в какой-либо из подсистем. Так, например, при решении задачи для четырех бозонов $B = -E_{3b}$, где $E_{3b} > 0$ – энергия связи в трехбозонной подсистеме. В случае, когда связанное состояние в подсистеме отсутствует, можно взять $B = 0$.

Полученные на первом этапе вершины $g_n(B;q)$ и пропагаторы $\Delta_{mn}(B)$ экстраполируются затем на всю вещественную ось энергии согласно формулам

$$g_n(E;q) = \int Z(E;q,p)\ \tau(B;p)\ g_n(B;p)\ \frac{p^2 dp}{2\pi^2}\,, \tag{1.62}$$

$$[\Delta^{-1}(E)]_{mn} = \int \Big[\ g(B;p)\,\tau(B;p) - g_n(E;p)\,\tau(E;p)\ \Big]\ g_n(E;p)\ \frac{p^2 dp}{2\pi^2}\,. \tag{1.63}$$

Как уже было отмечено, существенным преимуществом EDPE метода является то, что задача на собственные значения решается лишь один раз. Определение значений вершинных функций и пропагаторов при других значениях энергии сводится к простому вычислению интегралов согласно выражениям (1.62) и (1.63).

Следует также отметить, что если спектр собственных значений для n частиц содержит как положительные, так и отрицательные собственные значения, в спектре для системы $n+1$ частиц в общем случае могут присутствовать собственные значения, которые являются комплексными в том числе в области энергий ниже упругого порога. Такие собственные значения могут появляться только парами: каждому комплексному собственному значению соответствует комплексно сопряженное. Соответствующие собственные функции также являются комплексно сопряженными по отношению друг к другу. Для этих функций, кроме скалярного произведения, фигурирующего в условии нормировки (1.56), можно также определить эрмитово скалярное произведение (с комплексным сопряжением), тождественно равное нулю, включая случай $n' = n$.

1.3 Заключение к главе 1

Идея о том, что взаимодействие в системе нескольких тел может рассматриваться как взаимодействие квазичастиц, широко использовалась во множестве моделей при описании

трехчастичных систем, основанном на введении сепарабельных двухчастичных взаимодействий. Представленная нами схема решения задачи пяти тел показывает, что такой подход действительно имеет большое эвристическое значение. Получаемые уравнения имеют довольно прозрачный физический смысл и соответствуют обычному способу суммирования ряда многократного рассеяния [62].

Важно отметить, что метод не ограничивается использованием только нелокальных сепарабельных потенциалов, так как в принципе любой, в том числе чисто локальный, потенциал может быть представлен с определенной точностью суммой сепарабельных членов. Таким образом, метод может применяться для произвольного локального взаимодействия.

Очевидно, что платой за эту общность метода является то, что вместо одного уравнения необходимо решать набор связанных интегральных уравнений. Поэтому его эффективность зависит от количества членов, которые необходимо сохранить в разложениях для обеспечения сходимости. Как показывают расчеты для нуклонных систем с локальными потенциалами, во всех случаях уже несколько первых членов обеспечивают приемлемую точность результатов.

При обобщении сепарабельного разложения на системы с числом частиц $N > 3$ метод приводит к некоторым формальным усложнениям. В частности, увеличивается число уравнений, появляются эффективные потенциалы, не имеющие структурных аналогов в задаче трех тел. Однако, основная идея метода, на которой основана схема решения задачи трех тел, остается неизменной.

Глава 2

Решение задачи пяти тел для системы тождественных бозонов

В данной главе приведенная выше схема решения пятичастичных уравнений применяется к конкретному случаю, когда система состоит из пяти одинаковых бесспиновых бозонов, взаимодействующих посредством s-волнового потенциала. Задача рассматривается в основном с академическими целями. Тем не менее, как сам метод, так и полученные результаты могут быть применены к решению конкретных физических задач, например, при рассмотрении взаимодействия двухнуклонных кластеров с нулевым спином.

2.1 Формализм АГС для системы пяти тождественных бозонов

В случае пяти одинаковых бозонов для описания затравочного двухчастичного взаимодействия в s-волне был использован простейший сепарабельный потенциал

$$v(q,q') = -\lambda\, f(q)\, f(q') \tag{2.1}$$

с формфактором типа Ямагучи [63]

$$f(q) = (1 + q^2/\beta^2)^{-1}\,. \tag{2.2}$$

Массы бозонов брались равными массе нуклона $M = 939$ МэВ. Отсекающий параметр $\beta = 1,4488$ Фм$^{-1}$ был взят непосредственно из работы [63]. Для параметра λ, определяющего интенсивность взаимодействия, использовалось усредненное значение

$$\lambda = (\lambda_0 + \lambda_1)/2\,, \tag{2.3}$$

где λ_S $(S = 0, 1)$ – значение параметра, вычисленное в [63] соответственно для спин-синглетного и спин-триплетного NN-взаимодействий. При таком выборе параметров двухбозонная (bb) система имеет слабо связанное состояние с энергией связи $E_{bb} = 0,43$ МэВ.

Чтобы учесть тождественность частиц, был применен метод, упомянутый в предыдущей главе. А именно, все формальные выкладки первоначально осуществлялись так, как если бы все бозоны были различными. После получения необходимых уравнений учитывалась их симметричность, обусловленная тождественностью частиц, строились соответствующие симметризованные амплитуды, и исходные уравнения преобразовывались к уравнениям для симметризованных амплитуд. Более детально процедура симметризации описана в приложении III..

Возможные разбиения α_n системы пяти тождественных бозонов приведены в Таблице 2.1. Число уравнений типа Липпмана-Швингера, к которым приводится исходная задача, равно числу соответствующих разбиений.

Таблица 2.1. Нумерация разбиений для системы пяти одинаковых бозонов.

α_n	$n=4$	$n=3$	$n=2$
1	$(bb)+b+b+b$	$(bbb)+b+b$	$b+(bbbb)$
2		$(bb)+(bb)+b$	$(bb)+(bbb)$

Операторные уравнения (1.49) для матриц $X^{\alpha_n}_{\alpha_{n+1},\beta_{n+1}}$ с $n=2,3$ схематично представлены на рис. 2.1 и 2.2. Целочисленные факторы в правой части появляются из-за тождественности бозонов. Эти уравнения хорошо известны из теории четырех нуклонов, и их структура подробно описана, например, в работе [59]. Для $\alpha_3=\alpha_2=1$ эффективные потенциалы $Z^{\alpha_3}_{1,1}$, $Z^{\alpha_2}_{1,1}$ и $Z^{\alpha_2}_{1,2}$ интерпретируются в терминах обмена частицами (квазичастицами). В случае $\alpha_3=\alpha_2=2$ мы имеем, как обычно, две группы частиц, взаимодействующих только внутри кластеров.

Важно, что в случае $\alpha_2=2$ (см. рис. 2.2), кроме потенциала $Z^2_{1,2}$, соответствующего фрагментации $(2+3)$, который по своей структуре эквивалентен потенциалам типа $(2+2)$ в разбиении $\alpha_3=2$ ($Z^2_{1,1}$ на рис. 2.1), также возникает потенциал $Z^2_{2,2}$, который имеет иную структуру. Здесь, как и ранее, имеются две невзаимодействующие друг с другом составные частицы, но потенциал больше не имеет того простого смысла, какой был при фрагментации типа $(2+2)$ в системы четырех частиц. Как видно из рисунка, теперь начальное и конечное состояния включают эффективные вершины $(bb)+(bb)$, а взаимодействие реализуется путем обмена бозоном между двумя кластерами (bb), тогда как второй кластер выступает в роли спектатора. Потенциалы такого типа не имеют аналогов в теории четырех тел и впервые

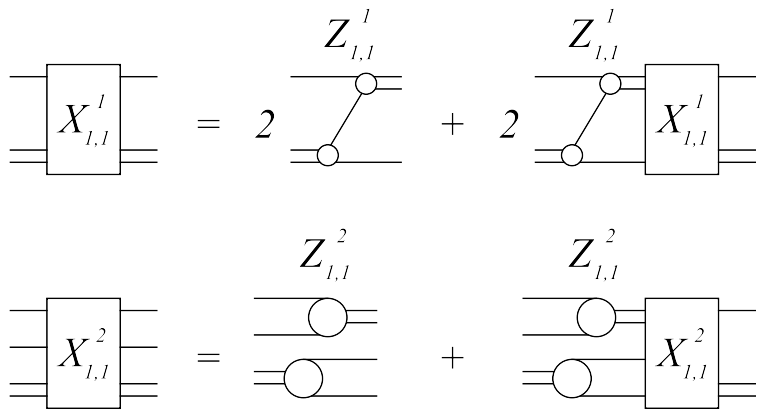

Рисунок 2.1. Графическое представление уравнений (1.49) для разбиений α_3 (нумерация разбиений приведена в таблице 2.1). Верхнее и нижнее уравнения соответствуют $\alpha_3 = 1$ и 2 соответственно. Численные множители возникают вследствие учета тождественности частиц.

появляются именно в задаче пяти тел.

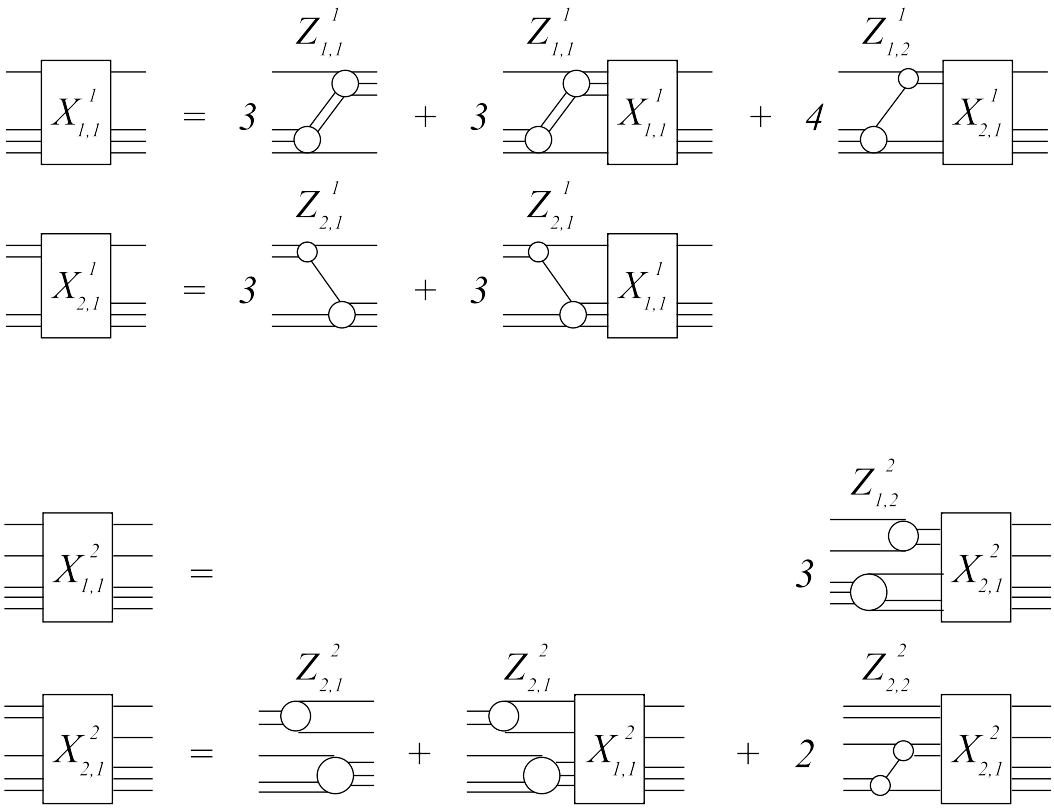

Рисунок 2.2. То же, что на рис. 2.1, но для двухчастичных разбиений $\alpha_2 = 1$ (два верхних уравнения) и $\alpha_2 = 2$ (два нижних уравнения).

Полученные уравнения для пяти частиц в форме уравнений Липпмана-Швингера проиллюстрированы на рис. 2.3. В импульсном представлении после перехода к парциально-волновому разложению они преобразуются к одномерными интегральным уравнениям для

отдельных волн. Так как мы ограничиваем наше рассмотрение энергиями ниже первого неупругого порога, ядра уравнений являются непрерывными функциями, так что сами уравнения могут быть решены непосредственно путем матричной инверсии.

Тождественность бозонов учитывалась по схеме, изложенной в приложении III.. Например, для переходов типа $b+(4b) \to b+(4b)$ мы можем выделить диагональную амплитуду

$$X^D = X_{\alpha_2,\alpha_2}\,, \tag{2.4}$$

и недиагональные амплитуды

$$X^N = \sum_{\alpha_2=1}^{4} X_{\alpha_2,\beta_2}\,, \quad \alpha_2 \neq \beta_2\,, \tag{2.5}$$

где все разбиения α_2, β_2 имеют тип $b+(4b)$. Тогда симметризованная амплитуда $X_{1,1}$ для перехода $b+(4b) \to b+(4b)$ определяется комбинацией

$$X_{1,1} = X^D + X^N\,, \tag{2.6}$$

которая является обобщением комбинации $X_D + 2X_N$, возникающей в случае трех тождественных частиц [64]. Аналогичным образом симметризованная амплитуда $X_{2,1}$ на рис. 2.3 определяется как

$$X_{2,1} = \sum_{\alpha_2=1}^{10} X_{\alpha_2,\beta_2}\,, \tag{2.7}$$

где $\beta_2 \to b+(4b)$, и суммирование проводится по всем разбиениям α_2 типа $(bb)+(3b)$.

2.2 Результаты и их обсуждение

Так как в практических расчетах сепарабельное разложение ядер интегральных уравнений заменяется конечной суммой, проверка качества модели предполагает исследование сходимости результатов к правильному значению в зависимости от числа n сепарабельных членов, учитываемых в разложении. Под правильным понимается значение, получаемое в пределе $n \to \infty$.

В случае пяти бозонов непосредственные расчеты показывают, что для энергии связи E_{5b} уже первый член в сепарабельном разложении амплитуд $X^{\alpha_2}_{\alpha_3 m\,\beta_3 n}$ для $\alpha_2 = 1,2$ обеспечивают точность в пределах $2\,\%$ от правильного значения. Чтобы проиллюстрировать столь быструю сходимость, мы привели на рис. 2.4 энергетическую зависимость первых четырех собственных значений $\lambda_n^{\alpha_2}$. Как видим, абсолютные величины $|\lambda_n^{\alpha_2}|$ довольно быстро уменьшаются, так что с ростом n имеем $|\lambda_n^{\alpha_2}| \ll 1$. Кроме того, как видно из рис. 2.4, вклад членов с номерами $n > 1$ подавлен, поскольку два соседних слагаемых входят в сумму с разными знаками.

В результате притягивающая часть потенциала, соответствующая $\lambda_n > 0$, в значительной степени компенсируется отталкивающими членами, соответствующими $\lambda_n < 0$.

Для энергий связи получаем

$$E_{3b} = 12,6 \text{ МэВ}\,, \quad E_{4b} = 54,8 \text{ МэВ}\,, \quad E_{5b} = 144,3 \text{ МэВ}\,. \tag{2.8}$$

Ввиду того, что мы используем простейший потенциал Ямагучи, значения E_{3b} и E_{4b} заметно переоценивают энергии связи ядер ^{3}He и ^{4}He:

$$E^{exp}_{^3\text{He}} = 7,2 \text{ МэВ}\,, \quad E^{exp}_{^4\text{He}} = 28,3 \text{ МэВ}\,. \tag{2.9}$$

Для систем $(3b)$ и $(4b)$ наши расчеты также предсказывает возбужденные уровни с энергиями

$$E^{*}_{4b} = 13,2\,\text{MeV}\,, \quad E^{*}_{5b} = 61,0\,\text{MeV}\,. \tag{2.10}$$

В целом, как видно из (2.8), энергия связи очень быстро увеличивается с ростом числа частиц. Этот результат является вполне ожидаемым, так как потенциал Ямагучи характеризуется сильным притяжением на малых расстояниях ($r < 0,2$ Фм).

2.3 Заключение к главе 2

Таким образом, формализм Альта-Грассбергера-Сандхаса был использован нами для решения задачи о взаимодействии в системе пяти тождественных бозонов. Схема, которая позволяет точно решить соответствующие динамические уравнения в импульсном представлении, базируется на применении сепарабельного приближения ядер интегральных уравнений.

Общая эффективность такого подхода связана с тем, что если затравочные двухчастичные взаимодействия обусловлены полюсами соответствующих t-матриц, лежащими в непосредственной близости от исследуемой области, то и амплитуды соответствующих трех-, четырех-, и пятичастичных систем также содержат полюса, лежащие в каждом случае вблизи нулевой энергии. Как следствие, сепарабельное разложение, которое хорошо отражает полюсную природу взаимодействия и поэтому правильно воспроизводит поведение амплитуды вблизи полюсов, обеспечивает адекватное описание динамических свойств системы.

С целью проверки применимости используемой нами схемы решения мы исследовали сходимость метода Гильберта-Шмидта для построения сепарабельного разложения ядер интегральных уравнений. Непосредственные вычисления значений собственных чисел ядер показали, что степень сходимости сепарабельного ряда оказывается вполне достаточной для практических целей. Так, при расчете энергии связи, учет лишь четырех членов в разложении обеспечивает точность выше 1%.

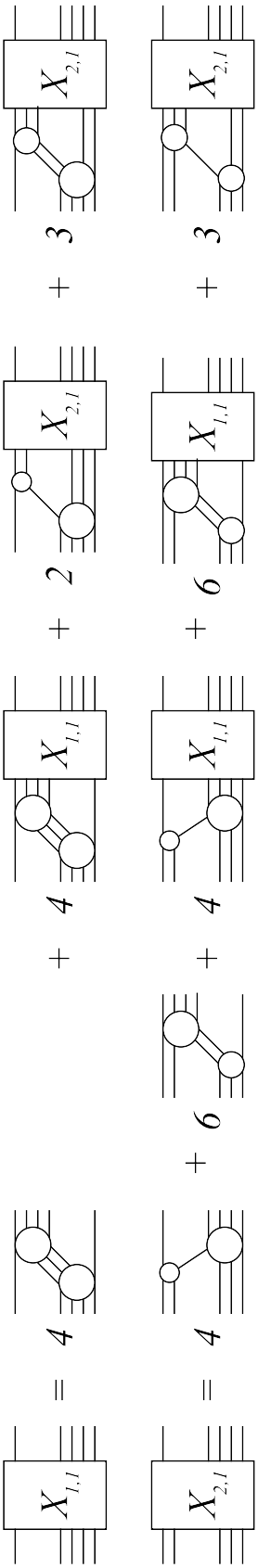

Рисунок 2.3. Графическое представление эффективных двухчастичных уравнений (1.44) для системы пяти тождественных бозонов. Обозначения те же, что на рис. 2.1. Верхний индекс α_1 здесь является излишним и поэтому опущен.

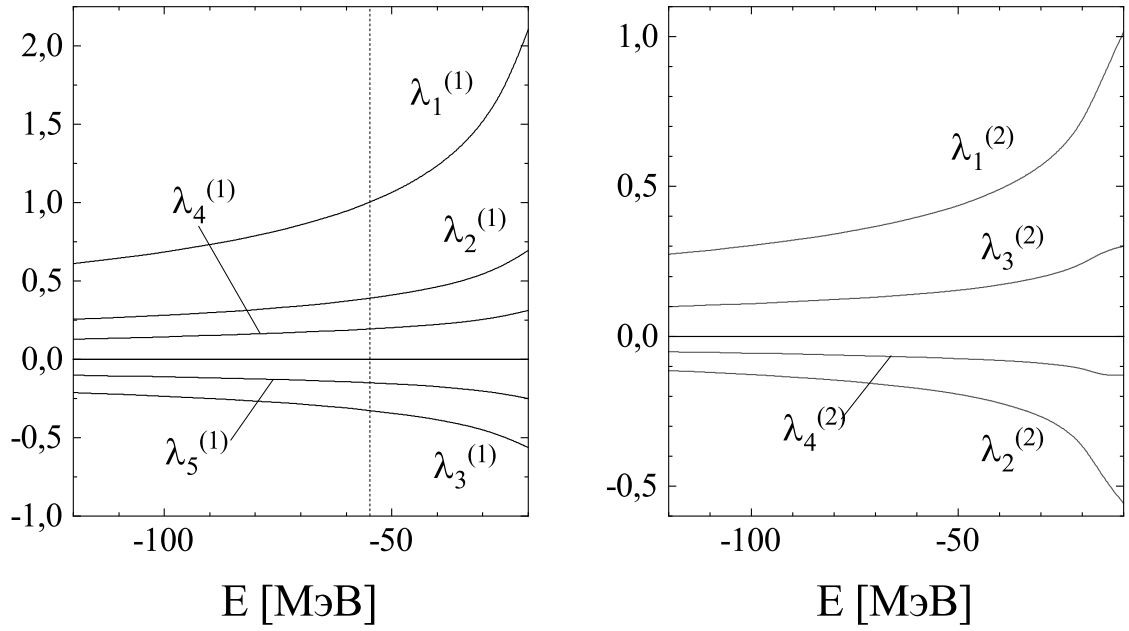

Рисунок 2.4. Зависимость нескольких первых собственных значений $\lambda_n^{(\alpha_2)}$ ядер интегральных уравнений (1.44) (см. рис. 2.3) для системы пяти тождественных бозонов, вычисленных для $\alpha_2 = 1$ (левая часть) и $\alpha_2 = 2$ (правая часть рисунка). Вертикальная пунктирная линия проведена при энергии, соответствующей энергии связи основного состояния четырех бозонов $E = -E_{4b}$.

Глава 3

Решение задачи пяти тел для системы $\eta - 4N$

Так как система, содержащая 4 нуклона и один псевдоскалярный мезон, использовалась нами для демонстрации схемы решения пятичастичных уравнений в главе 1, все полученные там формулы непосредственно применимы к задаче $\eta - 4N$. В частности, сами уравнения, приведенные к форме уравнений типа Липпмана-Швингера для связанных каналов (1.44), представлены на рис. 1.9. Поэтому данная глава посвящена главным образом описанию затравочных двухчастичных взаимодействий и изложению результатов.

3.1 Двухчастичные взаимодействия

Как уже неоднократно подчеркивалось, особенностью используемого в диссертационной работе подхода является сепарабельное представление основных затравочных потенциалов – нуклон-нуклонного (NN) и потенциала взаимодействия η-мезона с нуклоном (ηN). Необходимо отметить, что заложенные в методе сепарабельного разложения физические соображения (близость полюсов амплитуды рассеяния к рассматриваемой области энергий) хорошо согласуются с нашими представлениями о динамике как NN так и ηN системы.

Действительно, взаимодействие между частицами в каждом их этих случаев в значительной степени характеризуется полюсами соответствующей T-матрицы, расположенными вблизи рассматриваемой области энергий. Например, низкоэнергетическое взаимодействие между нуклонами определяется в основном полюсами s-волновых компонент ${}^3S_1$ и ${}^1S_0$. Первая из этих компонент соответствует связанному триплетному состоянию в системе, когда спины нуклонов ориентированы параллельно, вторая возникает при противоположном направлении спинов. Полюс связанного состояния ${}^3S_1$ расположен на физическом листе при энергии $E = -2,23$ МэВ, равной по абсолютной величине энергии связи дейтрона (см. рис. 3.1). Состояние ${}^1S_0$ является виртуальным, и соответствующий полюс уходит на нефизический лист. Энергия виртуального состояния равна приблизительно -67 КэВ. В обоих случаях полюс расположен вблизи физической области (верхний край разреза вдоль положительной части вещественной оси). Это, в частности, приводит к сильной зависимости сечения рассеяния от

энергии, как показано слева на рис. 3.1.

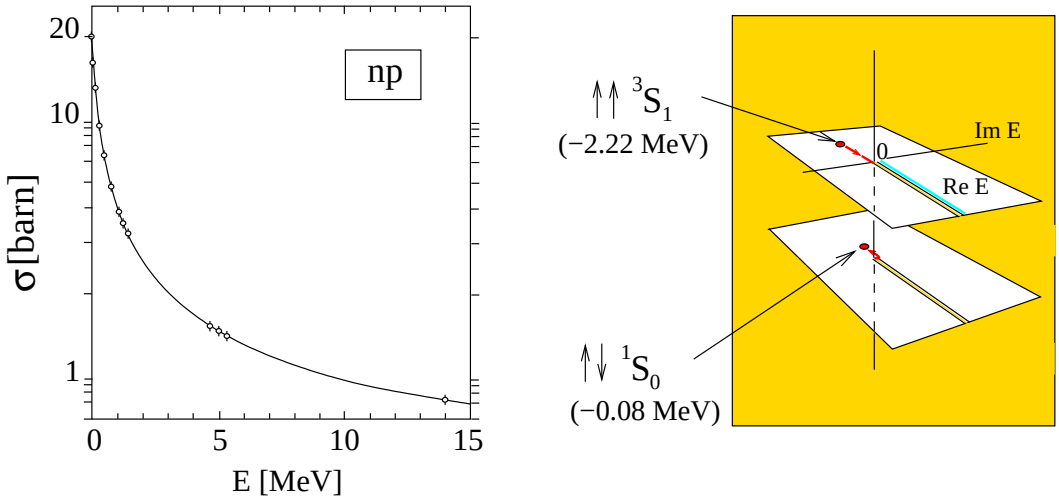

Рисунок 3.1. На левом рисунке представлено полное сечение нейтрон-протонного рассеяния в области низких энергий. Справа демонстрируется структура римановой поверхности s-волновой части амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния. Физический (верхний) лист соединяется с нефизическим (нижним) через унитарный разрез вдоль вещественной оси энергии начиная от $E = 0$. Показана траектория движения полюса при переходе от связанного состояния $^3S_1$ к виртуальному состоянию $^1S_0$.

Что касается системы ηN, результаты анализов различных процессов в которых ηN взаимодействие играет важную роль [6, 14, 17] показывают, что его основным механизмом в области низких энергий является возбуждение s-волнового резонанса $N(1535)\frac{1}{2}^-$. Роль парциальных волн с бóльшим значением орбитального момента, обусловленных вкладом нуклонного полюса, а также резонансов $N(1520)\frac{3}{2}^-$, $N(1710)\frac{1}{2}^+$ и др., является незначительной. Поэтому процесс ηN рассеяния рассматривается нами в s-волновом приближении с полюсом, лежащим на нефизическом листе энергии непосредственно под положительной вещественной осью.

Ключевое значение для взаимодействия как медленных нуклонов так и η-мезонов с нуклонами имеет тот факт, что в обоих случаях полюса расположены вблизи физической области и, таким образом, практически полностью определяют динамические свойства этих систем. Как отмечено в приложении, в окрестности полюса любой потенциал действует подобно сепарабельному. В качестве примера на рис. 3.1 демонстрируется качество описания полного сечения нуклон-нуклонного рассеяния с помощью сепарабельного потенциала. Таким образом, сепарабельное приближение, введенное нами для затравочных двухчастичных

взаимодействий NN и ηN, является вполне оправданным, как в качественном так и в количественном отношении.

NN взаимодействие. Для описания нуклон-нуклонного взаимодействия нами было использовано сепарабельное представление парижского потенциала, полученное в работе [65] с помощью метода Эрнста-Шакина-Талера [66]. Общее выражение для потенциала в состояниях ${}^1S_0$ и ${}^3S_1$ имеет вид

$$v_{NN}^{(S)}(q,q') = -g_1^{(S)}(q) g_1^{(S)}(q')\,, \tag{3.1}$$

где индексом S обозначен полный (суммарный) спин NN системы. Для формфакторов $g_1(q)$ использовалась параметризация

$$g_1^{(S)}(q) = \sqrt{2}\pi \sum_{i=1}^{6} \frac{C_i^{(S)}}{q^2 + \beta_i^{(S)2}}\,. \tag{3.2}$$

Значения параметров $C_i^{(S)}$ и $\beta_i^{(S)}$ получены в работе [65] путем подгонки (3.1) к значениям парижского потенциала вне массовой поверхности при нулевой энергии для ${}^1S_0$ конфигурации и при энергии $E = -E_d = -2,23$ (энергия связи дейтрона) для состояния ${}^3S_1$. Как следствие, параметризация (3.2) практически точно воспроизводит поведение истинного парижского потенциала как на массовой поверхности так и вне ее в достаточно широкой области энергий, вплоть до $E = 50\,\text{МэВ}$ в лабораторной системе, что для наших целей является более чем достаточным. Очень незначительное отклонение возникает лишь при значениях импульсов q, превышающих 8 Фм^{-1}.

Для энергий связи ядер ^{3}He и ^{4}He потенциал (3.1) дает значения

$$E_b^{^3\text{He}} = 8,64\,\text{MeV}\,, \quad E_b^{^4\text{He}} = 31,17\,\text{MeV}\,, \tag{3.3}$$

которые довольно близки к экспериментальным (см. (2.9)).

ηN взаимодействие. Для расчета ηN амплитуды использовалось предположение, что ηN взаимодействие реализуется исключительно путем возбуждения и распада резонанса $N(1535)\frac{1}{2}^-$. При этом явно была учтена связь этого резонанса с каналом πN. Соответствующий эффективный энергозависимый потенциал может быть представлен матрицей размерности 2×2

$$v_{\alpha\beta}(W,q,q') = \frac{g_2^{(\alpha)}(q)\, g_2^{(\beta)}(q')}{W - M_0}\,,\ \alpha,\beta \in \{\pi,\eta\}\,, \tag{3.4}$$

где W – полная (инвариантная) энергия в системе центра масс ηN. Форм-факторы $g_2^{(\alpha)}(q)$ брались в монопольном виде

$$g_2^{(\alpha)}(q) = g_\alpha \frac{1}{1 + q^2/\beta_\alpha^2}\,. \tag{3.5}$$

Соответствующая t-матрица, полученная путем решения уравнения Липпмана-Швингера, имеет вид

$$\begin{aligned} t_{\alpha\beta}(W,q,q') &= g_2^{(\alpha)}(q)\,\tau(W)\,g_2^{(\beta)}(q')\,, \\ \alpha,\beta &\in \{\pi,\eta\}\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

куда непосредственно входит пропагатор резонанса $N(1535)\frac{1}{2}^-$

$$\tau(W) = \frac{1}{W - M_0 - \Sigma_\pi - \Sigma_\eta + \frac{i}{2}\Gamma_{\pi\pi}}\,. \tag{3.7}$$

Здесь Σ_α – собственная энергия резонанса, связанная с модой распада αN

$$\Sigma_\alpha(W) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{q^2\,dq}{2\omega_\alpha(q)}\frac{[g_2^{(\alpha)}(q)]^2}{W - E_N(q) - \omega_\alpha(q) + i\varepsilon} \tag{3.8}$$

где релятивистские энергии нуклона и мезона $\alpha = \pi,\eta$ равны соответственно $E_N(q) = \sqrt{q^2 + M_N^2}$ и $\omega_\alpha(q) = \sqrt{q^2 + m_\alpha^2}$. Двухпионный канал $\pi\pi N$ был феноменологически включен в виде чисто мнимой добавки в собственную энергию $N(1535)\frac{1}{2}^-$ (см. (3.7)) с

$$\Gamma_{\pi\pi} = \gamma_{\pi\pi}\frac{W - M_N - 2m_\pi}{m_\pi}\,. \tag{3.9}$$

Амплитуда упругого рассеяния ηN вне массовой поверхности определяется компонентой $\alpha = \beta = \eta$ матрицы $t_{\alpha\beta}$ (3.6) как

$$f_{\eta N}(W,q,q') = -\frac{M_N}{4\pi W}\,t_{\eta\eta}(W,q,q')\,. \tag{3.10}$$

Матрица $t_{\eta\eta}$ возникает в наших уравнениях в качестве матрицы t_{γ_4} при $\gamma_4 = 2$ (см. выражение (3.17) и таблицу 1.1) с форм-фактором $g_2(\omega,q) \equiv g_2^{(\eta)}(q)$ (3.5). В вычислениях мы использовали два набора параметров g_π, g_η, β_π, β_η, M_0 и $\gamma_{\pi\pi}$, которые приведены в Таблице 3.1. Набор I был получен в работе [54] при подгонке вещественной и мнимой частей амплитуды (3.10) к результатам K-матричного анализа [24]. Набор II является результатом изложенной ниже процедуры фитирования параметров, целью которой было одновременное описание эффектов взаимодействия в конечном состоянии (то есть, эффекта роста сечения вблизи порога) в процессах образования η-мезонов на ядрах d, ^{3}He и ^{4}He.

Ввиду сильной связи каналов ηN и πN в области резонанса $N(1535)\frac{1}{2}^-$ необходимо, вообще говоря, учитывать также и пионные степени свободы в нашей задаче, то есть возможность переходов типа $\eta - 4N \leftrightarrow \pi - 4N$. Однако учет состояний $\pi - 4N$ в расчетах с неизбежностью приведет не только к существенному увеличению числа решаемых уравнений в связи с необходимостью введения в задачу каналов с бóльшим чем $L = 0$ значением орбитального момента, но и к появлению трудностей качественного характера. Основной из этих

Таблица 3.1. Параметры, определяющие взаимодействие частиц в связанных каналах $\eta N - \pi N$ согласно выражениям (3.4) – (3.5). В первой строке перечислены параметры, которые были подогнаны в работе [54] к результатам K-матричного анализа [24]. Параметры, представленные во второй строке, получены путем подгонки полных сечений на рис. 3.6, как описано в разделе 3.3.2. В последнем столбце даны соответствующие значения длины рассеяния ηN.

Набор	g_η	β_η [МэВ]	g_π	β_π [МэВ]	M_0 [МэВ]	$\gamma_{\pi\pi}$ [МэВ]	$a_{\eta N}$ [Фм]
I	1,91	636	0,651	850	1577	4,0	0,93+i 0,25
II	1,75	1607	0,966	1126	1628	0,10	0,69+i 0,29

трудностей являются движущиеся (логарифмические) особенности, возникающие выше порога рождения π-мезона. В результате сепарабельное представление ядер уравнений имеет плохую сходимость. По этой причине мы пренебрегаем каналами с пионом, сохраняя лишь промежуточные πN-петли в выражении для собственной энергии резонанса $N(1535)\frac{1}{2}^-$ (см. выражения (3.7) и (3.8)). С одной стороны, могут возникнуть сомнения в справедливости такого приближения, так как интенсивность взаимодействия между пионом и нуклоном в области второго резонанса превышает интенсивность ηN взаимодействия. Решающее значение, однако, имеет тот факт, что двухступенчатый процесс $\eta N \to \pi N \to \eta N$ становится важным лишь в случае больших импульсов промежуточного пиона $k_\pi \approx 400\,\mathrm{MeV/c}$, и потому эффективен лишь для малых межнуклонных расстояний порядка $R = \hbar/k_\pi \approx 0{,}5$ Фм. Используя простую геометрическую интерпретацию, можно заключить, что вероятность этого процесса

$$P = \frac{4}{3}\pi R^3\, \rho_{^4H}(0) \approx \frac{1}{10}\,, \tag{3.11}$$

где $\rho_{^3H}(r)$ есть плотность ядра ^{4}H, мала и его вклад в $\eta\,^4$H рассеяние в области низких энергий оказывается незначительным. Этот факт косвенно подтверждается результатами расчетов, представленных в работе [67] для системы ηNN, где канал с пионом πNN был учтен явно, и был наглядно продемонстрирован его исключительно малый вклад.

3.2 Чувствительность низкоэнергетического η-ядерного взаимодействия к свойствам амплитуды ηN рассеяния

Одной из основных целей работы является определение значений элементарной амплитуды $f_{\eta N}(W)$ в области ниже порога образования η-мезона. Инструментом для решения этой задачи является подбор параметров $f_{\eta N}(W)$ таким образом, чтобы соответствующие решения АГС уравнений для систем ηNN, $\eta - 3N$ и $\eta - 4N$ воспроизводили определенные из опыта квадраты амплитуд рассеяния η-мезонов на ядрах d, ^{3}He и ^{4}He, соответственно.

То, насколько важным является вопрос о нахождении $f_{\eta N}$, можно видеть из рис. 3.2 и 3.3, где показаны вещественная и мнимая части амплитуды, предсказываемые современными моделями. Несмотря на то, что во всех случаях применяется метод связанных каналов, и сам процесс ηN рассеяния аппроксимируется возбуждением одного и того же резонанса $N(1535)\frac{1}{2}^-$, имеется, как видим, сильная зависимость результатов от используемой модели. Столь значительный разброс наглядно свидетельствует о недостаточности наших знаний особенностей ηN взаимодействия, по крайней мере, на количественном уровне.

Прежде чем перейти к решению основной задачи, мы обратимся к следующему вопросу: в какой области энергий W значения $f_{\eta N}(W)$ оказывают наибольшее влияние на значения длин рассеяния $a_{\eta A}$ для $A = d$, ^{3}He и ^{4}He. Другими словами, мы хотим найти область W, в которой значения элементарной амплитуды $f_{\eta N}$ дают основной вклад в η-ядерную амплитуду $f_{\eta A}$.

То, что такая область существует, можно заключить из следующих простых соображений. Как видно из выражения (1.22), значение энергии $E_{\eta N} = W - M_N - M_\eta$ (то есть аргумента пропагатора Δ^{γ_4} при $\gamma_4 = \eta N$ в этом выражении), может изменяться только в области $(-\infty, \mathcal{E}]$, где $\mathcal{E}$ – суммарная энергия всей системы пяти тел (полная энергия за вычетом масс частиц). В пороговой области имеем $\mathcal{E} = -E_b^A$, где $E_b^A\,(> 0)$ – энергия связи ядра A. С другой стороны, можно ожидать, что довольно быстрое уменьшение форм-фактора ядра при больших значениях импульса будет подавлять вклад больших отрицательных значений $E_{\eta N} \to \infty$. По этой причине можно ожидать, что область $E_{\eta N}$, в которой $f_{\eta A}$ будет чувствительной к изменению значений элементарной амплитуды $f_{\eta N}(E_{\eta N})$, ограничена условиями $E_{\eta N} \in [a, b]$ с $-\infty < a < b \leq -E_b^A$.

В целом, вопрос о зависимости свойств η-ядерного рассеяния в области низких энергий от подпорогового поведения $f_{\eta N}$ довольно подробно обсуждался в работах [68, 45]. Их авторы

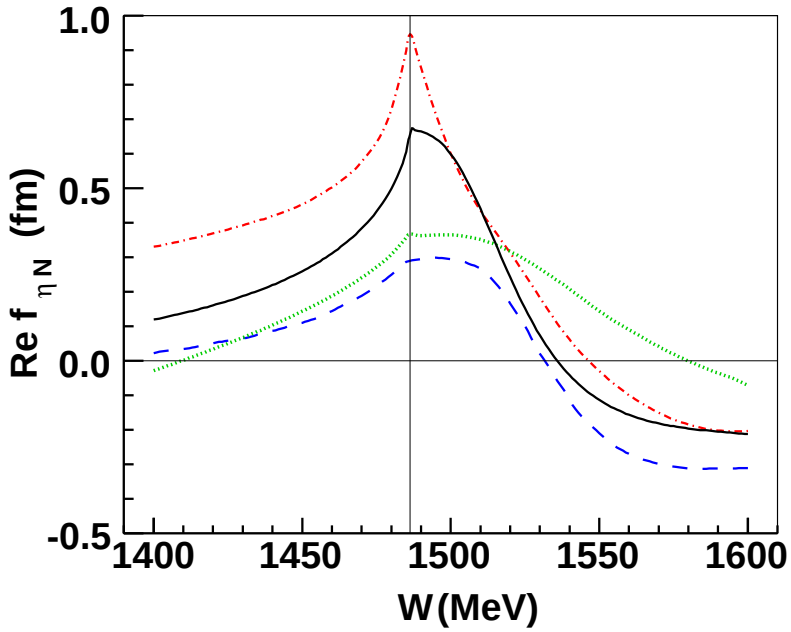

Рисунок 3.2. Результаты для вещественной части амплитуды ηN рассеяния $f_{\eta N}(W)$, полученные в рамках различных моделей. Штрих-пунктирной кривой показан результат работы [74], сплошной – [75], пунктирной – [76], штриховой – [77]. Тонкой вертикальной линией показано пороговое значение энергии W. Взято из работы [71].

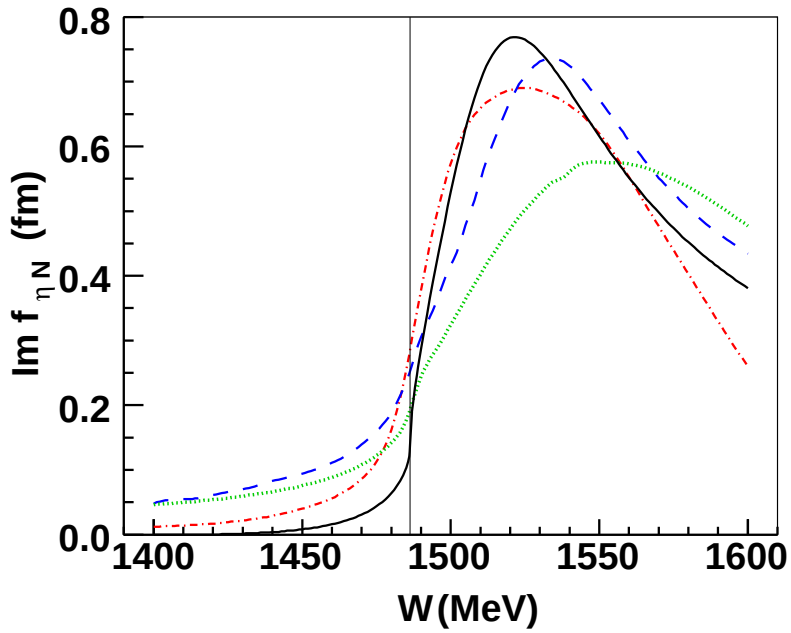

Рисунок 3.3. То же, что на рисунке 3.2, но для мнимой части $f_{\eta N}$.

вводят эффективную энергию $\overline{E}_{\eta N}$, определяя ее как энергию, при которой η-мезон взаимодействует с нуклоном в мишени (внутренняя энергия ηN системы). В отмеченных работах значение $\overline{E}_{\eta N}$ вычислялось по формуле

$$\overline{E}_{\eta N} = [(W_{\eta A} - E_{C,j}(Q))^2 - Q^2]^{1/2} - M_N - M_\eta \approx -E_b - \frac{Q^2}{2M_{C,j}} \frac{M_\eta + M_A}{M_\eta + M_N}\,, \qquad (3.12)$$

где $W_{\eta A}$ – полная энергия системы η-мезон–ядро, $E_{C,j}$, $M_{C,j}$ и $\vec{Q}$ – полная энергия, масса и импульс ядерного кора, получающегося путем удаления из ядра A одного нуклона, $E_b > 0$ – удельная энергия связи ядра. Оценки по формуле (3.12) дают $\overline{E}_{\eta N} \approx -30$ МэВ.

В рамках нашего формализма нет аналога величины $\overline{E}_{\eta N}$. В частности, аргумент $z = E_{\eta N} = E - p''^2/2\mu_{\alpha_3 2}$ пропагатора $\Delta^2_{kl}(z)$ в уравнении (1.22) нельзя напрямую интерпретировать как эффективную внутреннюю энергию системы ηN в ядре. Это связано с тем, что этот пропагатор относится не только к кластеру ηN, но и ко всей системе пяти тел $(\eta N) + N + N + N$, где три нуклона распространяются как свободные частицы. Поэтому, непосредственное сравнение значений $E_{\eta N}$ и $\overline{E}_{\eta N}$ лишено смысла.

По этой причине вопрос об определении характерной энергии взаимодействия η-мезона со связанным нуклоном мы заменяем вопросом о том, в какой области энергий $E_{\eta N}$ значения амплитуды ηN рассеяния оказывают наибольшее влияние на значения длины рассеяния η-мезона на ядре. Для локализации этой области нами был использован следующий прием. Матрица ηN (3.6) умножалась на одну из функций

$$F_L(E) = \left(1 + e^{-(E - d_L + r)/a}\right)^{-1}\,, \qquad (3.13)$$

$$F_R(E) = \left(1 + e^{(E - d_R - r)/a}\right)^{-1}\,. \qquad (3.14)$$

Каждая из функций (3.13) и (3.14) имеет квазиступенчатую форму с профилем, напоминающим потенциал Вудса-Саксона, с параметром толщины поверхности a и радиусом r. Обе функции изображены на рис. 3.4 для $a = 2\,$МэВ, $r = 5\,$МэВ, $d_L = d_R = -100\,$МэВ. Модифицированные таким образом амплитуды $f_{\eta N}(E_{\eta N})F_R(E_{\eta N})$ и $f_{\eta N}(E_{\eta N})F_L(E_{\eta N})$ быстро уменьшаются до нуля, как только $E_{\eta N} > d_R$ и $E_{\eta N} < d_L$, соответственно.

Следует отметить, что выбор функций $F_{L/R}$ в форме (3.13), (3.14), вообще говоря, приводит к нарушению условия унитарности для ηN рассеяния. Действительно, поскольку $F^2_{L/R} \neq F_{L/R}$, оптическая теорема $\mathcal{I}m\, f_{\eta N}(0) = \sum\limits_{\alpha=\pi,\eta} q_\alpha\, |f_{\alpha N}|^2$ для модифицированных амплитуд $f_{\alpha N} \to f_{\alpha N} F_{R/L}$ не выполняется. В этом отношении более подходящим анзацем для $F_{R/L}(E)$ является ступенчатая функция Хевисайда $\theta(\pm(E - d_{L/R}))$. Однако, резкая зависимость этой функции

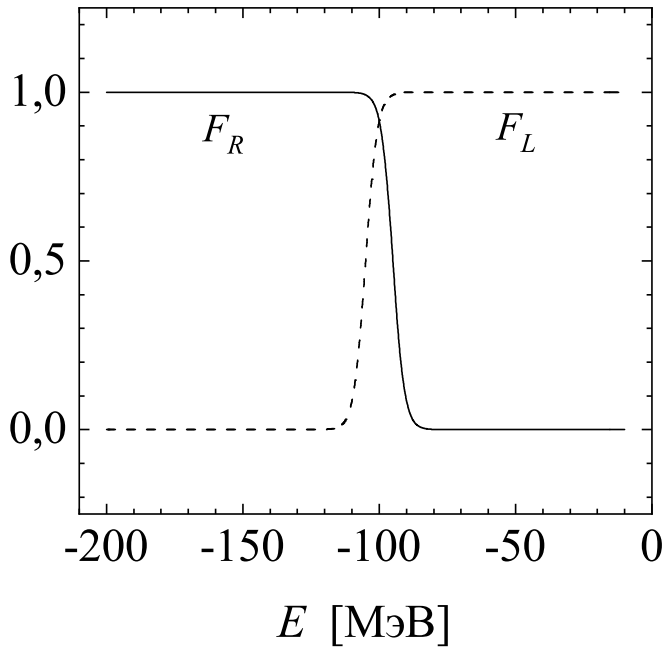

Рисунок 3.4. Функции $F_L(E)$ и $F_R(E)$, определяемые выражениями (3.13) и (3.14) с параметрами $a = 2$ МэВ, $r = 5$ МэВ, $d_L = d_R = -100$ МэВ.

от аргумента приводит к появлению нежелательных осцилляций, при численном нахождении интегралов, содержащих $N(1535)\frac{1}{2}^-$ пропагатор $\Delta^2 = \tau(W)$ (3.7). С другой стороны, поскольку модифицированные амплитуды играют лишь вспомогательную роль, мы не придаем большого значения этому вопросу.

На рис. 3.5 (b), (d), (f) представлены все три длины рассеяния $a_{\eta d}$, $a_{\eta^3\mathrm{He}}$ и $a_{\eta^4\mathrm{He}}$, рассчитанные с модифицированной амплитудой $f_{\eta N}(E_{\eta N})F_R(E_{\eta N})$ как функции параметра d_R. Как видно, для каждого ядра A существует значение $d_R = d_R^A$, справа от которого значение длины рассеяния начинает быстро насыщаться, так что в области $d_R > d_R^A$ оно становится нечувствительным к изменению $f_{\eta N}$. Как уже отмечалось выше, во всех случаях мы имеем $d_R^A < -E_b^A$, где $E_b^A(> 0)$ – энергия связи ядра.

Аналогичная ситуация наблюдается при умножении $f_{\eta N}$ на $F_L(E_{\eta N})$. В этом случае насыщение достигается при $d_L < d_L^A$ (см. рис. 3.5 (a),(c),(e)). Таким образом, для каждой системы ηA существует интервал $E_{\eta N} \in [d_L^A,\, d_R^A]$, в котором значения амплитуды $f_{\eta N}$ дают основной вклад в длину рассеяния $a_{\eta A}$.

Из расчетов, представленных на рис. 3.5, можно сделать два основных вывода.

(i) С увеличением энергии связи ядра интервал $[d_L^A,\, d_R^A]$ систематически сдвигается в сторону более низких энергий $E_{\eta N}$. Это означает, что с ростом массового числа ядра вступают

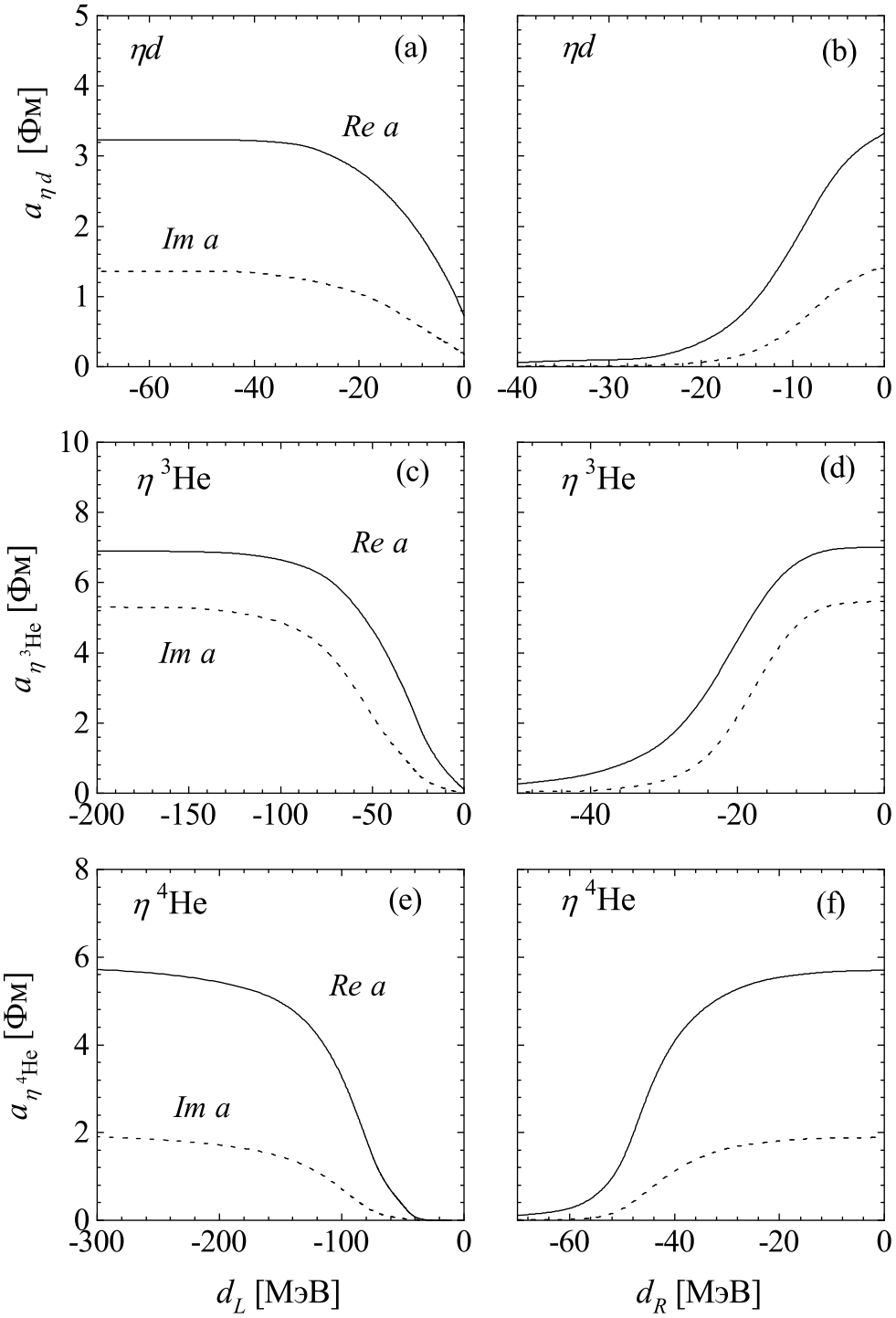

Рисунок 3.5. В левой части рисунка показаны длины рассеяния, рассчитанные с модифицированной ηN амплитудой $f_{\eta N} F_L$, как функции параметра d. Функция F_L определена в уравнении (3.13). В правой части рисунка те же длины, но рассчитанные с амплитудой $f_{\eta N} F_R$, где F_R дается выражением (3.14). Расчеты выполнены с использованием ηN параметров из набора I (таблица 3.1). Для $F_{L/R}$ мы использовались те же параметры a и r, что и на рис. 3.4.

в игру все меньшие значения $f_{\eta N}$. Как следствие, в ^{4}He эффективное взаимодействие η со связанными нуклонами в целом может оказаться слабее, чем в ^{3}He.

(ii) Подгоняя параметры ηN взаимодействия к данным, как описано в следующем разделе, мы фитируем элементарную амплитуду $f_{\eta N}(E_{\eta N})$ не во всем диапазоне $E_{\eta N}$, а только в ограниченном интервале энергий от значений, близких к однонуклонному порогу ηN, до приблизительно -150 МэВ ниже порога. Кроме того, поскольку качество экспериментальных данных ηd и $\eta\,^4$He относительно низкое по сравнению с $\eta\,^3$He, более или менее существенные ограничения на $f_{\eta N}$ идут основном из области $[-70, -12]$ МэВ.

3.3 Результаты и их обсуждение

Ниже приводятся результаты, полученные для системы $\eta-4N$ с помощью решения пятичастичных уравнений АГС. Так как ключевым звеном процедуры решения является сепарабельное разложение ядер интегральных уравнений, оценка качества метода, как и в случае с пятью бозонами, требует исследования сходимости метода при изменении количества сепарабельных членов в разложениях. Этот вопрос обсуждается в первой части параграфа. Далее приводятся сами результаты и дается их физическая интерпретация. В заключительной части дано сравнение с результатами других работ, полученными в рамках оптического и вариационного подходов.

3.3.1 Сходимость сепарабельного разложения

В Таблице 3.2 представлены значения длины рассеяния η^4He, рассчитанные с различным числом N_{α_2} слагаемых в сепарабельном разложении (1.11) амплитуды $X^{\alpha_2}_{\alpha_3,\beta_3}$. Как видно, удовлетворительная точность достигается при $N_1 = N_2 = 6$, $N_3 = N_4 = 8$. В принципе, уже с учетом лишь первых четырех членов в каждом разложении результирующая длина рассеяния находится в пределах менее 2% от точного значения. Таким образом, как и в случае с пятью бозонами, в задаче пяти тел $\eta - 4N$ метод квазичастиц, основанный на методе EDPE из работы [61], оказывается очень эффективным для практических приложений. Необходимое количество сепарабельных слагаемых N_{α_2}, обеспечивающих приемлемую точность, лишь незначительно превышает таковое для задачи четырех тел [60], где сходимость достигается уже с учетом первых четырех-шести слагаемых в каждой амплитуде.

Таблица 3.2. Длина рассеяния $a_{\eta^4\mathrm{He}}$ как функция числа слагаемых N_{α_2} ($\alpha_2 = 1, \ldots, 4$) в сепарабельном разложении (1.11) для амплитуд X^{α_2} в каналах с фрагментацией вида $(4+1)$ и $(3+2)$.

N_1	N_2	N_3	N_4	$a_{\eta\,^4\mathrm{He}}$ [Фм]
2	2	2	2	$4,8 + 0,92\,i$
4	4	4	4	$3,48 + i\,1,47$
4	4	6	6	$3,41 + i\,1,47$
6	6	8	8	$3,38 + i\,1,46$
10	10	12	12	$3,37 + i\,1,46$
20	20	20	20	$3,37 + i\,1,46$

3.3.2 Обсуждение результатов

Используя формализм, изложенный в предыдущих разделах, мы решили задачу трех, четырех и пяти частиц соответственно для ηd, $\eta\,^3$He и $\eta\,^4$He систем. В каждом из рассмотренных случаев полная энергия $\mathcal{E}$ была равна $-E_b^A$, что соответствует упругому порогу рассеяния η-мезона на ядре. Таким образом были вычислены длины рассеяния $a_{\eta A}$ для всех трех указанных выше систем. Для амплитуд упругого рассеяния $f_{\eta A}$ использовалась формула низкоэнергетического разложения

$$f_{\eta A}(q) \approx \frac{a_{\eta A}}{1 - iq\,a_{\eta A}}\,. \tag{3.15}$$

После этого полученные значения $|f_{\eta A}(q)|^2$ были подогнаны под имеющиеся экспериментальные значения путем варьирования параметров ηN g_π, g_η, β_π, β_η, M_0 и $\gamma_{\pi\pi}$ (см. выражения (3.5), (3.7) и (3.9)).

Для анализа использовались экспериментальные данные, относящиеся к области энергий, ограниченной условием $|a_{\eta A}|q \leq 1$, то есть там, где разложение (3.15) остается корректным. В ходе подгонки значение мнимой части $a_{\eta N}$ удерживалось вблизи $0,25$ фм. Это было сделано путем искусственного включения этого значения в набор фитируемых данных с «экспериментальной» ошибкой $0,05$ фм. Это дополнительное ограничение объясняется тем фактом, что мнимая часть $a_{\eta N}$ в значительной степени ограничена оптической теоремой для рассеяния πN, так что ее значение известно с гораздо меньшей неопределенностью по сравнению с реальной частью. Это также видно из результатов различных анализов (см. рис. 3.3), которые предсказывают $\mathcal{I}m\, a_{\eta N} \approx 0,25$ фм с довольно небольшим разбросом в пределах $0,05$ фм.

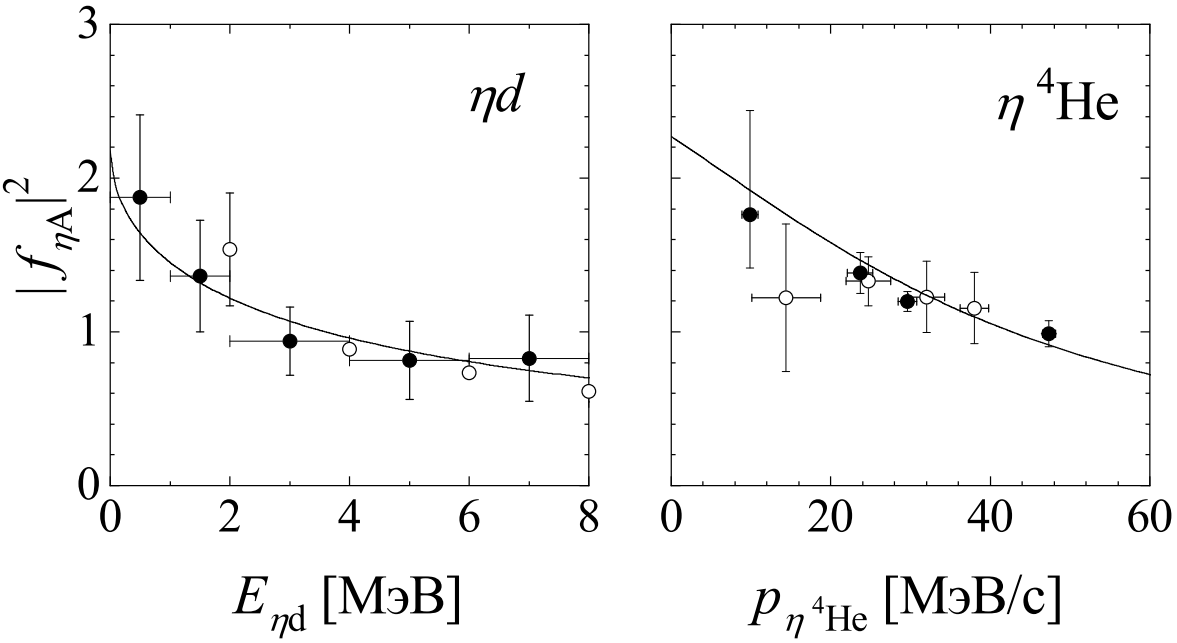

Рисунок 3.6. Квадрат ηA амплитуды $|f_{\eta A}|^2$ для $A = d$ и ^{4}He. Кривыми представлены результаты нашей подгонки. Экспериментальные данные приведены для значений $|f_{\eta A}|^2$, извлеченных из данных для $pn \to \eta d$ [35] и $pd \to \eta pd$ [36] (левая часть рисунка) и $dd \to \eta\, ^4$He [42, 41] (правая часть). Нормировка всех результатов является произвольной.

Результаты нашей подгонки представлены на рис. 3.6 и 3.7. Полное сечение реакции $dp \to \eta\, ^3$He рассчитывалось по формуле

$$\sigma(dp \to \eta\, ^3\mathrm{He}) = \mathrm{const} \cdot \frac{p_\eta}{p_d} |f_{\eta^3\mathrm{He}}|^2 , \tag{3.16}$$

где p_d и p_η - начальный и конечный импульсы в системе центра масс. Как отмечено в работе [38], так как сечение $\sigma(dp \to \eta\,^3\mathrm{He})$ очень быстро растет начиная от порога, результаты измерений при низких энергиях сильно зависит от разброса значений импульса в пучке дейтронов. В связи с этим сечение (3.16) было дополнительно свернуто с распределением по импульсу дейтронов в околопороговой области. В качестве последнего использовалось распределение Гаусса со стандартным отклонением $\sigma_Q = 0,171$ МэВ, как указано в работе [38].

Параметры ηN, полученные в результате подгонки, приведены в Таблице 3.1 (набор II). Результирующее значение χ^2/N_{df}, где N_{df} – число степеней свободы, составляет 1,17. Поскольку численное решение проблемы пяти тел достаточно трудоемко по времени, ошибки определения параметров не вычислялись.

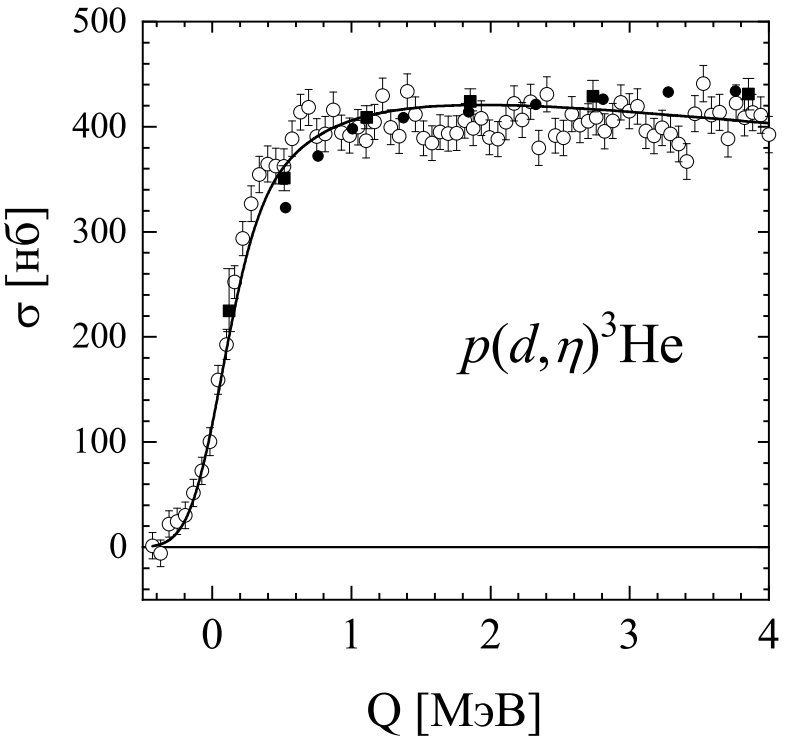

Рисунок 3.7. Полное сечение $dp \to \eta^3\mathrm{He}$ как функция избыточной энергии Q. Экспериментальные данные взяты из работы [37], [38] и [39]. Кривая показывает результат нашего фита.

Полученная таким образом амплитуда $f_{\eta N}$ приведена на рис. 3.8. Ее действительная часть оказывается несколько ниже значения, полученного в работе [24] в рамках K-матричного анализа, хотя полученная нами длина рассеяния

$$a_{\eta N} = 0,70 + i\,0,29 \text{ Фм} \tag{3.17}$$

лишь незначительно отличается от $a_{\eta N} = 0,75 + i\,0,27$ Фм из той же работы [24]. Следует,

однако, иметь в виду, что значение (3.17) является экстраполяцией $f_{\eta N}$ из подпороговой области в нулевую энергию, которая однозначно определяется выбранным нами общим видом амплитуды (3.6). Что касается параметров ηN, из Таблицы 3.1 (набор II), можно видеть, что наша подгонка предпочитает довольно незначительную моду распада $\pi\pi N$ $N(1535)\frac{1}{2}^-$. В то же время импульсы отсечки β_η и β_π, возможно, слишком велики по сравнению с типичными значениями этих параметров, используемыми в других анализах.

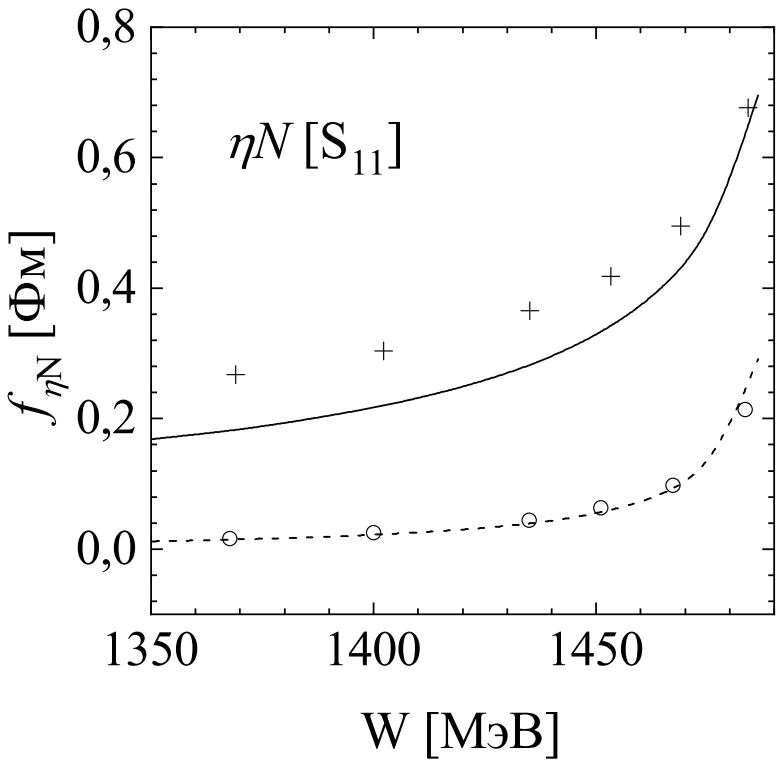

Рисунок 3.8. Амплитуда ηN рассеяния вне массовой поверхности, рассчитанная с параметрами из набора II в таблице 3.1. Обозначения: сплошная кривая: действительная часть, пунктирная кривая: мнимая часть. Данные представляют результаты K-матричного анализа из работы [24].

Для длин η-ядерного рассеяния были получены следующие результаты:

$$\begin{aligned} a_{\eta d} &= 2,16 + i\,1,25 \text{ Фм}, \\ a_{\eta^3\text{He}} &= 3,73 + i\,2,89 \text{ Фм}, \\ a_{\eta^4\text{He}} &= 3,37 + i\,1,46 \text{ Фм}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Как видим, вещественные части всех длин рассеяния положительны ($\mathcal{R}e\, a_{\eta A} > 0$), так что ни в одном из случаев не происходит образование связанного состояния. Если взять модуль

$|a_{\eta A}|$ в качестве количественной характеристики степени притяжения в системе, то наиболее сильное взаимодействие достигается в случае η^3He. В дейтроне оно слабее, очевидно, из-за меньшего числа нуклонов. Несколько неожиданным является тот факт, что взаимодействие между η-мезоном и ядром ^{4}He также характеризуется более слабым притяжением по сравнению с η^3He. Как уже отмечалось в конце раздела 3.2, основной причиной этого является быстрое уменьшение амплитуды рассеяния ηN в области ниже однонуклонного порога, то есть в области $W < 1480$ МэВ. Действительно, поскольку энергия $E_{\eta N}$ ограничена условием $E_{\eta N} < -E_b^A$, для ^{3}He значение $\mathcal{R}e\, f_{\eta N}$ в среднем больше, и эффективное притяжение ηN сильнее, чем в существенно более плотном ядре ^{4}He.

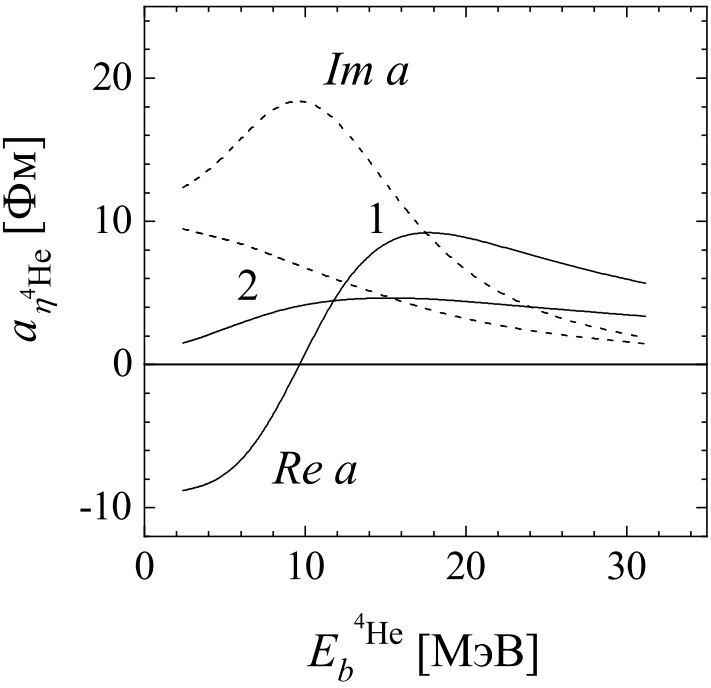

Рисунок 3.9. Зависимость длины рассеяния $\eta\,^4$He от энергии связи ядра ^{4}He. Обозначения: сплошные кривые: действительная часть, пунктирные кривые: мнимая часть. Пары кривых с номерами 1 и 2 получены с наборами ηN параметров, обозначенными в таблице 3.1 как наборы I и II, соответственно.

Как можно заключить из приведенного выше обсуждения, если бы удельная энергия связи ^{4}He была близка к удельной энергии ^{3}He, притяжение в системе $\eta\,^4$He было бы сильнее, чем в $\eta\,^3$He. В связи с этим интересно проследить за изменением длины рассеяния $a_{\eta^4\mathrm{He}}$ при изменении энергии связи ядра ^{4}He. С этой целью мы искусственно ослабили потенциал NN (3.1), умножив его на вещественную постоянную $\alpha \in (0, 1]$ и вычислили длину рассеяния a_{η^4}He для нескольких выбранных значений α. Полученная таким образом зависимость $a_{\eta^4\mathrm{He}}$

от $E_b^{^4\mathrm{He}}$ показана на рис. 3.9 кривыми с номером 2. Как видим, когда энергия связи на нуклон для ядра ^{4}He близка к соответствующему значению для ^{3}He, то есть $E_b^{^4\mathrm{He}}/4 \approx 3$ МэВ, длина рассеяния η^4He заметно превышает длину рассеяния η^3He, что указывает на то, что притяжение в системе η^4He в этом случае оказывается более сильным. Этот результат является вполне ожидаемым, так как с увеличением числа нуклонов при переходе от ^{3}He к ^{4}He у нас появляется дополнительный центр притяжения (четвертый нуклон). Набор ηN параметров I (см. таблицу 3.1) дает $a_{\eta N} = 0,93 + i0,25$ Фм, что изображено на том же рисунке кривыми с номером 1. В этом случае система η^4He оказывается связанной ($\mathcal{R}e\, a_{\eta\,^4\mathrm{He}} < 0$). Здесь действительная часть $a_{\eta^4\mathrm{He}}$ мала, тогда как мнимая часть достигает максимума (кривые 1 на рис. 3.9). Если α последовательно увеличивается, то связанное состояние η^4He превращается в виртуальное состояние. При этой энергии полюс на физическом листе римановой поверхности пересекает унитарный двухчастичный разрез $[E_b^{^4\mathrm{He}}, \infty)$ и переходит на нефизический лист. Когда параметр α приближается к 1, виртуальный полюс удаляется от нулевой энергии, что приводит к уменьшению значения $a_{\eta\,^4\mathrm{He}}$.

3.3.3 Важность N-частичного подхода к исследованию η-ядерных систем

В заключении главы мы хотели бы остановиться на обсуждении важного вопроса о том, почему η-ядерное взаимодействие играет особенно важную роль именно в процессах образования η-мезонов и почему модели, в которых точно учитываются N-частичные аспекты η-ядерных систем, являются «минимальной» теоретической основой для описания этого взаимодействия.

Главной причиной являются найденные выше виртуальные состояния в системе η-мезон–ядро, которые генерируются относительно сильным притяжением между частицами. Мы связываем виртуальное состояние с полюсом, лежащим на нефизическом листе в области отрицательных энергий. Полюс находится вблизи физической области и, следовательно, сильно влияет на процесс рассеяния частиц.

В качестве простого и хорошо известного примера можно привести рассмотренную выше аналитическую структуру амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния в s-волне для двух различных спиновых состояний $^3S_1$ и $^1S_0$, показанную на рис. 3.1. Амплитуда рассеяния как функция энергии определена над двумя римановыми листами, которые связаны через унитарный разрез, начинающийся с нулевой энергии. Физическая область находится на верхнем берегу этого разреза.

Полюс в триплетном состоянии ${}^3S_1$ лежит на физическом листе на вещественной оси энергии при $E = -2,23$ МэВ. В синглетной конфигурации ${}^1S_0$ потенциал слабее, и полюс, пересекая унитарный разрез, перемещается на нефизический лист, генерируя так называемое виртуальное состояние. Виртуальный полюс расположен очень близко к нулевой энергии примерно при -70 КэВ. Эта близость к физической области определяет основные свойства низкоэнергетического нуклон-нуклонного взаимодействия. В частности, это приводит к резкому увеличению сечения нейтрон-протонного рассеяния с приближением энергии к нулю (см. левый график на рис. 3.1). Триплетное состояние, полюс которого находится дальше от разреза, оказывает менее существенное влияние на поведение сечения.

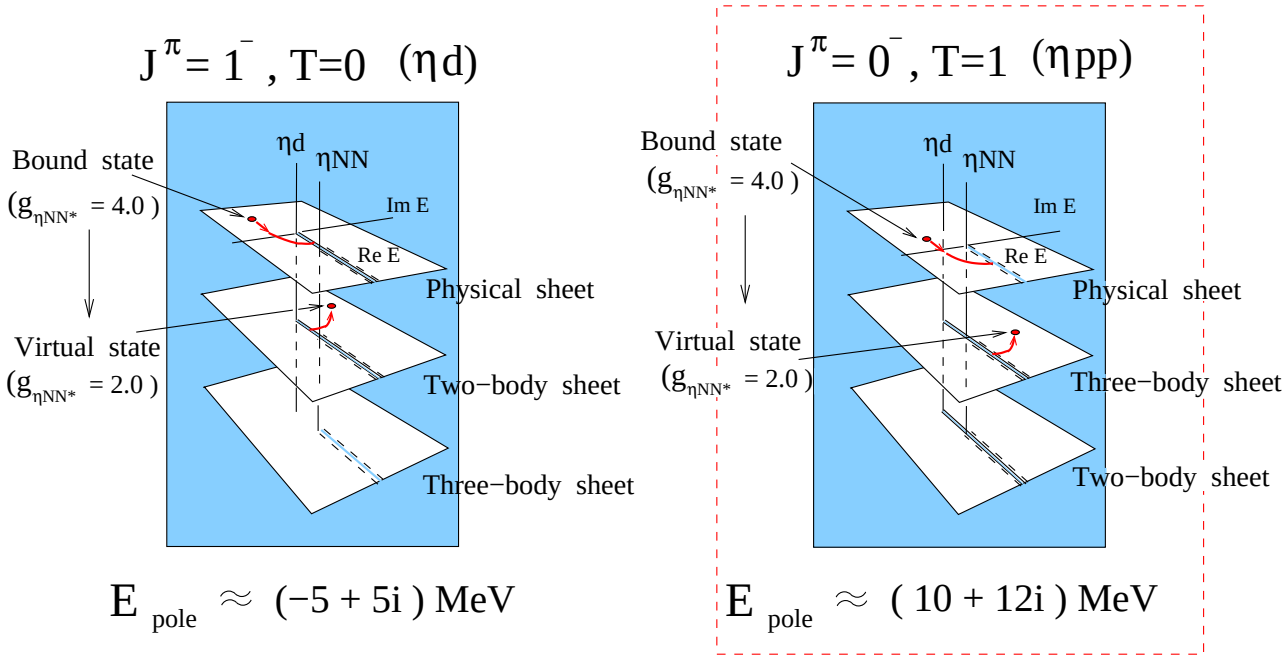

Рисунок 3.10. Структура римановой поверхности для амплитуды рассеяния в трехчастичной системе ηNN, как функции полной кинетической энергии E, равной полной энергии системы за вычетом масс частиц. Показаны результаты для конфигураций $T(J^\pi) = 0(1^-)$ (левый рисунок) и $T(J^\pi) = 1(0^-)$. Красные линии – траектории движения полюса при изменении значения константы связи $g_{\eta NN^*}$. Через N^* обозначен резонанс $N(1535)\frac{1}{2}^-$. В нижней части рисунка приведены полюсные значения энергии, соответствующие истинному (согласующемуся с имеющимися моделями) значению $g_{\eta NN^*}$.

Включение η-мезона удобнее всего рассмотреть на примере системы ηNN, риманова поверхность для которой изображена на рис. 3.10. Для систем с большим числом нуклонов структура римановой поверхности значительно сложнее, но качественно ситуация остает-

ся той же. Вблизи пороговой области имеется два разреза, первый начинается с порога ηd, а второй, трехчастичный разрез, – от неупругого порога ηNN. Таким образом, риманова поверхность состоит из четырех основных листов. На рис. 3.10 показаны только три из них, которые являются ближайшими к физической области и имеют непосредственное отношение к нашей задаче.

В триплетной конфигурации $J^\pi = 1^-$ имеется связанное состояние в NN-подсистеме (дейтрон), и поэтому физическая область непосредственно связана с нефизическим двухчастичным листом. В синглетном состоянии, когда в двухчастичных подсистемах отсутствуют связанные состояния, физическая область непосредственно примыкает к трехчастичному листу.

Непосредственные расчеты показывают, что система ηNN является не связанной. Понять ее динамические особенности легко, если рассмотреть полюсную структуру соответствующей трехчастичной амплитуды в зависимости от параметра $g_{\eta N}$ (выражение (3.5) с $\alpha = \eta N$), определяющего интенсивность притяжения в системе ηN. Искусственное увеличение значения $g_{\eta N}$ приводит к тому, что в системе ηNN появляется связанное состояние с полюсом на физическом листе. Последующее уменьшение $g_{\eta N}$ до физически разумного значения приводит к тому, что полюс движется вдоль вещественной оси, пересекает унитарный разрез и переходит на нефизический лист, генерируя таким образом виртуальный уровень в системе. Существование виртуального состояния ηNN вблизи физической области определяет динамический особенности системы ηNN и в общем случае η-ядерной системы с бóльшим числом нуклонов.

Первым следствием близости полюса является существенное увеличение выхода медленных η-мезонов, наблюдаемое во множестве процессах, в которых эти мезоны образуются.

Во-вторых, пертурбативная трактовка η-ядерного взаимодействия, например, в рамках модели, где это взаимодействие сводится к простой сумме однократных взаимодействий мезона с отдельными нуклонами ядра, оказывается несостоятельной. Причина заключается в том, что вблизи полюса ряд многократного рассеяния сходится медленно, и поэтому сумма нескольких первых членов, которые удерживаются в пертурбативном подходе, сильно отличается от суммы всего ряда. Другими словами, для сохранения точности требуется вычисление большого числа членов разложения, и поэтому более подходящей моделью является теория трех тел, в которой эта сумма вычисляется точно.

3.4 Сравнение с результатами других авторов

Ниже приводится сравнение (главным образом качественное) наших результатов с результатами, полученными в других работах на основе двух принципиально различных моделей – модели оптического потенциала и модели, в которой используется вариационная процедура (стохастическая вариационная модель). Основное внимание уделено обсуждению возможных причин, ведущих к значительным различиям результатов. Для лучшего понимания этих причин дается короткое описание основных концепций обеих моделей.

Метод оптического потенциала. Для анализах мезон-ядерных взаимодействий в области низких и средних энергий, как правило, используется оптическая модель с потенциалом в форме Кисслинджера-Эриксонов [78, 79]:

$$
\begin{aligned}
&2\omega U(\omega,r) = \\
&\quad -4\pi\{[b(\omega,r)+B(\omega,r)] - \Delta\cdot\frac{c(\omega,r)+C(\omega,r)}{1+4\pi g'[c(\omega,r)+C(\omega,r)]}\Delta \\
&\quad +\frac{\omega}{2M_N}\Delta[c(\omega,r)+\frac{1}{2}C(\omega,r)]\}\,. \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Здесь параметры b и c линейно зависят от ядерной плотности и связаны с фазами соответственно s- и p-волнового рассеяния мезонов на нуклонах. Параметры B и C, квадратично зависящие от плотности, характеризуют вклад механизмов двухчастичного поглощения в мезон-ядерное рассеяние. Как известно, характерной особенностью πN взаимодействия является, с одной стороны, его относительная слабость в s-волне, а с другой стороны сильное p-волновое притяжение, обусловленное сильной связью πN канала с резонансом $\Delta(1232)\frac{3}{2}^+$. Помимо этого, важную роль в пион-ядерном взаимодействии играет двухнуклонное поглощение $\pi NN \to NN$, что соответствует большим значениям параметров B и C в выражении (3.19). Эти особенности пион-ядерного взаимодействия приводят к тому, что соответствующий потенциал (3.19) является существенно нелокальным ($|b/c| \gg 1$) и нелинейно зависящим от ядерной плотности.

В отличие от пиона, главной особенностью взаимодействия η-мезонов с нуклоном является его преимущественно s-волновой характер, уже отмеченный в разделе 3.1. Поэтому в η-ядерном оптическом потенциале локальный член (первое слагаемое в выражении (3.19)) оказывается доминирующим ($|b/c| \ll 1$). Что касается механизма двухнуклонного поглощения η-мезонов, то согласно оценкам, приведенным в работе [7], его роль исключительно мала. Поэтому ведущим абсорбтивным каналом в η-ядерном взаимодействии является не реальное

поглощение η-мезонов системами нуклонов, а неупругие одночастичные процессы, которые осуществляются по схеме $\eta N \to \pi N$.

Таким образом, оптический потенциал взаимодействия η-мезонов с ядрами является локальным и линейно зависящим от ядерной плотности:

$$2\omega U(\omega, r) = -4\pi b_0(\omega)\rho(r)\,. \tag{3.20}$$

В импульсном приближении параметр $b_0(\omega)$ можно связать с s-волновой амплитудой ηN рассеяния $f_{\eta N}(W_{\eta N})$ в виде

$$b_0 = -\frac{M_N}{W_{\eta N}} f_{\eta N}(W_{\eta N})\,. \tag{3.21}$$

Исходя из изложенного выше материала, касающегося основных принципов оптического подхода, можно ожидать, что предсказания оптической модели будут в значительной мере отличаться от полученных нами результатов точного решения задачи о взаимодействии η-мезона с ядром. Это связано, в первую очередь, с тем, что оптическая модель в ее «стандартном» виде не учитывает сильную зависимость однонуклонной амплитуды $f_{\eta N}$ от энергии. Как правило, для расчетов связанных состояний в формуле (3.21) используется приближение

$$f_{\eta N}(W) \approx f_{\eta N}(0) = a_{\eta N}\,, \tag{3.22}$$

где $a_{\eta N}$ - длина ηN рассеяния. Такое приближение во всех случаях приводит к сильной переоценке притяжения в системе η-мезон–ядро. В частности, в работе [16] замена амплитуды рассеяния ее значением при нулевой энергии приводит к формированию связанного состояния уже для системы $\eta\,^3$He, а для достаточно больших значений вещественной части длины рассеяния $\mathcal{R}e\, a_{\eta N} \approx 1$ Фм даже для ηd, что полностью противоречит имеющимся экспериментальным данным.

В работе [68] была предпринята попытка ввести в «стандартную» оптическую модель наиболее важные поправки: зависимость $f_{\eta N}$ от энергии, а также поправки на отдачу нуклонов. Вместе с тем, как было отмечено во введении к работе, в таком подходе остается открытым вопрос о выборе эффективной энергии взаимодействия η-мезона с со связанным в ядре нуклоном. Формула (3.12) в случае ^{4}He дает в качестве оценки $W \approx -30$ МэВ, что существенно отличается от наших результатов. Напомним, что, согласно нашим расчетам, энергия, при которой амплитуда $f_{\eta N}$ входит в интегральные уравнения, находится в интервале от -150 до -30 МэВ.

Оптическая модель [68] с упомянутыми выше поправками предсказывает существование связанного состояния $\eta\,^4$He с энергией связи около -10 МэВ и шириной 50 МэВ. Однако,

как уже неоднократно отмечалось, имеющиеся на сегодня экспериментальные данные не подтверждают этот результат.

Стохастический вариационный метод. Насколько нам известно, сегодня существует только одна модель, позволяющая решить уравнения Шредингера для системы $\eta - 4N$ в рамках вариационного подхода. Вариационная процедура реализуется с помощью так называемого стохастического вариационного метода (СВМ), который в свое время был предложен в работе [70]. Детали использования метода для расчета взаимодействия η-мезонов с трех- и четырехнуклонной системой изложены в работах [71, 72]. Здесь мы коротко опишем только общие положения, связанные с его особенностями.

В методе СВМ пробная волновая функция системы A нуклонов $|J^\pi\rangle$, где J – спин ядра, $\pi = \pm 1$ – его четность, раскладывается в ряд (10) по системе коррелированных гауссиан

$$\langle \vec{\eta}_1, \ldots, \vec{\eta}_{A-1} \,|J^\pi\rangle = \sum_{\{\lambda\}k} c_k^{\{\lambda\}} e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^\dagger B_k^{\{\lambda\}}\vec{x}} F_k^{\{\lambda\}}(\hat{\eta}_1, \ldots, \hat{\eta}_{A-1})\,, \tag{3.23}$$

где $\vec{x}$ представляет собой набор $(A-1)$ векторных координат Якоби $\vec{\eta}_1, \ldots, \vec{\eta}_{A-1}$, а $\{\lambda\}$ есть сокращенное обозначение всех квантовых чисел, характеризующих определенный канал.

B_k представляет собой положительно определенную матрицу размерности $(A-1)\times(A-1)$. Она зависит от нелинейных параметров $B_k \equiv B_{ij}^k$. Произведение $\vec{x}^\dagger\, B_k^{\{\lambda\}}\vec{x}$ можно записать как

$$\vec{x}^\dagger\, B_k^{\{\lambda\}}\vec{x} = \sum_{ij=1}^{A-1} B_{ij}^k \vec{\eta}_i \cdot \vec{\eta}_j\,. \tag{3.24}$$

Необходимо отметить, что оптимизация большого количества параметров для достижения минимума является, вообще говоря, довольно сложной задачей. Однако, поиск минимума заметно упрощается в методе СВМ, в котором используется стохастический подход. Стохастическая процедура СВМ организована в три этапа: (i) генерируется пробная функция путем случайного выбора параметров B_{ij} и каналов; (ii) оценивается его полезность по энергии, делается выбор в пользу сохранения либо отбрасывания; (iii) процедура «проб и ошибок» повторяется до тех пор, пока полученный таким образом базис не будет обеспечивать сходимость метода.

С помощью метода СВМ авторы работ [71, 72] решили соответствующие четырех- и пятичастичные уравнения Шредингера для систем $\eta - 3N$ и $\eta - 4N$. Согласно полученным ими результатам, связанное состояние $\eta\,^4$He образуется уже при значении вещественной части длины ηN рассеяния $\mathcal{R}e\, a_{\eta N} \approx 0,7$ МэВ, в то время, как для появления связи в системе $\eta\,^3$He требуется более сильное притяжение между η-мезоном и нуклонами ядра. Этот вывод,

очевидно, противоречит нашим результатам, которые, как отмечалось выше, указывают на более слабое притяжение в случае $\eta\,^4$He по сравнению с $\eta\,^3$He.

Для выяснения возможной причины разногласия введем понятие эффективного ηN потенциала. А именно, поскольку расчеты в работах [71, 72] выполняются в координатном представлении с локальным потенциалом ηN, приведем наш нелокальный потенциал (3.4) к аналогичному виду. С этой целью решим систему релятивизованных уравнений Шредингера для двух связанных каналов $\eta N - \pi N$.

$$-\frac{d^2}{dr^2}\,\phi_\alpha(r) + 2\omega_\alpha \sum_{\beta=\eta,\pi} \int_0^\infty v_{\alpha\beta}(E_{\eta N}, r, r')\phi_\beta(r')rr'\,dr' = q_\alpha^2\phi_\alpha(r)\,, \qquad (3.25)$$
$$\alpha = \eta,\, \pi,$$

где ω_α - полная энергия мезона α, а $v_{\alpha\beta}(r, r')$ - преобразование Фурье потенциала (3.4):

$$v_{\alpha\beta}(E_{\eta N}, r, r') = \frac{g_\alpha g_\beta}{4\pi}\frac{\beta_\alpha^2\beta_\beta^2}{W - M_0}\frac{e^{-\beta_\alpha r}}{r}\frac{e^{-\beta_\beta r'}}{r'}\,, \qquad (3.26)$$

где

$$W = E_{\eta N} + M_N + m_\eta\,. \qquad (3.27)$$

После того, как получено решение $\phi_\alpha(r)$, $\alpha = \eta, \pi$, уравнения (3.25), определим эквивалентный локальный потенциал ηN посредством замены

$$v_{\eta N}(E_{\eta N}, r) = \frac{1}{\phi_\eta(r)} \sum_{\beta=\eta,\pi} \int_0^\infty v_{\eta\beta}(E_{\eta N}, r, r')\phi_\beta(r')rr'\,dr'\,. \qquad (3.28)$$

Легко видеть, что использование (3.28) в (3.25) для $\alpha = \eta$ дает уравнение Шредингера в канале ηN с локальным комплексным потенциалом $v_{\eta N}(E_{\eta N}, r)$. Его решение, очевидно, совпадает со значениями «нелокальной» волновой функции $\phi_\eta(r)$ во всей области r.

Наконец, чтобы сравнить наш локальный потенциал (3.28) с тем, который использовался в работе [72], мы усреднили оба потенциала по ядерной плотности, взяв для ядра ^{4}He плотность, даваемую моделью гармонического осциллятора $\rho(r) \sim \exp(-r^2/r_0^2)$ с параметром $r_0 = 1,38$ Фм. Результаты представлены на рис. 3.11 в области $E_{\eta N} \in [-150, -30]$, в которой, как было найдено в предыдущем разделе, однонуклонная амплитуда $f_{\eta N}$ дает основной вклад в длину рассеяния $a_{\eta^4\mathrm{He}}$. В работе [72] потенциал $v_{\eta N}(E_{\eta N}, r)$ берется в ядре при фиксированной энергии $E^0_{\eta N}$, величина которой зависит от некоторого скалирующего параметра Λ. Детали, связанные с нахождением Λ изложены в работе [72]. Значение этого потенциала показано на том же рисунке пунктирными линиями для двух значений Λ, используемых в

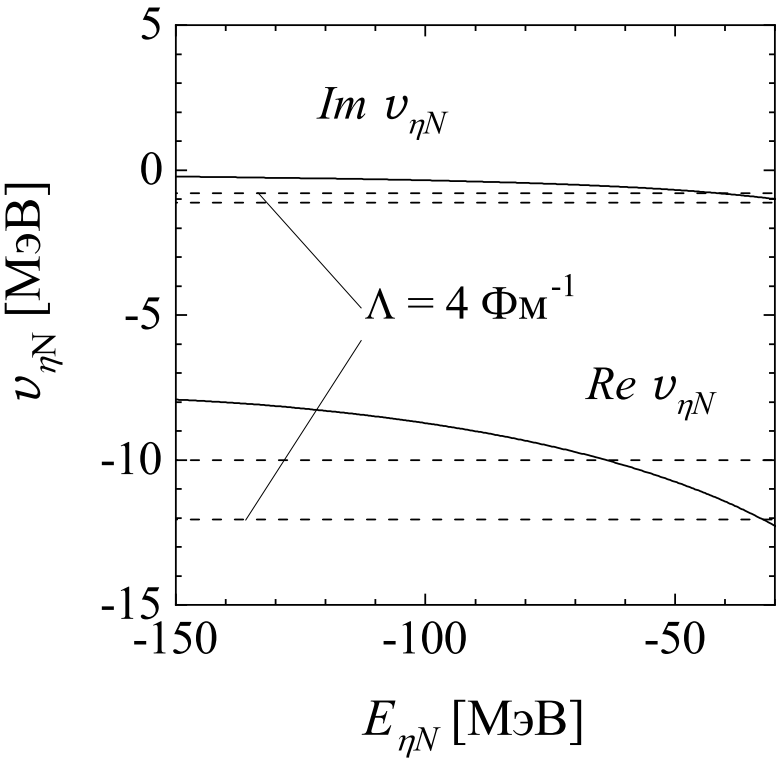

Рисунок 3.11. Сплошные кривые: действительная и мнимая части локального потенциала ηN $v_{\eta N}(E_{\eta N}, r)$ (3.28), который эквивалентен нашему сепарабельному потенциалу (3.4). Пунктирные линии: потенциал $v_{\eta N}(W, r)$ из работы [72], вычисленный при постоянном значении аргумента W для двух значений скалирующего параметра $\Lambda = 2$ Фм$^{-1}$ и $\Lambda = 4$ Фм$^{-1}$. Все потенциалы усреднены по плотности ядра ^{4}He, как пояснено в тексте.

[72]. Как видно из рисунка, наш потенциал $v_{\eta N}$ слабее почти во всей рассматриваемой области $E_{\eta N}$. Это различие, по всей видимости, является основной причиной, по которой наши результаты качественно отличаются от результатов, полученных в работах [71, 72].

3.5 Заключение к главе 3

Таким образом, в данной работе взаимодействие в системе $\eta - 4N$ впервые рассчитывается корректно с учетом малочастичных аспектов. Применяя сепарабельное представление сначала к ядрам $(3+1)$ и $(2+2)$, а затем к ядрам $(4+1)$ и $(3+2)$, мы решили соответствующую проблему пяти тел посредством сведения динамических уравнений АГС к связанной системе интегральных уравнений, имеющих структуру уравнений Липпмана-Швингера для связанных каналов.

Предсказываемое значение $Re\, a_{\eta^4\mathrm{He}}$ положительно и оказывается меньше $Re\, a_{\eta^3\mathrm{He}}$. Этот

результат объясняется эффективным ослаблением ηN-взаимодействия в ядерной среде с увеличением ее плотности. Согласно нашим расчетам, увеличение сил притяжения за счет дополнительного нуклона в ^{4}He компенсируется сильным подавлением подпорогового ηN-взаимодействия в более плотном ядре. Результирующее притяжение в системе $\eta - 4N$ оказывается недостаточным для образования связанного состояния η^4He, по крайней мере, с параметрами ηN, использованными в данных расчетах. Это обстоятельство должно быть основной причиной того, что η-ядра до сих пор не обнаружены.

Заключение

В диссертации представлен метод решения задачи пяти тел, основанный на уравнениях Альта-Грассбергера-Сандхаса. Его ключевым звеном является сепарабельное разложение амплитуд в двух-, трех- и четырехчастичных подсистемах. Получающиеся таким образом уравнения имеют форму двухчастичных уравнений Липпмана-Швингера для многоканальной задачи. В качестве неоднородных членов в этих уравнениях выступают обобщенные потенциалы, описывающие обмен частицей или группой частиц между двумя кластерами, либо два независимых кластера, между которыми возможен обмен энергией.

До настоящего времени решение задачи пяти тел системы основывалось главным образом на традиционных методах, таких как вариационная модель, оболочечная модель, методы резонирующих групп, различные стохастические методы, в которых также используется вариационная процедура. Основной недостаток этих методов заключается в том, что зачастую трудно оценить ошибку, связанную с использованием вариационного решения, поскольку мы так или иначе вынуждены использовать ограниченный класс пробных функций.

Представленный нами систематический подход к решению задачи пяти тел, основанный на формализме Альта-Грассбергера-Сандхаса, лишен этих принципиальных недостатков. Как отмечено во введении, существенным достоинством метода является его наглядность и удобство практического использования. С его помощью может быть найдено точное решение как для связанных состояний (не только основных, но и возбужденных), так и решена задача рассеяния. Область применения метода АГС к физическим проблемам достаточно широка: от молекулярных и атомных систем до многокварковых конфигураций, в которых взаимодействие описывается через потенциал с конфайнментом.

Перечислим основные результаты диссертации:

1. Получен аппарат для решения задачи пяти тел в рамках метода Альта-Грассбергера-Сандхаса. Ключевым звеном является сепарабельное разложение ядер интегральных уравнений. Как и в случае трех и четырех частиц, представление ядра в виде суммы сепарабельных слагаемых позволяет свести исходные уравнения к системе уравнений типа Липпмана-Швингера для связанных каналов.

- Получены выражения для эффективных потенциалов, описывающих взаимодействия в подсистемах, возникающих при разбиении исходной системы пяти частиц по схеме (1+4) и (2+3). Наряду с потенциалами, имеющими структурные аналоги в четырехчастичной задаче, в задаче пяти тел появляются потенциалы, имеющие принципиально новую структуру (см. формулы (1.41) и рис. 1.4). В этой связи, пятичастичные уравнения не могут быть получены путем простой экстраполяции эффективных потенциалов задачи четырех тел на систему с $N = 5$.
- Рассмотрен случай, когда в системе имеются тождественные частицы. Проведена необходимая процедура симметризации и получены уравнения для симметризованных амплитуд.

2. Полученные в формальной части работы уравнения применены к исследованию взаимодействия в системе пяти тождественных бозонов.

   - В качестве примера вычислены энергии связи системы. Расчеты с потенциалом (2.1) предсказывают наличие двух связанных состояний 0^+ с энергиями

   $$E = 144,3 \text{ МэВ} \quad \text{и} \quad E^* = 61,0 \text{ МэВ}.$$

   - Исследована сходимость полученных результатов при изменении количества членов, учитываемых в сепарабельном разложении. Непосредственные расчеты показывают, что первый член разложения обеспечивает точность около 2%. Такая быстрая сходимость объясняется довольно быстрым уменьшением абсолютных величин собственных значений $|\lambda_n|$, а также тем, что знаки членов сепарабельного ряда в этом случае чередуются, что приводит к значительному сокращению вклада членов с номерами $n > 1$.

3. Решена задача о взаимодействии η-мезонов с системой четырех нуклонов. Исследовано взаимодействие η-мезона с ядром ^{4}He. Вычислена длина рассеяния η-мезона на ядре ^{4}He.

   - Анализ зависимости результатов от числа сепарабельных членов в разложении ядер интегральных уравнений, как и в случае пяти бозонов, демонстрирует сходимость, вполне достаточную для практических целей. В целом, удержание в разложении первых 4-6 членов обеспечивает точность лучше 1 %.

- Исследована зависимость амплитуды η-ядерного взаимодействия от подпорогового поведения элементарной амплитуды $f_{\eta N}$. Расчеты выполнены для ядер d, ^{3}He и ^{4}He. Показано, что в каждом из трех случаев имеется сравнительно широкая, но тем не менее ограниченная область энергий, при которых значения $f_{\eta N}$ оказывают существенное влияние на величину $f_{\eta A}$.

- Проведена подгонка значений $f_{\eta N}$ под имеющиеся экспериментальные данные для квадрата $|f_{\eta A}|^2$. Для этого были решены уравнения АГС для систем ηd, η^3He и η^4He. В каждом случае амплитуда $f_{\eta N}$ аппроксимировалась брейт-вигнеровской функцией с варьируемыми параметрами – константами связи, массой и полной шириной распада в адронные каналы. Полученные таким образом значения оказались близкими к результатам K-матричного анализа каналов ηN, πN и $\pi\pi N$ [30].

- Согласно полученным результатам притяжение в системе η^4He слабее, чем в η^3He. Этот результат находит естественное объяснение, если принять во внимание отмеченную ранее сильную зависимость амплитуды $f_{\eta N}$ от энергии в подпороговой области. Ввиду более высокой плотности ядра ^{4}He по сравнению с ^{3}He, эффективная энергия, при которой происходит взаимодействие η-мезона с нуклонами, оказывается ниже. Этот результат, в частности, позволяет объяснить почему эффект взаимодействия в конечном состоянии в реакции $dd \to \eta\,^4$He оказывается слабее, чем в процессах, в которых образуется система η^3He, например $dp \to \eta\,^3$He.

Таким образом, проведенные нами исследования показывают невозможность образования η-ядер с массовым числом $A \leq 4$. Отметим, что этот результат получен в рамках точного решения квантовомеханической задачи нескольких тел и впервые ему дано ясное физическое толкование. Можно предположить, что если эта тенденция (то есть уменьшение эффективной энергии ηN с ростом A) сохраняется в более тяжелых ядрах ($A > 4$). В этом случае вопрос о существовании η-ядер может быть закрыт.

Различные теории, не только кварковые, но и чисто феноменологические предсказывают наличие сильного притягивающего взаимодействия с нуклонами не только для η, но и для тяжелых чармированных мезонов η_c. В этом случае взаимодействие имеет уже не резонансный характер, как в случае ηN, а обусловлено одноглюонным обменом между кварками, входящими в состав чармированного мезона η_c и нуклона. Следствием этой особенности является экзотический характер $\eta_c N$ взаимодействия. А именно, оно является очень интенсивным, но при этом характеризуется довольно малым радиусом действия сил. В связи с этим, есте-

ственным является вопрос о существовании связанных состояний чармированных мезонов с ядрами и возможности их экспериментального исследования.

Кроме того, полученные нами уравнения в силу своей универсальности и эффективности открывают широкие возможности для решения аналогичных задач взаимодействия в других системах адронов. Сюда следует отнести пятинуклонные системы (в первую очередь ^{5}He и ^{5}Li), гиперядра, а также системы, содержащие ядро ^{4}He и K-мезон, η'-мезон и другие мезоны.

В заключение, автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю доктору ф.-м. наук Фиксу А.И. за всестороннюю поддержку и постоянный интерес к результатам исследований.

Автор также признателен научному коллективу Исследовательской школы физики высокоэнергетических процессов Томского политехнического университета, в особенности, профессорам Галажинскому А.В. и Трифонову А.Ю. за помощь в работе над диссертацией.

Приложения

I. Формализм Альта-Грассбергера-Сандхаса

Ниже дан краткий обзор уравнений Альта-Грассбергера-Сандхаса в применении к задаче трех тел. Нашей основной целью является изложение как самого метода получения уравнений со связными ядрами, так и введение основных терминов и обозначений, используемых в содержательной части работы.

Введем свободный Гамильтониан (оператор кинетической энергии)

$$H_0 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{k}_i^{\,2}}{2m_\alpha} = \frac{\vec{P}^{\,2}}{2M} + \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2\mu_\alpha} + \frac{\vec{q}_\alpha^{\,2}}{2M_\alpha}\,, \quad \alpha = 1,2,3. \tag{A.1}$$

Здесь через $\vec{k}_\alpha$ обозначен импульс частицы с номером α, $\vec{P}$ есть импульс центра масс всей системы, $\vec{p}_\alpha$ – относительный импульс частиц в подсистеме $\alpha = (\beta\gamma)$ и $\vec{q}_\alpha$ – импульс относительного движения частицы α и пары $\alpha = (\beta\gamma)$. Легко убедиться, что состояния $|\vec{P}, \vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha\rangle$ являются взаимно ортогональными и образуют полный набор, то есть

$$\langle \vec{P}', \vec{p}_\alpha{}', \vec{q}_\alpha{}' | \vec{P}, \vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha\rangle = \delta(\vec{P}' - \vec{P})\,\delta(\vec{p}_\alpha{}' - \vec{p}_\alpha)\,\delta(\vec{q}_\alpha{}' - \vec{q}_\alpha) \tag{A.2}$$

и

$$\int \frac{d\vec{P}}{(2\pi)^3}\frac{d\vec{p}_\alpha}{(2\pi)^3}\frac{d\vec{q}_\alpha}{(2\pi)^3}\; |\vec{P}, \vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha\rangle\langle \vec{P}, \vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha| = 1\,. \tag{A.3}$$

Так как полный импульс системы $\vec{P}$ сохраняется, будем считать его равным нулю и в дальнейшем опустим. Функции $|\vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha\rangle$ являются, очевидно, собственными функциями оператора H_0:

$$H_0|\vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha\rangle = E_\alpha |\vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha\rangle\,, \tag{A.4}$$

где $E_\alpha = \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2\mu_\alpha} + \frac{\vec{q}_\alpha^{\,2}}{2M_\alpha}$ – кинетическая энергия, соответствующая разбиению α.

Потенциал взаимодействия частиц внутри группы $\alpha = (\beta\gamma)$ будем обозначать v_α. Состояние в котором имеются две взаимодействующие частицы в группе α, образующие связанное (или резонансное) состояние и невзаимодействующая с ними (свободная) частица α, будем обозначать как

$$|\phi_\alpha\rangle = |\varphi_\alpha\rangle|\vec{q}_\alpha\rangle\,. \tag{A.5}$$

Здесь $|\varphi_\alpha\rangle$ есть волновая функция связанного (резонансного) состояния и $|\vec{q}_\alpha\rangle$ описывает свободное движение частицы α относительно пары $\alpha = (\beta\gamma)$. Функция $|\phi_\alpha\rangle$ является собственной

функцией канального Гамильтониана

$$H_\alpha = H_0 + v_\alpha \,, \tag{A.6}$$

то есть

$$H_\alpha |\phi_\alpha\rangle = E_\alpha |\phi_\alpha\rangle \,, \tag{A.7}$$

где $E_\alpha = -\varepsilon_\alpha + \frac{\vec{q}_\alpha{}^2}{2M_\alpha}$, и $\varepsilon_\alpha > 0$ представляет собой энергию связи частиц в состоянии $|\varphi_\alpha\rangle$.

В подсистеме α рассеяние может быть описано соответствующей t-матрицей

$$t_\alpha(z) = v_\alpha + v_\alpha g_\alpha(z) v_\alpha \,, \tag{A.8}$$

где g_α – функция Грина частиц $\alpha = (\beta\gamma)$ (резольвента оператора H_α). Аналогично двухчастичной задаче t_α удовлетворяет уравнению Липпмана-Швингера

$$t_\alpha(z) = v_\alpha + v_\alpha g_0(z) t_\alpha(z) \,, \tag{A.9}$$

которое имеет формальное решение

$$t_\alpha = (1 - v_\alpha g_0(z))^{-1} v_\alpha, \,, \tag{A.10}$$

где g_0 – свободная функция Грина, относящаяся к подсистеме $\alpha = (\beta\gamma)$.

Выбрав конкретное разбиение α, полный Гамильтониан H системы системы трех частиц можно представить в виде

$$H = H_\alpha + v_\beta + v_\gamma = H_\alpha + \overline{v}_\alpha \,, \tag{A.11}$$

где $\overline{v}_\alpha \equiv v_\beta + v_\gamma$, $\beta \neq \gamma \neq \alpha$.

Формально мы можем записать уравнение Липпмана-Швингера для задачи трех тел по аналогии с двухчастичной задачей

$$T(z) = V(z) + V G_0(z) T \,, \tag{A.12}$$

где $G_0(z) = (z - H_0)^{-1}$ есть свободная функция Грина (резольвента оператора кинетической энергии) для трех частиц и

$$V = v_1 + v_2 + v_3 \,. \tag{A.13}$$

Так как V представляет собой сумму двухчастичных потенциалов, в импульсном представлении для каждого слагаемого в этой сумме будем иметь

$$\langle \vec{p}_\alpha{}', \vec{q}_\alpha{}' | v_\alpha | \vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha \rangle = \delta(\vec{q}_\alpha - \vec{q}_\alpha{}') \langle \vec{p}_\alpha{}' | v_\alpha | \vec{p}_\alpha \rangle \,. \tag{A.14}$$

Очевидно, что итерируя уравнение (А.12) мы всегда будем иметь множители вида $\delta(\vec{q}_\alpha - \vec{q}_\alpha{}')$ в правой части. Например, после первой итерации получим

$$T = \sum_\alpha v_\alpha + \sum_\alpha v_\alpha G_0 \sum_\beta v_\beta + \sum_\alpha v_\alpha G_0 \sum_\beta v_\beta G_0 T\,. \tag{А.15}$$

Другими словами, ядро уравнения (А.12) не имеет конечной нормы Шмидта, что эквивалентно нарушению условия единственности решения.

Отметим, что появление δ-функций обусловлено наличием в ядрах уравнения (А.15) диагональных элементов вида $v_\alpha G_0 v_\alpha$. Исключить эти элементы позволяет метод Фаддеева. Следуя этому методу, расщепим уравнение (А.12) на три уравнения, введя вспомогательные операторы T_α так что

$$T_\alpha = v_\alpha + v_\alpha G_0 T\,. \tag{А.16}$$

Легко убедиться, что

$$T = T_1 + T_2 + T_3\,. \tag{А.17}$$

Выделим в правой части уравнения (А.4) член с номером α и перенесем его в левую часть. Будем иметь

$$T_\alpha - v_\alpha G_0 T_\alpha = v_\alpha + v_\alpha G_0 \sum_{\beta\neq\alpha} T_\beta\,. \tag{А.18}$$

Далее воспользуемся формальным решением уравнения Липпмана-Швингера для двухчастичных операторов t_α (А.10). Умножая уравнение (А.18) слева на оператор $(1 - v_\alpha G_0)^{-1}$, получим уравнения Фаддеева для компонент T_α

$$T_\alpha = t_\alpha + t_\alpha G_0 \sum_{\beta\neq\alpha} T_\beta \tag{А.19}$$

или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t_1 & t_1 \\ t_2 & 0 & t_2 \\ t_3 & t_3 & 0 \end{pmatrix} G_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \tag{А.20}$$

В импульсном представлении операторные уравнения (А.11) дают систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} T_\alpha(\vec{p}\,', \vec{q}\,', \vec{p}, \vec{q}) &= t_\alpha(\vec{p}\,', \vec{q}\,', \vec{p}, \vec{q}) + \\ &\sum_{\beta\neq\alpha} \int \frac{d\vec{p}\,''}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{q}\,''}{(2\pi)^3} \frac{t_\alpha(\vec{p}\,', \vec{q}\,', \vec{p}\,'', \vec{q}\,'')}{z - \frac{q''^2}{2M_\beta} - \frac{p''^2}{2\mu_\beta}} T_\beta(\vec{p}\,'', \vec{q}\,'', \vec{p}, \vec{q})\,. \end{aligned} \tag{А.21}$$

Так как операторы действуют только в подсистеме α, то есть

$$t_\alpha(\vec{p}\,',\vec{q}\,',\vec{p},\vec{q}) \equiv \langle \vec{p}\,',\vec{q}\,'|t_\alpha|\vec{p},\vec{q}\rangle = \delta(\vec{q}-\vec{q}\,')\langle \vec{p}\,'|\hat{t}(z-\frac{q^2}{2M_\alpha})|\vec{p}\rangle \tag{A.22}$$

где $\hat{t}_\alpha$ - двухчастичный оператор, ядра уравнений (A.21) по-прежнему содержат δ-функции. Можно, однако, показать, что дефект, приводящий к нарушению условия единственности решения уравнения (A.12) в последнем уравнении устранен. Действительно, первая итерация уравнения (A.11) дает

$$T_\alpha = t_\alpha + t_\alpha G_0 \sum_{\beta\neq\alpha} t_\beta + t_\alpha G_0 \sum_{\beta\neq\alpha} t_\beta G_0 \sum_{\gamma\neq\beta} T_\gamma \,. \tag{A.23}$$

Как видим, ядра уравнений (A.23) содержат только произведения вида $t_\alpha G_0 t_\beta$, где $\alpha \neq \beta$, так что δ-функции устраняются. Отметим также, что вместо потенциалов v_α в новых уравнениях содержатся двухчастичные t-матрицы t_α, которые теперь уже понимаются как операторы в трехчастичном пространстве.

Следует также отметить, что двухчастичные t-матрицы t_α содержатся в уравнениях Фаддеева вне массовой поверхности из-за энергетического сдвига $z-\frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha}$ и из-за того, что произведение $t_\alpha g_0 T_\beta$ содержит в себе интегрирование по всем возможным промежуточным состояниям

$$|\vec{p}\,''\rangle\,|\vec{q}\,''\rangle \tag{A.24}$$

при условии

$$\frac{p^2}{2\mu_\alpha} \neq z - \frac{q''^2}{2M_\alpha} \neq \frac{p''^2}{2\mu_\alpha} \,. \tag{A.25}$$

Уравнения для компонент волновой функции трех частиц можно вывести из уравнения для резольвенты G полного гамильтониана системы трех частиц H (A.1):

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z) V G(z) \,. \tag{A.26}$$

Получающиеся три уравнения, которые обеспечивают корректные граничные условия для волновой функции, имеют вид [73]

$$\begin{aligned} |\Psi_\alpha^{(+)}\rangle &= |\phi_\alpha\rangle + G_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha=1}^{3} v_\beta |\Psi_\alpha^{(+)}\rangle \,, \\ |\Psi_\alpha^{(+)}\rangle &= G_\beta \sum_{\gamma\neq\beta=1}^{3} v_\gamma |\Psi_\alpha^{(+)}\rangle \,, \\ |\Psi_\alpha^{(+)}\rangle &= G_\gamma \sum_{\delta\neq\gamma=1}^{3} v_\delta |\Psi_\alpha^{(+)}\rangle \,, \end{aligned} \tag{A.27}$$

где индексы $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ принимают значения 1,2,3. Функция $|\Psi_\alpha^{(+)}\rangle$ представляет собой расходящуюся волну в канале α, который в асимптотической области содержит частицу α и

невзаимодействующую с ней пару двух других частиц и состояние системы в нем описывается функцией $|\phi_\alpha\rangle$ (A.5). Эта функция является собственной для полного Гамильтониана $H = H_0 + V$

$$H|\Psi_\alpha^{(+)}\rangle = E|\Psi_\alpha^{(+)}\rangle\,. \tag{A.28}$$

Функция Грина $G_\alpha(z)$ есть резольвента канального Гамильтониана H_α:

$$G_\alpha(z) = \frac{1}{z - H_\alpha}\,. \tag{A.29}$$

Рассмотрим теперь матричные элементы операторов перехода между канальными состояниями $|\phi_\alpha\rangle$ и $|\phi_\beta\rangle$:

$$\langle\phi_\beta|U_{\beta\alpha}|\phi_\alpha\rangle \equiv \langle\phi_\beta|\overline{V}_\beta|\Psi_\alpha^{(+)}\rangle\,. \tag{A.30}$$

Матричные элементы оператора U на энергетической поверхности определяют S-матрицу перехода $|\phi_\alpha\rangle \to |\phi_\beta\rangle$

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} - 2\pi\delta(E_\alpha - E_\beta)\langle\phi_\beta|U_{\beta\alpha}|\phi_\alpha\rangle \tag{A.31}$$

и, таким образом, однозначно решают задачу рассеяния. Для $U_{\alpha\alpha}$ будем иметь

$$U_{\alpha\alpha}|\phi_\alpha\rangle = \overline{V}_\alpha|\Psi_\alpha^{(+)}\rangle = (v_\beta + v_\gamma)|\Psi_\alpha^{(+)}\rangle\,. \tag{A.32}$$

Используя последние два уравнения из (A.27) получим

$$\begin{aligned} U_{\alpha\alpha}|\phi_\alpha\rangle &= v_\beta G_\beta \overline{V}_\beta|\Psi_\alpha^{(+)}\rangle + v_\gamma G_\gamma \overline{V}_\gamma|\Psi_\alpha^{(+)}\rangle \\ &= v_\beta G_\beta U_{\beta\alpha}|\phi_\alpha\rangle + v_\gamma G_\gamma U_{\gamma\alpha}|\phi_\alpha\rangle\,. \end{aligned} \tag{A.33}$$

Аналогично для $U_{\beta\alpha}$ $(\beta \neq \alpha)$ найдем

$$U_{\beta\alpha}|\phi_\alpha\rangle = v_\alpha|\phi_\alpha\rangle + v_\alpha G_\alpha U_{\alpha\alpha}|\phi_\alpha\rangle + v_\gamma G_\gamma U_{\gamma\alpha}|\phi_\alpha\rangle\,. \tag{A.34}$$

В выражениях (A.33) и (A.34) $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Следует отметить, что для конкретного входного канала значение α фиксировано и задача сводится к решению системы, состоящей из одного уравнения типа (A.33) и двух уравнений типа (A.34). Таким образом, как и в случае уравнений Фаддеева (A.11), имеем систему трех связанных уравнений для элементов $U_{\alpha\alpha}$, $U_{\beta\alpha}$ и $U_{\gamma\alpha}$.

Воспользуемся далее равенствами

$$v_\alpha|\phi_\alpha\rangle = G_0^{-1}|\phi_\alpha\rangle\,, \quad v_\alpha G_\alpha = t_\alpha G_0\,, \tag{A.35}$$

где t_α, как и ранее, есть t-матрица, определяющая взаимодействие частиц в группе $\alpha = (\beta\gamma)$. Объединяя уравнения (A.33) и (A.34) в одно, запишем

$$U_{\beta\alpha}|\phi_\alpha\rangle = (1 - \delta_{\beta\alpha})G_0^{-1}|\phi_\alpha\rangle + \sum_\gamma (1 - \delta_{\beta\gamma})t_\gamma G_0 U_{\gamma\alpha}|\phi_\alpha\rangle\,. \tag{A.36}$$

В итоге приходим к стандартному виду уравнений Альта-Грассбергера-Сандхаса (АГС)

$$U_{\beta\alpha} = (1 - \delta_{\beta\alpha})G_0^{-1} + \sum_{\gamma}(1 - \delta_{\beta\gamma})\, t_\gamma G_0 U_{\gamma\alpha}\,. \tag{A.37}$$

II. Сепарабельное разложение

Как показывается в квантовой теории рассеяния, двухчастичная t-матрица имеет полюс при энергии z, равной энергии связанного состояния двух частиц ε_b, и, что важно, вычет в полюсе факторизуется. В итоге, в операторном виде имеем

$$t(z) \to \frac{V|\varphi_b\rangle\langle\varphi_b|V}{z-\varepsilon_b}\,, \tag{B.1}$$

где V – двухчастичный потенциал и $|\varphi_b\rangle$ – волновая функция связанного состояния. Другими словами, оператор $t(z)$ вблизи энергии связи имеет сепарабельный вид. Эта особенность приводит к существенному упрощению решения задачи трех (а также большего числа) частиц.

Рассмотрим задачу, в которой взаимодействие описывается сепарабельным потенциалом

$$V = \lambda|g\rangle\langle g|\,. \tag{B.2}$$

В этом случае уравнение Липпмана-Швингера

$$t = V + Vg_0T \tag{B.3}$$

решается алгебраически и дает

$$t(z) = |g\rangle\tau(z)\langle g|\,, \tag{B.4}$$

где

$$\tau(z) = (\lambda^{-1} - \langle g|g_0|g\rangle)^{-1}\,. \tag{B.5}$$

Переходя к трехчастичному пространству, запишем

$$\langle\vec{p}\,',\vec{q}\,'|t_\alpha(z)|\vec{p},\vec{q}\rangle = \delta(\vec{q}-\vec{q}\,')\langle\vec{p}\,'|\hat{t}_\alpha(z-\frac{q^2}{2M_\alpha})|\vec{p}\rangle\,, \tag{B.6}$$

где M_α, как и ранее, есть приведенная масса системы, содержащей частицу α и пару $\alpha=(\beta\gamma)$. Учитывая (B.4), будем иметь

$$\langle\vec{p}\,',\vec{q}\,'|t_\alpha(z)|\vec{p},\vec{q}\rangle = \delta(\vec{q}-\vec{q}\,')g(\vec{p}\,')\tau_\alpha(z-\frac{q^2}{2M_\alpha})g(\vec{p})\,. \tag{B.7}$$

Отщепление зависимости от импульсов $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$ позволяет свести уравнения АГС, зависящие от двух векторных переменных, к уравнениям с одной переменной. Действительно введем представление (B.4) в уравнение АГС (A.37):

$$U_{\beta\alpha} = (1-\delta_{\beta\alpha})G_0^{-1} + \sum_\gamma(1-\delta_{\beta\gamma})\,|g_\gamma\rangle\tau_\gamma\langle g_\gamma|G_0U_{\gamma\alpha}\,. \tag{B.8}$$

Как видим, во втором члене справа зависимость от $\vec{p}$ и $\vec{q}$ факторизуется уже на этом этапе:

$$\sum_{\gamma\neq\beta}\langle\vec{p}\,|g_\gamma\rangle\tau_\gamma(z-\frac{q^2}{2M_\alpha})\langle\vec{q}\,|\langle g_\gamma|G_0U_{\gamma\alpha}\,. \tag{B.9}$$

Беря уравнение (B.8) в обкладки $\langle g_\beta|G_0\ldots G_0|g_\alpha\rangle$, получим

$$\begin{aligned}\langle g_\beta|G_0U_{\beta\alpha}G_0|g_\alpha\rangle &= (1-\delta_{\beta\alpha})\langle g_\beta|G_0|g_\alpha\rangle + \\ &+\sum_{\gamma\neq\beta}\langle g_\beta|G_0|g_\gamma\rangle\tau_\gamma\langle g_\gamma|G_0U_{\gamma\alpha}G_0|g_\alpha\rangle\,.\end{aligned} \tag{B.10}$$

В полученном выражении отдельные члены по-прежнему являются операторами в пространстве относительных импульсов $|\vec{q}_\alpha\rangle$. Вводя обозначения

$$X_{\beta\alpha} \equiv \langle g_\beta|G_0U_{\beta\alpha}G_0|g_\alpha\rangle\,, \tag{B.11}$$

$$Z_{\beta\alpha} \equiv (1-\delta_{\beta\alpha})\langle g_\beta|G_0|g_\alpha\rangle\,, \tag{B.12}$$

придем к интегральному уравнению

$$\begin{aligned}\langle\vec{q}_\beta|X_{\beta\alpha}(z)|\vec{q}_\alpha\rangle &= \langle\vec{q}_\beta|Z_{\beta\alpha}(z)|\vec{q}_\alpha\rangle \\ &+\sum_{\gamma\neq\beta}\int\frac{d\vec{q}_\gamma}{(2\pi)^3}\langle\vec{q}_\beta|Z_{\beta\gamma}(z)|\vec{q}_\gamma\rangle\tau_\gamma(z-\frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma})\langle\vec{q}_\gamma|X_{\gamma\alpha}(z)|\vec{q}_\alpha\rangle\,.\end{aligned} \tag{B.13}$$

Наконец, амплитуда перехода в процессе рассеяния принимает вид

$$\langle\phi_\beta|U_{\beta\alpha}|\phi_\alpha\rangle = \langle\vec{q}_\beta|\langle g_\beta|G_0U_{\beta\alpha}G_0|g_\alpha\rangle|\vec{q}_\alpha\rangle = \langle\vec{q}_\beta|X_{\beta\alpha}|\vec{q}_\alpha\rangle\,, \tag{B.14}$$

где матрица X берется на энергетической поверхности. Отметим, что интегральное уравнение (B.13) является трехмерным и его размерность можно уменьшить до единицы разложением по парциальным волнам.

Сравнивая (B.13) с уравнениями для двухчастичной t-матрицы (B.3) можно видеть, что уравнение (B.13) описывает задачу трех тел как эффективную двухтельную задачу: подсистема рассматривается как одна частица. Здесь, если опустить индексы каналов, $X_{\beta\alpha}$ можно сравнивать с двухчастичным T-оператором, а $Z_{\beta\alpha}$ с эффективным двухчастичным потенциалом. Последнее становится очевидным, если учесть, что на массовой поверхности

$$\langle\vec{q}_\beta|\langle g_\beta|G_0|g_\alpha\rangle|\vec{q}_\alpha\rangle = \langle\phi_\beta|v_\beta|\phi_\alpha\rangle\,. \tag{B.15}$$

Величина τ_γ соответствующая свободному двухчастичному пропагатору g_0, описывает свободное движение частицы γ относительно связанной подсистемы $\gamma=(\alpha\beta)$. Так как τ_γ зависит от энергии подсистемы, из общей энергии трехчастичной системы z вычитается кинетическая энергию свободной частицы.

Отметим еще одно качественное сходство τ_γ и g_0. В импульсном представлении для системы двух частиц имеем

$$\langle \vec{q}\,|g_0(z)|\vec{q}\,'\rangle = \frac{\delta(\vec{q}-\vec{q}\,')}{z-\frac{q^2}{2\mu}}. \tag{B.16}$$

Здесь g_0 - свободный пропагатор, имеющий полюс при энергии z, равной энергии относительного движения двух частиц. Аналогичное утверждение верно и для τ_γ, для которого можно получить

$$\langle \vec{q}\,|\tau_\gamma(z-\frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma})|\vec{q}\,'\rangle = \frac{\delta(\vec{q}-\vec{q}\,')}{(z-\frac{q^2}{2M_\gamma}-E_\gamma^B)\,\langle g_\gamma|g_0(E_\gamma^B)g_0(z-\frac{q^2}{2M_\gamma})|g_\gamma\rangle}\,, \tag{B.17}$$

откуда наличие полюса и сходная роль g_0 и τ_γ в соответствующих выражениях становятся очевидными.

III. Учет тождественности частиц

Ниже амплитуды перехода определены с учетом тождественности частиц. Вначале рассмотрен более простой случай, когда система состоит из пяти тождественных бозонов. Затем процедура симметризации применяется к системе, содержащей мезон и четыре нуклона.

Система 5 тождественных бозонов. Набор различных каналов определятся разбиениями системы пяти частиц на подсистемы типа $1+4$ и $2+3$. Отмечая бозоны номерами от 1 до 5 будем иметь следующие состояния

(1) 5 состояний $(1+4)$: $|1\,(2345)\rangle$, $|2\,(3451)\rangle$, $|3\,(4512)\rangle$,
$|4\,(5123)\rangle$, $|5\,(1234)\rangle$, обозначены $1(i), i=\overline{1,5}$

(2) 10 состояний $(2+3)$: $|(12)\,(345)\rangle$, $|(13)\,(245)\rangle$, $|(14)\,(235)\rangle$, $|(15)\,(234)\rangle$,
$|(23)\,(145)\rangle$, $|(24)\,(135)\rangle$, $|(25)\,(134)\rangle$,
$|(34)\,(125)\rangle$, $|(35)\,(124)\rangle$,
$|(45)\,(123)\rangle$, обозначены $2(ij)$, $i<j=\overline{1,5}$.

Здесь и в дальнейшем предполагается, что волновые функции подсистем, входящих в разбиения, уже должным образом симметризованы. Для получения замкнутой системы уравнений достаточно рассмотреть амплитуды перехода из всех указанных выше состояний в одно выбранное состояние, например $1_1=|1\,(2345)\rangle$. Тогда система (1.44) состоит из 15 уравнений, которые с учетом используемой выше нумерации изображены на рис. С.12

Ввиду тождественности бозонов волновые функции различных состояний, относящихся к одному и тому же каналу, могут быть получены друг из друга непосредственно с помощью перестановки координат частиц. Это приводит к очевидным равенствам для потенциалов:

$$Z_{1(i),1(j)} = Z_{1(1),1(2)}\,, \quad i,j=\overline{1,5}\,, \tag{C.1}$$

$$Z_{1(i),2(ij)} = Z_{1(1),2(12)}\,, \quad i,j=\overline{1,5}\,, \tag{C.2}$$

$$Z'_{1(i),2(jk)} = Z_{1(1),2(23)}\,, \quad i,j,k=\overline{1,5}\,. \tag{C.3}$$

Как легко видеть, уравнения для амплитуд $X_{1(i)}$ $(i=2,\ldots,5)$ являются одинаковыми. То же самое относится к уравнениям для $X_{2(ij)}$ $(i,j=1,\ldots,5)$.

Определим далее диагональную и недиагональную амплитуды равенствами

$$X^D_{11}=X_{1(1)}\,, \quad X^N_{11}=X_{1(2)}\,. \tag{C.4}$$

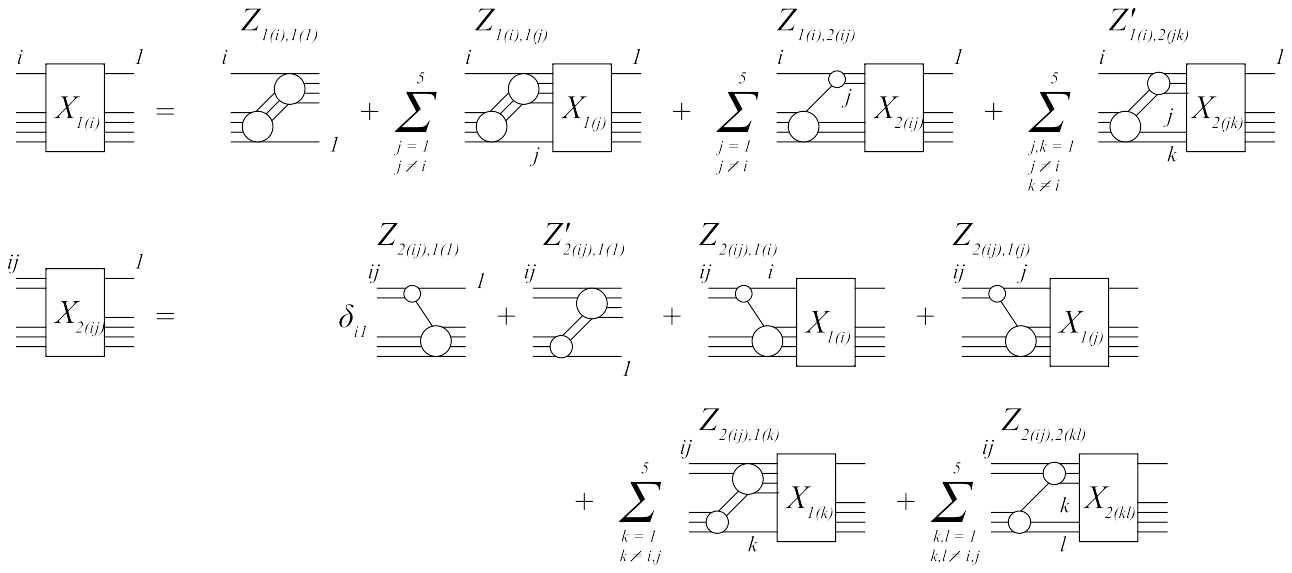

Рисунок С.12. Графическое изображение системы уравнений (1.44).

Тогда для суммы

$$X_{11} = X_{11}^D + 4X_{11}^N \tag{С.5}$$

будем иметь

$$X_{11} = 4Z_{11} + 4Z_{11}\Theta_1 X_{11} + (2Z_{12} + 3Z'_{12})\Theta_2 X_{21}\,, \tag{С.6}$$

где амплитуда X_{21}, определенная как

$$X_{21} = \sum_{ij} X_{2(ij)}\,, \tag{С.7}$$

удовлетворяет уравнению

$$X_{21} = 4Z_{21} + 6Z'_{21} + 2(2Z_{21} + 3Z'_{21})\Theta_1 X_{11} + 3Z_{22}X_{21}\,. \tag{С.8}$$

Уравнения (С.6) и (С.8) являются искомыми симметризованными уравнениями, в которых корректно учтена тождественность бозонов. Их графическое представление дано на рис. 2.3.

Система $\eta-4N$. Процедура симметризации уравнений для системы $\eta-4N$ несколько сложнее в связи с тем, что одна из частиц (η-мезон) отличается от остальных (нуклонов). Для удобства будем располагать нуклоны в циклическом порядке, что избавляет нас от необходимости следить за изменением знака при переходе от одного состояния к другому. Обозначая нуклоны как частицы 1, 2 и 3, получаем следующие состояния, имеющих отношение к задаче

(i) 1 состояние в канале 1: $|\eta(1234)\rangle$, обозначено 1 ,

(ii) 4 состояния в канале 2: $|(1\eta)(234)\rangle$, $|(2\eta)(341)\rangle$, $|(3\eta)(412)\rangle$, $|(4\eta)(123)\rangle$, обозначены $|(i\eta)(jkl)\rangle = 2(i)$ $(i = \overline{1,4})$,

(iii) 6 состояний в канале 3: $|(12)(\eta34)\rangle$, $|(13)(\eta24)\rangle$, $|(14)(\eta23)\rangle$, $|(23)(\eta14)\rangle$, $|(24)(\eta13)\rangle$, $|(34)(\eta12)\rangle$, обозначены $|(ij)(\eta kl)\rangle = 3(ij)$ $(i,j = \overline{1,4})$,

(iv) 4 состояния в канале 4: $|1(\eta234)\rangle$, $|2(\eta134)\rangle$, $|3(\eta124)\rangle$, $|4(\eta123)\rangle$, обозначены $|i(\eta jkl)\rangle = 4(i)$ $(i = \overline{1,4})$,

Здесь как и ранее предполагается, что волновые функции подсистем, содержащих два, три или четыре нуклона, уже должным образом симметризованы. Рассмотрим набор амплитуд, определяющих переходы в канал 1 из каналов 1, $2(i)$ и $3(ij)$ и $4(i)$. Обозначим их, соответственно, как X_1, $X_{2(i)}$, $X_{3(ij)}$ и $X_{4(i)}$. Тогда, уравнения (1.44) принимают вид

$$X_1 = \sum_{j=1}^{4} Z_{1;2(j)}\Theta_{2(j)}X_{2(j)} + \sum_{j,k=1}^{4} Z_{1;3(jk)}\Theta_{3(jk)}X_{3(jk)} + \sum_{j=1}^{4} Z_{1;4(j)}\Theta_{4(j)}X_{4(j)}\,,$$

$$\begin{aligned} X_{2(i)} &= Z_{2(i);1} + Z_{2(i);1}\Theta_1 X_1 + \sum_{j=1}^{4} Z_{2(i);3(ij)}\Theta_{3(ij)}X_{3(ij)} + \\ &+ \sum_{j=1}^{4} Z_{2(i);4(j)}\Theta_{4(j)}X_{4(j)} + Z'_{2(i);4(i)}\Theta_{4(i)}X_{4(i)}\,, \end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned} X_{3(ij)} &= Z_{3(ij);1} + Z_{3(ij);1}\Theta_1 X_1 + Z_{3(ij);2(i)}\Theta_{2(i)}X_{2(i)} + Z_{3(ij);2(j)}\Theta_{2(j)}X_{2(j)} + \\ &+ Z_{3(ij);3(kl)}\Theta_{3(kl)}X_{3(kl)} + Z_{3(ij);4(i)}\Theta_{4(i)}X_{4(i)} + Z_{3(ij);4(j)}\Theta_{4(j)}X_{4(j)}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{4(i)} &= Z_{4(i);1} + Z_{4(i);1}\Theta_1 X_1 + \sum_{j=1}^{4} Z_{4(i);2(j)}\Theta_{2(j)}X_{2(j)} + Z'_{4(i);2(j)}\Theta_{2(j)}X_{2(j)} + \\ &+ \sum_{j=1}^{4} Z_{4(i);3(ij)}\Theta_{3(ij)}X_{3(ij)} + Z'_{4(i);3(ij)}\Theta_{3(ij)}X_{3(ij)} + Z_{4(i);4(j)}\Theta_{4(j)}X_{4(j)}\,. \end{aligned}$$

где $i,j = 1,\ldots,4$. В приведенных выражениях подразумевается, что индексы, обозначенные разными буквами, не могут быть равны друг другу. Смысл эффективных потенциалов $Z_{\alpha_i\beta_j}$ объясняется схематическим представлением на рис. 1.3. Выполняя циклические перестановки координат нуклонов получим соотношения между потенциалами. Например

$$Z_{2(1);2(2)} = \langle 1(\eta234)|Z|2(\eta341)\rangle = \langle 2(\eta341)|Z|4(\eta123)\rangle = Z_{2(2);2(4)}\,. \tag{C.10}$$

Повторяя данную процедуру, получаем общее соотношение для $i \neq j$

$$Z_{2(i);2(j)} = Z_{2(1);2(2)} \,. \tag{C.11}$$

Таким же образом, используя циклическую перестановку вместе с перестановкой нуклонов в внутри симметризованного $3N$ состояния, получаем для перехода $2 \to 3$ следующие общие соотношения

$$Z_{2(i);3(ij)} \;\; = \;\; Z_{2(1);3(12)} \,. \tag{C.12}$$

Учитывая далее очевидные тождества

$$\Theta_{\alpha(1)} = \Theta_{\alpha(2)} = \Theta_{\alpha(3)} = \Theta_{\alpha(4)} \equiv \Theta_\alpha \,, \quad (\alpha = 1, 2, 4) \tag{C.13}$$

$$\Theta_{3(12)} = \Theta_{3(13)} = \Theta_{3(14)} = \ldots \equiv \Theta_3 \,, \tag{C.14}$$

и определяя антисимметризованные амплитуды в каналах 1, 2, 3 и 4 как

$$\begin{aligned} X_{11} &= X_1 \,, \\ X_{\alpha 1} &= \sum_{i=1}^{4} X_{\alpha(i)} \,, \quad \text{для } \alpha = 2, 4 \,, \\ X_{31} &= \sum_{i,j=1}^{4} X_{3(ij)} \,, \end{aligned} \tag{C.15}$$

и потенциалы

$$\begin{aligned} &Z_{12} = Z_{1;2(i)}, \;\; Z_{13} = Z_{1;3(12)}, \;\; Z_{14} = Z_{1;4(2)} \\ &Z_{23} = Z2(1)3(12), \;\; Z_{24} = Z2(1)4(2) \\ &Z_{34} = Z_{3(1);4(12)} \,, \end{aligned} \tag{C.16}$$

приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} X_{11} &= 4Z_{12}\Theta_2 X_{21} + 6Z_{13}\Theta_3 X_{31} + 4Z_{14}\Theta_4 X_{41} \,, \\ X_{21} &= Z_{21} + Z_{21}\Theta_1 X_{11} + 3Z_{23}\Theta_3 X_{31} + (3Z_{24} + Z'_{24})\Theta_4 X_{41} \,, \\ X_{31} &= Z_{31} + Z_{31}\Theta_1 X_{11} + 2Z_{32}\Theta_2 X_{21} + Z_{33}\Theta_3 X_{31} + 2(Z_{34} + Z'_{34})\Theta_4 X_{41} \,, \\ X_{41} &= Z_{41} + Z_{41}\Theta_1 X_{11} + (3Z_{42} + Z'_{42})\Theta_2 X_{21} + (Z_{43} + Z'_{43})\Theta_3 X_{31} + \\ &+ 3Z_{44}\Theta_4 X_{41} \,, \end{aligned} \tag{C.17}$$

графическое изображение которой дано на рис. 1.9.

Список таблиц

1 Значения длины ηN рассеяния $a_{\eta N}$, полученные в рамках резонансных моделей (PM), T- или K-матричных подходов, а также методом киральных эффективных лагранжианов (χEL). В ссылках указан только первый автор вместе с годом публикации. В последней колонке приведены каналы, включенные в анализы. Данные взяты из работы [5]. 9

2 Продолжение таблицы 1. 10

1.1 Используемая в работе нумерация разбиений системы $\eta - 4N$. 20

2.1 Нумерация разбиений для системы пяти одинаковых бозонов. 37

3.1 Параметры, определяющие взаимодействие частиц в связанных каналах $\eta N - \pi N$ согласно выражениям (3.4) – (3.5). В первой строке перечислены параметры, которые были подогнаны в работе [54] к результатам K-матричного анализа [24]. Параметры, представленные во второй строке, получены путем подгонки полных сечений на рис. 3.6, как описано в разделе 3.3.2. В последнем столбце даны соответствующие значения длины рассеяния ηN. 48

3.2 Длина рассеяния $a_{\eta^4\mathrm{He}}$ как функция числа слагаемых N_{α_2} ($\alpha_2 = 1, \ldots, 4$) в сепарабельном разложении (1.11) для амплитуд X^{α_2} в каналах с фрагментацией вида $(4+1)$ и $(3+2)$. 55

Список иллюстраций

1 *Missing-mass* спектр реакции $p + {}^{27}\mathrm{Al} \to {}^{3}\mathrm{He} + p + \pi^- + X$. Сплошная и пунктирная кривые – результаты модельных расчетов. Взято из работы [13]. . . . 8

1.1 Диаграммное представление обобщенных потенциалов $Z^{\alpha_3}_{\alpha_4,\beta_4}$. Потенциалы $Z^2_{1,2}$ и $Z^3_{1,2}$ могут быть получены из $Z^2_{2,1}$ и $Z^3_{2,1}$ путем поворота вокруг вертикальной оси. Штриховыми и сплошными кривыми показаны, соответственно, η-мезон и нуклоны. 23

1.2 Эффективные потенциалы $Z^2_{2,1}$ и $Z^3_{2,1}$ определенные выражениями (1.23) и (1.24). Обозначения те же, что на рис. 1.1. 24

1.3 Диаграммное представление потенциалов $Z^{\alpha_2}_{\alpha_3,\beta_3}$. Обозначения те же, что на рис. 1.1. Остальные потенциалы могут быть получены из представленных на рисунке путем поворота вокруг вертикальной оси. 26

1.4 Потенциалы $Z^2_{1,3}$ и $Z^2_{3,3}$ определенные выражениями (1.40) и (1.41). Форм-фактор $g^3_2(q)$ определяет взаимодействие двух нуклонов в присутствии взаимодействующей пары ηN. Он отличается от формфактора $g_1(q)$ в потенциале $Z^2_{2,1}$ на рис. 1.2. 27

1.5 Эффективные двухчастичные уравнения для амплитуд $X^2_{\alpha_3,\beta_3}$, возникающих в разбиении $(\eta N) - (NNN)$. Обозначения те же, что на рис. 1.1. Нижние и верхние индексы в обозначении $u^{\alpha_3}_{\alpha_4}$ относятся к номерам, соответственно, двух- и трехчастичных разбиений в таблице 1.1. Целочисленные коэффициенты появились вследствие учета тождественности нуклонов и перехода к симметризованным состояниям. 28

1.6 То же, что на рис. 1.5 для амплитуд $X^3_{\alpha_3,\beta_3}$ в разбиении $(\eta NN) - (NN)$. 29

1.7 Потенциалы Z_{α_2,β_2} (1.45). Обозначения как на рис. 1.1. 30

1.8 Структура потенциала $Z_{4,2}$ согласно общей формуле (1.46). 30

1.9 Графическое представление эффективных двухчастичных уравнений для рассеяния в системе пяти тел $\eta - 4N$. Штриховыми и сплошными кривыми показаны, соответственно, η-мезон и нуклоны. 31

2.1 Графическое представление уравнений (1.49) для разбиений α_3 (нумерация разбиений приведена в таблице 2.1). Верхнее и нижнее уравнения соответствуют $\alpha_3 = 1$ и 2 соответственно. Численные множители возникают вследствие учета тождественности частиц. 38

2.2 То же, что на рис. 2.1, но для двухчастичных разбиений $\alpha_2 = 1$ (два верхних уравнения) и $\alpha_2 = 2$ (два нижних уравнения). 38

2.3 Графическое представление эффективных двухчастичных уравнений (1.44) для системы пяти тождественных бозонов. Обозначения те же, что на рис. 2.1. Верхний индекс α_1 здесь является излишним и поэтому опущен. 42

2.4 Зависимость нескольких первых собственных значений $\lambda_n^{(\alpha_2)}$ ядер интегральных уравнений (1.44) (см. рис. 2.3) для системы пяти тождественных бозонов, вычисленных для $\alpha_2 = 1$ (левая часть) и $\alpha_2 = 2$ (правая часть рисунка). Вертикальная пунктирная линия проведена при энергии, соответствующей энергии связи основного состояния четырех бозонов $E = -E_{4b}$. 43

3.1 На левом рисунке представлено полное сечение нейтрон-протонного рассеяния в области низких энергий. Справа демонстрируется структура римановой поверхности s-волновой части амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния. Физический (верхний) лист соединяется с нефизическим (нижним) через унитарный разрез вдоль вещественной оси энергии начиная от $E = 0$. Показана траектория движения полюса при переходе от связанного состояния ${}^3S_1$ к виртуальному состоянию ${}^1S_0$. 45

3.2 Результаты для вещественной части амплитуды ηN рассеяния $f_{\eta N}(W)$, полученные в рамках различных моделей. Штрих-пунктирной кривой показан результат работы [74], сплошной – [75], пунктирной – [76], штриховой – [77]. Тонкой вертикальной линией показано пороговое значение энергии W. Взято из работы [71]. 50

3.3 То же, что на рисунке 3.2, но для мнимой части $f_{\eta N}$. 50

3.4 Функции $F_L(E)$ и $F_R(E)$, определяемые выражениями (3.13) и (3.14) с параметрами $a = 2$ МэВ, $r = 5$ МэВ, $d_L = d_R = -100$ МэВ. 52

3.5 В левой части рисунка показаны длины рассеяния, рассчитанные с модифицированной ηN амплитудой $f_{\eta N} F_L$, как функции параметра d. Функция F_L определена в уравнении (3.13). В правой части рисунка те же длины, но рассчитанные с амплитудой $f_{\eta N} F_R$, где F_R дается выражением (3.14). Расчеты выполнены с использованием ηN параметров из набора I (таблица 3.1). Для $F_{L/R}$ мы использовались те же параметры a и r, что и на рис. 3.4. 53

3.6 Квадрат ηA амплитуды $|f_{\eta A}|^2$ для $A = d$ и ^{4}He. Кривыми представлены результаты нашей подгонки. Экспериментальные данные приведены для значений $|f_{\eta A}|^2$, извлеченных из данных для $pn \to \eta d$ [35] и $pd \to \eta pd$ [36] (левая часть рисунка) и $dd \to \eta\, ^4$He [42, 41] (правая часть). Нормировка всех результатов является произвольной. 56

3.7 Полное сечение $dp \to \eta^3$He как функция избыточной энергии Q. Экспериментальные данные взяты из работы [37], [38] и [39]. Кривая показывает результат нашего фита. 57

3.8 Амплитуда ηN рассеяния вне массовой поверхности, рассчитанная с параметрами из набора II в таблице 3.1. Обозначения: сплошная кривая: действительная часть, пунктирная кривая: мнимая часть. Данные представляют результаты K-матричного анализа из работы [24]. 58

3.9 Зависимость длины рассеяния $\eta\, ^4$He от энергии связи ядра ^{4}He. Обозначения: сплошные кривые: действительная часть, пунктирные кривые: мнимая часть. Пары кривых с номерами 1 и 2 получены с наборами ηN параметров, обозначенными в таблице 3.1 как наборы I и II, соответственно. 59

3.10 Структура римановой поверхности для амплитуды рассеяния в трехчастичной системе ηNN, как функции полной кинетической энергии E, равной полной энергии системы за вычетом масс частиц. Показаны результаты для конфигураций $T(J^\pi) = 0(1^-)$ (левый рисунок) и $T(J^\pi) = 1(0^-)$. Красные линии – траектории движения полюса при изменении значения константы связи $g_{\eta NN^*}$. Через N^* обозначен резонанс $N(1535)\frac{1}{2}^-$. В нижней части рисунка приведены полюсные значения энергии, соответствующие истинному (согласующемуся с имеющимися моделями) значению $g_{\eta NN^*}$. 61

3.11 Сплошные кривые: действительная и мнимая части локального потенциала ηN $v_{\eta N}(E_{\eta N}, r)$ (3.28), который эквивалентен нашему сепарабельному потенциалу (3.4). Пунктирные линии: потенциал $v_{\eta N}(W, r)$ из работы [72], вычисленный при постоянном значении аргумента W для двух значений скалирующего параметра $\Lambda = 2$ Фм$^{-1}$ и $\Lambda = 4$ Фм$^{-1}$. Все потенциалы усреднены по плотности ядра ^{4}He, как пояснено в тексте. 67

С.12 Графическое изображение системы уравнений (1.44). 83

Список литературы

1. Hayano R. S. Hadron properties in the nuclear medium / R. S. Hayano and T. Hatsuda // Review of Modern Physics — 2010. — Vol. 82. — P. — 2949

2. Leupold S. Hadrons in strongly interacting matter / S. Leupold, V. Metag and U. Mosel // International Journal of Modern Physics E. — 2010. — Vol. 19. — P. — 147.

3. Kaplan D. B. Strange goings on in dense nucleonic matter / D. B. Kaplan and A. E. Nelson // Physics Letters B. — 1986. — Vol. 175. — P. — 57.

4. Brown G. E. A Scenario for a large number of low mass black holes in the galaxy / G. E. Brown and H. Bethe // Astrophysical Journal — 1994. — Vol. 423. — P. — 659

5. Sibirtsev A. ηN final state interaction in incoherent photoproduction of η-mesons from the deuteron near threshold / A. Sibirtsev, S. Schneider, C. Elster, J. Haidenbauer, S. Krewald and J. Speth // Physical Review C. — 1995. — Vol. 51. — P. — 2310.

6. Bhalerao R. S. Off-shell model for threshold pionic η production on a nucleon and for ηN scattering / R. S. Bhalerao and L. C. Liu // Physical Review Letters — 1985. — Vol. 54. — P. — 865

7. Haider Q. Formation of an η mesic nucleus / Q. Haider and L. C. Liu // Physics Letters B. — 1986. — Vol. 172. — P. — 257

8. Garcia-Recio C. η bound states in nuclei / C. Garcia-Recio, J. Nieves, T. Inoue and E. Oset // Physics Letters B. — 2002. — Vol. 550. — P. — 47

9. Hayano R. S. Formation of η mesic nuclei using the recoilless $(d,^3He)$ reaction /R. S. Hayano, S. Hirenzaki and A. Gillitzer // European Physical Journal A. — 1999. — Vol. 6. — P. — 99

10. Tsushima K. Formation of η mesic nuclei using the recoilless $(d,^3He)$ reaction / K. Tsushima // Nuclear Physics A. — 2000. — Vol. 670. — P. — 198c

11. Chrien R. E. Search for bound states of the η meson in light nuclei / R. E. Chrien *et al.* // Physical Review Letters — 1988. — Vol. 60. — P. — 2595

12. Budzanowski A. Search for η-mesic nuclei in recoil-free transfer reaction / A. Budzanowski *et al.* [COSY-GEM Collaboration] // Physical Review C. — 2009. — Vol. 79. — P. — 012201

13. Machner H. Search for η-bound nuclei / H. Machner // Acta Physica Polonica B. — 2010. — Vol. 41. — P. — 2221

14. Bennhold C. Coherent and incoherent eta photoproduction from nuclei / C. Bennhold and H. Tanabe // Nuclear Physics A. — 1991. — Vol. 520. — P. — 625.

15. Arima M. A study of π nucleon S wave resonances and the η nucleon interaction / M. Arima, K. Shimizu and K. Yazaki // Nuclear Physics A. — 1992. — Vol. 543. — P. — 613.

16. Wilkin C. Near-threshold production of η mesons / C. Wilkin // Physical Review C. — 1993. — Vol. 47, № 3. — P. — R938

17. Sauermann C. Resonance model for πN scattering and eta meson production in the S_{11} channel / C. Sauermann, B. L. Friman and W. Norenberg // Physics Letters B. — 1995. — Vol. 341. — P. — 261.

18. Kaiser N. Chiral dynamics and the $S_{11}(1535)$ nucleon resonance / N. Kaiser, P. B. Siegel and W. Weise // Physics Letters B. — 1995. — Vol. 362. — P. — 23.

19. Batinic M. $\pi N \to \eta N$ and $\eta N \to \eta N$ partial wave T matrices in a coupled, three channel model / M. Batinić, I. Slaus, A. Svarc and B. M. K. Nefkens // Physical Review C — 1995. — Vol. 51. — P. — 2310.

20. Fäldt G. The $dd \to^4$ Heη reaction near threshold / G. Faldt and C. Wilkin // Nuclear Physics A. — 1996. — Vol. 596. — P. — 488.

21. Abaev V. V. S wave resonance coupled channel approach to the reactions $\pi^- + p \to \eta + n$ and $K^- + p \to \eta + \Lambda$, and a determination of the ηn and $\eta\Lambda$ scattering lengths / V. V. Abaev and B. M. K. Nefkens // Physical Review C. — 1996. — Vol. 53. — P. — 385.

22. Deutsch-Sauermann C., η meson photoproduction off protons and deuterons / C. Deutsch-Sauermann, B. Friman and W. Norenberg // Physics Letters B. — 1997. — Vol. 409. — P. — 51.

23. Kaiser N. $SU(3)$ chiral dynamics with coupled channels: η and kaon photoproduction / N. Kaiser, T. Waas and W. Weise // Nuclear Physics A. — 1997. — Vol. 612. — P. — 297.

24. Green A. M. η-nucleon scattering length and effective range / A. M. Green and S. Wycech // Physical Review C. — 1997. — Vol. 55. — P. — R2167.

25. Green A.M. A coupled K matrix description of the reactions $\pi N \to \pi N$, $\pi N \to \eta N$, $\gamma N \to \pi N$ and $\gamma N \to \eta N$ / A. M. Green and S. Wycech // Physical Review C. — 1999. — Vol. 60. — P. — 035208.

26. Caro Ramon J. Chiral $SU(3)$ dynamics with coupled channels: Inclusion of P wave multipoles / J. Caro Ramon, N. Kaiser, S. Wetzel and W. Weise // Nuclear Physics A. — 2000. — Vol. 672. — P. — 249.

27. Nieves J. The $S_{11} - N(1535)$ and $-N(1650)$ resonances in meson baryon unitarized coupled channel chiral perturbation theory / J. Nieves and E. Ruiz Arriola // Physical Review C. — 2001. — Vol. 64. — P. — 116008.

28. Krippa B. Chiral expansion for low-energy η nucleon interactions with explicit resonance / B. Krippa // Physical Review C. — 2001. — Vol. 64. — P. — 047602.

29. Skurzok M. Searching for η-mesic Helium with WASA-at-COSY facility / M. Skurzok, W. Krzemień, O. Rundel and P. Moskal // EPJ Web Conf. — 2016. — Vol. 117. — P. — 02005.

30. Adlarson P. Search for η-mesic ^{4}He in the $dd \to {}^3\mathrm{He}\, n\pi^0$ and $dd \to {}^3\mathrm{He}\, p\pi^-$ reactions with the WASA-at-COSY facility / P. Adlarson *et al.* // Nuclear Physics A — 2017. — Vol. 959. — P. — 102.

31. Lebedev A. I. Cross-sections for production of eta nuclei by photons / A. I. Lebedev and V. A. Tryasuchev // Journal of Physics G — 1991. — Vol. 17. — P. — 1197.

32. Krusche B. Photoproduction of Mesons off Light Nuclei – the Search for η-Mesic Nuclei / B. Krusche *et al.* [Crystal Ball and TAPS Collaborations] // Acta Physica Polonica B — 2010. — Vol. 41. — P. — 2249.

33. Hanhart C. Comment on 'Photoproduction of eta-mesic ^{3}He' / C. Hanhart // Physical Review Letters — 2005. — Vol. 94. — P. — 049101.

34. Pheron F. Coherent photoproduction of eta-mesons off ^{3}He - search for eta-mesic nuclei / F. Pheron *et al.* // Physics Letters B — 2012. — Vol. 709. — P. — 21.

35. Calen H. Measurement of the quasifree $p + n \to d + \eta$ reaction near threshold / H. Calen *et al.* // Physical Review Letters 1997. — Vol. 79. — P. — 2642.

36. Bilger R. Measurement of the $pd \to pd\eta$ cross-section in complete kinematics / R. Bilger *et al.* // Physical Review C — 2004. — Vol. 69, 014003.

37. Mayer B. The Reactions $dp \to {}^3\mathrm{He}\eta$ and $dp \to {}^3\mathrm{He}\pi^+\pi^-$ near the eta threshold / B. Mayer *et al.* // Physical Review C — 1996. — Vol. 53. — P. — 2068.

38. Mersmann T. Precision study of the $\eta\,{}^3$He system using the $dp \to {}^3\mathrm{He}\,\eta$ reaction / T. Mersmann *et al.* // Physical Review Letters — 2007. — Vol. 98. — P. — 242301.

39. Smyrski J. Measurement of the $dp \to {}^3\mathrm{He}\,\eta$ reaction near threshold / J. Smyrski *et al.* // Physics Letters B — 2007. — Vol. 649. — P. — 258.

40. Pfeiffer M. Photoproduction of eta mesic ^{3}He / M. Pfeiffer *et al.* // Physical Review Letters — 2004. — Vol. 92. — P. — 252001.

41. Frascaria R. Total $d + d \to \alpha + \eta$ cross sections near threshold / R. Frascaria *et al.* // Physical Review C — 1994. — Vol. 50, № 2. — P. — R537.

42. Willis N. Eta - helium quasibound states / N. Willis *et al.* // Physics Letters B — 1997. — Vol. 406. — P. — 14.

43. Wronska A. Near threshold eta meson production in the $dd \to {}^4\mathrm{He}\eta$ reaction / A. Wronska *et al.* // European Physical Journal A — 2005. — Vol. 26. — P. — 421.

44. Budzanowski A. Cross Section and Tensor Analysing Power of the $dd \to \eta\alpha$ Reaction Near Threshold / A. Budzanowski *et al.* [GEM Collaboration] // Nuclear Physics A — 2009. — Vol. 821. — P. — 193.

45. Haider Q. Dependence of calculated binding energies and widths of eta mesic nuclei on treatment of subthreshold eta nucleon interaction / Q. Haider and L. C. Liu // Physical Review C. — 2002. — Vol. 66, № 3. — P. — 045208

46. Xie J. J. Determination of the η^3He threshold structure from the low energy $pd \to \eta^3$He reaction / J. J. Xie, W. H. Liang, E. Oset, P. Moskal, M. Skurzok and C. Wilkin // Physical Review C — 2017. — Vol. 95, № 1. — P. — 015202.

47. Ikeno N. η-nucleus interaction from the $d+d$ reaction around the η production threshold / N. Ikeno, H. Nagahiro, D. Jido and S. Hirenzaki // European Physical Journal A — 2017. — Vol. 53, № 10. — P. — 194

48. Rakityansky S. A. Quasibound states of eta nucleus systems / S. A. Rakityansky, S. A. Sofianos, M. Braun, V. B. Belyaev and W. Sandhas // Physical Review C — 1996. — Vol. 53. — P. — R2043

49. Kelkar N. G. Possible eta-mesic ^{3}He states within the finite rank approximation / N. G. Kelkar, K. P. Khemchandani and B. K. Jain // J. Phys. G — 2006. — Vol. 32. — P. — L19

50. Фаддеев Л. Д. Теория рассеяния для системы трех частиц / Л. Д. Фаддеев // Журнал экспериментальной и теоретической физики — 1960. — Том 39. — С. — 1459

51. Якубовский О. А. Об интегральных уравнениях теории рассеяния для N частиц / О. А. Якубовский // Ядерная физика — 1967. — Том 5. — С. — 1312

52. Grassberger P. Systematical treatment of the non-relativistic n-particle scattering problem // P. Grassberger and W. Sandhas, Nuclear Physics B — 1967. — Vol. 2. — P. — 181

53. Fix A. Solution of the five-body η^4 He problem with separable pole expansion method / A. Fix and O. Kolesnikov // Physics Letters B — 2017. — Vol. 772. — P. — 663

54. Fix A. Systematic few-body analysis of ηd, η^3He and η^4He interaction at low energies / A. Fix and O. Kolesnikov // Physical Review C — 2018. — Vol. 97. — P. — 044001

55. Kolesnikov O. Five-body integral equations and solution of the $\eta - 4N$ problem / O. Kolesnikov and A. Fix // Few-Body Systems — 2020. — Vol. 97. — P. — 044001

56. Kolesnikov O. Three-body calculation of coherent π^0 photoproduction on the deuteron in the Δ region / O. Kolesnikov and A. Fix // Journal of Physics G. Nuclear and Particle Physics. — 2021. — Vol. 48. — P. — 085101

57. Alt E. O. Reduction of the three - particle collision problem to multichannel two - particle Lippmann-Schwinger equations / E. O. Alt, P. Grassberger and W. Sandhas // Nuclear Physics B. — 1967. — Vol. 2. — P. — 167.

58. Stingl M. Complete angular momentum analysis of Faddeev-Lovelace equations based on non-central pair forces / M. Stingl and A. S. Rinat // Nuclear Physics A — 1970. — Vol. 154. — P. — 613.

59. Alt E. O. Treatment of the Three- and Four-Nucleon Systems by a Generalized Separable-Potential Model / E. O. Alt, P. Grassberger and W. Sandhas // Physical Review C — 1970. — Vol. 1. — P. — 85.

60. Fix A. The $\eta - 3N$ problem with separable interactions / A. Fix and H. Arenhövel // Physical Review C — 2003. — Vol. 68. — P. — 044002.

61. Sofianos S. Energy-dependent pole expansions for the effective potentials in the four-body integral equations / S. Sofianos, N. J. McGurk and H. Fiedeldey // Nuclear Physics A. — 1979. — Vol. 318. — P. — 295.

62. Watson K. M. Multiple scattering and the many-body problem-applications to photomeson production in complex nuclei / K. M. Watson // Physical Review C — 1953. — Vol. 89. — P. — 575.

63. Yamaguchi Y. Two nucleon problem when the potential is nonlocal but separable / Y. Yamaguchi // Physical Review C — 1954. — Vol. 95. — P. — 1628.

64. Lovelace C. Practical theory of three particle states. 1. Nonrelativistic / C. Lovelace // Physical Review — 1964. — Vol. 135. — P. — B1225.

65. Zankel H. Sensitivity of $N-d$ polarization observables on the off-shell behavior of the $N-N$ interaction / H. Zankel, W. Plessas, and J. Haidenbauer // Physical Review C. — 1983. — Vol. 28. — P. — 538.

66. Ernst D. J. Separable representations of two-body interactions / D. J. Ernst, C. M. Shakin and R. M. Thaler // Physical Review C. — 1973. — Vol. 8. — P. — 46.

67. Fix A. The ηNN system at low-energy within a three-body approach / A. Fix and H. Arenhövel // Nuclear Physics A. — 2002. — Vol. 697. — P. — 277.

68. Wycech S. Are there eta helium bound states? / S. Wycech, A. M. Green and J. A. Niskanen // Physical Review C — 1995. — Vol. 52. — P. — 544.

69. Wycech S. Studies of mesic nuclei via decay reactions / S. Wycech and W. Krzemień // Acta Physica Polonica B. — 2014. — Vol. 45. — P. — 745.

70. Kukulin V. I. A Stochastic Variational Method for Few Body Systems / V. I. Kukulin and V. M. Krasnopolsky // Journal of Physics G. — 1977. — Vol. 3. — P. — 795.

71. Barnea N. Onset of η-nuclear binding in a pionless EFT approach / N. Barnea, B. Bazak, E. Friedman and A. Gal // Physics Letters B. — 2017. — Vol. 771. — P. — 297.

72. Barnea N. Onset of η-meson binding in the He isotopes / N. Barnea, E. Friedman and A. Gal // Nuclear Physics A. — 2017. — Vol. 968. — P. — 35.

73. Gloeckle W. The Quantum Mechanical Few-Body Problem / W. Gloeckle, Springer, — 1983. — 198 c.

74. Green A. M. η-nucleon scattering length and effective range uncertainties / A. M. Green and S. Wycech // Physical Review C. — 2005. — Vol. 71. — P. — 014001.

75. Cieplý A. Chirally motivated separable potential model for ηN amplitudes / A. Cieplý and J. Smejkal // Nuclear Physics A. — 2013. — Vol. 919. — P. — 46.

76. Mai M. Pion photoproduction off the proton in a gauge-invariant chiral unitary framework / M. Mai, P. C. Bruns and U. G. Meissner // Physical Review D. — 2012. — Vol. 86. — P. — 094033.

77. Inoue T. Chiral unitary approach to S wave meson baryon scattering in the strangeness $S = 0$ sector / T. Inoue, E. Oset and M. J. Vicente Vacas // Physical Review C. — 2002. — Vol. 65. — P. — 035204.

78. Kisslinger L. S. Scattering of mesons by light nuclei / L. S. Kisslinger // Physical Review — 1955. — Vol. 98. — P. — 761.

79. Ericson M. Optical properties of low-energy pions in nuclei / M. Ericson and T. E. O. Ericson // Annals of Physics — 1966. — Vol. 36. — P. — 323.