МОУ Лицей при ТПУ

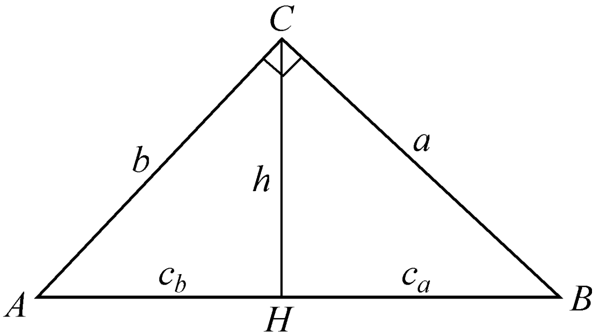
СПРАВОЧНИК ПО ГЕОМЕТРИИ
Планиметрия

Томск–2003

1. Треугольники

1.1. Прямоугольный треугольник

1.1.1. Метрические соотношения



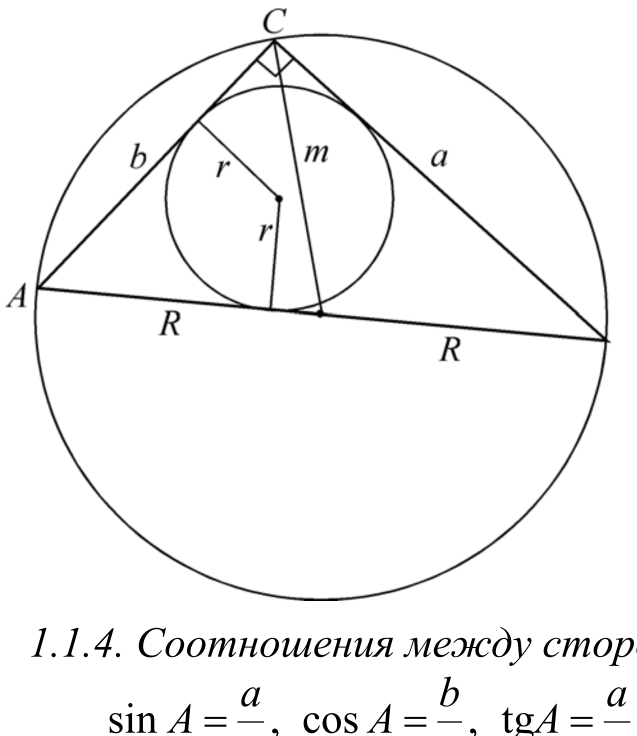
a, b — катеты, c — гипотенуза, h — высота, $AH = c_b$, $BH = c_a$.

1) $a^2 + b^2 = c^2$.
2) $h^2 = c_a \cdot c_b$.
3) $b^2 = c \cdot c_b$.
4) $a^2 = c \cdot c_a$.
5) $h = \dfrac{ab}{c}$.

1.1.2. Площадь

$$S = \frac{ab}{2}.$$

1.1.3. Формулы для вычисления радиусов вписанной и описанной окружностей



$$R = \frac{c}{2} = m$$

(m — медиана, проведенная из вершины прямого угла).

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

1.1.4. Соотношения между сторонами и углами

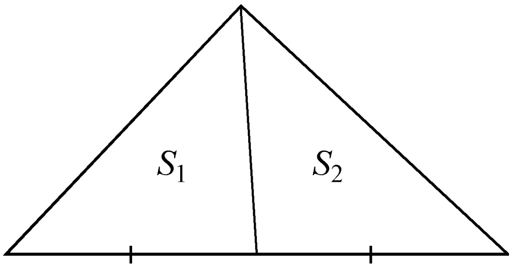
$$\sin A = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{b}{c},\ \mathrm{tg} A = \frac{a}{b},\ \mathrm{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

1.2. Произвольный треугольник

1.2.1. Медиана треугольника

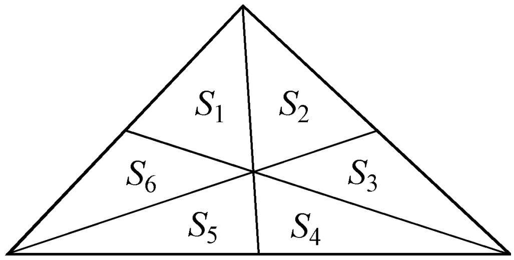
1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2 : 1, считая от вершины. Эта точка называется центром тяжести.

2. Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.



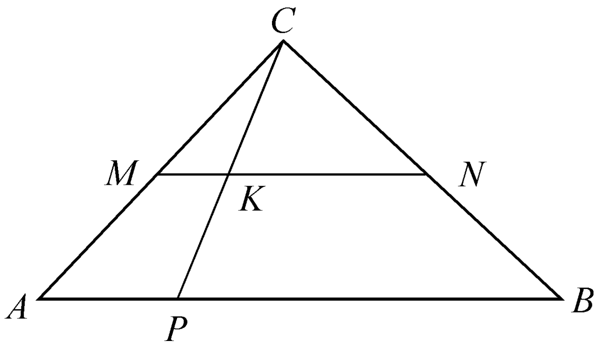
$$S_1 = S_2.$$

3. Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.



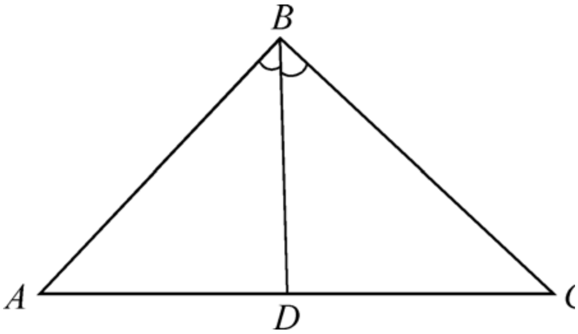
$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6.$$

1.2.2. Средняя линия треугольника



1. $MN \parallel AB$.
2. $MN = \dfrac{1}{2} AB$.
3. Средняя линия делит пополам любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с какой-либо точкой основания ($CK = KP$).

1.2.3. Биссектриса треугольника



1) BD — биссектриса ΔABC.

Биссектриса делит основание на части, пропорциональные боковым сторонам $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$.

2) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является центром вписанной окружности.

1.2.4. Высоты треугольника

Высоты треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка называется <u>ортоцентром.</u>

1.2.5. Определение вида треугольника по его сторонам

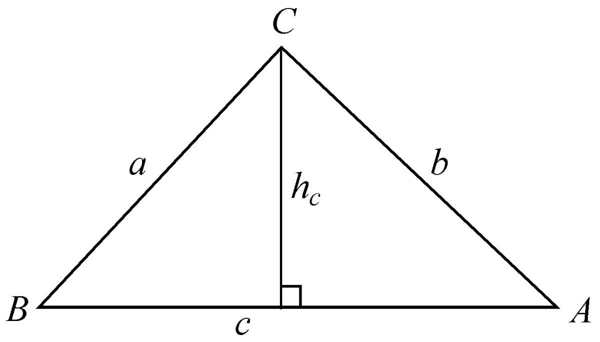
Пусть c — наибольшая из трех сторон треугольника.

Если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный.

Если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный.

Если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный.

1.2.6. Площадь



1) $S = \frac{1}{2} c h_c$.

2) $S = \frac{1}{2} ab \sin C$.

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр (формула Герона).

4) $S = \frac{abc}{4R}$ (R — радиус описанной окружности).

5) $S = pr$ (p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности).

1.2.7. Формулы для вычисления радиусов R и r

$$R = \frac{a}{2\sin A}, \quad R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{S}{p}.$$

1.2.8. Соотношения между сторонами и углами

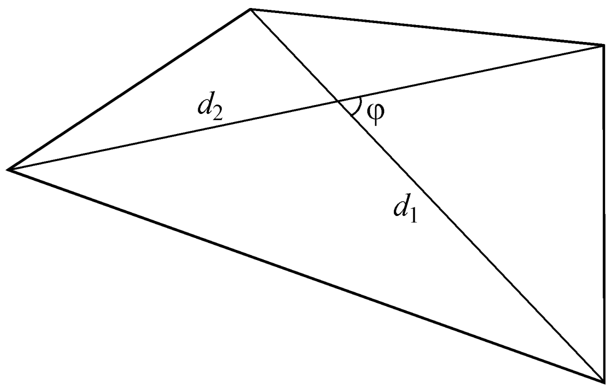
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (теорема косинусов).

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (теорема синусов).

2. Четырехугольники

2.1. Выпуклый четырехугольник

2.1.1. Площадь



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi,$$

где d_1, d_2 — диагонали, φ — угол между ними.

$S = pr$, если в четырехугольник можно вписать окружность (p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности).

2.1.2. Вписанная окружность

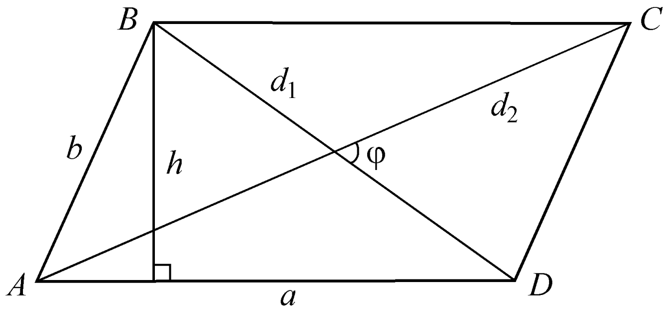
В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны. Центром вписанной окружности служит точка пересечения биссектрис.

2.1.3. Описанная окружность

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180°. Центром описанной окружности служит точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам четырехугольника через их середины.

2.2. Параллелограмм

2.2.1. Соотношение между сторонами и диагоналями



$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

2.2.2. Площадь

$$S = ah,\ \ S = ab\sin A,\ \ S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi,$$

$$S_{\text{ромб}} = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

2.3. Трапеция

2.3.1. Средняя линия

1) Параллельна основаниям.

2) Равна полусумме оснований.

3) Делит пополам любой отрезок, заключенный между основаниями.

2.3.2. Площадь

$S = \frac{a+b}{2}h$, где a, b — основания, h — высота.

$S = pr$, если в трапецию можно вписать окружность радиуса r.

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$, где d_1, d_2 — диагонали, φ — угол между ними.

3. Правильные многоугольники

a — сторона правильного многоугольника, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, S — площадь.

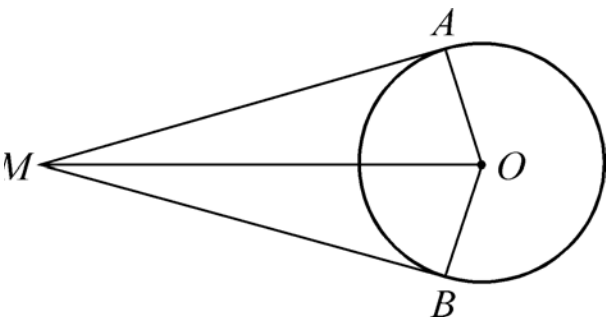
Вид правильного многоугольника	R	r	S	
Равносторонний треугольник	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Квадрат	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$	a^2	$d = a\sqrt{2}$
Правильный шестиугольник	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	

$a_n = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$, где α — центральный угол, $\alpha = \frac{360°}{n}$.

$S = \frac{1}{2}Pr$, где $P = a_n n$.

4. Окружность и круг

4.1. Два свойства касательных



1) Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
2) Если из точки M проведены к окружности две касательные и A, B — точки касания, то а) $MA = MB$, б) центр окружности лежит на биссектрисе угла AMB.

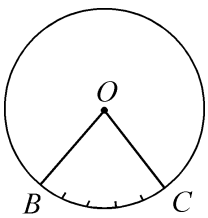
4.2. Измерение углов, связанных с окружностью

4.2.1. Определения

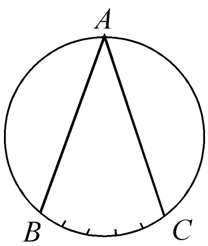
<u>Вписанный угол</u> — угол, образованный двумя хордами AB и AC, выходящими из точки A на окружности.

<u>Центральный угол</u> — угол, образованный двумя радиусами OB и OC (O — центр окружности).

4.2.2. Вычисление углов



Центральный угол BOC измеряется дугой BC, на которую он опирается.



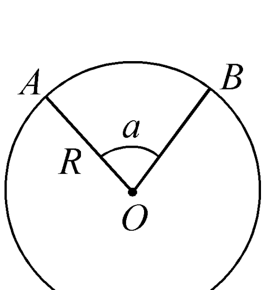
Вписанный угол BAC измеряется половиной дуги BC, на которую он опирается.

4.3. Длина окружности, площадь круга

Длина окружности $l = 2\pi r$.

Площадь круга $S = \pi R^2$.

4.4. Длина дуги, площадь сектора



$l_{AB} = R\alpha,$

$S_{AOB} = \frac{1}{2} R^2 \alpha,$

где α — центральный угол, выраженный в радианах, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад.