МОУ лицей при ТПУ

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

урока математики

по теме

«Повторение. Тригонометрические уравнения»

11 класс

Выполнила:
Киреенко Светлана Григорьевна,
учитель математики высшей
квалификационной категории

Томск 2004

Тип урока: обобщение и систематизация знаний по теме «Тригонометрические уравнения»

Форма урока: работа в группах

Цели урока

Образовательная: систематизировать знания учащихся о методах решения тригонометрических уравнений, закрепить навыки работы с тригонометрической окружностью.

Развивающая: продолжить работу над формированием творческих интеллектуальных способностей учащихся через использование разнообразных приемов решения тригонометрических уравнений, нестандартных способов записи ответа, через поощрение «редких» идей, отличающихся от типичных и общепринятых.

Воспитательная: развить навыки коллективной умственной деятельности, взаимной поддержки и приятия точки зрения, отличной от собственной

Ход урока

I. Разминка. Работа с тригонометрической окружностью

1. Решениями каких простейших тригонометрических уравнений являются множества?

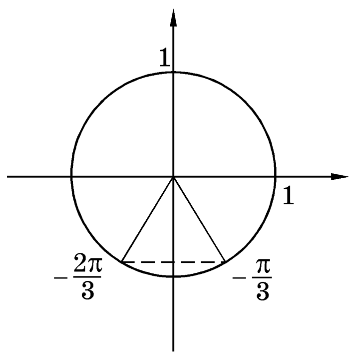
Ответ

а) $\left\{(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n\right\}, n \in Z$ — $\sin x = \dfrac{1}{2}$

б) $\left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right\} \cup \left\{-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n\right\}, n \in Z$

Как иначе (проще) можно записать ответ?

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$

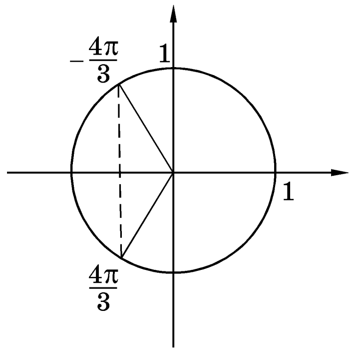


$\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

в) $\left\{\pm \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n\right\}, n \in Z$

Как иначе можно записать ответ?

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

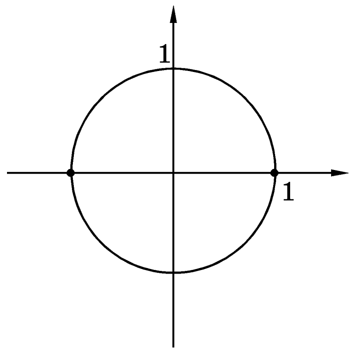


$\cos x = -\dfrac{1}{2}$

г) $\{\pi + \pi n\},\ n \in Z$

Как проще можно записать ответ?

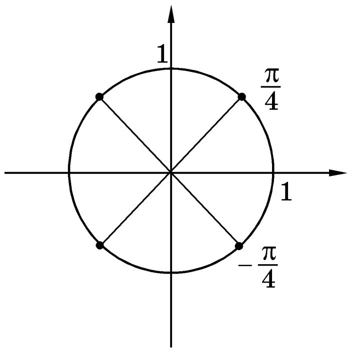
$x = \pi n,\ n \in Z$



$\sin x = 0$

2. Решить уравнение $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}$.

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Какие формы записи ответа возможны?

а) $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

б) $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$ (наиболее рациональная);

в) $x = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$;

г) $x \in \left\{(-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n\right\} \cup \left\{(-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{4} + \pi n\right\},\ n \in Z$

и т.д.

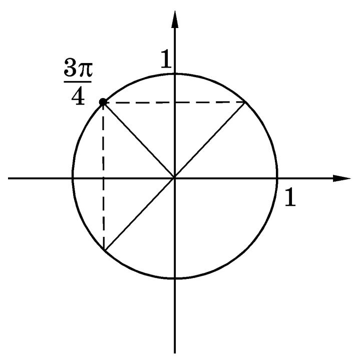
II. Работа над одной из составляющих креативности мышления — метафоричностью (умение в сложном видеть простое)

Решить уравнения (устно):

а) $\dfrac{(\cos x - 1)(\cos x - 1/2)}{\cos^3 x - 1} = 0,$

$$\cos x \neq 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2},\ \ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

б) $\sqrt[2000]{\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[2000]{\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 0 \Leftrightarrow$



$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

III. Решить уравнение двумя способами и сравнить ответы

$\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$.

1. Метод «Разложение левой части уравнения на множители»

$\cos 4x + \cos 2x = 0,$

$\cos 3x \cdot \cos x = 0,$

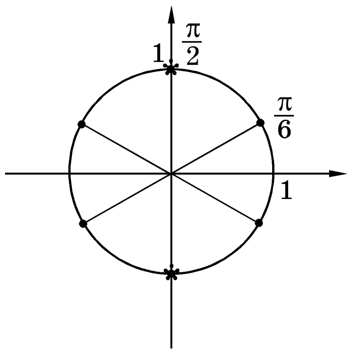
$\cos 3x = 0$ или $\cos x = 0,$

$3x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$ $\qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\ (*)$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z\ (\bullet)$

Вторая серия решений $(x = \frac{\pi}{2} + \pi n)$ полностью содержится в первой.

Следовательно, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z.$



2. Метод «Сведение к квадратному с помощью замены переменной»

$\cos 4x + 2\cos^2 x = 1,$

$2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0,$

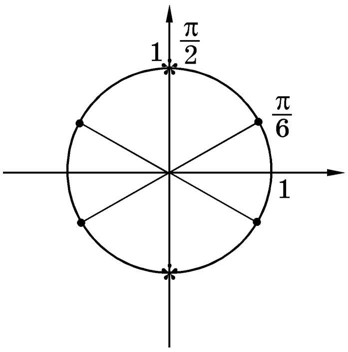
$\cos 2x \overset{\text{об.}}{=} t,\quad t \in [-1; 1],$

$2t^2 + t - 1 = 0,\qquad t_1 = -1,\ t_2 = \frac{1}{2},$

$\cos 2x = \frac{1}{2},$ $\qquad \cos 2x = -1,$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ $\qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\ (*)$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z\ (\bullet)$



<u>Вывод</u>: множество решений данного уравнения определено однозначно, хотя формы записи ответа при решении уравнения различными способами могут быть отличны друг от друга

IV. Аукцион методов решения линейного уравнения $2\sin x + 3\cos x = 5$ (работа в группах)

Правила. Методы решения уравнения предлагаются каждой из групп поочередно. Побеждает группа, предложившая свой метод последней.

1. Сведение к однородному уравнению второго порядка:

$2\sin x + 3\cos x = 5,$

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2}-3\sin^2\frac{x}{2}-5\cos^2\frac{x}{2}-5\sin^2\frac{x}{2}=0,$$

$$-8\sin^2\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0, \qquad \cos\frac{x}{2}\neq 0,$$

$$8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2=0,$$

$$4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1=0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\overset{\text{об.}}{=}t,$$

$$4t^2-2t+1=0,$$

$$D<0 \Rightarrow t\in\varnothing \Rightarrow x\in\varnothing.$$

2. Введение вспомогательного угла:

$2\sin x + 3\cos x = 5$

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

$$\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x+\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x=\frac{5}{\sqrt{13}},$$

$$\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}},\ \ \sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{5}{\sqrt{13}},$$

$$\sin(x+\varphi)=\frac{5}{\sqrt{13}},\quad \text{но}\quad \frac{5}{\sqrt{13}}>1\Rightarrow\ x\in\varnothing.$$

3. Универсальная подстановка:

$2\sin x + 3\cos x = 5,$

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Проверим, являются ли числа $x = \pi + 2\pi n$ решениями уравнения:

$2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \neq 5.$

$$\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{3-3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 5 = 0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \overset{\text{об.}}{=} t,$$

$$\frac{4t+3-3t-5-5t^2}{1+t^2} = 0,$$

$$-8t^2+4t-2=0,$$

$$4t^2-2t+1=0,$$

$D < 0 \Rightarrow t \in \varnothing \Rightarrow x \in \varnothing.$

4. Метод оценки левой и правой частей уравнения:

$2\sin x + 3\cos x = 5$, т.к. $\sin x \leq 1$ и $\cos x \leq 1$, то

$2\sin x + 3\cos x \leq 5 \Rightarrow$ исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

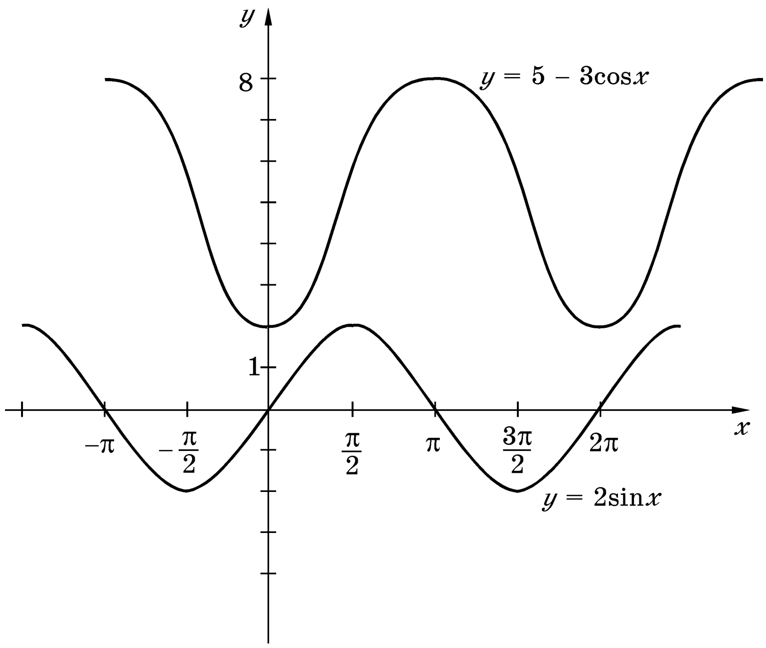
5. Графический метод:

$2\sin x + 3\cos x = 5,$

$2\sin x = 5 - 3\cos x$

$y = 2\sin x$

$y = 5 - 3\cos x$



Графики не пересекаются $\Rightarrow x \in \varnothing.$

6. Используем скалярное произведение векторов:

$2\sin x + 3\cos x = 5$

$\overline{a}\{2;\,3\},\ \overline{b}\{\sin x;\,\cos x\}$

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\widehat{\overline{a},\overline{b}} = \sqrt{13}\cdot\cos\widehat{\overline{a},\overline{b}} \le \sqrt{13}, \quad (*)$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}, \quad |\overline{b}| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1,$$

$$|\overline{a}|\cdot|\overline{b}| = 2\sin x + 3\cos x = 5 \quad (**)$$

Из (*) и (**) следует, что $x \in \varnothing$ (т.к. $\sqrt{13} < 5$).

V. <u>Вывод</u>

Какие методы решения тригонометрических уравнений были использованы на этом уроке?

- замена переменной (сведение к квадратному уравнению);
- разложение на множители;
- сведение к однородному уравнению;
- введение вспомогательного угла;
- универсальная подстановка;
- оценка левой и правой частей уравнения;
- графический;
- «используй скалярное произведение векторов».