Департамент образования администрации г. Томска
Городской научно-методический центр
Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Лицей при ТПУ»

Первый турнир математических боев г. Томска

Томск 2008

УДК 51
ББК 22.1

Киреенко С.Г., Арбит А.В. Первый турнир математических боев г. Томска. – Томск: Изд-во ТПУ, 2008. – 40 с.

В сборнике собраны задачи с решениями Первого турнира математических боев г. Томска. Главная цель издания состоит в ознакомлении учителей и учащихся с новым для г. Томска видом математических соревнований — математическим боем. Кроме того, представленный материал содержит дополнительные задачи и правила математического боя, используя которые можно провести подобные соревнования внутри любой школы. Уровень задач рассчитан на учащихся 8–11 классов.

© Составление: Киреенко С.Г., Арбит А.В., 2008

* * *

Математический бой — это соревнование двух команд в решении математических задач, а также в умении представлять свои решения с четкими обоснованиями ключевых моментов и в умении проверять чужие решения, оппонировать.

Обычно в классе все организует учитель — так ему легче работать с послушными исполнителями и получать стандартные ответы на стандартные вопросы. На матбоях — полная самоорганизация, вся ответственность на самих ребятах, и результат осязаемый, зависящий от множества удач и просчетов, переживаемых у всех на глазах.

Математический бой чем-то напоминает турнир рыцарей, где вопросы честного ведения боя стоят на первом месте. Как и всякий рыцарь, капитан побежденной команды должен иметь мужество поздравить капитана-победителя, ибо главное не победа, а искусство коллективного разума и творческая работа каждого. Обращение во время игры происходит только на «Вы». И действительно, тяжело держать себя в рамках, когда тебя критикуют. Также сложно бывает корректно указать на ошибки. А само уважительное обращение дисциплинирует, помогает выстраивать диалог, сохранять спокойствие...

Математический бой — это еще и игра с неполной информацией о партнере, где нужны интуиция и верная тактика. Иногда при одинаковом количестве решенных задач исход боя зависит от грамотно выстроенной стратегии, продумывать которую необходимо еще до начала игры.

Очень важно, что за весь бой один человек докладывать или оппонировать может не более двух раз. Это условие не позволяет некоторым членам команды оставаться в стороне, «прикрываясь» более сильными игроками. Иногда наиболее подготовленный участник команды делится своим решением с товарищами, но таким образом, чтобы они могли отстоять его перед жюри и оппонентами. В таком случае товарищи по команде играют роль консультантов. Ребята «вынуждены» учиться друг у друга, и, в итоге, изначально слабые ученики заметно прибавляют в мастерстве.

Опыт матбоев поможет участникам в будущем: умение сделать научный доклад, выслушать и понять работу другого, задать четкие вопросы по существу — все это пригодится на семинарах и конференциях, для совместной научной работы и других видов деятельности. Кроме того, ученики разных школ знакомятся, создают новый круг общения. И еще: после удачно проведенного матбоя просыпается вкус к хорошей работе, хочется выступить еще раз, но как следует, учтя все промахи. Поэтому проиграть командам подчас бывает полезнее, чем победить.

Математические бои зародились в Ленинграде в 1965 г., а с 90-х годов они стали официально проводиться по всей стране. Во многих городах России такие турниры стали традиционными. В городе Томске у истоков зарождения таких соревнований стоит городской научно-методический центр (ГНМЦ). С 2006 г. ГНМЦ в рамках городского проекта «Томский олимпиадный тренинг» организовал поездки сборных команд г. Томска на турниры математических боев в города Барнаул, Красноярск, Новосибирск, откуда команды привезли дипломы II и III степени. Такие результаты стали возможными благодаря системной работе с обучающимися в рамках сетевого расписания, интенсивных занятий с приглашенными специалистами, индивидуальных занятий с детьми.

С 14 по 16 марта МОУ лицей при ТПУ при поддержке ГНМЦ в г. Томске организовал и провел Первый турнир математических боев. День начала турнира во многом символичен, ведь это день числа π ($\pi = 3{,}14..$). В боях участвовали 14 команд, представлявших 12 томских учебных заведений. Команды были разбиты на две лиги: младшую и старшую. В младшей лиге играли учащиеся 8-х и 9-х классов, всего 6 команд. Старшую лигу составляли 8 команд учащихся 10-х классов. В результате, первое место в старшей лиге заняла команда лицея при ТПУ, второе поделили гимназия № 1 и Томский кадетский корпус, третье — школа «Эврика-развитие». В младшей лиге выиграла команда гимназии № 55 «Мозголомы», на втором месте гимназия № 1, на третьем — команда лицея № 7 и сборная школ № 8, №41 и гимназии № 29.

В сборнике представлены задачи для двух лиг в таком виде, в котором участники боев их и решали. Остальные задачи с номерами от 49 до 70 приведены для подготовки к последующим играм. Задания для турнира составлены из различных источников Киреенко С.Г. (для младшей лиги) и Арбитом А.В. (для старшей лиги). Все задачи снабжены решениями или указаниями к решению.

ОРГКОМИТЕТ ТУРНИРА

Председатель Оргкомитета

Киреенко Светлана Григорьевна, учитель математики лицея при ТПУ

Заместитель председателя Оргкомитета

Арбит Александр Владимирович, к.ф.-м.н., доцент механико-математического факультета ТГУ

Члены Оргкомитета

Сафонова Вера Прокопьевна, заместитель директора ГНМЦ

Пушкарева Татьяна Григорьевна, методист ГНМЦ

Чиж Людмила Алексеевна, директор лицея при ТПУ

Алешина Ольга Борисовна, учитель математики лицея при ТПУ

ЖЮРИ ТУРНИРА

Председатель жюри, отв. за «Старшую лигу»

Арбит Александр Владимирович, к.ф.-м.н., доцент механико-математического факультета ТГУ

Заместитель председателя жюри, отв. за «Младшую лигу»

Киреенко Светлана Григорьевна, учитель математики лицея при ТПУ

Члены жюри

Гензе Леонид Владимирович, заместитель декана механико-математического факультета ТГУ

Кобылина Мария Сергеевна, к.ф.-м.н., ассистент кафедры теории функций механико-математического факультета ТГУ

Тимошенко Егор Александрович, к.ф.-м.н., доцент механико-математического факультета ТГУ

Искорцева Оксана Александровна, учитель математики гимназии № 1

Кишкина Нина Кузьминична, учитель математики школы № 16

Конькова Луиза Арнольдовна, учитель математики гимназии № 1

Михайлова Александра Михайловна, учитель математики гимназии № 55

Шумская Лилия Акрамовна, учитель математики гимназии «Пеленг»

Абдрашитов Сергей Владимирович, студент физико-технического факультета ТГУ

Дучко Андрей Николаевич, студент механико-математического факультета ТГУ

Приступа Павел Викторович, студент факультета информатики ТГУ

Колупаев Михаил, учащийся 11 класса лицея при ТПУ

Кустов Виталий, учащийся 11 класса лицея при ТПУ

Рахимов Валентин, учащийся 11 класса лицея при ТПУ

Федоров Антон, учащийся 10 класса школы № 16

ПРАВИЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО БОЯ

Общие положения. Математический бой — это соревнование двух команд в решении математических задач. Он состоит из двух частей. Сначала команды получают условия задач и определенное время на их решение. При решении задач команда может использовать любую литературу, но не имеет права общаться по поводу решения задач ни с кем, кроме жюри. По истечении этого времени начинается собственно бой, когда команды в соответствии с правилами рассказывают друг другу решения задач. Если одна команда рассказывает решение, то другая оппонирует его, т.е. ищет в нем ошибки (недостатки), и если решения нет, то, возможно, приводит свое. При этом выступления оппонента и докладчика оцениваются жюри в баллах (за решение и за оппонирование). Если команды, обсудив предложенное решение, все-таки до конца задачу не решили или не обнаружили допущенные ошибки, то часть баллов (или даже все баллы) может забрать себе жюри боя. Если по окончании боя результаты команд отличаются не более чем на 3 балла, то считается, что бой закончился вничью. В противном случае побеждает команда, которая по окончании боя набирает больше баллов.

Вызовы. Бой состоит из нескольких раундов. В начале каждого раунда (если не происходит отказ от вызова, см. ниже пункт «Окончание боя») одна из команд *вызывает* другую на одну из задач, решения которых еще не рассказывались (например: «Мы вызываем команду соперников на задачу № 8»). После этого вызванная команда сообщает, *принимает ли она вызов*, т.е. согласна ли рассказывать решение задачи, на которую была вызвана (ответ можно обдумывать не более 1 минуты). Если да, то она выставляет *докладчика,* который должен рассказать решение, а вызвавшая команда выставляет *оппонента*, обязанность которого — искать в решении ошибки. Если нет, то докладчика обязана выставить команда, которая вызывала, а отказавшаяся отвечать команда выставляет оппонента. Команда, желающая сохранить выходы к доске, может отказаться выставлять оппонента. Тогда она в этом раунде не участвует (и изменить своего решения уже не может).

Ход раунда. *Доклад.* В начале раунда докладчик рассказывает решение. Доклад должен содержать ответы на все поставленные в задаче вопросы и доказательство правильности и полноты полученных ответов. В частности, докладчик обязан доказать каждое сформулированное им промежуточное утверждение либо сослаться на него, как на общеизвестное. Докладчик должен стремиться к ясности изложения, в частности, он обязан повторить по просьбе оппонента или жюри любую часть своего доклада. Время на доклад ограничивается 15 минутами, после чего жюри решает, разрешать ли докладчику рассказывать дальше.

Докладчик может иметь при себе записи и заглядывать в них, но жюри имеет право запретить ему ими пользоваться, если сочтет, что докладчик читает решение по бумажке. В докладе нельзя ссылаться на вычисления, проведенные с помощью калькулятора или иной вычислительной техники и не подтвержденные иным способом.

Докладчик имеет право:

– до начала выступления вынести на доску всю необходимую информацию (чертежи, вычисления и т.п.);

– не отвечать на вопросы оппонента, заданные до начала обсуждения;

– просить оппонента уточнить свой вопрос (в частности, докладчик может предложить свою версию вопроса: «Правильно ли я понимаю, что вы спросили о том-то и том-то?»);

– отказаться отвечать на вопрос, сказав, что: (а) он не имеет ответа на этот вопрос; (б) он уже ответил на этот вопрос (объяснив, когда и как); (в) вопрос некорректен или выходит за рамки научной дискуссии по поставленной задаче. В случае несогласия оппонента с основаниями (б) и (в) арбитром выступает жюри.

Докладчик не обязан:

– излагать способ получения ответа, если он может доказать правильность и полноту ответа другим путем;

– сравнивать свой метод решения с другими возможными методами, в том числе с точки зрения краткости, красоты и пригодности для решения других задач.

Докладчик обязан рассказывать решение в вежливой, корректной форме, критикуя действия оппонента, не допускать критики его личности, обращаться к оппоненту только на «Вы».

Оппонирование. Пока доклад не окончен, оппонент может задавать вопросы только с согласия докладчика, но имеет право просить повторения части решения и разрешать докладчику не доказывать какие-либо очевидные с точки зрения оппонента факты. После окончания доклада оппонент имеет право задавать вопросы докладчику. Если в течение минуты оппонент не задал ни одного вопроса, то считается, что у него нет вопросов. Если докладчик в течение минуты не начинает отвечать на вопрос, то считается, что у него нет ответа.

В качестве вопроса оппонент может:

– потребовать у докладчика повторить любую часть доклада;

– попросить уточнения любого из высказываний докладчика, в том числе: (а) попросить дать определение любого термина («Что Вы понимаете под ...»); (б) переформулировать утверждение докладчика своими словами и попросить подтверждения («Правильно ли я понимаю, что Вы утверждаете следующее: ...»);

– попросить докладчика доказать сформулированное тем неочевидное необщеизвестное утверждение (в спорных случаях вопрос об известности или очевидности решает жюри; во всяком случае, известными считаются факты, изучающиеся в общеобразовательной школе);

– после ответа на вопрос выразить удовлетворенность или мотивированную неудовлетворенность ответом.

Если оппонент считает, что докладчик тянет время, придумывая решение у доски, или что существенная часть доклада не является изложением решения обсуждаемой задачи, он имеет право (но не ранее, чем через 10 минут после начала доклада) попросить докладчика предъявить ответ (если таковой в задаче подразумевается) или план дальнейших рассуждений.

Оппонент обязан:

– формулировать свои вопросы в вежливой, корректной форме, обращаться к докладчику только на «Вы»;

– критикуя доклад, не допускать критики докладчика;

– повторять и уточнять свои вопросы по просьбе докладчика или жюри.

По итогам доклада и ответов на вопросы оппонент имеет право дать свою оценку докладу и обсуждению в одной из следующих форм: (а) признать решение правильным; (б) признать решение (ответ) в основном правильным, но имеющим недостатки и/или пробелы с обязательным их указанием; (в) признать решение (ответ) неправильным с указанием ошибок в обоснованиях ключевых утверждений доклада или контрпримеров к ним (или ответу), или указанием существенных пробелов в обоснованиях или плане решения. Если оппонент согласился с решением, он и его команда в этом раунде больше не участвуют.

Если оппонент имеет контрпример, опровергающий решение докладчика в целом, и этот контрпример сам является решением задачи, то оппонент имеет право заявить: «Я с решением не согласен, у меня есть контрпример», но сам контрпример пока докладчику не предъявлять (хотя жюри имеет право потребовать от оппонента предъявления контрпримера в письменном виде, чтобы убедиться в корректности заявления оппонента). В этом случае, если докладчик не изменит своего решения в течение минуты или после взятого командой перерыва, оппонент получает право предъявить докладчику упомянутый контрпример, причем докладчик и его команда уже не имеют права менять решение или ответ.

Аналогично, если решение требует перебора случаев, оппонент имеет право заявить «Я с решением не согласен, рассмотрены не все случаи», не указывая пока докладчику явно, какой именно случай не рассмотрен. Дальнейшие действия докладчика, жюри и оппонента такие же, как в ситуации с контрпримером.

Участие жюри в обсуждении. После окончания диалога докладчика и оппонента жюри задает свои вопросы. При необходимости оно может вмешиваться и раньше.

Выступающие и команда. Докладчик и оппонент могут обращаться к своим капитанам с просьбой о замене или перерыве для консультации. Другое общение между командой и докладчиком (оппонентом) допускается только во время полуминутного перерыва, который любая команда может взять в любой момент (при этом соперники тоже могут пользоваться этим временем). Каждая команда может взять в течение одного боя не более 6 полуминутных перерывов (см. также ниже пункт «Число выходов к доске»).

Перемена ролей. Некорректный вызов. Порядок вызовов. Если *по ходу дискуссии* жюри установило, что оппонент доказал отсутствие у докладчика решения и ранее не произошел отказ от вызова, то возможны два варианта. Если вызов на этот раунд был принят, то оппонент получает право (но не обязан) рассказать свое решение. Если оппонент взялся рассказывать свое решение, то происходит *полная перемена ролей*: бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование. Если же вызов на этот раунд не был принят, то говорят, что вызов был *некорректным.* В этом случае перемены ролей не происходит, а команда, вызывавшая некорректно, должна снова вызывать соперника в следующем раунде. Во всех остальных случаях в следующем раунде вызывает та команда, которая была вызвана в текущем раунде.

Принятый вызов всегда считается корректным!

Если же оппонент не доказал, что у докладчика нет решения, но выявил в предложенном решении некоторые конкретные недостатки, то, если ранее не произошел отказ от вызова и вызов на этот раунд был принят, оппонент получает право (но не обязан) устранить все (или некоторые) из этих недостатков (*«залатать дыры»*). Такое же право оппонент получает, если он доказал, что у докладчика нет решения, но отказался рассказывать собственное решение. Если оппонент взялся «залатывать дыры», то происходит *частичная перемена ролей*: оппонент обязан сформулировать предварительно, что именно он будет делать (например, разбирать такой-то не разобранный докладчиком случай, доказывать такое-то недоказанное докладчиком утверждение или что-либо еще), а бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование сформулированных утверждений. *При проверке корректности вызова частичная перемена ролей невозможна.*

Обратной перемены ролей ни в каком случае не происходит!

Число выходов к доске. Каждый член команды имеет право выйти к доске в качестве докладчика или оппонента не более двух раз за бой. Команда имеет право *не более трех раз за бой* заменять докладчика или оппонента, причем каждый раз выход засчитывается как тому, кого заменили, так и тому, кто вышел на замену. Кроме того, при замене время, отведенное команде на перерывы, уменьшается на 1 минуту.

Отказ от вызова. Окончание боя. В любой момент боя команда, которая должна вызывать, может отказаться делать это (обычно это происходит, когда у команды больше нет решенных задач, если она не хочет делать вызов, который может оказаться некорректным). Тогда другая команда получает право (но не обязана) рассказывать решения оставшихся задач. При этом команда, отказавшаяся делать вызов, может выставлять оппонентов и получать баллы только за оппонирование, но рассказывать решения она уже не имеет права, даже если они у нее и появятся (то есть после отказа от вызова не происходит ни полной, ни частичной перемены ролей).

Бой заканчивается, когда не остается необсужденных задач либо когда одна из команд отказалась от вызова, а другая команда отказалась рассказывать решения оставшихся задач.

Первый вызов. Конкурс капитанов. Кто будет делать первый вызов, определяет команда, победившая в конкурсе капитанов. Он проводится в начале боя. Капитанам предлагается задача. Капитан, первым сообщивший жюри о своем желании отвечать, получает такое право. Если он рассказывает правильное решение, то он победил, а если неправильное — победил его соперник.

На решение задачи конкурса капитанов жюри отводит определенное время. Если за это время ни один из капитанов не высказал желания отвечать, жюри может заменить задачу или выявить победителя жребием.

При желании на конкурс вместо капитана можно выставить любого другого члена команды.

Начисление баллов. Каждая задача оценивается в 12 баллов, которые по итогам раунда распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри. Если докладчик рассказал правильное и полное решение, все 12 баллов достаются ему. Если же в решении были выявлены «дыры» (пробелы), то жюри по окончании дискуссии определяет их стоимость. После этого оппонент, как правило, сразу получает половину стоимости *обнаруженных им* дыр. Если некоторые из этих «дыр» были в ходе дискуссии полностью или частично закрыты, соответствующая часть остатка их общей стоимости распределяется между докладчиком и оппонентом пропорционально их вкладу в закрытие «дыр». При этом вкладом оппонента может признаваться не только закрытие им дыры (в случае полной или частичной перемены ролей), но и помощь докладчику в закрытии дыр путем высказанных *по окончании доклада* наводящих соображений. Все оставшиеся баллы жюри забирает себе.

Если не было полной перемены ролей, то оппонент не может получить больше 6 баллов.

Если ошибки или пробелы в докладе указаны самим докладчиком и не устранены его командой, то оппонент получает за них баллы так, как если бы он сам нашел эти недостатки. В частности, если, получив отказ от вызова, капитан вызывающей команды сразу признается, что у его команды нет решения, то команда соперников получает 6 баллов за оппонирование (которое в этом случае могло бы состоять из одной фразы: «У Вас нет решения»), а вызов признается некорректным. Докладчик и оппонент в этом случае не назначаются и выходы к доске не засчитываются.

Капитан. Во время боя только капитан может от имени команды обращаться к жюри и соперникам: сообщать о вызове или отказе, просить перерыв и т.д. Он имеет право в любой момент прекратить доклад или оппонирование представителя своей команды. Если капитан у доски, он оставляет за себя заместителя, исполняющего в это время обязанности капитана.

Во время решения задач главная обязанность капитана — координировать действия членов команды так, чтобы имеющимися силами решить как можно больше задач. Для этого капитан распределяет между членами команды задачи для решения (с учетом их пожеланий), следит, чтобы каждая задача кем-то решалась, организует проверку найденных решений. Капитан заранее выясняет, кто будет докладчиком или оппонентом по той или иной задаче и определяет всю тактику команды на предстоящем бое.

Жюри. Жюри является верховным толкователем правил боя. В случаях, не предусмотренных правилами, оно принимает решение по своему усмотрению. Решения жюри являются обязательными для команд.

Во время решения командами задач всякое существенное разъяснение условий задач, данное одной из команд, должно быть в кратчайшее время сообщено жюри всем остальным командам.

Жюри может снять вопрос оппонента (например, если он не по существу), прекратить доклад или оппонирование, если они затягиваются. Если жюри не может быстро разобраться в решении, оно может с согласия обоих капитанов выделить своего представителя, который продолжит обсуждение задачи совместно с докладчиком и оппонентом в другом помещении. При этом бой продолжается по другим задачам, а очки по этой задаче начисляются позже.

Жюри ведет протокол боя. Если одна из команд не согласна с принятым жюри решением по задаче, она имеет право немедленно потребовать перерыв на несколько минут для разбора ситуации с участием Старшего по лиге. После начала следующего раунда счет предыдущего раунда, как правило, изменен быть не может.

Жюри следит за порядком. Оно может оштрафовать команду за шум, некорректное поведение, общение со своим представителем, находящимся у доски. Жюри обязано мотивировать свои решения, не вытекающие непосредственно из правил боя.

Зрители. За ходом боя могут с разрешения жюри наблюдать зрители: к ним относятся все, кроме членов играющих команд и жюри боя. Зрители не имеют права общаться с командами, вслух комментировать ход боя или иным образом мешать его проведению. Зрители, нарушающие эти правила, обязаны по решению жюри боя покинуть помещение, где он проходит.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Младшая лига. I тур

1. Найдите наибольшее число, делящееся на 8, в записи которого нет одинаковых цифр.

2. Произведение трех натуральных чисел в 6 раз больше их суммы, а одно из чисел равно сумме двух других. Найдите все такие числа.

3. Имеются 5 металлических шариков и чашечные весы без гирь. Какие-то 3 шарика весят по 10 г, а про остальные известно лишь, что они весят одинаково. За какое наименьшее число взвешиваний можно гарантированно найти хотя бы один 10-граммовый шарик?

4. В клетках квадратной таблицы 3×3 расставлены знаки «+» и «–», как показано на рис. 1. Разрешается сменить в какой-либо строчке или каком-нибудь столбике все знаки на противоположные. Можно ли с помощью таких операций получить таблицу, изображенную на рис. 2? Ответ обоснуйте.

+	+	–
–	–	+
–	+	–

Рис. 1.

–	+	+
+	+	–
–	+	–

Рис. 2.

5. Докажите, что для любых положительных чисел x и y выполняется неравенство $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{x^2+y^4}\le\dfrac{1}{xy}$.

6. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 40°$. На сторонах AB и BC выбраны такие точки D и E соответственно, что $\angle EAD = 5°$ и $\angle ECD = 10°$. Найдите величину угла EDC.

7. На пятидесятой клетке полосы длиной 100 клеток стоит фишка. Играют двое. Каждый может своим ходом передвинуть фишку на одну или две клетки в ту или иную сторону. Запрещено ставить фишку на те клетки, где она уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер?

8. Решите в натуральных числах уравнение $(x!+199)=y!(z!+99)$.

Младшая лига. II тур

9. В десятичной записи числа $\frac{3}{7}$ вычеркнули 2008-ю цифру после запятой. Что больше: полученное число или $\frac{3}{7}$?

10. В треугольнике отмечены все вершины, середины всех сторон и точка пересечения медиан. Можно ли в отмеченных точках расположить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 таким образом, чтобы суммы чисел вдоль каждой стороны и вдоль каждой медианы оказались равными? Ответ обоснуйте.

11. Каждая из расположенных по кругу 12 ламп может находиться в одном из двух состояний: гореть или не гореть. За один ход можно изменить состояние любых трех ламп, расположенных подряд. Вначале горит только одна лампа. Можно ли добиться того, чтобы горели все 12 ламп?

12. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = CD = EF$, $\angle A = \angle C = \angle E$ и $\angle B = \angle D = \angle F$. Докажите, что $BC = DE = FA$.

13. Найдите все такие натуральные числа B, для которых из трех следующих утверждений два будут верными, а одно — ошибочным:
1) $(B + 17)$ является квадратом натурального числа;
2) $(B - 25)$ делится без остатка на 10;
3) $(B - 72)$ является квадратом натурального числа.

14. Король обошел все поля шахматной доски, побывав на каждом по одному разу. Когда соединили центры полей, по которым он последовательно проходил, получилась ломаная без самопересечений. Найдите наибольшее возможное число диагональных ходов.

15. Берендей и Снегурочка по очереди стирают буквы в названии «Берендеевы поляны». За один ход стирают либо только одну букву, либо одну букву и все такие же буквы. Выигрывает тот, кто стирает последнюю букву. Начинает Снегурочка. Кто выигрывает при правильной игре?

16. Можно ли, пользуясь только операциями сложения, вычитая и умножения, составить из многочленов $f(x)$ и $g(x)$ выражение, равное x, если:
а) $f(x) = x^2 + x,\ g(x) = x^2 + 2$; б) $f(x) = x^2 + x,\ g(x) = x^2 - 2$?

Младшая лига. III тур

17. Даны два числа: 79^{26} и 243^{21}. Определите бо́льшее из них. Ответ обоснуйте.

18. В записи ***5 : 11 = ** замените звездочки цифрами так, чтобы получилось верное равенство.

19. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM. Найдите углы треугольника, если известно, что $BM = AC$.

20. Обозначим через $P(n)$ произведение всех цифр натурального числа n. Вычислите $P(100) + P(101) + ... + P(200)$.

21. Докажите, что для сторон a, b и c произвольного треугольника выполняется неравенство $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

22. Всегда ли можно в вершинах многогранника расставить натуральные числа так, чтобы в любых двух вершинах, соединенных ребром, стояли числа, не взаимно простые (имеющие общий делитель, больший 1), а в любых двух вершинах, несоединенных ребром — взаимно простые?

23. Найдите все пары простых чисел (p, q) при которых уравнение $x^4 + (q-2)x = p - 4$ имеет, по крайней мере, один целый корень.

24. Во время первенства класса по шахматам двое участников, сыграв одинаковое количество партий, заболели и выбыли из турнира, а остальные участники доиграли турнир до конца. Играли ли между собою участники, которые выбыли из турнира, если всего было сыграно 23 партии? (Турнир проводился в один круг: участники друг с другом играли только одну партию).

Старшая лига. I тур

25. В однокруговом чемпионате по матбоям участвовали 16 команд из 16 разных школ (т.е. каждая команда играла с каждой ровно по одному разу). Каждый бой проходил в одной из школ-участниц. Могло ли по окончании чемпионата случиться так, что каждая команда сыграла во всех школах, кроме своей?

26. На доске вначале записаны два числа: 9 и 10. За один ход разрешается выбрать любое число на доске, увеличить его на сумму цифр любого из двух находящихся в данный момент на доске чисел (в том числе на сумму цифр выбранного числа) и записать получившееся число на доске, а выбранное стереть. Можно ли добиться, чтобы в итоге на доске остались числа 2008 и 2009?

27. По дороге из пункта А в пункт Б и обратно ходят пять автобусов. Они идут без остановок с одинаковыми скоростями, и каждый из них, дойдя до конца маршрута, разворачивается, стоит 15 минут и идет обратно. Однажды Вася, не застав автобуса в пункте А, отправился в пункт Б пешком. При этом ему 20 раз встречались автобусы, идущие навстречу. Сколько раз автобусы обгоняли Васю, если придя в пункт Б, Вася не застал там ни одного автобуса?

28. Пусть a, b, c — положительные числа такие, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$.

29. Все стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равны, а $\angle BCD = 2\angle ACE$. Найдите $\angle ACE$.

30. Параболы $y = x^2 + ax + b$ и $y = -x^2 + cx + d$ не имеют общих точек. Докажите, что есть прямая, от которой они лежат по разные стороны.

31. Сколько чисел вида $\overline{ababab}$ делится на 217?

32. При каком наибольшем n по кругу можно расставить n различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних?

Старшая лига. II тур

33. Докажите, что в записи $2008^2-2007^2-...-2^2-1^2$ можно некоторые минусы поменять на плюсы так, что значение получившегося выражения будет равно 2008.

34. Решите в простых числах уравнение $p^2+q=37q^2+p$.

35. Несколько (больше одного) человек, каждый из которых вначале имеет 300 долларов, играют в казино. Один раунд игры заключается в следующем. Все игроки отдают по 10 долларов крупье, затем один из них по жребию объявляется проигравшим. Он раздает все свои деньги поровну всем остальным и выходит из игры. В итоге оказалось, что у последнего оставшегося игрока капитал вновь составляет 300 долларов. Сколько человек пришли в казино?

36. d_1, d_2, d_3 — длины медиан треугольника, P — произвольная точка плоскости, а s_1, s_2, s_3 — расстояния от точки P до прямых, содержащих соответствующие медианы. Докажите, что одно из трех произведений d_1s_1, d_2s_2, d_3s_3 равно сумме двух других.

37. Квадрат 9×9 разрезан на квадраты 2×2 и «уголки» из трех клеток. Какое наибольшее количество квадратов 2×2 могло при этом получиться?

38. Сколько существует таких функций f: N → N, что при всех $n \in$ N $f(n) > 1$ и $f(n+3)\,f(n+2) = f(n+1) + f(n) + 36$?

39. Докажите для положительных x, y, z неравенство

$$\sqrt{4x^2+4x(y+z)(y-z)^2} < \sqrt{4y^2+4y(z+x)(z-x)^2} + \sqrt{4z^2+4z(x+y)(x-y)^2}.$$

40. 100 волейбольных команд сыграли однокруговой турнир (каждая с каждой сыграла по одному разу), причем в каждом матче играли команды, имевшие к началу этого матча поровну очков. Сколько очков набрала команда-победительница? За победу в волейболе дают 1 очко, за поражение 0 очков, ничьих не бывает.

Старшая лига. III тур

41. Найдите все такие многочлены $p(x)$ с коэффициентом 1 при старшем члене, что $(x-8)p(2x)=8(x-1)p(x)$.

42. На столе лежат 8 гирек с массами 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 граммов, но неизвестно, какая гирька сколько весит. Как за 13 взвешиваний на чашечных весах без дополнительных гирь определить две самые легкие и две самые тяжелые гирьки?

43. По кругу стоят несколько человек. Каждый из них — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжет. Каждый из стоящих сказал: «Один из моих соседей тяжелее меня, а другой — легче меня». Известно, что веса любых двух людей различны. Может ли среди стоящих быть ровно 2007 лжецов?

44. Решить уравнение $(x^2-[x]+1)^2=[x^2]+\{x\}$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x, а $\{x\}$ — его дробную часть.

45. В треугольнике ABC точка F — середина BC, а E — основание биссектрисы угла A. Описанная окружность треугольника AEF пересекает стороны AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $BB_1 = CC_1$.

46. Все числа p, $p + 2$, $p + 2^n$, $p + 2^n + 2$ — простые. При каких натуральных n это возможно?

47. Докажите, что в любом треугольнике
$a(h_b + h_c) + b(h_a + h_c) + c(h_a + h_b) \geq 12S$.

48. Можно ли покрасить 2008 вершин правильного 2008^2-угольника в синий цвет и 2008 других вершин в красный цвет, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами синего цвета не совпадало с расстоянием между любыми двумя вершинами красного цвета?

УЧАСТНИКИ ТУРНИРА

Старшая лига

Команда 10 кл. лицея при ТПУ «Графы»: Сиволобов Виталий (*капитан*), Шапошников Антон, Кустов Александр, Николаева Алиса, Эйхорн Юрий, Ящук Максим (куратор — Киреенко С.Г.)

Команда 10 кл. гимназии № 1 «Немнимая единица»: Дель Владимир (*капитан*), Соловьев Виктор, Бочкова Наталья, Плотникова Ольга, Скотников Никита, Ярошенко Илья (куратор — Конькова Л.А.)

Команда 10 кл. Томского кадетского корпуса «Интеграл»: Бикбулатов Максим (*капитан*), Яткин Дмитрий, Пронин Александр, Елизаров Роман, Рудченко Никита, Тлеубаев Илья (куратор — Ефремова Г.К.)

Команда 10 кл. школы «Эврика-развитие»: Агапов Антон (*капитан*), Еремин Александр, Макроусов Илья, Сорокин Артем, Гитман Юрий, Крутько Мария (куратор — Сафонова А.И.)

Команда 10 кл. лицея № 7 «Версия»: Сербулов Алексей (*капитан*), Халметова Вероника, Гулиева Гуля, Зепс Валдис, Якимук Алексей, Полиенко Данила (куратор — Мартынова Л.Г.)

Команда 10 кл. гимназии № 29 «Гранит науки»: Акелькин Андрей (*капитан*), Ширина Юлия, Палтусова Тамара, Киселев Александр, Бродская Ева, Осташевский Илья (куратор — Вологжанина Е.И.)

Команда 10 кл. гимназии № 29 «Маатив»: Морев Андрей (*капитан*), Тихонова Ирина, Коваль Татьяна, Сиротин Владимир, Королева Марина, Мукитова Анжелика (куратор — Вологжанина Е.И.)

Команда 10 кл. школы № 58 «Сибирячка»: Егоферов Ильдар (*капитан*), Евсеев Иван, Болтовсий Кирилл, Форманчук Светлана, Мавколенко Анастасия, Овчинникова Евгения (куратор — Серебрянская Н.Д.)

Младшая лига

Команда 9 кл. гимназии № 55 «Мозголомы»: Хайруллин Рустам (*капитан*), Кузнецов Евгений, Сибирякова Наталья, Кондратенко Екатерина, Антоненко Татьяна, Ковалевская Анастасия (куратор — Михайлова А.М.)

Команда 9 кл. гимназии № 1 «Экстремум»: Никифоров Дмитрий (*капитан*), Плюскова Ольга, Воробьев Валерий, Нургалиев Дарий, Казанцев Иван, Купреев Дмитрий (куратор — Конькова Л.А.)

Команда 9 кл. лицея № 7 «Мозголомы»: Кушнерова Ирина (*капитан*), Петренко Светлана, Песяк Федор, Шороховецкий Сергей, Белоконева Дарья, Самойленко Николай (кураторы — Брагина Е.Л., Смоленцева О.И.)

Команда 8–9 кл. школ №№ 8, 41, гимназии № 29 «Мужики и Даша»: Зиновьев Дмитрий (*капитан*), Самолюк Сергей, Леонова Дарья, Федоров Евгений, Биньковский Антон, Цавнин Алексей, Россамахин Дмитрий (кураторы — Беленкова Н.П., Кишкина Н.К.)


Команда 9 кл. гимназии № 55 «Константа»: Аветисян Мелик (*капитан*), Гусейнов Виталий, Шутов Евгений, Мясников Алексей, Павлюченко Денис, Шумихин Владимир (куратор — Михайлова А.М.)

Команда 9 кл. школы № 58 «*XYZ*»: Таширев Иван (*капитан*), Стоцкий Виталий, Грицевич Максим, Галиева Галина, Балабанова Екатерина, Киселева Наталья (куратор — Воронцова Н.Г.)









ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

49. Найдите все такие пары действительных чисел x и y, для которых выполняется неравенство $y^2 + y + \sqrt{y - x^2 - xy} \le 3xy$.

50. Докажите, что среди чисел вида $7^m + 7^n$, где m, n — натуральные, нет ни одного квадрата целого числа, но есть бесконечное множество кубов целых чисел.

51. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC, DE и DF — биссектрисы треугольников ABD и CBD. Отрезки BD и EF пересекаются в точке M. Докажите, что $DM = 1/2\,EF$.

52. Найдите функцию f, если известно, что при всех $x \ne 0$ выполняется равенство $(x+1)f(x) = 1 - f(1/x)$, $f(0) = 1$.

53. На нижней горизонтали доски размером 2×25 выстроились фишки с номерами от 1 до 25 по порядку. За один ход можно переставить одну фишку на пустую соседнюю по горизонтали или вертикали клетку. За какое наименьшее число ходов можно расставить все фишки на нижней горизонтали в обратном порядке?

54. Выясните, конечно или бесконечно число решений в натуральных числах уравнения $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 3$.

55. Ветка кустарника имеет один лист сверху и, кроме того, n пар листьев (листья одной пары растут из одной точки стебля). Двое по очереди срывают листья. За один ход можно сорвать либо один любой лист, либо любую пару листьев, растущих из одной точки. Выигрывает тот, кто сорвет последний лист. При каких n побеждает начинающий, а при каких — его противник, если оба играют наилучшим образом?

56. На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие 3 вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев ломаной особой, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особых пар четно.

57. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ xy + yz + zx = 2. \end{cases}$

58. Можно ли отметить на плоскости 225 точек так, чтобы наибольшее из расстояний между ними было не больше 21, а наименьшее — не меньше 3?

59. Произведение двух положительных чисел больше их суммы. Докажите, что эта сумма больше четырех.

60. В лес за грибами пошли 11 девочек и n мальчиков. Вместе они собрали n^2+9n-2 гриба, причем все они собрали поровну грибов. Кого было больше: мальчиков или девочек?

61. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D такая, что $AD : DC = AB : BC$. Докажите, что угол C — тупой.

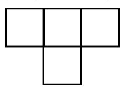
62. Восемь команд провели однокруговой турнир по волейболу. Доказать, что найдутся 4 команды A, B, C, D такие, что A выиграла у остальных трех команд, B — у C и D, а C — у D.

63. Докажите, что ни один многочлен с целыми коэффициентами не может принимать в точке 7 значение 11, а в точке 11 — значение 13.

64. Какое из положительных чисел a или b больше, если $a(1-b)>\frac{1}{4}$?

65. Найдите все натуральные числа n, для которых сумма $1!+2!+3!+\ldots+n!$ является точным квадратом.

66. Двое играют в такую игру: первый называет произвольное число от 1 до 10, второй прибавляет к нему одно из чисел от 1 до 10 и называет сумму, затем первый снова прибавляет к этой сумме одно из чисел от 1 до 10 и называет новую сумму и т.д. Выигрывает тот, кто первым назовет 100. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его противник?

67. Можно ли в клетках таблицы размером 6×6 записать числа от 1 до 36 так, чтобы сумма чисел во всех фигурах вида  делилась на 2?

68. Докажите, что если в трапеции диагонали перпендикулярны, то сумма квадратов длин диагоналей равна квадрату суммы длин оснований.

69. Решите уравнение $(4x^3-8)(3^{\sin x}-1)+(2^{x^3}-4)\sin x=0$.

70. Решите в целых числах x и y уравнение $3^x-2^y=1$.

РЕШЕНИЯ

Младшая лига. I тур

1. *Ответ.* 9876543120. *Указание.* Число, составленное из трех последних цифр, должно делиться на 8.

2. *Ответ.* (1; 12; 13), (2; 6; 8), (3; 4; 7). *Решение.* Пусть a, b, $a + b$ — данные числа, тогда $ab(a + b) = 12(a + b)$, отсюда $ab = 12$. Значит, $\{a; b\} = \{1; 12), \{2; 6\}, \{3; 4\}$.

3. *Ответ.* 2. *Решение.* Выберем две пары шариков и сравним вес в каждой паре. Если оба раза было равновесие, то 10 г весит оставшийся пятый шарик. То же верно, если оба раза один из шариков перевесил другой. Если же равновесие наблюдалось только в одном взвешивании из двух, то оба шарика равной массы весят 10 г.

4. *Ответ.* Нет, нельзя. *Указание.* В любом квадрате 2×2 таблицы при таких операциях сохраняется четность числа знаков. Заметим, что квадраты 2×2 в левых верхних углах таблиц содержат знаки, числа которых различны по четности.

5. *Указание.* Достаточно заметить, что $x^4 + y^2 \geq 2x^2y$, $x^2 + y^4 \geq 2xy^2$. Поэтому $\dfrac{x}{x^4 + y^2} + \dfrac{y}{x^2 + y^4} \leq \dfrac{x}{2x^2y} + \dfrac{y}{2xy^2} = \dfrac{1}{xy}$. Равенство выполняется при $x = y = 1$.

6. *Ответ.* $\angle EDC = 85°$. *Решение.* В треугольнике ABC (рис. 3) $\angle BAC = 90° - \angle CBA = 50°$, а потому $\angle CEA = 45°$. Отсюда $EC = AC$. С другой стороны, $\angle DCA = 80°$, а потому $\angle CDA = 50°$. Следовательно, $CD = CA$, а тогда $CE = CD$. Из треугольника CED находим, что $\angle EDC = 85°$.

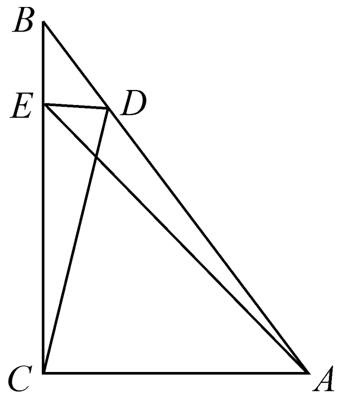


Рис. 3.

7. *Ответ.* Начинающий. *Указание.* Будем закрашивать клетки, на которых побывала фишка. Начинающий должен сделать первый ход на 49-ю клетку, а далее осуществлять свои ходы таким образом, чтобы закрашенные клетки выстраивались сплошной полосой. Например, если второй ставит фишку на 47-ю клетку, то первый — на 48-ю; если второй ставить фишку на 48-ю клетку, то первый — на 47-ю; или же второй — на 51-ю, тогда первый — на 52-ю. Таким образом, игра будет продолжаться либо только в правой части полосы, либо в левой. А так как после каждого хода первого в той части полосы, где проходит игра, будет оставаться четное количество клеток, то за ним последний ход, а значит, и победа.

8. *Ответ*. (1; 2; 1). *Решение*. 1) Если $x > 1$ и $y > 1$, то $x!$ и $y!$ — четные числа. Тогда в левой части уравнения нечетное число, а в правой — четное.
2) Пусть $x = 1$. Имеем: $1 + 199 = y!\,(z! + 99)$, $200 = y!\,(z! + 99)$,
$z! + 99 \geq 100 \Rightarrow y = 2$ и $z = 1$.
3) Пусть $y = 1$. Имеем: $x! + 199 = z! + 99$, $x! + 100 = z! \Rightarrow z > 3$. Тогда $z! \vdots 3$.
Если $x = 1$, то $101 = z!$, нет решений;
если $x = 2$, то $102 = z!$, нет решений;
если $x \geq 3$, то $x! \vdots 3$, но $100 \equiv 1 (\bmod 3) \Rightarrow$ нет решений.

Младшая лига. II тур

9. *Ответ*. Полученное число. *Решение*. Поскольку $\frac{3}{7} = 0,(428571)$, то 2008-я цифра после запятой равняется 5. Если ее вычеркнуть, то на ее место встанет 7, то есть полученное число будет бóльшим.

10. *Ответ*. Нет, нельзя. *Решение*. Суммы чисел по трем отрезкам, которые выходят из одной вершины треугольника, должны быть равными для разных вершин. С другой стороны, это равняется сумме всех расположенных чисел вместе с удвоенным числом этой вершины. Поэтому числа в разных вершинах должны быть одинаковыми, что невозможно по условию.

11. *Ответ*. Нельзя. *Решение*. Занумеруем лампы, начиная с горящей, по кругу числами от 1 до 12. Ламп с номерами, не делящимися на 3, четное число (8), но количество горящих из них нечетно.

12. *Решение*. Продолжим стороны BC, DE, AF до пересечения в точках K, L, M (как показано на рис. 4). Из условия задачи следует, что треугольники ABK, CDL, EFM равны (по стороне и прилегающим к ней углам). Значит, углы треугольника KLM равны, то есть он равносторонний. Следовательно, имеют место следующие равенства: $KL = LM = MK$, $KB = LD = MF$, $CL = EM = AK$.

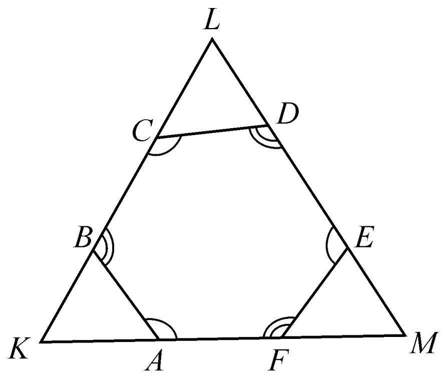


Рис. 4.

Вычитая из первого равенства второе и третье, получаем требуемое: $BC = DE = FA$.

13. *Ответ*. 2008. *Решение*. Предположим, что $(B - 25)$ делится без остатка на 10, тогда число B оканчивается цифрой 5. Но тогда остальные утверждения являются ошибочными, поскольку точные квадраты не могут оканчиваться цифрами 2 и 3. Таким образом, ошибочным может быть только второе утверждение. Для некоторых натуральных чисел n и m

будем иметь: $B + 17 = n^2$, $B - 72 = m^2$. Откуда следует, что $(n - m)(n + m) = 89$. Число 89 является простым, а потому $n = 45$, $m = 44$. Остается убедиться, что число $B = 2008$ действительно удовлетворяет условию задачи.

14. *Ответ.* 49. *Решение*. На рис. 5 король сделал 49 диагональных ходов. Как доказать, что число 49 максимально возможное? Каждый диагональный ход проходит через один «узел» — общую точку 4-х клеток шахматной доски. Всего узлов 49. Два раза пройти через один и тот же узел без самопересечения пути невозможно.

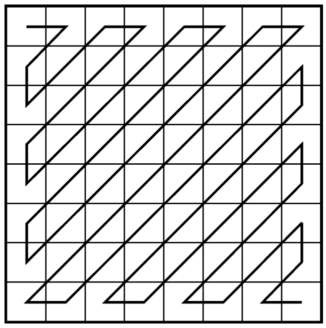


Рис. 5.

15. *Ответ.* Снегурочка. *Решение*. Первым ходом Снегурочка может стереть четыре буквы «Е» и расположить остальные буквы так: БРДВЫЫННПОЛЯ. Далее на каждый ход Берендея Снегурочка может отвечать, стирая буквы, симметрично расположенные только что стертым Берендеем, и тем самым восстанавливать симметрию, нарушаемую Берендеем.

16. *Ответ.* а) Нет. б) Да. *Решение*. а) $f(2) = g(2) = 6$, а 2 не делится на 6. б) $x = (f - g)^2 + 2g - 3f$.

Младшая лига. III тур

17. *Ответ*. 243^{21}. *Решение*. $79^{26} < 81^{26} = 3^{104} < 3^{105} = (3^5)^{21} = 243^{21}$.

18. *Ответ*. 1045 : 11 = 95. *Решение*. Перепишем пример так:

***5 = ** × 11. Понятно, что число ** оканчивается на 5. Кроме того, оно больше 90, т.к. число 90 × 11 = 990 — трехзначное, а наше произведение четырехзначное. Отсюда ясно, что единственное подходящее число 95.

19. *Ответ.* 36°, 72°, 72°. *Решение*. Пусть точка D на стороне AB треугольника такова, что $AD = AC$ (рис. 6). Значит, $CM = BD$. Тогда треугольники ADM и ACM равны. Из этого следует, что $CM = MD = BD$, то есть треугольник BDM — равнобедренный. Тогда если $\angle ABC = \alpha$, то $\angle ADM = 2\alpha = \angle ACM = \angle BAC$. Из суммы углов треугольника ABC следует, что $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$, откуда получаем, что $\alpha = 36°$ и ответ задачи.

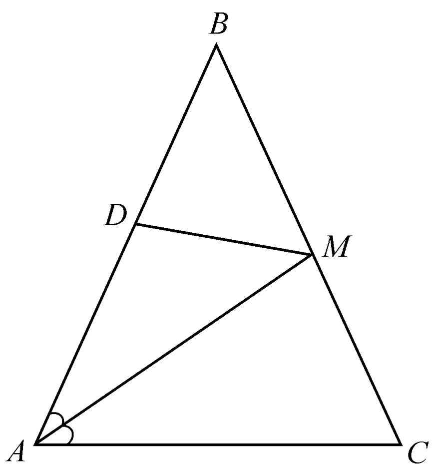


Рис. 6.

20. *Ответ.* 2025. *Решение.* $P(100) + P(101) + ... + P(200) = (1 + 2 + ... + 9) + 2(1 + 2 + ... + 9) + 3(1 + 2 + ... + 9) + ... + 9(1 + 2 + ... + 9) = (1 + 2 + ... + 9)(1 + 2 + ... + 9) = 45^2 = 2025$.

21. *Решение.* $a^3 + b^3 + 3abc = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > c(a^2 - ab + b^2) + 3abc = c(a^2 - ab + b^2 + 3ab) = c(a + b)^2 > c \cdot c^2 = c^3$.

22. *Ответ.* Всегда можно. *Решение.* Расставим на ребрах различные простые числа. Это всегда можно сделать, так как простых чисел бесконечно много. Напишем в каждой вершине произведение чисел, написанных на ребрах, выходящих из этой вершины. Такая расстановка будет удовлетворять условию задачи.

23. *Ответ.* (2, 5), (2, 11) и (5, 2). *Решение.* Рассмотрим три случая.

1) Если p и q — нечетные числа, то значение левой части уравнения будет четным числом, а правой части — нечетным числом, что невозможно.

2) Если p — четное число, то $p = 2$. Тогда после преобразований уравнение приводится к виду: $x(x^3 + q - 2) = -2$. Значит, число x — делитель числа –2, то есть x равняется 2, –2, 1 или –1. Этим значениям x соответствуют следующие значения q: –7, 11, –1 и 5. Из них подходят только два, откуда получаются пары (p, q), равные (2, 11) и (2, 5).

3) Если q — четное число, то $q = 2$. Тогда после преобразований уравнение приводится к виду: $((x - 1)^2 + 1)((x + 1)^2 + 1) = p$. Значит, один из множителей в левой части равен 1, откуда x равно 1 или –1. В обоих случаях $p = 5$, пара (5, 2) — еще одно решение уравнения.

24. *Ответ.* Не играли. *Решение.* Турнир с 6 участниками состоит из $(6 \cdot 5)/2 = 15$ партий, с 7 участниками — из 21 партии, а с 8 участниками — из 28 партий. Поэтому в турнире принимали участие (кроме тех, кто выбыл из турнира, A и B) 6 или 7 участников. Если было 6 (кроме A и B), то A и B принимали участие в 8-ми партиях. Если было 7 (кроме A и B), то A и B принимали участие в 2-х партиях. Предположим, что A и B сыграли между собою в турнире. Тогда в первом случае они сыграли бы с другими участниками 7 партий, а во втором случае 1 партию. Это означает, что в обоих случаях они не могли бы сыграть одинаковое количество партий. Получаем противоречие.

Старшая лига. I тур

25. *Ответ.* Не могло. *Решение.* Каждая команда сыграла в чемпионате 15 боев. Чтобы поиграть во всех школах, кроме своей, она должна была сыграть в каждой из них по одному разу. Но это значит, что в любой данной школе за время чемпионата должны были сыграть по одному разу 15 команд (все, кроме своей). Но в каждом бое участвуют две команды, поэтому общее число команд, игравших в данной школе, должно быть четным. Полученное противоречие показывает, что так, как сказано в условии задачи, случиться не могло.

26. *Ответ*. Можно. *Решение*. Поскольку число 1998 делится на 9, мы можем превратить пару (9, 10) в пару (9, 2008), прибавив нужное количество девяток к числу 10. А эту пару можно превратить в (2009, 2008), прибавляя к числу 9 сумму цифр числа 2008, равную 10.

27. *Ответ*. 15 раз. *Решение*. Возьмем любой из автобусов. Моменты, когда он попадался Васе навстречу и когда он обгонял Васю, очевидно, чередовались. При этом первым и последним из них были моменты, когда автобус шел Васе навстречу, иначе бы Вася застал бы автобус в пункте А или в пункте Б. Поэтому каждый автобус попался Васе навстречу на один раз больше, чем обогнал его. Значит, автобусы обгоняли Васю 15 раз.

28. *Решение*. Заметим, что $3 = a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ (т.к. $(a^2 + b^2)/2 \geq ab$ и т.д.). Поэтому $ab + 1 + bc + 1 + ca + 1 \leq 6$, откуда по неравенству Коши для трех переменных получаем:

$$\sqrt[3]{(ab+1)(bc+1)(ca+1)} \leq (ab+1+bc+1+ca+1)/3 \leq 2.$$

Поэтому $\dfrac{1}{1+ab}+\dfrac{1}{1+bc}+\dfrac{1}{1+ca} \geq \dfrac{3}{\sqrt[3]{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}} \geq \dfrac{3}{2}$.

29. *Ответ*. 30°. *Решение*. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Поэтому $\angle BAC = \angle BCA$. Аналогично, $\angle ECD = \angle CED$. Из треугольника ACE получаем: $\angle ACE + \angle CAE + \angle CEA = 180°$. Но по условию $\angle ACE = \angle BCA + \angle CED$. Поэтому $\angle BCA + \angle CED + \angle CAE + \angle CEA = 180°$. Заметим, что $\angle BCA + \angle CAE = \angle BAE$ и $\angle CED + \angle CEA = \angle AED$. Поэтому $\angle BAE + \angle AED = 180°$, т.е. $AB \parallel DE$. Так как по условию отрезки AB и DE еще и равны, то $ABDE$ — параллелограмм. Поэтому $BD = AE$. Но по условию $BC = CD = AE$. Значит, треугольник BCD — равносторонний, т.е. $\angle ACE = \angle BCD/2 = 30°$.

30. *Решение*. Это прямая $y = (x^2 + ax + b - x^2 + cx + d)/2 = (a + c)x/2 + (b + d)/2$. Действительно, она делит пополам все отрезки, соединяющие точки наших парабол с одинаковыми абсциссами.

31. *Ответ*. 3. *Решение*. $\overline{ababab} = 10101\cdot\overline{ab} = 7\cdot 1443\cdot\overline{ab}$, а $217 = 7\cdot 31$. При этом число 31 — простое и число 1443 на него не делится. Поэтому число $\overline{ababab}$ делится на 217 тогда и только тогда, когда число $\overline{ab}$ делится на 31, то есть при $\overline{ab}$, равном 31, 62 и 93.

32. *Ответ*. При $n = 6$. *Решение*. Возьмем числа, расставленные по кругу с соблюдением условия. Пусть a и b — два соседних числа. Тогда после b идет число b/a, затем число $1/a$, дальше $1/b$, а за ним a/b. Следующим, чтобы соблюдалось условие задачи, должно быть число a. Но оно уже было вначале. Значит, круг должен замкнуться. Таким образом, по кругу с соблюдением условия задачи можно выписать не больше шести чисел. Вот пример, когда их ровно шесть: 2, 3, 3/2, 1/2, 1/3, 2/3.

Старшая лига. II тур

33. *Решение*. Заметим, что $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$. Поэтому $((n + 3)^2 - (n + 2)^2) - ((n + 1)^2 - n^2) = (2(n + 2) + 1) - (2n + 1) = 4$. Таким образом, между квадратами любых четырех идущих подряд натуральных чисел можно так расставить плюсы и минусы, что в результате получится 4. Разобьем 2008 данных квадратов на 502 таких четверки, и в каждой соответствующим образом расставим знаки. В итоге получится $4\times502 = 2008$.

34. *Ответ*. $p = 43$, $q = 43$. *Решение*. Перепишем уравнение в виде $p(p - 1) = q(37 - q)$. Поскольку числа p и q простые, то $(37 - q)$ делится на p, а $(p - 1)$ делится на q, т.е. найдутся такие натуральные числа n и k, что $37 - q = np$ и $p - 1 = kq$. Подставив эти значения в уравнение, получим $n = k$, тогда $37q - 1 = n^2q + n$. Следовательно, $n \le 6$. Перепишем последнее уравнение в виде $(37 - n^2)q = n + 1$. Из него получаем, что $n > 5$. Проверив единственно возможное значение $n = 6$, получаем единственное решение: $q = 7$, $p = 43$.

35. *Ответ*. 58. *Решение*. Пусть в казино пришло n человек. По ходу игры они заплатили крупье $10(n + (n - 1) + \ldots + 2) = 10(n(n + 1)/2 - 1)$ долларов. С другой стороны, поскольку последний игрок остался при своих, эта величина равна $300(n - 1)$ долларов. Решая получившееся уравнение, находим ответ.

36. *Решение*. Прямые, на которых лежат медианы треугольника, разбивают плоскость на шесть углов с общей вершиной O, в одном из которых (пусть он образован продолжениями медиан d_1 и d_2) лежит точка P. Прямая, проходящая через точку P параллельно медиане d_3, отсечет от этого угла треугольник OAB со сторонами $OA = kd_1$, $OB = kd_2$, $AB = kd_3$ (т.к. он подобен треугольнику, который, как хорошо известно, можно построить параллельными переносами медиан). Тогда $S_{\Delta POA} + S_{\Delta POB} = S_{\Delta OAB}$. Но $2S_{\Delta POA} = kd_1s_1$, $2S_{\Delta POB} = kd_2s_2$, $2S_{\Delta OAB} = kd_3s_3$, откуда и следует утверждение задачи.

37. *Ответ*. 6. *Решение*. Отметим клеточки квадрата так, как показано на рис. 7, *а*. Тогда в каждом квадрате 2×2 окажется ровно по одной закрашенной клеточке, а в каждом уголке — *не более* одной закрашенной клеточки. Значит, всего фигур получится не меньше 25. Пусть среди них k квадратов и m уголков. Тогда $m \geq 25 - k$, и потому всего в этих фигурах $4k + 3m \geq 4k + 3(25 - k) = 75 + k$ клеток. Но в квадрате 9×9 — 81 клетка. Поэтому $75 + k \leq 81$, т.е. $k \leq 6$. Пример, когда квадратов ровно 6, показан на рис. 7, *б*.

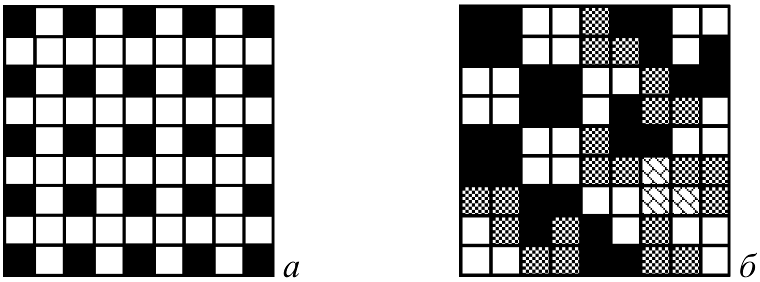


Рис. 7.

38. *Ответ*. Две. *Решение*. Заметим, что $(a_{n+4} - a_{n+2})a_{n+3} = a_{n+2} - a_n$. Поскольку $a_{n+3} > 1$, получаем $|a_{n+4} - a_{n+2}| < |a_{n+2} - a_n|$, если $a_{n+2} - a_n \neq 0$; если же $a_{n+2} - a_n = 0$, то и $a_{n+4} - a_{n+2} = 0$. Пусть $|a_3 - a_1| = N_1$. Тогда $|a_{2N+3} - a_{2N+1}| \leq |a_{2N+1} - a_{2N-1}| - 1 \leq \ldots \leq |a_3 - a_1| - N = 0$, т.е. при всех $n > N$ выполняется равенство $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 0$, т.е. $a_{2n+1} = a_{2n-1}$. Аналогично, при всех $n > N_2 = |a_2 - a_4|$ выполняется равенство $a_{2n+2} = a_{2n}$. Таким образом, начиная с некоторого места, последовательность выглядит так: $a, b, a, b, \ldots$ Из условия получаем $ab = a + b + 36$, т.е. $(a - 1)(b - 1) = 37$. Тогда один из множителей равен 37, а другой 1, поскольку $a, b > 1$. Иначе говоря, $\{a, b\} = \{2, 38\}$. Таким образом, начиная с некоторого номера, последовательность выглядит как …, 2, 38, 2, 38, 2, 38, … Однако согласно условию $a_n = a_{n+3}a_{n+2} - a_{n+1} - 36$, т.е. a_n однозначно выражается через последующие три члена. Поэтому последовательность с самого начала выглядит как 2, 38, 2, 38, … либо 38, 2, 38, 2, …

39. *Решение*.

$$\sqrt{4x^2 + 4x(y+z) + (y-z)^2} < \sqrt{4x^2 + 4x(y+z) + (z+x)^2} = 2x + y + z =$$
$$= (2y + x - z) + (2z + x - y) \leq |2y + x - z| + |2z + x - y| =$$
$$= \sqrt{4y^2 + 4y(x-z) + (z-x)^2} + \sqrt{4z^2 + 4z(x-y) + (x-y)^2} <$$
$$< \sqrt{4y^2 + 4y(x+z) + (z-x)^2} + \sqrt{4z^2 + 4z(x+y) + (x-y)^2}.$$

40. *Ответ*: 99 очков. *Решение*. 99 очков — такое бывает, если команды пронумерованы и последовательно сначала первая команда проигрывает всем остальным, затем вторая — всем оставшимся, потом третья и т.д. Докажем, что победитель должен набрать 99 очков.

□ Лемма. Если в какой-то момент одна из команд имеет ровно k очков, то в конце турнира у какой-нибудь из команд будет ровно k очков.

Доказательство. Заметим, что после каждой встречи, в которой играют команды, имеющие ровно по k очков, одна из команд по-прежнему будет иметь ровно k очков. Поэтому всегда будет команда, имеющая k очков. □

Расположим команды в порядке возрастания количеств очков и докажем индукцией по n, что n-я по счету команда выиграла у всех предыдущих и набрала $n - 1$ очков. База $n = 1$ следует из леммы. Переход. Рассмотрим $(n + 1)$-ю команду. По предположению индукции команды с 1-й по n-ю проиграли всем остальным, поэтому остальные команды набрали не менее n очков. В силу леммы найдется команда, набравшая ровно n очков. Ясно, что это будет именно $(n + 1)$-я команда, и она набрала эти очки, выиграв у команд с меньшими номерами. Заметим, что тогда сотая команда набрала ровно 99 очков.

Старшая лига. III тур

41. *Решение*. Подставляя в равенство из условия задачи $x = 1$, получаем, что $p(2) = 0$. Подставляя в него $x = 2$, получаем, что $p(4) = 0$. Наконец, подставляя $x = 8$, получаем, что $p(8) = 0$. Таким образом, числа 2, 4 и 8 — корни многочлена $p(x)$. Заметим теперь, что коэффициент при старшем члене многочлена $p(2x)$ в 2^n раз больше коэффициента при старшем члене многочлена $p(x)$, где n — степень многочлена $p(x)$. В нашем случае из условия видно, что $2^n = 8$, то есть $n = 3$. Значит 2, 4 и 8 — *все* корни многочлена $p(x)$, т.е. он по теореме Безу равен
$(x - 2)(x - 4)(x - 8) = x^3 - 14x^2 + 56x - 64$.

42. *Решение*. За семь взвешиваний по олимпийской системе (четвертьфиналы, полуфиналы и финал) находим самую легкую гирю весом 5. Затем за два взвешивания находим гирю 6 г. Она находится среди трех, которые взвешивались с гирей 5. Гиря в 12 г — единственная, вес которой превышает сумму двух самых легких, — одна из четырех гирь, выбывших в четвертьфиналах. Находим ее за четыре сравнения с суммой двух легких гирь. При этом гиря в 11 г либо найдется во время этих сравнений, либо окажется той, которая выиграла четвертьфинал у гири в 12 г. Таким образом, на ее отыскание ни одного взвешивания уже не нужно. Итого взвешиваний — не более $7 + 2 + 4 = 13$.

43. *Ответ*. Нет. *Решение*. Лжецы, очевидно, те, у кого оба соседа легче них (назовем таких лжецов *толстыми*), или оба соседа тяжелее них (назовем таких лжецов *тонкими*). Нетрудно видеть, что если двигаться по кругу, то толстые и тонкие лжецы будут чередоваться. Поэтому тех и других должно быть поровну, а всех лжецов вместе — четное число.

44. Ответ. $x = 1$. *Решение*. Перепишем это уравнение в виде $(x^2 - [x] + 1)^2 - [x^2 - [x] + 1] + 1 = x$, Обозначим $x^2 - [x] + 1$ через y. Тогда получаем $x = y^2 - [y] + 1$. Докажем неравенство: $x \le x^2 - [x] + 1$. Оно равносильно неравенству $x^2 - x - (x - \{x\}) + 1 \ge 0$, или $(x - 1)^2 + \{x\} \ge 0$, которое очевидно, т.к. $\{x\} \ge 0$. Тогда имеем: $y \le y^2 - [y] + 1 = x \le x^2 - [x] + 1 = y$, откуда $x = x^2 - [x] + 1$. Но из выше изложенного видно, что равенство достигается в том и только в том случае, когда $x = 1$.

45. *Решение*. По теореме о произведении секущей на ее внешнюю часть имеем: $CE \times CF = CA \times CC_1$, $BE \times BF = BA \times BB_1$. Поскольку $BF = CF$ и $CE/BE = BA/CA$, деля первое равенство на второе, получаем $CC_1/BB_1 = 1$, что и требовалось доказать.

46. *Ответ*. При $n = 1$ и $n = 3$. *Решение*. Заметим, что $p = 3$, иначе числа p и $p + 2$ дают при делении на 3 остатки 2 и 1 соответственно и одно из чисел $p + 2^n$ и $p + 2^n + 2$ делится на 3. Таким образом, надо найти все натуральные n, при которых просты числа $3 + 2^n$ и $5 + 2^n$. При делении на 7 число 2^n дает остатки 2, 4 и 1. В двух первых случаях одно из чисел $3 + 2^n$ и $5 + 2^n$ будет делиться на 7, что возможно, только если оно равно 7, то есть при $n = 1$ и $n = 2$. Проверка показывает, что $n = 1$ подходит, а $n = 2$ — нет. При $n > 2$ число 2^n должно давать при делении на 7 остаток 1, то есть n должно быть кратно 3. Кроме того, n должно быть нечетным, ибо иначе $5 + 2^n$ делится на 3. Таким образом, $n = 6k + 3$ и $2^n = 8 \times 64^k$. Поскольку 64 дает остаток 12 при делении на 13, число 8×64^k дает при делении на 13 остаток 8 при четном k и остаток 5 при нечетном k. Так как $5 + 8$ делится на 13, первое возможно только в случае, когда $5 + 2^n = 13$, то есть при $n = 3$. Во втором случае $k = 2l + 1$, и $2^n = 8 \times 64^k = 8^{4l+3}$, что при делении на 5 дает остаток 2. Но тогда $3 + 2^n$ делится на 5, что возможно только при $n = 1$.

47. *Решение*. Разделив обе части данного неравенства на $2S$, после простых преобразований получаем равносильное ему неравенство $h_b/h_a + h_c/h_a + h_a/h_b + h_c/h_b + h_a/h_c + h_b/h_c \ge 6$, которое верно, поскольку $h_c/h_a + h_a/h_c \ge 2$, $h_b/h_c + h_c/h_b \ge 2$ и $h_b/h_a + h_a/h_b \ge 2$.

48. *Ответ*. Нельзя. *Решение*. Назовем *весом* упорядоченной пары вершин 2008^2-угольника число вершин, которые мы минуем, если пойдем из первой вершины во вторую по часовой стрелке. Вес может, очевидно, принимать $2008^2 - 1$ значений: 0, 1, …, $2008^2 - 2$. Рассмотрим все пары, где первая вершина синяя, а вторая — красная. Всего их 2008^2, и по принципу Дирихле среди них найдутся две пары одного веса. Но тогда равны и веса пар, составленных из их первых точек и их вторых точек, а, значит, и расстояние между первыми (красными) вершинами равно расстоянию между вторыми (синими).

Решения к дополнительным задачам

49. *Ответ.* $x = y = 0$; $x = y = 1/2$. *Решение.* Из условия следует, что $y \ge x^2 + xy$. А тогда

$$y^2 + x^2 + xy + \sqrt{y - x^2 - xy} \le y^2 + y + \sqrt{y - x^2 - xy} \le 3xy,$$

$$y^2 - 2xy + x^2 + \sqrt{y - x^2 - xy} \le 0.$$

Таким образом, необходимо $x = y$ и $y - x^2 - xy = 0$. Отсюда находим указанные выше пары. Следует сделать проверку.

50. *Указание.* Предположим, что $7^m + 7^n$ является квадратом некоторого натурального числа. Так как $7^m + 7^n = 7^n(7^{m-n} + 1)$, $m > n$ и числа 7^n и $7^{m-n} + 1$ взаимно простые, то они также являются квадратами натуральных чисел. Итак, $7^{m-n} + 1 = b^2$, где $b > 2$ — натуральное число. Откуда следует, что $7^{m-n} = (b-1)(b+1)$. Любое из чисел $b-1$ и $b+1$ является ненулевой степенью числа 7. Поэтому их разность 2 делится на 7. Противоречие.

51. *Решение.* $BE/EA = BD/DA = BD/DC = BF/FC$.
Тогда $EF \parallel AC$, следовательно, $EM/MF = AD/DC = 1/1$.
DM — медиана EDF, $\angle EDF = \angle EDB + \angle FDB = 1/2ADB + 1/2CDB = 90°$.
$DM = 1/2EF$.

52. *Ответ.* $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$. *Решение.* $(x+1)f(x) = 1 - f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x = \dfrac{1}{x}$,

$$\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - f(x),\quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 - f(x)}{\frac{1}{x} + 1},\quad (x+1)f(x) = \frac{1 + xf(x)}{x+1},$$

$$f(x)((x+1)^2 - x) = 1,\quad f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

53. *Ответ.* За 360 ходов. *Решение.* Каждая фишка, кроме, возможно, какой-то одной, должна сделать ход по вертикали (а значит, не менее двух ходов). Поэтому вертикальных ходов не менее 2 · 24 = 48. Фишка номер 1, как и фишка номер 25, должна сделать не менее 24 ходов по горизонтали. Фишка номер 2, как и фишка номер 24, — не менее 22 ходов, и т.д. Таким образом, горизонтальных ходов не менее 2 · (24 + 22 + 20 + ... + + 4 + 2) = 312. Чтобы переставить фишки на 360 ходов, достаточно сначала по очереди поставить каждую из первых 24 фишек над теми полями, куда им надо встать, затем 25-ю фишку сдвигами до упора влево и каждую из первых 24 фишек сдвигами вниз.

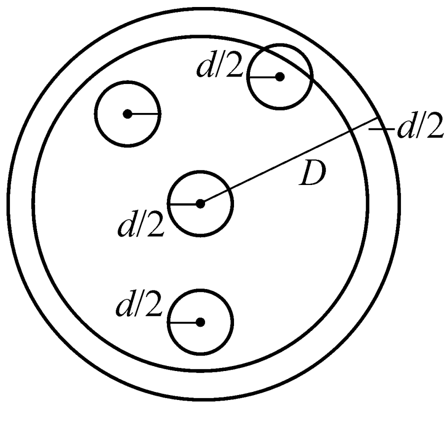
54. *Ответ.* Бесконечно. *Решение.* Поскольку уравнение можно переписать как $(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=6$, его решениями будут, например, $x=n+1$, $y=n$, $z=n-1$, где $n\in N$.

55. *Решение.* При любом n выигрышная стратегия есть у начинающего игру. Если n нечетно, начинающий игрок первым ходом может сорвать один лист пары, если n четно, он может сорвать верхний лист. В обоих случаях на ветке останется четное число пар и четное число одиночных листьев. Второй игрок вынужден сделать нечетным либо число одиночных листьев, либо число пар листьев. Первый игрок может все время восстанавливать четность, повторяя ход соперника.

56. *Решение.* Если взять 2 звена AB и BC и построить угол, симметричный углу ABC относительно точки B. Такие же углы построим для всех вершин ломаной. Пара несоседних звеньев ломаной — особая, если продолжение одного их них пересекает другое. Но если считать число особых пар, то их будет четное количество, т.к. по пути от A к C ломаная создает особую точку столько же раз при вхождении, сколько и при выхождении из нее.

57. *Ответ.* $x=y=z=\sqrt{2/3}$. *Решение.* Приравнивая $x^2+y^2+z^2=xy+$ $+yz+zx$, умножая обе части равенства на 2 и перенося все слагаемые из правой части в левую, получим уравнение $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=$ $=0$. Отсюда получаем равенство всех переменных, а затем — единственное решение $x=y=z=\sqrt{2/3}$.

58. *Ответ.* Нет. *Решение.* Пусть на плоскости даны N точек, D — наибольшее, а d — наименьшее из расстояний между ними. Возьмем любую из данных точек и построим круг с центром в этой точке. Все остальные точки окажутся внутри или на границе этого круга. Теперь рассмотрим круги радиусом $d/2$ с центрами во всех данных точках. Эти круги не перекрываются и их суммарная площадь равна $\pi Nd^2/4$. С другой стороны, все эти круги целиком содержатся в круге радиусом $D+d/2$, поэтому их суммарная площадь меньше площади большого круга, т.е. $\pi Nd^2/4<\pi(D+d/2)^2$. Следовательно, $d\sqrt{N}/2<$ $<D+d/2$, откуда $D/d>(\sqrt{N}-1)$. Однако при $N=225$, $D\le 21$ и $d\ge 3$ полученное неравенство не выполняется.



59. *Решение*. Пусть $ab > a + b$. Из неравенства Коши $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, следовательно, $ab > 2\sqrt{ab}$, откуда получаем, что $\sqrt{ab} > 2$, поэтому $a+b \geq 2\sqrt{ab} > 4$.

60. *Ответ*. Девочек. *Решение*. Из условия задачи следует, что n^2+9n-2 делится на $n+11$. Значит, на $n+11$ делится также $(n^2+9n-2)-$ $-(n-2)(n+11)=20$, откуда следует, что $n + 11 \leq 20$, значит $n \leq 9$. Мы получили, что мальчиков было не больше девяти. Значит, их было меньше, чем девочек.

61. *Решение*. Теорема синусов, примененная к треугольникам ABC и ADC, дает равенства $\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=\dfrac{DC}{\sin\angle DAC}$ и $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$, или $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DAC}$ и $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sin\angle ACB}{\sin\angle BAC}$.

Учитывая условие задачи и то, что углы DAC и BAC равны, получаем $\sin\angle ACD = \sin\angle ACB$. Так как углы ACB и ACD не равны, то последнее равенство означает, что их сумма равна 180°. Значит, больший из них — угол ACB — тупой.

62. *Решение*. Если считать, что за каждую победу команда получает 1 очко, а за проигрыш — 0 очков (ничьих нет), то количество очков, набранных за турнир всеми командами, равно количеству игр, то есть 28 ($= 8\times 7:2$). Тогда по принципу Дирихле найдется команда, набравшая не менее 4 очков. Назовем ее A, а те команды, у которых она выиграла — A_1, A_2, A_3, A_4. Эти четыре команды сыграли между собой 6 игр и набрали в них 6 очков. Значит, по принципу Дирихле найдется одна из команд A_1, A_2, A_3, A_4 (назовем ее B), которая набрала в играх с остальными тремя командами не менее двух очков, а те 2 команды, у которых она выиграла, назовем B_1 и B_2. Из этих двух команд назовем C ту, которая выиграла у второй, а вторую назовем D. Получили искомые команды.

63. *Доказательство.* Если $p(7) = 11$, а $p(11) = 13$, то $p(11) - p(7) = 2$. Но левая часть этого равенства делится на 4, а правая — нет.

64. *Ответ*. $a > b$. *Решение*. $\dfrac{1}{2} < \sqrt{a(1-b)} < \dfrac{a+1-b}{2}$; $1 < a + 1 - b \Rightarrow a > b$.

65. *Ответ*. $n = 3$ (единств.) *Решение.* $1! + 2! + 3! = 9$. При $n > 3$ последняя цифра суммы факториалов равна 3.

66. *Ответ*. Начинающий. *Решение.* Ясно, что тот, кто назовет одно из чисел 99, 98, 97, …, 90, проигрывает, поэтому тот, кто назовет число 89, сможет выиграть. Точно так же «выигрывающими» числами являются 78, 67, 56, …, 12, 1. Выигрывает начинающий.

67. *Решение*. Заметим, что числа, стоящие в клетках фигуры $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & b & \\ \hline a & q & c \\ \hline & d & \\ \hline\end{array}$ имеют одинаковую четность.

Так как $\left.\begin{array}{l} a+q+c+d-\text{четное}, \\ a+q+c+b-\text{четное} \end{array}\right\} \Rightarrow d-b-\text{четное}$.

Аналогично, $a-c$ — четное. Если q — четное, то a, b, c, d — четные, если q — нечетное, то a, b, c, d — нечетные. В таблице 6×6 можно разместить 8 фигур в виде креста. В заштрихованных клетках (их 24) числа одинаковой четности, но среди 36 чисел только 18 имеют одинаковую четность.

68. *Доказательство*. Пусть $ABCD$ — трапеция ($AD \parallel BC$). ΔACK — прямоугольный, если $CK \parallel BD$, т.к. лежит на прямой AD.

69. *Ответ*. $x=\sqrt[3]{2}$; $x=\pi n, n\in Z$. *Решение*. Если слагаемые в левой части уравнения не равны 0, то они имеют одинаковые знаки $\Rightarrow$

$$\begin{cases} (4x^3-8)(3^{\sin x}-1)=0, \\ (2^{x^3}-4)\sin x=0. \end{cases}$$

Первое уравнение $x^3=2$ (удовлетворяет второму уравнению);

$\sin x=0$ (удовлетворяет второму уравнению). $\Rightarrow$ $x=\sqrt[3]{2}$; $x=\pi n, n\in Z$.

70. *Ответ*. (1; 1), (2; 3). *Решение*. Если $3^x-1=2^y$, причем $x\neq1$, то x — четное число, т.е. $x = 2k$, но тогда $3^k-1=2^l$, $3^k+1=2^m$, откуда $2^m-2^l=2$, что возможно только при $m = 2$, $l = 1$.

С.Г. Киреенко, А.В. Арбит

Первый турнир математических боев г. Томска

Компьютерный набор и верстка Е.В. Иванова

Подписано в печать 1.08.2008 г. Формат 60×84/16.
Бумага «Классика». Гарнитура Times. Печать RISO.
Усл. п. л. 2,15. Уч.-изд. л. 2,31. Тираж 300 экз.

Издательство ТПУ, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30