# Задачи с параметрами. Взаимное расположение корней квадратного трехчлена.

*Алешина Ольга Борисовна,*
*учитель математики МБОУ лицей при ТПУ г. Томска*

## Квадратичная функция.

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

## *Квадратичная функция.*

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

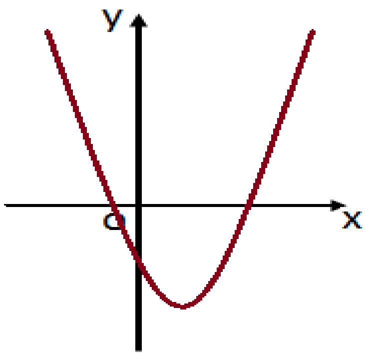
*Задание 1.* *Определить знаки коэффициентов* a,b,c *и дискриминанта D по эскизам графиков квадратных трехчленов.*

# Квадратичная функция.

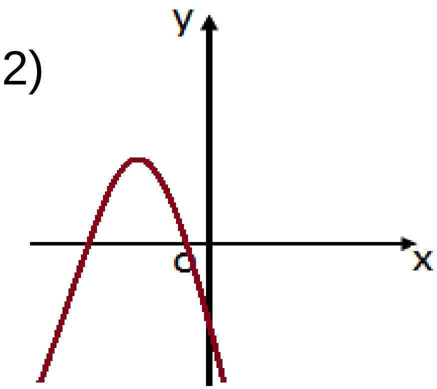
$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

***Задание 1.*** ***Определить знаки коэффициентов*** **a,b,c** ***и дискриминанта*** **D** ***по эскизам графиков квадратных трехчленов.***

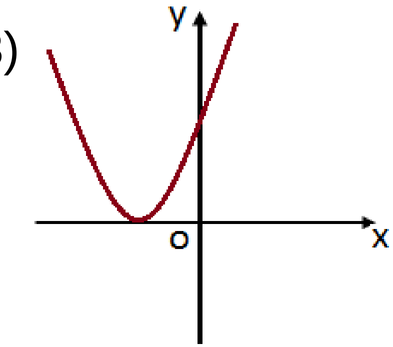
1)



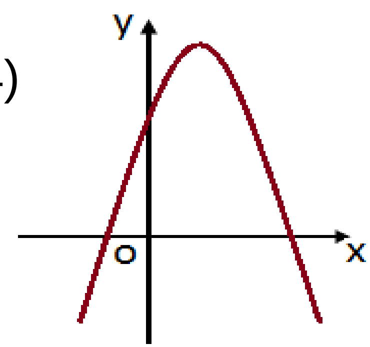

2)



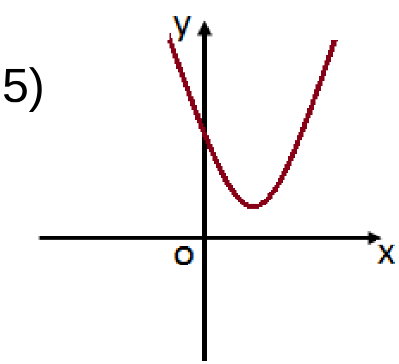

3)




4)




5)

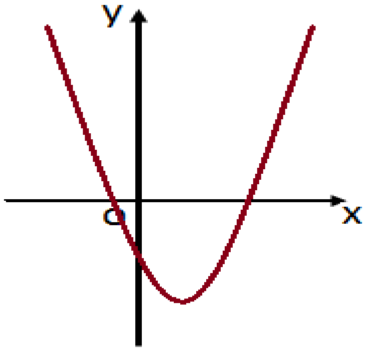


# *Квадратичная функция.*

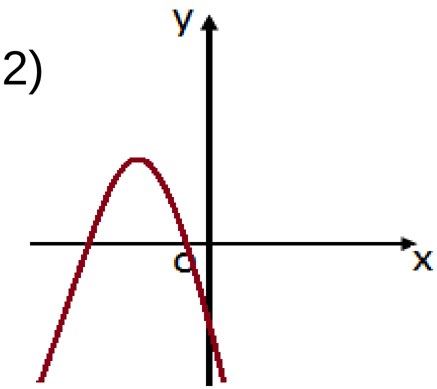
$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

***Задание 1.*** ***Определить знаки коэффициентов* a,b,c *и дискриминанта* D *по эскизам графиков квадратных трехчленов.***

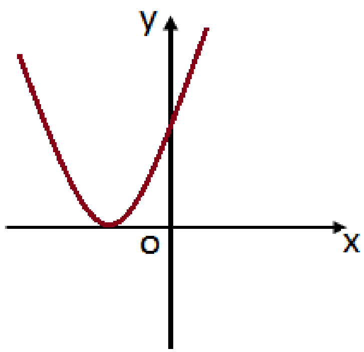
1)



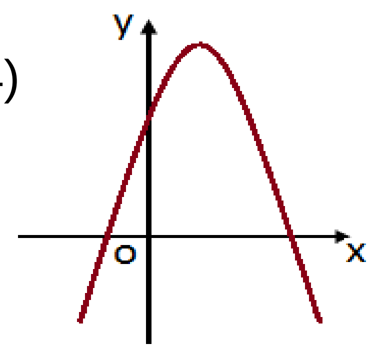

2)




3)

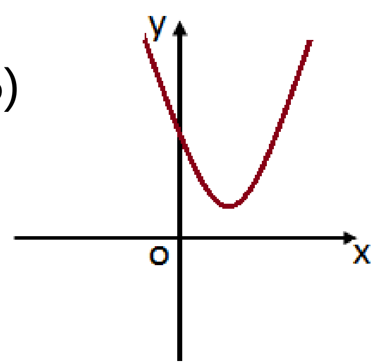



4)




$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

5)

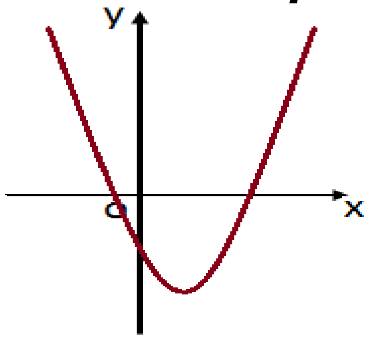


# Квадратичная функция.

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

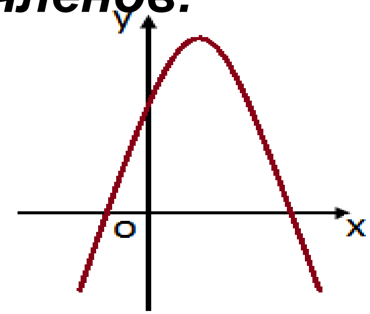
***Задание 1.*** ***Определить знаки коэффициентов* a,b,c *и дискриминанта* D *по эскизам графиков квадратных трехчленов.***

1)



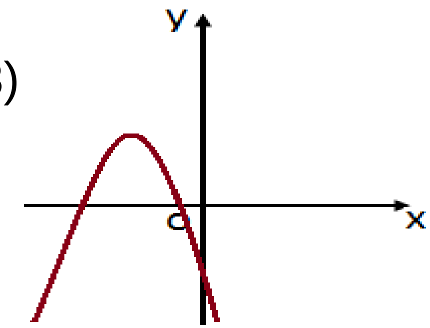

$a > 0; c < 0; D > 0; b < 0$

2)



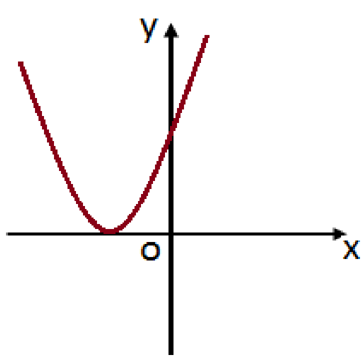

$a < 0; c > 0; D > 0; b > 0$

3)




$a < 0; c < 0; D > 0; b < 0$

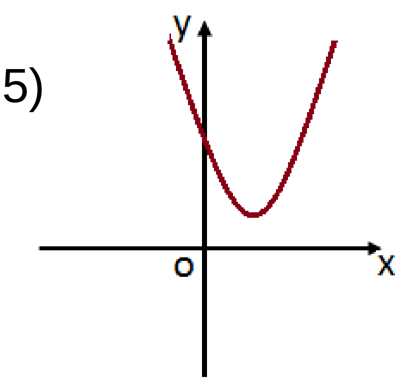
4)




$a > 0; c > 0; D = 0; b > 0$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

5)

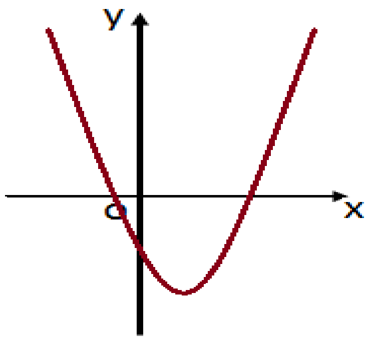



$a > 0; c > 0; D < 0; b < 0$

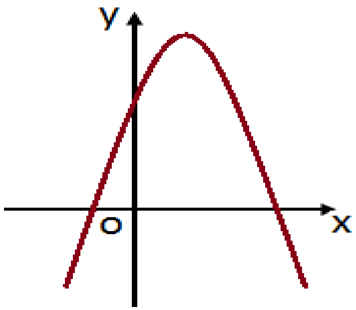
## Квадратичная функция.

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

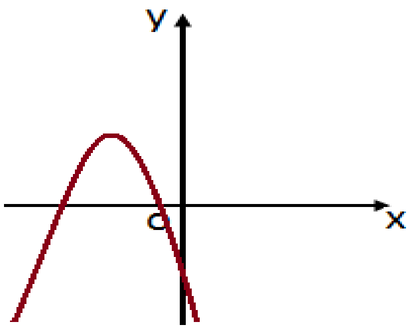
***Задание 1.*** ***.***

1) 


$a > 0; D > 0$

2) 


$a < 0; D > 0$

3) 


$a < 0; D > 0$

$$D > 0 \Leftrightarrow a \cdot f(x_0) < 0$$

***Задание 2.  Найти все значения параметра $b$, при которых только один корень квадратного трехчлена***

$x^2 - 2x(b+1) + 6b - 3$ ***больше 2.***

***Задание 2. Найти все значения параметра $a$, при которых только один корень квадратного трехчлена*** $x^2-2x(b+1)+6b-3$ ***больше 2.***

***Решение:***

$$x^2-2x(b+1)+6b-3=0,$$

$$D_1=(b+1)^2-(6b-3)=(b-2)^2,$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=3, \\ x_2=2b-1. \end{array}\right.$$

***Задание 2. Найти все значения параметра*** $a$***, при которых только один корень квадратного трехчлена*** $x^2 - 2x(b+1) + 6b - 3$ ***больше 2.***

***Решение:***

$$x^2 - 2x(b+1) + 6b - 3 = 0,$$

$$D_1 = (b+1)^2 - (6b-3) = (b-2)^2,$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = 2b - 1. \end{array}\right.$$

***Так как*** $x_1 > 2$***, то возможны два случая:***

***а)*** $x_2 \le 2,$ ***б)*** $x_1 = x_2,$

***Задание 2. Найти все значения параметра $a$, при которых только один корень квадратного трехчлена*** $x^2-2x(b+1)+6b-3$ ***больше 2.***

***Решение:***

$$x^2-2x(b+1)+6b-3=0,$$

$$D_1=(b+1)^2-(6b-3)=(b-2)^2,$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=3, \\ x_2=2b-1. \end{array}\right.$$

***Так как*** $x_1>2$, ***то возможны два случая:***

***а)***

$$x_2\le 2,$$

$$2b-1\le 2,$$

$$b\le 1{,}5;$$

***б)***

$$x_1=x_2,$$

$$3=2b-1,$$

$$b=2.$$

***Ответ:*** $b\in(-\infty;1{,}5]\cup\{2\}.$

***Задание 3. При каких значениях параметра $a$ число 2 находится между корнями квадратного уравнения***

$$x^2 + (4a+5)x + 3 - 2a = 0?$$

***Задание 3.*** ***При каких значениях параметра*** $a$ ***число 2 находится между корнями квадратного уравнения***

$$x^2+(4a+5)x+3-2a=0\,?$$

***Решение:*** $D=(4a+5)^2-4(3-2a)=16a^2+48a+13.$

***Задание 3. При каких значениях параметра $a$ число 2 находится между корнями квадратного уравнения***

$$x^2+(4a+5)x+3-2a=0\,?$$

***Решение:*** $D=(4a+5)^2-4(3-2a)=16a^2+48a+13.$

***1 способ.***

$$\begin{cases} D>0, \\ x_1<2, \\ x_2>2. \end{cases}$$

***Задание 3. При каких значениях параметра $a$ число 2 находится между корнями квадратного уравнения***

$$x^2+(4a+5)x+3-2a=0?$$

***Решение:*** $D=(4a+5)^2-4(3-2a)=16a^2+48a+13.$

***1 способ.***

$$\begin{cases} D>0, \\ x_1<2, \\ x_2>2. \end{cases}$$

***2 способ.***

***Рассмотрим функцию*** $f(x)=x^2+(4a+5)x+3-2a$

***- квадратичная функция, график парабола, ветви вверх.***

**Задание 3. При каких значениях параметра $a$ число 2 находится между корнями квадратного уравнения**

$$x^2+(4a+5)x+3-2a=0?$$

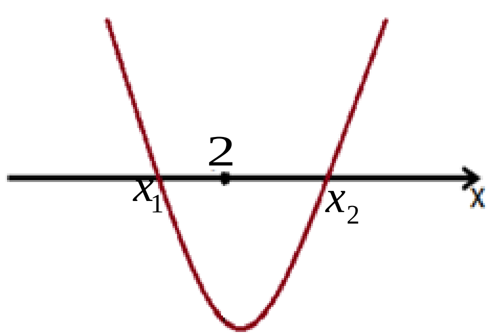
**Решение:** $D=(4a+5)^2-4(3-2a)=16a^2+48a+13.$

**1 способ.** $\begin{cases} D>0, \\ x_1<2, \\ x_2>2. \end{cases}$

**2 способ.**

**Рассмотрим функцию** $f(x)=x^2+(4a+5)x+3-2a$

**- квадратичная функция, график парабола, ветви вверх.**



***Задание 3. При каких значениях параметра $a$ число 2 находится между корнями квадратного уравнения***

$$x^2 + (4a+5)x + 3 - 2a = 0?$$

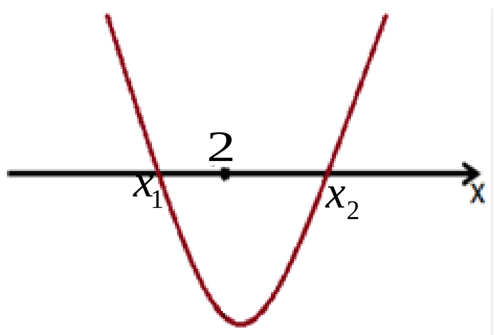
***Решение:*** $D = (4a+5)^2 - 4(3-2a) = 16a^2 + 48a + 13.$

***1 способ.***

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 < 2, \\ x_2 > 2. \end{cases}$$

***2 способ.***

***Рассмотрим функцию*** $f(x) = x^2 + (4a+5)x + 3 - 2a$ ***- квадратичная функция, график парабола, ветви вверх.***




$$x_1 < 2 < x_2 \Leftrightarrow f(2) < 0.$$

**Задание 3. При каких значениях параметра $a$ число 2 находится между корнями квадратного уравнения**

$$x^2+(4a+5)x+3-2a=0?$$

**Решение:** $D=(4a+5)^2-4(3-2a)=16a^2+48a+13.$

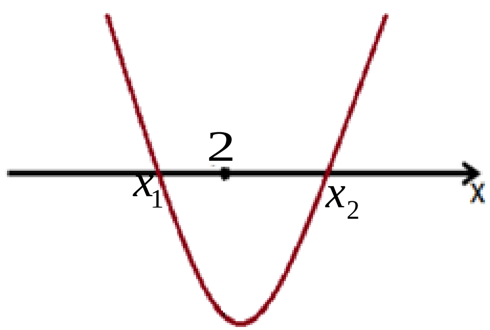
**1 способ.**

$$\begin{cases} D>0, \\ x_1<2, \\ x_2>2. \end{cases}$$

**2 способ.**

**Рассмотрим функцию** $f(x)=x^2+(4a+5)x+3-2a$

**- квадратичная функция, график парабола, ветви вверх.**




$$x_1<2<x_2 \Leftrightarrow f(2)<0.$$

$$f(2)=17+6a,$$

$$17+6a<0,$$

$$a<-\frac{17}{6}.$$

**Ответ:** $a\in\left(-\infty;-\frac{17}{6}\right).$

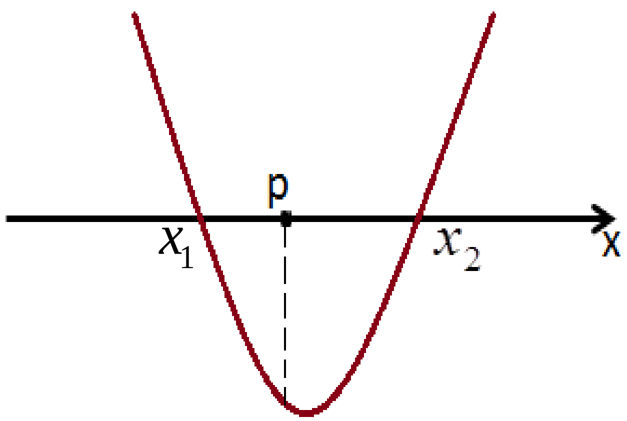
***Дано:*** $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; x_1 < x_2 (D > 0)$

***Утверждение 1.*** ***Для того чтобы корни уравнения f(x)=0 лежали по разные стороны от числа p, необходимо и достаточно, чтобы***

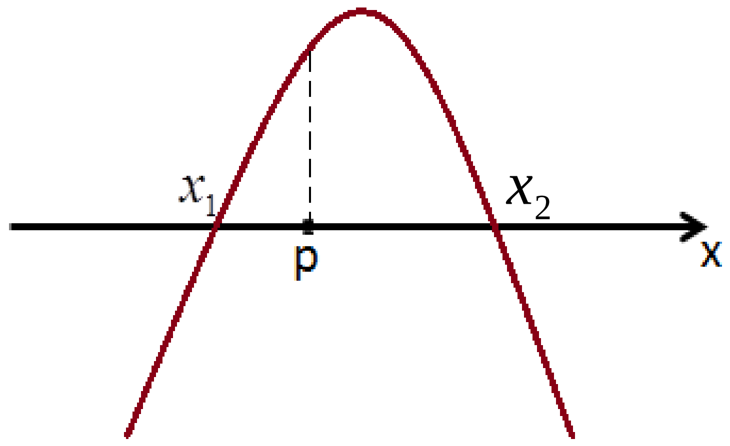
**Дано:** $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; x_1 < x_2 (D > 0)$

***Утверждение 1.*** ***Для того чтобы корни уравнения f(x)=0 лежали по разные стороны от числа p, необходимо и достаточно, чтобы***

$a > 0$



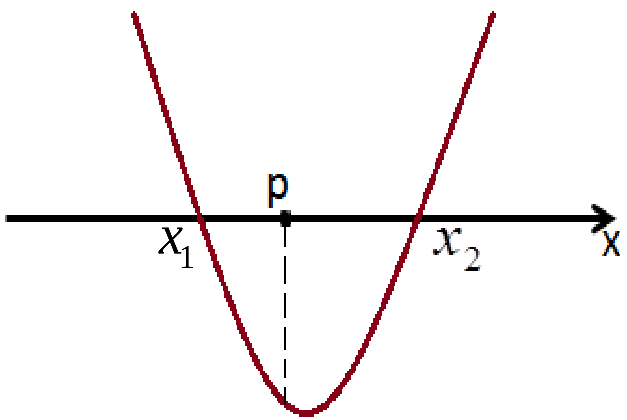

$a < 0$



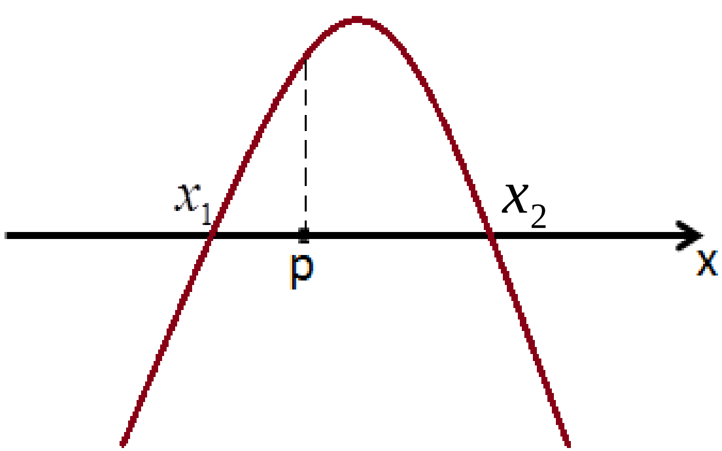
**Дано:** $f(x)=ax^2+bx+c; a \neq 0; x_1 < x_2 (D>0)$

**Утверждение 1.** ***Для того чтобы корни уравнения f(x)=0 лежали по разные стороны от числа p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*** $a \cdot f(p) < 0$

$a>0$




$a<0$



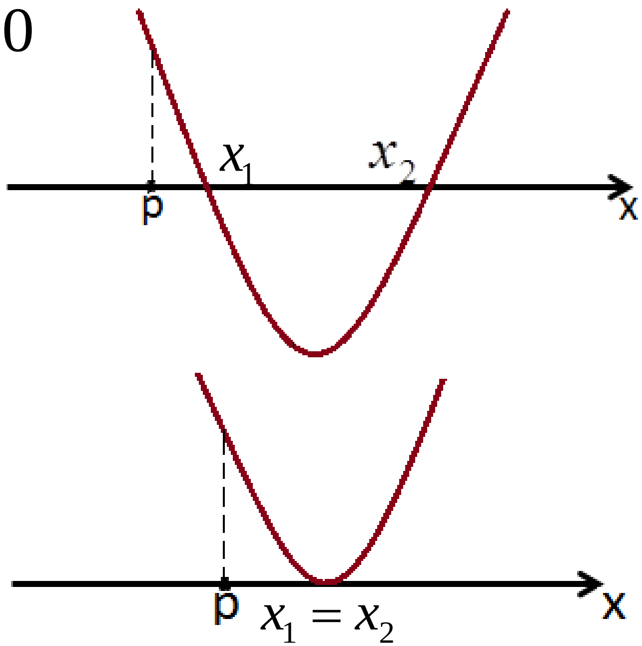
**Дано:** $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; x_1 < x_2 (D > 0)$

***Утверждение 2.*** ***Для того чтобы корни уравнения f(x)=0 были больше некоторого числа p, необходимо и достаточно, чтобы***

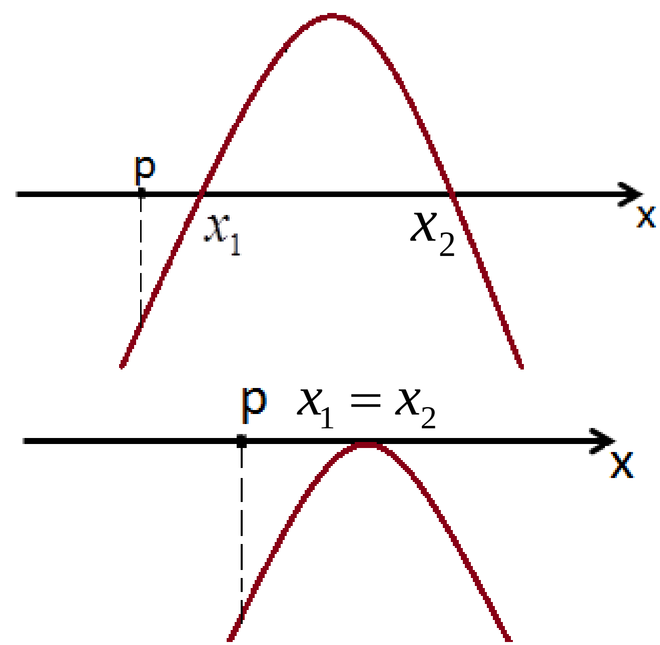
**Дано:** $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; x_1 < x_2 (D > 0)$

***Утверждение 2.*** ***Для того чтобы корни уравнения $f(x)=0$ были больше некоторого числа p, необходимо и достаточно, чтобы***

$a > 0$



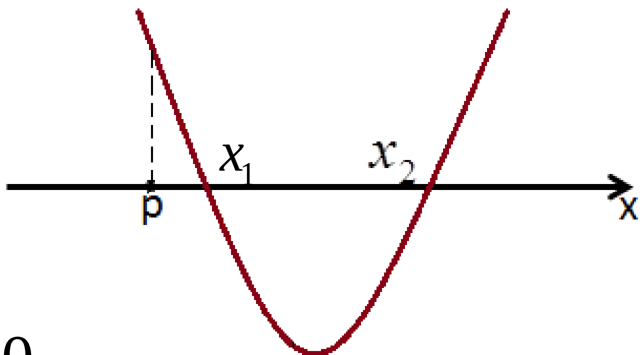

$a < 0$



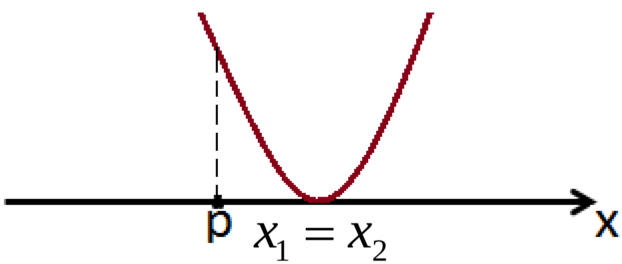
**Дано:** $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; x_1 < x_2 (D > 0)$

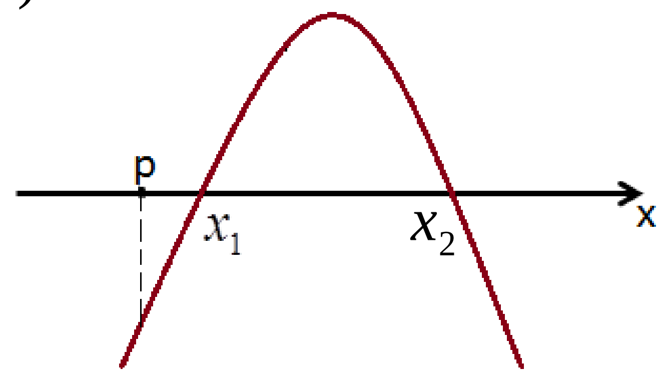
***Утверждение 2.*** ***Для того чтобы корни уравнения f(x)=0 были больше некоторого числа р, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств***

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > p, \\ a \cdot f(p) > 0. \end{cases}$$

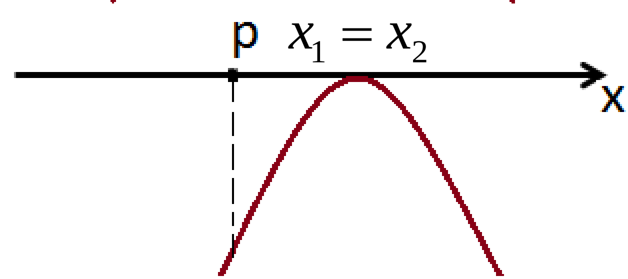



$a > 0$




$a < 0$



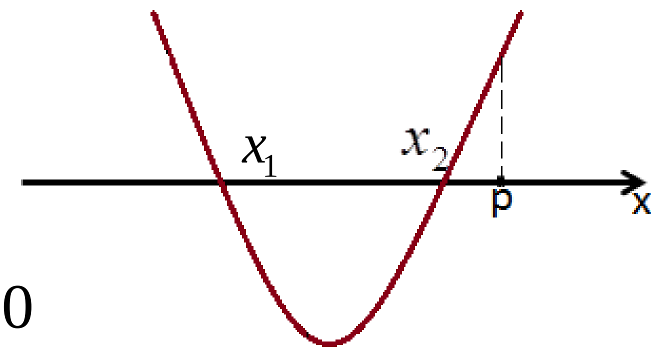
**Дано:**

$$f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; x_1 < x_2 (D > 0)$$

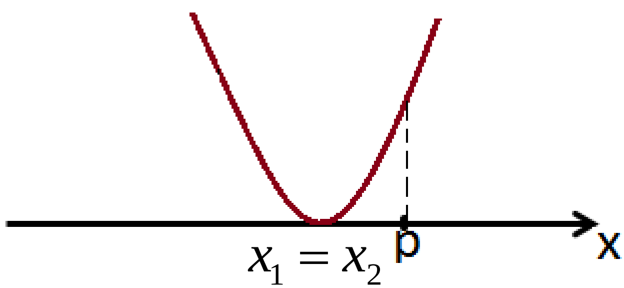
**Дано:** $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; x_1 < x_2 (D > 0)$

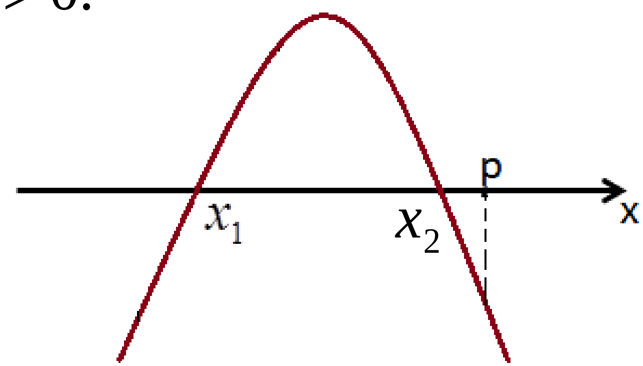
***Утверждение 3.*** ***Для того чтобы корни уравнения f(x)=0 были меньше некоторого числа p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств***

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < p, \\ a \cdot f(p) > 0. \end{cases}$$

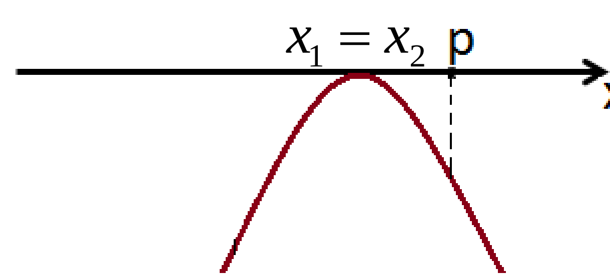



$a > 0$



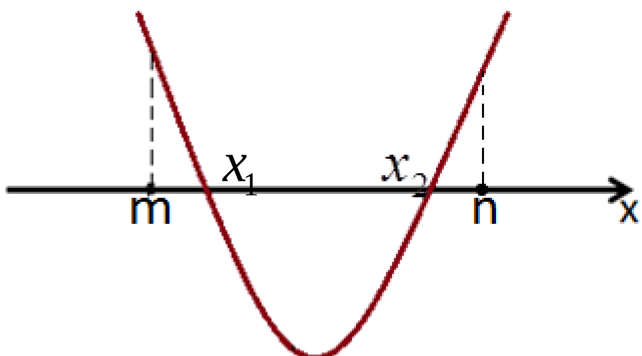

$a < 0$



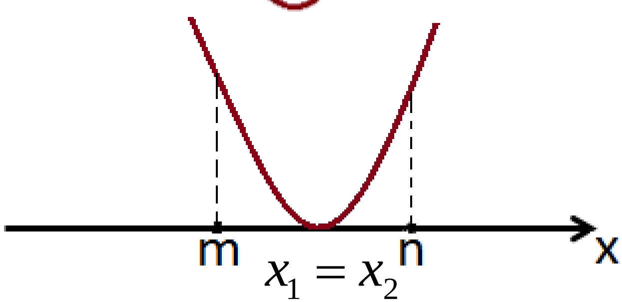
**Дано:** $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; x_1 < x_2 (D > 0)$

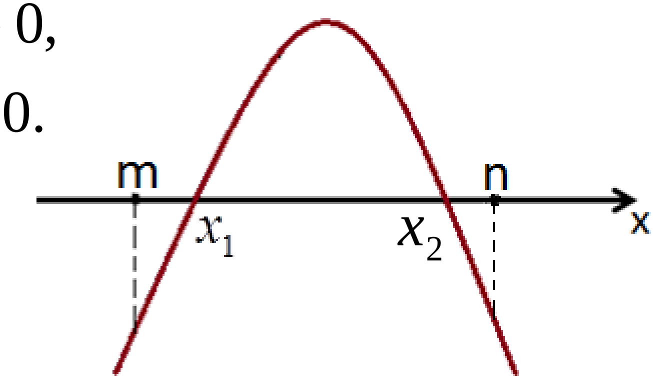
***Утверждение 4. Для того чтобы корни уравнения f(x)=0 принадлежали интервалу (m; n), необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств***

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ m < -\dfrac{b}{2a} < n, \\ a \cdot f(m) > 0, \\ a \cdot f(n) > 0. \end{cases}$$

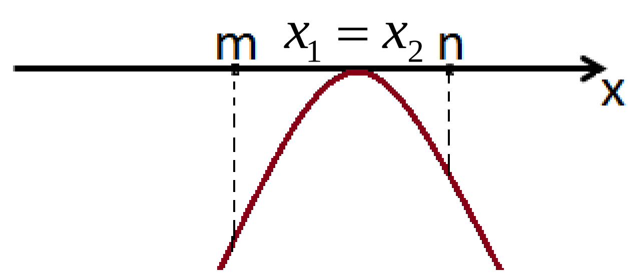



$a > 0$




$a < 0$

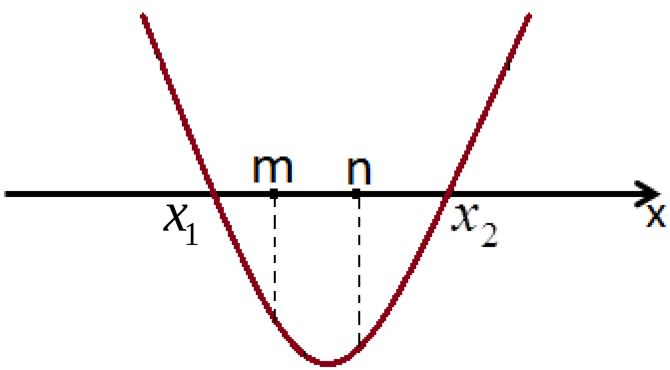


**Дано:** $f(x)=ax^2+bx+c; a\neq 0; x_1<x_2 (D>0)$

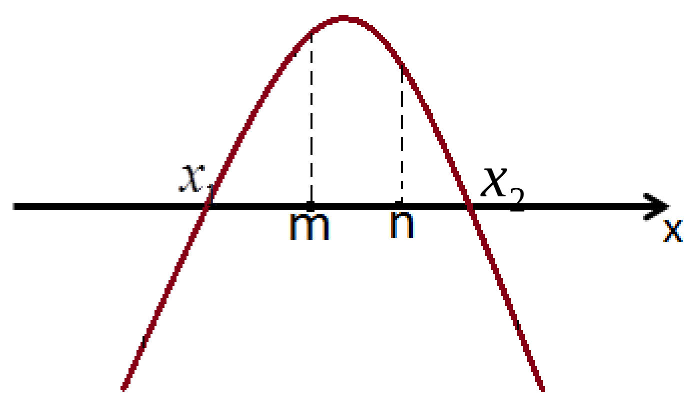
***Утверждение 5. Для того чтобы корни уравнения f(x)=0 удовлетворяли соотношению,*** $x_1<m<n<x_2$ ***необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств***

$$\begin{cases} a\cdot f(n)<0, \\ a\cdot f(m)<0. \end{cases}$$

$a>0$




$a<0$

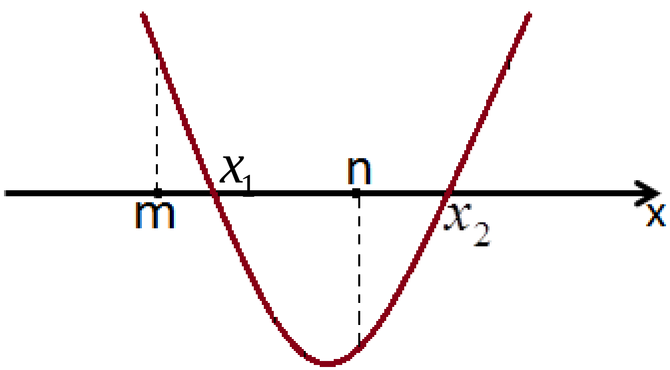


**Дано:** $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; x_1 < x_2 (D > 0)$

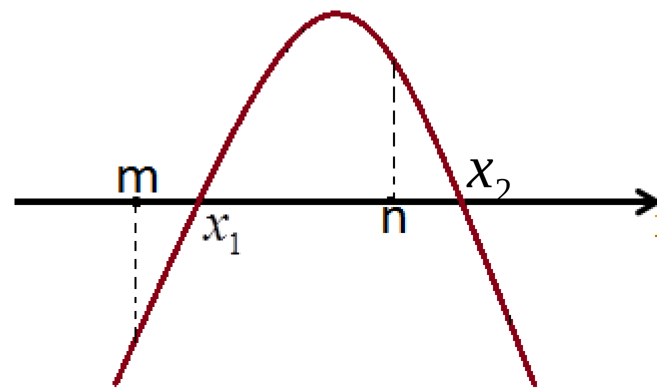
***Утверждение 6.*** ***Для того чтобы меньший корень уравнения $f(x)=0$ принадлежал интервалу (m; n), а больший не принадлежал, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств***

$$\begin{cases} a \cdot f(n) < 0, \\ a \cdot f(m) > 0. \end{cases}$$

$a > 0$




$a < 0$

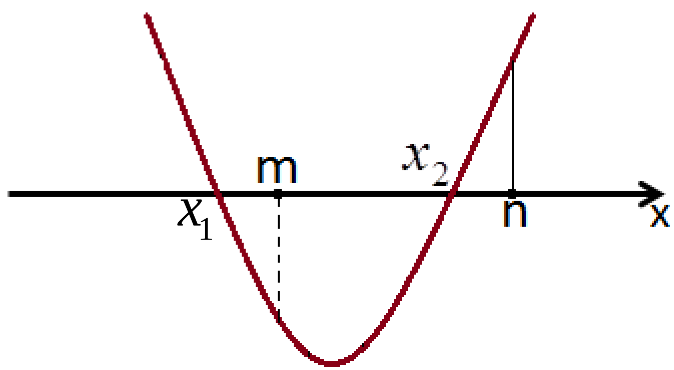


**Дано:** $f(x)=ax^2+bx+c; a\neq 0; x_1<x_2 (D>0)$

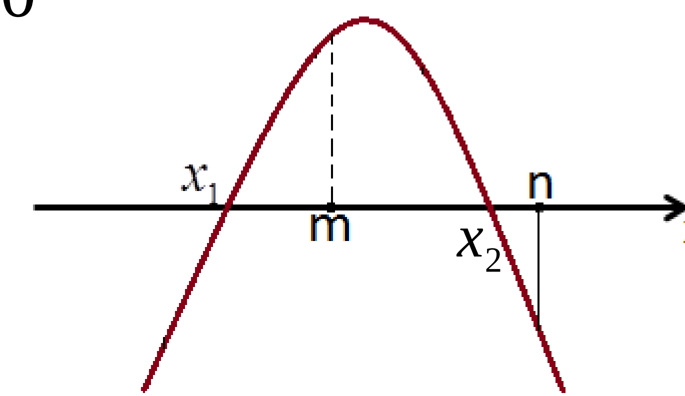
***Утверждение 7.*** ***Для того чтобы больший корень уравнения $f(x)=0$ принадлежал интервалу (m; n), а меньший не принадлежал, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств***

$$\begin{cases} a\cdot f(n)>0, \\ a\cdot f(m)<0. \end{cases}$$

$a>0$




$a<0$



***Задание 4. Найти все значения $a$, при каждом из которых множество значений функции*** $y=\dfrac{\cos x-a}{\cos 2x-4}$ ***содержит число -2.***

***Задание 4. Найти все значения $a$, при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{\cos x - a}{\cos 2x - 4}$ содержит число -2.***

***Решение:*** ***Уравнение*** $\frac{\cos x - a}{\cos 2x - 4} = -2$ ***должно иметь решение.***

***Задание 4. Найти все значения*** $a$***, при каждом из которых множество значений функции*** $y=\frac{\cos x-a}{\cos 2x-4}$ ***содержит число -2.***

***Решение: Уравнение*** $\frac{\cos x-a}{\cos 2x-4}=-2$ ***должно иметь решение.***

***Так как*** $\cos 2x-4\neq 0,$ ***то***

$$\cos x-a=-2\cos 2x+8,$$

$$2\cos 2x+\cos x-a-8=0,$$

$$4\cos^2 x+\cos x-a-10=0.$$

***Задание 4. Найти все значения $a$, при каждом из которых множество значений функции $y=\frac{\cos x-a}{\cos 2x-4}$ содержит число -2.***

***Решение:*** ***Уравнение*** $\frac{\cos x-a}{\cos 2x-4}=-2$ ***должно иметь решение.***

***Так как*** $\cos 2x-4\neq 0,$ ***то***

$$\cos x-a=-2\cos 2x+8,$$
$$2\cos 2x+\cos x-a-8=0,$$
$$4\cos^2 x+\cos x-a-10=0.$$

$\cos x=t, t\in[-1;1].$

***Уравнение*** $4t^2+t-a-10=0$ ***должно иметь решение на*** $[-1;1].$

***Задание 4. Найти все значения*** $a$***, при каждом из которых множество значений функции*** $y = \dfrac{\cos x - a}{\cos 2x - 4}$ ***содержит число -2.***

***Решение: Уравнение*** $\dfrac{\cos x - a}{\cos 2x - 4} = -2$ ***должно иметь решение.***

***Так как*** $\cos 2x - 4 \neq 0,$ ***то***

$$\cos x - a = -2\cos 2x + 8,$$
$$2\cos 2x + \cos x - a - 8 = 0,$$
$$4\cos^2 x + \cos x - a - 10 = 0.$$

$\cos x = t, t \in [-1;1].$

***Уравнение*** $4t^2 + t - a - 10 = 0$ ***должно иметь решение на*** $[-1;1].$

***Рассмотрим функцию*** $f(t) = 4t^2 + t - a - 10$ ***квадратичная функция, график парабола, ветви вверх,*** $t_0 = -0{,}125.$

***Задание 4. Найти все значения $a$, при каждом из которых множество значений функции*** $y=\frac{\cos x-a}{\cos 2x-4}$ ***содержит число -2.***

***Решение:*** ***Уравнение*** $\frac{\cos x-a}{\cos 2x-4}=-2$ ***должно иметь решение.***

***Так как*** $\cos 2x-4\neq 0,$ ***то***

$$\cos x-a=-2\cos 2x+8,$$
$$2\cos 2x+\cos x-a-8=0,$$
$$4\cos^2 x+\cos x-a-10=0.$$

$\cos x=t, t\in[-1;1].$

***Уравнение*** $4t^2+t-a-10=0$ ***должно иметь решение на*** $[-1;1].$

***Рассмотрим функцию*** $f(t)=4t^2+t-a-10$ ***квадратичная функция, график парабола, ветви вверх,*** $t_0=-0{,}125.$

$$\begin{cases} D\geq 0, \\ f(1)\geq 0, \end{cases} \begin{cases} 16a+161\geq 0, \\ 4+1-a-10, \end{cases} \begin{cases} a\geq -\frac{161}{16}, \\ a\leq -5. \end{cases}$$

,

***Ответ:*** $a\in\left[-\frac{161}{16};-5\right].$

# Спасибо за внимание!