МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
ЮРГИНСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

**В.А. Хохлов, К.Н. Цукублина,
Н.А. Куприянов, Н.А. Логвинова**

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования для межвузовского использования в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальностям 151001 «Технология машиностроения», 150203 «Оборудование и технология сварочного производства», 150402 «Горные машины и оборудование», 110304 «Технология обслуживания и ремонта машин в агропромышленном комплексе»

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 539.3/.6
ББК 30.121
Х86

Хохлов В.А.

Х86 Сопротивление материалов: учебное пособие / В.А. Хохлов, К.Н. Цукублина, Н.А. Куприянов, Н.А. Логвинова; Юргинский технологический институт. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 228 с.

ISBN 978-5-98298-815-7

Пособие составлено на основе государственного образовательного стандарта. Включает основные сведения из следующих разделов: простые виды нагружения (растяжение, сжатие, сдвиг, срез, кручение и изгиб); напряженно-деформированное состояние и теории прочности; сложные виды нагружения; расчет стержневых систем; энергетические методы определения перемещений; расчет статически неопределимых систем; расчет конструкций, работающих в условиях циклических и динамических нагрузок.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 150001 «Технология машиностроения», 150202 «Оборудование и технология сварочного производства», 150402 «Горные машины и оборудование», 110304 «Технология обслуживания и ремонта машин в агропромышленном комплексе» всех форм обучения.

УДК 539.3/.6
ББК 30.121

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор ТУСУРа
Б.А. Люкшин

Доктор физико-математических наук ТГУ
В.А. Скрипняк

ISBN 978-5-98298-815-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов – это наука о прочности, жесткости и устойчивости элементов инженерных конструкций.

Сопротивление материалов относится к механике деформируемого твердого тела, являющейся, как и теоретическая механика, разделом общей механики.

Механика деформируемого твердого тела включает, кроме сопротивления материалов, теорию упругости, теорию пластичности и ползучести, механику разрушения, механику композиционных материалов и др.

Основные положения сопротивления материалов опираются на законы и теоремы теоретической механики и, в первую очередь, – на законы статики. Однако, в отличие от теоретической механики, рассматривающей тела как абсолютно твердые, в сопротивлении материалов учитывается изменение формы и размеров тела под действием внешних сил, т.е. деформации.

Задачей сопротивления материалов является разработка методов расчета конструкций и их элементов на прочность, жесткость и устойчивость при одновременном удовлетворении требований надежности и экономичности.

Прочность – это способность тела сопротивляться внешним нагрузкам без разрушения.

Жесткость – способность тела сопротивляться изменению размеров и формы под действием внешних нагрузок.

Устойчивость – способность тела сохранять первоначальную форму равновесия под нагрузкой.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Внешние силы

Нагрузки, действующие на конструкции или ее элементы, являются по отношению к ним внешними силами. Различают внешние силы.

1. *Объемные и поверхностные.* Объемные, или массовые, когда силы приложены к каждой точке объема тела (силы тяжести, инерции, электромагнитные и др.). Поверхностные силы – это результат непосредственного взаимодействия элементов тела между собой или с прилегающей к ним средой. Они могут быть:

- непрерывно распределенные по поверхности (давление газа, жидкости в емкостях). Их интенсивность измеряется нагрузкой, приходящейся на единицу площади; размерность поверхностных сил – паскаль (1 Па = 1 Н/м^2);
- непрерывно распределенные по линии (собственный вес элементов). Интенсивность их измеряется нагрузкой, приходящейся на единицу длины; размерность ньютон на метр (Н/м);
- если размеры площадок, через которые передаются нагрузки малы, по сравнению с размерами всего тела (как, например, в случае давления колеса вагона на рельс), можно использовать понятие сосредоточенных сил и моментов, полагая, что нагрузка прикладывается к телу в одной точке. Размерность сил – ньютон (Н), моментов – ньютон-метр (Н$\cdot$м);
- к внешним силам, кроме заданных (активных) сил, относятся также реакции связей, уравновешивающих систему внешних сил.

2. *Постоянные и переменные.* Постоянные силы действуют в течение всего времени работы конструкции (например, собственный вес).

3. *Статические и динамические.* Статические нагрузки прикладываются к конструкции постепенно, ускорение элементов при этом отсутствует. Динамические нагрузки вызывают ускорение в элементах конструкции и, соответственно, возникновение дополнительных сил – сил инерции.

1.2. Внутренние силы. Метод сечений

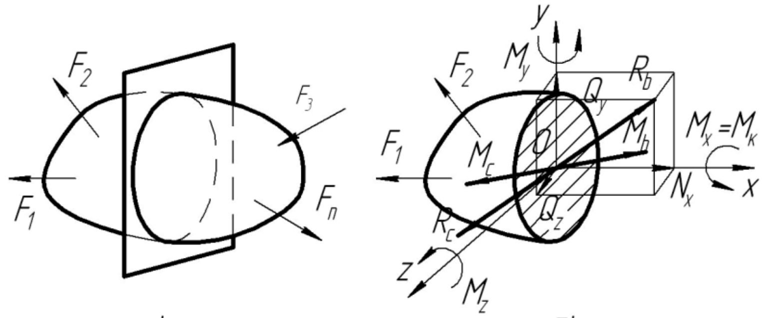
С физической точки зрения целостность твердых тел обеспечивается за счет наличия внутренних сил – сил межатомного и межмолекулярного взаимодействий (притяжения и отталкивания). В сопротивлении материалов рассматриваются не сами внутренние силы, а их изменения, которые появляются в результате приложения к телу внешних воздействий (силовых, температурных и т.п.), стремящихся вызвать изменение формы или размеров тела. Таким образом, под внутренними силами (или усилиями) в сопротивлении материалов понимают силы взаимодействия между элементами конструкции или между отдельными частями элементов, возникающие под действием внешних сил, температур, погрешностей изготовления и т.п.

Эти силы препятствуют стремлению внешних сил деформировать элементы тела, отделить их один от другого и, следовательно, связаны с прочностью всей конструкции. Для определения внутренних усилий и выяснения характера распределения их по сечению используется метод сечений, который заключается в следующем.

Рассмотрим тело произвольной формы, находящееся в равновесии под действием внешних сил $F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$ (рис. 1.1, *а*). Мысленно рассечем тело плоскостью на две части. Поскольку все тело находится в состоянии равновесия, то в равновесии будет находиться и каждая отсеченная часть.

Рассмотрим, например, правую часть (рис. 1.1, *б*). Внешние силы, действующие на отсеченную часть, будут уравновешиваться внутренними, определяющими ее взаимодействие с отброшенной правой частью тела (внутренние силы между отсеченными частями также друг друга уравновешивают).

Внутренние силы распределены по сечению сложным образом, поэтому их приводят в центре тяжести сечения (точка *O*) к главному вектору сил R_h и к главному моменту M_b (рис. 1.1, *б*).



а)   б)

Рис. 1.1

Внешние силы, которые действуют на рассматриваемую часть, также можно привести в той же точке O к главному вектору сил R_c и к главному моменту M_c. Так как мысленно отсеченная часть тела находится в равновесии, то $R_h = R_c$, $M_b = M_c$. Также должны быть равны и их проекции на оси системы координат x, y, z, помещенной своим началом в точке O и ориентированной таким образом, что оси y и z лежат в плоскости сечения, а ось x направлена по нормали к сечению.

Разложим в выбранной системе координат x, y, z главный вектор внутренних сил на проекции N_x, Q_y, Q_z, а главный момент внутренних сил – на M_x, M_y, M_z (рис. 1.1, *б)* Эти составляющие называют внутренними силовыми факторами. N_x называют нормальной, или продольной силой, Q_y, Q_z – поперечными силами, $M_x(M_к)$ – крутящим моментом, а M_y, M_z – изгибающими моментами.

Внутренние силовые факторы могут быть определены из условий равновесия рассматриваемой части тела:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0;$$
$$\sum m_x = 0, \sum m_y = 0, \sum m_z = 0.$$

Так, например, продольная сила N_x будет равна сумме проекций внешних сил на ось *x,* а крутящий момент M_x – сумме моментов внешних сил относительно оси *x*.

1.3. Напряжения

Напряжение – это количественная мера интенсивности распределения внутренних сил по сечению, определяющая взаимодействие материальных частиц тела. Поэтому степень нагруженности детали определяют не внутренние силы, а напряжения. При достижении ими определенного уровня внутренние связи материальных частиц тела разрушаются. Однако для определения напряжений необходимо знать внутренние силовые факторы. Рассмотрим это подробнее. Пусть тело (рис. 1.2, *а*) нагружено произвольным образом. Мысленно рассечем его на две части.

Выделим в окрестности произвольной точки сечения элементарную площадку ΔA (рис. 1.2, *б).* На этой площадке будет действовать равнодействующая внутренних сил ΔR. Тогда отношение $\Delta A / \Delta R$ будет являться *средним напряжением* на выделенной площадке.

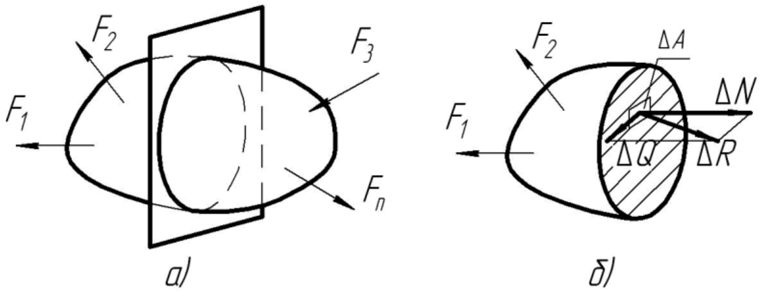


Рис. 1.2

Если размеры площадки уменьшить, то в пределе получим полное напряжение в выбранной точке сечения

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}. \tag{1.1}$$

Практически удобнее рассчитывать не полное напряжение, а его составляющие. Поэтому разложим ΔR на нормальную ΔN и касательную ΔQ составляющие. Тогда

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}, \quad \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} \tag{1.2}$$

будут называться соответственно нормальным и касательным напряжениями в точке. При этом полное напряжение в точке может быть определено как

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\,. \tag{1.3}$$

Напряжения в точке зависят от ориентации плоскости сечения, на котором они определяются, поэтому, говоря о напряжении, необходимо указывать ориентацию сечения, проходящего через рассматриваемую точку. Совокупность напряжений во всех сечениях, проходящих через рассматриваемую точку, определяет напряженное состояние в точке. Напряжение характеризуется знаком (направлением) и модулем. Нормальное напряжение считается положительным, если оно направлено от сечения (рис. 1.3, *а)*.

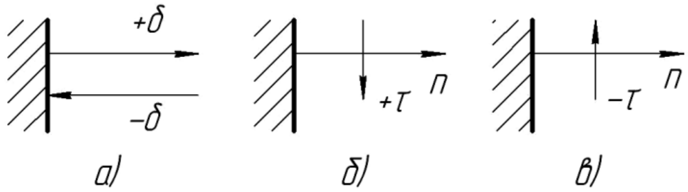


Рис. 1.3

Касательное напряжение считается положительным, если для совмещения нормали к сечению с направлением напряжения ее необходимо повернуть по часовой стрелке (рис. 1.3, *б).*

Размерность напряжений – паскаль (1 Па = 1 Н/м^2).

1.4. Перемещения и деформации

Перемещение – это изменение положения сечения или всего элемента конструкции в пространстве точки. Перемещения подразделяются на линейные и угловые.

На рис. 1.4 элемент OA деформируется и перемещается, а AB – только перемещается. Так, для сечения B отрезок BB_1 – линейное перемещение, угол θ – угловое перемещение. Перемещения являются следствием деформации.

Деформация – это геометрическое искажение среды в окрестности материальной точки. Деформация тоже подразделяется на линейную и угловую.

Для определения деформации в точке B рассмотрим два малых отрезка AB и BC, выделенных в теле до (*а*) и после (*б*) нагружения внешними силами (рис. 1.5).

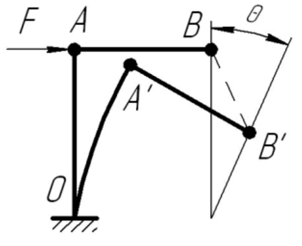


Рис. 1.4

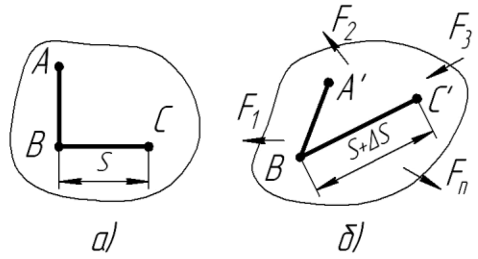


Рис. 1.5

После приложения нагрузки отрезки изменяют свою длину и взаимный угол расположения. При этом

$$\varepsilon_{BC} = \lim_{BC\to 0} \frac{\Delta S}{S}, \quad \Delta ABC = \lim_{AB,BC\to 0} (ABC - A'BC') \qquad (1.4)$$

будут являться соответственно линейной и угловой (сдвиговой) деформацией в точке *B*. Совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям для одной точки определяет деформированное состояние в точке.

По характеру поведения материала при снятии внешних воздействий различают *упругие* и *остаточные деформации*. Упругая деформация – это деформация, полностью исчезающая после снятия внешнего воздействия (силового, температурного и т.п.). В этом случае тело полностью восстанавливает свои размеры и форму. Остаточная деформация – это та часть полной деформации, которая остается в теле после снятия внешних нагрузок. Для металлов остаточная деформация называется *пластической деформацией*.

1.5. Основные гипотезы науки о сопротивлении материалов

В сопротивлении материалов используется ряд предпосылок, упрощающих расчеты. Основными являются следующие.

1. Материал элементов является однородным и сплошным, т.е. его свойства не зависят от формы и размеров тела и одинаковы во всех его точках. Эта предпосылка позволяет, рассматривая при теоретическом анализе бесконечно малый элемент конструкции, наделять его свойствами, которыми обладает объем тела реальных размеров.

2. Материал конструкции изотропен, т.е. свойства его по всем направлениям одинаковы. В общем случае материал может быть *анизотропным,* т.е. иметь различные свойства в различных направлениях (например, дерево). В ряде задач сопротивления материалов анизотропность учитывается.

3. Материал конструкции обладает свойством идеальной упругости, т.е. способностью полностью восстанавливать первоначальные форму и размеры после устранения причины, вызвавшей деформацию. Эта предпосылка справедлива лишь при напряжениях, не превышающих для данного материала определенной постоянной величины – предела упругости.

4. Деформации материала элементов конструкции в каждой его точке прямо пропорциональны напряжениям в этой точке. Данная предпосылка, впервые высказанная Р. Гуком в форме *ut tensio sic vis (каково перемещение, такова и сила),* называется *законом Гука.* Закон Гука справедлив для большинства материалов, но для каждого из них – лишь при напряжениях, не превышающих некоторого критического значения – *предела пропорциональности.*

5. Принцип независимости действия сил. Результат действия на конструкцию системы сил равен сумме результатов действия каждой нагрузки в отдельности. Этот принцип иногда называют принципом наложения, или принципом суперпозиции. Он используется в рамках действия закона Гука и не распространяется на работу внешних и внутренних сил и на потенциальную энергию деформации.

6. Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли): поперечные сечения бруса, плоские до деформации, остаются плоскими и после приложения нагрузки, при этом сечения не изменяют своей формы и размеров и остаются перпендикулярными к деформированной оси бруса.

1.6. Модели формы элементов конструкций

Все многообразие элементов конструкций приводится к трем типам: стержню, пластине (оболочке) и массивному телу.

Стержень (брус) – это тело, у которого один размер (длина) значительно превышает два других в плоскости поперечного сечения.

Пластина (оболочка) – это тело, у которого один размер (толщина) намного меньше двух других.

Массивное тело – тело, имеющее размеры одного порядка в трех взаимно ортогональных направлениях.

Глава 2

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения, при котором внешние силы создают в поперечном (перпендикулярном оси) сечении стержня только один внутренний силовой фактор – продольную растягивающую (сжимающую) силу N_x.

2.1. Эпюры (диаграммы) внутренних сил

Эпюра внутренних сил – это график, показывающий характер изменения внутренних сил по длине стержня.

Построение эпюр необходимо для определения положения наиболее нагруженного (опасного) сечения стержня.

Порядок построения эпюр.

1. Определяют все внешние нагрузки (активные и реактивные), действующие на стержень.

2. Стержень мысленно разделяют на силовые участки. Силовой участок – это часть стержня, в пределах которой изменение внутреннего силового фактора определяется одним и тем же аналитическим выражением. Силовые участки ограничиваются сечениями, в которых приложены сосредоточенные нагрузки или начинают (заканчивают) действовать распределенные нагрузки.

3. Используя метод сечений, записывают аналитическое выражение для внутреннего силового фактора на каждом силовом участке.

4. По записанным аналитическим выражениям строят эпюры.

5. Данный порядок построения эпюр внутренних силовых факторов справедлив при любом виде нагружения.

Рассмотрим на примере (рис. 2.1) построение эпюры внутренней продольной силы.

Пример. Стержень загружен активными сосредоточенными силами, действующими вдоль оси стержня ($F_1 = 10$ кН, $F_2 = 25$ кН). Собственным весом стержня пренебрегаем. Построим эпюру внутренних сил N_x в соответствии с приведенным порядком построения.

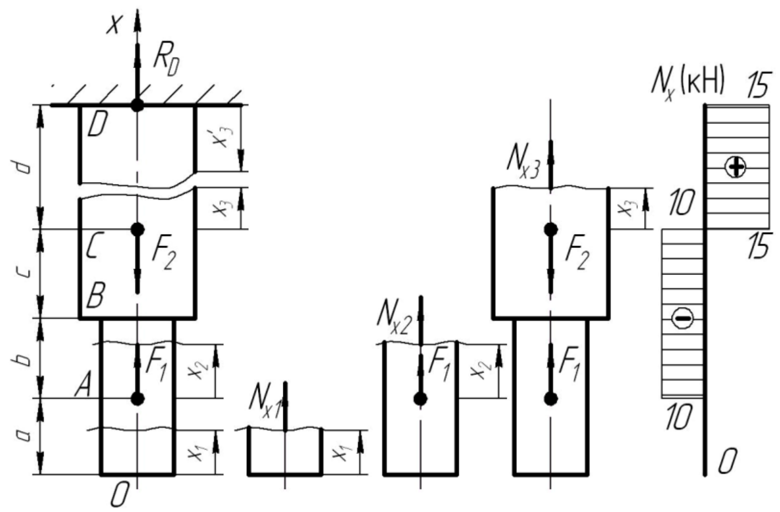


Рис. 2.1

Решение.

1. Активные нагрузки вызывают реактивную силу R_D. Определим ее значение из условия равновесия $\sum X = 0$

$$\sum X = R_D - R_2 + F_1 = 0;\ R_D = F_2 - F_1 = 15\,\text{кН}.$$

2. Имеем три силовых участка: *OA, AC, CD.*

Рассмотрим участок *OA.* Начало координат расположим в точке *O* (в дальнейшем начало координат всегда будем располагать в начале каждого силового участка). Ось *x* направим вдоль оси стержня. В пределах участка на расстоянии x_1 от его начала мысленно сделаем сечение и рассмотрим равновесие отсеченной части длиной x_1 (для участка *OA* x_1 лежит в пределах $0 \le x_1 \le a$).

Внутренняя продольная сила должна уравновесить внешние силы, действующие на рассматриваемую часть. Так как собственным весом стержня пренебрегаем, а других внешних нагрузок, действующих на участок длиной x_1, нет, то внутренняя продольная сила на первом участке $N_{x1} = 0$.

Рассмотрим участок *AC*. Делаем сечение на расстоянии x_2 от нового положения начала координат (при этом начало координат переносим в точку *A*). Для участка *AC* координата сечения может принимать значения $0 \le x_2 \le b + c$. Однако, согласно методу сечений, рассматриваем равновесие всей нижней части стержня длиной $(a + x_2)$.

Правило определения знака внутренней силы. Рассматриваемую часть стержня $(a+x_2)$ мысленно закрепляют в сечении. При этом если внешняя сила вызывает растяжение исследуемой части стержня, то эта сила создает положительную внутреннюю силу и наоборот.

Для рассматриваемой части внешняя сила F_1 вызывает ее сжатие от точки приложения силы F_1 до сечения x_2.

Следовательно, внутренняя сила будет отрицательной и по модулю равна F_1, так как других внешних сил, действующих на рассматриваемую часть $(a+x_2)$, нет.

$$N_{x2} = -F_1 = -10 \text{ кН.}$$

Участок *CD*. Начало координат располагаем в точке *C*. В пределах участка делаем сечение на расстоянии x_3 от точки *C*. Тогда для участка *CD* $0 \le x_3 \le d$. При этом внутренняя сила N_{x3} будет уравновешивать нагрузки, действующие на часть стержня, длина которого составляет $(a+b+c+x_3)$. Закрепляем эту часть в сечении и в соответствии с правилом знаков записываем аналитическое выражение для N_{x3}

$$N_{x3} = -F_1 + F_2 = +15 \text{ кН.}$$

3. Строим эпюру N_x. Проводим линию, параллельную оси стержня, и откладываем на ней значение внутренних сил на каждом силовом участке. Положительное значение N_x откладывается вправо в соответствующем масштабе, отрицательное – влево. Из выражений для N_x следует, что на участке *OA* внутренняя сила равна нулю, на участке *AC* она постоянна и вызывает сжатие стержня, на *CD* – постоянная растягивающая.

На эпюре N_x имеет место резкое изменение (скачок) в тех сечениях, в которых приложена сосредоточенная внешняя сила. Величина скачка равна соответствующей силе. Так как в сечении *A–A* приложена сила $F_1 = 10$ кН, на эпюре N_x имеет место скачок в том же сечении на 10 кН, в сечении *C–C* действует сила F_2, равная 25 кН, соответствующий скачок на эпюре равен 25 кН.

Данную эпюру можно было построить, начав рассмотрение силовых участков сверху: *DC*, *CA*, *AO*. Тогда для участка *CD* начало координат располагаем в точке *D*. Сечение проводим от точки *D* на расстоянии x_3' $(0 \le x_3' \le d)$. Исследуем равновесие части стержня длиной x_3', мысленно закрепив ее в сечении. При этом внешняя сила R_D вызывает ее растяжение (на опору внимание не обращаем, так как ее присутствие заменено действием силы R_D). Тогда $N_{x3} = +R_D = 10$ кН, что совпадает со значением на построенной эпюре.

Следует отметить, что так как в данном примере не учитывается собственный вес стержня, то изменение размеров или формы, например в сечении *B–B*, не вызывает изменения внутренней силы N_x. Это объясняется тем, что N_x принимается как сосредоточенная сила в центре тяжести поперечного сечения площади A.

2.2. Напряжения в поперечных сечениях

Сила N_x является равнодействующей внутренних сил dN, действующих на бесконечно малых площадках dA поперечного сечения стержня (рис. 2.2). Так как N_x перпендикулярна сечению, то dN выражается через нормальные напряжения

$$dN = \sigma dA$$

тогда

$$N_x = \int_A \sigma dA \qquad (2.1)$$

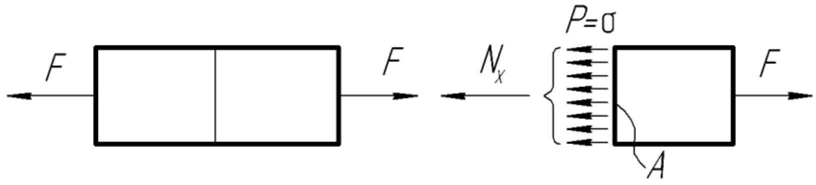


Рис. 2.2

Эксперименты показывают, что если на поверхность свободного от нагрузок стержня нанести сетку из продольных и поперечных линий, как показано на рис. 2.3, то после нагружения поперечные линии остаются прямолинейными и перпендикулярными продольным. Изменится лишь расстояние между линиями. Это означает, что все продольные линии получили одинаковую деформацию, а, согласно закону Гука, одинаковым деформациям соответствуют одинаковые напряжения. Это означает, что нормальные напряжения распределяются по поперечному сечению равномерно (одинаковы во всех точках сечения). Тогда из формулы (2.1) получим $N = \sigma A$, откуда

$$\sigma = \frac{N}{A}. \qquad (2.2)$$

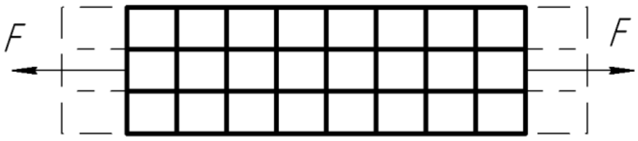


Рис. 2.3

Следовательно, нормальное напряжение в поперечном сечении при растяжении (сжатии) равно отношению внутреннего усилия N к площади поперечного сечения.

2.3. Напряжения в наклонных сечениях

Пусть α – угол между наклонным сечением nn_1 и поперечным сечением nn_2, (рис. 2.4, *а*). Как и в предыдущем случае, под действием сил F все продольные волокна удлиняются на одинаковую величину. Это позволяет предполагать, что напряжения p, направленные вдоль линии действия силы (рис. 2.4), одинаковы во всех точках наклонного сечения.

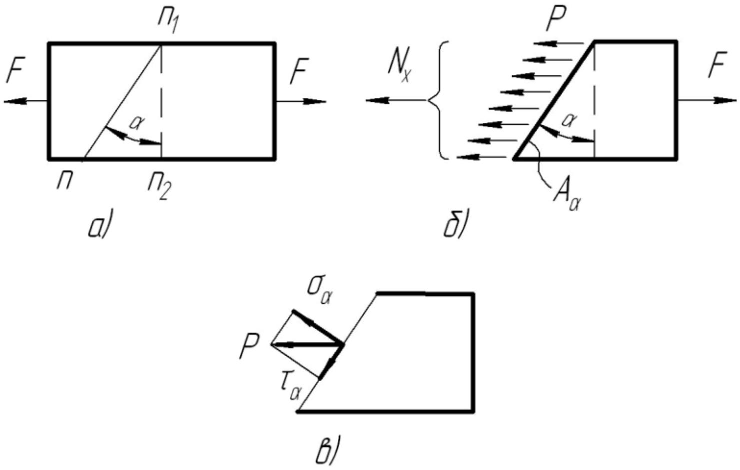


Рис. 2.4

Рассмотрим левую часть стержня, отсеченную наклонным сечением nn_1 (рис. 2.4, *б*). Из условий равновесия левой части следует, что напряжение p параллельно оси стержня и направлено в сторону, противоположную силе F, а внутренняя сила pA_α, действующая в наклонном сечении nn_1, равна N.

Здесь $A_\alpha = \dfrac{A}{\cos\alpha}$ – площадь наклонного сечения, A – площадь поперечного сечения. Тогда

$$N_x = pA_\alpha ,$$

откуда

$$p = \frac{N_x}{A_\alpha} = \frac{N_x \cos\alpha}{A} = \sigma\cos\alpha , \qquad (2.3)$$

где $\sigma = \dfrac{N_x}{A}$ – нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса. Разложим напряжение p на две составляющие (рис. 2.4, *в*): нормальное σ_α, перпендикулярное плоскости сечения nn_1, и касательное τ_α, лежащее в плоскости этой площадки:

$$\sigma_\alpha = p\cos\alpha, \quad \tau_\alpha = p\sin\alpha$$

или, согласно (2.3) и учитывая соотношение $\sin\alpha\cos\alpha = 1/2\sin 2\alpha$, получим

$$\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha , \qquad (2.4)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha . \qquad (2.5)$$

Нормальное напряжение считается положительным, если оно направлено от поверхности материала. Касательное напряжение считается положительным, если изображающий его вектор направлен против часовой стрелки относительно поверхности материала. Из формулы (2.4) видно, что напряжение σ_α меняется от $\sigma = N/A$ до нуля при $\alpha = 90^\circ$. Таким образом, наибольшие по модулю нормальные напряжения возникают в поперечных сечениях. Из формулы (2.5) видно, что касательные напряжения τ_α при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$ равны нулю, а своего наибольшего значения они достигают на площадках с углом наклона $\alpha = 45^\circ$.

2.4. Деформации и перемещения

2.4.1. *Продольная деформация*

Рассмотрим случай однородного напряженного состояния стержня, который реализуется, когда $N = F = \text{const}$, площадь поперечного сечения и свойства материала не меняются по длине стержня (рис. 2.5). Обозначим через Δl приращение длины образца, вызванное действием силы F. Эксперименты показывают, что пока нагрузка не превышает некоторого предела, величина Δl прямо пропорциональна силе F, длине образца l и обратно пропорциональна площади поперечного сечения образца A. Формула, отражающая экспериментальные наблюдения, записывается в виде

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \tag{2.6}$$

где E – коэффициент пропорциональности, характеризующий сопротивляемость материала упругим деформациям при растяжении (сжатии), который называется *модулем упругости I рода* (или *модулем Юнга*). Произведение EA называют жесткостью бруса.

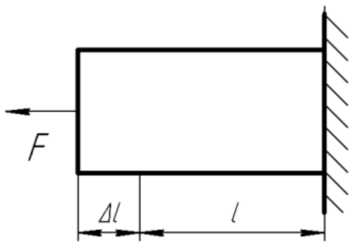


Рис. 2.5

Зависимость (2.6) можно представить в другом виде, приняв

$$N / A = \sigma, \quad \Delta l / l = \varepsilon_{\text{прод}}.$$

Тогда

$$\varepsilon_{\text{прод}} = \sigma / E, \tag{2.7}$$

$$\sigma = E\varepsilon_{\text{прод}}. \tag{2.8}$$

Соотношения (2.7), (2.8) называются *законом Гука*. Таким образом, нормальные напряжения при растяжении и сжатии прямо пропорциональны относительному изменению длины бруса.

2.4.2. *Поперечная деформация*

Кроме продольной деформации, при растяжении и сжатии наблюдается также изменение поперечных размеров бруса: при растяжении поперечные размеры бруса уменьшаются, при сжатии – увеличиваются. Отношение $\Delta b / b$, где b – поперечный размер, а Δb – его изменение, называется поперечной деформацией $\varepsilon_{\text{попер}}$. Эксперименты показывают, что в пределах выполнения закона Гука поперечная деформация прямо пропорциональна продольной деформации $\varepsilon_{\text{прод}}$, но имеет противоположный знак

$$\varepsilon_{\text{попер}} = -\mu \varepsilon_{\text{прод}}, \qquad (2.9)$$

где коэффициент пропорциональности μ – *коэффициент поперечной деформации* или *коэффициент Пуассона*. Исходя из (2.9)

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\text{попер}}}{\varepsilon_{\text{прод}}}. \qquad (2.10)$$

Коэффициент Пуассона μ характеризует, как и модуль Юнга *E*, механические свойства материала. Для большинства материалов коэффициент Пуассона изменяется в пределах от 0 до 0,5, так, например, для резины он равен 0,5, для пробки – 0, для сталей коэффициент Пуассона изменяется в пределах 0,25 ÷ 0,30.

2.4.3. *Неоднородно напряженные стержни*

Неоднородные по длине стержня напряжения могут возникать тогда, когда продольная внутренняя сила *N*= *N(x)* непостоянна по длине стержня, а также при изменениях площади поперечного сечения *A*= *A(x)* и модуля Юнга *E*= *E(x)*. Для определения удлинения такого стержня на длине *x* рассмотрим удлинение бесконечно малого элемента стержня длиной *dx*. Удлинение элемента *dx*, как следует из (2.6), будет равно

$$\Delta dx = \frac{N(x)dx}{E(x)A(x)}.$$

Удлинение стержня длиной *x* найдется как интеграл

$$\Delta x = \int_x \frac{N(x)dx}{E(x)A(x)}. \qquad (2.11)$$

Изменение длины всего стержня (при $x = l$) найдется как

$$\Delta l = \int_l \frac{N(x)dx}{E(x)A(x)}. \qquad (2.12)$$

Для стержня, имеющего несколько участков, в пределах каждого из которых внутренняя сила N_i, площадь поперечного сечения A_i и модуль

Юнга E_i остаются неизменными (i – номер участка), изменение длины определяется как алгебраическая сумма изменений длин (Δl_i) его участков

$$\Delta l = \sum_i \frac{N_i l_i}{E_i A_i}. \qquad (2.13)$$

Пример. Построим эпюру перемещений сечений стержня, изображенного на рис. 2.6. Зададим дополнительно $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, a = 0,2 м, b = 0,3 м, c = 0,4 м, d = 0,1 м, F_1 = 25 кН, F_2 = 10 кН, A_1 = 2 см^2, A_2 = 4 см^2.

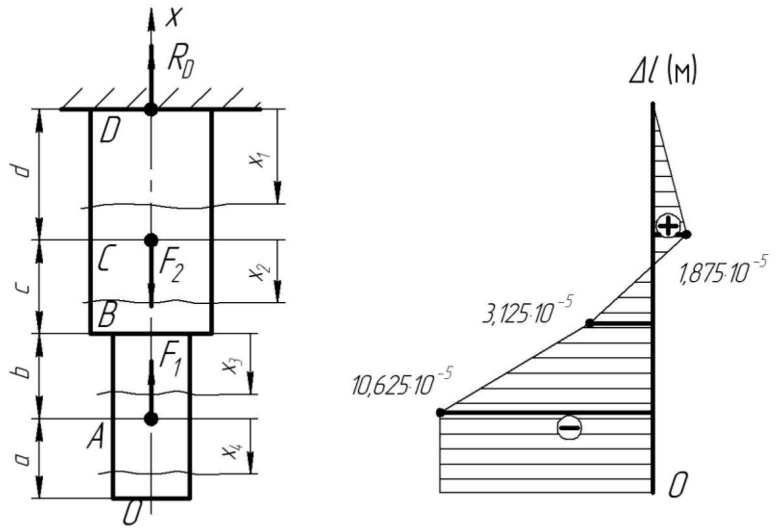


Рис. 2.6

Решение. На стержне имеем четыре участка: *DC, CB, BA, AO*.

Участок *DC* ($0 \le x_1 \le d$). Начало координат в точке *D*. Перемещение сечения x_1 относительно неподвижного сечения *D* есть не что иное, как абсолютная деформация элемента стержня длиной x_1.

С учетом эпюры N_x и формулы (2.6) это удлинение будет иметь вид

$$\Delta_{x_1 D} = \frac{N_{x_1} x_1}{E A_2}.$$

В этом выражении переменной величиной является только x_1. Следовательно, смещения сечений на участке *DC* прямо пропорциональны переменной x_1, и для построения эпюры на этом участке достаточно знать смещения двух любых сечений. Рассчитаем перемещение в начале участка ($x_1 = 0$) и в конце ($x_1 = d$)

$$\Delta_{x_1}(0) = 0\,\text{м},$$

$$\Delta_{x_1}(D) = \Delta_{CD} = \frac{15\ \text{кН} \cdot 0{,}1\ \text{м}}{2 \cdot 10^5\ \text{МПа} \cdot 4 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2} = 1{,}875 \cdot 10^{-5}\ \text{м},$$

где Δ_{CD} – перемещение сечения *C* относительно *D*.

Участок *CB* ($0 \le x_2 \le c$). Начало координат в точке *C*. Перемещение сечения x_2 относительно сечения *D* ($\Delta_{x_2 D}$) можно выразить как алгебраическую сумму перемещения Δ_{CD} и перемещения сечения x_2 относительно сечения *C* ($\Delta_{x_2 C}$)

$$\Delta_{x_2 D} = \Delta_{CD} + \Delta_{x_2 C},$$

или

$$\Delta_{x_2 D} = \Delta_{CD} + \frac{N_{x_2} x_2}{EA_2}.$$

В начале участка *CB* (при $x_2 = 0$) смещение сечения равно уже найденному смещению в конце первого участка *DC*:

$$\Delta_{x_2}\Big|_{x_2=0} = \Delta_{CD} = 1{,}875 \cdot 10^{-5}\ \text{м},$$

а в конце участка

$$\Delta_{x_2 D}\Big|_{x_2=C} = \Delta_{BD} = 1{,}875 \cdot 10^{-5}\text{м} - \frac{10\text{кН} \cdot 0{,}4\text{м}}{2 \cdot 10^5\text{МПа} \cdot 4 \cdot 10^{-4}\text{м}^2} =$$
$$= -3{,}125 \cdot 10^{-5}\ \text{м}.$$

Участок *BA* ($0 \le x_3 \le b$)

$$\Delta_{x_3 D} = \Delta_{BD} + \Delta_{x_3 B} = \Delta_{BD} + \frac{N_{x_3} x_3}{EA_3}.$$

В начале участка

$$\Delta_{x_3 D}\Big|_{x_3=0} = \Delta_{BD} = -3{,}125 \cdot 10^{-5}\ \text{м},$$

в конце участка

$$\Delta_{x_3D}\Big|_{x_2=b} = \Delta_{AD} = -3{,}125\cdot10^{-5}\text{м} - \frac{10\text{кН}\cdot0{,}3\text{м}}{2\cdot10^5\text{МПа}\cdot2\cdot10^{-4}\text{м}^2} =$$

$$= -10{,}625\cdot10^{-5}\ \text{м}.$$

Участок AO $(0 \le x_4 \le a)$. Внутренняя сила на данном участке $N_{x_4} = 0$ (рис. 2.1). Следовательно, он не деформируется, но перемещается за счет деформации части стержня *DA* и будет

$$\Delta_{x_4D} = \Delta_{AD} = \Delta_{0D}.$$

По полученным значениям перемещений в начале и в конце каждого участка строим эпюру перемещений (рис. 2.6).

Перемещение сечения O относительно D (Δ_{CD}) также можно получить, рассматривая действие на стержень отдельно каждой внешней силы:

$$\Delta_{0D} = \Delta l_{0D} = \frac{F_2 d}{EA_2} - \frac{F_1(c+d)}{EA_2} - \frac{F_1 b}{EA_1}.$$

Сила F_2 вызывает растяжение участка *DC*, поэтому берется со знаком «плюс», F_1 сжимает *AD* – знак «минус». Действие F_1 выражается двумя слагаемыми, так как на участке *AD* площади сечений различны.

2.5. Испытание материалов на растяжение и сжатие

2.5.1. *Диаграммы растяжения*

В расчетах на прочность и жесткость элементов конструкций необходимо знать механические свойства материалов, из которых они будут изготовлены. Эти свойства определяются экспериментально при механических испытаниях образцов из конкретных материалов. При испытаниях оцениваются характеристики прочности, пластичности и упругости.

Условия испытания представлены в Государственных стандартах. Существуют стандарты на следующие основные виды нагружения: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение и изгиб. Испытания на растяжение во многих случаях позволяют достаточно верно судить о поведении материала и при других видах нагружения. Рассмотрим подробнее испытание на растяжение. Для испытания на растяжение чаще используются образцы круглого (рис. 2.7), реже прямоугольного поперечного сечений.

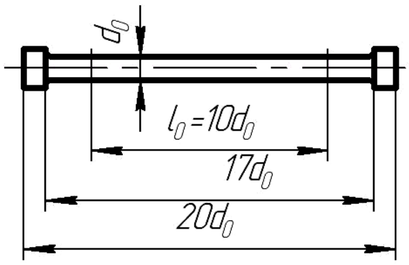


Рис. 2.7

Длину рабочей части образца l_0 принимают больше его диаметра d_0 в 10 раз (допускается в 5 раз). Концевые утолщения образца необходимы для его закрепления в захватах машины. Испытания проводят на универсальных испытательных машинах, имеющих силоизмерительное устройство и аппарат для автоматической записи диаграммы растяжения (сжатия) в координатах сила P – удлинение Δl.

На рис. 2.8 приведены диаграммы растяжения для малоуглеродистой стали и чугуна (пластичного и хрупкого материалов). *Пластичность* – это свойство материала получать большие остаточные (необратимые) деформации без разрушения. *Хрупкость* – способность материала разрушаться без заметных остаточных деформаций. На диаграмме, показанной на рис. 2.8, приведены характерные точки: $F_{\text{п}}$ – сила, соответствующая пределу пропорциональности; $F_{\text{т}}$ – сила, соответствующая пределу текучести; $F_{\text{у}}$ – сила, соответствующая пределу упругости; $F_{\max} = F_{в}$ – сила, соответствующая пределу прочности.

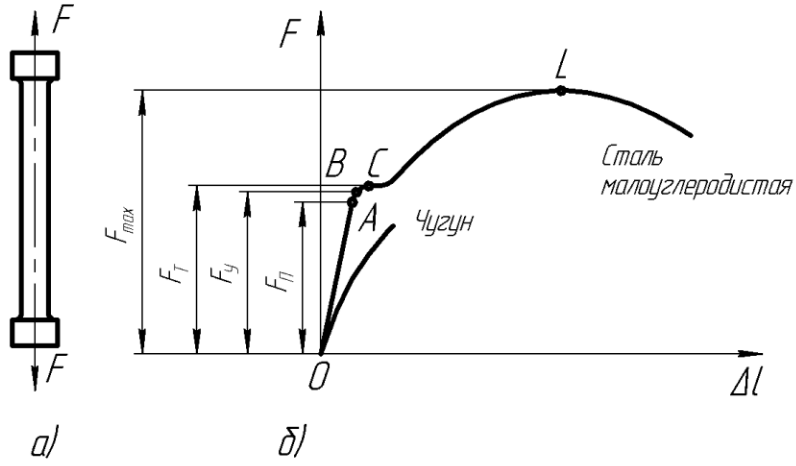


Рис. 2.8

Диаграмма растяжения может быть легко перестроена в координатах $\sigma - \varepsilon$. При этом напряжение и деформация рассчитываются как

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

где A_0, l_0 – площадь поперечного сечения и рабочая длина образца до испытания.

Определим на диаграмме (рис. 2.9) характерные точки и дадим качественную и количественную оценку механическим свойствам материала. Рассматривается диаграмма малоуглеродистой стали как наиболее показательная при определении характеристик прочности. На диаграмме условно можно выделить четыре зоны.

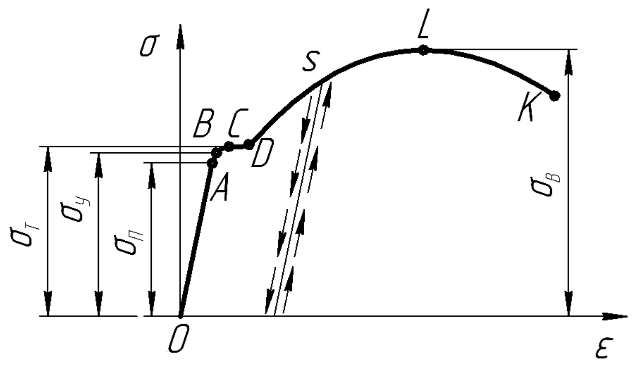


Рис. 2.9

Первая зона (*OB*) – *зона упругого деформирования*. При снятии нагрузки в этой зоне деформирования образец полностью восстанавливает начальные размеры. Точка *A* на оси σ соответствует *пределу пропорциональности*, $\sigma_\text{п} = F_\text{п} / A_0$ – это наибольшее напряжение, до которого материал деформируется в соответствии с законом Гука ($\sigma = E \cdot \varepsilon$). Точка *B* соответствует *пределу упругости*, $\sigma_\text{у} = F_\text{у} / A_0$ – это наибольшее напряжение, до которого в материале не образуются остаточные деформации.

Вторая зона (*BD*) называется *зоной общей текучести*. Для нее характерно значительное увеличение деформации без заметного роста напряжений за счет одновременных сдвигов в кристаллической решетке по всему объему материала образца. Точка *C* на диаграмме соответствует *пределу текучести*, $\sigma_\text{т} = F_\text{т} / A_0$ – это напряжение, при котором в материале возникают значительные деформации без заметного роста напряжений. Для тех материалов, у которых нет выраженной зоны *BD*, пределом текучести называется напряжение, соответствующее остаточной деформации, равной $0{,}02 \div 0{,}2\%$ (*условный предел текучести*).

Третья зона (*DL*) – *зона упрочнения*. Под упрочнением понимается повышение уровня напряжений, до которого материал деформируется упруго. Так, если разгрузить образец из состояния, соответствующего точке *S*, то при последующем нагружении он будет деформироваться упруго до точки *S*, где напряжение выше предела упругости. Это явление повышения предела упругости материала в результате пластического деформирования носит название «*наклёп*» и широко используется в технике. Наклеп при необходимости может быть снят термической обработкой – *отжигом*.

Четвертая зона (*LK*) называется зоной *местной текучести*. В этой зоне требуется все меньшая нагрузка для дальнейшего деформирования образца. Это объясняется образованием местного сужения (*шейки*) в наиболее слабом сечении образца, и дальнейшее деформирование происходит в зоне шейки, где площадь сечения быстро уменьшается. Однако многие материалы разрушаются без заметного образования шейки.

Напряжение, соответствующее максимальной нагрузке, которую может выдержать образец (точка *L*), называется *пределом прочности*, или *временным сопротивлением*

$$\sigma_в = \frac{F_{\max}}{A_0}.$$

Аналогичным образом определяются характеристики прочности и при других видах нагружения.

2.5.2. *Диаграммы сжатия пластичных и хрупких материалов*

К хрупким относят материалы, деформирующиеся без существенных остаточных деформаций. Для испытания на сжатие используются образцы цилиндрической формы и в виде параллелепипеда с соотношением основных размеров $h/d \le 2$ или $h/a \le 2$ (рис. 2.10).

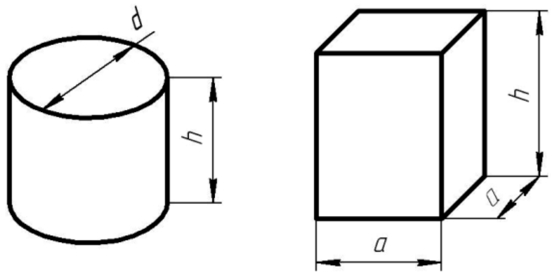


Рис. 2.10

Диаграмма сжатия пластичной стали показана на рис. 2.11. При сжатии образец расплющивается и площадь его сечения увеличивается, в связи с чем увеличивается сжимающая сила. Отсюда следует, что понятие предела прочности при сжатии лишается физического смысла. Предел текучести при сжатии и растяжении для одного и того же пластичного материала одинаков.

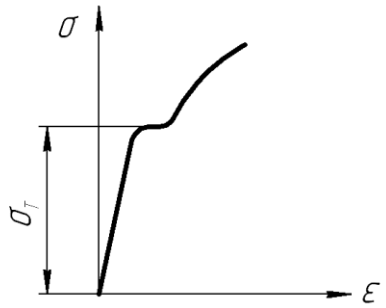


Рис. 2.11

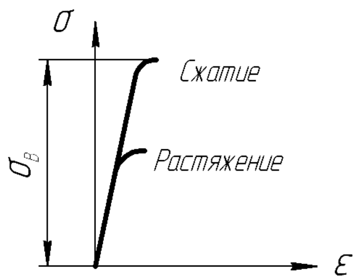


Рис. 2.12

Диаграмма сжатия хрупкого материала представлена на рис. 2.12 и, как видно, аналогична диаграмме растяжения. Здесь предел текучести отсутствует, остаточные деформации малы. Однако предел прочности при сжатии хрупкого материала выше предела прочности хрупкого материала при растяжении.

2.6. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии

2.6.1. *Условие прочности*

Условие прочности при растяжении и сжатии имеет вид

$$\sigma_{\max} \le [\sigma], \qquad (2.14)$$

где $\sigma_{\max}$ – наибольшее по абсолютной величине растягивающее или сжимающее напряжение, $[\sigma]$ – допускаемое напряжение. Для пластичных материалов $[\sigma] = \sigma_{\text{Т}}/[n_{\text{Т}}]$, где $[n_{\text{Т}}]$ – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести. Для хрупких материалов, у которых пределы прочности при сжатии (σ_{b_c}) и растяжении (σ_{b_p}) могут быть различны,

$$[\sigma_c] = \frac{\sigma_{b_c}}{[n_b]}, \quad [\sigma_p] = \frac{\sigma_{b_p}}{[n_b]},$$

где $[\sigma_c]$, $[\sigma_p]$ – допускаемые напряжения при сжатии и растяжении; $[n_b]$ – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу прочности. Ориентировочные интервалы изменения коэффициентов запаса составляют $[n_{\text{T}}] = 1{,}5 \div 2{,}5$, $[n_b] = 2{,}0 \div 5{,}0$. В отдельных случаях коэффициенты запаса могут назначаться и вне пределов указанных интервалов.

Назначение коэффициентов запаса является ответственной операцией. Необоснованное завышение коэффициентов может привести к избыточному расходу материала и утяжелению конструкции, а занижение – к риску возникновения в элементах конструкций пластических деформаций или разрушению. При назначении коэффициентов запаса следует учитывать многие факторы, в том числе характер прикладываемых нагрузок (статические или динамические, циклические или нет и т.п.), степень ответственности конструкции, наличие случайного разброса характеристик прочности материала, который может быть учтен при использовании методов теории вероятностей и математической статистики и др.

На основе условий прочности могут решаться три типа задач:

1. *Проверка напряжений* (поверочный расчет), см. формулу (2.14). Здесь сравниваются расчетные и допускаемые напряжения и делается вывод о работоспособности конструкции при известных внешних нагрузках, размерах элементов и конструкции в целом.

2. *Определение размеров поперечных сечений* (проектный расчет). Цель расчета – определение размеров сечений при известных внешних нагрузках, материале элементов, форме поперечных сечений

$$A \geq \frac{N_{расч}}{[\sigma]}.$$

3. *Определение грузоподъемности*. Цель расчета – определение максимально допустимых внешних нагрузок при известных соотношениях между ними, форме, размерах и материале элементов. В соответствии с соотношением (2.14) $N \leq A[\sigma]$. Далее из уравнений равновесия устанавливают соотношение между внутренними усилиями и внешними силами.

2.6.2. *Условие жесткости*

Условие жесткости накладывает ограничения на изменения продольных размеров элементов под действием внешних факторов и имеет вид

$$\Delta l_{\max} = \left(\frac{Nl}{EA}\right)_{\max} \le [\Delta l], \tag{2.15}$$

или

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\Delta l_{\max}}{l} \le [\varepsilon]. \tag{2.16}$$

Здесь $[\Delta l]$, $[\varepsilon]$ – допускаемые абсолютные и относительные изменения длины наиболее деформируемого участка, регламентируемые для конкретного материала.

На основе условий (2.15), (2.16) могут решаться также три типа задач: проверочный и проектный расчеты, и определение допустимых нагрузок.

Пример. Дана конструкция из двух стержней (рис. 2.13, *а*). Заданы следующие характеристики: $\sigma_{\text{Т}} = 320$ МПа, $n_{\text{Т}} = 2$, $A = 5$ см^2, $\alpha = 45°$. Определить допускаемую нагрузку.

Решение. Используя метод сечений, рассекаем стержни *1* и *2* и в места сечений вводим внутренние усилия N_1 и N_2. Определим их из уравнений статики

$$\sum X = -N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha = 0,$$

$$\sum Y = N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha - F = 0,$$

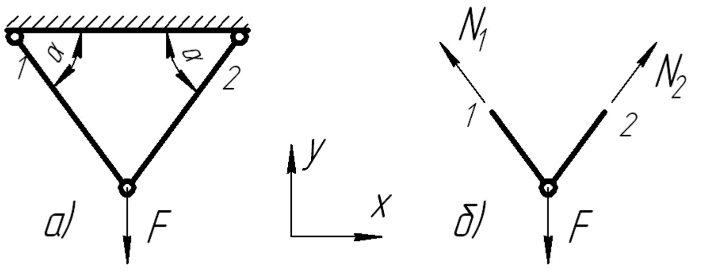


Рис. 2.13

отсюда

$$N_1 = N_2 = \frac{F}{2\sin\alpha}.$$

Из условия прочности (2.14) находим значения допускаемых для конструкции усилий

$$N \le A[\sigma] = A\frac{\sigma_{\text{Т}}}{n_{\text{Т}}}.$$

Принимаем

$$N = [N] = A\frac{\sigma_{\text{Т}}}{n_{\text{Т}}} = \frac{F_{\text{доп}}}{2\sin\alpha},$$

откуда

$$F_{\text{доп}} = \frac{A\sigma_{\text{Т}} 2\sin\alpha}{n_{\text{Т}}} = \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 320\cdot 10^{6}\cdot 2\cdot 0{,}707}{2} = 11{,}3 \text{ кН}.$$

2.7. План решения задач по сопротивлению материалов

Для решения задач по сопротивлению материалов следует:

– выяснить характер и значения внешних сил, включая реакции опор и связей;

– определить внутренние усилия в элементах;

– определить наибольшие напряжения;

– выбрать материал в соответствии с характером действия внешних сил и назначением конструкции и установить величину допускаемых напряжений;

– написать условие прочности и из него найти поперечные размеры или проверить достаточность уже принятых.

В ряде случаев проверка условия прочности дополняется проверкой на жесткость и устойчивость.

2.8. Работа сил и потенциальная энергия упругой деформации

Рассмотрим нагружение стержня силой F (рис. 2.14), которая медленно возрастает от нуля до своего конечного значения. Такое нагружение называется *статическим*. Сила F вызывает продольную деформацию, в результате чего сечение стержня, в котором она приложена, смещается, при этом сила F совершает работу.

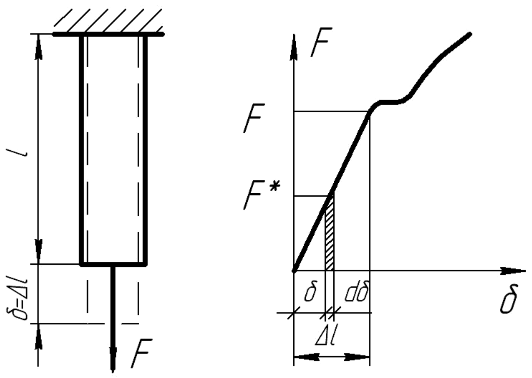


Рис. 2.14

Диаграмма смещений показана на рис. 2.14. Здесь δ – перемещение нижнего конца стержня; Δl – максимальное упругое смещение; F – сила, его вызвавшая; δ и F – текущие значения перемещения и силы. Если сила получит приращение dF, то конец стержня опустится на $d\delta$. Составим выражение для работы силы $F + dF$ на перемещении $d\delta$, пренебрегая малыми второго порядка:

$$dW = Fd\delta. \tag{2.17}$$

Полную работу при изменении силы от нуля до F на перемещении Δl получим интегрированием (2.17)

$$W = \int_0^{\Delta l} dW = \int_0^{\Delta l} Fd\delta.$$

Учитывая, что текущие значения силы F и перемещения δ, согласно (2.6), связаны соотношением $F = \delta EA/l$, получим

$$W = \frac{EA}{l}\int_0^{\Delta l} \delta d\delta = \frac{EA\delta^2}{2l}\bigg|_0^{\Delta l} = \frac{EA\Delta l^2}{2l}.$$

Принимая $EA\Delta l/l = F$, получим:

$$W = \frac{F\Delta l}{2}, \tag{2.18}$$

т.е., работа сил равна половине произведения силы на перемещение.

Пренебрегая, ввиду малости, тепловыми и прочими потерями, можно принять, что на основании закона сохранения энергии работа внешних сил в пределах упругой деформации полностью переходит в потенциальную энергию деформации. На основании этого можно записать

$$U = W,$$

или

$$U = \frac{F^2 l}{2EA}. \quad (2.19)$$

Для неоднородно напряженного стержня с переменными внутренними усилиями или размерами поперечных сечений находим потенциальную энергию вырезанного из стержня элемента длиной dx:

$$dU = \frac{F_x^2 dx}{2EA_x}.$$

Полная потенциальная энергия на длине l будет равна

$$U = \int_l \frac{F_x^2}{2EA_x} dx. \quad (2.20)$$

2.8.1. *Статически неопределимые системы*

В рассмотренных ранее задачах продольные силы определялись методом сечений на основе уравнений статики. Однако не всегда уравнений статики достаточно для определения внутренних сил. Системы, в которых число неизвестных усилий превышает число уравнений статики, называются *статически неопределимыми.* Разность между числом неизвестных и числом уравнений статики называется *степенью статической неопределимости.* Она показывает, сколько дополнительных уравнений необходимо составить для определения неизвестных усилий.

Одним из методов составления дополнительных уравнений (раскрытия статической неопределимости) является метод перемещений. Суть его состоит в том, что, рассматривая систему в деформированном состоянии после нагружения, находят геометрические соотношения между деформациями отдельных стержней системы. Затем, выражая деформации через внутренние усилия, по закону Гука получают дополнительные уравнения – *уравнения совместности деформаций,* решение которых совместно с уравнениями статики позволяет определить неизвестные усилия.

Рассмотрим решение статически неопределимых систем на конкретных примерах.

Пример 1. Прямой однородный стержень жестко закреплен по концам и нагружен продольной силой (рис. 2.15, *а*).

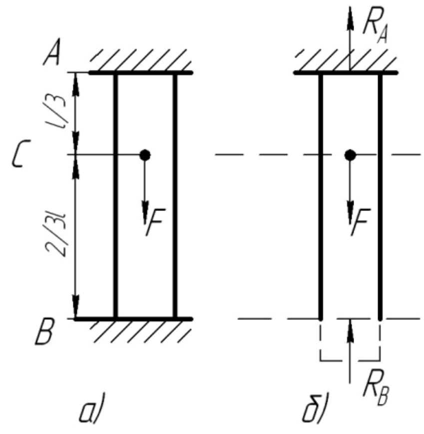


Рис. 2.15

Требуется определить две реакции R_A и R_B, возникающие в опорных закреплениях. Система один раз статически неопределима, поскольку имеется только одно уравнение статики

$$R_A + R_B - F = 0. \tag{2.21}$$

Необходимо записать еще одно дополнительное уравнение.

Для этого отбросим нижнюю защемляющую опору и заменим ее влияние неизвестной пока реакцией R_B (рис. 2.15, *б*). Рассмотрим деформацию полученной системы от действия силы *F* и опорной реакции R_B отдельно, используя принцип независимости действия сил.

Под действием силы *F* брус удлинится и опорное сечение *B* переместится вниз на величину Δl_F (положение сечения *B* показано пунктирной линией на рис. 2.15, *б*). Под действием реакции R_B брус сожмется и сечение *B* переместится вверх на величину Δl_R. Так как по условию задачи сечение *B* неподвижно, суммарное перемещение от *F* и R_B должно быть равно нулю, т.е.

$$\Delta l_F + \Delta l_R = 0. \tag{2.22}$$

Полученное уравнение называется уравнением совместности деформаций.

Используя закон Гука, вычислим эти перемещения:

$$\Delta l_F = \frac{F\,l/3}{EA},$$

здесь под действием силы F удлиняется только участок длиной $l/3$ и, следовательно, сечение *B* перемещается на эту величину

$$\Delta l_R = -\frac{R_B(l/3 + 2l/3)}{EA}.$$

Перемещению Δl_R присвоен знак «минус», так как реакция R_B вызывает сжатие. Подставив перемещения в уравнение (2.22), имеем

$$\frac{Fl/3}{EA} - \frac{R_B(l/3 + 2l/3)}{EA} = 0. \qquad (2.23)$$

Из уравнений (2.21) и (2.22) получим

$$R_B = \frac{F}{3}, \qquad R_A = \frac{2F}{3}.$$

Пример 2. Система из трех стержней, изготовленных из одного и того же материала и имеющих одинаковую площадь поперечных сечений *A* (рис. 2.16, *а*), нагружена вертикальной силой *F*. Определить усилия в стержнях.

Решение. Составим уравнения равновесия узла *A* (рис. 2.16, *б*)

$$\sum X = -N_1 \sin\alpha + N_3 \sin\alpha = 0, \qquad (2.24)$$

$$\sum Y = N_1 \cos\alpha + N_3 \cos\alpha + N_2 - F = 0.$$

Полученных уравнений недостаточно для определения неизвестных усилий. Необходимо записать дополнительное уравнение. Сравним для этого форму системы до и после нагружения (рис. 2.16, *в*)

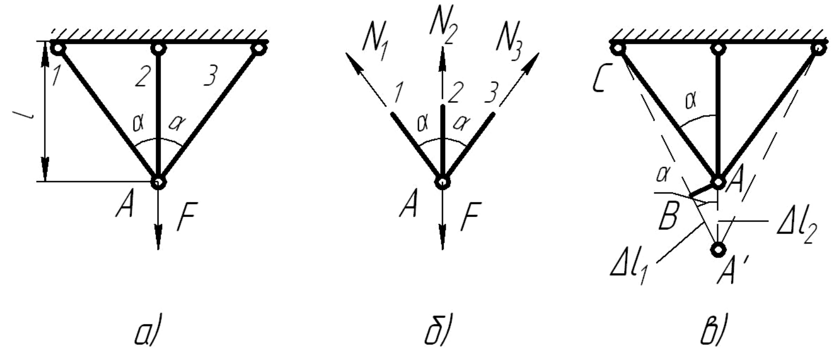


Рис. 2.16

Отрезок AA' представляет собой перемещение узла *A* по вертикали. Оно равно, очевидно, удлинению среднего стержня

$$AA' = \Delta l_2.$$

Из точки *A* проводим дугу окружности *AB* с центром в точке *C*. Отрезок *A'B* представляет собой удлинение бокового стержня, т.е.

$$A'B = \Delta l_1.$$

Вследствие малости перемещений дугу *AB* можно принять за отрезок, перпендикулярный к прямой *A'C,* и тогда, пренебрегая, ввиду малости, приращением угла α, получим

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\alpha .$$

Это и есть уравнение совместности деформации.

Выражая удлинения через усилия по закону Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}, \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}$$

и подставляя их в уравнение совместности, получим:

$$N_1 = N_2 \cos^2\alpha . \qquad (2.25)$$

Решая это уравнение совместно с (2.24), найдем усилия

$$N_1 = N_3 = \frac{F\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}, \qquad N_2 = \frac{F}{1+2\cos^3\alpha}.$$

В статически неопределимых системах могут возникнуть напряжения и при отсутствии внешних нагрузок – за счет неточности изготовления и сборки элементов конструкций или при изменении температуры. Монтажные и температурные усилия и напряжения определяются так же, как и при расчете на силовые нагрузки. Покажем это на примерах.

Пример 3. В системе, показанной на рис. 2.16, *а*, без внешней силы средний стержень изготовлен короче номинальной длины *l* на $\delta = AA_0$. При сборке элементов единый узел сечения *A* занимает положение в точке A_1 (рис. 2.17, *а*). Определить усилия в стержнях.

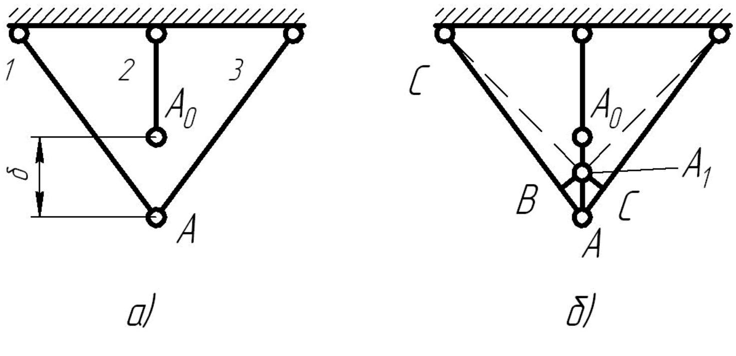


Рис. 2.17

Решение. Как видно, средний стержень удлиняется на величину $\Delta l_2 = A_1A_0$, а боковые – при этом укорачиваются на величину *AB* или *AC* (рис. 2.17, *б)*. Уравнение совместности деформаций, как следует из рис. 2.17 *б,* в геометрической форме будет иметь вид $AB = AA_1 \cdot \cos\alpha$ или, учитывая, что $AA_1 = AA_0 - A_1A_0$, получим

$$\delta = \Delta l_2 + \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha}.$$

Выражаем Δl_1 и Δl_2 через усилия по закону Гука и, учитывая, что стержни *1* и *3* сжимаются, получим окончательно

$$N_1 = N_3 = \frac{\delta EA\cos^2\alpha}{l(1+2\cos^2\alpha)}, \qquad N_2 = \frac{2\delta EA\cos^2\alpha}{l(1+2\cos^2\alpha)}.$$

Пример 4. Стальной брус, изображенный на рис. 2.18, нагревается на ΔT°. Коэффициент линейного расширения равен α. Определить реакции опор и напряжение, действующее в стержне.

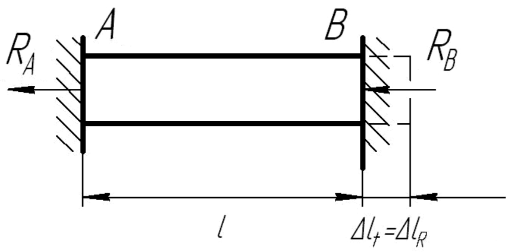


Рис. 2.18

Решение. Для этой системы можно составить только одно уравнение равновесия

$$R_A + R_B = 0. \tag{2.26}$$

Данная система статически неопределима. Для решения задачи требуется составить дополнительное уравнение перемещений. Условно отбросим нижнюю опору, заменим ее действие реакцией R_B, и определим перемещения свободного конца бруса от температуры Δl_T и от реакции Δl_{R_B}

$$\Delta l_T = \alpha l \Delta T, \qquad \Delta l_{R_B} = -\frac{R_B l}{EA}.$$

Так как опорное сечение *B* не перемещается, то суммарное перемещение от температуры и реакции равно нулю и будет

$$\Delta l_T + \Delta l_{R_B} = \alpha l \Delta T - \frac{R_B l}{EA} = 0. \qquad (2.27)$$

Решая совместно (2.26) и (2.27), получаем:

$$R_B = -R_A = \frac{\alpha l \Delta T E A}{l},$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{R_B}{A} = \frac{\alpha l \Delta T E}{l}.$$

Глава 3

СДВИГ. СРЕЗ

Сдвиг – это такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении стержня возникает только поперечная (перерезывающая) сила Q_y или Q_z, а остальные силовые факторы равны нулю (рис. 3.1).

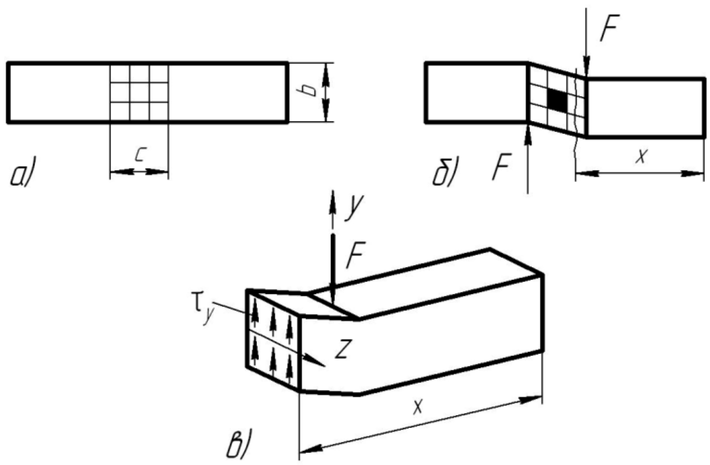


Рис. 3.1

Срез – это частный случай сдвига. Примеры среза: разрезание ножницами металлических прутков, пластин и др.

Для определения внутренней силы рассмотрим равновесие мысленно отсеченной правой части стержня длиной *x*. При этом внутренняя сила Q_y равна *F* и является равнодействующей касательных напряжений τ_y, лежащих в плоскости сечения и направленных параллельно *F*. При сдвиге (срезе) принимается равномерное распределение напряжений по сечению. Тогда

$$\tau_y = \frac{Q_y}{A}, \tag{3.1}$$

где *A* – площадь поперечного сечения стержня. Условие прочности при сдвиге (срезе) имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_p}{A} \le [\tau], \tag{3.2}$$

где Q_p – внутренняя перерезывающая сила в наиболее нагруженном сечении стержня; $[\tau]$ – допускаемое напряжение на срез.

Элемент в форме прямоугольника, выделенный на рис. 3.1, после приложения нагрузки получил геометрические искажения (рис. 3.2), которые характеризуются абсолютным сдвигом a и относительным сдвигом (угол сдвига γ) и будут

$$tg\gamma \approx \gamma = \frac{a}{h}. \tag{3.3}$$

Экспериментально установлено, что при упругом деформировании связь между напряжением и угловой деформацией прямо пропорциональна, т.е. соответствует закону Гука

$$\tau = G\gamma. \tag{3.4}$$

Величина G называется *модулем упругости при сдвиге.* С позиции прочности на срез рассчитываются различные соединения: заклепочные, резьбовые, сварные, шпоночные и др.

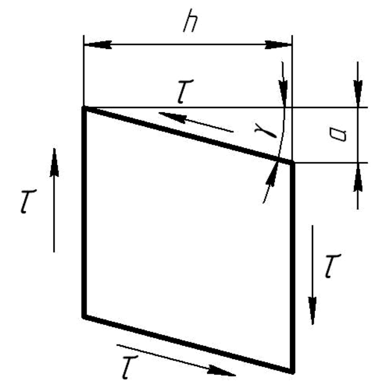


Рис. 3.2

Пример 1. Определить диаметр d заклепки, если известны сила F и допускаемое напряжение на срез $[\tau]$ (рис. 3.3).

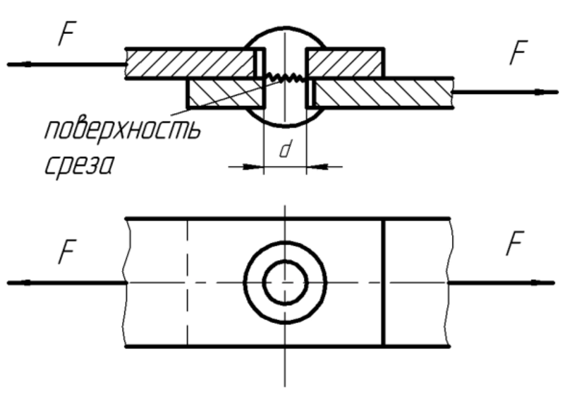


Рис. 3.3

Решение. Сила *F*, растягивающая листы, вызывает срез заклепки по площади

$$A = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Из условия прочности (3.2)

$$A \ge \frac{F}{[\tau]} \qquad \text{или} \qquad \frac{\pi d^2}{4} \ge \frac{F}{[\tau]},$$

откуда

$$d \ge \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau]}}.$$

Пример 2. Определить длину сварных швов l_0 и $l_п$ (рис. 3.4). Известно значение растягивающего усилия *N*, катет шва *h*, допускаемое напряжение на срез для материала электрода $[\tau]_{эл}$.

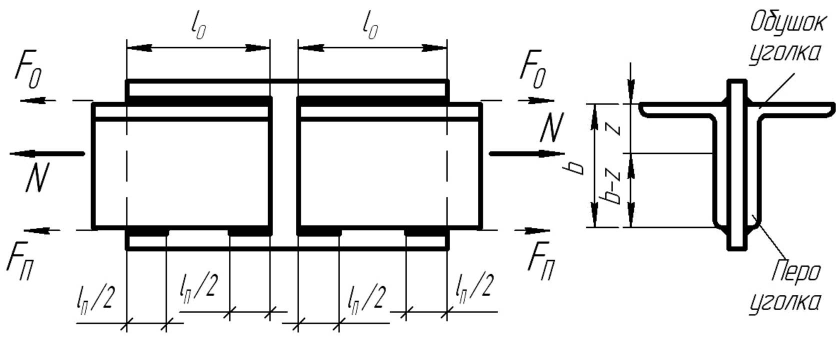


Рис. 3.4

Решение. Сила *N* растягивает два уголка. Следовательно, каждый уголок растягивается силой $N/2$. Эта сила действует вдоль оси, проходящей через центр тяжести поперечных сечений уголка. Ее можно разложить на силу F_0, действующую вдоль обушка уголка, и силу $F_п$, действующую вдоль пера:

$$F_0 = \frac{N(b-z)}{2b}, \qquad F_п = \frac{N_z}{2b}, \tag{3.5}$$

где *z* – расстояние от наружной кромки уголка (обушка) до центра тяжести его сечения, которое определяется по таблицам прокатных сортаментов.

Условие прочности сварного шва имеет следующий вид:

$$\tau = \frac{F}{0{,}7hl} \le [\tau]_{эл}, \tag{3.6}$$

где F – усилие, действующее на шов; $0{,}7h$ – наименьшая ширина площадки среза (рис. 3.5).

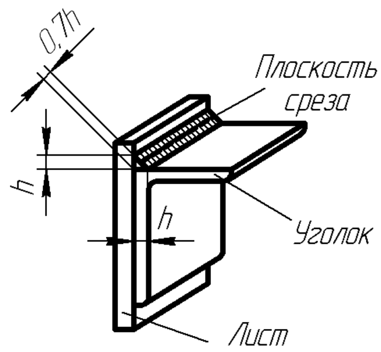


Рис. 3.5

Из условия (3.6) находим необходимую длину шва

$$l = \frac{F}{0{,}7h[\tau]_{эл}}. \tag{3.7}$$

Допускаемые напряжения $[\tau]_{эл}$ для шва назначаются в зависимости от типа электродов и составляют обычно $50 \div 70$ % от допускаемых напряжений на растяжение основного (свариваемого) металла.

Определив силы F_0 и $F_п$, задают катет шва. Обычно его принимают равным толщине пера. Используя соотношение (3.7), определяют l_0 и $l_п$ швов (со стороны обушка и пера уголка соответственно):

$$l_0 = \frac{F_0}{0{,}7h[\tau]_{эл}}, \qquad l_п = \frac{F_п}{0{,}7h[\tau]_{эл}}.$$

Глава 4

КРУЧЕНИЕ

Кручение – это такой вид нагружения, при котором из шести внутренних силовых факторов в поперечном сечении стержня возникает только один – крутящий момент ($M_к$). Стержень, работающий на кручение, называют *валом.* Полагается, что поперечные сечения вала поворачиваются относительно его продольной оси как жесткие тела, радиальные элементы остаются прямолинейными, длина вала и его радиус при кручении не меняются.

4.1. Определение внутренних усилий при кручении

При расчете вала на прочность и жесткость необходимо знать значение внутреннего крутящего момента на каждом силовом участке, т.е. иметь эпюру крутящих моментов ($M_к$). При построении эпюр принимается следующее правило знаков: *крутящий момент $M_к$ считается положительным, если при взгляде со стороны сечения он закручивает вал против часовой стрелки.* Рассмотрим на примере порядок построения эпюры (рис. 4.1).

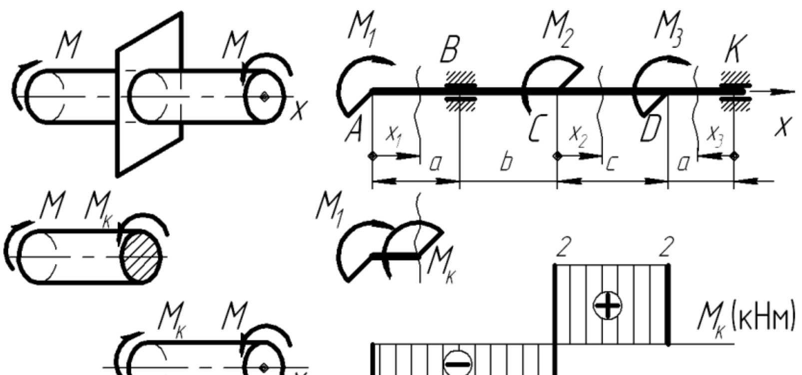


Рис. 4.1

В данном примере вращающий момент M_2 подводится к валу от шкива *2* ременной передачи и снимается с вала через передающие шкивы *1, 3* на другие валы механизма. Пусть заданы величины крутящих моментов: $M_1 = 1$ кН·м; $M_2 = 3$ кН·м; $M_3 = 2$ кН·м.

Для построения эпюры необходимо знать все внешние нагрузки. Если моментами сопротивления, которые возникают в опорах (подшипниках) за счет сил трения, пренебречь как несоизмеримо малыми по сравнению с M_1, M_2, M_3, то все внешние нагрузки известны.

Участки ограничиваются сечениями, в которых приложены внешние сосредоточенные моменты. Следовательно, имеем три участка: *AC*, *CD*, *DK*. Эпюра строится по аналитическим выражениям, полученным в соответствии с методом сечений, для $M_к$ на каждом силовом участке.

Рассмотрим участок $AC(0 \le x_1 \le a+b)$. Начало координат расположим в точке *A*. Тогда из условия равновесия части вала длиной x_1 имеем

$$M_{к_1} = -M_1 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}. \tag{4.1}$$

Из выражения (4.1) следует, что на участке *AC* внутренний момент – постоянный и отрицательный.

Участок $CD(0 \le x_2 \le c)$: начало координат перенесем в точку *C*, но исследовать будем всю левую часть до сечения x_2.

$$M_{к_2} = -M_1 + M_2 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Внутренний момент на участке *CD* – постоянный и положительный.

На участке *DK* удобнее сделать сечение на расстоянии x_3 от точки *K* (начало координат в точке *K)* и исследовать равновесие правой части вала длиной x_3. На участке $KD(0 \le x_3 \le a)$ $M_{к_3} = 0$, так как на длине x_3 внешние моменты отсутствуют.

По полученным выражениям для $M_к$ строим эпюру (рис. 4.1), из которой следует, что наиболее нагруженными будут сечения вала на участке *CD*. На эпюре $M_к$ резкое изменение значения момента (скачок) имеет место в тех сечениях, в которых приложены сосредоточенные внешние моменты. Причем величина скачка должна быть равна соответствующему моменту. Это следует иметь в виду при проверке правильности построения эпюры.

4.2. Деформации и перемещения бруса круглого поперечного сечения

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения радиусом *r*, заделанный одним концом и нагруженный вращающим моментом *M* на другом конце (рис. 4.2).

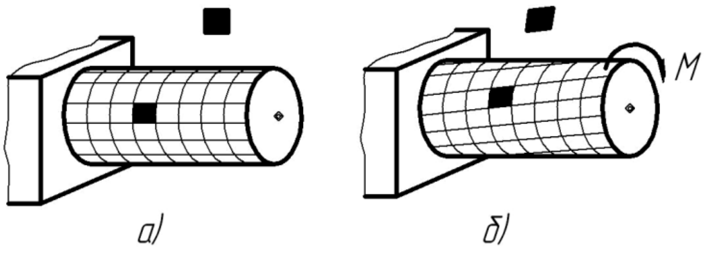


Рис. 4.2

Если на боковую поверхность ненагруженного вала нанести сетку (рис. 4.2, *а*), образованную окружностями и продольными линиями, то ячейка такой сетки будет прямоугольной. После приложения внешнего момента ячейка на поверхности стержня получит геометрические искажения (рис. 4.2, *б),* соответствующие искажениям при сдвиге (рис. 3.2). Следовательно, *кручение по своей физической сущности – это сдвиг смежных плоских сечений друг относительно друга, приводящий к взаимному повороту отстоящих на некотором расстоянии поперечных сечений.*

Таким образом, плоские поперечные сечения остаются плоскими и после приложения крутящего момента; радиусы поперечных сечений при деформации остаются прямыми; расстояния между поперечными сечениями после нагружения вала не изменяются.

Выразим аналитически взаимосвязь между деформацией и перемещением. Для этого вырежем двумя поперечными сечениями *I* и *II* цилиндрический элемент диаметром $2r$ и длиной dx (рис. 4.3). Проведем образующую BC и будем считать левое сечение (сечение *I*) неподвижным. В результате деформации правое сечение (сечение *II*) повернется вокруг продольной оси бруса на угол $d\varphi$, а образующая займет положение BC_1. При этом угол γ (угол сдвига) определяет угловую деформацию элемента, расположенного на поверхности стержня между сечениями *I* и *II*. Из рис. 4.3 получим

$$\gamma \approx tg\gamma = CC_1/dx, \quad d\varphi = CC_1/r.$$

Из этих соотношений получаем

$$\gamma = r\frac{d\varphi}{dx} \tag{4.2}$$

или

$$\gamma = r\theta, \tag{4.3}$$

где $\theta = \dfrac{d\varphi}{dx}$ – относительный угол закручивания.

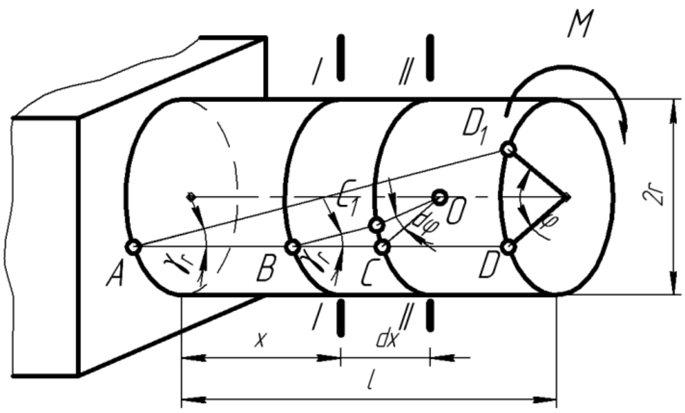


Рис. 4.3

Выражение для деформаций внутренних элементов стержня можно получить аналогичным образом, принимая вместо радиуса стержня r радиус некоторого внутреннего цилиндра ρ $(0 \le \rho \le r)$:

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx} = \rho\theta. \qquad (4.4)$$

4.3. Напряжения в поперечном сечении вала

Внутренний момент $M_к$, лежащий в плоскости поперечного сечения вала, можно выразить через касательные напряжения, которые, согласно закону Гука, при сдвиге (3.4) связаны с деформацией

$$\tau = G\gamma, \qquad (4.5)$$

или, с учетом (4.4),

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dx}. \qquad (4.6)$$

Тогда элементарный внутренний момент (рис. 4.4)

$$dM_к = \tau dA\rho,$$

где dA – площадь элементарной площадки, лежащей в сечении вала на расстоянии ρ от центра тяжести сечения; τdA – элементарная окружная сила.

Суммируя элементарные моменты по площади сечения, получаем выражение для внутреннего момента в сечении

$$M_к = \int_A \tau\rho dA$$

или, с учетом (4.6),

$$M_к = \int_A G\frac{d\varphi}{dx}\rho^2 dA.$$

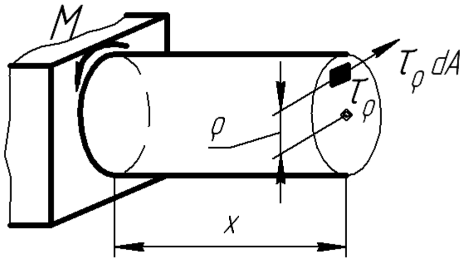


Рис. 4.4

Поскольку произведение $G\frac{d\varphi}{dx}$ постоянно для всех точек сечения, то

$$M_к = G\frac{d\varphi}{dx}\int_A \rho^2 dA.$$

Интеграл $\int_A \rho^2 dA = I_\rho$ представляет собой геометрическую характеристику поперечного сечения и называется *полярным моментом инерции* сечения. Таким образом,

$$M_к = G\frac{d\varphi}{dx}I_\rho, \tag{4.7}$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_к}{GI_\rho}. \tag{4.8}$$

Произведение GI_ρ называется *жесткостью сечения стержня при кручении.* Подставим (4.8) в (4.6) и получим выражение для касательного напряжения

$$\tau = \frac{M_к}{I_\rho}\rho, \qquad (4.9)$$

из которого следует, что напряжения вдоль радиуса изменяются по линейному закону и наибольшее напряжение при кручении возникает на периферии сечения, где $\rho = r$ и будет

$$\tau_{\max} = \tau(r) = \frac{M_к}{I_\rho} r, \quad \text{или} \quad \tau_{\max} = \frac{M_к}{W_\rho},$$

где W_p – геометрическая характеристика сечения, которая называется *полярным моментом сопротивления сечения.* Эта характеристика вводится как отношение полярного момента инерции сечения к расстоянию от центра тяжести сечения до наиболее удаленной от него точки сечения

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} = \frac{I_\rho}{r}.$$

На рис. 4.5 представлена эпюра касательных напряжений, построенная в соответствии с зависимостью (4.9), для точек, лежащих на диаметре *KL*.

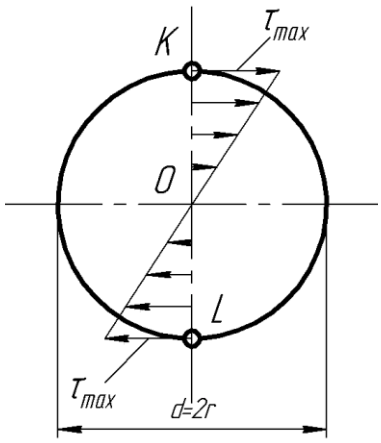


Рис. 4.5

Из эпюры видно, что наиболее нагруженными будут точки, лежащие на максимальном удалении от центра тяжести сечения. В центре тяжести напряжения равны нулю и имеют вид

$$\tau(0) = \frac{M_к}{I_\rho} \cdot 0 = 0.$$

4.4. Геометрические характеристики сечения вала

Полярный момент инерции

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA.$$

Для сечения круглой формы (рис. 4.6) $dA = 2\pi\rho d\rho$. Тогда

$$I_\rho = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}, \tag{4.10}$$

где d – диаметр сечения.

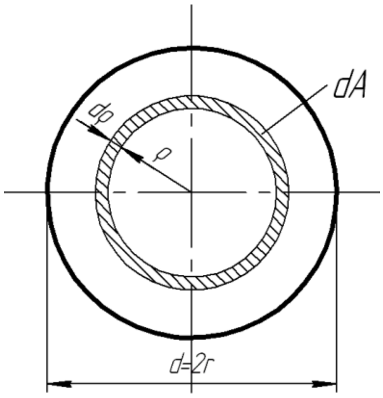


Рис. 4.6

Если в стержне имеется центральное отверстие диаметром *d,* а наружный диаметр вала равен *D,* то полярный момент инерции кольцевого сечения

$$I_\rho = 2\pi \int_0^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi D^4}{32}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \tag{4.11}$$

Полярные моменты сопротивления будут равны:

– для сплошного сечения

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} = \frac{\pi d^3}{16}, \quad \rho_{\max} = \frac{d}{2}; \tag{4.12}$$

– для кольцевого сечения

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \tag{4.13}$$

4.5. Условие прочности при кручении

Условие прочности ограничивает максимальные напряжения в наиболее нагруженном поперечном сечении вала $\tau_{\max}$ максимально допускаемыми напряжениями τ для конкретного материала:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{рас}}{W_{\rho}} \le \tau \;, \qquad (4.14)$$

где $M_{рас}$ – расчетный внутренний момент (момент в наиболее нагруженном сечении);

$$\tau = \frac{\tau_{пред}}{n},$$

где $\tau_{пред}$ – напряжение предельного состояния для конкретного материала. Для пластичного материала $\tau_{пред}$ – это предел текучести, для хрупкого – предел прочности. Эти характеристики определяются экспериментально; n – коэффициент запаса прочности.

4.6. Расчет перемещений и условие жесткости

Угловое перемещение (взаимный угол поворота $d\varphi$ сечений, отстоящих на расстоянии dx, рис. 4.3) может быть определено из выражения (4.8) как

$$d\varphi = \frac{M_к dx}{GI_{\rho}}.$$

Тогда взаимный угол поворота сечений, отстоящих на расстояние x (рис. 4.3), равен

$$\varphi = \int_0^x \frac{M_к dx}{GI_{\rho}}. \qquad (4.15)$$

Если крутящий момент $M_к$, момент инерции сечения I_{ρ} и модуль сдвига G постоянны на участке длиной x, то

$$\varphi = \frac{M_к x}{GI_{\rho}}. \qquad (4.16)$$

Для рассматриваемого вала (рис. 4.3) угол поворота крайнего правого сечения относительно сечения в заделке, согласно (4.16), может быть записан в виде

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} l}{G I_{\rho}}. \tag{4.17}$$

При скачкообразном изменении по длине вала крутящего момента (рис. 4.1) угол поворота между его начальным и конечным сечениями определяется как сумма углов поворота по участкам с постоянным внутренним крутящим моментом M_{κ}:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{\kappa_i} l_i}{G I_{\rho}}. \tag{4.18}$$

Условие жесткости накладывает ограничение на взаимный угол поворота крайних сечений наиболее деформированного участка вала и имеет вид

$$\varphi_{\max} \leq \varphi \;, \tag{4.19}$$

а в относительных величинах

$$\theta_{\max} \leq \theta \;. \tag{4.20}$$

Здесь $\theta_{\max} = \varphi/l_{\ \max}$ – максимальный относительный угол поворота сечения; φ и θ – соответственно допускаемый абсолютный (размерность – рад) и относительный (размерность – рад/м) углы поворота для вала.

4.7. Расчеты на прочность и жесткость

Как было отмечено в п. 2.6.1, на основе условий прочности и жесткости могут решаться три типа задач: проверочный расчет, проектный расчет, расчет максимально допустимых нагрузок. Рассмотрим пример проектного расчета.

Пример. Определить диаметр вала постоянного поперечного сечения (рис. 4.7, *а*) из условия прочности и жесткости.

Дано: τ = 70 МПа, θ = 2 град/м, M_1 = 2,5 кН·м, M_2 = 1,5 кН·м, M_3 = 1,0 кН·м, a = 0,1 м, b = 0,2 м, G = $8 \cdot 10^4$ МПа.

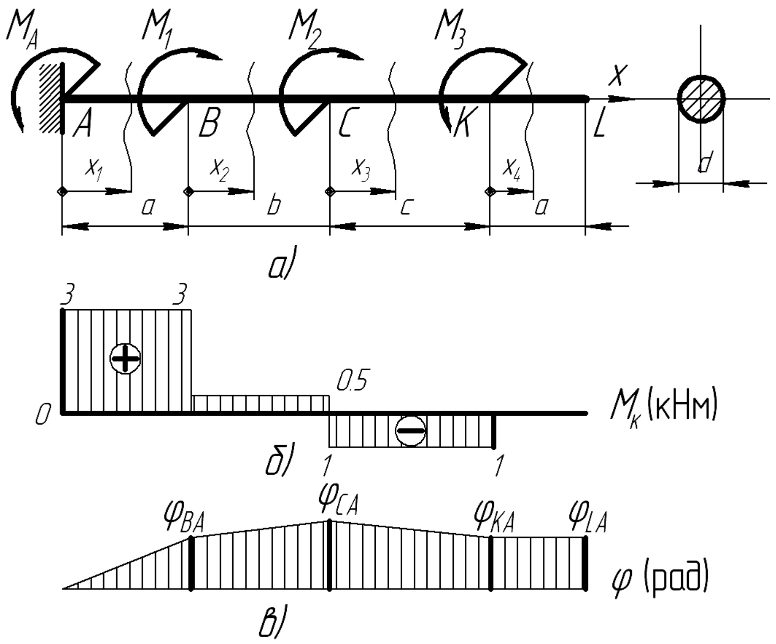


Рис. 4.7

Решение. Определяем диаметр вала из условия прочности и условия жесткости, взяв за проектное значение диаметра его большую величину. Запишем условие прочности для наиболее нагруженного сечения, положение которого найдем из эпюры крутящих моментов.

Порядок построения эпюры представлен в п. 4.1, согласно которому начинаем с определения всех внешних моментов. Для этого используем уравнение равновесия – сумму внешних моментов относительно оси *x*

$$\sum m_x = M_A - M_1 - M_2 + M_3 = 0,$$

из которого находим момент, действующий в сечении *A*

$$M_A = M_1 + M_2 - M_3 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Далее выделяем силовые участки *AB*, *BC*, *CK*, *KL* и, используя метод сечений, для каждого участка записываем выражения для внутреннего момента $M_к$.

Участок AB $0 \le x_1 \le a$

$$M_{к_1} = M_A = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок BC $0 \le x_2 \le b$: начало координат переносим в начало участка, тогда

$$M_{\kappa_2} = M_A - M_1 = 0{,}5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок CK $0 \le x_3 \le b$

$$M_{\kappa_3} = M_A - M_1 - M_2 = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На участке KL внутренний момент равен нулю. На основе полученных выражений для M_κ строим эпюру, из которой видно, что наиболее нагруженными будут сечения на участке *AB* (рис. 4.7, *б*). Следовательно, для величины расчетного момента имеем $M_{расч} = M_{\kappa_1} = 3$ кН$\cdot$м. Тогда значение диаметра вала, удовлетворяющее условию прочности (4.14), будет равно

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16M_{расч}}{\pi\ \tau}} = \sqrt[3]{\frac{16\cdot 3}{3{,}14\cdot 70\cdot 10^3}} = 0{,}06 \text{ м}.$$

Второе значение диаметра d_2, как было отмечено выше, определим из условия жесткости, которое необходимо записать для наиболее деформируемого участка вала.

Положение такого участка наглядно отразится на эпюре углов поворота, хотя для вала, имеющего по всей длине постоянный диаметр, данный участок будет соответствовать части стержня с наибольшим внутренним крутящим моментом.

Для наглядности построим эпюру углов поворота сечений φ. Участками будут части стержня, для которых внутренний крутящий момент, полярный момент инерции и модуль сдвига постоянны. Для заданной схемы этими участками являются *AB*, *BC*, *CK*, *KL*.

Участок AB $0 \le x_1 \le a$. Угол поворота сечения x_1 относительно сечения *A*

$$\varphi_{x_1 A} = \frac{M_{\kappa_1} x_1}{GI_\rho}. \tag{4.21}$$

Из выражения (4.21) видно, что угол поворота на участке *AB* изменяется по линейному закону, т.е. для построения эпюры достаточно рассчитать значение $\varphi_{x_1 A}$ в начале и в конце участка.

$$\varphi_{x_1 A}\Big|_{x_1=0} = \varphi_{AA} = \frac{3\cdot 0}{8\cdot 10^4\cdot I_\rho} = 0,$$

$$\varphi_{x_1 A}\Big|_{x_1=a} = \varphi_{BA} = \frac{3\cdot 0{,}1}{8\cdot 10^4\cdot I_\rho} = \frac{0{,}375}{10^5\cdot I_\rho},$$

где $\varphi_{BA} -$ угол поворота сечения *B* относительно *A*.

Участок BC $0 \le x_2 \le b$. Угол поворота сечения x_2 относительно сечения *A*

$$\varphi_{x_2 A} = \varphi_{BA} + \varphi_{x_2 B} = \varphi_{BA} + \frac{M_{к_2} l_2}{GI_\rho},$$

$$\varphi_{x_2 A}\Big|_{x_2=0} = \varphi_{BA},$$

$$\varphi_{x_2 A}\Big|_{x_2=b} = \varphi_{BA} + \frac{M_{к_2} b}{GI_\rho} = \varphi_{CA} = \frac{0{,}375}{10^5\cdot I_\rho} + \frac{0{,}5\cdot 0{,}2}{8\cdot 10^4\cdot I_\rho} = \frac{0{,}5}{10^5\cdot I_\rho}.$$

Участок CK $0 \le x_3 \le b$.

$$\varphi_{x_3 A} = \varphi_{CA} + \varphi_{x_3 C}, \qquad \varphi_{x_3 A}\Big|_{x_3=0} = \varphi_{CA},$$

$$\varphi_{x_3 A}\Big|_{x_3=b} = \varphi_{CA} + \frac{M_{к_3} b}{GI_\rho} = \varphi_{KA} = \frac{0{,}5}{10^5\cdot I_\rho} + \frac{-1\cdot 0{,}2}{8\cdot 10^4\cdot I_\rho} = \frac{0{,}25}{10^5\cdot I_\rho}.$$

Участок KL $0 \le x_3 \le a$.

$$\varphi_{x_4 A} = \varphi_{KA} + \varphi_{x_4 K}, \qquad \varphi_{x_4 A}\Big|_{x_4=0} = \varphi_{KA},$$

$$\varphi_{x_4 A}\Big|_{x_4=a} = \varphi_{KA} + \frac{M_{к_4} a}{GI_\rho} = \varphi_{KA} = \frac{0{,}25}{10^5\cdot I_\rho} + 0 = \frac{0{,}25}{10^5\cdot I_\rho}.$$

По полученным значениям строим эпюру φ (рис. 4.7, *с*), которая позволяет вычислить относительные углы закручивания участков вала $\theta_i = \Delta\varphi_i / l_i$ (где $\Delta\varphi_i$ – изменение угла поворота вала в пределах *i*-го участка, $l_i -$ длина участка). Наибольший относительный угол поворота θ_{BA} будет на участке *AB*. Он имеет вид

$$\theta_{BA} = \frac{\varphi_{BA}}{a} = \frac{0{,}375}{10^5\cdot I_\rho\cdot a},$$

поэтому условие жесткости запишем для этого участка как

$$\theta_{BA} \le \theta \; . \qquad (4.22)$$

Размерность θ_{BA} – [радиан/м], а θ – [градус/м], приведем θ к той же размерности, что и θ_{BA}, тогда

$$\theta \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0{,}0349 \text{ радиан/м},$$

условие (4.22) запишется как

$$\frac{0{,}375}{10^5 \cdot I_{радиан} \cdot a} \le 0{,}0349 \text{ радиан/м}. \qquad (4.23)$$

Учитывая, что $I_\rho = \dfrac{\pi d^4}{32}$, из выражения (4.23) определяем d_2.

$$d_2 \ge \sqrt[4]{0{,}375 \cdot 32 10^5 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}0349} = 0{,}057 \text{ м}.$$

Окончательно принимаем за диаметр вала величину $d_1 = 0{,}06$ м, полученную из условия прочности, так как она больше.

4.8. Кручение бруса некруглого поперечного сечения

Задачи определения напряжений и деформации при кручении бруса некруглого поперечного сечения решаются только методами теории упругости. Приведем лишь конечные результаты.

Следует отметить, что, в отличие от круглых брусьев, сечения любой другой формы не остаются плоскими, искривляются, а расстояния между ними после приложения нагрузки меняются. В поперечных сечениях касательные напряжения в каждой точке, расположенной вблизи боковой поверхности, всегда направлены параллельно касательной к контуру сечения (рис. 4.8).

Рис. 4.8

Для удобства пользования формулами, применяемыми при расчете на кручение брусьев некруглого поперечного сечения, им придается тот же вид, что и в случае круглого сечения. В соответствии с этим наибольшие касательные напряжения и углы закручивания определяются по формулам

$$\tau_{\max} = \frac{M_к}{W_\rho}, \tag{4.24}$$

$$\varphi = \frac{M_к l}{G I_\rho}, \tag{4.25}$$

где I_ρ и W_ρ – моменты инерции и моменты сопротивления при кручении, которые зависят от формы поперечного сечения. Ниже приводятся формулы для их определения для брусьев различных профилей.

Брус прямоугольного сечения. Если h – большая сторона прямоугольника, а b – меньшая, то

$$I_\rho = \alpha b^4, \quad W_\rho = \beta b^3, \tag{4.26}$$

где α и β – коэффициенты, зависящие от соотношения h и b.

При $h/b > 10$ можно пользоваться формулами

$$I_\rho = \frac{hb^3}{2}, \quad W_\rho = \frac{hb^2}{3}. \tag{4.27}$$

Напряжения $\tau_{\max}$ возникают в серединах длинных сторон прямоугольника. Касательное напряжение τ в серединах коротких сторон связано с $\tau_{\max}$ соотношением

$$\tau = \gamma \tau_{\max}.$$

Здесь γ – коэффициент, зависящий от соотношения h/b так же, как α и β. Все эти коэффициенты определяются из таблиц в учебниках и справочниках по сопротивлению материалов.

Тонкостенные стержни открытого профиля. Поперечное сечение стержня разбивается на n элементов в виде прямоугольников. Для всего стержня

$$I_\rho = \sum_{i=1}^{n} I_{\rho_i}, \tag{4.28}$$

где I_{ρ_i} – момент инерции для i-го элемента, подсчитанный по формуле (4.27), момент сопротивления определяется как

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{b_{\max}}, \tag{4.29}$$

где $b_{\max}$ – размер меньшей стороны прямоугольника элемента, имеющего наибольшую толщину.

Если в сечении имеются криволинейные элементы, то для них I_{ρ_i} определяется как для прямоугольников той же толщины и длины.

Формулы (4.28), (4.29) являются точными, если сечение состоит из прямоугольных элементов с соотношением сторон $h/b >> 10$. Но ими можно пользоваться для приближенных расчетов и при $h/b >> 4$. При расчетах на кручение прокатных профилей к величине I_ρ , полученной по формуле (4.28), вводится поправочный коэффициент:

– для углового сечения: 1,0;
– для двутаврового сечения: 1,2;
– для таврового сечения: 1,15;
– для корытного (швеллерного) сечения: 1,12.

4.9. Статически неопределимые задачи при кручении

Статически неопределимыми являются такие стержни, в которых внутренние моменты, возникающие в поперечных сечениях, нельзя определить с помощью только уравнений равновесия. Необходимо составить дополнительные уравнения, отражающие перемещения в тех сечениях, где эти перемещения заранее известны. Рассмотрим решение на примере.

Пример. Брус круглого поперечного сечения жестко заделан обоими концами и нагружен моментом *M* (рис. 4.9, *а*). Дано: *a*, *b*, *M*, *G*, I_ρ . Построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания.

Решение.

Для этой системы можно составить единственное уравнение равновесия:

$$\sum M = M_1 - M_2 + M_3 = 0, \tag{4.30}$$

где M_1 и M_2 – реактивные крутящие моменты, возникающие в заделках. Дополнительное уравнение получаем следующим образом. Отбросим условно левое опорное закрепление бруса, но оставим правое (рис. 4.9, *б*). Поворот левого конца этого бруса должен быть равен нулю (по условию задачи). На основании принципа независимости действия сил уравнение перемещений имеет вид

$$\varphi_B = \varphi_1 + \varphi_2 = 0. \tag{4.31}$$

Здесь φ_1 и φ_2 – углы закручивания левого конца бруса от моментов M_1 (рис. 4.9, *е*) и M_2 (рис. 4.9, *г*). По формуле (4.16)

$$\varphi_1 = -\frac{M_1 \ a+b}{GI_\rho}, \qquad \varphi_2 = \frac{M_2 b}{GI_\rho}.$$

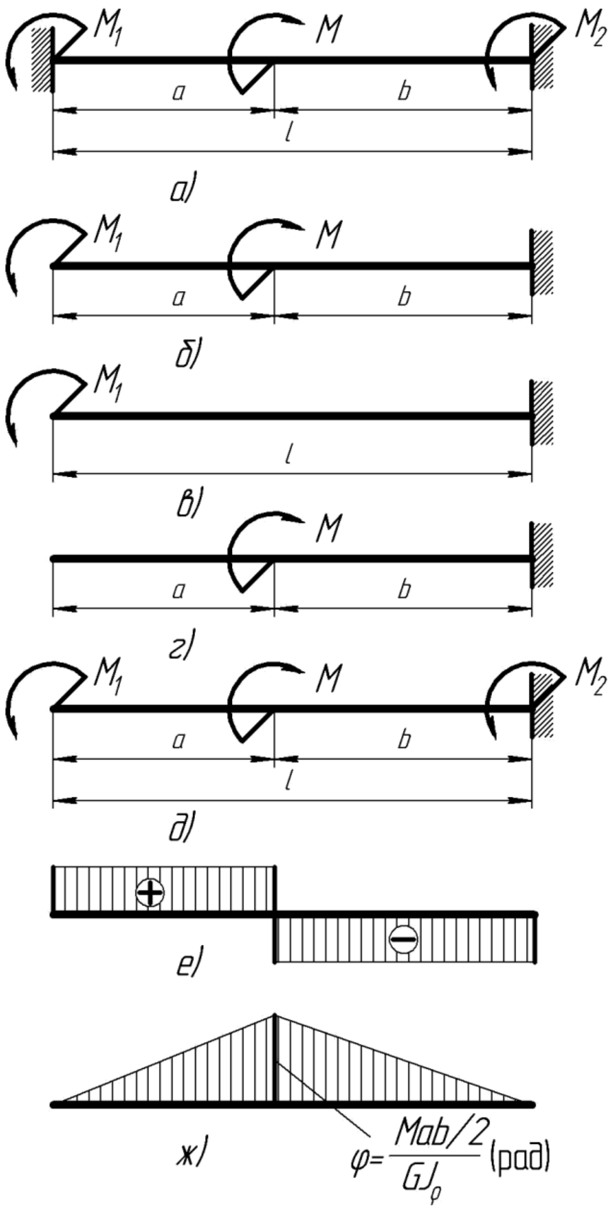


Рис. 4.9

Подставим эти значения в уравнение перемещений (4.31) и получим

$$-\frac{M_1 \; a+b}{GI_\rho}+\frac{M_2 b}{GI_\rho}=0. \qquad (4.23)$$

Решая совместно (4.30) и (4.32), получим:

$$M_1=\frac{Mb}{a+b}, \qquad M_2=\frac{Ma}{a+b}.$$

После этого строим эпюру $M_к$ обычным способом, как для статически определимого бруса (рис. 4.9, *д*, *е*). Эпюры углов закручивания строятся так же, как и в примере п. 4.7. Для данного бруса она показана на рис. 4.9, *ж*.

Глава 5

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

В расчетах на прочность и жесткость геометрические характеристики используются при любом виде нагружения. Так, при растяжении (сжатии) и сдвиге (срезе), определяя напряжение или перемещение, необходимо знать площадь поперечного сечения A. Форма площади сечения при данных видах нагружения значения не имеет, так как напряжения равномерно распределяются по сечению.

При кручении напряжения распределяются по сечению неравномерно, поэтому мы имеем дело с такими геометрическими характеристиками, как полярный момент инерции I_ρ и полярный момент сопротивления W_ρ.

Рассмотрим геометрические характеристики поперечных сечений стержня, от которых зависит прочность и жесткость его при изгибе.

5.1. Статические моменты сечения

Статическим моментом площади сечения относительно оси z, взятой в той же плоскости, называется сумма произведений элементарных площадок dA сечения на их расстояние до оси (рис. 5.1). Эта сумма распространяется на всю площадь сечения A.

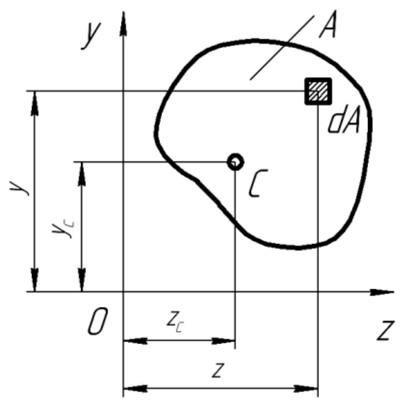


Рис. 5.1

Статические моменты сечения относительно осей z и y равны соответственно

$$S_z = \int\limits_A y dA, \quad S_y = \int\limits_A z dA \tag{5.1}$$

или

$$S_z = y_C A, \quad S_y = z_C A, \tag{5.2}$$

где y_C, z_C – координаты центра тяжести сечения.

Из выражений (5.1) и (5.2) следует, что статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, равен нулю, а статический момент площади сложной формы можно представить алгебраической суммой статических моментов простейших площадей, составляющих это сечение:

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} S_{z_i} = \sum_{i=1}^{n} y_{C_i} A_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{y_i} = \sum_{i=1}^{n} z_{C_i} A_i, \tag{5.3}$$

где y_{C_i}, z_{C_i}, A_i – соответственно координаты центра тяжести и площадь i-й части сечения, n – число частей, составляющих площадь A. С учетом зависимостей (5.2) и (5.3) получим выражения для определения положения центра тяжести сечения относительно координатных осей, если известны статические моменты частей данной площади относительно этих же осей:

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{C_i} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{C_i} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}. \tag{5.4}$$

Пример. Определить координаты центра тяжести сечения, имеющего сложную форму (рис. 5.2, *а*).

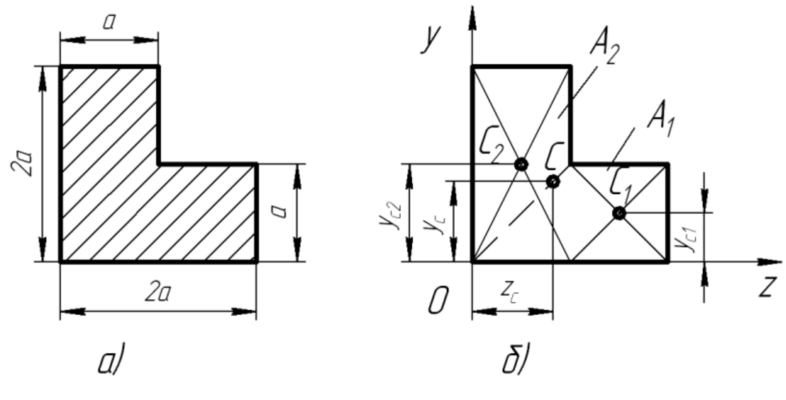


Рис. 5.2

Решение. Задаем положение координатных осей *Oz, Oy*. Разобьем сечение на две части (рис. 5.2, *б*), которые имеют площади

$$A_1 = a^2, \quad A_2 = 2a^2$$

и координаты своих центров тяжести $y_{C_1} = a/2$, $y_{C_2} = a$, тогда, с учетом выражений (5.4) получим

$$y_C = \frac{y_{C_1} A_1 + y_{C_2} A_2}{A_1 + A_2} = 0{,}83a = z_C.$$

5.2. Моменты инерции сечений

Различают осевые, полярные и центробежные моменты инерции сечений.

Осевым моментом инерции площади сечения относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости сечения, называется сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты расстояний от них до этой оси (рис. 5.1), представленная:

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA \tag{5.5}$$

Полярным моментом инерции площади сечения относительно полюса *O* (рис. 5.1), взятого в начале осей координат, называется интеграл следующего вида:

$$I_\rho = \int_\rho \rho^2 d\rho, \tag{5.6}$$

где $\rho^2 = y^2 + z^2$, тогда

$$I_\rho = \int_\rho \left(y^2 + z^2 \right) dA = I_y + I_z. \tag{5.7}$$

Таким образом, полярный момент равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей с началом координат в полюсе *O*.

Центробежным моментом инерции площади сечения называется сумма произведений элементарных площадок на их расстояние до обеих координатных осей, распространенная на всю площадь сечения:

$$I_{zy} = \int_{\rho} zy dA. \qquad (5.8)$$

В отличие от осевого и полярного моментов инерции, которые всегда положительны, центробежный момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

5.3. Моменты инерции сечения при параллельном переносе координатных осей

Значения моментов инерции зависят от положения сечения по отношению к осям координат. Пусть оси y и z являются центральными осями сечения, относительно которых известны моменты инерции. Определим моменты инерции относительно двух других осей y_1 и z_1, параллельно отстоящих от центральных на расстояния a и b соответственно (рис. 5.3).

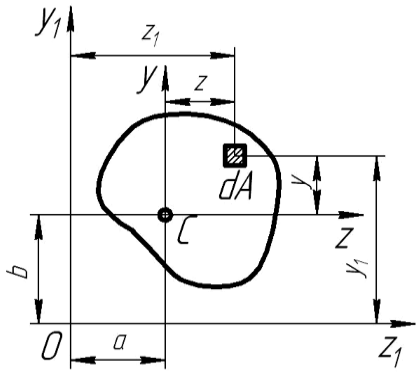


Рис. 5.3

Положение новых осей можно задать в виде

$$y_1 = y + b, \qquad z_1 = z + a,$$

при этом

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+b)^2 dA = I_z + 2bS_z + b^2 A.$$

Так как оси y и z являются центральными, то статические моменты S_y и S_z будут равны нулю. С учетом этого

$$I_{z_1} = I_z + b^2 A, \qquad I_{y_1} = I_y + a^2 A, \qquad I_{z_1 y_1} = I_{zy} + abA. \qquad (5.9)$$

Зависимости (5.9) используют для вычисления моментов инерции сечений сложной формы.

На основании свойств интегралов момент инерции сложного сечения находят как сумму моментов инерции составных частей этого сечения

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} I_{z_i}\ , \qquad (5.10)$$

где i = 1, 2,..., n – номера частей, на которые мысленно разделено сложное сечение.

5.4. Моменты инерции сечения при повороте осей координат

Найдем зависимость между моментами инерции сечения относительно осей z, y и моментами инерции сечения относительно осей $\upsilon,\ u$, повернутых на угол α (рис. 5.4).

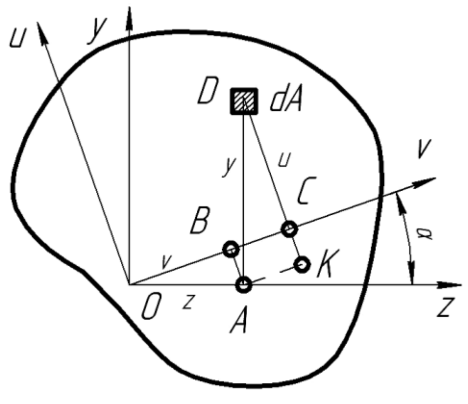


Рис. 5.4

Выразим координаты элементарной площадки dA в новой системе координат через старые координаты и получим

$$\upsilon = OB + BC = z\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad u = DK - AB = y\cos\alpha + z\sin\alpha\,.$$

Тогда

$$I_\upsilon = \int_A u^2 dA = \int_A \left(y\cos\alpha + z\sin\alpha \right)^2 dA,$$

$$I_u = \int_A \upsilon^2 dA = \int_A \left(z\cos\alpha + y\sin\alpha \right)^2 dA,$$

$$I_{u\upsilon} = \int_A \upsilon u\, dA = \int_A \left(z\cos\alpha + y\sin\alpha \right)\left(y\cos\alpha - z\sin\alpha \right) dA.$$

После преобразования получаем

$$I_\upsilon = I_z\cos^2\alpha - I_{zy}\sin 2\alpha + I_y\sin^2\alpha,$$

$$I_u = I_z\sin^2\alpha + I_{zy}\sin 2\alpha + I_y\cos^2\alpha, \qquad (5.11)$$

$$I_{\upsilon u} = I_{zy}\cos 2\alpha + \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha.$$

Из первых двух уравнений (5.11) получаем:

$$I_\upsilon + I_u = I_z + I_y = const.$$

Из полученного соотношения и формул (5.11) видно, что значения осевых моментов инерции зависят от угла а, но сумма их неизменна. Следовательно, можно найти такое значение угла α, при котором один из моментов инерции принимает максимальное значение, а другой – минимальное. Дифференцируя выражение $I_{\upsilon u}$ по α и приравнивая производную нулю, получим

$$tg 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}. \qquad (5.12)$$

Из третьего соотношения в равенствах (5.11) несложно установить, что при $\alpha = \alpha_0$ центробежный момент инерции равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, называют *главными осями*. Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то их называют *главными центральными осями*, а соответствующие им осевые моменты инерции – *главными центральными моментами инерции*, выражения которых можно получить из первых двух соотношений в равенствах (5.11), исключив угол α:

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_z - I_y \right)^2 + 4I_{zy}^2}. \qquad (5.13)$$

Знак «плюс» соответствует максимальному моменту инерции, знак «минус» – минимальному. Если сечение имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось будет являться главной центральной осью, другая главная центральная ось будет перпендикулярна оси симметрии и пройдет через центр тяжести сечения.

5.5. Моменты инерции сечений простой формы

Рассмотрим сечения прямоугольной и круглой формы.

Прямоугольник. Определим момент инерции прямоугольника высотой h и шириной основания b относительно главных центральных осей O_z и O_y (рис. 5.5).

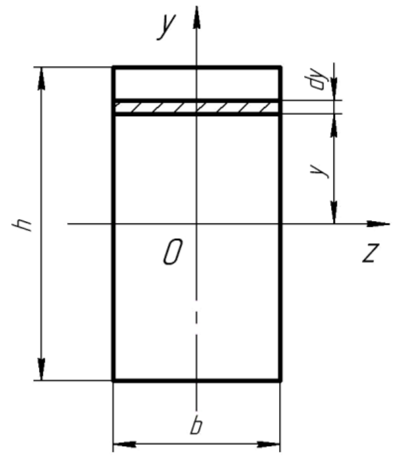


Рис. 5.5

Элементарную площадь dA можно выразить как $dA = b dy$. Тогда

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (5.14)$$

По аналогии найдем

$$I_y = \frac{bh^3}{12}. \quad (5.15)$$

Круг. Для круга ранее был определен полярный момент инерции (см. п. 4.4.4). Учитывая, что $I_\rho = I_z + I_y$, получаем:

$$I_z = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (5.16)$$

Пример. Для сечения (рис. 5.6), состоящего из листа 200×20 (*1*), швеллера № 30 (*2*) и неравнобокого уголка $100\times63\times10$ (*3*), найти:

1) положение центра тяжести;

2) величины осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей *X* и *Y*;

3) направление главных центральных осей;

4) величины главных центральных моментов инерции J_u и J_υ.

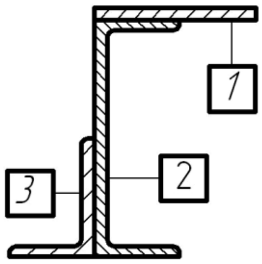


Рис. 5.6

Решение. Условимся в дальнейшем всем характеристикам данного элемента придавать индекс, соответствующий номеру элемента в заданном сечении. Вычертим отдельно каждый из элементов сечения (рис. 5.7–5.9) и выпишем из сортамента или подсчитаем все данные, которые потребуются при дальнейшем расчете.

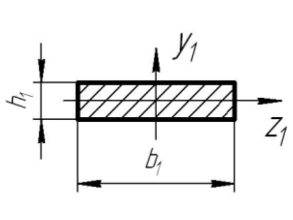


Рис. 5.7

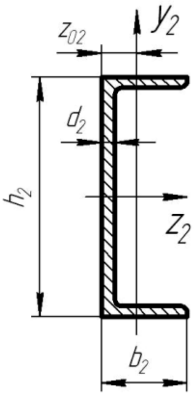


Рис. 5.8

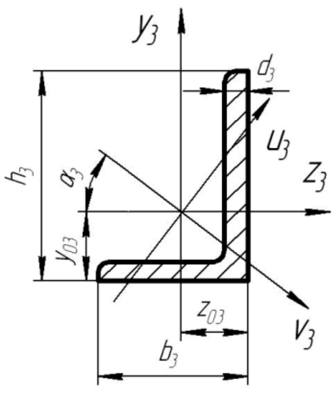


Рис. 5.9

Лист 200×20 (рис. 5.7):

$$h_1=2\text{см},\ b_1=20\text{см},\quad F_1=40\ \text{см}^2,$$

$$I_{z_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{20 \cdot 2^3}{12} = 13{,}2 \text{ см}^4, \quad I_{y_1} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{2 \cdot 20^3}{12} = 1333 \text{ см}^4.$$

Оси Y_1 и Z_1 – главные центральные.

Швеллер № 30 (рис. 5.8):

$$h_2 = 30 \text{см}; \quad b_2 = 10 \text{ см}; \quad d_2 = 0{,}65 \text{ см}; \quad F_2 = 40{,}5 \text{ см};$$

$$Z_{02} = 2{,}53 \text{см}; \quad I_{z_2} = 5810 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = 327 \text{ см}^4; \quad I_{y_2 z_2} = 0.$$

Оси Y_2 и Z_2 – главные центральные.

Неравнобокий уголок $100 \times 63 \times 10$ (рис. 5.9):

$$h_3 = 10 \text{см}; \quad b_3 = 6{,}3 \text{ см}; \quad d_3 = 1{,}0 \text{ см}; \quad F_3 = 15{,}5 \text{ см};$$

$$I_{z_3} = 154 \text{ см}^4; \quad I_{y_3} = 47{,}1 \text{ см}^4;$$

$$Y_{03} = 3{,}4 \text{см}; \quad Z_{03} = 1{,}58 \text{ см};$$

$$I_{U_3} = J_{\min} = 28{,}3 \text{ см}^4;$$

$$\alpha = 21^\circ\, 10'; \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = 0{,}387; \quad \sin 2\alpha_3 = 0{,}673.$$

Из условия $I_{z_3} + I_{y_3} = I_{U_3} + I_{V_3}$ определяем $I_{V_3} = 173 \text{ см}^4$. Оси U_3 и V_3 – главные центральные и, следовательно, $I_{V_3 U_3} = 0$.

Определение центра тяжести сечения. Вычертим заданное сечение (рис. 5.10) в некотором масштабе и определим координаты центров тяжести составляющих его простых фигур относительно вспомогательных осей m и n.

$$m_{c1} = h_2 + h_1/2 = 30 + 1 = 31 \text{ см},$$

$$m_{c2} = h_2/2 = 15 \text{см}, \qquad m_{c3} = y_{03} = 3{,}4 \text{ см},$$

$$n_{c1} = b_3 + b_1/2 = 6{,}3 + 10 = 16{,}3 \text{ см},$$

$$n_{c2} = b_3 + Z_{02} = 8{,}82 \text{см}, \qquad n_{c3} = b_3 - Z_{03} = 4{,}72 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести (C) всего сечения относительно осей m и n определяем по формуле (5.4)

$$m_c = \frac{S_n}{F} = \frac{S_{n_1} + S_{n_2} + S_{n_3}}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{40 \cdot 31 + 40{,}5 \cdot 15 + 15{,}5 \cdot 3{,}2}{40 + 40{,}5 + 15{,}5} = 19{,}8 \text{ см},$$

$$n_c = \frac{S_m}{F} = \frac{S_{m_1} + S_{m_2} + S_{m_3}}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{40 \cdot 16{,}3 + 40{,}5 \cdot 8{,}82 + 15{,}5 \cdot 4{,}72}{40 + 40{,}5 + 15{,}5} = 11{,}3 \text{ см}.$$

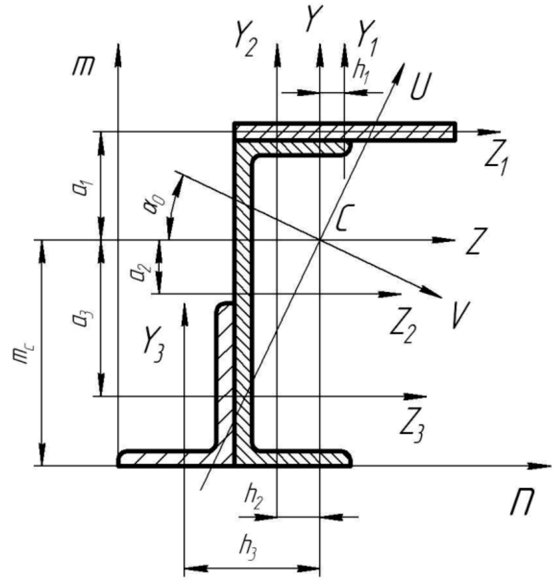


Рис. 5.10

Определение моментов инерции сечения относительно центральных осей. Через центр тяжести сечения проводим центральные оси Y и Z. Для вычисления I_Y, I_Z и I_{YZ} надо знать координаты центров тяжести (a, h) составляющих фигур относительно осей Y и Z.
Из чертежа (рис. 5.10) следует:

$$a_1 = m_{c1} - m_c = 31 - 19{,}8 = 11{,}2 \text{ см};$$

$$a_2 = m_{c2} - m_c = 15 - 19{,}8 = -4{,}8 \text{ см};$$

$$a_3 = m_{c3} - m_c = 3{,}4 - 19{,}8 = -16{,}4 \text{ см};$$

$$h_1 = n_{c1} - n_c = 16{,}3 - 11{,}3 = 5 \text{ см};$$

$$h_2 = n_{c2} - n_c = 8{,}82 - 11{,}3 = -2{,}48 \text{ см};$$

$$h_3 = n_{c3} - n_c = 4{,}72 - 11{,}3 = -6{,}58 \text{ см}.$$

Моменты инерции заданного сечения относительно центральных осей Y и Z определятся по формулам (5.10) и (5.9)

$$I_Z = I_{Z1} + I_{Z2} + I_{Z3} = I_{Z1} + F_1 a_1^2 + I_{Z2} + F_2 a_2^2 + I_{Z3} + F_3 a_3^2 =$$

$$= 13{,}3 + 40 \cdot 11{,}22 + 5810 + 40{,}5 \cdot (-4{,}8)^2 + 154 + 15{,}5 \cdot (-16{,}4)^2 =$$

$$= 16100 \text{ см}^4,$$

$$I_Y = I_{Y1} + I_{Y2} + I_{Y3} = I_{Y1} + F_1 k_1^2 + I_{Y2} + F_2 k_2^2 + I_{Y3} + F_3 k_3^2 =$$

$$= 1333 + 40 \cdot 52 + 327 + 40{,}5 \cdot (-2{,}48)^2 + 47{,}1 + 15{,}5 \cdot (-6{,}58)^2 =$$

$$= 3630 \text{ см}^4.$$

Для определения центробежного момента инерции всего сечения необходимо знать центробежный момент инерции уголка относительно собственных центральных осей Y_3 и Z_3. Центробежный момент инерции уголка относительно осей Y_3 и Z_3 можно определить по формуле перехода к повернутым осям (5.11). В данном случае переходим от главных осей уголка U_3 и V_3 (принимаем их за исходные оси) к осям Y_3 и Z_3 (рис. 5.8). Так как при этом исходные оси U_3 и V_3 для совмещения с осями Y_3 и Z_3 нужно повернуть против часовой стрелки, то угол поворота α_3 следует считать положительным.

$$I_{Y_3 Z_3} = \frac{I_{V3} - I_{U3}}{2} \sin 2\alpha_3 + I_{V_3 U_3} \cos 2\alpha_3 = \frac{173 - 28{,}3}{2} \cdot 0{,}673 = 49 \text{ см}^4.$$

Определим центробежный момент инерции заданного сечения:

$$I_{Y_3 Z_3} = I_{Y_1 Z_1} + I_{Y_2 Z_2} + I_{Y_3 Z_3} =$$

$$= I_{Y_1 Z_1} + F_1 a_1 k_1 + I_{Y_2 Z_2} + F_2 a_2 k_2 + I_{Y_3 Z_3} + F_3 a_3 k_3 =$$

$$= 0 + 40 \cdot 11{,}2 \cdot 5 + 0 + 40{,}5 \cdot (-4{,}8)(-2{,}48) + 49 + 15{,}5 +$$

$$+ 15{,}5 \cdot (-16{,}4)(-6{,}58) = 4343 \text{ см}^4.$$

Определение направлений главных центральных осей сечения. После того, как найдены все моменты инерции сечения относительно исходных осей Y и Z, угол наклона главных центральных осей U и V, определим по формуле (5.12)

$$tg2\alpha_0 = \frac{2I_{YZ}}{I_Z - I_Y} = \frac{2 \cdot 4343}{16100 - 3620} = -0,696,$$

$$\alpha_0 = -17^0 25'.$$

Знак минус при α_0 говорит о том, что главные оси U и V повернуты относительно Y и Z по часовой стрелке.

Главные центральные моменты инерции сечения. Экстремальные значения моментов инерции заданного сечения вычисляем по формуле (5.13)

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_Z + I_Y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4I_{YZ}^2} =$$

$$= \frac{16100 + 3630}{2} \pm \sqrt{(16100 - 3630)^2 + 4 \cdot 4330^2} = 9865 \pm 7600 \text{ см}^4.$$

Учитывая, что найденные оси V, U являются главными, относительно которых осевые моменты инерции экстремальны, можно записать

$$I_V = I_{\max} = 17460 \text{см}^4, \quad I_U = I_{\min} = 2260 \text{ см}^4.$$

Глава 6

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

6.1. Виды напряженных состояний

В гл. 2 было показано, что напряжение на площадке, проходящей через заданную точку нагруженного тела, зависит от ее ориентации. При повороте площадки меняются и напряжения. Проведем анализ изменения напряжения в более сложных случаях нагружения.

Положим: имеется тело, нагруженное произвольной системой сил. При переходе от точки к точке напряжения меняются достаточно медленно и всегда имеется возможность выбрать в окрестности произвольно взятой точки такую малую область, для которой напряженное состояние можно было бы считать однородным. Представим эту область в виде прямоугольного параллелепипеда, все грани которого в пределе стягиваются в данную точку. В выбранной прямоугольной системе координат *X*, *Y*, *Z* полное напряжение *p*, возникающее на каждой его грани, может быть разложено на три взаимно ортогональных составляющих (рис. 6.1): одно нормальное и два касательных в плоскости площадки.

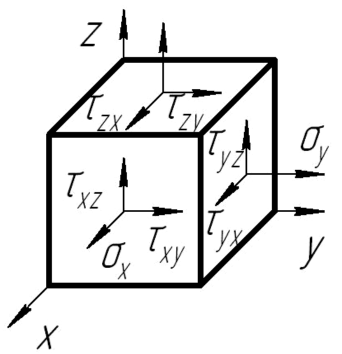


Рис. 6.1

Нормальные напряжения будем обозначать через $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, где индекс обозначает ось координат, нормальную к площадке, а касательные напряжения обозначаются через τ с двумя индексами, первый из которых соответствует оси, перпендикулярной к площадке, а второй – оси, вдоль которой направлен вектор τ. Ориентация самих осей произвольная. На невидимых гранях элемента в силу однородности напряженного состояния возникают соответственно такие же напряжения, но противоположные по направлению. Система сил, приложенных к элементу и выражаемых через напряжения, должна удовлетворять условиям равновесия. При повороте параллелепипеда напряжения на каждой площадке меняются.

Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, называется напряженным состоянием в этой точке.

В силу закона парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}, \quad \tau_{zy} = -\tau_{yz}, \quad \tau_{xz} = -\tau_{zx},$$

напряженное состояние в точке полностью определятся шестью независимыми компонентами:

$$\sigma_x, \ \sigma_y, \ \sigma_z, \ \tau_{xy}, \ \tau_{yz}, \ \tau_{zx}.$$

Поворотом параллелепипеда можно добиться такого его положения, при котором на гранях его будут действовать только нормальные напряжения. Касательные будут равны нулю (рис. 6.2).

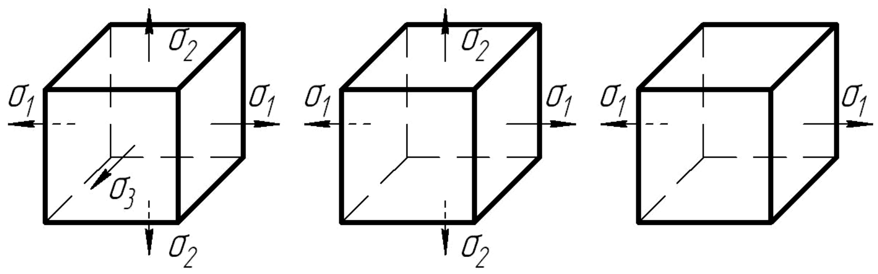


Рис. 6.2

В этом случае грани его называются главными площадками. Нормальные напряжения на этих площадках называются главными нормальными напряжениями и обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а оси, параллельные главным напряжениям, носят название главных осей. Принимается, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

В зависимости от количества главных нормальных напряжений, отличных от нуля, различают три вида напряженных состояний: одноосное, или линейное (рис. 6.2, *в*), когда два из трех главных напряжений равны нулю; двуосное, или плоское (рис. 6.2, *б*), когда одно из трех главных напряжений равно нулю; трехосное, или пространственное (рис.6.2, *а*), когда все три главных напряжения не равны нулю. Одноосное напряженное состояние подробно рассмотрено в гл. 2.

В данном разделе рассматривается задача определения связи между напряжениями, действующими на различных площадках, проходящих через заданную точку.

6.2. Плоское напряженное состояние

Выделим в окрестности рассматриваемой точки нагруженного тела бесконечно малую треугольную призму толщиной dz, боковые грани которой перпендикулярны плоскости чертежа. Считаем, что на гранях призмы, совпадающих с плоскостью чертежа, напряжения отсутствуют (рис. 6.3), а на гранях, перпендикулярных плоскости чертежа, все напряжения равномерно распределены по площадкам.

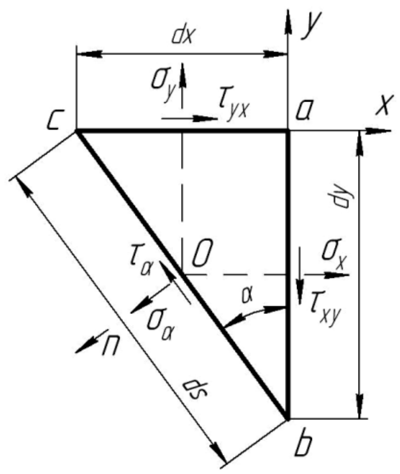


Рис. 6.3

Совместим оси X и Y с гранями ab и ac. Обозначим напряжение на наклонной грани σ_α и τ_α. Считаем угол α положительным, если грань ab для совмещения с гранью ac поворачивается против часовой стрелки. Знаки σ и τ приняты ранее в гл. 2. На чертеже σ, τ и α – положительны. Рассматриваемая призма находится в равновесии под действием сил, действующих на грани. Очевидно, каждая из сил равна произведению напряжения, действующего на грани, на площадь грани.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_0 = -\tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} = 0; \qquad (6.1)$$

$$\sum n = \sigma_\alpha ds dz - \; \sigma_x dy + \tau_{yx} dx \; \cdot dz \cdot \cos\alpha - \\ - \; \sigma_y dx + \tau_{xy} dy \; \cdot dz \cdot \sin\alpha = 0; \tag{6.2}$$

$$\sum \; cb \; = \tau_\alpha ds dz - \; \tau_{yx} dx + \sigma_x dy \; \cdot dz \cdot \sin\alpha + \\ + \; \sigma_y dx - \tau_{xy} dy \; \cdot dz \cdot \cos\alpha = 0. \tag{6.3}$$

Из уравнения (6.1) получим

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}. \tag{6.4}$$

Уравнение (6.4) называется законом парности касательных напряжений. Оно выражает тот факт, что касательные напряжения на двух взаимно-перпендикулярных площадках равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Из уравнений (6.2), (6.3), (6.4) с учетом того, что

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\alpha = \frac{dy}{ds},$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha,$$

получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha, \tag{6.5}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \tag{6.6}$$

Определим нормальные напряжения на площадке, перпендикулярной к *cb* (рис. 6.3), подставив в формулу (6.5) угол $\alpha_1 = \alpha + 90^\circ$:

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x \cos^2 \; \alpha + 90^\circ \; + \sigma_y \sin^2 \; \alpha + 90^\circ \; - \tau_{xy} \sin 2 \; \alpha + 90^\circ \; . \tag{6.7}$$

Сложив левые и правые части уравнений (6.5), (6.7), получим:

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y, \tag{6.8}$$

т.е. сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная. Следовательно, если на одной из таких площадок нормальное напряжение максимально, то на другой – минимально. Касательные напряжения на этих площадках должны быть равны нулю, а сами площадки и нормальные напряжения называются главными. Докажем это.

Положение главных площадок определяется углом α_0, который найдем, приравняв в уравнении (6.6) касательные напряжения на площадке α нулю. Тогда

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha_0 + \tau_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда

$$tg 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \qquad (6.9)$$

Этому тангенсу соответствуют два угла и, следовательно, – две площадки, расположенные под углом 90° друг к другу. Отсюда следует, что главные площадки взаимно перпендикулярны. Возьмем первую производную напряжений σ_α по α из формулы (6.5)

$$\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial_\alpha} = -\sigma_x 2\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_y 2\sin\alpha\cos\alpha - \tau_{xy}2\cos 2\alpha =$$

$$= +\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy}2\cos 2\alpha = 0.$$

Это решение показывает, что главные напряжения экстремальны.

Зная значение угла α_0, найдем главные напряжения. Используем для этого тригонометрические зависимости

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{1}{2}\ 1 + \cos 2\alpha_0\ , \qquad \sin^2\alpha_0 = \frac{1}{2}\ 1 - \cos 2\alpha_0\ ,$$

$$\cos 2\alpha_0 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + tg 2\alpha_0}, \qquad tg 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_x}.$$

В результате получим

$$\sigma_{\min}^{\max} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\ \sigma_x - \sigma_y\ ^2 + 4\tau_{xy}^2}. \qquad (6.10)$$

В полученном уравнении знак «плюс» перед радикалом соответствует напряжению $\sigma_{\max} = \sigma_1$, знак «минус» – напряжению $\sigma_{\min} = \sigma_2$.

Выразим напряжения σ_α и τ_α через главные напряжения. Для этого, учитывая, что на главных площадках касательные напряжения равны нулю, и заменив в уравнениях (6.5) и (6.6) σ_x на σ_1, σ_y на σ_2 (сами площадки ab и ac считаем главными), получим:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha, \qquad (6.11)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin\alpha. \qquad (6.12)$$

Найдем экстремальные касательные напряжения. Положение площадок с $\tau_{\min}^{\max}$ определяется углом α_1, полученным дифференцированием уравнения (6.6) по α:

$$\frac{\partial \tau_\alpha}{\partial \alpha} = \sigma_x - \sigma_y \cdot \cos 2\alpha_1 - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha_1 = 0,$$

отсюда

$$tg 2\alpha_1 = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}. \qquad (6.13)$$

Здесь α_1 – угол наклона площадки с $\sigma_{\max}$ к площадке, по которой действует напряжение σ_x. Этому тангенсу соответствуют две взаимноперпендикулярные площадки, на одной из которых действует $\tau_{\max}$, на другой – $\tau_{\min}$. Причем, согласно (6.4), $\tau_{\max} = -\tau_{\min}$, а площадки с $\tau_{\min}^{\max}$ наклонены к главным под углом 45°, как это вытекает из уравнения (6.12) при $\sin 2\alpha = 1$. Сами экстремальные касательные напряжения равны

$$\tau_{\min}^{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \qquad (6.14)$$

или, с учетом (6.10),

$$\tau_{\min}^{\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x - \sigma_y{}^2 + 4\tau_{xy}^2}. \qquad (6.15)$$

6.3. Графическое определение напряжений с помощью круга Мора

Используя соотношения между $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$, $\cos 2\alpha$, можно уравнение (6.11) представить в другом виде:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos\alpha. \qquad (6.16)$$

Возведем в квадрат правые и левые части уравнений (6.12) и (6.16), сложим их и получим

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2. \qquad (6.17)$$

В системе координат $\sigma - \tau$ получили уравнение окружности радиусом $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ и центром, удаленным от начала координат на $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ (рис. 6.4, *а*). Координаты любой точки *A* этого круга равны нормальным σ_α и касательным τ_α напряжениям на площадке, нормаль к которой составляет угол α с осью *I* (рис. 6.4, *б*). Такой круг называется *кругом Мора*, или *кругом напряжений.*

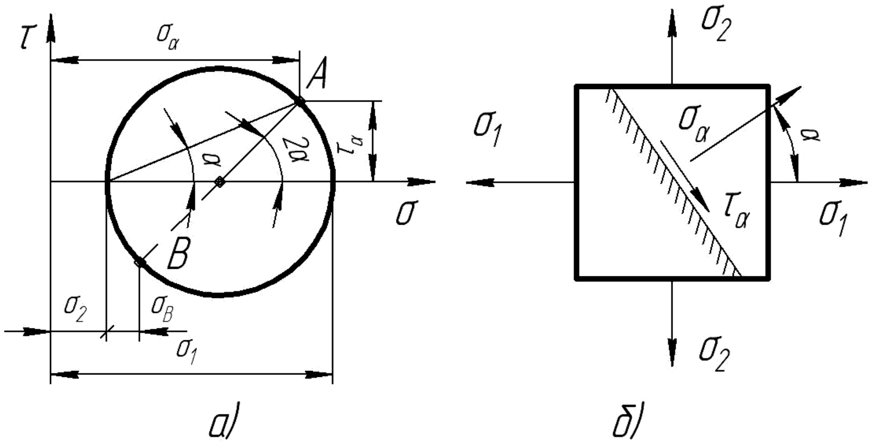


Рис. 6.4

Чтобы графически определить напряжения τ_α и σ_α при заданных α, σ_1 и σ_2, необходимо:

– построить по напряжениям σ_1 и σ_2 круг Мора;

– отложить от центра его под углом 2α против часовой стрелки отрезок;

– определить координаты точки пересечения отрезка с окружностью, которые и есть искомые значения σ_α и τ_α.

Можно решить и обратную задачу нахождения σ_1 и σ_2 по заданным $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta} = -\tau_{\beta\alpha}$. Для этого по координатам $\sigma_\alpha, \tau_{\alpha\beta}$ и $\sigma_\beta, \tau_{\beta\alpha}$ откладываются точки *A* и *B* и проводится отрезок *AB* (рис. 6.5).

Далее проводится окружность радиусом *OA* или *OB* с центом в точке O. Координаты точки пересечения окружности с осью σ равны напряжениям σ_1 и σ_2.

6.4. Чистый сдвиг

Согласно (6.12) $\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2 \;/2$ при $\alpha = 45^\circ$. На этих площадках с максимальными касательными напряжениями нормальные напряжения равны (в формулу 6.12 подставим $\alpha = 45^\circ$)

$$\tau_{\alpha=45^\circ} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Рассмотрим особый случай нагружения, когда $\sigma_1 = -\sigma_2$. Тогда на площадках с наибольшими касательными напряжениями (рис. 6.6)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}, \qquad \sigma_\alpha = 0.$$

Таким образом, в ряде случаев в плоском напряженном состоянии имеются площадки, на которых отсутствуют нормальные напряжения, а касательные максимальны и равны половине наибольших главных напряжений. Эти площадки называются площадками чистого сдвига, а сам вид нагружения – чистым сдвигом. Как видно, площадки чистого сдвига расположены под углами 45° к главным площадкам. Явление чистого сдвига возникает при сдвиге, срезе, кручении, при поперечном изгибе на нейтральной оси.

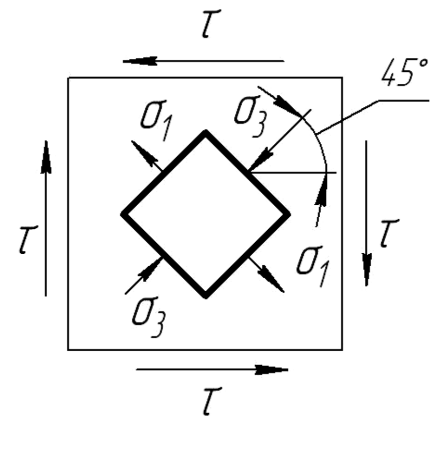


Рис. 6.6

6.5. Объемное напряженное состояние

6.5.1. *Аналитическое определение напряжений*

Рассечем элементарный параллелепипед (рис. 6.7) наклонным сечением. Выразим напряжения σ_α и τ_α на площадке общего положения через главные напряжения. Обозначим: α_1, α_2, α_3 – углы между нормалью к рассматриваемой площадке и нормалями к главным площадкам; A_α, A_1, A_2, A_3 – площади наклонной грани тетраэдра и главных площадок; S_α, S_1, S_2, S_3 – полные силы, действующие на гранях тетраэдра; p_α – полное напряжение на наклонной площадке.

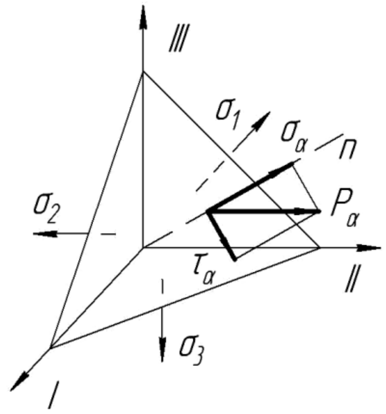


Рис. 6.7

Введенные величины связаны следующими соотношениями:

$$A_1 = A_\alpha \cos\alpha_1, \qquad A_2 = A_\alpha \cos\alpha_2, \qquad A_3 = A_\alpha \cos\alpha_3,$$

$$S_1 = \sigma_1 A_1, \qquad S_2 = \sigma_2 A_2, \qquad S_3 = \sigma_3 A_3,$$

$$S_\alpha = p_\alpha A_\alpha, \qquad S_\alpha^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

С учетом этих соотношений получим

$$P_\alpha^2 = \sigma_1^2 \cos^2\alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2\alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2\alpha_3. \qquad (6.18)$$

Спроецируем все силы на нормаль и приравняем нулю сумму проекций сил N. Окончательно с учетом (6.18) получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha_1 + \sigma_2 \cos^2\alpha_2 + \sigma_3 \cos^2\alpha_3, \qquad (6.19)$$

а из соотношения $p_\alpha^2 = \sigma_\alpha^2 + \tau_\alpha^2$ получим

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2\alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2\alpha_3 - \sigma_\alpha^2}. \qquad (6.20)$$

Если по формуле (6.19) определить нормальные напряжения σ_x, σ_y, σ_z по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам и сложить их значения, то сумма этих напряжений будет равна сумме главных напряжений, т.е.

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \qquad (6.21)$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений по любым взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, есть величина постоянная.

6.5.2. *Графическое определение напряжений*

Выделим в окрестности заданной точки элементарный параллелепипед с гранями, совпадающими с главными площадками. Проведем через него площадку, параллельную, например, σ_1 (рис. 6.8, *а*).

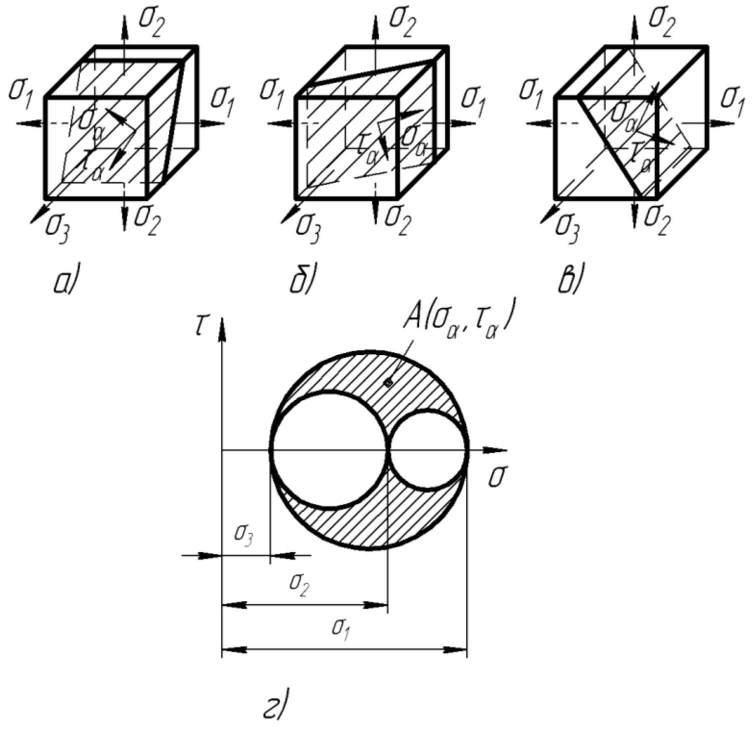


Рис. 6.8

На этой площадке σ_α и τ_α зависят только от напряжений σ_1 и σ_2 и не зависят от σ_1. Поэтому σ_α и τ_α можно определить по теории плоского напряженного состояния и, в частности, с помощью кругов Мора. На рис. 6.8, *г* показан круг Мора, построенный по напряжениям σ_2 и σ_3. Аналогично можно построить круги Мора по напряжениям σ_1 и σ_2, а также σ_α и τ_α на площадках, параллельных соответственно напряжениям σ_2 и σ_3 (рис. 6.8, *б*, *в*).

В курсе теории упругости доказывается, что напряжения σ_α и τ_α на площадках общего положения определяются координатами точек (например, точки *B*, рис. 6.8, *г*), расположенных в заштрихованной области.

6.5.3. *Главные касательные напряжения*

Из кругов Мора (рис. 6.8, *г*) следует, что экстремальные касательные напряжения, действующие на каждой из площадок, параллельных одному из главных напряжений, равны разности между главными напряжениями, по которым построен соответствующий круг. Эти напряжения действуют по площадкам, наклоненным к большему из двух главных напряжений под углом 45°, и равны

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{13} = \tau_{\min}^{\max} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \qquad (6.22)$$

Напряжения, τ_{12}, τ_{23}, τ_{31} называются главными касательными напряжениями.

6.5.4. *Октаэдрические напряжения*

Для проверки прочности материала при объемном напряженном состоянии интерес представляют напряжения, действующие по граням октаэдра. Нормали к главным площадкам равнонаклонены к нормалям граней октаэдра, т.е.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3.$$

Учитывая, что $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$ и $3\cos^2\alpha = 1$ (или $\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$), из формул (6.19) и (6.20) получим

$$\sigma_{окт} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \qquad (6.23)$$

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \qquad (6.24)$$

$$\tau_{окт} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}. \qquad (6.25)$$

6.6. Деформации в общем случае напряженного состояния

6.6.1. *Линейные деформации. Обобщенный закон Гука*

Выделим в окрестности точки элементарный параллелепипед с главными площадками (рис. 6.9). Определим деформацию его граней в направлении напряжения σ_1. Она будет складываться из деформации продольной ε_{11} от σ_1 и поперечных деформаций ε_{12} от σ_2 и ε_{13} от σ_3, т.е. $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}$. Здесь первый индекс обозначает направление деформации, а второй индекс – силу, вызвавшую ее.

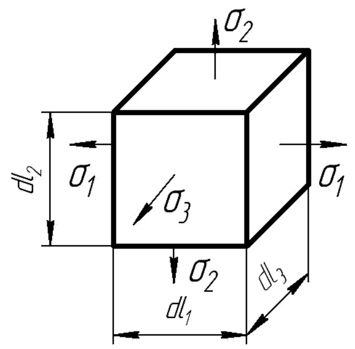


Рис. 6.9

Выразим деформации в левой части уравнения через напряжения по формулам (2.7) и (2.10) и получим

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}, \qquad \varepsilon_{12} = -\mu\frac{\sigma_2}{E}, \qquad \varepsilon_{13} = -\mu\frac{\sigma_3}{E}.$$

Аналогично можно определить и деформации ε_2 и ε_3 в направлении напряжений σ_2 и σ_3. Окончательно получим

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu \;\; \sigma_2 + \sigma_3 \;\;\right],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu \;\; \sigma_1 + \sigma_2 \;\;\right], \qquad (6,26)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu \;\; \sigma_1 + \sigma_2 \;\;\right].$$

Подобным же образом можно получить выражения для деформаций для случая, когда грани параллелепипеда не совпадают с главными площадками. В этом случае касательные напряжения на площадках не вызывают удлинение ребер между гранями. Тогда формулы (6.26) можно переписать в другом виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu \;\; \sigma_y + \sigma_z \;\;\right],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu \;\; \sigma_x + \sigma_z \;\;\right], \qquad (6.27)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu \;\; \sigma_x + \sigma_y \;\;\right].$$

Уравнения (6.26) и (6.27) называются *обобщенным законом Гука*. Принимая два из трех нормальных напряжений равными нулю, получим закон Гука для линейного напряженного состояния, рассмотренный в гл. 2 (соотношение 2.8).

6.7. Объемная деформация

Найдем изменение объема элементарного параллелепипеда с размерами граней dl_1, dl_2, dl_3 (рис. 6.9). Величина его объема до деформации $dV = dl_1 dl_2 dl_3$. После деформации грани параллелепипеда получат приращения $\Delta dl_1 = dl_1\varepsilon_1$, $\Delta dl_2 = dl_2\varepsilon_2$, $\Delta dl_3 = dl_3\varepsilon_3$. Тогда объем параллелепипеда после деформации будет равен

$$dV = \Delta dV = dl_1 \;\; 1+\varepsilon_1 \;\; dl_2 \;\; 1+\varepsilon_2 \;\; dl_3 \;\; 1+\varepsilon_3 \;\; =$$
$$= dl_1 dl_2 dl_3 \;\; 1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \;\; .$$

Пренебрегая слагаемыми второго и третьего порядков малости по сравнению с единицей, получим:

$$dV + \Delta dV = dV \; 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \; ,$$

откуда $\Delta dV = \; \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \;$.

Относительное изменение объема ε_0 равно

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \qquad (6.28)$$

или, с учетом (6.26),

$$\varepsilon_0 = \frac{1 - 2\mu}{E} \; \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \; . \qquad (6.29)$$

Согласно (6.21), эту формулу можно переписать в виде

$$\varepsilon_0 = \frac{1 - 2\mu}{E} \; \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \; . \qquad (6.30)$$

6.7.1. *Деформация сдвига*

Рассмотрим угловую деформацию элементарного параллелепипеда, показанного на рис. 6.10. В любой из координатных плоскостей угловая деформация определяется только одним из напряжений. Например, в плоскости *zx* угловая деформация γ_{zx} вызывается только напряжениями τ_{zx} или τ_{xz}. От остальных напряжений деформации взаимно компенсируются.

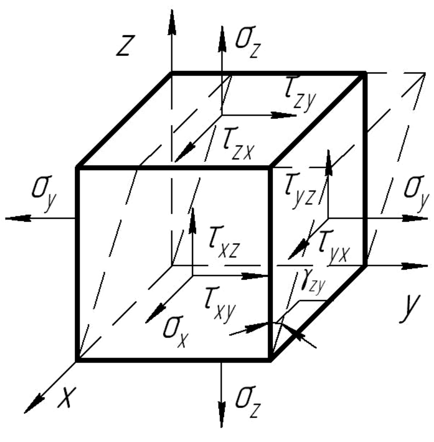


Рис. 6.10

Как следствие, угловые деформации в каждой из трех координатных плоскостей можно выразить через касательные напряжения, действующие в этой плоскости, по закону Гука для сдвига (3.4):

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \qquad (6.31)$$

6.7.2. *Потенциальная энергия деформации*

Выделим в окрестности исследуемой точки элементарный параллелепипед с размерами граней *dx*, *dy*, *dz* (рис. 6.11), на которых действуют напряжения σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}. Найдем работу всех сил, приложенных к граням параллелепипеда.

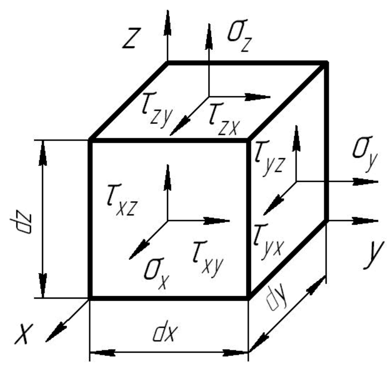


Рис. 6.11

Нормальная сила $\sigma_x d_y d_z$ совершает работу вдоль оси *x* на перемещении $\Delta dx = \varepsilon_x d_x$, вызванном всеми силами, и определяется из уравнения

$$A_{\sigma x} = \frac{1}{2}\sigma_x d_y d_z \varepsilon_x dx.$$

Аналогичные выражения дают и силы, определяемые напряжениями σ_y и σ_z. Касательная сила $\tau_{yz} dydz$, действующая в плоскости *yz*, совершает работу на перемещении $\gamma_{yz} d_z$, определяемую уравнением

$$dA_{\gamma_{yx}} = \frac{1}{2}\tau_{yz} dydz \gamma_{yz} d_z.$$

Таким же образом выражаются работы и других касательных сил, определяемых напряжениями τ_{xy} и τ_{zx}.

Суммируя работы от всех сил и приравнивая общую работу потенциальной энергии деформации элементарного объема dU, получим:

$$dU = \frac{1}{2} dxdydz \ \ \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy} \ \ .$$

Поделив dU на первоначальный объем параллелепипеда $V = dxdydz$, получим величину потенциальной энергии, приходящейся на единицу объема – удельную потенциальную энергию U_0.
Выразим в соответствии с законом Гука ε и σ через напряжения

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu \ \ \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y \ \ \right] + \\ + \frac{1}{2G}(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2). \qquad (6.32)$$

Выразим U_0 в главных напряжениях:

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \ \ \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 \ \ \right]. \qquad (6.33)$$

Полная потенциальная энергия всего объема тела будет равна сумме энергий элементарных объемов, т.е.

$$U_0 = \int_V U_0 dV. \qquad (6.34)$$

Разделим общую потенциальную энергию U_0 на две составляющих: потенциальную энергию изменения объема $U_{0_{об}}$ и потенциальную энергию изменения формы $U_{0_{ф}}$, тогда

$$U_0 = U_{0_{об}} + U_{O_{ф}}. \qquad (6.35)$$

Это деление необходимо при изучении вопросов, связанных с пластическими деформациями и предельным напряженным состоянием.

Представим каждое из главных напряжений в виде суммы двух величин

$$\sigma_1 = \sigma_{ср} + \sigma'_1, \quad \sigma_2 = \sigma_{ср} + \sigma'_2, \quad \sigma_3 = \sigma_{ср} + \sigma'_3, \qquad (6.36)$$

в результате чего напряженное состояние можно представить в виде двух составляющих его состояний (рис. 6.12).

Первое из них представляет собой всестороннее растяжение, а второе – является дополнением к нему, причем

$$\sigma'_1+\sigma'_2+\sigma'_3=0, \qquad \sigma_{ср}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}. \qquad (6.37)$$

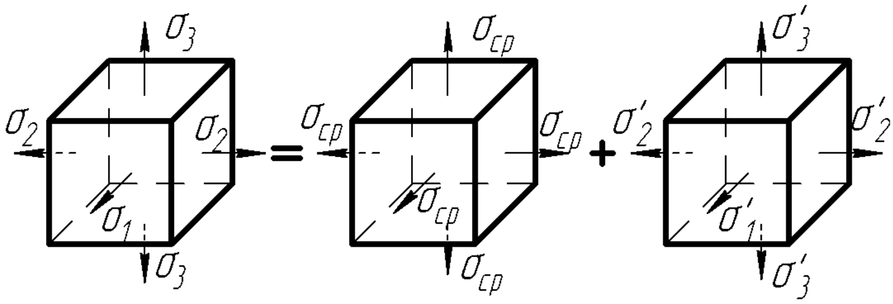


Рис. 6.12

При указанном условии система сил первого состояния ($\sigma_{ср}$) не производит работы на перемещениях, вызванных силами второго состояния. И наоборот – система сил второго состояния не производит работы на перемещениях, вызванных силами первого состояния. Причем силы первого состояния производят только изменения объема тела (в силу их равного значения на всех площадках), а силы второго состояния производят только изменение формы. Подставляя (6.37) в выражение (6.33), получим:

$$U_{0_{об}}=\frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)^2. \qquad (6.38)$$

Тогда $U_{0_ф}=U_0-U_{0_{об}}$. После преобразований получим

$$U_{0_ф}=\frac{1+\mu}{6E}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]. \qquad (6.39)$$

В частном случае всестороннего сжатия или растяжения, т.е. при $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma,$ получим

$$U_{0об}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1-2\mu}{E}\sigma^2, \qquad U_{0_ф}=0.$$

При чистом сдвиге, т.е. при $\sigma_1=\sigma,\ \sigma_2=0,\ \sigma_3=-\sigma,$

$$U_{0_{об}}=0, \qquad U_{0_ф}=\frac{1+\mu}{E}\sigma^2.$$

6.8. Теории прочности

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности при известном напряженном состоянии. Наиболее просто задача решается при одноосном напряженном состоянии. Так, испытания образцов из данного материала на простое растяжение и сжатие позволяют легко определить опасные напряжения: предел текучести $\sigma_{\text{Т}}$ и временное сопротивление σ_b, а по ним – допускаемые $\sigma_{\text{Т}} = \dfrac{\sigma_{\text{Т}}}{n_{\text{Т}}}$ или $\sigma_b = \dfrac{\sigma_b}{n_b}$.

В этом случае условия прочности имеют вид

$$\sigma_p^{\max} \le \left[\sigma_p\right], \quad \sigma_c^{\min} \le \sigma_c \ ,$$

где σ_p и σ_c – напряжения растяжения или сжатия.

В случае сложного напряженного состояния наступление опасного состояния материала может быть вызвано различными предельными значениями главных напряжений. В зависимости от соотношения между ними будут появляться опасные состояния материала, для определения которых в лабораторных условиях необходимо подвергать образцы материала действию главных напряжений при различных их комбинациях. Осуществить практически такие опыты нельзя из-за трудности и большого объема испытаний.

Поэтому необходимо найти пути оценки прочности при сложном напряженном состоянии, пользуясь предельными экспериментально полученными характеристиками материала для линейного напряженного состояния. Поставленная задача может быть решена на основании предположений (гипотез), которые называются *теориями прочности*. Рассмотрим основные из них.

Теория наибольших нормальных напряжений. Опасное состояние наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает опасного значения. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{экв}^{I} = \sigma_1 \le \sigma \ , \tag{6.40}$$

где $\sigma = \sigma_{пред} / n$ определяется испытанием материалов при одноосном напряженном состоянии.

Опытная проверка этой теории показывает, что она неприемлема для большинства материалов, так как не учитывает σ_2 и σ_3. Но она дает удовлетворительные результаты для хрупких материалов, когда одно из напряжений по модулю намного больше двух других.

Теория наибольших линейных деформаций. Опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшая деформация достигает предельного значения. В соответствии с этой теорией условие прочности имеет вид

$$\varepsilon_{экв} = \varepsilon_1 \le \;\varepsilon\; ,$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\;\;\sigma_2 + \sigma_3\;\;\right], \qquad \varepsilon\;\; = \frac{1}{E}\;\sigma\;\; ,$$

тогда

$$\sigma_{экв}^{II} = \sigma_1 - \mu\;\;\sigma_2 + \sigma_3\;\; \le \;\sigma\;\; .$$

Опытная проверка показала, что эта теория неприменима для большинства пластичных материалов и дает удовлетворительные результаты лишь для хрупких материалов.

Теория наибольших касательных напряжений. Опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигает своего предельного значения. Условие прочности имеет вид

$$\tau_{экв} = \tau_{\max} \le \;\tau\; ,$$

$$\tau_{\max} = \;\sigma_1 - \sigma_3\;\; /2, \qquad \tau\;\; = \;\sigma\; /2.$$

Тогда

$$\sigma_{экв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_2 \le \;\sigma\;\; . \tag{6.41}$$

Эта теория прочности хорошо подтверждается опытами для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Но она непригодна для хрупких материалов. Недостаток ее в том, что она не учитывает напряжения σ_2, что приводит к ошибкам в оценке прочности, максимальная величина которых составляет $12 \div 15$ %.

Энергетическая теория прочности. Опасное состояние наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия изменения формы достигает своего предельного значения. Условие прочности следующее:

$$U_{экв}^{IV} = U_{0_ф} \le \left[U_{0_ф}\right].$$

Выразим условие прочности через напряжения, используя формулу (6.38). Для линейного напряженного состояния оно будет

$$\left[U_{0_{\phi}}\right]=\frac{1+\mu}{3E}\ \sigma\ .$$

Тогда в окончательном виде

$$\sigma_{экв}^{IV}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\ \sigma_1-\sigma_2\ ^2+\ \sigma_2-\sigma_3\ ^2+\ \sigma_3-\sigma_1\ ^2}\leq\ \sigma\ . \qquad (6.42)$$

Эта теория имеет широкое распространение, так как достаточно хорошо подтверждается экспериментальными данными.

Теория предельных напряженных состояний или теория прочности Мора. Так как напряжение σ_2 изменяет прочность весьма незначительно, то с известным приближением можно считать, что прочность материала определяется лишь наибольшим и наименьшим главными напряжениями. Поэтому проверка прочности в общем случае объемного напряженного состояния может быть сведена к проверке прочности при двухосном напряженном состоянии.

Для этого удобно воспользоваться кругами Мора. Если для какого-либо материала известны данные о его опасных состояниях при нескольких различных соотношениях между напряжениями σ_1 и σ_3, то, изображая каждое опасное напряженное состояние при помощи круга Мора, получаем семейство таких кругов (рис. 6.13). Проведем по ним огибающие. Если круги Мора, построенные по расчетным напряжениям, будут располагаться внутри огибающих, то можно считать, что предельное состояние не достигнуто. Если будут касаться огибающих или выходить за них, то предельное состояние в материале достигнуто или превысило предельные комбинации главных напряжений.

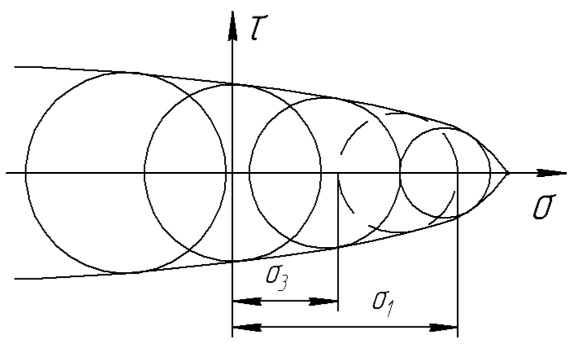


Рис. 6.13

Для материалов, сопротивление сжатию которых больше, чем растяжению, огибающие сходятся в области растягивающих напряжений. В некоторой точке A огибающие пересекают ось абсцисс. Эта точка соответствует случаю всестороннего равномерного растяжения. Опыты показывают, что при всестороннем сжатии материал не разрушается. Поэтому огибающая остается незамкнутой.

Точное построение огибающих затруднено, поэтому для вывода теории прочности строят огибающую по допускаемым напряжениям. Причем криволинейные огибающие заменяют двумя прямыми, касательными к кругам Мора, построенными по значениям $\left[\sigma_p\right]$ и σ_c , как это показано на рис. 6.14.

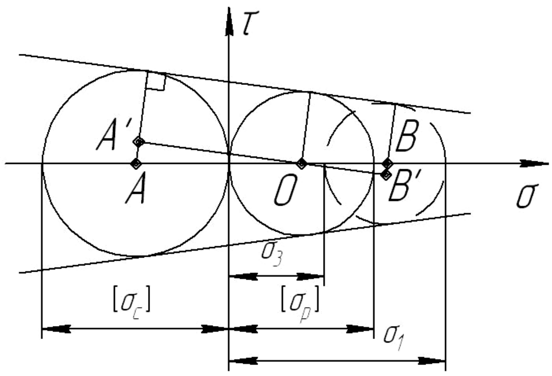


Рис. 6.14

Из подобия треугольников OAA' и OBB' получаем

$$\frac{AA'}{OA}=\frac{BB'}{OB},\quad BB'=\frac{\left[\sigma_p\right]}{2}-\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2},\quad AA'=\frac{\sigma_c}{2}-\frac{\left[\sigma_p\right]}{2}.$$

Здесь

$$OB=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}-\frac{\left[\sigma_p\right]}{2},\quad OA=\frac{\sigma_c+\left[\sigma_p\right]}{2},$$

где σ_1 и σ_3 – расчетные главные напряжения.

После подстановки получим

$$\sigma_1-\sigma_3\frac{\left[\sigma_p\right]}{\sigma_c}=\left[\sigma_p\right].$$

Условие прочности будет иметь вид

$$\sigma_{экв}=\sigma_1-k\sigma_3\le\left[\sigma_p\right], \tag{6.43}$$

где

$$k = \left[\sigma_p\right] \big/ \sigma_c \; .$$

Так как для пластичных материалов $\sigma_{\text{Т}_P} = \sigma_{\text{Т}_C}$, $\left[\sigma_{\text{Т}_P}\right] = \left[\sigma_{\text{Т}_C}\right]$, k = 1, то теория прочности Мора совпадает с третьей теорией прочности (здесь $\sigma_{\text{Т}_P}$, $\sigma_{\text{Т}_C}$ – пределы текучести на растяжение и сжатие). Поэтому теорию прочности Мора можно рассматривать как обобщенную третью теорию прочности применительно к хрупким материалам. Эта теория широко используется при расчетах конструкций из хрупких материалов. Недостаток этой теории – пренебрежение существованием напряжения σ_2.

Глава 7

ИЗГИБ

Изгиб – это такой вид деформации стержня, при котором меняется кривизна его продольной оси. Внутренние усилия в поперечных сечениях стержня сводятся к изгибающим моментам и поперечным силам.

Стержень, работающий на изгиб, называются *балкой*.

Если в поперечных сечениях возникают только изгибающие моменты, то изгиб называется *чистым*. Если кроме моментов возникают и поперечные силы, то изгиб называется *поперечным*. *Прямым* изгибом называют случай, когда изгибающий момент действует в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции сечения.

7.1. Опоры и опорные реакции

Шарнирно-подвижная опора (см. рис. 7.1, *а*) допускает поворот опорного сечения балки и его перемещение параллельно опорной плоскости. В опоре возникает одна опорная реакция *R*.

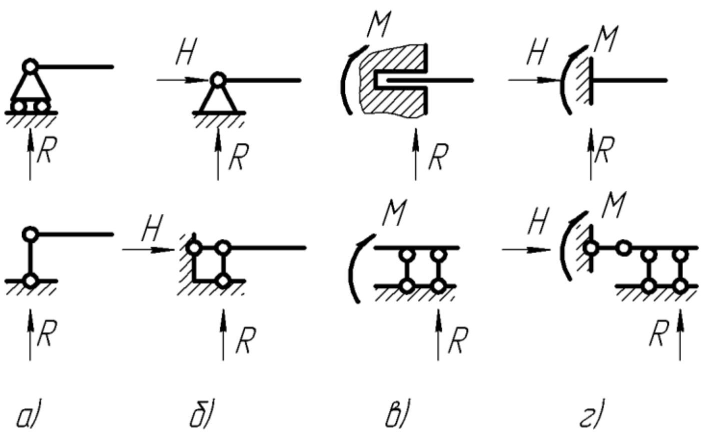


Рис. 7.1

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 7.1, *б*) допускает только поворот опорного сечения балки. В опоре возникают две опорные реакции *R* и *H*.

Защемленная подвижная опора (рис. 7.1, *е*) допускает только перемещение опорного сечения вдоль оси. В опоре возникают две реакции *R* и реактивный момент *M*.

Защемленная неподвижная опора (рис. 7.1, *г*) исключает угловые и линейные перемещения опорного сечения. В ней возникают две реакции (*R* и *H*) и реактивный момент *M*.

7.2. Внутренние силовые факторы

Для определения положения наиболее нагруженного поперечного сечения стержня при изгибе, как и при других видах нагружения, необходимо иметь эпюры внутренних силовых факторов. Рассмотрим балку на двух опорах (рис. 7.2), нагруженную сосредоточенной внешней силой (активной) *F*. Собственный вес балки учитывать не будем.

Согласно порядку построения эпюры (см. п. 2.1), прежде всего, необходимо определить все внешние нагрузки, действующие на стержень. В сечении *A* расположена шарнирно-неподвижная опора, создающая в общем случае нагружения две реактивные составляющие (R_A и H_A), а в сечении *B* имеем шарнирно-подвижную опору, которая создает одну реактивную составляющую R_B. Отмеченные опорные реакции определим из уравнений равновесия балки:

$$\sum X = H_A = 0,$$

$$\sum Y = R_A - F + R_B = 0,$$

$$\sum M_A = -F_a + R_B \ \ a+b \ \ = 0.$$

Решая данные уравнения совместно, получаем:

$$R_B = \frac{Fa}{a+b}, \quad R_A = \frac{Fb}{a+b}.$$

Для проверки правильности определения реакций необходимо записать еще одно уравнение равновесия, например

$$\sum M_B = -R_A \ \ a+b \ \ + Fb = 0,$$

и, подставив в него найденные значения реакций, убедиться в его выполнении.

Следующим этапом построения эпюры является выделение силовых участков (см. п. 2.1). Для исследуемого стержня имеем два силовых участка *AC*, *CB*. Далее, используя метод сечений (см. п. 1.2), на каждом участке записываем аналитические выражения для внутренних силовых факторов.

На участке $AC \quad 0 \le x_1 \le a$ рассмотрим равновесие мысленно отсеченной части стержня длиной x_1. Эта часть стержня нагружена внешней сосредоточенной силой R_A, которую уравновешивает внутренняя поперечная сила Q_1. Если на рассматриваемую часть стержня действует несколько внешних сил, то внутренняя сила Q_1 будет равна сумме их проекций на ось *y*.

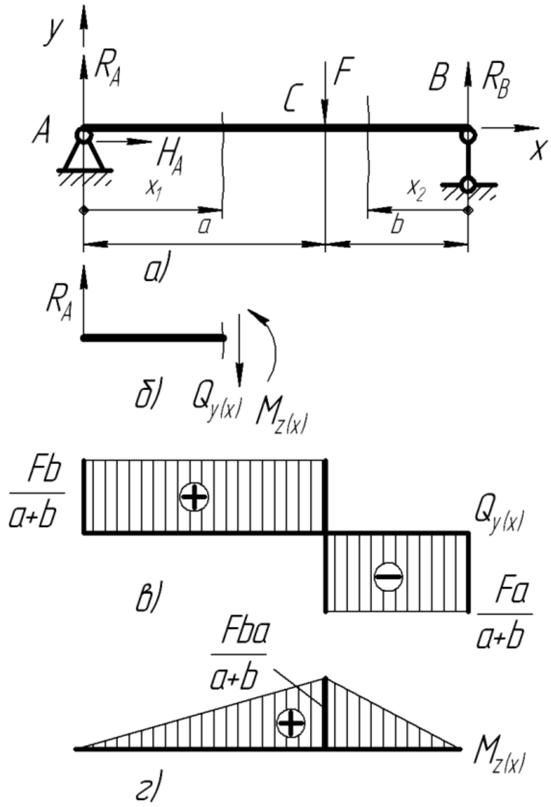


Рис. 7.2

Следовательно,

$$Q_1 = R_A = \frac{Fb}{a+b}. \tag{7.1}$$

Примем следующее *правило знаков для внутренней поперечной силы: если внешняя сила направлена таким образом, что стремится повернуть рассматриваемую часть стержня относительно сечения по часовой стрелке, то она создает положительную внутреннюю силу Q* (рис. 7.3).

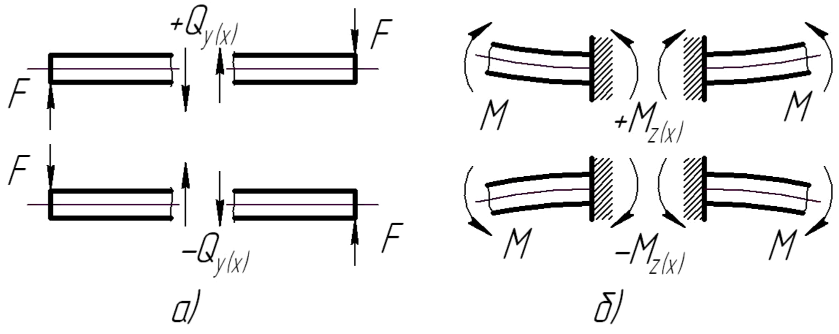


Рис. 7.3

Согласно правилу знаков, внешняя сила R_A в сечении x_1 создает положительную внутреннюю силу (рис. 7.2, *б*). Однако рассматриваемая часть стержня длиной x_1 под действием R_A и Q_1 в равновесии не находится, так как эти силы создают момент, равный $M_z = R_A x_1$. Следовательно, в сечении x_1 должен возникать внутренний момент M_z, уравновешивающий момент от силы R_A.

Примем следующее *правило знаков для внутреннего момента: если внешняя нагрузка стремится изогнуть отсеченную часть стержня, мысленно закрепленную в рассматриваемом сечении, таким образом, чтобы верхние волокна сжимались, то она создает положительный момент* M_z (рис. 7.3).

Если на отсеченную часть действует несколько внешних нагрузок, то изгибающий момент M_z в рассматриваемом сечении стержня равен сумме моментов, создаваемых внешними нагрузками, взятых относительно центра тяжести сечения. Таким образом, момент в сечении x_1 будет равен

$$M_z(x_1) = R_A x_1 = \frac{Fb}{a+b} x_1. \tag{7.2}$$

В соответствии с данным правилом внешняя сила R_A в сечении x_1 создает положительный внутренний момент (рис. 7.3, *б*), который, согласно выражению (7.2), линейно зависит от x_1. Поэтому, чтобы построить эпюру моментов на участке *AC*, необходимо знать значение момента в начале участка и в конце.

$$M_z(0) = 0, \qquad M_z(a) = \frac{Fb}{a+b}.$$

Для участка *CB* удобнее начало координат перенести в сечение *B* и рассмотреть равновесие мысленно отсеченной части стержня длиной x_2 (рис. 7.2, *а*). Тогда для *BC* $(0 \le x_2 \le b)$

$$Q_2 = -R_B = -\frac{Fa}{a+b}, \tag{7.3}$$

$$M_{z_2} = R_B x_2 = \frac{Fa}{a+b} x_2. \tag{7.4}$$

Согласно выражениям (7.3) и (7.4), внутренняя поперечная сила на участке *BC* постоянная и отрицательная, а момент – положительный и изменяется по линейному закону. В начале участка $M_{z_2}(0) = 0$, в конце – $M_{z_2}(b) = Fab/(a+b)$.

По полученным выражениям для внутренних силовых факторов строим эпюры *Q* и M_z (рис. 7.2). На эпюре *Q* в сечении, в котором приложена сосредоточенная внешняя сила, будет скачок на величину этой силы, а на эпюре M_z – излом. Скачок на эпюре M_z будет иметь место в том сечении, в котором приложен сосредоточенный внешний момент, причем величина скачка равна соответствующему моменту.

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой *q* (рис. 7.4). Опорные реакции для данного примера могут быть определены без записи условий равновесия. Так как система симметрична, каждая опора берет на себя половину активной нагрузки $R_A = R_B = ql/2$.

Балка имеет один силовой участок *AB* $(0 \le x \le l)$. Начало координат расположим в опоре *A*.

Мысленно рассечем стержень на расстоянии *x* от опоры *A* и рассмотрим равновесие левой части стержня. Получим

$$Q = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx, \tag{7.5}$$

$$M_z = R_A x - qx\frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}. \tag{7.6}$$

Уравнение для поперечной силы (7.5) является уравнением прямой линии, для построения которой достаточно иметь два значения

$$Q(0) = \frac{ql}{2}, \qquad Q(l) = -\frac{ql}{2}.$$

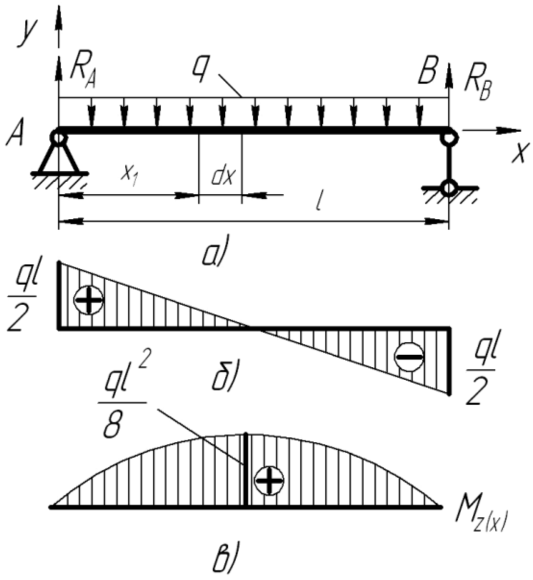


Рис. 7.4

Эпюра поперечных сил представлена на рис. 7.4, *б*.

Уравнение для изгибающего момента (7.6) соответствует параболе. Для ее построения необходимо знать положение экстремума и его значение. Положение экстремума функции M_z найдем, приравняв ее первую производную нулю:

$$\frac{dM_z}{dx}=\frac{ql}{2}-qx=0. \qquad (7.7)$$

Из соотношения (7.7) можно найти положение экстремума изгибающего момента $x_0=l/2$, а также его величину: $M_z(x_0)=ql^2/8$.

Кроме того, найдем значение момента в начале и в конце участка

$$M_z(0)=0, \quad M_z(l)=0.$$

Эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 7.4, *в*.

Анализируя эпюры Q и M_z, делаем вывод, что при действии распределенной нагрузки поперечная сила на участке изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по параболическому, причем выпуклость параболы направлена навстречу распределенной нагрузке. Кроме того, в том сечении, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент принимает экстремальное значение.

Рассмотрим отмеченные связи между поперечной силой и изгибающим моментом более подробно. Мысленно вырежем из стержня элемент длиной dx (рис. 7.5). Тогда в левом сечении будут действовать силовые факторы Q и M_z, а в правом – $Q + dQ$ и $M_z + dM_z$.

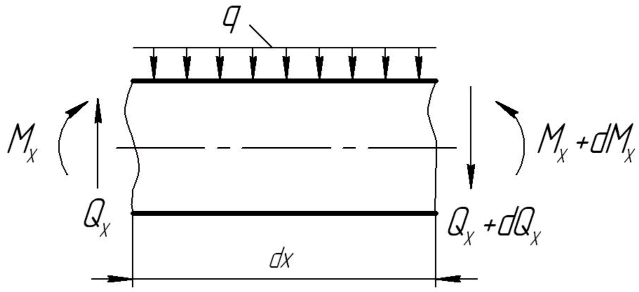


Рис. 7.5

Запишем уравнения равновесия выделенного элемента:

$$\sum m = -M_z + \; M_z + dM_z \; - \; Q + dQ \; dx - qdx\frac{dx}{2} = 0,$$

$$\sum Y = Q - qdx - \; Q + dQ \; = 0.$$

Пренебрегая произведениями $dQ\ dx$ и qdx $(dx/2)$ как величинами второго порядка малости по сравнению с остальными слагаемыми, получаем следующие *дифференциальные зависимости*:

$$q = -\frac{dQ}{dx}, Q = \frac{dM_z}{dx}, q = \frac{d^2M_z}{dx^2}. \qquad (7.8)$$

Соотношения (7.8) позволяют сделать ряд важных выводов.

1. Тангенс угла наклона касательной к эпюре изгибающих моментов в каком-либо сечении балки равен поперечной силе в этом сечении.

2. На участках балки, на которых поперечная сила положительна (слева направо), изгибающий момент возрастает, а на участках, где она отрицательна, момент убывает.

3. На участках балки, где q = 0, поперечная сила постоянна, а M_z изменяется по линейному закону.

4. На участках, где действует распределенная нагрузка q = const, эпюра Q ограничена прямой линией, а эпюра M_z – квадратичной параболой.

5. Изгибающий момент достигает максимума или минимума в сечениях балки, в которых поперечная сила равна нулю.

6. В сечениях, где приложена внешняя сосредоточенная сила, поперечная сила меняется скачком на величину приложенной силы, а на эпюре M_z наблюдается излом.

7. В сечении балки, где приложен внешний сосредоточенный момент, внутренний изгибающий момент изменяется скачком на величину внешнего момента.

Использование указанных закономерностей значительно упрощает построение эпюр Q и M_z, а также дает возможность контролировать правильность их построения.

7.3. Нормальные напряжения в поперечном сечении балки

При плоском поперечном изгибе в поперечном сечении возникают два силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила.

Естественно предположить, что сосредоточенная поперечная сила, лежащая в сечении, представлена в распределенном виде касательными напряжениями, а сосредоточенный изгибающий момент – нормальными напряжениями.

Определим закон изменения нормальных напряжений в поперечном сечении, рассмотрев случай чистого изгиба (в поперечном сечении возникает только изгибающий момент).

Так как в любом сечении стержня действует одинаковый изгибающий момент, то изменение кривизны однородного стержня по всей длине будет одним и тем же. Это легко обнаруживается экспериментально, если на боковую поверхность стержня нанести сетку из продольных и поперечных прямых линий (рис. 7.6).

После нагружения продольные линии и ось стержня принимают форму дуг окружностей с радиусом ρ, а поперечные линии останутся прямыми. Следовательно, как и при растяжении, плоские поперечные сечения стержня до деформации останутся плоскими и после деформации.

Чистый изгиб стержня характеризуется также и тем, что его волокна на выпуклой стороне растягиваются, а на вогнутой стороне – сжимаются. Очевидно, что существует слой, в котором изменение длины отсутствует. Этот слой называют нейтральным слоем (рис. 7.6).

Линию пересечения этого слоя с плоскостью поперечного сечения называют *нейтральной линией* (осью).

Если предположить, что слои, параллельные нейтральному слою, не давят друг на друга, то каждый слой будет находиться в условиях растяжения (или сжатия). Тогда для определения напряжений в поперечном сечении можно использовать закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon. \qquad (7.9)$$

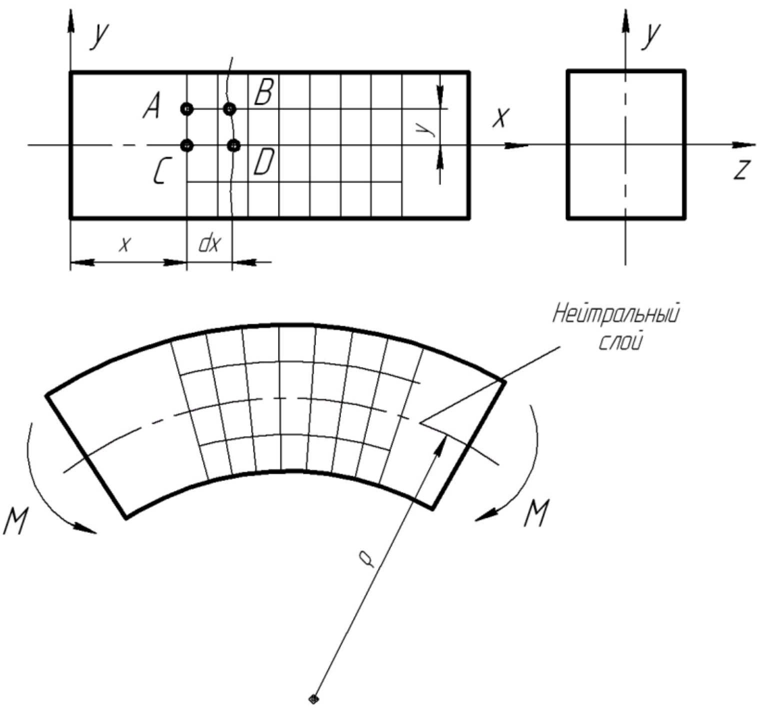


Рис. 7.6

Однако деформация волокон по высоте сечения будет различной: чем волокно дальше отстоит от нейтрального слоя, тем будет больше его деформация (рис. 7.6). Следовательно, напряжения по сечению распределяются неравномерно. Рассмотрим это подробнее.

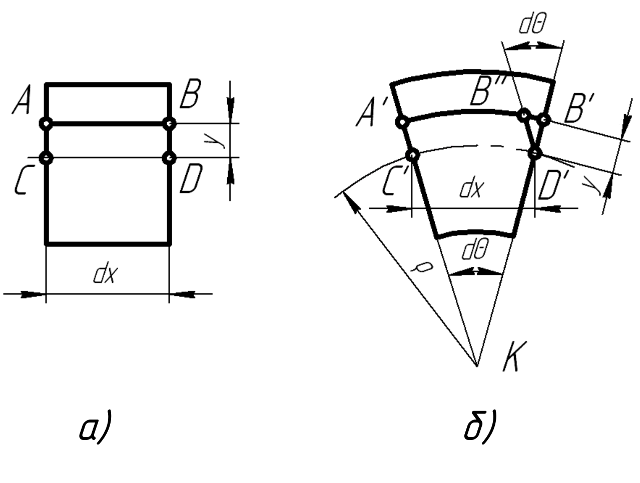


Рис. 7.7

Выделим в стержне элемент длиной dx (рис. 7.7, a) и исследуем его деформированное состояние после приложения момента. Поперечные сечения стержня, отстоящие на расстоянии dx, после нагружения повернутся друг относительно друга на угол $d\theta$ (рис. 7.7, б). При этом относительное удлинение (деформация) волокна *AB*, расположенного на расстоянии *y* от нейтрального слоя, можно определить как

$$\varepsilon_{AB} = \frac{B'B''}{AB}. \tag{7.10}$$

Учитывая, что нейтральный слой не растягивается и не сжимается, имеем равенство $AB = C'D'$, а из треугольников *KC'D'* и *D'B''B'* получаем

$$C'D' = \rho d\theta, \qquad B'B'' = y d\theta,$$

тогда

$$\varepsilon_{AB} = y/\rho \tag{7.11}$$

или, с учетом (7.9),

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}. \tag{7.12}$$

Для определения напряжений следует рассчитать радиус кривизны ρ нейтрального слоя. С этой целью рассмотрим равновесие элемента длиной *x* (рис. 7.8).

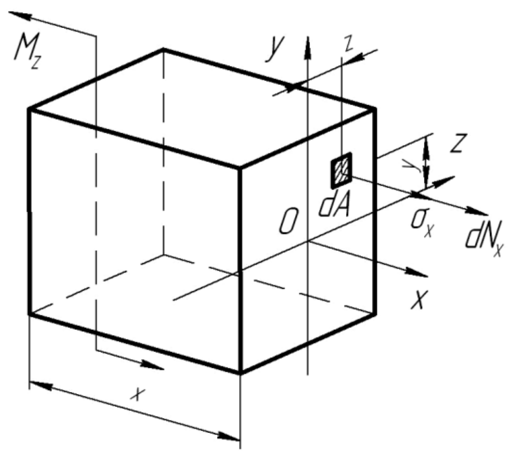


Рис. 7.8

Условия равновесия для выделенного элемента будут иметь вид

$$\sum X = \int_A dN_x = 0, \qquad \sum m_x = 0,$$

$$\sum Y = 0, \quad \sum m_y = \int_A dN_x z = 0, \tag{7.13}$$

$$\sum Z = 0, \quad \sum m_z = \int_A dN_x y - M_z = 0,$$

где dN_x – элементарная продольная сила, действующая на бесконечно малой площадке *dA*:

$$dN_x = \sigma_x dA = E\frac{y}{\rho}dA. \tag{7.14}$$

Подставив выражение (7.14) в первое условие равновесия, получим:

$$\int_A \frac{E}{\rho} y dA = 0.$$

Так как отношение E/ρ не равно нулю и не зависит от переменной интегрирования, то, вынося его за знак интеграла и сокращая, будем иметь:

$$\int_A y dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой *статический момент* площади поперечного сечения относительно нейтральной оси *Oz*. Если он равен нулю, то нейтральная ось при изгибе прямого стержня проходит через центр тяжести сечения.

Подставив выражение (7.14) в условие равновесия $\sum m_y = 0$, получим

$$\int_A \frac{E}{\rho} yz dA = 0,$$

или

$$\int_A yz dA.$$

Этот интеграл представляет собой *центробежный момент инерции* площади поперечного сечения относительно осей *Oz* и *Oy*. Так как он равен нулю, то эти оси являются главными центральными осями инерции.

Из условия равновесия $\sum m_z = 0$ после аналогичного преобразования получаем выражение для момента внутренних сил относительно нейтральной оси

$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA. \tag{7.15}$$

Интеграл

$$\int_A y^2 dA = I_z \tag{7.16}$$

является *моментом инерции* поперечного сечения стержня относительно оси Oz, которая представляет собой нейтральную и главную центральную ось сечения. Тогда выражение (7.15) приобретает вид

$$M_z = \frac{EI_z}{\rho},$$

откуда кривизна нейтрального слоя определяется соотношением

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \tag{7.17}$$

Подставив соотношение (7.17) в формулу (7.12), получим аналитическое выражение закона распределения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y. \tag{7.18}$$

Из выражения (7.12) и предшествующих результатов изучения изгиба следует ряд выводов:

– нейтральная линия сечения всегда совпадает с его главной центральной осью;

– напряжения зависят от значений внутреннего изгибающего момента M_z, момента инерции сечения относительно нейтральной оси I_z и расстояния y от нейтральной оси до точки, в которой определяется напряжение;

– напряжения в любой точке, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии, равны между собой, т.е. по ширине сечения напряжения не изменяются;

– по высоте сечения напряжения изменяются по линейному закону, и максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии.

В соответствии с выражением (7.18) построим эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении (рис. 7.9). Из эпюры (см. рис. 7.9) видно, что внутренние слои материала, особенно вблизи нейтральной линии, мало напряжены. Поэтому для экономии материала площадь сечения выгодно размещать на максимальном удалении от нейтральной линии – там, где напряжения возрастают, т.е. использовать сечения с возможно большими моментами инерции относительно нейтральной оси (рис. 7.9). Рациональные формы поперечных сечений балок представлены на рис. 7.10.

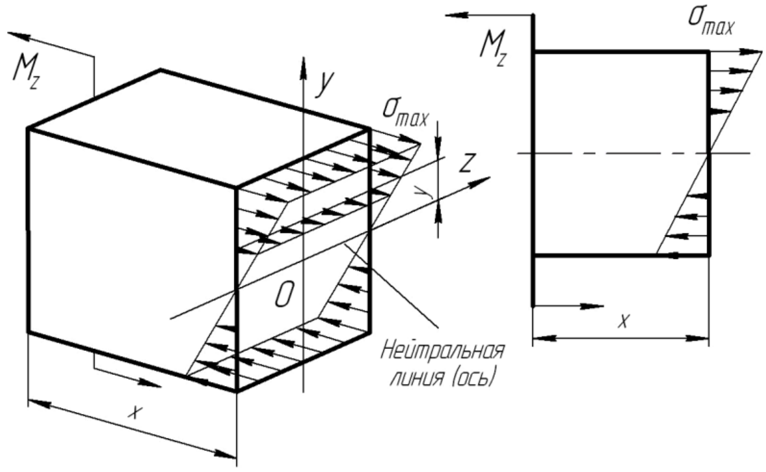


Рис. 7.9

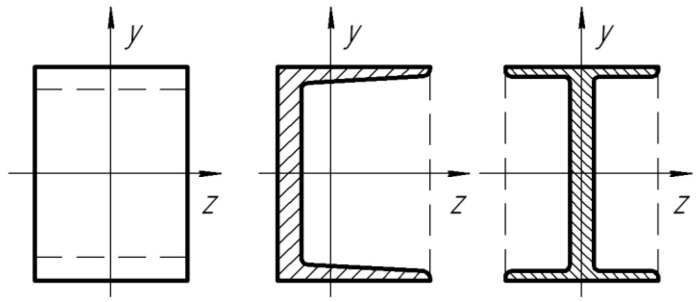


Рис. 7.10

7.4. Касательные напряжения в поперечном сечении

В п. 7.3 было отмечено, что в поперечном сечении стержня при изгибе могут возникать не только нормальные, но и касательные напряжения. Определим закон изменения касательных напряжений в сечении, рассмотрев поперечный изгиб (рис. 7.11).

Из балки мысленно вырежем элемент длиной dx (рис. 7.12), в поперечных сечениях которого будут действовать поперечные силы Q, изгибающие моменты M_z и $M_z + dM_z$. Направления силовых факторов и напряжений приняты в соответствии со схемой нагружения.

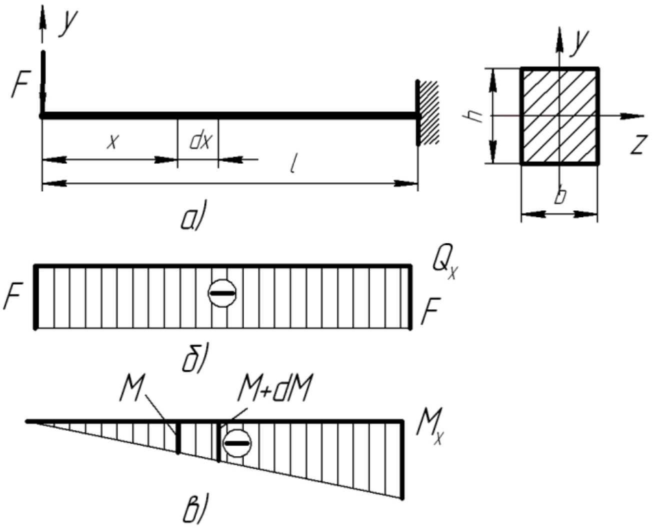


Рис. 7.11

Мысленно разделим данный элемент на две части продольным горизонтальным сечением, сделанным на расстоянии y от нейтрального слоя, и рассмотрим равновесие, например верхней части (рис. 7.12). В сечении присутствует поперечная (перерезывающая) сила.

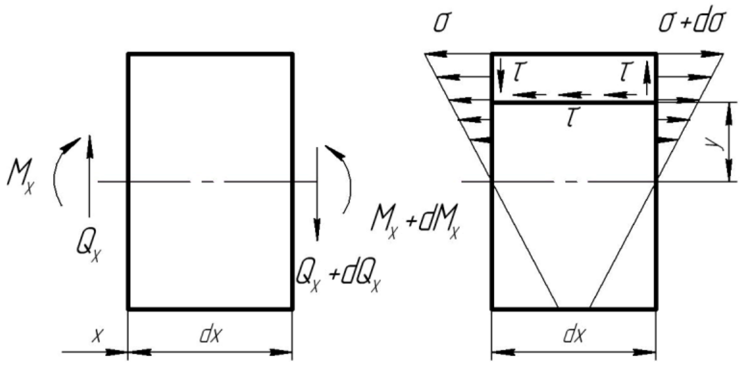


Рис. 7.12

Примем ряд допущений: касательные напряжения в поперечном сечении направлены параллельно перерезывающей силе; с позиции равновесия выделенной части элемента (рис. 7.12) касательные напряжения возникают также и в продольных сечениях (закон парности касательных напряжений), вызывая сдвиги волокон друг относительно друга (эти сдвиги приводят к искривлению поперечных сечений).

Однако для длинных балок (длинной считается балка, отношение длины которой к наибольшему размеру поперечного сечения больше пяти) сдвиги сравнительно невелики и можно считать, что сечения остаются плоскими и после нагружения. Поэтому нормальные напряжения при поперечном изгибе тоже вычисляют по формуле (7.18), касательные напряжения в любой точке сечения, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной оси Oz, равны между собой, т.е. по ширине сечения напряжения не изменяются.

С учетом принятых допущений условие равновесия для верхней части выделенного элемента (рис. 7.11, *а*) будет иметь вид

$$-N_* + \left(N_* + dN_*\right) - \tau b dz = 0, \tag{7.19}$$

$$N_* = \int_{A_*} \sigma dA = \int_{A_*} \frac{M_z}{I_z} y_1 dA = \frac{M_z}{I_z} \int_{A_*} y_1 dA,$$

где A_* – часть площади поперечного сечения, расположенная выше уровня y, а y_1 – текущая координата элементарной площадки dA (рис. 7.13, *б*).

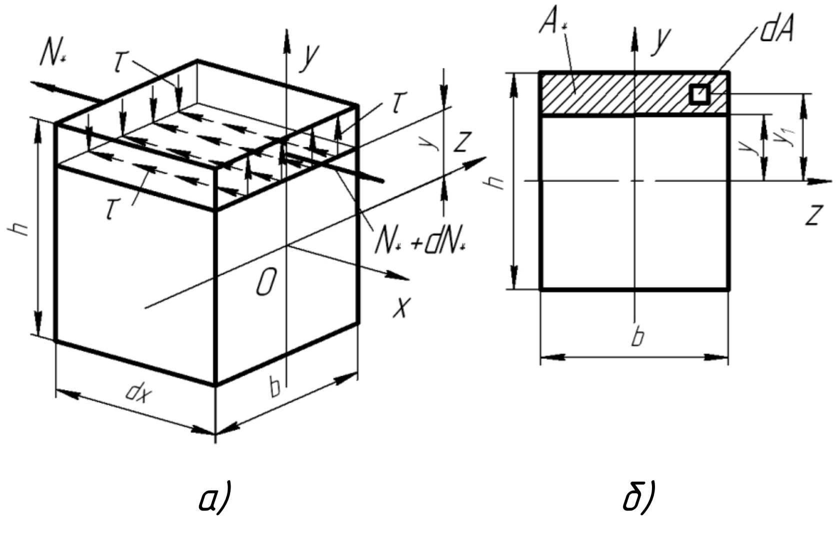


Рис. 7.13

Учитывая, что интеграл $\int_{A_*} y_1 dA$ представляет собой статический момент S_z^* части сечения площади A_* относительно оси Oz, запишем:

$$N_* = \frac{M_z S_z^*}{I_z}. \tag{7.20}$$

Равнодействующая элементарных нормальных сил в правом сечении будет равна

$$N_* + dN = \frac{M_z + dM_z \;\; S_z^*}{I_z}. \tag{7.21}$$

Подставляя выражения (7.20) и (7.21) в условие равновесия (7.19), с учетом зависимости (7.8), приходим к формуле, впервые полученной Д.И. Журавским:

$$\tau = \frac{dM_z}{dz} \frac{S_z^*}{I_z b} = \frac{Q S_z^*}{I_z b}. \tag{7.22}$$

Здесь S_z^* – статический момент части площади поперечного сечения, лежащей в направлении от нейтральной оси за уровнем y, на котором определяется касательное напряжение τ; b – ширина поперечного сечения на уровне y. Парные касательные напряжения в продольных сечениях стержня равны напряжениям в поперечных сечениях на одном и том же уровне y.

Для прямоугольного поперечного сечения статический момент площади, расположенной за уровнем y, и осевой момент инерции всего сечения, соответственно, равны

$$S_z = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right), \qquad I_z = \frac{bh^3}{12}.$$

Тогда распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения будет соответствовать параболическому закону (рис. 7.14).

Максимальные касательные напряжения будут действовать на нейтральной оси (при $y = 0$)

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh}. \tag{7.23}$$

7.5. Условие прочности

Максимальные нормальные напряжения, согласно формуле (7.18), будут возникать в наиболее удаленных от нейтральной оси точках поперечного сечения $y = y_{\max}$ и примут вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\max},$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}, \tag{7.24}$$

где $W_z = I_z / y_{\max}$ – осевой момент сопротивления сечения стержня.

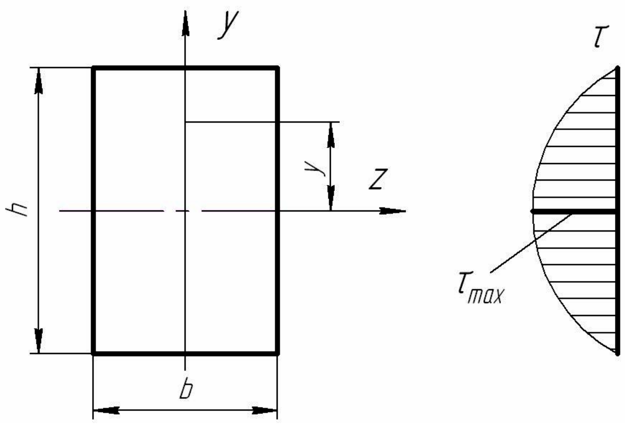


Рис. 7.14

Для прямоугольного сечения (рис. 7.14)

$$W_z = \frac{bh^2}{6}, W_y = \frac{hb^2}{6}. \tag{7.25}$$

Для круглого сечения диаметром d

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32}. \tag{7.26}$$

Условие прочности записывается для максимального напряжения в наиболее нагруженном поперечном сечении балки, положение которого определяется с помощью эпюры изгибающих моментов, и имеет следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{расч}}{W_z} \leq \sigma, \tag{7.27}$$

где $M_{расч}$ – расчетный внутренний изгибающий момент (момент в наиболее нагруженном сечении), σ – допускаемое нормальное напряжение при изгибе для конкретного материала.

Условие прочности по касательным напряжениям будет иметь вид

$$\tau_{\max} = \left(\frac{QS_z^*}{I_z b} \right)_{\max} \leq \tau \ , \qquad (7.28)$$

где τ – допускаемое касательное напряжение для конкретного материала стержня.

В расчетах на прочность касательные напряжения учитываются только для коротких балок, так как в длинных балках нормальные напряжения в поперечных сечениях значительно больше касательных.

7.6. Расчеты на прочность

Исходя из (7.27) можно решать три типа задач (п. 2.6). Рассмотрим пример проектного расчета.

Пример. Определить размеры поперечного сечения балки, нагруженной системой сил (рис. 7.15, *а*), если σ = 160 МПа, τ = 80 МПа, $M = 6$ кН·м, $q = 4$ кН/м, $h = 2b$, b =1 м.

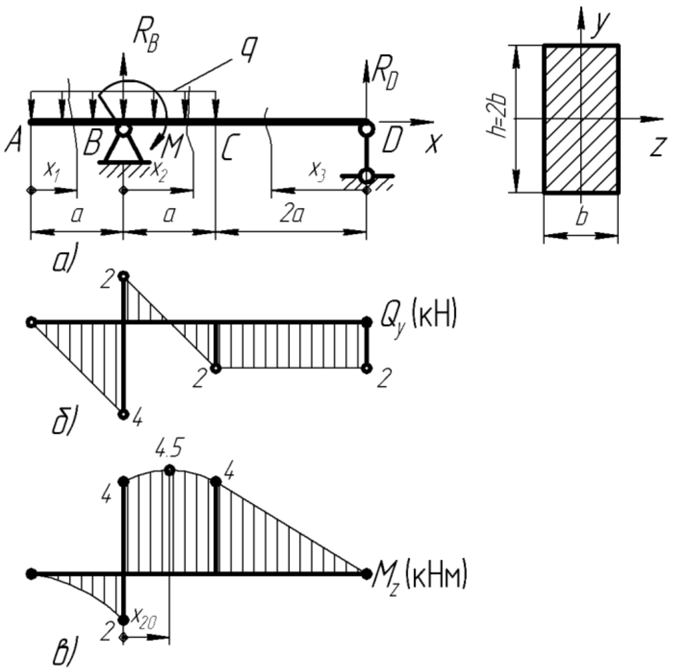


Рис. 7.15

Решение. Размеры сечения определим из условия прочности по нормальным напряжениям (7.27). Согласно этому условию для определения размеров сечения необходимо знать $M_{расч}$, значение которого найдем из эпюры изгибающих моментов M_z. Одновременно с эпюрой M_z строим эпюру поперечных сил, необходимую для определения $Q_{\max}$ и проверки прочности по касательным напряжениям.

Алгоритм и правила построения эпюр силовых факторов представлены в п. 7.2. В соответствии с алгоритмом из условий равновесия определим опорные реакции

$$\sum m_B = -M + R_D 3a = 0, \qquad \sum m_D = q2a3a - M - R_B 3a = 0,$$

$$R_D = \frac{M}{3a} = 2 \text{ кН}, \qquad R_B = \frac{q6a^2 - M}{3a} = 6 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности значений найденных реакций используем еще одно условие равновесия

$$\sum Y = -q2a + R_B + R_D = -4 \cdot 2 \cdot 1 + 6 + 2 = 0.$$

Условие выполняется, следовательно, реакции найдены правильно.

Балка имеет три силовых участка: *AB*, *BC*, *CD* (см. рис. 7.15, *а*). Используя метод сечений, записываем для каждого участка аналитические выражения внутренних силовых факторов.

Участок *AB* $\left(0 \le x_1 \le a\right)$.

$$Q_1 = -qx_1, \quad Q_1\big|_{x_1=0} = 0, \quad Q_1\big|_{x_1=a} = -qa = -4 \text{ кН},$$

$$M_{z_1} = -q\frac{x_1^2}{2}, \quad M_{z_1}\big|_{x_1=0} = 0, \quad M_{z_1}\big|_{x_1=a} = -q\frac{a^2}{2} = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Изгибающий момент на данном участке изменяется по закону квадратичной параболы. В сечении *А* поперечная сила равна нулю, следовательно, эпюра моментов в этом сечении имеет экстремум.

Участок *BC* $\left(0 \le x_2 \le a\right)$. Начало координат в сечении *B*, тогда

$$Q_2 = -q\left(a + x_2\right) + R_B,$$

$$Q_2\big|_{x_2=0} = -qa + R_B = 2 \text{ кН},$$

$$Q_2\big|_{x_2=a} = -q2a + R_B = -2 \text{ кН},$$

$$M_{z_2} = -q\frac{(a+x_2)^2}{2} + M + R_B x_2,$$

$$M_{z_2}\Big|_{x_2=0} = -q\frac{a^2}{2} + M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{z_2}\Big|_{x_2=a} = -q\frac{4a^2}{2} + M + R_B a = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На данном участке изгибающий момент также изменяется по закону квадратичной параболы. С целью определения положения экстремума на эпюре моментов проведем исследование функции $M_z(x_2)$ на экстремум:

$$\frac{dM_z(x_2)}{dx} = 0, \quad \text{т.е.} \quad -q(a + X_{20}) + R_B = 0.$$

Найдем из этого уравнения значение x, при котором M_z достигает экстремума

$$X_{20} = \frac{-qa + R_B}{q} = 0{,}5 \text{ м}.$$

Тогда экстремальное значение момента будет определено следующим соотношением:

$$M_z\big|_{x_2} = X_{20} = -q\frac{(a + X_{20})^2}{2} + M + R_B X_{20} = 4{,}5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок DC $(0 \le x_3 \le 2a)$. Начало координат выгоднее расположить в сечении D.

$$Q_3 = -R_D = -2 \text{ кН}, \qquad M_{x_3} = R_D x_3,$$

$$M_{z_3}\Big|_{x_3=0} = 0, \qquad M_{z_3}\Big|_{x_3=2a} = R_D 2a = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным выражениям и значениям внутренних силовых факторов строим эпюры поперечных сил (рис. 7.15, *б*) и изгибающих моментов (рис. 7.15, *в*).

Так как балка по всей длине имеет постоянное поперечное сечение, то расчетное значение момента будет равно его максимальной величине на эпюре, т.е.

$$M_{рас} = M_{\max} = 4{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для прямоугольного сечения, согласно формуле (7.25),

$$W_z = bh^2/6$$

или для рассматриваемого случая

$$W_z = 2b^3.$$

Из условия прочности (7.27)

$$W_z \geq \frac{M_{рас}}{\sigma}.$$

Тогда

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3M_{рас}}{2\ \sigma}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 4{,}5}{2 \cdot 160 \cdot 10^3}} \approx 0{,}035 \text{ м}.$$

Проверим выполнение условия прочности по касательным напряжениям (7.23) для полученного значения b:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = 2{,}45 МПа < \tau\ .$$

Здесь Q – максимальное значение поперечной силы, взятое с эпюры (рис. 7.15, *б*). Так как условие прочности выполняется, то значение $b = 0{,}035$ м является окончательным.

7.7. Перемещения линейные и угловые. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Изогнутая ось балки называется упругой линией. Линейное перемещение точек сечения из исходного состояния в деформированное называется прогибом, или линейным перемещением, и обозначается y (рис. 7.16). При деформации поперечные сечения поворачиваются относительно исходного положения на углы θ, которые называются угловыми перемещениями. Прогибы балки будем считать положительными, если точки ее оси смещаются при деформации вверх. Углы поворота считаются положительными, если поперечные сечения при деформации поворачиваются против хода часовой стрелки.

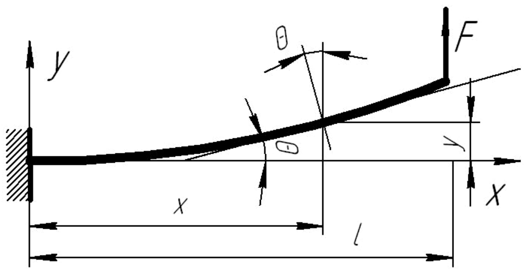


Рис. 7.16

Из математики известно соотношение между кривизной линии и координатой y

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{7.29}$$

С другой стороны, радиус кривизны определяется через M_z по уравнению (7.17)

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_z}{EI_z}.$$

Из этих двух уравнений получаем

$$\frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{M_z}{EI_z}. \tag{7.30}$$

Уравнение (7.30) называется *точным дифференциальным уравнением упругой линии балки*. Для малых перемещений квадратом производной dy/dx можно пренебречь ввиду малости по сравнению с единицей. Тогда уравнение (7.30) перепишется в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M_z}{EI_z}. \tag{7.31}$$

Уравнение (7.31) является приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки.

Перед решением уравнения (7.31) необходимо представить изгибающие моменты M_z в виде аналитической функции от координаты x. Интегрируя уравнение (7.31), получим уравнение углов поворота поперечных сечений (рис. 7.16)

$$\theta = dy \big/ dz = \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C. \qquad (7.32)$$

Интегрируя второй раз, получим уравнение прогибов балки

$$y = \iint \frac{M_z}{EI_z} dx + Cx + D. \qquad (7.33)$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий, зависящих от вида опорных связей балки.

Пример. Составить уравнение упругой линии балки, изображенной на рис. 7.17 и определить максимальный прогиб. Заданы величины: l, EI_z, F.

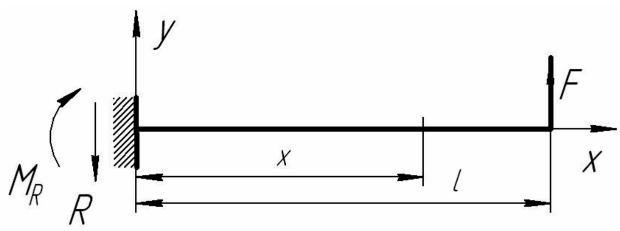


Рис. 7.17

Решение. Поместим начало координат в заделке. Изгибающий момент в сечении x равен

$$M_z = -Rx + M_R.$$

Здесь $R = F, M_R = Fl$.

После двукратного интегрирования получим уравнение прогибов

$$y = \frac{F}{EI_z}\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + Cx + D \right).$$

Найдем C и D. В данном случае при $x = 0$ имеем $y = 0$, откуда $C = 0$ и $D = 0$. Тогда

$$y = \frac{F}{EI_z}\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Наибольший прогиб имеет место в точке приложения силы F, т.е. при $x = l$. Найдем его по формуле

$$y_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI_z}.$$

7.8. Универсальное уравнение упругой линии балки

Вполне очевидно, что для балки, имеющей несколько участков (и, следовательно, несколько аналитических зависимостей M_z от x), определение формы упругой линии балки становится затруднительным. Уравнение M_z каждого участка после интегрирования содержит две постоянные интегрирования. Если балка имеет n участков, необходимо решить совместно $2n$ уравнений для определения $2n$ постоянных.

Для бруса с $EI_z = \mathrm{const}$ от указанного затруднения можно избавиться, составив единое для всей балки уравнение прогибов. Рассмотрим балку, нагруженную наиболее встречающимися нагрузками (рис. 7.18). Сумма этих сил должна удовлетворять условиям равновесия.

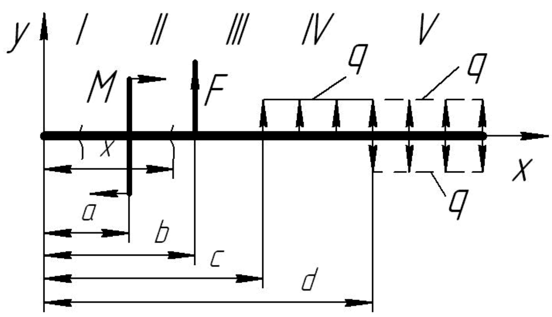


Рис. 7.18

Составим уравнение изгибающих моментов для каждого участка нагруженной балки:

I $\quad M_{z_1} = 0$ при $0 \le x_1 \le a$;

II $\quad M_{z_2} = M$ при $a \le x_2 \le b$;

III $\quad M_{z_3} = M + F(x - b)$ при $b \le x_3 \le c$;

IV $\quad M_{z_4} = M + F(x-b) + q\dfrac{(x-c)^2}{2}$ при $c \le x_4 \le d$;

V $\quad M_{z_5} = M + F(x-b) + q\dfrac{(x-c)^2}{2} - q\dfrac{(x-d)^2}{2}$ при $d \le x_5$.

Как видно, выражение изгибающего момента для каждого последующего участка включает в себя выражение M_z предыдущего участка с добавкой нового слагаемого. При переходе от четвертого участка к пятому указанную закономерность сохраним. Для этого распределенную нагрузку продлим до конца балки и для сохранения равновесия добавим такую же нагрузку q, но противоположного направления (рис. 7.18).

Проинтегрируем уравнения моментов один раз и, разделив их на жесткость, получим выражения для углов поворота θ на каждом из участков балки:

$$
\begin{aligned}
&\text{I} && EI_z y_1' = C_1;\\
&\text{II} && EI_z y_2' = C_2 + M(x-a);\\
&\text{III} && EI_z y_3' = C_3 + M(x-a) + F\frac{(x-b)^2}{2};\\
&\text{IV} && EI_z y_4' = C_4 + M(x-a) + F\frac{(x-b)^2}{2} + q\frac{(x-c)^3}{6};\\
&\text{V} && EI_z y_5' = C_5 + M(x-a) + F\frac{(x-b)^2}{2} + q\frac{(x-c)^3}{6} - q\frac{(x-d)^3}{6}.
\end{aligned}
\tag{7.34}
$$

Постоянные C_i (i = 1,..., 5) должны быть такими, чтобы при переходе от одного участка к другому величина θ не имела разрыва. Следовательно, при $x = a$ должно выполняться условие $\theta_1 = \theta_2$, при $x = b$ – условие $\theta_2 = \theta_3$ и т.д. Так как брус имеет постоянную жесткость, то очевидно, что

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = C_n = \theta_0.$$

Константы интегрирования C_i находятся из первого уравнения системы, (7.34) при $x = 0$

$$C_1 = EI_z\theta_0,$$

где θ_0 – угол поворота сечения в начале координат. Интегрируем полученные уравнения (7.34) еще раз:

$$\text{I}: \quad EI_z y_1 = D_1 + EI_z\theta_0 x;$$

$$\text{II}: \quad EI_z y_2 = D_2 + EI_z\theta_0 x + M\frac{(x-a)^2}{2};$$

$$\text{III}: \quad EI_z y_3 = D_3 + EI_z\theta_0 x + M\frac{(x-a)^2}{2} + F\frac{(x-b)^3}{6};$$

$$\text{IV}: \quad IE_z y_4 = D_4 + EI\theta_0 x + M\frac{(x-a)^2}{2} + F\frac{(x-b)^3}{6} + \\ + q\frac{(x-c)^4}{24}; \qquad (7.35)$$

$$\text{V}: \quad EI_z y_5 = D_5 + EI_z\theta_0 x + M\frac{(x-a)^2}{2} + F\frac{(x-b)^3}{6} + \\ + q\frac{(x-c)^4}{24} - q\frac{(x-d)^4}{24}.$$

Постоянные D_i определяются так же, как и C_i, из условий неразрывности функций y на границах участков

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = EI_z y_0,$$

где y_0 – ордината упругой линии в начале координат. Окончательно имеем

$$EI_z y = EI_z y_0 + \\ + \underbrace{EI_z\theta_0 x}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{M(x-a)^2}{2}}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{F(x-b)^3}{6}}_{\text{III}} + \underbrace{\frac{q(x-c)^4}{24}}_{\text{IV}} - \underbrace{\frac{q(x-d)^4}{24}}_{\text{V}}. \qquad (7.36)$$

Уравнение (7.36) называется *универсальным уравнением упругой линии балки.* Для определения прогибов на первом участке следует пользоваться частью уравнения упругой линии балки, расположенной выше и левее цифры I. Для второго участка надо брать слагаемые выше и левее II и т.д.

Пример. Написать уравнение упругой балки (рис. 7.19) и найти вертикальные перемещения точек приложения сил. Заданы величины EI_z, I, F.

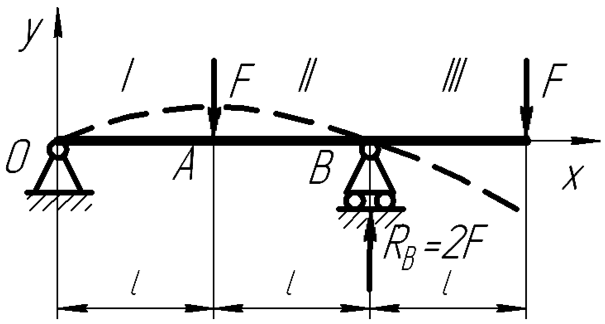


Рис. 7.19

Решение. На левой опоре *O* реакция равна нулю. Величина реакции, возникающей на правой опоре под действием приложенных нагрузок:

$$R_B = 2F.$$

Начало координат поместим на левой опоре. Уравнение упругой линии балки с учетом действующих на нее сил имеет следующий вид:

$$EI_z y = EI_z\theta_0 x - \frac{F\,(x-l)^3}{6} + \frac{2F\,(x-2l)^3}{6}.$$

I II III

Определим величину из условия, что при $x = 2l$, прогиб $y = 0$.

$$EI_z\theta_0 = \frac{Fl^2}{12}.$$

Окончательно получим

$$EI_z y = \frac{Fl^2}{12}x - \frac{F\,(x-l)^3}{6} + \frac{2F\,(x-2l)^3}{6}.$$

I II III

Для определения перемещения сечения *A* подставляем $x = l$ в уравнение, ограниченное справа индексом I:

$$y_A = +\frac{Fl^3}{12EI_z}.$$

Знак «плюс» указывает на то, что точка *A* перемещается вверх.

Принимаем $x = 3$ и используем уравнения прогибов полностью. Тогда получим для точки C

$$y_C = -\frac{3Fl^3}{4EI_z}.$$

Точка C перемещается вниз. На рис. 7.19 показан примерный вид упругой линии балки.

7.9. Статически неопределимые балки

Если число реакций в опорах балки превышает число уравнений равновесия, то балка является статически неопределимой. Следовательно, расчет таких балок нельзя выполнить при помощи одних лишь уравнений равновесия. В этом разделе рассмотрим на примере один из методов составления дополнительных уравнений (уравнений перемещений) на основе универсального уравнения упругой линии балки.

Пример. Определить опорные реакции и прогиб в центре пролета (точка C) балки, изображенной на рис. 7.20. Дано: l, q, E, I_z.

Решение. В опорах балки возникают четыре реакции, но для нее можно составить лишь три уравнения равновесия. Следовательно, балка один раз статически неопределима и необходимо составить одно дополнительное уравнение.

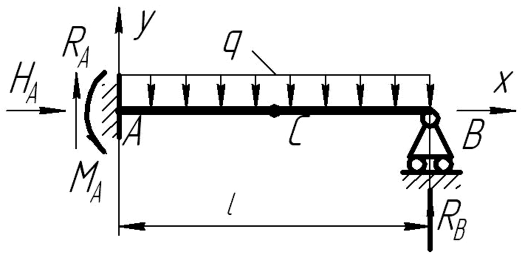


Рис. 7.20

Составим уравнение упругой линии балки, приняв за начало координат заделку. Учитывая, что $y_A = 0$, $\theta_A = 0$, получим

$$y = \frac{1}{EI_z}\left(-\frac{M_A x^2}{2} + \frac{R_A x^3}{6} - \frac{qx^4}{24}\right). \quad (7.37)$$

Учитывая, что в точке B величина прогиба известна ($y_B = 0$), подставим в уравнение (7.37) ее координату ($x = l$) и получим

$$y_B = \frac{1}{EI_z}\left(-\frac{M_A l^2}{2} + \frac{R_A l^3}{6} - \frac{q l^4}{24}\right) = 0.$$

Это дополнительное уравнение перемещений. Добавим к нему уравнения равновесия

$$\sum F_y = R_A - ql + R_B = 0, \sum F_x = H_A = 0,$$

$$\sum M_A = M_A - \frac{ql^2}{2} + R_B l = 0.$$

Решив систему из четырех уравнений, получим:

$$H_A = 0, \quad R_A = 5ql/8, \quad R_B = 3ql/8, \quad M_A = ql^2/8.$$

Принимаем $x = l/2$ и находим прогиб в точке C

$$y_C = \left[-\frac{M_A\ l/2\ ^2}{2} + \frac{R_A\ l/2\ ^3}{6} - \frac{q\ l/2\ ^4}{24}\right],$$

или

$$y_C = \frac{7ql^4}{115^2 EI_z}.$$

Таким образом, расчет статически неопределимых систем требует анализа перемещений и использования уравнений перемещений для сечений, где перемещения известны. Расположение таких сечений всегда совпадает с расположением опор.

Глава 8

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

К случаям сложного сопротивления относят такие виды нагружения брусьев (кроме поперечного изгиба), при которых в их поперечных сечениях одновременно возникает более одного внутреннего силового фактора.

8.1. Косой изгиб

8.1.1. *Вычисление напряжений*

Косой изгиб – такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции сечения. Случай изгиба, при котором в поперечном сечении возникает лишь изгибающий момент, называется *чистым косым изгибом*. Если в сечении действует, кроме того, поперечная сила, то изгиб называется поперечным косым. Косой изгиб, по существу, является одновременным изгибом бруса (балки) в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 8.1, левая система координат).

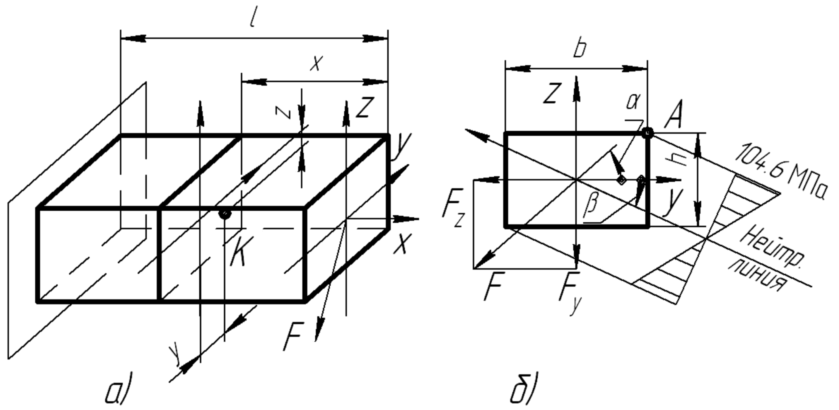


Рис. 8.1

Рассмотрим балку с прямоугольным поперечным сечением, которая нагружена силой F, направленной под углом α к главной оси z (рис. 8.1). Балка испытывает косой поперечный изгиб. В поперечном сечении ее на расстоянии x от правого конца действует момент $|M_z| = F_y x$ относительно главной оси z, момент $\left|M_y\right| = F_z x$ относительно главной оси y и поперечные силы вдоль главных осей z и y – $Q_y = +F_y$ и $Q_z = +F_z$. Полный изгибающий момент $M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$. Учитывая, что $F_y = F\sin\alpha$, $F_z = F\cos\alpha$, $F_x = M$, получим

$$
\begin{aligned}
\left|M_z\right| &= Fx\sin\alpha = M\sin\alpha, \\
\left|M_y\right| &= Fx\cos\alpha = M\cos\alpha.
\end{aligned} \tag{8.1}
$$

Таким образом, косой изгиб можно рассматривать как сочетание двух плоских изгибов относительно главных центральных осей инерции сечений z и y.

На основании принципа независимости действия сил полные нормальные напряжения в поперечных сечениях равны сумме напряжений от раздельного действия моментов M_z и M_y

$$
\sigma = \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} = \frac{\left|M_z\right|}{I_z} y + \frac{\left|M_y\right|}{I_y} z \tag{8.2}
$$

или, с учетом (8.1),

$$
\sigma = M\left(\frac{y}{I_z}\sin\alpha + \frac{z}{I_y}\cos\alpha\right). \tag{8.3}
$$

Знак напряжений определяется знаком координат z и y. Например, напряжение в точке K с координатами $-y$ и +z (четвертый квадрант) будет равно

$$
\sigma_K = Fx\left(\frac{-y}{I_z}\sin\alpha + \frac{+z}{I_y}\cos\alpha\right),
$$

т.е., сила F_z вызывает в этом квадранте растяжение, а F_y – сжатие. Из уравнений (8.2) и (8.3) следует, что, как и при прямом изгибе, концы векторов нормальных напряжений вдоль прямой, перпендикулярной нейтральной линии, лежат на одной прямой.

Максимальные напряжения возникают в сечениях с $M = M_{\max}$ в тех его точках, которые наиболее удалены от нейтральной линии. Для определения координат точек z', y' необходимо знать положение нейтральной линии. Уравнение нейтральной линии определим из уравнения (8.3) по условию $\sigma = 0$ (на нейтральной линии нормальные напряжения равны нулю) и получим

$$y/I_z \sin\alpha + z/I_y \cos\alpha = 0$$

или

$$y = -z\, I_z/I_y \operatorname{ctg}\alpha, \tag{8.4}$$

$$y = -z \operatorname{tg}\beta, \tag{8.5}$$

где $\operatorname{tg}\beta = I_z/I_y \operatorname{ctg}\alpha$ – тангенс угла наклона нейтральной линии к оси z. Из уравнений (8.4) и (8.5) следует, что нейтральная линия неперпендикулярна плоскости действия изгибающего момента.

Действительно, если в уравнении следа плоскости изгибающего момента $y = z\operatorname{tg}\alpha$, угловой коэффициент k_1 равен $\operatorname{tg}\alpha$, а угловой коэффициент нейтральной линии k_2 в уравнении (8.4) равен $I_z/I_y \operatorname{ctg}\alpha$, то условие перпендикулярности прямых, известное из аналитической геометрии, не соблюдается при $I_y \neq I_z$, поскольку $k_1 \neq 1/k_2$. В этом случае балка изгибается не в плоскости действия изгибающего момента, а в некоторой другой плоскости, где жесткость на изгиб меньше. Поэтому нейтральная линия повернется в сторону оси с минимальным моментом инерции (рис. 8.1, *б*).

Пример. Балка прямоугольного поперечного сечения, защемленная одним концом, нагружена силой F (рис. 8.1, *а*), наклонной к оси z под углом α. При заданных поперечных размерах $h = 2$см, $b = 4$см, силе $F = 20$кН, $l = 1$м и $\alpha = 30^\circ$ определить положение нейтральной линии, построить эпюры σ в опасном сечении.

Решение. Разложим силу на две составляющих F_z и F_y, тогда

$$F_y = F\cos\alpha = 20\cos 30^\circ = 17{,}32 \text{ кН},$$

$$F_z = F\sin\alpha = 20\sin 30^\circ = 10{,}00 \text{ кН}.$$

Опасным сечением является заделка, где действует максимальный момент, составляющие которого равны

$$M_y = F_z l = Fl\sin\alpha = 10{,}00 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_z = F_y l = Fl\cos\alpha = 17{,}32 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Тогда напряжение в любой точке

$$\sigma = \left(M_y / I_y\right) z + \left(M_z / I_z\right) y.$$

Определим положение нейтральной линии по формуле

$$\mathrm{tg}\beta = -\frac{I_z}{I_y}\mathrm{ctg}\,\alpha, \text{ где } I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{hb^3}{12}.$$

Тогда

$$tg\beta = -\frac{bh^3/12}{hb^3/12}\mathrm{ctg}\,\alpha = -\left(h/b\right)^2 \mathrm{ctg}30^\circ = -0{,}5^2 \cdot 1{,}732 = -0{,}433.$$

Получим $\beta = -23{,}4^\circ$. Угол β откладывается от той же оси, что и угол α, только в противоположную сторону, на что указывает знак «минус».

Максимальные растягивающие напряжения возникают в наиболее удаленной от нейтральной линии точке *A* первого квадранта с координатами $z' = b/2 = 2$ см, $y' = h/2 = 1$см, где силы F_z и F_y вызывают растяжение. Напряжение в этой точке получим из формулы (8.2), подставив значения z' и y':

$$\sigma = \frac{M_z y'}{I_z} + \frac{M_y z'}{I_y} = \frac{17{,}32 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-2}}{\left(4 \cdot 2^3/12\right) \cdot 10^{-8}} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{\left(2 \cdot 4^3/12\right) \cdot 10^{-8}} = 104{,}6 \text{ МПа}$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 8.1, *б*.

8.1.2. *Прогибы при косом изгибе*

Перемещение f свободного конца балки определяется прогибами f_z и f_y в направлении осей *z* и *y* (рис. 8.1, *а*). Из уравнения упругой линии балки (гл. 7)

$$f_z = \frac{F_z l^3}{3EI_y} = \frac{Fl^3 \cos\alpha}{3EI_y}, \qquad f_y = \frac{F_y l^3}{3EI_z} = \frac{Fl^3 \sin\alpha}{3EI_z}. \tag{8.6}$$

Полный прогиб

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}. \tag{8.7}$$

8.2. Внецентренное растяжение (сжатие)

Внецентренное растяжение (сжатие) вызывается действием продольных сил, которые прикладываются на некотором расстоянии от центра тяжести сечения. Расстояние между точкой приложения силы и центром тяжести называется *эксцентриситетом*.

Пусть точка C (назовем ее *полюсом*) приложения равнодействующих сил (рис. 8.2) имеет координаты y_0 и z_0. Тогда относительно главных осей y и z равнодействующая сила F дает моменты $M_z = Fy_0$ и $M_y = Fz_0$. Как видно, стержень в этом случае испытывает одновременно растяжение (сжатие) и чистый косой изгиб от момента, составляющими которого являются M_z и M_y.

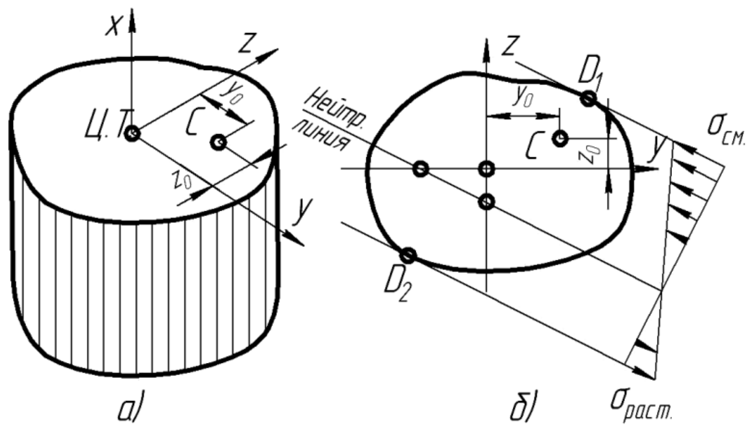


Рис. 8.2

Общие нормальные напряжения в любой точке сечения согласно принципу независимости действия сил будут равны сумме напряжений от сжатия и от изгиба в двух плоскостях. Так, в произвольной точке K с координатами y_K и z_K нормальные напряжения будут равны

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_z} = \frac{F}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_K + \frac{M_y}{I_y} z_K,$$

или

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{Fy_0}{I_z} y_K + \frac{Fz_0}{I_y} z_K. \qquad (8.8)$$

В формуле (8.8) растягивающая сила F ставится со знаком «плюс», сжимающая – со знаком «минус»; координаты y_0, z_0, y_K, z_K подставляются с учетом знака.

Формулу (8.8) можно представить в другом виде: преобразуя соотношение (8.8), вынесем за скобки общий множитель F/A

$$\sigma = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{Ay_0}{I_z} y_K + \frac{Az_0}{I_y} z_K\right),$$

или

$$\sigma = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_0}{i_z^2} y_K + \frac{z_0}{i_y^2} z_K\right), \tag{8.9}$$

где $i_z^2 = I_z/A$, $i_y^2 = I_y/A$ – радиусы инерции поперечного сечения бруса относительно главных центральных осей инерции y и z.

В формулах (8.8) и (8.9) переменными являются два последних слагаемых, отражающих влияние изгиба. Следовательно, самыми напряженными являются точки, наиболее удаленные от нейтральной линии. Найдем положение нейтральной линии по уравнению (8.9) из условия, что нормальные напряжения на ней равны нулю,

$$\sigma_{\text{Н.О.}} = 1 + \frac{y_0}{i_z^2} y_{\text{Н.О.}} + \frac{z_0}{i_y^2} z_{\text{Н.О.}} = 0. \tag{8.10}$$

Получили уравнение нейтральной линии, которое является уравнением прямой линии, не проходящей через центр тяжести сечения. Построим эту прямую по отрезкам, отсекаемым на осях координат, принимая последовательно $z = 0$ и $y = 0$. При $z = 0$ найдем из уравнения (8.10) отрезок, отсекаемый на оси Oy:

$$y = -i_z^2 / y_0. \tag{8.11}$$

При $y = 0$ найдем отрезок, отсекаемый на оси Oz:

$$z = -i_y^2 / z_0. \tag{8.12}$$

Положение нейтральной линии показано на рис. 8.2, *б*. Проводя к контуру сечения касательные, параллельные нейтральной линии, находим точки D_1 и D_2, наиболее удаленные от нее, в которых возникают наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения. В целом, нормальные напряжения вдоль прямой, перпендикулярной нейтральной линии изменяются по линейному закону, что следует из формул (8.8) и (8.9) и показано на рис. 8.2, *б*.

Сформулируем свойства нейтральной линии, вытекающие из уравнений (8.11) и (8.12).

1. Положение её не зависит от значения силы F.

2. Нейтральная линия и полюс находятся по разные стороны от центра тяжести сечения.

3. При удалении полюса от центра тяжести нейтральная линия приближается к последнему, и наоборот.

4. Если полюс находится на одной из главных центральных осей инерции сечения, нейтральная линия перпендикулярна этой оси.

Расчет на прочность. Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности имеет вид

$$|\sigma_{max}| = F\left(\frac{1}{A} + \frac{y_0 y'}{I_z} + \frac{z_0 z'}{I_y}\right) \le \sigma \ . \qquad (8.13)$$

Здесь y' и z' – координаты наиболее удаленной от нейтральной линии точки. Для сечений, имеющих выступающие углы, у которых обе главные оси являются осями симметрии (прямоугольник, двутавр), $y' = y_{\max}$ и $z' = z_{\max}$. При этом формула (8.13) упрощается и примет вид

$$|\sigma_{max}| = F\left(\frac{1}{A} + \frac{y_0}{W_z} + \frac{z_0}{W_y}\right) \le \sigma \ .$$

Если сопротивление материала растяжению и сжатию неодинаково, то необходимо производить проверку прочности как по растягивающим напряжениям, так и по сжимающим, используя в условии прочности $\sigma_{\max.раст.} \le \sigma_P$ и $\sigma_{\min.сжат.} \le \sigma_C$ формулы (8.8) или (8.9).

Пример. Столб прямоугольного поперечного сечения со сторонами $a = 30$ см и $b = 20$ см (рис. 8.3) нагружен силой $F = 1{,}5$ кН в точке C с координатами $y_0 = 5$ см, $z_0 = 12$ см. Найти положение нейтральной линии, построить эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении столба и проверить на прочность при заданных допускаемых напряжениях на сжатие $\sigma_C = 200 \cdot 10^4$ Па и растяжение $\sigma_P = 100 \cdot 10^4$ Па.

Решение. Определим геометрические характеристики сечения

$$A = ab = 30 \cdot 20 = 600 \text{ см}^2 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2,$$

$$I_y = \frac{ba^3}{12} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45000 \text{ см}^4 = 45 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4,$$

$$I_z=\frac{ab^3}{12}=\frac{30\cdot 20^3}{12}=20000\ \text{см}^4=20\cdot 10^{-5}\ \text{м}^4,$$

$$i_y^2=I_y/A=45000/600=75\ \text{см}^2,$$

$$i_z^2=I_z/A=20000/600=33{,}3\ \text{см}^2.$$

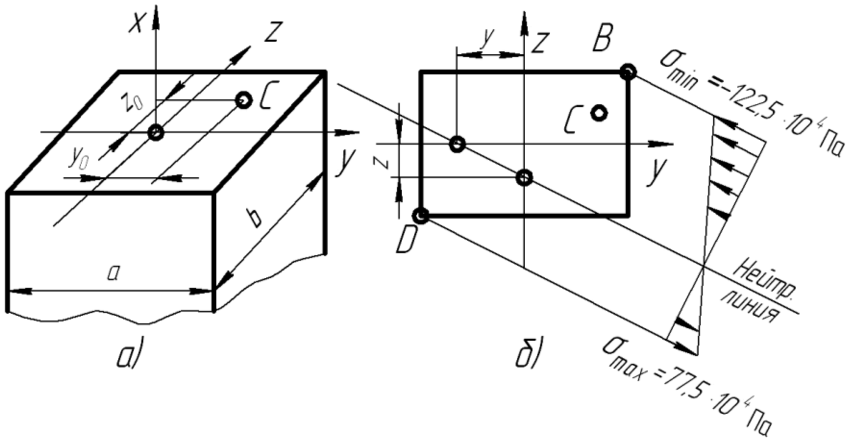


Рис. 8.3

По формулам (8.11) и (8.12) определим отрезки, отсекаемые на осях *Oy* и *Oz*, построим по ним нейтральную линию (рис. 8.3, *б*)

$$y_{\text{Н.О.}}=-\frac{i_z^2}{y_0}=-\frac{33{,}3}{5}=-6{,}66\,\text{см},$$

$$z_{\text{Н.О.}}=-\frac{i_y^2}{z_0}=-\frac{75}{12}=-6{,}25\,\text{см}.$$

Наиболее удаленные от нейтральной линии точки *B* и *D* соответственно имеют координаты $y_B=a/2=15\,\text{см}$, $z_B=b/2=10\,\text{см}$ и $y_D=-a/2=-15\,\text{см}$, $z_D=-b/2=-10\,\text{см}$. Подставив их в уравнение (8.9) и учитывая, что приложена сжимающая сила (перед формулой ставим знак «минус»), найдем в опасных точках нормальные напряжения

$$\sigma_{\min}=-15\cdot 10^3\left[\frac{1}{6\cdot 10^{-2}}+\frac{5\cdot 10^{-2}\cdot 10\cdot 10^{-2}}{20\cdot 10^{-5}}+\frac{12\cdot 10^{-2}\cdot 15\cdot 10^{-2}}{15\cdot 10^{-5}}\right]=$$

$$=-122{,}5\cdot 10^4\ \text{Па},$$

$$\sigma_{\max} = -15\cdot10^{3}\left[\frac{1}{6\cdot10^{-2}} + \frac{5\cdot10^{-2}\cdot\ -10\ \cdot10^{-2}}{20\cdot10^{-5}} + \right.$$

$$\left. + \frac{12\cdot10^{-2}\cdot\ -15\ \cdot10^{-2}}{45\cdot10^{-5}}\right] = 72{,}5\cdot10^{4}\ \text{Па}.$$

Эпюра напряжений показана на рис. 8.3, *б*.

Проверим столб на прочность и получим

$$\sigma_{\max} = 72{,}5\cdot10^{4}\ \text{Па} \le\ \sigma_{P}\ = 100\cdot10^{4}\ \text{Па},$$

$$\left|\sigma_{\min}\right| = 122{,}5\cdot10^{4}\ \text{Па} \le\ \sigma_{C}\ = 200\cdot10^{4}\ \text{Па}.$$

Условия прочности удовлетворяются.

Ядро сечения. Из формул (8.11) и (8.12) следует, что нейтральная линия может находиться в пределах сечения (в зависимости от положения точки приложения силы), касаться его или находиться вне сечения. В двух последних случаях в сечении возникают напряжения одного знака. Это обстоятельство может иметь значение для материалов, сопротивляющихся по разному растяжению и сжатию. Некоторые материалы (например, бетон, кирпич, камень) имеют высокое сопротивление сжатию и весьма незначительное – растяжению. Поэтому их следует нагружать так, чтобы в сечениях возникали только сжимающие напряжения. Для этого необходимо размещать полюс таким образом, чтобы нейтральная линия не пересекала сечения.

Ядро сечения – это область вокруг центра тяжести сечения, в которой приложенная внешняя сила вызывает в сечении напряжения одного знака.

Если сила касается границы ядра, то нейтральная линия должна касаться контура сечения. Если полюс находится вне ядра или внутри его, то нейтральная линия размещается соответственно внутри контура сечения или вне его. Построение ядра сечения ведется на основе уравнений (8.11) и (8.12), меняя местами $y_{\text{Н.О.}}$ и y_C, $z_{\text{Н.О.}}$ и z_C и определяя таким образом координаты полюса по отрезкам y и z, отсекаемым на осях координат. При этом задается несколько положений нейтральной линии (рис. 8.4).

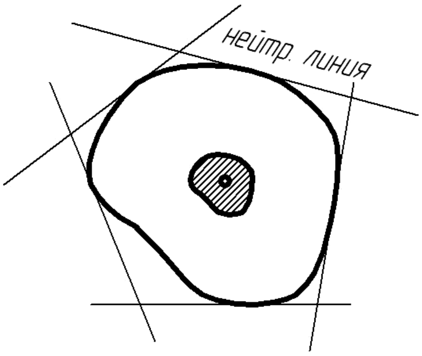


Рис. 8.4

Пример. Найти границы ядра сечения прямоугольной формы со сторонами h и b (рис. 8.5).

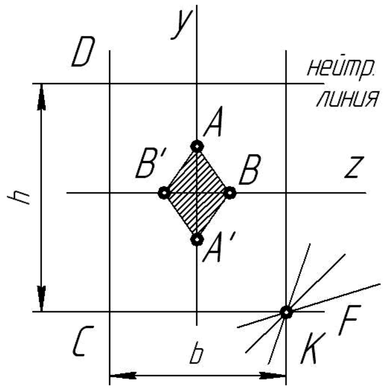


Рис. 8.5

Решение. Проведем нейтральную линию, совпадающую с нижним основанием *CK* прямоугольника (рис. 8.5). Отрезки, отсекаемые ею на осях, равны $y = h/2$ и $z = \infty$. Подставим эти значения в уравнения (8.11) и (8.12) и получим координаты полюса y_0 и z_0 (точка *A*):

$$A = bh, \quad I_Z = \frac{bh^3}{12}, \quad i_Z^2 = \frac{I_Z}{A} = \frac{bh^3/12}{bh} = \frac{h^2}{12},$$

$$z_0 = 0, \quad y_0 = \frac{h^2/12}{h/2} = \frac{h}{6}.$$

Очевидно, что при расположении нейтральной линии на верхней части прямоугольника

$$y_0 = -h/6, \quad z_0 = 0,$$

(координаты точки *A*').

Совместим нейтральную линию с левой стороной (*CD*) прямоугольника. Получим отрезки $y = \infty$ и $z = -b/2$. Тогда и координаты полюса (точка *B*, рис. 8.5) будут равны

$$y_0 = 0, \; I_y = \frac{hb^3}{12}, \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{hb^3/12}{bh} = \frac{b^2}{12}, \quad z_0 = b/6.$$

При совмещении нейтральной линии с правой стороной сечения координаты полюса *B* будут равны $y_0 = 0$, $z_0 = -b/6$.

Решим теперь вопрос об очертании линий между точками *A* и *B*, *B* и *A*', *A*' и *B*', *B*' и *A*. Например, для отрезка *AB*' нейтральная линия будет касаться нижнего правого угла сечения, принимая множество положений. Так как напряжения на ней равны нулю, то для ее точки *K* (с координатами $y = -h/2, z = +b/2$) $\sigma = 0$.

Из уравнения (8.9) следует

$$\frac{1}{bh} - \frac{y_0 b/2}{bh^3/12} = \frac{z_0 b/2}{hb^3/12} = 0$$

или

$$1 - \sigma\frac{y_0}{h} + \sigma\frac{z_0}{b} = 0.$$

Если рассматривать y_0 и z_0 как переменные, то становится очевидным, что при вращении нейтральной линии около неподвижной точки приложенная сила *F* должна перемещаться по прямой *AB*', то же относится и к другим отрезкам. Таким образом, ядро сечения представляет из себя ромб. Аналогично рассуждая, можно получить ядро сечения для круга (рис. 8.6, *а*), швеллера (рис. 8.6, *б*) и др.

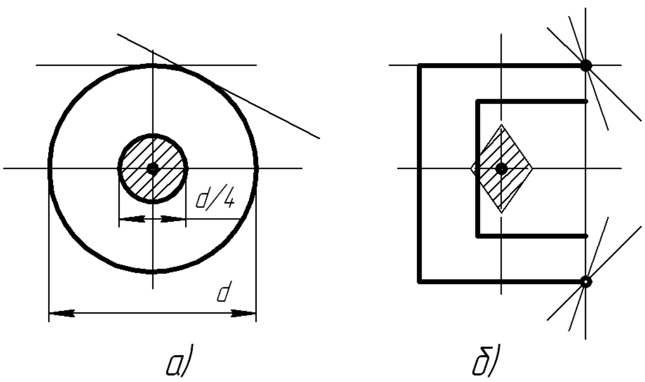


Рис. 8.6

Следует учесть, что для сечений, имеющих внутренние углы, нейтральная линия обкатывается только по наружному контуру, не пересекая сечения (рис. 8.6, *б*), так как все сечение должно находиться в зоне действия напряжений, имеющих один знак.

8.3. Изгиб с кручением бруса круглого поперечного сечения

Такой вид нагружения возникает, как правило, от действия собственного веса, веса шкивов и шестерен, за счет натяжения ремней, передающих крутящий момент и вращение. Изгиб с кручением в брусьях некруглого поперечного сечения встречается редко.

Рассмотрим брусья большой жесткости. Тогда влиянием прогибов на напряженное состояние от действия крутящих моментов можно пренебречь. Точно так же можно пренебречь влиянием искривлений сечений от крутящих моментов на напряженное состояние, возникающее от изгиба. Иными словами, данный вид нагружения можно рассматривать как совокупность двух независимых нагружений – кручения и изгиба. Нормальные напряжения при этом будут зависеть только от параметров изгиба, а касательные будут равны сумме касательных напряжений от изгиба и кручения.

При расчете валов, работающих на изгиб с кручением, необходимо в первую очередь установить законы изменения по длине изгибающих и крутящих моментов; далее найти опасное сечение, а в его пределах найти опасную точку и определить в ней нормальные и касательные напряжения. Затем проводится расчет на прочность.

Если изгибающие моменты действуют в различных плоскостях, например, M_y в плоскости *zOx* и M_z в плоскости *yOx* (рис. 8.7), то результирующий момент рассчитывается по правилам векторной алгебры

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \tag{8.14}$$

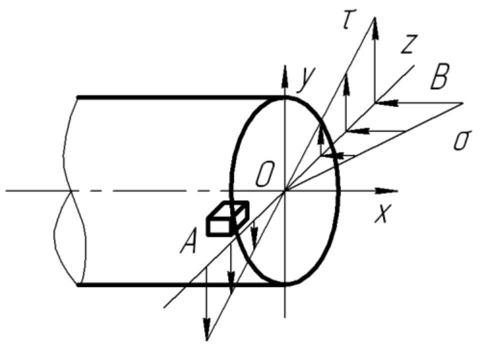


Рис. 8.7

Опасное сечение вала устанавливается по эпюрам полных изгибающих и крутящих моментов. Если в сечении вала постоянного диаметра с наибольшим изгибающим моментом $|M|$ действует и наибольший крутящий момент $\left|M_{к}^{\max}\right|$, то это сечение является опасным.

Если же $|M|$ и $\left|M_{к}^{\max}\right|$ возникают в разных поперечных сечениях, то опасным сечением может быть любое, где ни $|M|$, ни $|M_{к}|$ не являются наибольшими. Если диаметр переменный, то опасным может оказаться сечение, в котором действуют значительно меньшие изгибающие и крутящие моменты. В случаях, когда опасное сечение нельзя установить по эпюрам M и $M_{к}$, приходится проверять прочность вала в нескольких его сечениях и таким путем устанавливать опасное напряжение.

Опасные точки в сечении бруса находятся по напряжениям, которые возникают в результате действия изгибающего и крутящего моментов. В брусьях круглого поперечного сечения, длина которых намного больше их диаметра, наибольшие касательные напряжения от поперечной силы невелики и в расчетах не учитываются.

На рис. 8.7 показано поперечное сечение с нормальными и касательными напряжениями, возникающими соответственно вследствие изгиба и кручения. Ось y – нейтральная ось, изгибающий момент действует в плоскости zOx. Нормальные напряжения определяются по формуле изгиба (7.18)

$$\sigma = M_z y / I_z,$$

где I_z – осевой момент инерции сечения. Эпюра напряжений σ показана рис. 8.7. Наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения возникают в точках A и B, где радиальная координата принимает максимальное значение $z = d/2$ (см. рис. 8.7).

Тогда

$$\sigma_A = -\sigma_B = M/W_y, \tag{8.15}$$

где W_y – момент сопротивления сечения изгибу.

Касательные напряжения, вызванные кручением, определяются по формуле (4.9)

$$\tau = \frac{M_{к}\rho}{I_\rho}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают в крайних точках сечения, где $\rho = d/2$, тогда

$$\tau_{\max} = M_к \big/ W_\rho = M_к \big/ \ 2W_y \ , \qquad (8.16)$$

где ρ – расстояние от центра сечения до рассматриваемой точки; I_ρ и W_ρ – полярный момент инерции и момент сопротивления сечения.

Если материал пластичный, то опасными являются обе точки A и B. В хрупком материале опасной является та точка, в которой возникают максимальные растягивающие напряжения, так как хрупкий материал хуже сопротивляется растяжению, чем сжатию.

Напряженное состояние элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности точки A, показано на рис. 8.8. По граням параллелепипеда, совпадающим с поперечным сечением бруса, действуют нормальные и касательные напряжения, а на верхних и нижних гранях – только касательные (по закону парности). Остальные две грани свободны от напряжений. Таким образом, имеем случай плоского напряженного состояния.

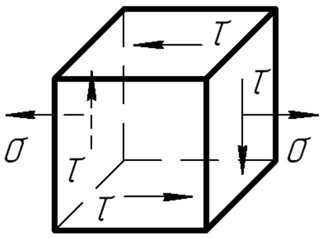


Рис. 8.8

Главные напряжения $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ определяются из соотношения (6.10, гл. 6) и будут

$$\sigma_{\min}^{\max} = \sigma/2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

откуда

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \sigma/2 + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_2 = 0, \qquad (8.17)$$

$$\sigma_3 = \sigma_{\min} = \sigma/2 - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Расчет на прочность при изгибе с кручением ведется с применением теорий прочности. Для валов из пластичных материалов используется третья или четвертая теории прочности, а для валов из хрупких материалов – теория прочности Мора.

В соответствии с третьей теорией прочности (гл. 3)

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \le \sigma \ ,$$

или, с учетом (8.17),

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le \sigma \ .$$

Подставив значения σ и τ для опасной точки из уравнений (8.15) и (8.16), получим:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{M/W_y{}^2 + 4\left[M_к/\ 2W_y\right]^2} = \frac{\sqrt{M^2 + M_к^2}}{W_y} \le \sigma \ . \qquad (8.18)$$

По четвертой теории прочности

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\ \sigma_1 - \sigma_2{}^2 + \ \sigma_2 - \sigma_3{}^2 + \ \sigma_3 - \sigma_1{}^2\right]} \le \sigma \ ,$$

или, с учетом (8.17),

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{M/W_y{}^2 + 3\left[M_к/\ 2W_y\right]^2} \le \sigma \ ,$$

или

$$\sigma_{экв} = \frac{\sqrt{M^2 + 0{,}75M_к^2}}{W_y} \le \sigma \ . \qquad (8.19)$$

По теории прочности Мора

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k\sigma_3 \le \sigma_P \ .$$

Подставляя σ_1 и σ_3 из формул (8.17), получим:

$$\frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le \sigma_P \ ,$$

$$\sigma_{экв} = \frac{1-k}{2}\frac{M}{W_y} + \frac{1+k}{2}\sqrt{M/W_y{}^2 + 4\ M_к/\ 2W_y{}^2} \le \sigma_P \ ,$$

или

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{W_y}\left(\frac{1-k}{2}M + \frac{1+k}{2}\sqrt{M^2 + M_к^2}\right) \le \sigma_P \;,$$

где

$$k = \sigma_P \,/\, \sigma_C \;.$$

Пример. Вал ременной передачи круглого поперечного сечения, вращающийся со скоростью $n = 1000$ об/мин, получает через шкив мощность $N = 28$ л.с. (рис. 8.9). Через другой шкив мощность вала снимается. Определить диаметр вала из расчета на прочность, используя четвертую теорию прочности. Угол наклона ветвей ремня ведущего шкива к горизонту равен 30°, ремня ведомого шкива -60°, $D_1 = 1$ м, $D_2 = 0{,}8$ м, $a = 1{,}2$ м, $b = 1$ м, $c = 1{,}5$ м, $\sigma = 80$ МПа. Весом вала и шкивов при расчете пренебречь.

Решение. Крутящийся момент на валу в зависимости от мощности и скорости вала определяется следующей формулой:

$$M_к = 716{,}2\frac{N_{\text{л.с.}}}{n_{\text{об/мин}}} = 716{,}2 \cdot \frac{28}{1000} = 20 \text{ кгм} = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Крутящий момент действует только на участке вала длиной $a + b$, т.е. между шкивами (рис. 8.9, a).

Определим усилие натяжения ветвей на ремнях:

– на ведущем шкиве

$$T_1 - t_1 \;=\; 2t_1 - t1 \;= t_1 = \frac{M_к}{D_1/2} = \frac{200}{0{,}5} = 400 \text{ Н};$$

– на ведомом шкиве

$$T_2 - t_2 \;=\; 2t_2 - t2 \;= t_2 = \frac{M_к}{D_2/2} = \frac{200}{0{,}4} = 500 \text{ Н}.$$

Давления на вал равны:

– на ведущем шкиве $P_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot 400 = 1200$ Н;

– на ведомом шкиве $P_2 = 3 \cdot t_2 = 3 \cdot 500 = 1500$ Н.

Вертикальные и горизонтальные составляющие давлений изгибают вал соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскостях и будут

$$P_{1_y} = P_1 \cdot \sin 30^\circ = 1200 \cdot 0{,}5 = 600 \text{ Н},$$

$$P_{1_z} = P_1 \cdot \cos 30^\circ = 1200 \cdot 0{,}87 = 1040 \text{ Н},$$

$$P_{2_y} = P_2 \cdot \sin 60^\circ = 1500 \cdot 0{,}87 = 1300 \text{ Н},$$

$$P_{2_z} = P_2 \cdot \cos 60^\circ = 1500 \cdot 0{,}5 = 750 \text{ Н}.$$

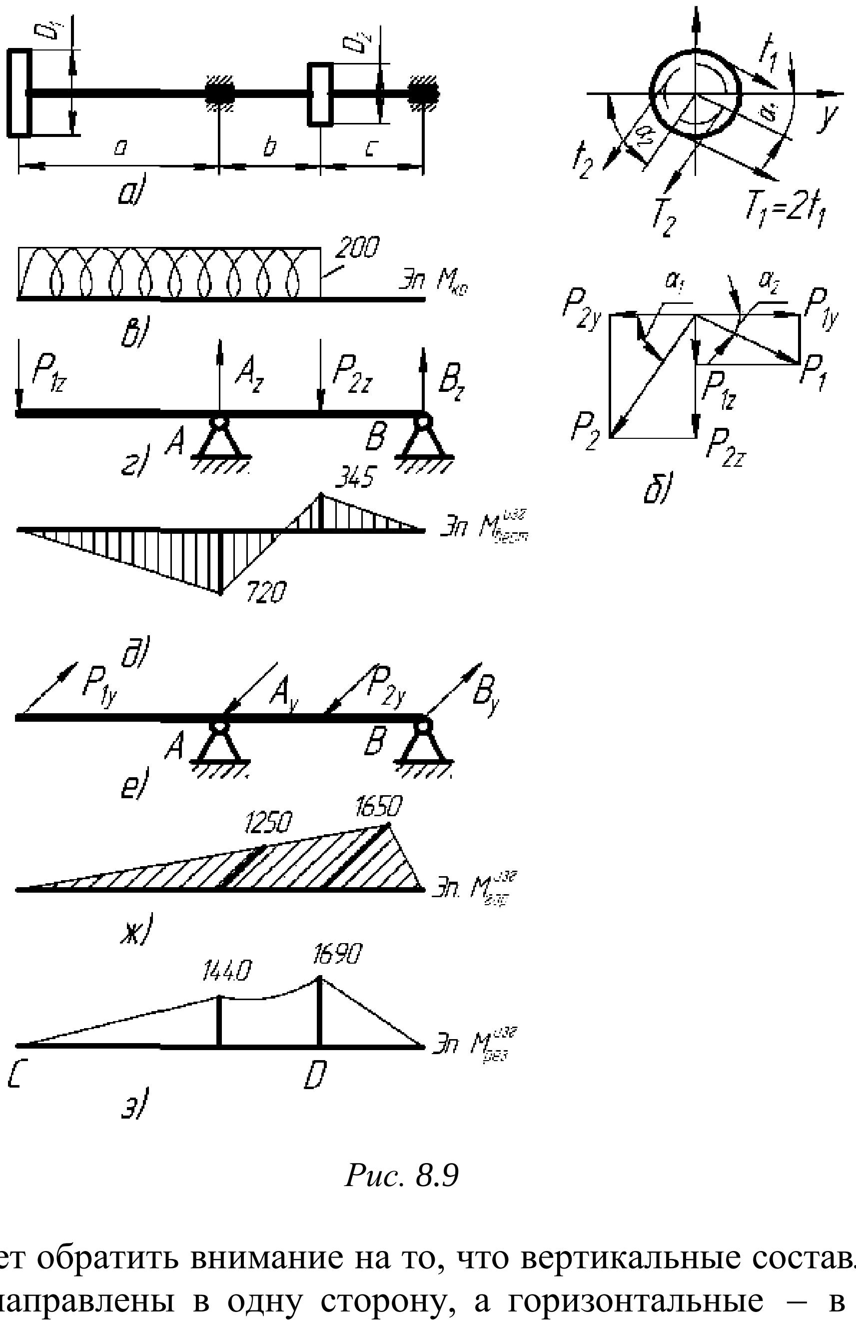


Рис. 8.9

Следует обратить внимание на то, что вертикальные составляющие давлений направлены в одну сторону, а горизонтальные – в разные. Схема сил, изгибающих вал в вертикальной плоскости, представлена на рис. 8.9, *г*.

Найдем вертикальные составляющие реакций подшипников вала:

$$\sum M_A = P_{1_y} \cdot a - P_{2_y} \cdot b + B_y \cdot (b+c) = 0,$$

$$\sum M_B = P_{1_y} \cdot (a+b+c) - A_y \cdot (b+c) + P_{2_y} \cdot c = 0,$$

откуда

$$B_y = \frac{P_{2_y} \cdot b - P_{1_y} \cdot a}{b+c} = \frac{1300 \cdot 1 - 600 \cdot 1{,}2}{2{,}5} = 230 \text{ Н},$$

$$A_y = \frac{P_{1_y} \cdot (a+b+c) + P_{2_y} \cdot c}{b+c} = \frac{600 \cdot 3{,}7 + 1300 \cdot 1{,}5}{2{,}5} = 1670 \text{ Н}.$$

Проверка:

$$\sum Y = A_y - P_{1_y} - P_{2_y} + B_y = 1670 - 600 - 1300 + 230 = 0.$$

Изгибающий момент M от сосредоточенных сил меняется по линейному закону, поэтому достаточно вычислить его значение в граничных сечениях трех участков нагружения:

$$M_{y_C} = 0, \quad M_{y_B} = 0,$$

$$M_{y_A} = -P_{1_y} a = -600 \cdot 1{,}2 = -720 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{y_D} = B_y c = 230 \cdot 1{,}5 = 345 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Эпюра M в вертикальной плоскости представлена на рис. 8.9, *д*. Схема сил, изгибающих вал в горизонтальной плоскости, представлена на рис. 8.9, *е*.

Горизонтальные составляющие реакций подшипников вала равны

$$\sum M_A = B_z \cdot (b+c) - P_{1_z} \cdot a - P_{2_z} \cdot b = 0,$$

$$\sum M_B = A_z \cdot (b+c) - P_{1_z} \cdot (a+b+c) + P_{2_z} \cdot c = 0,$$

откуда

$$B_z = \frac{P_{1_z} \cdot a + P_{2_z} \cdot b}{b+c} = \frac{1040 \cdot 1{,}2 + 1500 \cdot 1}{2{,}5} = 1100 \text{ Н},$$

$$A_z = \frac{P_{1_z} \cdot (a+b+c) - P_{2_z} \cdot c}{b+c} = \frac{1040 \cdot 3{,}7 - 1500 \cdot 1{,}5}{2.5} = 640 \text{ Н}.$$

Проверка:

$$\sum Z = P_{1_z} - A_Z - P_{2_z} + B_z = 1040 - 640 - 1500 + 1100 = 0.$$

Построим эпюру в горизонтальной плоскости (рис. 8.9, *ж*)

$$M_{z_C} = 0, \quad M_{z_B} = 0,$$

$$M_{z_A} = -P_{1_z} a = 1040 \cdot 1{,}2 = 1250 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{z_D} = B_z c = 1100 \cdot 1{,}5 = 1650 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Результирующий изгибающий момент в любом сечении вала определяется по формуле

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$

Эпюра изгибающих моментов M представлена на рис. 8.9, *з*. Плоскости действия полных изгибающих моментов в разных сечениях вала различны, но для круглого сечения вала, ввиду того, что любая его центральная ось является главной осью инерции, можно совместить плоскости действия для всех поперечных сечений с плоскостью чертежа, тогда

$$M_A = \sqrt{(-720)^2 + 1250^2} = 1440 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad M_B = 0 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_C = 0 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad M_D = \sqrt{345^2 + 1650^2} = 1690 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Как видно из эпюр M и $M_к$, опасным является сечение, где закреплен второй шкив. В соответствии с четвертой теорией прочности расчетное соотношение при совместном действии изгиба и кручения имеет вид

$$\sigma_{экв}^{IV} = \frac{\sqrt{M^2 + 0{,}75 \cdot M_к^2}}{W_z} \leq \sigma ,$$

$$W_z = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75 \cdot M_к^2}}{\sigma} = \frac{\sqrt{1690^2 + 0{,}75 \cdot 200^2}}{80 \cdot 10^6} = 21 \cdot 10^6 \text{ м}^3 = 21 \text{ см}^3.$$

Для круглого сечения

$$W_z = 0{,}1 \cdot d^2, \quad d = \sqrt[3]{21/0{,}1} = 5{,}49 \text{ см}.$$

Диаметр вала принимаем равным 6 см.

Для сравнения определим диаметр вала по третьей теории прочности

$$\sigma_{экв}^{III} = \frac{\sqrt{M^2 + M_к^2}}{W_z} \leq \sigma \ ,$$

$$W_z = \frac{\sqrt{M^2 + M_к^2}}{\sigma} = \frac{\sqrt{1690^2 + 200^2}}{80 \cdot 10^6} = 21{,}2 \text{ см}^3,$$

$$d = \sqrt[3]{21{,}2/0{,}1} = 5{,}96 \text{ см} \approx 6 \text{ см}.$$

Как видно из этого примера, разница в расчетах по третьей и четвертой теориям прочности незначительна.

Расчет ломаного бруса. *Ломаным* брусом называют брус, ось которого представляет собой ломаную линию.

Пример. Для ломаного бруса, изображенного на рис. 8.10, необходимо построить эпюры изгибающих и крутящих моментов.

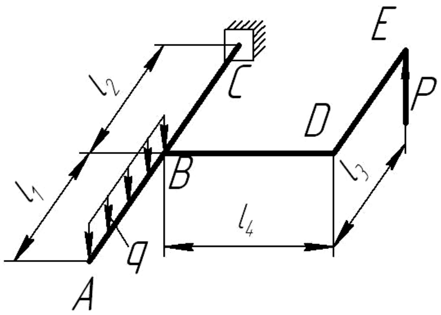


Рис. 8.10

Решение. Каждый участок ломаного бруса жестко прикреплен к последующему. Это позволяет рассматривать участки l_1, l_2, l_3, l_4 (рис. 8.10) как консольные, жестко защемленные в месте крепления к следующему участку. Анализ бруса упрощается при использовании принципа независимости действия сил. Представим расчетную схему в виде двух схем с независимо действующими нагрузками P и q (рис. 8.11). Из схемы (рис. 8.11, *а*) видно, что на участках DE и DB нагрузка q отсутствует.

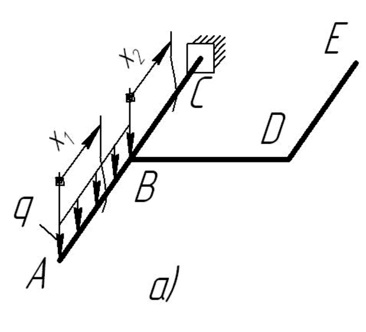


Рис. 8.11

На участках *AB* и *BC* под действием равномерно распределенной нагрузки происходит изгиб

$$M_{x_1} = qx^2/2 \quad 0 < x_1 < l_1 \ ,$$

$$\text{при} \quad x_1 = 0 \quad M_{x_1} = 0, \quad \text{при} \quad x_1 = l_1 \quad M_{x_1} = ql_1^2/2,$$

$$M_{x_2} = ql_1\left(\frac{l_1}{2} + x_2\right) \quad 0 < x_2 < l_2 \ ,$$

$$\text{при} \quad x_2 = 0 \quad M_{x_2} = ql_1^2, \quad \text{при} \quad x_2 = l_2 \quad M_{x_2} = ql_1\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right).$$

Эпюра изгибающих моментов от нагрузки q представлена на рис. 8.12.

Из схемы (рис. 8.11, *б*) видно, что на участке *AB* нагрузка отсутствует. На участке *DE* под действием силы *P* происходит изгиб. Сжаты верхние волокна

$$M_{x_3} = Px_3 \quad 0 < x_3 < l_3 \ ,$$

$$\text{при} \quad x_3 = 0 \quad M_{x_3} = 0, \quad \text{при } x_3 = l_3 \quad M_{x_3} = Pl_3.$$

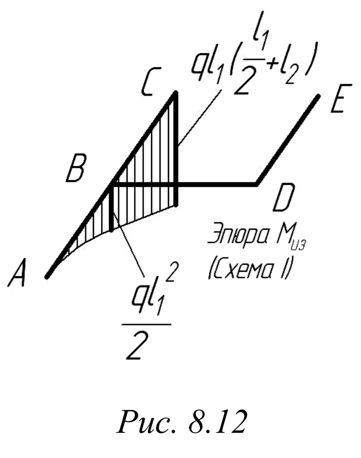


Рис. 8.12

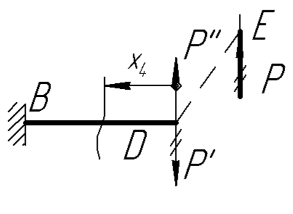


Рис. 8.13

Для определения деформаций, имеющих место на участке *BD*, прибегнем к следующему приему. К началу участка к точке *D* приложим две силы, равные *P* и противоположно направленные. Это ничего не меняет в схеме загрузки. Рассматривая систему трех сил, выделим пару *PP'*, которая вызывает на участке *BD* кручение. Сила *P''* вызывает изгиб (рис. 8.13). Эпюру изгибающих моментов строим на сжатых волокнах (рис. 8.15, *а*)

$$M = P''x_4 \quad (0 < x_4 < l_4),$$

$$\text{при} \quad x_4 = 0 \quad M_x = 0, \quad \text{при} \quad x_4 = l_4 \quad M_x = Pl_4.$$

Рассмотрим участок *BC* (рис. 8.14). Момент пары *PP''* переносим в своей плоскости на ось этого участка. Момент вызывает изгиб $M = Pl_3$. Оставшаяся сила *P''* вызывает изгиб и кручение на участке

$$0 < x_2 < l_4, \text{ тогда}$$

$$M_к = Pl_4, \quad M = +M - Px_2;$$

$$\text{при} \quad x_2 = 0 \quad M = M = Pl_3;$$

$$\text{при} \quad x_3 = l_2 \quad M = Pl_3 - Pl_2.$$

Эпюры изгибающих и крутящих моментов для схемы представлены на рис. 8.15, *б*. Суммируя значения изгибающих моментов, имеющихся на схемах *а* и *б* рис. 8.15, строим результирующую эпюру *M*.

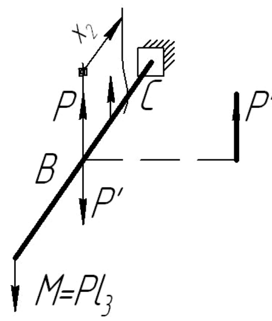


Рис. 8.14

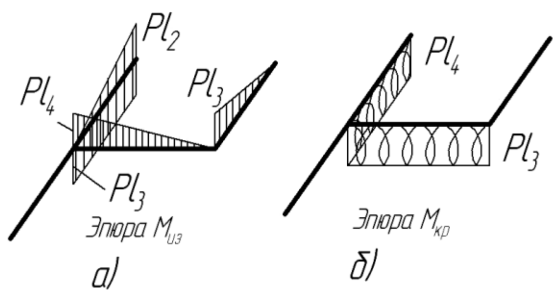


Рис. 8.15

Наиболее опасным является сечение, в котором расчетное значение моментов имеет максимальную величину

$$M^{IV}_{расч} = \sqrt{M^2 + 0{,}75 \cdot M_к^2}\,.$$

Глава 9

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

9.1. Понятие об устойчивости

Во всех предыдущих разделах для проверки прочности элементов конструкции, определения их поперечных размеров или грузоподъемности использовались условия прочности или жесткости, согласно которым максимальные напряжения или деформации не должны превышать допускаемых значений напряжений или деформаций.

Однако в ряде случаев нарушение работоспособности конструкций может произойти не только из-за нарушения прочности или жесткости, но и потому, что элементы не могут сохранить исходного равновесного состояния.

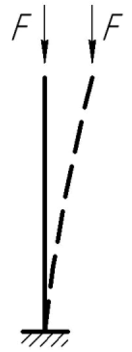


Рис. 9.1

Рассмотрим стержень, заделанный одним концом и нагруженный с другого конца возрастающей сжимающей силой (рис. 9.1). При определенной силе $F_{разр}$ в стержне возникнут необратимые деформации или произойдет разрушение его. Если приложить силу *F*, меньшую $F_{разр}$, или увеличить длину стержня, то при определенном значении последней стержень изогнется, потеряв прямолинейную форму (пунктирная линия на рис. 9.1). Причем это произойдет при напряжениях меньше предельных, вызывающих пластическое течение или разрушение.

В этом случае говорят о *потере устойчивости прямолинейной формы*, которая приводит к нарушению работоспособности конструкции. Под *устойчивостью* понимают свойство системы сохранять свое состояние при внешних воздействиях. Если система таким свойством не обладает, она называется *неустойчивой*.

9.2. Задача Эйлера

Потеря устойчивости центрально сжатого стрежня (рис. 9.1) является наиболее простым случаем. При достаточно большой силе стержень не может сохранить первоначальную форму равновесия и неминуемо изогнется.

На рис. 9.2 приведены и другие примеры потери устойчивости. Тонкостенная труба (рис. 9.2, *а*), нагруженная внешним давлением, способна потерять устойчивость. При этом круговая форма сечения переходит в эллиптическую, а затем труба полностью сплющивается, хотя напряжения к моменту потери устойчивости далеко не достигают предела текучести. Та же труба (рис. 9.2, *б*) может потерять устойчивость при нагружении крутящим моментом. Консольная балка (рис. 9.2, *в*) теряет устойчивость при действии поперечной силы.

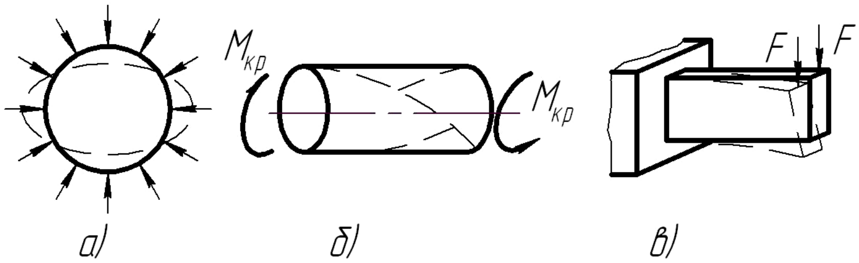


Рис. 9.2

Подобных примеров на практике очень много. Из сказанного следует, что при проектировании конструкций или при проверке существующих конструкций на прочность или жесткость следует проверять и устойчивость системы.

Рассмотрим задачу потери устойчивости на простейшем примере равновесия стержня, сжатого центральной силой F (рис. 9.3). Такой вид нагружения при потере устойчивости прямолинейной формы иногда называют *продольным изгибом*, а сама задача определения силы, вызывающей потерю устойчивости, – задачей Эйлера.

Наименьшее значение центрально приложенной сжимающей силы F, при которой прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой, называется *критической силой*. Соответствующее ей напряжение называется *критическим напряжением*.

Пусть стержень (рис. 9.3) под действием силы F изогнется. Рассмотрим условия, при которых этот стержень с изогнутой осью останется в равновесии. Предполагая деформации малыми, запишем приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M. \tag{9.1}$$

Изгиб стержня происходит в плоскости минимальной жесткости. Поэтому принимается $I=I_{\min}$.

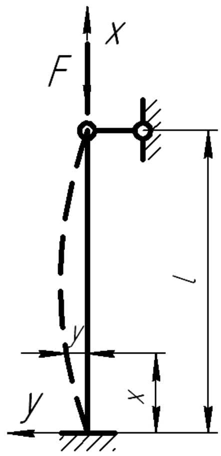


Рис. 9.3

В сечении, отстоящем на расстоянии *x* от нижнего конца (рис. 9.3), прогиб равен *y*, а изгибающий момент $M=-Fy$. Условимся считать положительным тот момент, который увеличивает кривизну. В данном случае, как видно из рисунка, сжимающая сила *F* увеличивает в алгебраическом смысле кривизну. Тогда уравнение (9.1) примет вид

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Fy,$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Fy}{EI}=0. \tag{9.2}$$

Обозначим $F/EI=k^2$, тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0. \tag{9.3}$$

Решение этого уравнения запишется в виде

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \qquad (9.4)$$

Постоянные C_1 и C_2 выбираются так, чтобы выполнялись граничные условия: при $y = 0$ $x = 0$ (в точке *A*); при $y = 0$ $x = l$ (в точке *B*).

Из первого условия следует $C_2 = 0$ (так как $\sin kx = 0$, $\cos kx = 1$). Тогда очевидно, что изогнутая ось стержня является синусоидой

$$y = C_1 \sin kx.$$

Из второго условия следует

$$0 = C_1 \sin kl. \qquad (9.6)$$

Это уравнение имеет два возможных решения: либо $C_1 = 0$, либо $\sin kl = 0$. Первое решение невозможно, так как в этом случае, как следует из (9.4), при всех значениях x прогиб равнялся бы нулю, т.е. стержень имел бы прямолинейную форму, что противоречит нашей задаче. Следовательно, остается второе решение

$$\sin kl = 0.$$

Это условие выполняется при значениях

$$kl = 0,\ \pi,\ 2\pi, \ldots, n\pi$$

или

$$kl = n\pi, \qquad (9.7)$$

где n – любое целое число. Тогда с учетом (9.2)

$$F = \frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2}. \qquad (9.8)$$

Из уравнения (9.8) видно, что нагрузка, способная удержать слегка искривленный стержень в равновесии, теоретически имеет ряд значений при $n = 1,\ 2, \ldots, \infty$. С практической точки зрения интерес представляет наименьшее значение сжимающей силы, которая вызывает потерю устойчивости прямолинейной формы. Полагая в выражении (9.8) $n = 1$, получим:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \qquad (9.9)$$

Эта сила называется *первой критической*, или *эйлеровой силой*.

При $n = 1$ имеем, согласно (9.7),

$$kl = \pi.$$

Тогда уравнение упругой линии принимает вид

$$y = C_1 \cdot \sin \pi x / l, \tag{9.10}$$

из которого видно, что стержень изгибается по полуволне синусоиды.

Определим постоянную C_1. Для этого в уравнении синусоиды (9.10) примем $x = l/2$, тогда

$$y_x = \pi/2 = y_{\max} = C_1.$$

Значит $C_1 -$ максимальный прогиб стержня посредине его длины.

9.3. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня

Формула Эйлера (9.9) получена для случая шарнирно-опертых концов стержня. Используя особенности упругой линии, довольно просто распространить полученное решение на другие случаи закрепления стержня. Так, если стержень длиной l (рис. 9.4, *а*) имеет одну заделку, то упругую линию его путем зеркального отображения относительно заделки можно привести к упругой линии стержня длиной $2l$ с двумя шарнирами. Тогда критическая сила для данного стержня будет такой же, как и для стержня с двумя шарнирно-опертыми концами длиной $2l$,

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}. \tag{9.11}$$

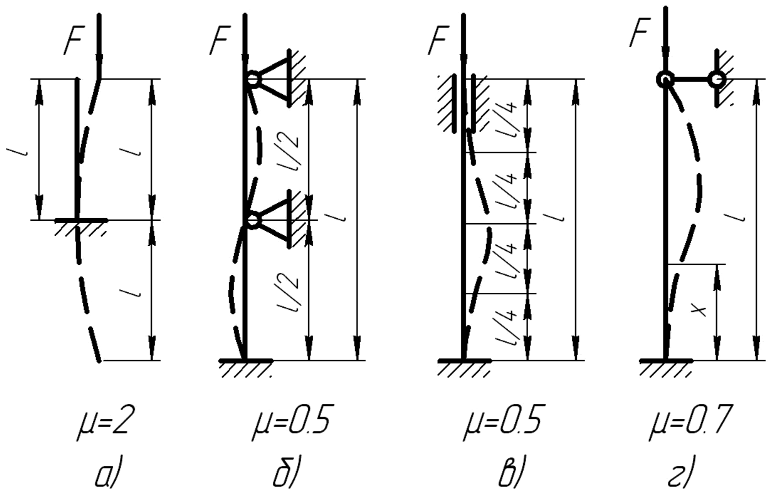


Рис. 9.4

Шарнирно опертый стержень с опорой посредине (рис. 9.4, *б*) при потере устойчивости изогнется по двум полуволнам. Следовательно, каждая его половина теряет устойчивость так же, как и стержень на рис. 9.3, но длиной $l/2$. Для такого стержня

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2}. \tag{9.12}$$

Соответственно, для случаев на рис. 9.4, *в* и 9.4, *г* критические силы равны

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2}, \tag{9.13}$$

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7l)^2}. \tag{9.14}$$

Общее выражение критической силы можно представить в виде

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \tag{9.15}$$

где μ – коэффициент приведения длины, зависящей, как видно из формул (9.9), $(9.11) \div (9.14)$, от способа закрепления концов стержня.

9.4. Критические напряжения и пределы применимости формулы Эйлера

По критической силе можно определить критическое сжимающее напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}.$$

Учитывая, что $I/A = i^2$ (i – радиус инерции сечения, A – площадь сечения), и принимая:

$$\frac{\mu l}{i} = \lambda, \tag{9.16}$$

получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{9.17}$$

где $\lambda -$ гибкость стержня. В уравнении (9.16) радиус инерции i берется минимальным, так как изгиб при потере устойчивости происходит относительно оси с $I_{\min}$.

Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности. Формулы, приведенные в предыдущем разделе, справедливы при напряжениях $\sigma_{кр}$, не превышающих предела пропорциональности $\sigma_{пц}$. Иначе говоря, формулы действительны в пределах применимости закона Гука. Подставим в это неравенство значение критического напряжения из (9.17) и получим

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц},$$

откуда

$$\lambda \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}.$$

Найдем ту наименьшую гибкость $\lambda_{пред}$, начиная с которой можно применять формулу Эйлера

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{E / \sigma_{пц}}. \tag{9.18}$$

Предельная гибкость зависит, как видно из (9.18), только от физико-механических свойств материала стержня E и $\sigma_{пц}$. Так, для стали Ст3 с $E = 2{,}0 \cdot 10^5$ МПа и $\sigma_{пц} = 200$ МПа $\lambda_{пред} \approx 100,$ для дерева $\lambda_{пред} \approx 110,$ для чугуна $\lambda_{пред} \approx 80,$ для некоторых марок легированной стали $\lambda_{пред} \approx 60 \div 70$. Условие применимости формулы Эйлера с учетом выражения (9.18) можно представить в виде

$$\lambda = \mu l / i \ge \lambda_{пред}. \tag{9.19}$$

При гибкости стержня, меньшей предельной, $\sigma_{кр}$ получается выше предела пропорциональности. Например, при $\lambda = 80$ для стали Ст3 имеем

$$\sigma_{кр}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}=\frac{\pi^2 2\cdot 10^5\ \text{МПа}}{80^2}=308\ \text{МПа},$$

что значительно превышает предел пропорциональности стали Ст3 ($\sigma_{пц}=200$ МПа).

Для определения критических напряжений таких стержней профессором Ф.С. Ясинским была предложена следующая эмпирическая формула:

$$\sigma_{кр}=a-b\lambda, \tag{9.20}$$

где a, b – коэффициенты, зависящие от свойств материала. Для стали Ст3 эти коэффициенты равны $a\approx 310$ МПа, $b=1{,}14$ МПа. Соотношение (9.20) применимо для стержней из малоуглеродистой стали при гибкости $\lambda=40\div 100$. При $\lambda=0\div 40$ считается, что $\sigma_{кр}=\sigma_{\text{Т}}$ и расчет напряжений следует вести по формулам растяжения – сжатия.

На рис. 9.5 приведен график, изображающий зависимость $\sigma_{кр}$ от гибкости стержня из стали Ст3. На участке $\lambda=0\div 40$ напряжение $\sigma_{кр}$ имеет постоянное значение; на участке $\lambda=40\div 100$ оно меняется по линейному закону, определяемому формулой Ясинского; при $\lambda>100$ напряжение определяется по формуле Эйлера.

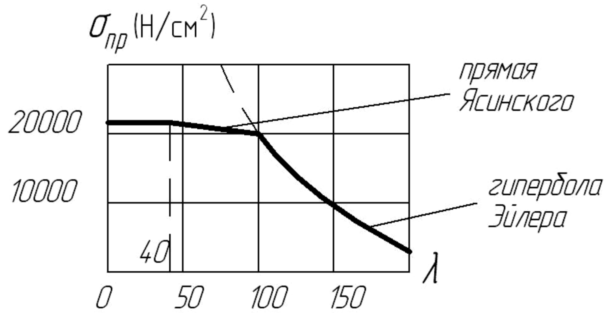


Рис. 9.5

9.5. Практические расчеты стержней на устойчивость

Для сжатых стержней, кроме условия прочности, должно быть удовлетворено условие устойчивости, которое выражается следующим неравенством:

$$\sigma=F/A_{брутто}\le[\sigma_y], \tag{9.21}$$

где $[\sigma_y]$– допускаемое напряжение при расчете на устойчивость; величина $A_{брутто}$– площадь поперечного сечения без учета местных ослаблений (заклепочных или болтовых отверстий). Эти ослабления располагаются, как правило, на небольших участках, малы по размерам и на потерю устойчивости не влияют.

Допускаемое напряжение $[\sigma_y]$ определяется из формулы

$$[\sigma_y] = \sigma_{кр} / [n_y]. \tag{9.22}$$

Здесь $[n_y]$– коэффициент запаса устойчивости, который зависит от материала стержней и гибкости. Во всех случаях он принимается более высоким, чем коэффициент запаса прочности. Допускаемое напряжение $[\sigma_y]$ может быть также выражено и через допускаемое напряжение $[\sigma_{сж}]$:

$$[\sigma_y] = \varphi\,[\sigma_{сж}], \tag{9.23}$$

где φ– коэффициент продольного изгиба. Он зависит от материала и гибкости стержней и приводится в таблицах учебников и справочников по сопротивлению материалов.

С учетом (9.23) условие устойчивости (9.21) принимает вид

$$\sigma = F / A_{брутто} \le \varphi\,[\sigma_{сж}]. \tag{9.24}$$

Таким образом, расчет сжатых стержней на устойчивость может быть сведен к расчету стержня на простое сжатие, но по заниженному допускаемому напряжению.

Решение задач устойчивости рассмотрим на примерах.

Пример 1. Дан чугунный стержень (рис. 9.6) с $l = 1{,}0$ м, $a = 6$ см, $t = 2$ см и $[\sigma_{сж}] = 180$ МПа. Определить допускаемую нагрузку.

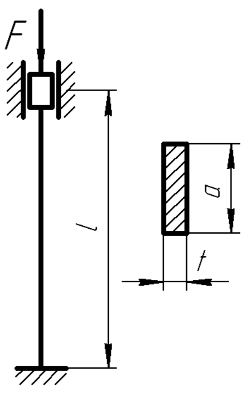


Рис. 9.6

Решение. Момент инерции сечения стержня

$$I_{\min} = \frac{at^3}{12} = \frac{6\cdot 2^3}{12} = 4\ \text{см}^4,$$

площадь поперечного сечения

$$A = at = 6\cdot 2 = 12\ \text{см}^2,$$

радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A} = \sqrt{4/12} = 0{,}58\ \text{см}.$$

При заданном способе закрепления концов стержня коэффициент приведения длины $\mu = 0{,}5$. Предельное значение величины гибкости для чугуна $\lambda_{пред} = 80$. Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu}{i_{\min}} = \frac{0{,}5\cdot 1{,}0}{0{,}58\cdot 10^{-2}} = 86.$$

Так как $\lambda > \lambda_{пред}$, то дальнейший расчет следует вести по формулам устойчивости. Найдем коэффициент предельного изгиба по таблицам, используя метод интерполяции. Для чугуна $\lambda = 86$ коэффициент продольного изгиба $\varphi = 0{,}224$.

Тогда из условия устойчивости (9.24) находим

$$F = \varphi\,[\sigma_{сж}]A_{брутто} = 0{,}224\cdot 180\cdot 10^6\cdot 12\cdot 10^{-4} = 48380\,\text{Н}.$$

Пример 2. Подобрать размеры поперечного сечения стойки длиной $l = 2{,}6$м, если она центрально сжата силой $F = 30$ кН (рис. 9.7). Материал стойки – сталь Ст3 ($[\sigma_{сж}] = 160$ МПа $= 16000$ Н/см^2).

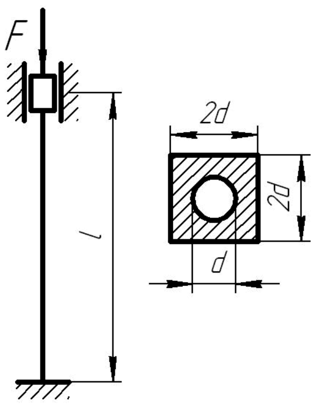


Рис. 9.7

Решение.

1. Выразим основные геометрические характеристики сечения стойки и гибкость через размер поперечного сечения *d*.

Моменты инерции сечения $I_z = I_y$, так как сечение симметрично.

$$I_z = I_y = \frac{2d(2d)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 1{,}286 d^4.$$

Площадь сечения

$$A = 4d^2 - \pi d^2 / 4 = 3{,}215 d^2.$$

Радиус инерции сечения

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{1{,}286 d^4}{3{,}215 d^2}} = 0{,}6327 d.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0{,}5 \cdot 260}{0{,}6327 d} = \frac{205{,}4}{d}.$$

Напрямую из условия устойчивости определить *d* нельзя, так как без размера *d* нельзя определить гибкость λ, а следовательно, нельзя найти φ. Поэтому расчет ведется итерационно в следующем порядке:

1) задают начальные значения коэффициента φ: $\varphi_0 = 0{,}5 \div 0{,}8$;

2) устанавливают $[\sigma_y]$, определяют площадь сечения $A = F / [\sigma_y]$, вычисляют размер сечения *d*;

3) находят I, i, λ;

4) по этим данным из таблиц находят новое значение коэффициента продольного изгиба φ_1.

Если φ_1 значительно отличается от φ_0, то в качестве второго приближения берут $\varphi_2 = (\varphi_0 + \varphi_1)/2$ и расчет повторяется. Сечение считается подобранным, если σ и $[\sigma_y]$ отличаются не более, чем на 5 %.

2. Расчет методом последовательных приближений. Условие прочности с учетом потери устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} \le [\sigma_c], \qquad A = \frac{F}{\varphi\, [\sigma_c]} = 3{,}215 d^2.$$

Задаемся величиной коэффициента $\varphi_0 = 0{,}5$. Тогда

$$d=\sqrt{\frac{37{,}5}{3{,}215}}=3{,}4\ \text{см},\qquad \lambda=\frac{205{,}4}{3{,}4}=60{,}4,$$

$$A=\frac{F}{\varphi\,[\sigma_c]}=\frac{300\ \text{Н}}{0{,}5\cdot 160\cdot 10^6\ \text{Н/м}^2}=0{,}00375\ \text{м}^2=37{,}5\ \text{см}^2,$$

$$i_{\min}=0{,}6327\cdot 3{,}4=2{,}17\ \text{см}.$$

3. По таблице для $\lambda=60{,}4$ путем линейной интерполяции находим $\varphi_1=0{,}86$. Действующее напряжение

$$\sigma=30000/0{,}86\cdot 37{,}5=96{,}4\cdot 10^6\ \text{Па},$$

следовательно, сечение существенно недогружено.

4. Делаем перерасчет исходя из среднего значения коэффициента

$$\varphi_2=\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}=\frac{0{,}5+0{,}86}{2}=0{,}68,\quad d=\sqrt{\frac{27{,}57}{3{,}215}}=2{,}927\ \text{см},$$

$$\lambda=\frac{295{,}4}{2{,}927}=70{,}2,\quad A=\frac{30000}{0{,}68\cdot 16000}=27{,}57\ \text{см}^2,$$

$$i=0{,}6327\cdot 2{,}927=1{,}852\ \text{см}.$$

Для $\lambda=70{,}2$ имеем коэффициент продольного изгиба $\varphi_3=0{,}81$. Действующее напряжение

$$\sigma=30000\big/0{,}81\cdot 27{,}57=134{,}3\cdot 10^6\,\text{Па}.$$

Недогрузка составляет

$$\frac{1600-1343}{1600}\cdot 100\ \%=16\ \%.$$

5. Допускается отклонение в пределах 5 %, поэтому делаем перерасчет.

$$\varphi_4=\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2}=\frac{0{,}68+0{,}81}{2}=0{,}745,\qquad d=\sqrt{\frac{27{,}16}{3{,}215}}=2{,}78\ \text{см},$$

$$\lambda=\frac{205{,}4}{2{,}78}=73{,}88,\quad A=\frac{30000}{0{,}745\cdot 16000}=25{,}16\ \text{см}^2,$$

$$i=0{,}6327\cdot 2{,}78=1{,}758\ \text{см}.$$

По таблице находим $\varphi_5 = 0,78$. Рабочее напряжение в стойке

$$\sigma = 30000 \big/ 0,78 \cdot 25,16 = 159,9 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Недогрузка составляет

$$\frac{1600 - 1529}{1600} \cdot 100\ \% = 4,43\ \%,$$

что вполне допустимо.

Окончательно принимаем в качестве поперечного размера стойки величину $d = 2,78$ см.

Глава 10

ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

10.1. Понятие об усталостной прочности

Многие детали машин и элементы конструкций испытывают в процессе работы напряжения, циклически меняющиеся во времени. К ним относятся, например, детали кривошипно-шатунного механизма двигателей внутреннего сгорания, оси подвижного состава, детали металлорежущих станков, электродвигателей и т.п. Совокупность последовательных значений напряжений за один период их изменения называется *циклом*.

Опыт показывает, что при переменных во времени напряжениях после некоторого числа циклов может наступить разрушение детали, в то время как при том же напряжении, действующем при статическом нагружении, разрушение не происходит.

Изменение напряжений во времени можно изобразить в виде графика с координатами $\sigma - t$ (рис. 10.1). Форма кривой может быть не только синусоидальной, как показано на рисунке. Однако, как показывают эксперименты, форма кривой не влияет на циклическую прочность. Прочность материала определяется в основном наибольшим и наименьшим напряжениями. Разрушение, вызванное многократным повторением переменных напряжений, называется *усталостным*.

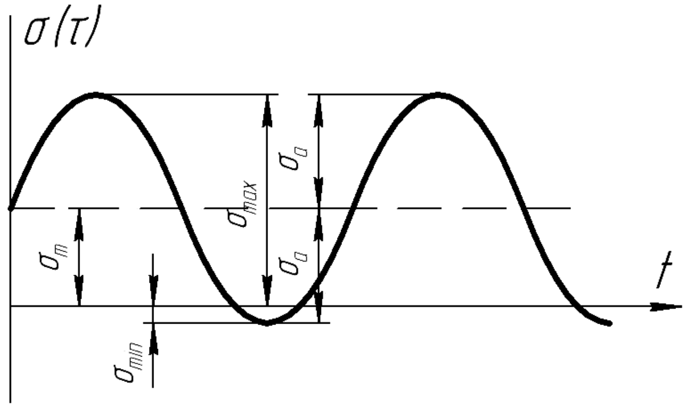


Рис. 10.1

10.2. Характеристики цикла и предел выносливости (усталости)

Цикл характеризуется следующими параметрами: максимальным ($\sigma_{\max}$), минимальным ($\sigma_{\min}$) и средним ($\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$) напряжениями, коэффициентом асимметрии цикла ($R_\sigma = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$) и амплитудой ($\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$).

Если $R_\sigma = -1 (\sigma_{\max} = -\sigma_{\min},\ \sigma_m = 0,\ \sigma_a = \sigma_{\max})$, то цикл называется *симметричным* (рис. 10.2, *а*). В остальных случаях циклы являются *асимметричными* (рис. 10.1, 10.2, *б*). Если $\sigma_{\min} = 0, (R_\sigma = 0)$ или $\sigma_{\max} = 0, (R_\sigma = \infty)$, то цикл называется *пульсационным* (рис. 10.2, *а*). Циклы, имеющие одинаковые значения коэффициента асимметрии $R_\sigma (R_\tau)$, называются *подобными*.

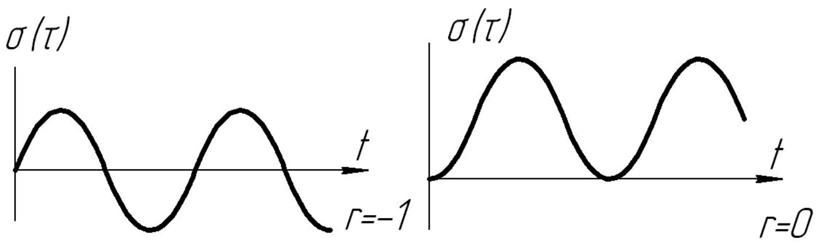


Рис. 10.2

Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений называют *выносливостью*, а проверку прочности элементов конструкций – *расчетом на выносливость*.

В качестве критерия усталостной прочности используется *предел выносливости* σ_R (или *предел усталости*) – максимальное напряжение цикла, при котором материал не разрушается при произвольно большом числе циклов. Эту величину определяют экспериментально на специальных испытательных машинах. Наиболее распространенными являются испытания в условиях симметричного цикла. При этом используется схема чистого изгиба вращающегося образца (рис. 10.3). Как видно, при вращении образца в одной и той же его зоне периодически меняются величина и знак напряжений.

Для испытаний выбирается не менее 10 образцов. В каждом из них задаются различные напряжения, начиная от напряжения немногим меньше предела текучести материала, и получают соответствующие значения числа циклов нагружений N, которое выдерживает каждый образец до разрушения. Значения заданных напряжений и соответствующего им числа циклов откладываются на графике $\sigma - N$ (рис. 10.4). Полученный график называется *кривой усталости* (*кривой Вёлера*). Асимптота этой кривой характеризует напряжение усталостного разрушения – предел выносливости.

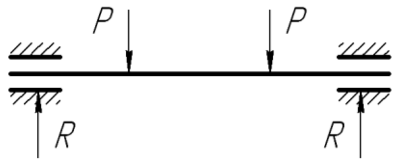


Рис. 10.3

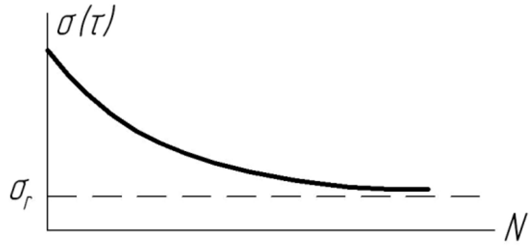


Рис. 10.4

Вполне очевидно, что при испытании образца невозможно получить бесконечно большое число циклов. Поэтому число циклов ограничивают некоторым пределом, который называют *базовым числом циклов*. Для стали и чугуна принимают базовое число, равное 10^7. Считается, что если образец выдерживает базовое число циклов, то напряжение в нем не выше предела выносливости σ_R. Если материал испытывается по схеме кручения, то характеристики цикла обозначаются $\tau_{\max}$, $\tau_{\min}$, τ_m, τ_a.

Экспериментальные данные говорят о том, что между пределом выносливости при различных видах деформации и пределами прочности и текучести существует зависимость. Например, для стали в случае симметричного цикла $(R_\sigma = R_\tau = -1)$ при растяжении–сжатии $\sigma_{-1} = 0{,}28\sigma_b$, при изгибе $\sigma_{-1} = 0{,}4\sigma_b$, при кручении $\tau_{-1} = 0{,}22\sigma_b$.

Для цветных металлов

$$\sigma_{-1} = (0{,}25 \div 0{,}5)\sigma_{\text{Т}}$$

Здесь σ_{-1} получены испытанием материалов с симметричным циклом нагружения и они непригодны для асимметричных циклов испытания образцов. Поэтому можно сказать, что предел выносливости является не только характеристикой материала (например, как модуль упругости, коэффициент Пуассона), но и характеристикой методов испытаний, а также ряда других факторов, таких, как концентрация напряжений, качество обработки поверхностей, масштабный фактор.

10.3. Основные факторы, влияющие на предел выносливости

10.3.1. *Концентрация напряжений*

Концентрацией напряжений называется местное повышение напряжений вблизи изменения формы тела в виде отверстий, выточек, надрезов, гантелей, переходов и т.п. Отношение максимального местного напряжения ($\sigma_{\max}$ или $\tau_{\max}$) к номинальному напряжению (σ или τ) в ослабленном концентратором месте при статической нагрузке называется *теоретическим коэффициентом концентрации напряжений*

$$K_\sigma^T = \frac{\sigma \max}{\sigma} \quad \text{и} \quad K_\tau^T = \frac{\tau \max}{\tau}.$$

Эти коэффициенты больше единицы и отражают влияние только геометрии на величину максимального внешнего напряжения.

При циклическом приложении нагрузки вводится понятие *эффективного коэффициента концентрации напряжений*

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1}^k} \quad \text{и} \quad K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1}^k},$$

где σ_{-1}, τ_{-1} – пределы выносливости при симметричном цикле для гладкого образца; σ_{-1}^k, τ_{-1}^k – пределы выносливости образца тех же размеров, но с концентраторами. Отношение

$$q = K_\sigma - 1 \Big/ K_\sigma^T - 1$$

называется *коэффициентом чувствительности материала к концентрации напряжений*. Для разных материалов коэффициент q изменяется в пределах от 0 до 1: для чугуна $q = 0$; для конструкционных сталей $q = 0{,}5 \div 0{,}8$; для сталей с $\sigma \geq 1300$ МПа $q \approx 1$. Так как q зависит также от формы и размеров тела, то в практических расчетах пользуются K_σ K_τ , установленными при натурных испытаниях.

10.3.2. *Масштабный фактор*

Масштабный фактор проявляется как влияние размеров тела на предел выносливости. Он оценивается масштабным коэффициентом $K_d < 1$, представляющим собой отношение предела выносливости образца данного диаметра D к пределу выносливости стандартного образца диаметром d и будет

$$K_d = \sigma_{-1\ D} \big/ \sigma_{-1\ d}.$$

Этот коэффициент приводится в справочниках, учебниках и пособиях по сопротивлению материалов.

10.3.3. *Качество обработки поверхности*

Влияние состояния поверхности на предел выносливости учитывается коэффициентом поверхностной чувствительности $K_F < 1$, который равен отношению предела выносливости образца с заданным состоянием поверхности (σ_{-1}) к пределу выносливости такого же образца, но с полированной поверхностью σ_{-1} и будет

$$K_F = \sigma_{-1} / \sigma_{-1}.$$

Этот коэффициент также приводится в литературе по сопротивлению материалов.

Влияние поверхностного наклепа, закалки, цементации, азотирования и других технологических факторов оценивается коэффициентом β, взятым из справочной литературы.

10.3.4. *Расчет на прочность при циклическом нагружении*

При симметричном цикле напряжений коэффициент запаса прочности устанавливается по величине предела выносливости

$$n = \frac{\varepsilon \sigma_r}{\sigma_{\max}}, \qquad n = \frac{\varepsilon \tau_r}{\tau_{\max}},$$

где $\sigma_{\max}$, $\tau_{\max}$ – максимальные номинальные напряжения в детали. Условие прочности представляется в виде

$$\sigma_{\max} \le \sigma_r , \qquad \tau_{\max} \le \tau_r ,$$

величина допускаемых напряжений

$$\sigma_r = \frac{\varepsilon \sigma_r}{n}, \qquad \tau_r = \frac{\varepsilon \tau_r}{n},$$

где n – допускаемый (рекомендуемый) коэффициент запаса. Принимается $n = 1,4 \div 3,0$.

При асимметричном цикле изменения напряжений с заданным коэффициентом асимметрии коэффициент запаса подсчитывается по методике, приведенной, например, в [6].

Глава 11

ИЗГИБ ПЛОСКОГО БРУСА БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

Кривым называется брус, геометрическая ось которого криволинейна. В данном разделе рассматриваются брусья, у которых геометрическая ось – плоская кривая, действующие внешние силы лежат в плоскости кривизны, материал подчиняется закону Гука, жесткость достаточно большая, чтобы применять принцип независимости действия сил.

11.1. Определение внутренних усилий в поперечных сечениях

Определение внутренних усилий в поперечных сечениях кривых брусьев – нормальных N, поперечных сил Q и изгибающих моментов M – ведется так же, как и для брусьев с прямолинейной осью. При этом в качестве осей x и y, на которые проецируются в данном сечении внешние силы, принимают касательную к оси бруса и нормаль к поперечному сечению.

Для внутренних усилий M, Q и N, действующих в поперечных сечениях кривого бруса, сохраняется правило знаков, принятое для прямых брусьев: положительным считается растягивающее усилие, поперечная сила Q положительна, если её направление совпадает с растягивающим усилием при повороте на 90° по часовой стрелке. Положительный изгибающий момент откладывается на вогнутой стороне бруса (на сжатых волокнах).

Рассмотрим пример вычисления M, N, Q. Дана плоская кривая балка с осью, очерченной по дуге окружности радиусом R (рис. 11.1, *а*). Балка нагружена силой $F = 4$ кН, наклоненной к вертикали под углом $\beta = 30^\circ$.

Для определения опорных реакций составим уравнения равновесия для моментов относительно шарниров A и B, а также сил, действующих вдоль оси координат x:

$$\sum M_B = R_A l - F\cos 30^\circ \frac{l}{2} Ff\sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum M_A = F\cos 30^\circ \frac{l}{2} - Ff\sin 30^\circ - R_B l = 0,$$

$$\sum X = -F\sin 30^\circ + H_B = 0,$$

откуда

$$R_A = F\left(\frac{\cos 30^\circ}{2} + \frac{f\sin 30^\circ}{l}\right) = 4\left(\frac{0{,}866}{2} + \frac{0{,}5\cdot 3}{10}\right) = 2{,}33\,\text{кН},$$

$$R_B = F\left(\frac{\cos 30^\circ}{2} - \frac{f\sin 30^\circ}{l}\right) = 4\left(\frac{0{,}866}{2} - \frac{0{,}5\cdot 3}{10}\right) = 1{,}13\,\text{кН},$$

$$H_B = F\sin 30^\circ = 2\,\text{кН}.$$

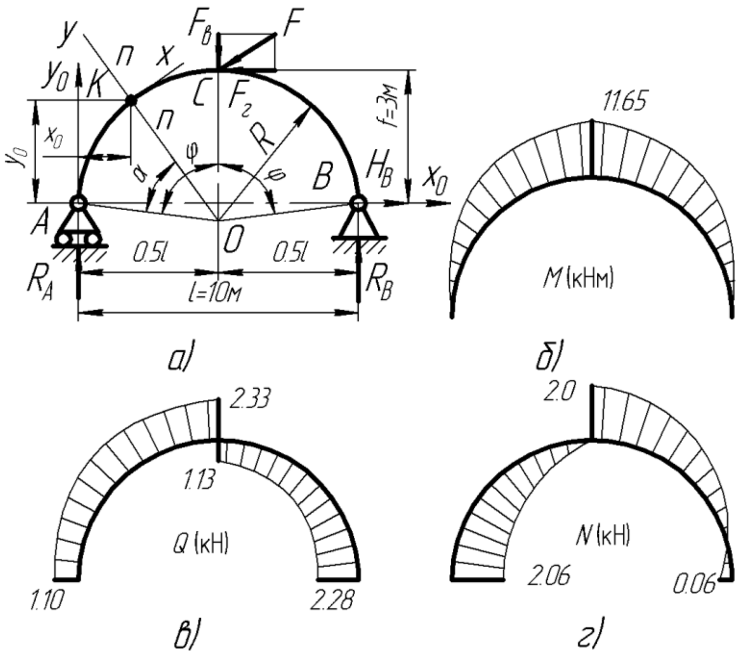


Рис. 11.1

В этих выражениях величины

$$F\cos 30^\circ = F_В = 3{,}46\,\text{кН}, \qquad F\sin 30^\circ = F_Г = 2\,\text{кН}$$

представляют собой соответственно вертикальную и горизонтальную составляющие силы *F*.

Определим радиус *R* оси балки и центрального угла φ. Как следует из рис. 11.1, *а*

$$\sin\varphi = \frac{l}{2R}, \quad \cos\varphi = \frac{R-f}{R},$$

тогда

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \left(\frac{1}{2R}\right)^2 + \left(\frac{R-f}{R}\right)^2 = 1.$$

Отсюда

$$l^2 + 4R^2 - 8Rf + 4f^2 = 4r^2,$$

$$R = \frac{l^2 + 4f^2}{8f} = \frac{10^2 + 4\cdot 3^2}{8\cdot 3} = 5{,}67\,\text{м},$$

$$\sin\varphi = \frac{l}{2R} = \frac{10}{2\cdot 5{,}67} = 0{,}882, \quad \varphi = 61^\circ 54'.$$

Балка имеет два силовых участка – *AC* (участок 1) и *CB* (участок 2). Проведем через произвольную точку *K* участка 1 поперечное сечение *n–n* под углом α к прямой *OA*. С сечением совместим ось *y* подвижной системы координат, ось *x* перпендикулярна к ней и касательна к оси балки в точке *K*. Координаты x_0, y_0 точки К в неподвижной системе координат равны

$$x_0 = 0{,}5l - R\sin\ \alpha - \varphi\ = 5 - 5{,}67\sin\ \alpha - \varphi\ ,$$

$$y_0 = f - R\ 1 - \cos\ \alpha - \varphi\ \ = 5{,}67\cos\ \alpha - \varphi\ - 2{,}67.$$

Составим уравнения изгибающих моментов, поперечных сил и продольных усилий для участка 1 и получим

$$M_1 = R_A x_0 = 2{,}33\ 5 - 5{,}67\sin\ \alpha - \varphi\ \ = 11{,}67 - 12{,}21\sin\ \alpha - \varphi\ ,$$

$$Q_1 = R_A\cos\ \alpha - \varphi\ = 2{,}33\cos\ \alpha - \varphi\ ,$$

$$N_1 = -R_1\sin\ \alpha - \varphi\ = -2{,}33\sin\ \alpha - \varphi\ .$$

Определим внутренние усилия на участке 2, которые будут

$$M_2 = R_A x_0 - F_B\ x_0 - 0{,}5l\ - F_r\ f - y_0\ =$$
$$= 2{,}33\ 5 + 5{,}67\sin\ \varphi - \alpha\ \ - 3{,}66\cdot 5{,}67\sin\ \varphi - \alpha\ + 11{,}34\cos\ \varphi - \alpha\ ,$$

$$Q_2 = \ R_A - F_B \ \cos \ \varphi - \alpha \ - F_r \sin \ \varphi - \alpha \ =$$
$$= -1{,}13\cos \ \varphi - \alpha \ - 2{,}0\sin \ \varphi - \alpha \ ,$$

$$N_2 = \ R_A - F_B \ \sin \ \varphi - \alpha \ + F_r \cos \ \varphi - \alpha \ =$$
$$= -1{,}13\sin \ \varphi - \alpha \ + 2{,}0\cos \ \varphi - \alpha \ .$$

Те же выражения для M_2, Q_2, N_1 можно получить и через силы R_B и F_B. Подставим в полученные выражения значения α, равные $\varphi/3$, $2\varphi/3$, $4\varphi/3$, $5\varphi/3$ и 2φ, найдем усилия в сечениях, соответствующих этим углам. Так, при $\alpha = \varphi/3$ получим $M_1 = 2{,}45$ кН·м, $Q_1 = 1{,}75$ кН, $N_1 = -1{,}54$ кН. По полученным значениям усилий строим эпюры *M, Q, N* (рис. 11.1, *б, в, г*).

11.2. Напряжения в поперечных сечениях, условие прочности и вычисление деформации

Сила *Q*, лежащая в плоскости сечения, может быть представлена касательными напряжениями, которые могут быть приближенно вычислены, как и для прямых брусьев, по формуле Журавского

$$\tau = \frac{QS_z}{Ib}. \qquad (11.1)$$

Тогда условие прочности по касательным напряжениям для кривых брусьев будет

$$\frac{Q_{\max} S_z^{\max}}{Ib} \le \ \tau \ .$$

Нормальные напряжения определяются через моменты *M* и силы *N*. Напряжения, вызванные действием силы *N*, равномерно распределены по сечению и равны

$$\sigma_N = N/A. \qquad (11.2)$$

Знак их определяется знаком *N*.

Нормальные напряжения σ_M от изгибающих моментов распределены в сечении по гиперболическому закону (рис. 11.2), в то время как для прямолинейного бруса – по линейному закону. Аналитическое выражение этого закона имеет вид

$$\sigma_M = \frac{Mz}{S\rho}, \tag{11.3}$$

где M – изгибающий момент; S – статический момент поперечного сечения кривого бруса относительно его нейтральной оси ($S = Az_0$; z_0 – расстояние от центра тяжести сечения до нейтральной оси; A – площадь поперечного сечения; ρ – радиус кривизны слоя, в котором определяется напряжение ($\rho = R_0 + z$).

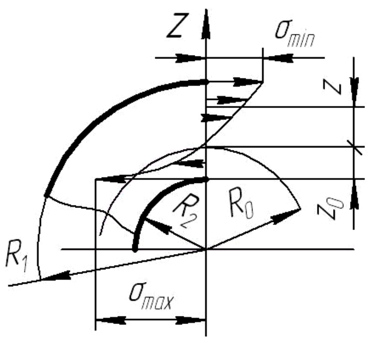


Рис. 11.2

Величина полного нормального напряжения равна

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{S\rho}. \tag{11.4}$$

Радиус кривизны нейтрального слоя определяется выражением, приведенным в учебной литературе по сопротивлению материалов для различных по форме сечений. Например, для прямоугольного профиля бруса со сторонами b и h

$$r = R_0\left[1 - \frac{h^2}{12R_0^2}\right],$$

где R_0 – радиус кривизны нейтрального слоя сечения.

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq \sigma . \tag{11.5}$$

Деформации кривых брусьев определяют, пренебрегая влиянием кривизны. Прогибы и углы поворота сечений кривых брусьев определяются теми же методами, что и для прямых брусьев (балок).

Глава 12

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА УПРУГИХ СИСТЕМ

12.1. Работа внешних сил и потенциальная энергия упругой деформации

Рассмотрим общий случай нагружения бруса, когда в поперечных сечениях его могут одновременно возникать нормальные и поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты. При этом брус может быть прямым или ломаным, иметь малую кривизну, входить в состав плоской или пространственной системы.

Выделим из бруса двумя сечениями элемент длиной dx (рис. 12.1), этот элемент находится в равновесии под действием шести силовых факторов: изгибающих моментов M_y и M_z, поперечных сил Q_z и Q_y, действующих в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, крутящего момента $M_к$ и продольной силы N.

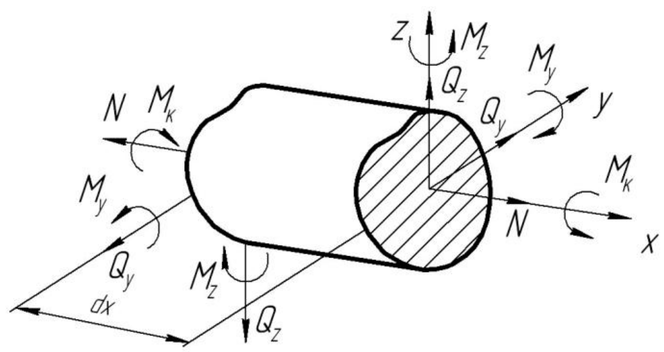


Рис. 12.1

Так как для выделенного элемента эти силовые факторы являются внешними силами, общую работу можно получить как сумму работ от $M_z,\ M_y,\ M_к,\ Q_z,\ Q_y,\ N$, которая имеет вид

$$dA = dA_{M_z} + dA_{M_y} + dA_{M_к} + dA_{Q_z} + dA_{Q_y} + dA_N . \qquad (12.1)$$

При этом считается, что при одновременном действии этих сил на элемент работа каждой из них на перемещениях, вызванных другими силами, равна нулю. Так, например, при действии продольной силы N не происходит взаимный поворот и сдвиг торцевых сечений элемента и, следовательно, работа сил Q и M на деформациях, вызванных силой N, равна нулю.

Работа каждой из сил равна, как известно, половине произведения силы на соответствующие ей перемещения и в окончательном виде записывается

$$dA_N = \frac{N^2 dx}{2EA}, \quad dA_{Q_y} = \frac{Q_y^2 dx}{2GA}\eta_y, \quad dA_{Q_Z} = \frac{Q_z^2 dx}{2GA}\eta_z,$$

$$dA_{M_к} = \frac{M_к^2 dx}{2GI_\rho}, \quad dA_{M_y} = \frac{M_y^2 dx}{2EI_y}, \quad dA_{M_z} = \frac{M_z^2 dx}{2EI_z},$$

где η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению.

Подставляя эти выражения в (12.1) и приравнивая работу потенциальной энергии упругой деформации, получим:

$$dU = \frac{N^2 dx}{2EA} + \frac{Q_y^2 dx}{2GA}\eta_y + \frac{Q_z^2 dx}{2GA}\eta_z + \frac{M_к^2 dx}{2GI_\rho} + \frac{M_y^2 dx}{2GI_y} + \frac{M_z^2 dx}{2EI_Z}. \quad (12.2)$$

Потенциальная энергия для всего бруса получится интегрированием по длине бруса всех элементов формулы с суммированием по всем участкам системы

$$U = \sum \int_l \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum \int_l \frac{Q_y^2 dx}{2GA}\eta_y + \sum \int_l \frac{Q_z^2 dx}{2GA}\eta_z +$$

$$+ \sum \int_l \frac{M_к^2 dx}{2GI_\rho} + \sum \int_l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \sum \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z}. \quad (12.3)$$

12.2. Теоремы о взаимности работ и перемещений

Если к балке (рис. 12.2), нагруженной первоначально силой F_1 в сечении 1 (первое состояние системы), приложить затем статическую силу F_2 (второе состояние) в сечении 2, то к прогибу δ_{11} в сечении 1, вызванному силой F_1, прибавится прогиб δ_{12} от силы F_2. Первый индекс у перемещений δ указывает номер сечения, а второй – силу, вызвавшую это перемещение.

Полная работа внешних сил будет состоять из трех частей: работы силы F_1 на перемещении δ_{11}, т.е. $F_1\delta_{11}/2$, работы силы F_2 на перемещении δ_{22} от силы F_2, т.е. $F_2\delta_{22}/2$ и работы силы F_1 на перемещении δ_{12}, вызванном силой F_2, т.е. $F_1\delta_{12}$.

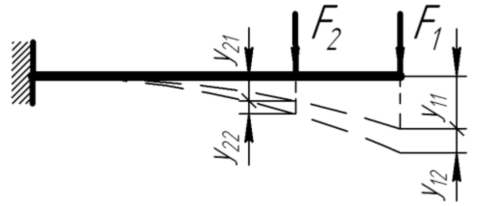


Рис. 12.2

Полная работа будет равна

$$W = \frac{1}{2}F_1\delta_{11} + \frac{1}{2}F_2\delta_{22} + F_1\delta_{12}. \qquad (12.4)$$

Поменяем порядок нагружения. Приложим сначала силу F_2, а затем силу F_1 и, повторив цепь вычислений, получим ту же работу

$$W = \frac{1}{2}F_2\delta_{22} + \frac{1}{2}F_1\delta_{11} + F_2\delta_{21}. \qquad (12.5)$$

Приравнивая (12.4) и (12.5), получим:

$$F_1\delta_{12} = F_2\delta_{21}, \qquad (12.6)$$

т.е. работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванным силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванным силами первого состояния. Этот вывод называется *теоремой о взаимности работ (теоремой Бетти)*.

Если прикладываются одинаковые силы ($F_1 = F_2$), то из (12.6) получим

$$\delta_{12} = \delta_{21}, \qquad (12.7)$$

Уравнение (12.7) называется *теоремой о взаимности перемещений*: перемещение сечения 1, вызванное силой, приложенной в сечении 2, равно перемещению сечения 2, вызванному той же силой, приложенной в сечении 1.

12.3. Определение перемещений

12.3.1. *Интегралы Мора*

Обозначим через F_i каждое из силовых воздействий (внешняя сила, момент, группа сил, моментов и т.д.), а через σ_i – каждое из перемещений (линейное, угловое), на которых силы F_i совершают работу.

С использованием введенных обозначений упругое перемещение можно определить по теореме Кастилиано

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}, \tag{12.8}$$

т.е. частная производная потенциальной энергии системы по силе равна перемещению точки приложения силы по направлению этой силы. На основе этой теоремы можно вывести формулы для определения перемещений любого сечения. Для этого в сечение, где требуется определить перемещение, вводится фиктивная нагрузка Φ по направлению искомого перемещения, находится ее общая потенциальная энергия, ведется дифференцирование по Φ по формуле (12.8), а затем принимается $\Phi = 0$ и находится перемещение.

При введении фиктивной силы Φ все внутренние силовые факторы изменятся на величины, зависящие от Φ и пропорциональные ей. Обозначим через M_{y_F}, M_{z_F}, Q_{y_F}, Q_{z_F}, M_{κ_F}, N_F внутренние силовые факторы, вызванные внешними заданными силами; $M_{y_1}\Phi$, $M_{z_1}\Phi$, $Q_{y_1}\Phi$, $Q_{z_1}\Phi$, $M_{\kappa_1}\Phi$, $N_F\Phi$ – дополнительные силовые факторы, вызванные добавочной силой Φ. Тогда общие значения внутренних усилий будут равны

$$\begin{gathered} M_y = M_{y_F} + M_{y_1}\Phi, \quad M_z = M_{z_F} + M_{z_1}\Phi, \\ Q_y = Q_{y_F} + Q_{y_1}\Phi, \quad Q_z = Q_{z_F} + Q_{z_1}\Phi, \\ M_\kappa = M_{\kappa_F} + M_{\kappa_1}\Phi, \quad N = N_F + N_1\Phi. \end{gathered} \tag{12.9}$$

Здесь M_{y_1}, M_{z_1}, Q_{y_1}, Q_{z_1}, M_{κ_1}, N_F – коэффициенты пропорциональности, зависящие от положения рассматриваемого сечения. Если снять систему внешних сил и принять $\Phi = 1$, то $M_y = M_{y_1}$, $M_z = M_{z_1}$, $Q_y = Q_{y_1}$, $Q_z = Q_{z_1}$, $M_\kappa = M_{\kappa_1}$, $N = N_1$.

Следовательно, M_{y_1}, M_{z_1}, Q_{y_1}, Q_{z_1}, M_{κ_1}, N_1 – это внутренние силовые факторы, возникающие в поперечном сечении бруса под действием единичной силы, приложенной в рассматриваемой точке в заданном направлении.

Заменим в выражении (12.3) внутренние силовые факторы на их новые значения из (12.9) с учетом дополнительной силы *Ф*. Тогда получим

$$U=\sum\int_l \frac{(N_F+N_1\Phi)^2dx}{2EA}+\sum\int_l \frac{(Q_{y_F}+Q_{y_1})^2dx}{2GA}\eta_y+$$

$$+\sum\int_l \frac{(Q_{z_F}+Q_{z_1}\Phi)^2dx}{2GA}\eta_z+\sum\int_l \frac{(M_{\kappa_F}+M_{\kappa_1}\Phi)^2dx}{2GI_\rho}+$$

$$+\sum\int_l \frac{(M_{y_F}+M_{y_1}\Phi)^2dx}{2EI_y}+\sum\int_l \frac{(M_{z_F}+M_{z_1}\Phi)^2dx}{2EI_z}.$$

Дифференцируя это выражение согласно (12.8) по *Ф* и принимая $\Phi=0$, находим перемещение точки приложения силы *Ф*:

$$\delta=\left(\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right)=\sum\int_l \frac{N_F N_1 dx}{EA}+\sum\int_l \frac{Q_{y_F}Q_{y_1}dx}{GA}\eta_y+$$

$$+\sum\int_l \frac{Q_{z_F}Q_{z_1}dx}{GA}\eta_z+\sum\int_l \frac{M_{\kappa_F}M_{\kappa_1}dx}{GI_\rho}+ \qquad (12.10)$$

$$+\sum\int_l \frac{M_{y_F}M_{y_1}dx}{EI_y}+\sum\int_l \frac{M_{z_F}M_{z_1}dx}{EI_z}.$$

Полученные уравнения называются *интегралами Мора*.

Таким образом, перемещение от любой нагрузки с помощью формулы (12.10) можно выразить через внутреннее усилие, возникающее в заданном сечении от этой нагрузки и единичной силы. Направление единичной силы совпадает с направлением определяемого перемещения. Причем если требуется определить линейное перемещение (например, прогиб, удлинение), то единичная сила представляет собой безразмерную сосредоточенную силу, приложенную в рассматриваемой точке; если требуется определить угол поворота, то прикладывается единичный безразмерный момент.

Состояние системы, вызванное единичной силой, называется *еди-*

ничным, *вспомогательным*, или *фиктивным состоянием*. Состояние, вызванное действием заданной нагрузки, называется *грузовым*.

Определение перемещений с помощью формулы (12.10) производится в следующем порядке:

1) находятся выражения усилий M_1, Q_1, $M_{к_1}$, N_1, вызванных заданной нагрузкой;

2) по направлению искомого перемещения прикладывается единичная сила и определяются M_{y_1}, M_{z_1}, Q_{y_1}, Q_{z_1}, $M_{к_1}$, N_1 от этой силы;

3) найденные выражения усилий подставляются в формулу (12.10) и интегрированием по участкам определяется перемещение.

Если δ получилось положительным, то перемещение совпадает с направлением единичной силы, если отрицательным, то перемещение противоположно единичной силе. Если элемент конструкции представляет собой брус малой кривизны, то в формуле (12.10) в подынтегральном выражении длина *dx* заменяется дугой *ds*.

Часто требуется определить не абсолютное, а относительное смещение отдельных точек или сечений. В этом случае в направлении искомого перемещения (например, по линии *CD*, рис. 12.3) прикладывается к каждой точке или к каждому сечению единичная сосредоточенная сила (рис. 12.3, *б*) или момент (рис. 12.3, *в*).

Практически в большинстве случаев из шести интегралов (12.10) используются только члены, связанные с изгибом и кручением. Влияние продольных и поперечных сил на общую потенциальную энергию и перемещение незначительно.

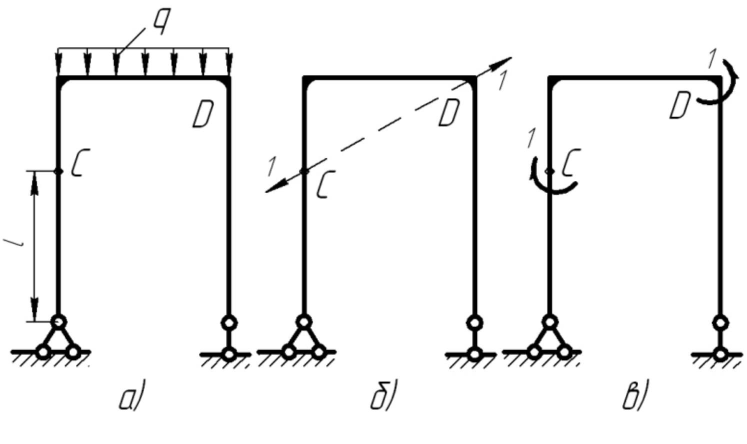


Рис. 12.3

Пример. Определить горизонтальное перемещение точки *A* бруса (рис. 12.4, *а*); жесткость бруса постоянна и равна *EI*. В этом брусе основную роль играют изгибные перемещения. Перемещения от растягивающих и сдвиговых сил малы. Поэтому в формуле (12.10) оставляем слагаемое, связанное с изгибом:

$$\delta_A = \int\limits_l \frac{M_F M_1 dx}{EI}.$$

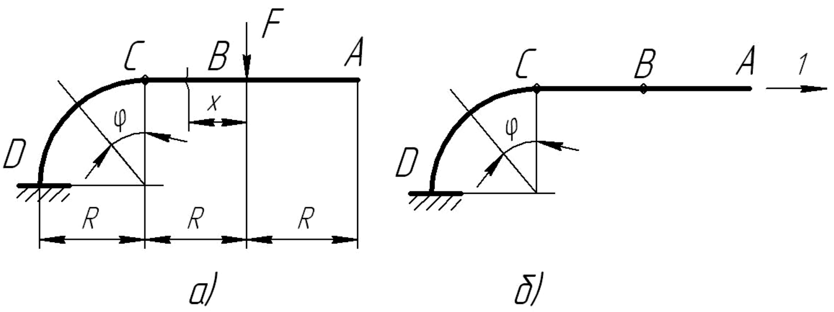


Рис. 12.4

Изгиб во второй плоскости и кручение отсутствуют. Брус разбивается на три участка: *AC*, *BC* и *CD*. На участке *AB* изгибающий момент равен нулю. На участке *BC* действует момент $M_F = M_x$, на участке *CD* – $M_F = FR(1-\cos\varphi)$. Момент от единичной силы, приложенной горизонтально (рис. 12.4, *б*) в точке *A*, на участках *AB* и *BC* равен нулю. Поэтому интегрирование ведется только на участке *CD*.
Заменяя *dx* на $Rd\varphi$, получим:

$$\delta_A = -\frac{FR^3}{EI}\int\limits_0^{\pi/2} 1+\sin\varphi \quad 1-\cos\varphi \;\, dy$$

или

$$\delta_A = -\frac{\pi-1}{2}\frac{FR^3}{EI}.$$

Знак «минус» указывает на то, что горизонтальное перемещение точки *A* направлено в противоположную от единичной силы сторону.

12.3.2. *Способ Верещагина*

Определение перемещений по интегралам Мора в брусьях, имеющих много участков, сложно, так как требуется составить большое число аналитических выражений подинтегральных функций. Однако, если брус состоит из прямолинейных участков с постоянной жесткостью, задачу можно упростить.

Положим, первая подинтегральная функция $M_F = f_1(x)$ в интеграле Мора $\delta = \int_l (M_F M_1) / EI$ имеет произвольные очертания, а вторая M_1 ограничена прямыми линиями (рис. 12.5) и выражается формулой

$$f_2(x) = b + kx. \tag{12.11}$$

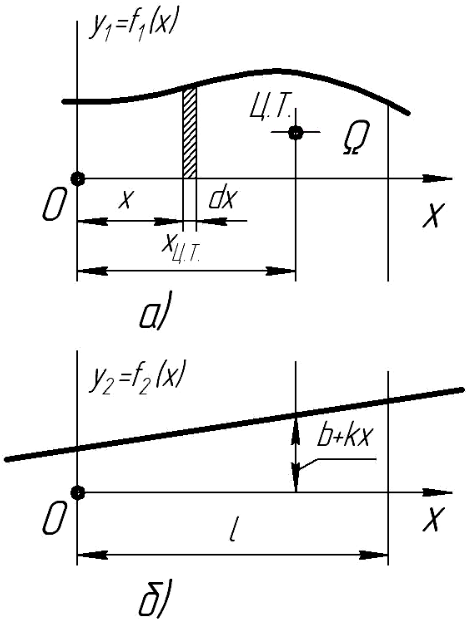


Рис. 12.5

Интеграл Мора представляется в виде

$$\delta EI = \int_l f_1(x) f_2(x)\, dx$$

или, с учетом (12.11),

$$\delta EI = b\int_l f_1(x)\, dx + k\int_l x f_2(x)\, dx.$$

Первый интеграл представляет площадь эпюры M_F

$$\Omega_F = \int_l f_1(x)\, dx,$$

второй – статический момент той же площади относительно оси y

$$\int_l x f_1(x)\,dx = \Omega x_{\text{цт}},$$

где $x_{\text{ЦТ}}$ – координата центра тяжести первой эпюры. Следовательно,

$$\delta EI = \Omega_F (b + kx_{\text{цт}}), \tag{12.12}$$

но $b + kx_{\text{цт}} = f_2(x_{\text{цт}})$, тогда

$$\delta EI = \Omega_F f_2(x_{\text{цт}}). \tag{12.13}$$

Таким образом, по способу Верещагина операция интегрирования заменяется перемножением площади эпюры M_F (грузовой) на ординату эпюры M_1 (единичной) под центром тяжести грузовой эпюры.

Пример 1. Найти вертикальное перемещение свободного конца балки (рис. 12.6). Дано: *E, I, F, l*.

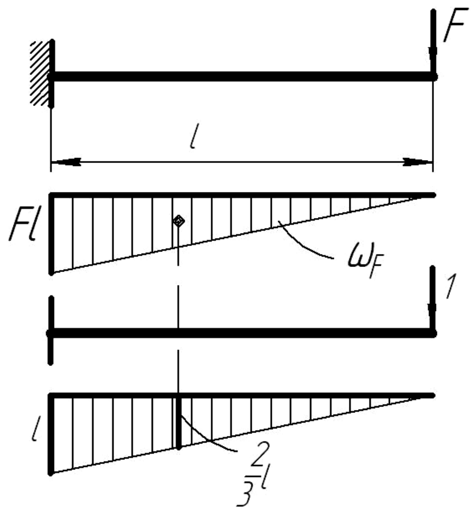


Рис. 12.6

Изгибающие моменты, вызванные действием силы F, определяются выражением $M_F = -Fx$, площадь грузовой эпюры $\Omega_F = Fl^2/2$. Прикладываем единичную силу в том сечении, где действует сила F. Изгибающий момент от нее определяется по формуле $M_1 = -x$, а ордината на эпюре M_1 под центром тяжести грузовой эпюры равна

$$M_{\text{цт}} = 2l/3.$$

Тогда в результате перемножения получим

$$y_F = \frac{1}{EI}\frac{Fl^2}{2}\cdot\frac{2l}{3} = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Если площади эпюр M_F и M_1 находятся по разные стороны от оси бруса, то перемещение получается со знаком минус. Если эпюры M_F и M_1 имеют несколько участков, то перемножение ведется по всем участкам с последующим суммированием результатов.

Пример 2. Дана рамная конструкция (рис. 12.7, *а*) с элементами постоянной жесткости *EI*, нагруженная силами *F*. Определить взаимное горизонтальное перемещение точек *А*.

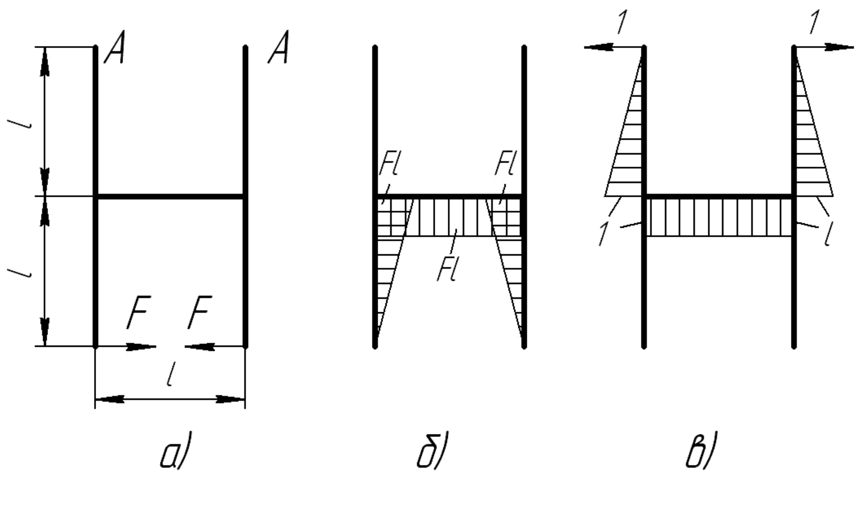


Рис. 12.7

Эпюра изгибающих моментов, вызванных действием сил *F*, приведена на рис. 12.7, *б*, моментов от единичных сил, приложенных в точках *А*, на рис. 12.7, *в*.

Получим три участка с изгибающими моментами от *F* и три от единичных сил. Из них только горизонтальный участок имеет обе эпюры (M_F и M_1). Тогда

$$\Omega_F = Fl^2, \quad M_{\text{ЦТ}} = l,$$

$$\delta_A = Fl^3/EI.$$

12.4. Метод сил для раскрытия статической неопределимости стержневых систем

12.4.1. *Статическая неопределимость*

Стержневая система – это любая конструкция, состоящая из элементов, имеющих форму стержня. Если элементы конструкции работают на растяжение и сжатие, то конструкция называется *фермой*; если элементы работают на изгиб или кручение, то конструкция называется *рамой*.

Стержневые системы могут быть *плоскими* (оси всех элементов и внешние силы лежат в одной плоскости), *плоско-пространственными* (оси элементов лежат в одной плоскости, а внешние силы перпендикулярны ей и лежат в одной плоскости) и *пространственными* (все системы, не входящие в первые две группы).

В настоящем разделе рассматривается наиболее простая группа систем – плоские. Ранее в гл. 2, 4 и 7 рассматривались простейшие статически неопределимые системы и методы их расчета, основанные на составлении дополнительных уравнений, связывающих перемещения отдельных сечений бруса (метод перемещений). Однако для большинства задач этого метода недостаточно. Остановимся на более общем методе раскрытия статической неопределимости.

Под статически неопределимой системой понимается такая, для которой определение внешних реакций и всех внутренних силовых факторов не может быть произведено при помощи только уравнений равновесия и метода сечений. Разность между числом неизвестных реакций или внутренних усилий и числом уравнений статики называется *степенью статической неопределимости*.

Статическая неопределимость системы возникает из-за наличия в ней лишних (дополнительных) связей, т.е. связей, в которых система не нуждается, для сохранения своей геометрической неизменяемости (изменение формы может происходить здесь лишь в результате деформации). Степень статической неопределимости равна числу лишних связей, удаление которых превращает систему в статически определимую с сохранением геометрической неизменяемости.

На рис. 12.8, *а* показана рамная конструкция, пять раз статически неопределимая (степень статической неопределимости равна пяти). Для превращения ее в статически определимую необходимо удалить две внешние связи и три внутренние путем перерезания замкнутого контура (рис. 12.8, *б*).

Реакциями этих связей являются соответственно две реактивные силы, возникающие в опорных закреплениях, и три внутренние силы: продольная, поперечная сила и изгибающий момент, действующие в месте разреза. При этом рама остается геометрически неизменяемой.

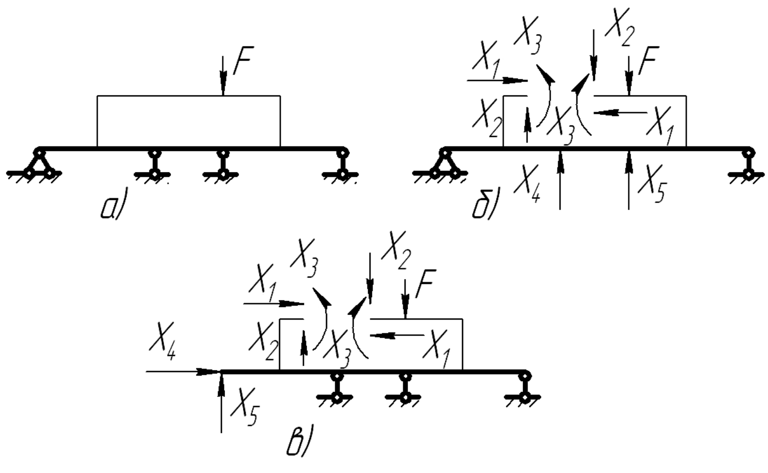


Рис. 12.8

В другом варианте, показанном на рис. 12.8 *в*, последнее условие нарушено. Здесь удалена левая крайняя опора с двумя связями. Такая система для проведения дальнейших расчетов непригодна.

12.4.2. *Метод сил*

Метод сил является наиболее распространенным методом раскрытия статической неопределимости. Он заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от лишних связей, как внешних, так и внутренних. Полученная таким путем статически определимая система называется *основной системой*. Далее эта основная система загружается внешними заданными нагрузками и реакциями удаленных связей, причем значения последних должны быть такими, при которых перемещения по их направлениям равнялись бы нулю.

Условие равенства нулю перемещений по направлению удаленных связей можно выразить, используя принцип независимости действия сил в следующем виде:

$$\Delta_i = \Delta_{i_1} + \Delta_{i_2} + \ldots + \Delta_{i_n} + \Delta_{iF} = 0. \qquad (12.14)$$

Первый индекс при Δ означает номер отброшенной связи, в направлении которой осуществляется перемещение, второй индекс указывает силу, вызвавшую это перемещение.

Обозначим через x_k реакцию связи. Поскольку каждое перемещение пропорционально соответствующей силе, величину Δ_{ik} можно записывать в следующем виде:

$$\Delta_{ik} = \delta_{i_k} x_k. \quad (12.15)$$

Подставим (12.15) в (12.14) и получим

$$\Delta_i = \delta_{i_1} x_1 + \delta_{i_2} x_2 + \ldots + \delta_{i_n} x_n + \Delta_{iF} = 0.$$

Таким образом, условие эквивалентности основной и заданной систем математически сводится к удовлетворению следующей системы n линейных уравнений, где $n-$ степень статической неопределимости системы

$$\begin{aligned} &\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1F} = 0, \\ &\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \ldots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2F} = 0, \\ &\qquad \ldots \\ &\delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \ldots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{nF} = 0. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Уравнения (12.16) называются каноническими уравнениями метода сил. Количество их равно числу отброшенных связей и количеству неизвестных реакций x_k.

Коэффициенты этих уравнений можно получить из (12.15), приняв $x_k = 1$:

$$\delta_{i_k} x_1 = \Delta_{ik}.$$

Следовательно, коэффициенты δ_{i_k} – это перемещения по направлению i-го силового фактора под действием единичной силы, приложенной в направлении реакции связи x_k.

В соответствии с теоремой о взаимности перемещений $\delta_{i_k} = \delta_{k_i}$. Это условие значительно снижает объем вычислений при определении коэффициентов канонических уравнений.

Порядок расчета статически неопределимой системы следующий.

1. Выбирается основная система путем удаления лишних связей. Основная система загружается внешними силами и реакциями связей. Реакции обозначаются $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i$.

2. Составляется система канонических уравнений в форме (12.16). Их количество равно числу неизвестных x_i.

3. Определяются коэффициенты δ канонических уравнений. Для этого, если использовать способ Верещагина, строятся эпюры изгибающих моментов от единичных сил ($x = 1$), точки приложения

и направления которых совпадают соответственно с одним из неизвестных $-x_i$. Далее строится грузовая эпюра от внешних сил (при этом реакции от x_1 не учитываются), производится последовательно перемножение единичных и грузовой эпюр. Определяются перемещения Δ_{ik} от внешних сил.

4. Решается система канонических уравнений, в результате чего определяются неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_i$. Затем строятся эпюры внутренних усилий *N*, *T*, *M*.

Пример. Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов для рамы, показанной на рис. 12.9, *а*. Дано: *F*, *l*, $EI = \text{const}$.

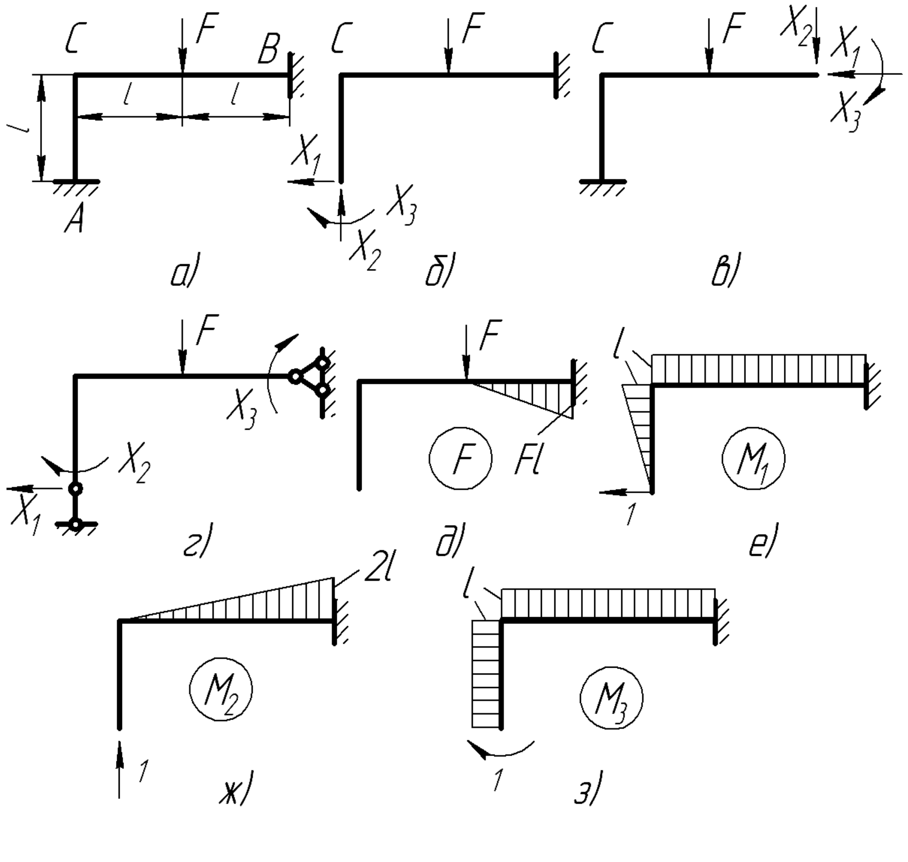


Рис. 12.9

Рама три раза статически неопределима. Варианты основных систем с силами показаны на рис. 12.9, *б*, *в*, *г*. Выбираем для расчета систему на рис. 12.9, *б*. Действие заделки заменяется двумя силами (X_1, X_2) и моментом X_3. Канонические уравнения имеют вид

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1F}=0,$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2F}=0,$$
$$\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3F}=0.$$

Они выражают тот факт, что суммарные перемещения от сил $X_1,\ X_2,\ X_3$ и F в направлении сил $X_1,\ X_2,\ X_3$ равны нулю.

Основные перемещения в этой раме определяются изгибом. Поэтому пренебрегаем сдвигом и сжатием сечений стержней. Строим эпюры изгибающих моментов от силы F (рис. 12.9, *д*). Определяем коэффициенты δ_{i_k}. Для этого прикладываем единичную силу в сечении A в направлении неизвестной силы X_1 и строим эпюры изгибающих моментов (рис. 12.9, *е*). Затем прикладываем единичную силу в направлении X_2 (эпюра M_2, рис. 12.9, *ж*) и единичный момент в направлении X_3 (эпюра M_3, рис.12.9, *з*).

Величина δ_{11} определяется перемножением первой единичной эпюры (рис. 12.9, *е*) самой на себя. Перемножение ведется по одноименным участкам, и затем результат складывается и будет

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{l^2}{2}\cdot\frac{2}{3}l+2l^2\cdot l\right)=\frac{7l^3}{3EI}.$$

Значение δ_{12} определяется перемножением первой единичной эпюры (рис. 12.8, *е*) на вторую единичную (рис. 12.9, *е*), а Δ_{1F} – путем перемножения первой единичной на грузовую (рис. 12.9, *д*). Аналогичным образом определяются остальные коэффициенты δ_{i_k} и перемещения Δ_{2F} , Δ_{3F} и будут

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{2l^2}{EI},\qquad \delta_{13}=\delta_{31}=\frac{5l^2}{2EI},\qquad \delta_{23}=\delta_{32}=\frac{2l^3}{EI},$$

$$\delta_{22}=\frac{8l^2}{3EI},\qquad \delta_{33}=\frac{3l}{EI},$$

$$\Delta_{1F}=-\frac{Fl^3}{2EI},\qquad \Delta_{2F}=-\frac{5Fl^2}{6EI},\qquad \Delta_{3F}=-\frac{Fl^3}{2EI}.$$

Заметим, что величины δ_{i_k} при $i=k$ (т.е. $\delta_{11},\ \delta_{22},\ \delta_{33}$) всегда положительны, поскольку площади эпюр и ординаты имеют одинаковый знак, а остальные коэффициенты могут быть как положительными, так и отрицательными.

После подстановки всех значений в канонические уравнения и решения системы получим

$$X_1 = -F/4, \quad X_2 = 7F/16, \quad X_3 = Fl/12.$$

Эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов (методика построения приведена в гл. 11), показаны на рис. 12.10, *а, б, в*.

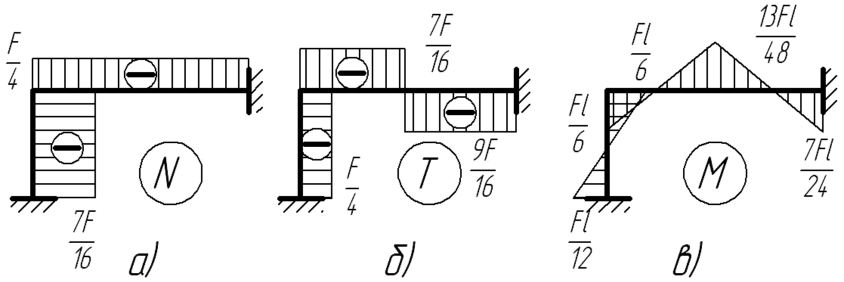


Рис. 12.10

В расчетах статически неопределимых систем значительное упрощение можно получить, используя свойство симметрии. Так, в симметричной раме (рис. 12.11, *а*) при внешней кососимметричной нагрузке внутренние симметричные факторы (продольные силы, изгибающие моменты) в плоскости симметрии $a-a$ равны нулю. При внешней симметричной нагрузке (рис. 12.11, *е*) внутренние кососимметричные факторы (поперечные силы) в плоскости симметрии $a-a$ равны нулю. Это означает, что число канонических уравнений уменьшается на число нулевых внутренних силовых факторов.

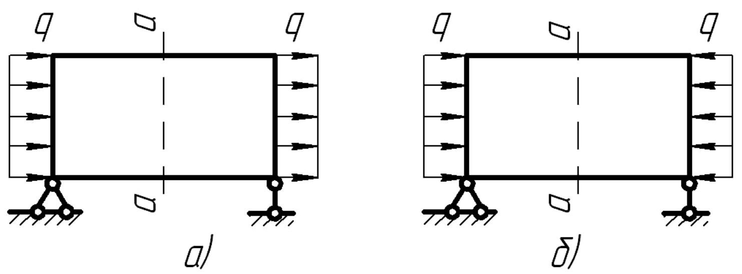


Рис. 12.11

12.4.3. *Проверка правильности построения эпюр*

Статическая проверка. Статическая проверка заключается в составлении условий статического равновесия всей рамы целиком, ее узлов или отдельных произвольно выделенных частей рамы. Так, в примере вырежем узел C (рис. 12.9, *б*) и покажем действующие в сечениях внутренние усилия (рис. 12.12).

Проверяем равновесие выделенного узла

$$\sum X = \frac{F}{4} - \frac{F}{4} = 0, \quad \sum Y = \frac{7F}{16} - \frac{7F}{16} = 0,$$

$$\sum M = \frac{Fl}{6} - \frac{Fl}{6} = 0.$$

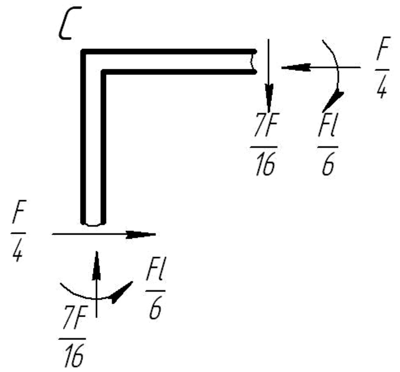


Рис. 12.12

Таким образом, статическая проверка удовлетворяется.

Деформационная проверка. Деформационная проверка заключается в определении перемещений указанным выше способом в сечениях, где перемещения заранее известны. Например, в сечениях, совпадающих с опорами, абсолютные перемещения равны нулю, в двух любых смежных сечениях относительные линейные или угловые перемещения также равны нулю.

Составим уравнения перемещений вертикальных, горизонтальных и угловых сечений балки A, показанной на рис. 12.9, *а*. Для этого перемножим грузовую эпюру (рис. 12.10, *е*) на, соответственно единичные эпюры M_1, M_2, M_3 (рис. 12.9 *е, ж, з*). Расчетные перемещения должны оказаться равными нулю.

Глава 13

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

В предыдущих главах рассматривалось действие статических нагрузок, которые изменялись во времени так медленно, что сооружение или его элементы оставались неподвижными. На практике часто действуют нагрузки, изменяющиеся с большой скоростью, что приводит к значительным ускорениям элементов и их колебательным движениям. Такие нагрузки называются *динамическими*.

Действие динамической нагрузки сопровождается упругими перемещениями и появлением сил инерции. Возникающие при этом дополнительные напряжения и деформации могут превысить напряжения и деформации от основных статических нагрузок.

Динамические нагрузки по своей природе весьма разнообразны. Это и периодическая нагрузка, создаваемая движущими частями машин, и нагрузка движущихся с ускорением тел, и ударная нагрузка, и подвижная нагрузка.

В данной главе рассматриваются первые три вида нагрузок. Для расчета конструкций на динамические нагрузки используются два метода: кинетостатический (с использованием принципа Даламбера) и энергетический.

13.1. Расчет движущихся тел с учетом сил инерции

В этом случае любой элемент в каждый момент времени можно рассматривать как находящийся в равновесии под действием внешних сил и сил инерции (*принцип Даламбера*). Силы инерции так же, как и силы тяжести, представляют собой объемные силы, так как они приложены к каждому элементу объема тела.

Элементарная сила инерции $dF_{\text{и}}$ равна

$$dF_{\text{и}} = dm\ a, \tag{13.1}$$

где dm и a – масса элементарного объема и его ускорение. Учитывая, что $dm = dQ/g$, получим

$$dF_{\text{и}} = \frac{dQ}{g}a = \frac{\gamma dV}{g}a, \tag{13.2}$$

где γ – удельный вес; dV – величина элементарного объема; g – ускорение свободного падения.

Представим инерционные силы в виде сил, распределенных по длине стержней (в виде погонной нагрузки), интенсивность p_i которой равна $p_{\text{и}} = dF_{\text{и}}/dz$. С учетом (13.2) и $dV = Adz$

$$p_{\text{и}} = \gamma A \frac{a}{g}, \tag{13.3}$$

где A – площадь поперечного сечения.

Рассмотрим расчет вертикального бруса (рис. 13.1, *а*) постоянного сечения *A*, поднимаемого вверх силой *S*. На брус действует собственный вес интенсивностью $q = Q/l = \gamma Al/l = \gamma A$ (рис. 13.1, *б*) и сила инерции интенсивностью $p_{\text{и}} = \gamma Aa/g$ (см. рис. 13.1, *в*). Так как ускорение направлено вверх, то сила инерции направлена вниз.

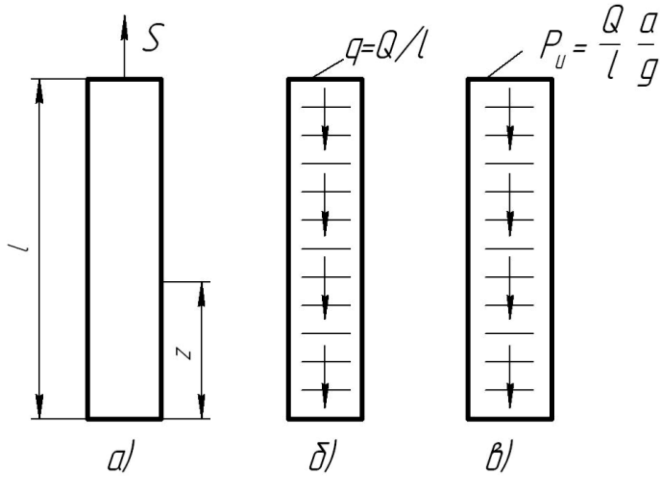


Рис.13.1

Динамические нормальные напряжения (σ_g) в поперечном сечении бруса, отстоящем на расстоянии *z* от его нижнего конца, будут равны

$$\sigma_g = \frac{N}{A} = \; q + p_{\text{и}} \; \frac{z}{A} = \left(\gamma A + \gamma A \frac{a}{g}\right)\frac{z}{A} = \gamma z \left(1 + \frac{a}{g}\right).$$

Учитывая, что $\gamma z = \sigma_{\text{ст}}$ (статические напряжения), окончательно получим

$$\sigma_g = \sigma_{\text{ст}} \left(1 + \frac{a}{g}\right). \tag{13.4}$$

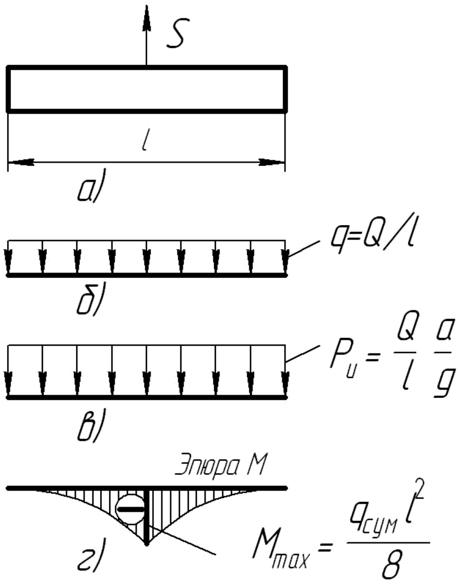


Рис.13.2

Рассмотрим теперь горизонтальный брус, поднимаемый вверх с ускорением *a* силой *S* (рис. 13.2, *а*). Интенсивность инерционной нагрузки $p_{и}$ определяется также по формуле (13.3). Интенсивность полной нагрузки $q_{сум}$ состоит из собственного веса (рис. 13.2, *б*) и инерционной нагрузки (рис. 13.2, *в*)

$$q_{сум} = q + p_{и} = \frac{Q}{l} + \gamma A \frac{a}{g} =$$

$$= \frac{\gamma A l}{l} + \gamma A \frac{a}{g} = \gamma A \left(1 + \frac{a}{g}\right).$$

Сила *S* и нагрузка $q_{сум}$ вызывают изгиб бруса. Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 13.2, *г*. Динамические нормальные напряжения в крайних волокнах равны

$$\sigma_g = \frac{M_z}{W_x} = \frac{q_{сум} z}{2W_x} = \frac{\gamma A z^2}{2W_x}\left(1 + \frac{a}{g}\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{\gamma A z^2}{2W_x} = \frac{q z^2}{2W_x} = \sigma_{ст},$$

получим

$$\sigma_g = \sigma_{\text{ст}} \left(1 + \frac{a}{g} \right).$$

Окончательно динамическое напряжение можно представить в виде

$$\sigma_g = \sigma_{\text{ст}} k_g, \qquad (13.5)$$

где k_g – динамический коэффициент

$$k_g = 1 + \frac{a}{g}. \qquad (13.6)$$

Аналогичным образом через динамический коэффициент можно выразить перемещение

$$\delta_g = \delta_{\text{ст}} k_g, \qquad (13.7)$$

где $\delta_{\text{ст}}$ – обобщенное перемещение от действий статических сил.

Рассмотрим еще один случай действия инерционных сил, возникающих в результате вращательного движения элементов конструкций. На рис. 13.3, *а* показан горизонтальный стержень длиной *l*, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси *OO*. Требуется определить максимальные внутренние усилия в стержне при известных значениях ω, *l*, γ (удельный вес) и *A* (площадь поперечного сечения стержня).

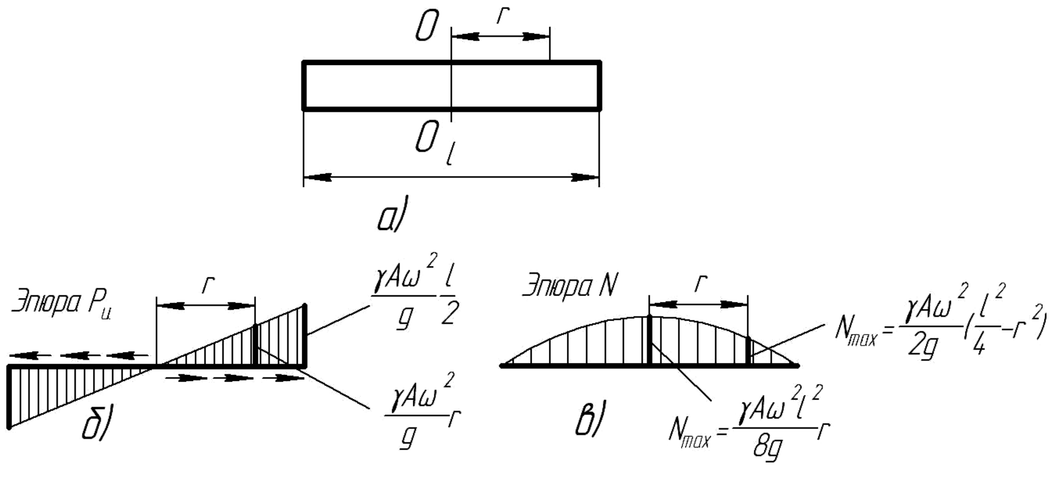


Рис.13.3

Ускорения частиц стержня, расположенных на расстоянии *r* от оси *OO* (центростремительные ускорения), направлены к этой оси и определяются по формуле

$$a = \omega^2 r.$$

Инерционные (центробежные) силы направлены по радиусам от оси вращения. Интенсивность их, отнесенная к единице длины стержня, согласно (13.3) и (13.7), равна

$$p_{и} = \gamma A \frac{a}{g} = \frac{\gamma A \omega^2 r}{g}. \tag{13.8}$$

Эпюра $p_{и}$ показана на рис. 13.3, *б*.

Силы инерции вызывают растяжение стержня, продольная сила N в сечении стержня, расположенном на расстоянии r от оси вращения, равна площади эпюры $p_{и}$ на участке от этого сечения до конца стержня

$$N = \left(\frac{\gamma A \omega^2 r}{g} r + \frac{\gamma A \omega^2 r}{g} \frac{l}{2} \right) \frac{l/2 - r}{2} = \frac{\gamma A \omega^2}{2g} \left(\frac{l^2}{4 - r^2} \right).$$

Продольная сила имеет наибольшее значение посредине стержня при $r = 0$

$$N_{\max} = \frac{\gamma A \omega^2 l^2}{8g}.$$

Эпюра продольных сил показана на рис. 13.3, *в*.

13.2. Ударное приложение нагрузки

Явление удара возникает при резком изменении скоростей движения соприкасающихся тел. В данном разделе рассматриваются простейшие случаи соударения движущегося тела (ударяющего тела) с неподвижным телом или системой (ударяемым телом) при следующих допущениях.

1. Ударяющее тело абсолютно жесткое.
2. Ударяемое тело имеет одну степень свободы и его обобщенные перемещения пропорциональны обобщенным силам при статическом и динамическом действиях.
3. Удар неупругий, ударяющее тело перемещается вместе с ударяемым.
4. Вид деформации ударяемого тела такой же, как и при статическом действии сил.
5. Скорость ударяющего тела мала по сравнению со скоростью

распространения ударных волн.

Целью расчета на удар является определение наибольших деформаций и напряжений.

13.2.1. *Расчет на удар без учета массы ударяемой системы*

Система, подвергающаяся удару, может испытывать различные виды деформаций: сжатие (рис. 13.4, *а*), изгиб (рис. 13.4, *б*), растяжение, кручение, кручение с изгибом (рис. 13.4, *в*) и др.

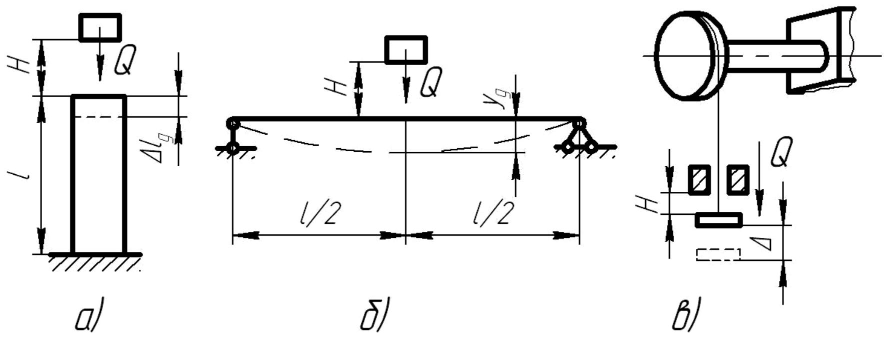


Рис.13.4

Определим перемещения δ_g, используя энергетический подход. Под δ_g здесь понимается обобщенное перемещение. Например, для деформаций сжатия δ_g – это укорочение стержня Δl_g (рис. 13.4, *а*), для изгиба – величина прогиба балки y_g (рис. 13.4, *б*).

Полагая, что кинетическая энергия T ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию деформации упругой системы U_g, можем написать

$$T = U_g. \tag{13.9}$$

Так как к моменту окончания деформации ударяющее тело пройдет путь $H + \delta_g$ (здесь H – высота подъема ударяющего тела), то его запас энергии будет измеряться произведенной им работой и будет равен

$$T = A_g = Q\ H + \delta_g\ . \tag{13.10}$$

Вычислим теперь U_g. При статической деформации потенциальная энергия $U_{\text{ст}}$ численно равна половине произведения силы Q на соответствующую статическую деформацию $\delta_{\text{ст}}$:

$$U_{\text{ст}} = Q\delta_{\text{ст}}/2. \qquad (13.11)$$

Статическая деформация $\delta_{\text{ст}}$ может быть вычислена по закону Гука, который в общем виде можно записать так:

$$\delta_{\text{ст}} = Q/c \quad \text{или} \quad Q = c\delta_{\text{ст}}. \qquad (13.12)$$

Здесь c – коэффициент пропорциональности, который при простом растяжении или сжатии вычисляется по формуле

$$\delta_{\text{ст}} = \Delta l_{\text{ст}} = \frac{Ql}{FE},$$

откуда

$$c = \frac{EF}{l},$$

а при изгибе

$$\delta_{\text{ст}} = y_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{48EI},$$

откуда

$$c = \frac{48EI}{l^4}.$$

Таким образом, формула (13.11) может быть записана с учетом (13.12) следующим образом:

$$U_{\text{ст}} = \frac{1}{2}Q\delta_{\text{ст}} = \frac{c}{2}\delta_{\text{ст}}^2. \qquad (13.13)$$

Реакция ударяемой системы на действие упавшего груза Q (назовем ее F_g) увеличивается с ростом деформации δ_g от нуля до максимального значения в конце удара и в пределах упругих деформаций связана с ней законом Гука

$$\delta_g = \frac{F_g}{c}. \qquad (13.14)$$

Учитывая введенные выше допущения, можно считать, что вид формулы для U_g будет тот же, что и при статическом действии сил

$$U_g = \frac{1}{2}F_g\delta_g = \frac{c}{2}\delta_g^2 = \frac{Q}{2\delta_{\text{ст}}^2}\delta_g^2. \qquad (13.15)$$

Подставляя (13.10) и (13.15) в (13.9), получим:

$$Q\;H + \delta_g\;= \frac{Q}{2\delta_{\text{ст}}^2}\delta_g^2$$

или

$$\delta_g^2 - 2\delta_{\text{ст}}\delta_g - 2H\delta_{\text{ст}} = 0.$$

Отсюда

$$\delta_g = \delta_{\text{ст}} \pm \sqrt{\delta_{\text{ст}}^2 + 2H\delta_{\text{ст}}}.$$

Удерживая перед радикалом знак «плюс» для определения наибольшей деформации, получим:

$$\delta_g = \delta_{\text{ст}}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}}\right] = k_g\delta_{\text{ст}}, \qquad (13.16)$$

где

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}}. \qquad (13.17)$$

Так как напряжения и усилия по закону Гука пропорциональны деформациям, то

$$\sigma_g = k_g\sigma_{\text{ст}}, \qquad (13.18)$$

$$F_g = k_g Q. \qquad (13.19)$$

Учитывая, что $H = V^2 / 2g$, где V– скорость ударяющего тела в начальный момент удара, g – ускорение свободного падения, получим

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\delta_{\text{ст}}}}. \qquad (13.20)$$

Кроме того, если учесть, что

$$\frac{2H}{\delta_{\text{ст}}} = \frac{QH}{Q\delta_{\text{ст}}/2} = \frac{T_0}{U_{\text{ст}}},$$

где $T_0 = QH$ – энергия ударяющего тела к моменту начала удара, то k_g можно представить и в другом виде

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{\text{ст}}}}. \tag{13.21}$$

13.2.2. *Расчет на удар с учетом массы ударяемой системы*

Рассмотрим более подробно случай изгибающего удара, хотя полученные ниже зависимости будут действительны для всех видов ударного приложения нагрузки.

В результате удара все элементы ударяемой системы (рис. 13.5) приобретут некоторые скорости, а груз Q, имеющий до удара скорость V, замедлит свое движение, и будет иметь скорость V_1, одинаковую со скоростью элемента балки в месте удара. Полагаем, что масса m_i упругой системы равномерно распределена по длине балки.

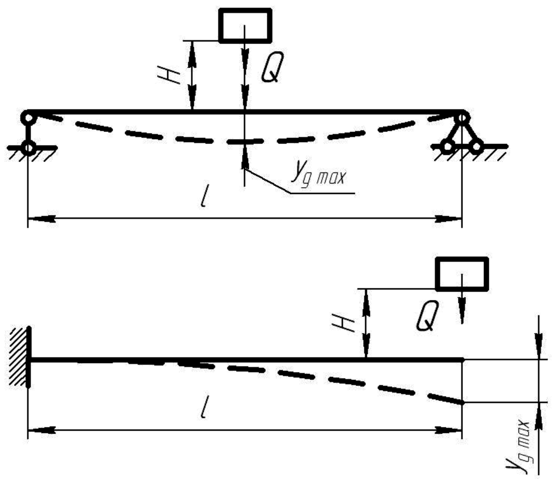


Рис.13.5

Из условия сохранения количества движения получим

$$mV = mV_1 + \alpha m_1 V_1, \tag{13.22}$$

где mV_1 – количество движения груза после удара; mV – количество движения груза до удара; m_1V_1 – количество движения балки после удара; α – коэффициент приведения массы к месту удара. Смысл использования коэффициента α состоит в том, что вся масса балки приводится к месту соударения, но так как скорости всех точек по длине балки различны, то принимается некоторая средняя скорость V_1, а разница между действительной суммой $m_i V_i$ и $m_1 V_1$ компенсируется коэффициентом α $\alpha < 1$. Так, для деформации растяжения или сжатия $\alpha = 1/3$, а при изгибе по схеме, приведенной на рис. 13.5, $\alpha = 17/35$. Порядок вычисления коэффициента α для любых видов деформации приводится в учебниках А.В. Даркова, Г.С. Шпиро (Сопротивление материалов, 1989) и Н.Б. Беляева (Сопротивление материалов, 1976).

Из (13.22) получим

$$V_1 = \frac{mV}{m + \alpha m_1} = \frac{QV}{Q + \alpha Q_1}. \tag{13.23}$$

Найдем кинетическую энергию T_1, остающуюся в системе после соударения:

$$T_1 = \frac{m + \alpha m_1 \ V_1^2}{2} = \frac{m + \alpha m_1}{2} \frac{m^2 V^2}{m + \alpha m_1 \ ^2} = \frac{mV^2}{2 \ m + \alpha m_1/m},$$

или окончательно

$$T_1 = \frac{T_0}{1 + \alpha m_1/m} = \frac{T_0}{1 + \alpha Q_1/Q}. \tag{13.24}$$

Таким образом, кинетическая энергия, остающаяся в системе после удара, в $1 + \alpha Q_1/Q$ раз меньше кинетической энергии в момент начала удара. Тогда из уравнений (13.17), (13.21) и (13.24), подставив T_1 вместо T_0, получим:

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}} \ 1 + \alpha Q_1/Q}}, \tag{13.25}$$

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{\text{ст}} \ 1 + \alpha Q_1/Q}}. \tag{13.26}$$

Таким образом, учет массы ударяемого тела снижает величину динамического коэффициента k_g.

Пример. На середину стальной балки длиной $l = 2$ м, свободно лежащей на двух опорах, с высоты $H = 4$ м падает груз $P = 4000$ Н (рис. 13.6, *а*). Вычислить наибольшие нормальные напряжения без учета и с учетом собственного веса балки. Дано: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа,

$I = 2370\ \text{см}^4$, $W = 237\ \text{см}^3$, погонный вес балки $q = 279\ \text{Н/м}$.

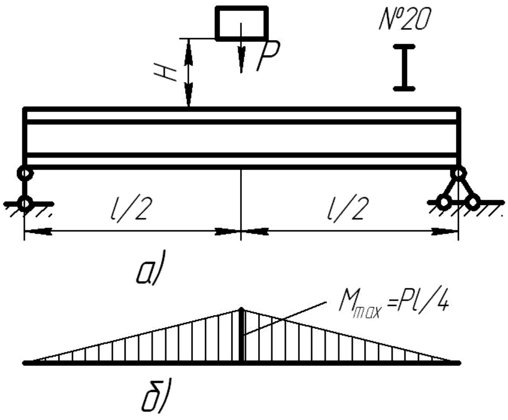


Рис.13.6

Решение. Статический прогиб балки в сечении под статическим грузом $P = 4000\,\text{Н}$ (используем универсальное уравнение упругой линии балки) равен

$$y_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{4000 \cdot 2^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^1 \cdot 1 \cdot 2370 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0141 \cdot 10^{-3}\,\text{м}.$$

Динамический коэффициент без учета веса балки (формула 13.17) равен

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2+4}{0{,}0141}} = 24{,}8.$$

Наибольший изгибающий момент $M_{\max}$ от статически действующей силы P равен $Pl/4$ (рис. 13.6, *а*). Наибольшие статические нормальные напряжения равны

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{Pl/4}{W} = \frac{4000 \cdot 2/4}{237 \cdot 10^{-6}} = 8{,}45\,\text{МПа}.$$

Динамические напряжения

$$\sigma_g = k_g \sigma_{\text{ст}} = 24{,}8 \cdot 8{,}45 = 209{,}5\,\text{МПа}.$$

Динамический коэффициент с учетом веса балки

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}\ 1 + \alpha Q/P}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4}{0{,}0141 \cdot \left(1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{555}{4000}\right)}} = 24{,}1.$$

Здесь $Q = ql = 279 \cdot 2 = 558$ Н – вес балки, $\alpha = 17/35$. Динамические напряжения равны

$$\sigma_{\text{ст}} = k_g \sigma_{\text{ст}} = 24{,}1 \cdot 8{,}45 = 203{,}5 \text{ МПа.}$$

Для определения полных напряжений $\sigma_{сум}$ к динамическим напряжениям σ_g следует добавить напряжения, вызванные действием собственного веса балки σ_Q:

$$\sigma_Q = \frac{ql^2/8}{W} = \frac{279 \cdot 2^2}{8 \cdot 237 \cdot 10^{-8}} = 60 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0{,}6 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_{сум} = 203{,}5 + 0{,}6 = 204{,}1 \text{ МПа.}$$

13.3. Колебания упругих систем

13.3.1. *Понятия о колебаниях*

Под действием динамических нагрузок сооружения, конструкции и их отдельные элементы выходят из состояния статического равновесия и начинают совершать колебания около этого положения. В зависимости от направления внешнего воздействия могут возникать колебания различных видов: продольные, поперечные, крутильные и др.

Рассмотрим упругую балку (рис. 13.7). Выведем ее из положения статического равновесия, например, приложив некоторую вертикальную силу *P*, при которой балка займет крайнее нижнее положение. Затем мгновенно удалим силу. Под действием сил упругости балка переместится вверх, пройдет по инерции через положение статического равновесия и займет крайнее верхнее положение. Далее балка переместится в крайнее нижнее положение, снова в крайнее верхнее и т.д. Подобные колебательные движения упругой системы с переходом ее от одного крайнего положения к другому, происходящие при отсутствии переменных внешних сил, называются *свободными*, или *собственными колебаниями*.

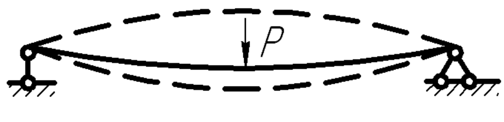


Рис.13.7

В отличие от них, *вынужденные колебания* – это колебания системы, происходящие при действии на нее переменных внешних (возмущающих) сил.

В любой момент времени на каждую частицу колеблющейся балки действуют сила тяжести, сила упругости (со стороны соседних частиц) и, согласно принципу Даламбера, сила инерции. Сила инерции в каждый момент времени направлена от положения, занимаемого частицей при статическом равновесии, к положению ее в рассматриваемый момент.

Рассмотрим теперь упругую балку (рис. 13.8, *а*), которая нагружается силой, во много раз превышающей вес балки, так что собственным весом балки можно пренебречь. Если известен прогиб какого либо одного поперечного сечения в некоторый момент времени, то по нему можно определить прогибы всех сечений балки, т.е. положение любого сечения определяется одним параметром (например, прогибом). Следовательно, эта балка представляет систему с одной степенью свободы. Такие системы показаны на рис. 13.8, *а, б, в, г*.

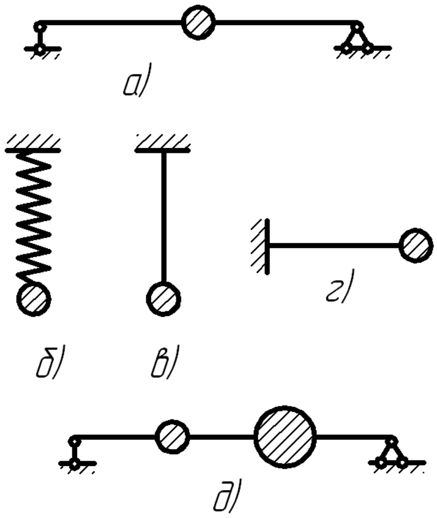


Рис.13.8

Балка, показанная на рис. 13.8, *д*, является системой с двумя степенями свободы, так как для определения положения любого сечения должны быть заданы два параметра, например, прогибы двух поперечных сечений балки.

Напомним понятия периода, частоты и амплитуды колебаний. Промежуток времени *T*, за который система совершает одно свободное колебание (перемещение от одного крайнего положения в другое), называется *периодом свободных колебаний*. Величина, обратная периоду, называется *частотой колебаний* ($\omega = 1/T$). Наибольшее перемещение сечений системы от положения статического равновесия называется *амплитудой колебаний* (*A*).

Если период (частота) вынужденных колебаний совпадает с периодом (частотой) свободных колебаний системы, то возникает явление *резонанса*, при котором амплитуда колебаний и напряжения будет резко возрастать с течением времени. Этот случай представляет особую опасность для конструкций. Поэтому при их расчете главной задачей является отстройка системы от резонанса путем подбора частоты собственных колебаний при заданных частотах вынужденных колебаний.

Вопросы подбора периода, частоты и амплитуды свободных колебаний решаются в курсах теоретической механики или специальных курсах. В настоящей главе рассматриваются вопросы прочности при колебаниях.

13.3.2. *Свободные колебания системы с одной степенью свободы*

Так же, как и в предыдущих случаях динамического нагружения, расчет напряжений можно свести к нахождению динамического коэффициента и статических напряжений. Выведем динамический коэффициент через деформацию системы, представленной в виде двухопорной балки, нагруженной посередине пролета возмущающей силой *Q*, приложенной вертикально, вызванной, например, действием вращающегося груза (рис. 13.9).

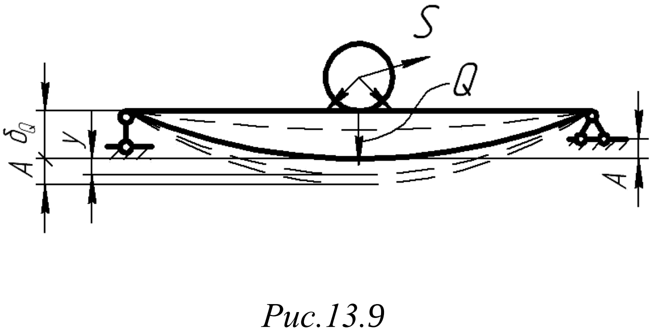


Рис.13.9

При колебаниях систем с одной степенью свободы полные деформации системы могут быть найдены путем сложения статической деформации с добавочной деформацией при колебаниях. Для проверки прочности системы, очевидно, необходимо найти наиболее опасное сечение с наибольшей в процессе колебаний суммарной величиной деформации. Для этого необходимо сложить наибольшую статическую деформацию $\delta_{\text{ст}}^{\max}$ с наибольшей амплитудой колебаний A (рис. 13.9) и тогда

$$\delta_g = \delta_{\text{ст}}^{\max} + A = \delta_{\text{ст}}^{\max}\left(1 + \frac{A}{\delta_{\text{ст}}^{\max}}\right) = k_g \delta_{\text{ст}}^{\max}. \tag{13.27}$$

Пока система деформируется в пределах упругости, напряжения пропорциональны деформациям. Поэтому

$$\sigma_g = \sigma_{\text{ст}}\left(1 + \frac{A}{\sigma_{\text{ст}}^{\max}}\right) = k_g \sigma_{\text{ст}}, \tag{13.28}$$

где $k_g = 1 + A/\sigma_{\text{ст}}^{\max}$ – коэффициент динамичности при колебаниях. Условие прочности в этом случае должно иметь вид

$$\sigma_g = k_g \sigma_{\text{ст}} \le \sigma \ . \tag{13.29}$$

Таким образом, задача нахождения динамического коэффициента сводится к нахождению $\delta_{\text{ст}}^{\max}$ и амплитуды колебаний A.

Определим амплитуду. Как известно, дифференциальное уравнение движения колеблющегося груза Q в случае свободных колебаний можно представить в виде уравнения, в котором, кроме внешней силы Q и силы упругого сопротивления системы F, учитывается также и сила инерции $Q\delta''/g$

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{g}}\delta'' + F - Q = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{g}}\delta'' + F_1 = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{g}}\delta'' + c\delta = 0. \tag{13.30}$$

Здесь δ – координата, полностью определяющая положение груза Q во время колебаний (рис. 13.9); $F - Q = F_1$ – восстанавливающая сила (добавочное упругое усилие, возникающее в результате перемещения точки приложения груза Q на расстояние δ при колебаниях). Можно считать F_1 пропорциональной δ в пределах упругости, т.е., $F_1 = c\delta$, где коэффициент пропорциональности c – усилие, необходимое для того, чтобы вызвать статическую деформацию системы, равную единице, в направлении действия груза Q. Если статическую деформацию от груза Q обозначить как δ_Q, то $c = Q/\delta_Q$.

Обозначим

$$\frac{gc}{Q} = \omega_0^2,$$

тогда уравнение (13.30) сводится к следующему:

$$\delta'' + \omega_0^2 \delta = 0. \qquad (13.31)$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\delta(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t, \qquad (13.32)$$

где A и B – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

Полученное решение (13.32) представляет собой уравнение гармонических колебаний системы с одной степенью свободы. Пусть в начальный момент времени при $t = 0$ смещение массы было $\delta(t) = \delta_0$ и скорость движения $V(t) = V_0$, тогда из (13.32) получим $A = V_0/\omega$, $B = \delta_0$. После подстановки постоянных интегрирования в решение (13.32) и тригонометрических преобразований уравнение примет вид

$$\delta(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (13.33)$$

Здесь $A = \sqrt{\delta_0^2 + (V_0/\omega_0)^2}$ – наибольшее отклонение (амплитуда) груза от положения равновесия; $\varphi_0 = arct(\omega_0 \delta_0 / V_0)$ – начальная фаза колебаний (или сдвиг фаз по времени). По уравнению (13.33) строится график колебаний (рис. 13.10).

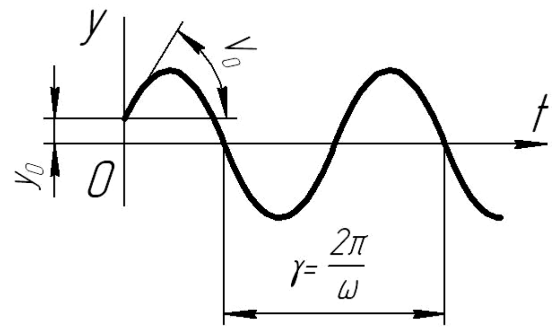


Рис.13.10

Из уравнения (13.33) получим частоту собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{gc}{Q}} = \sqrt{\frac{g}{\delta Q}}. \tag{13.34}$$

Если груз Q растягивает стержень длиной l, то

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{gEF}{Ql}}.$$

При изгибе балки на двух шарнирах (рис. 13.9)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\max}}} = \sqrt{\frac{48EI}{Ql^3}}.$$

Если к силам Q и F добавить действующую в том же направлении, периодически меняющуюся по синусоидальному закону возмущающую силу $S = H\sin\omega t$ (рис. 13.9) и силу сопротивления среды $R = r\delta'$, то дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{Q}{g}\delta'' + r\delta' + c\delta = H\sin\omega t,$$

или

$$\delta'' + 2n\delta' + c\delta = H\sin\omega t, \tag{13.35}$$

где $\omega -$ частота возмущающей силы; $H = S_{\max} -$ наибольшее (амплитудное) значение возмущающей силы; $n = rg/2Q$ – коэффициент затухания колебаний.

Решение уравнения (13.35) с учетом (13.33) для амплитуды A при наличии сил сопротивления имеет вид

$$A = \frac{H}{\frac{Q}{g}\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{\delta_H}{\sqrt{\left[1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2\right]^2 + 4\left(n/\omega_0\right)^2\left(\omega/\omega_0\right)^2}}, \tag{13.36}$$

где

$$\delta_H = \frac{gH}{Q\omega_0^2} = \frac{gH}{Q}\frac{\delta_0}{g} = \frac{H}{Q}\delta_Q, \tag{13.37}$$

где δ_H – статическая деформация системы от наибольшей возмущающей силы S.

Отношение амплитуды вынужденных колебаний к деформациям

δ_H называется *коэффициентом нарастания колебаний* β, он равен

$$\beta = \frac{A}{\delta_H} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-(\omega/\omega_0)^2\right)^2 + 4(n/\omega_0)^2(\omega/\omega_0)^2}}. \qquad (13.38)$$

Таким образом, формула для динамического коэффициента приобретает вид

$$k_g = 1 + \frac{A}{\delta_{\text{ст}}^{\max}} = 1 + \frac{\delta_H}{\delta_0}\beta = 1 + \frac{H}{Q}\beta. \qquad (13.39)$$

Пример. На двух балках двутаврового сечения № 27 (рис. 13.11) установлен двигатель весом $Q = 1{,}3$ *т*, делающий $n = 400$ об/мин. Центробежная сила инерции *H*, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей, равна 0,9 *т*. Необходимо провести проверку на резонанс и определить максимальное напряжение в балках. Сопротивление среды не учитывать.

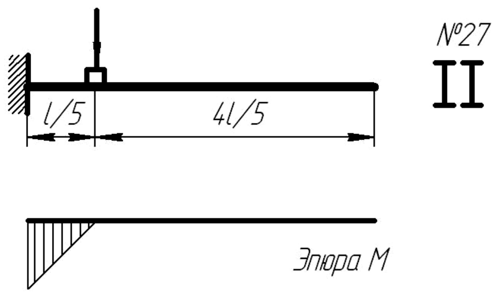


Рис.13.11

Решение.

1. Обращаемся к таблице прокатных сортаментов и выписываем геометрические характеристики сечения, из которого выполнены балки. Двутавр № 27 имеет следующие характеристики:

$$I_x = 5500 \text{ см}^4, \quad W_x = 407 \text{ см}^3.$$

2. Определяем частоту собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta_Q}} = \sqrt{\frac{g \cdot 81}{0{,}21 \cdot 10^{-3}}} = 2160 \text{ сек}^{-1}.$$

Здесь g – ускорение свободного падения; δ_Q – статический прогиб в месте приложения груза, который может быть определен методом

Верещагина как

$$\delta_Q = \frac{Ql^3}{3EI} = \frac{1300\,(110/5)^3}{3\cdot 2\cdot 10^6\cdot (2\cdot 500)} = 0{,}21\cdot 10^{-3}\,\text{см}.$$

3. Определяем частоту изменения вращающей силы, или частоту вынужденных колебаний

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14\cdot 400}{30} = 41{,}8\ \text{сек}^{-1}.$$

4. Вычисляем коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-(\omega/\omega_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(418/2160)^2}} \approx 1.$$

5. Находим динамический коэффициент

$$k_g = 1 + \frac{\delta_H}{\delta_\alpha}\beta = 1 + \frac{H}{Q}\beta = 1 + \frac{0{,}9}{1\cdot 3}\cdot 1 = 1{,}692.$$

6. Определяем наибольшее нормальное напряжение, действующее в балке:

$$\sigma_g = \sigma_{\text{ст}}^{\max} k_g,$$

$$\sigma_{\text{ст}} = M_{\max}/W_x, \qquad M_{\max} = Q\alpha_1 = 0{,}2Ql,$$

$$\sigma_g = 1{,}692\frac{0{,}2\cdot 1300\cdot 110}{2\cdot 407} = 59{,}5\ \text{кг/см}^2.$$

Глава 14

ТЕСТЫ

Предлагаемые тесты рекомендуется применять для текущего контроля знаний студентов. Данный контроль позволяет получать первичную информацию о ходе и качестве усвоения учебного материала, а также стимулировать регулярную целенаправленную работу студентов. Тесты рассчитаны на применение как контролирующий материал для преподавателя, так и для самоконтроля знаний.

Самоконтроль знаний осуществляется с помощью микропроцессорного контролирующего устройства «Символ», разработанного учеными Томского университета систем управления и радиоэлектроники.

Устройство достаточно просто в применении (рис. 14.1). Ответ на вопрос может быть введен в любой форме – знаковой, символьной, числовой, словесной. Для этого надо последовательно выполнить следующие действия:

1) включить устройство путем нажатия кнопки СБРОС (позиция 1);

2) ввести код задания (буквенный, числовой или буквенно-числовой), путем нажатия кнопок (позиция 2). Код указан в круглых скобках после номера задачи;

3) посимвольно набрать ответ, без пробелов, на кнопках (позиции 2 и 3);

4) нажать копку КОНТРОЛЬ (позиция 4). Ответ признается верным, если загорится индикатор ПРАВИЛЬНО (позиция 5). Если же загорится индикатор НЕПРАВИЛЬНО (позиция 6), ответ является неверным.

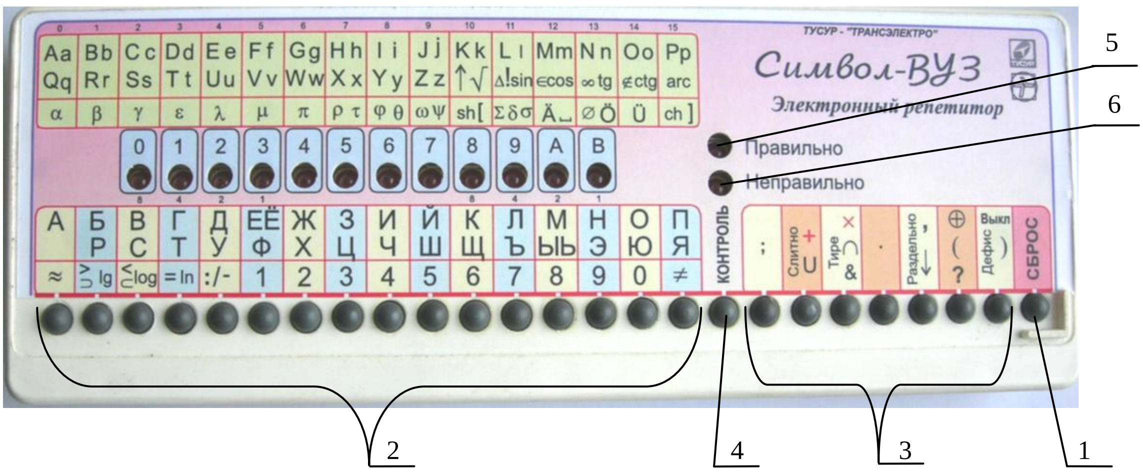


Рис. 14.1. Микропроцессорное контролирующее устройство «Символ»

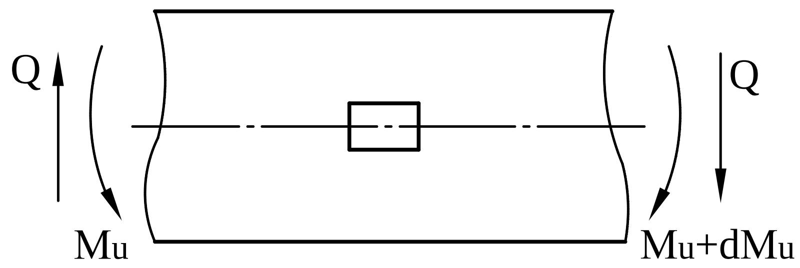
При оценке ответа «неправильно»:

1) еще раз проверить правильность ввода ответа;
2) проверить правильность хода решения задачи;
3) прочитать теоретическую часть курса.

Внедрение предлагаемой системы контроля знаний по дисциплине «Сопротивление материалов» с использованием устройства «Символ» позволяет выявить уровень усвоения темы, как отдельным студентом, так и группой. Диагностика уровня усвоения дает возможность индивидуализировать обучение, наметить для каждого студента максимальные, реально достижимые результаты обучения. Участие в тестировании подключает студента к анализу и самооценке его собственной учебной деятельности. Знание результатов тестирования по отдельным темам дисциплины позволяет ему спрогнозировать свою возможную итоговую оценку и, при желании, предпринять усилия для ее повышения. Применение данного устройства позволит студенту самостоятельно контролировать, оценивать и корректировать свою познавательную деятельность

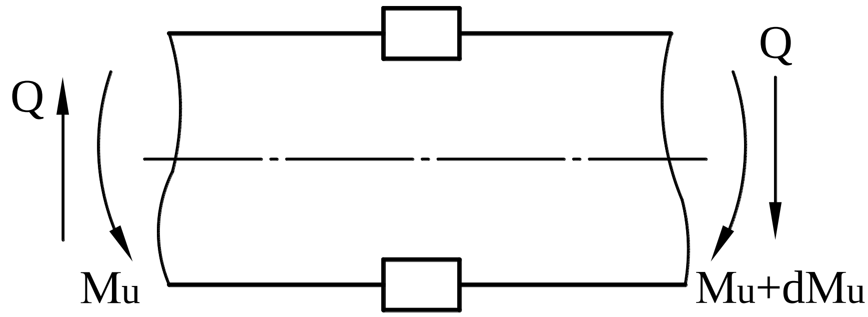
14.1. Изгиб

14.1.1. В каком виде напряженного состояния находится центральное волокно балки при изгибе? (ДМ)



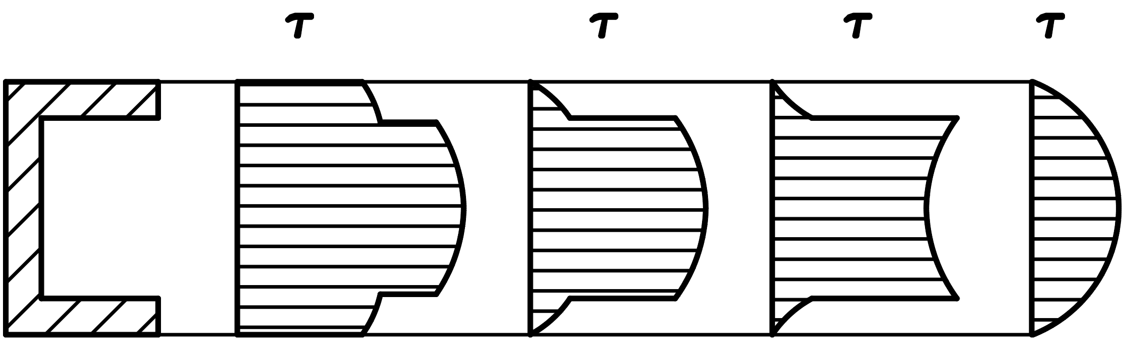
- ☐ *растяжение* (111)
- ☐ *сжатие* (112)
- ☐ *чистый изгиб* (113)
- ☐ *чистый сдвиг* (114)
- ☐ *поперечный изгиб* (115)

14.1.2. В каком виде напряженного состояния находятся периферийные волокна балки при изгибе? (ЯВ)



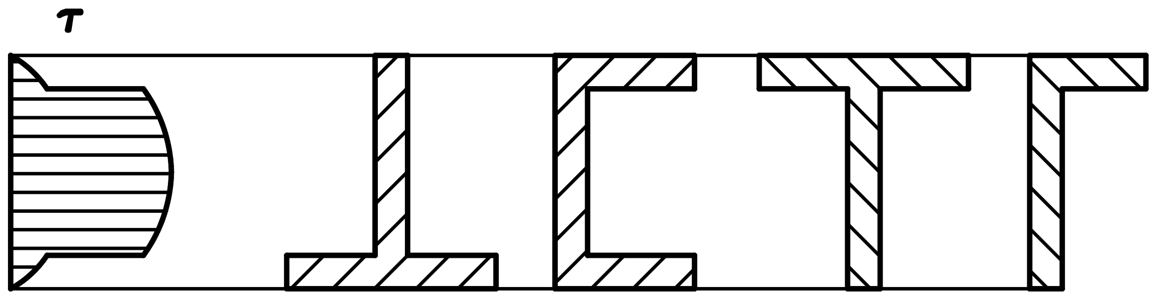
☐ *чистый сдвиг* (121)
☐ *плоское напряженное состояние* (122)
☐ *линейное напряженное состояние* (123)
☐ *объемное напряженное состояние* (124)

14.1.3. Какой из вариантов соответствует правильному распределению касательных напряжений по швеллерному поперечному сечению при изгибе? (ЯД)



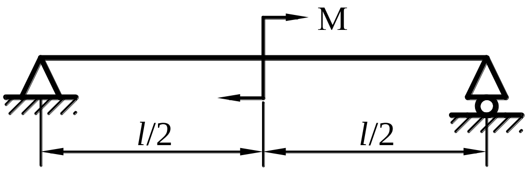
(131) ☐ (132) ☐ (133) ☐ (134) ☐

14.1.4. Какому профилю соответствует эпюра касательных напряжений при изгибе? (КР)

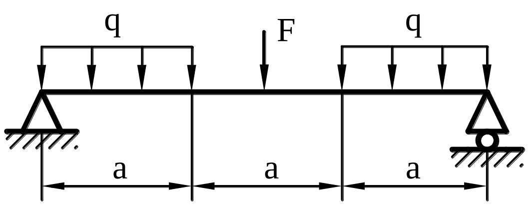


(141) ☐ (142) ☐ (143) ☐ (144) ☐

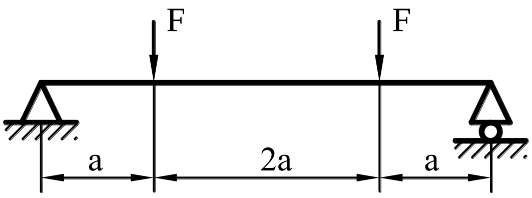
14.1.5. У какой балки есть участок, работающий в условиях чистого изгиба? (КЕ)



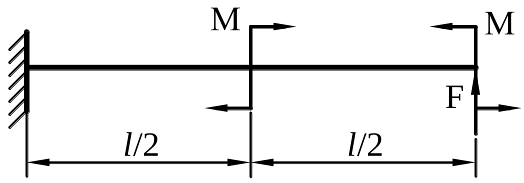
(151) ☐



(152) ☐

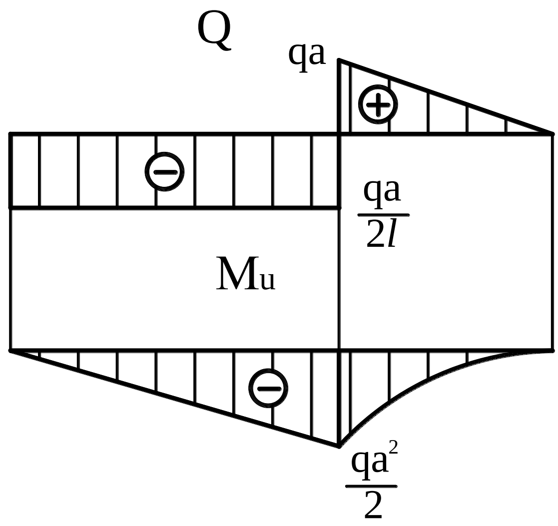


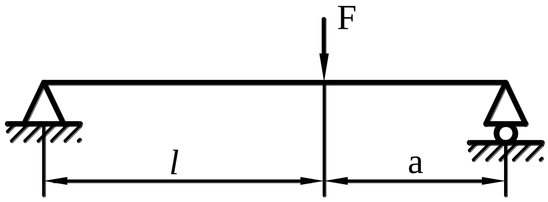
(153) ☐



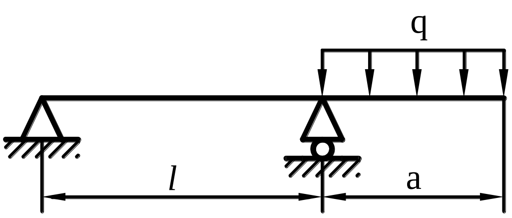
(154) ☐

14.1.6. Найти балку, в которой возникают силовые факторы **Q** и **Mu**, эпюры которых указаны на рисунке? (ЛР)

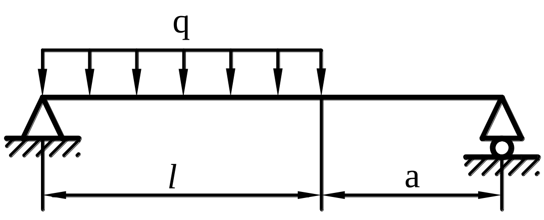




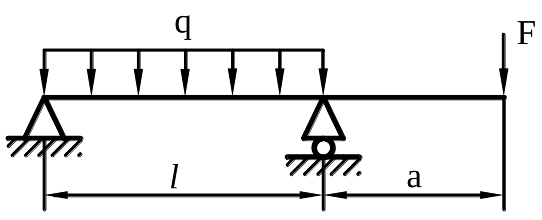
(161)



(162)

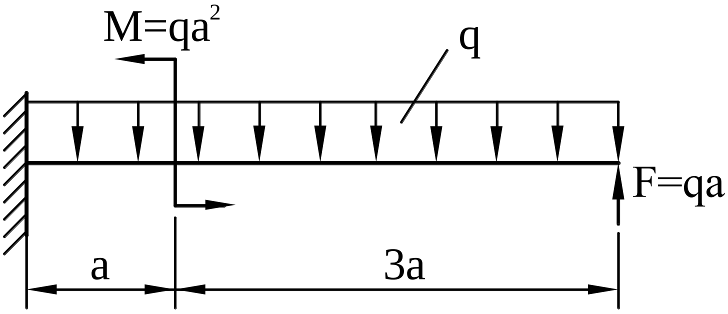


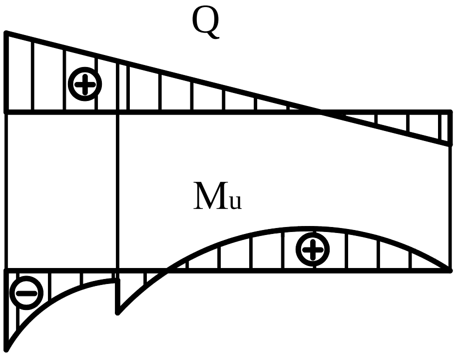
(163)



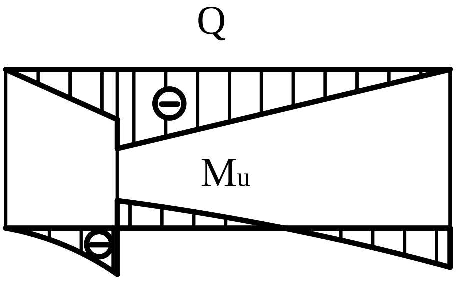
(164)

14.1.7. Какие эпюры **Q** и **Mu** соответствуют заданной балке? (ЛЯ)

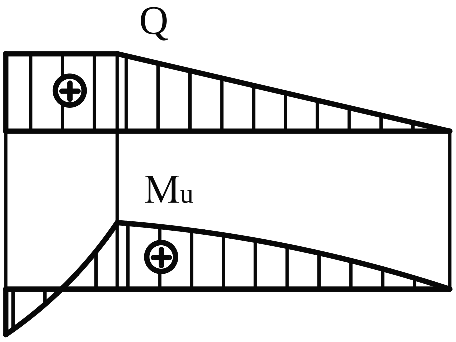




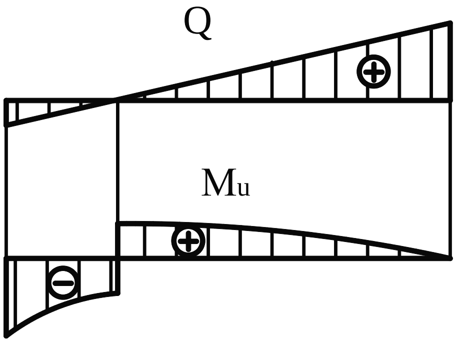
(171)
☐



(172)
☐

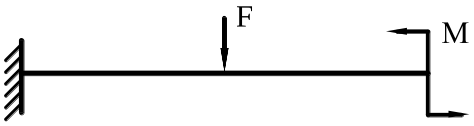


(173)
☐



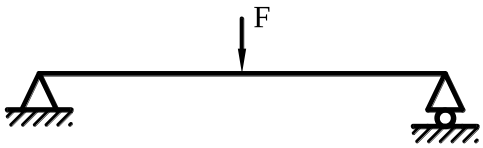
(174)
☐

14.1.8. Для какой балки можно использовать простое уравнение упругой линии балки для определения перемещений? (ОТ)



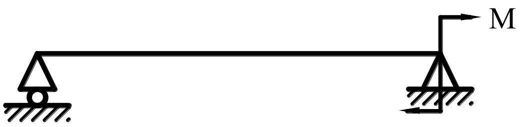
(181)

☐



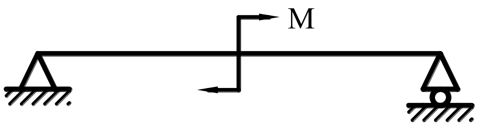
(182)

☐



(183)

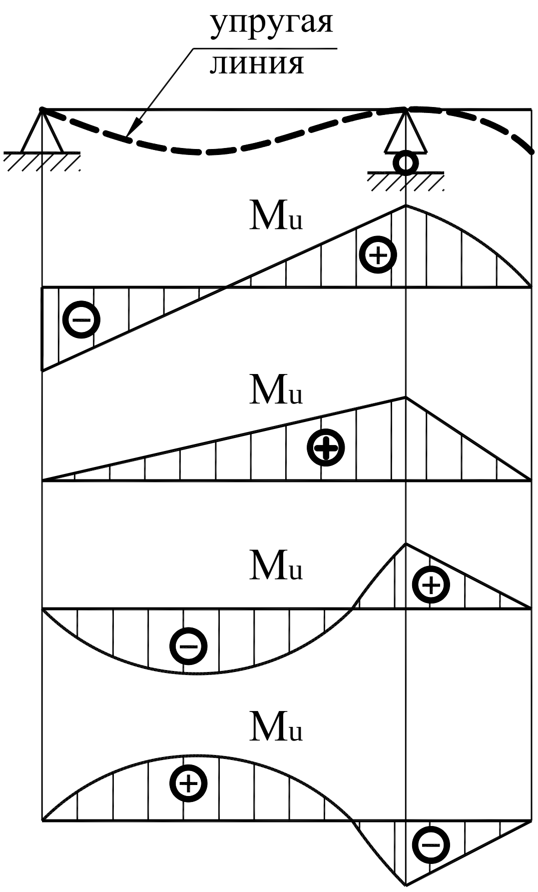
☐



(184)

☐

14.1.9. Балка нагружена внешними силами, которые на рисунке не указаны, но показано деформированное состояние балки. Какая эпюра **Mu** соответствует упругой линии? (ДН)



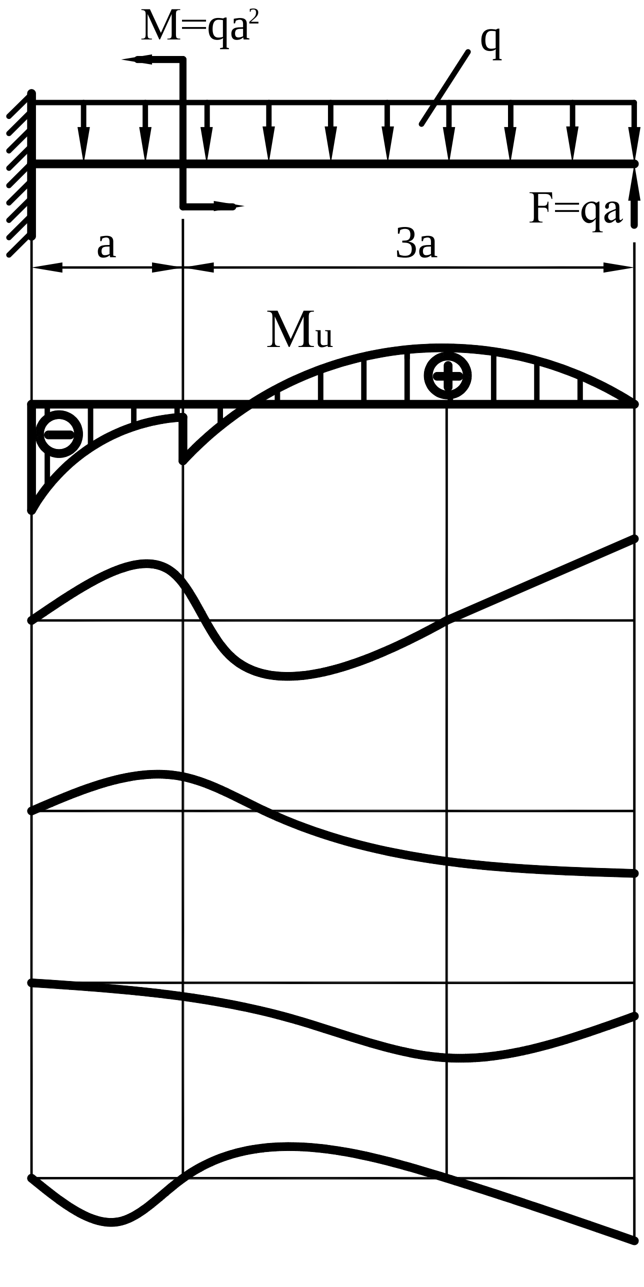
☐(191)

☐(192)

☐(193)

☐(194)

14.1.10. На рисунке показана балка и эпюра моментов. Какая упругая линия балки соответствует конструкции и нагрузке заданной балке? (ОА)



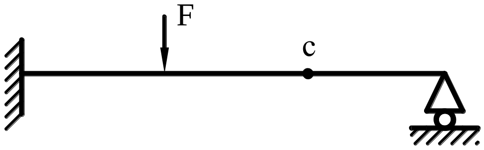
☐(1101)

☐(1102)

☐(1103)

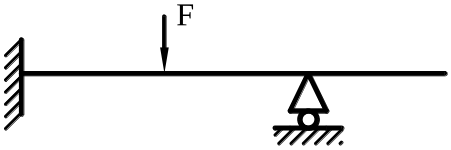
☐(1104)

14.1.11. Какая балка является статически неопределимой? В вариантах (1101) и (1104) введен шарнир в сечении **С**. (ЯЕ)



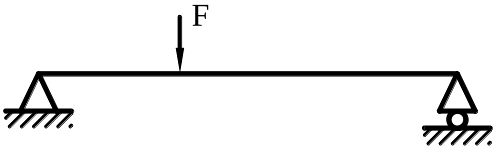
(1111)

☐



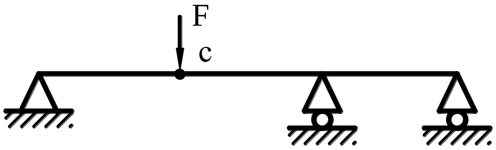
(1112)

☐



(1113)

☐



(1114)

☐

14.1.12. Какой из интегралов является осевым моментом инерции сечения? (ОР)

$\int_A y\,dA$	$\int_A y^2 dA$	$\int_A y^3 dA$	$\int_A dA$
(1121)	(1122)	(1123)	(1124)
☐	☐	☐	☐

14.1.13. Какой из интегралов является статическим моментом площади сечения? (ДН)

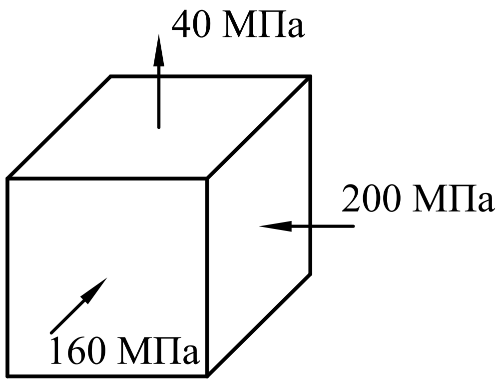
$\int_A y^2 dA$	$\int_A xy\,dA$	$\int_A x^2 dA$	$\int_A y\,dA$
(1131)	(1132)	(1133)	(1134)
☐	☐	☐	☐

14.1.14. Какой из интегралов является центробежным моментом инерции сечения? (ЛВ)

$\int_A y^2 dA$	$\int_A x^2 y^2 dA$	$\int_A xy\,dA$	$\int_A x\,dA$
(1141)	(1142)	(1143)	(1144)
☐	☐	☐	☐

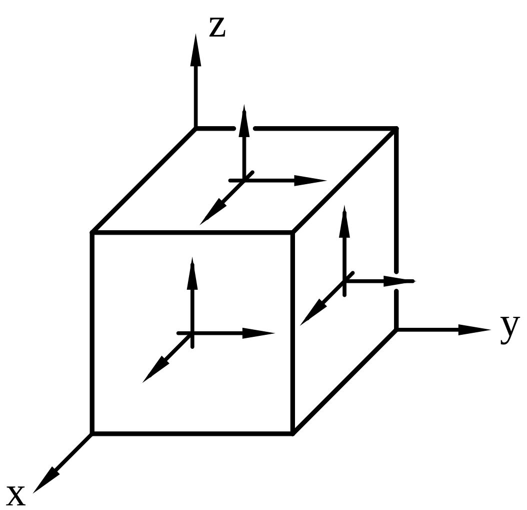
14.2. Напряженно деформированное состояние

14.2.1. Укажите главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3. (ХД)



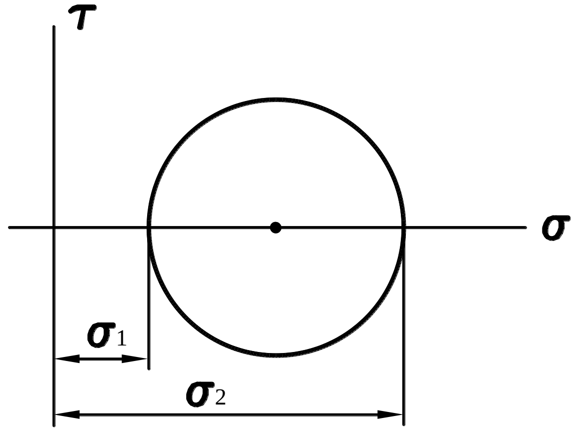
☐ σ_1=200 МПа, σ_2=160 МПа, $\sigma_3 = 40$МПа (211)
☐ σ_1=160 МПа, σ_2=200 МПа, $\sigma_3 = 40$МПа (212)
☐ σ_1=40 МПа, σ_2=200 МПа, $\sigma_3 = 160$МПа (213)
☐ σ_1=40 МПа, σ_2=160 МПа, $\sigma_3 = 200$МПа (214)

14.2.2. Элементарный параллелепипед вырезан из тела, нагруженного сложной системой внешних сил. Сколько независимых напряжений σ и τ определяют напряженное состояние? (НИ)



☐ *3* (221)
☐ *6* (222)
☐ *9* (223)
☐ *12* (224)

14.2.3. Для исследования какого вида или каких видов напряженных состояний (Н.С.) используется круговые диаграммы Мора? (НМ)



☐ *для плоского Н.С.* (231)
☐ *для всех видов Н.С.* (232)
☐ *для плоского и линейного* (233)
☐ *для объемного* (234)
☐ *для линейного* (235)

14.2.4. Чем отличаются 3 и 5 теории прочности? (ВР)

☐ *ничем, обе используются для хрупких материалов* (241)
☐ *одна из них* 3 *используется для хрупких материалов, другая для пластичных* 5 (242)
☐ *одна из них* 3 *используется для пластичных материалов, другая для хрупких* 5 (243)
☐ *одна из них* 5 *является обобщенной и используется для любых материалов как хрупких, так и пластичных; другая только для пластичных* 3 (244)

14.2.5. Изменение объема тела при объемном напряженном состоянии определяется формулой $E_0 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$. Есть ли изменение объема при простом растяжении? (ИЗ)

☐ *да* (251)
☐ *нет* (252)

14.2.6. При каких видах напряженных состояний (Н.С.) имеется изменение объема тела, которое выражается формулой $E_0 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$. (ШЛ)

- ☐ *при плоском и объемном Н.С.* (261)
- ☐ *при объемном* (262)
- ☐ *при всех Н.С.* (263)
- ☐ *только при плоском* (264)

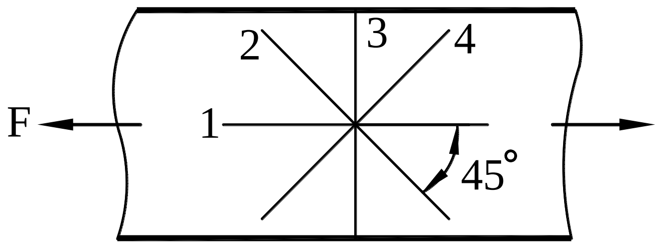
14.2.7. Объемная деформация выражается формулой $E_0 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$. Что такое μ и в каких пределах он изменяется? (ТЕ)

- ☐ *1…2* (271)
- ☐ *0,5…1* (272)
- ☐ *0…2* (273)
- ☐ *0…0,5* (274)

14.2.8. Объемная деформация определяется по формуле $E_0 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$. Укажите формулу объемной деформации через напряжения на площадках общего положения, где есть и σ и τ.(МТ)

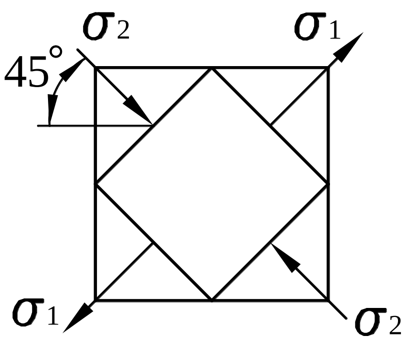
- ☐ $E_0 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ (281)
- ☐ $E_0 = \frac{1-2\mu}{E}(\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{xz})$ (282)
- ☐ $E_0 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \tau_{yz})$ (283)
- ☐ $E_0 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$ (284)

14.2.9. Укажите главную площадку. (МЯ)



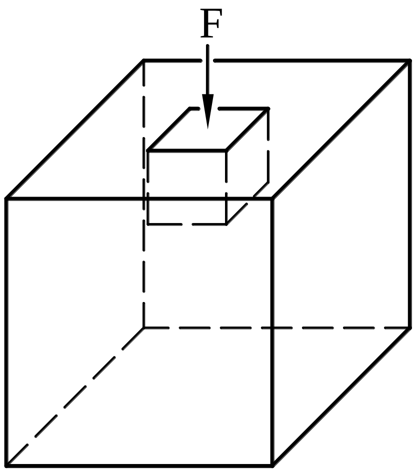
□ *1* (291)
□ *2* (292)
□ *3* (293)
□ *4* (294)

14.2.10. Укажите вид напряженного состояния. $|\sigma_1| = |\sigma_2|$. (ЛВ)



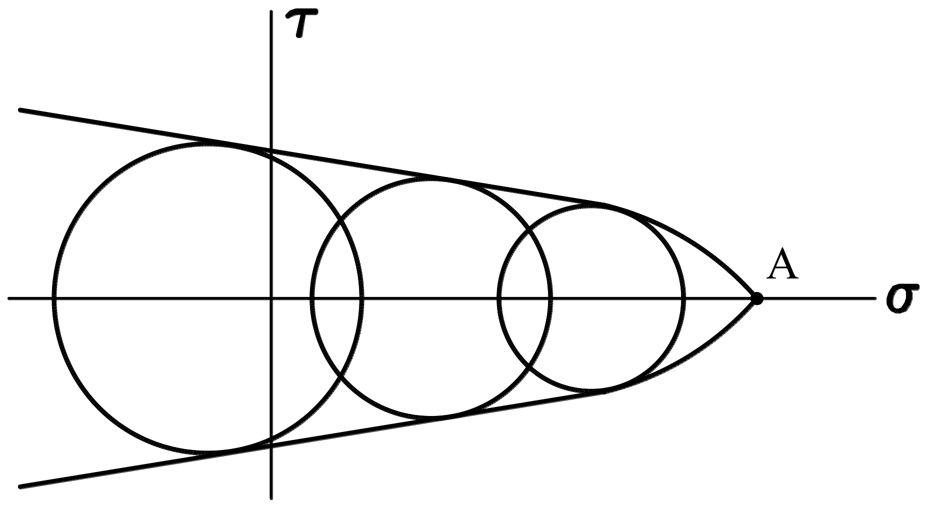
□ *чистый изгиб* (2101)
□ *поперечный изгиб в периферийных волокнах* (2102)
□ *чистый сдвиг* (2103)
□ *линейное напряженное состояние* (2104)

14.2.11. Деформируемый кубик вставлен без зазора в абсолютно жесткое тело. Какой вид напряженного состояния испытывает кубик? (КЕ)



□ *линейное* (2111)
□ *объемное* (2112)
□ *плоское* (2113)
□ *чистый сдвиг* (2114)

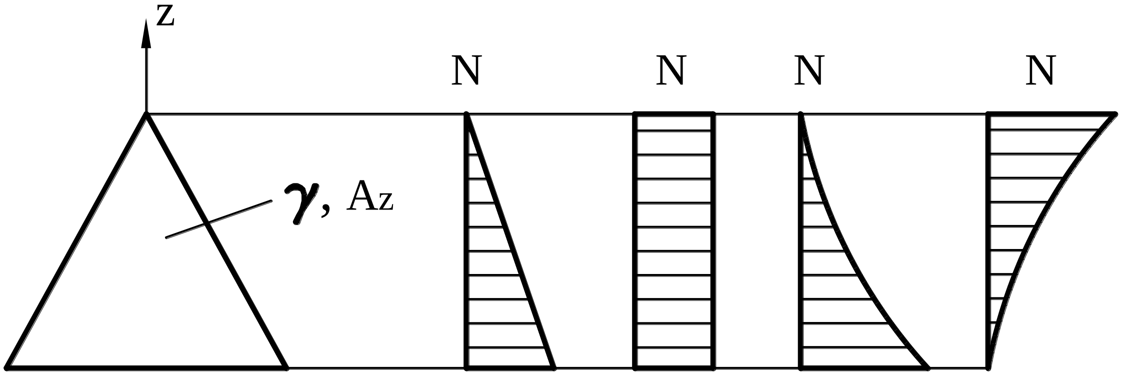
14.2.12. Какому виду напряженного состояния (Н.С.) соответствует точка **А**? (ЛР)



☐ *плоскому (Н.С.) с* $\sigma_1 = \sigma_2$ (2121)
☐ *объемному (Н.С.) с* $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (2122)
☐ *объемному (Н.С.) с* $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_3$ (2123)
☐ *линейному (Н.С.)* (2124)
☐ *всем видам (Н.С.)* (2125)

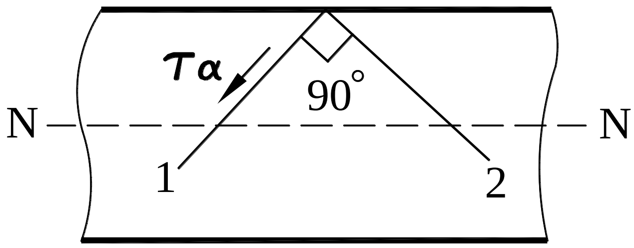
14.3. Растяжение сжатие

14.3.1. Конус нагружен собственным весом. Какая эпюра внутренних усилий соответствует данной схеме нагружения? (МХ)



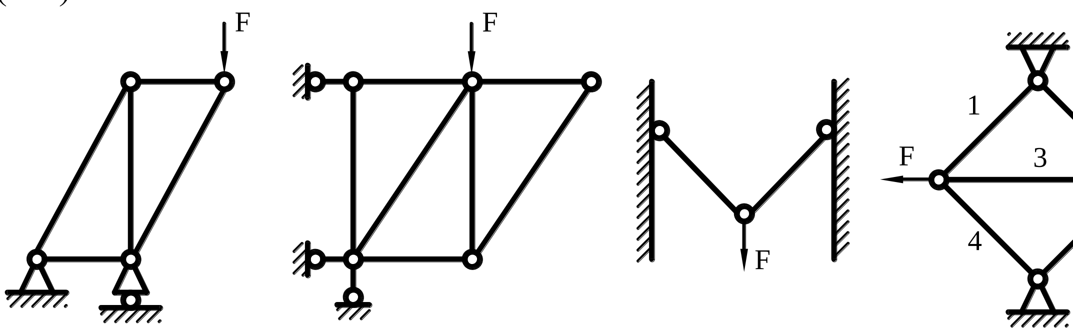
(311) ☐ (312) ☐ (313) ☐ (314) ☐

14.3.2. Дано касательное напряжение на первой площадке $\tau_1 = \tau_\alpha$. Определить величину касательного напряжения на второй площадке. (ЗИ)



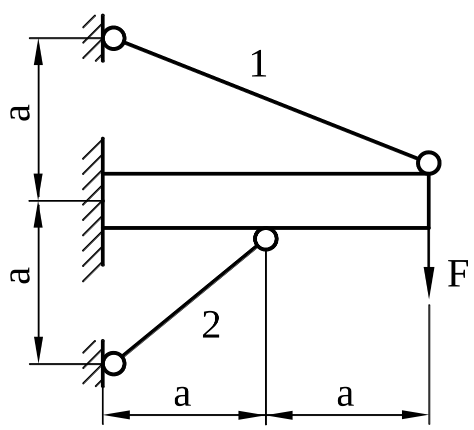
☐ $\tau_2 = -\tau_\alpha$ (321)
☐ $\tau_2 = -\tau_{\alpha+90^\circ}$ (322)
☐ $\tau_2 = \tau_{\alpha-90^\circ}$ (323)
☐ $\tau_2 = \tau_{\alpha+90^\circ}$ (324)

14.3.3. Какая из конструкций является статически неопределимой? (ЗМ)



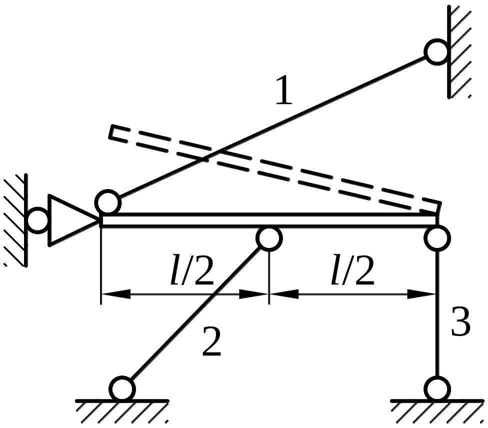
(331) ☐ (332) ☐ (333) ☐ (334) ☐

14.3.4. В каком из стержней **1** или **2** возникают наибольшие продольные силы? (ИЛ)



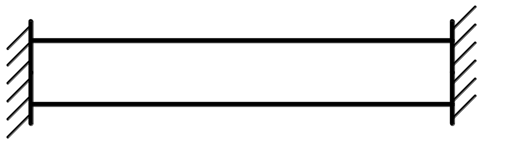
☐ *1* (341)
☐ *2* (342)
☐ *1 и 2* (343)

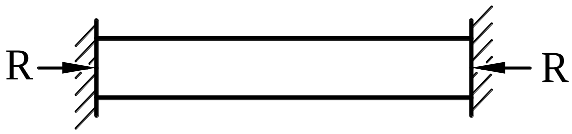
14.3.5. После нагрева одного из стержней **1**, **2** или **3**, горизонтальный жесткий стержень занял положение, показанное пунктиром. Какой стержень был нагрет? (ИЕ)



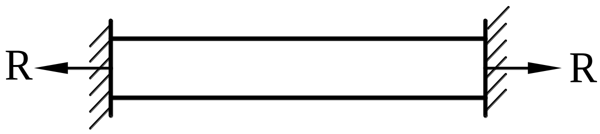
□ *1* (351)
□ *2* (352)
□ *3* (353)

14.3.6. Стержень охлажден на Δt. Укажите направление реакций. (ШР)

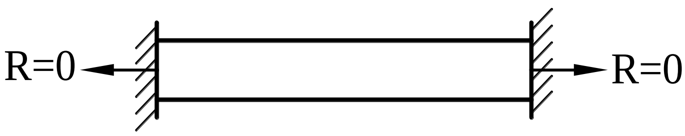




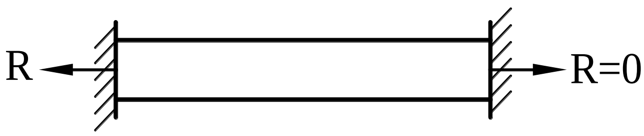
□ (361)



□ (362)

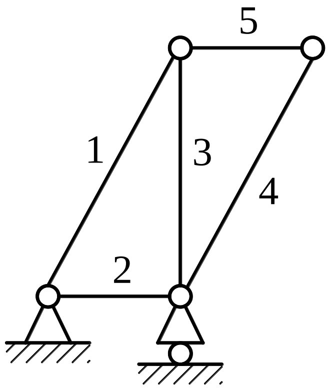


□ (363)



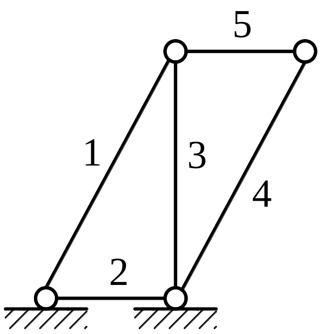
□ (364)

14.3.7. Возникнут ли температурные напряжения в стержнях, если стержень **5** нагреть на Δt. (ТН)



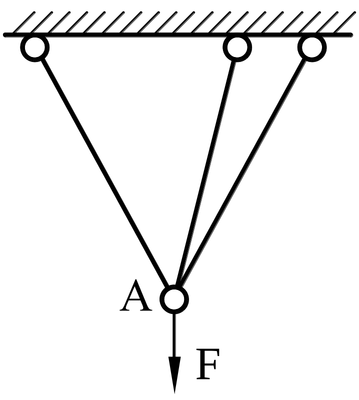
☐ *возникнут в стержне 5* (371)
☐ *возникнут во всех стержнях* (372)
☐ *возникнут только в 1, 2 и 5* (373)
☐ *не возникнут ни в одном стержне* (374)

14.3.8. Стержень **2** выполнен короче проектного на величину д. Возникнут ли монтажные напряжения в стержнях, если да, то в каких? (МР)



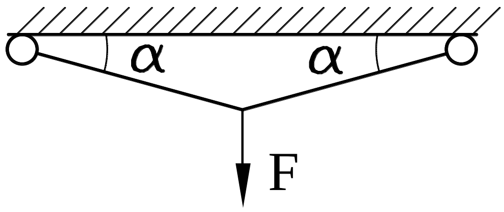
☐ *возникнут во всех стержнях* (381)
☐ *не возникнут ни в одном стержне* (382)
☐ *возникнут в стержне 2* (383)
☐ *возникнут в стержнях 1 и 2* (384)

14.3.9. В каком направлении переместится узел **А** под действием силы F? (МЗ)



☐ *в вертикальном* (391)
☐ *в вертикальном и влево в горизонтальном* (392)
☐ *в вертикальном и вправо в горизонтальном* (393)
☐ *в горизонтальном вправо* (394)
☐ *в горизонтальном влево* (395)

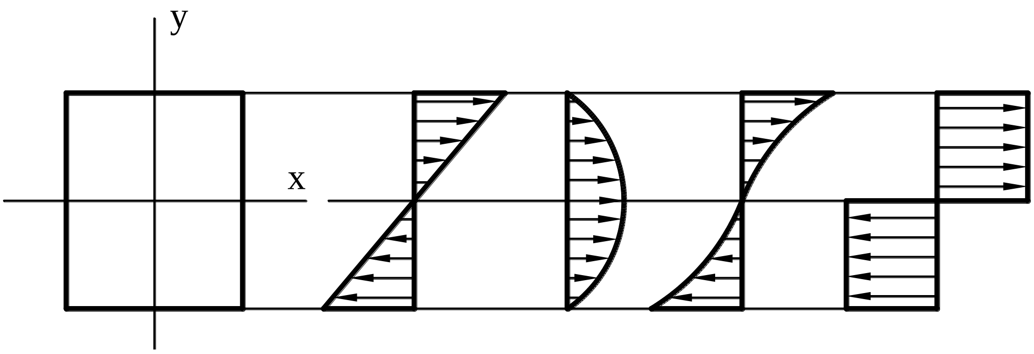
14.3.10. Чему будут равны внутренние усилия в каждом стержне при $\alpha = 0$? (КВ)



□ 2F (3101)
□ F (3102)
□ ∞ (3103)
□ 0 (3104)

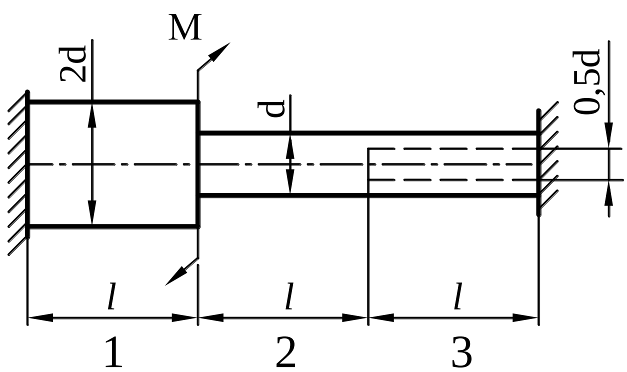
14.4. Кручение

14.4.1. Брус прямоугольного поперечного сечения закручивается моментом М. Какая эпюра распределения касательных напряжений верна? (ХМ)



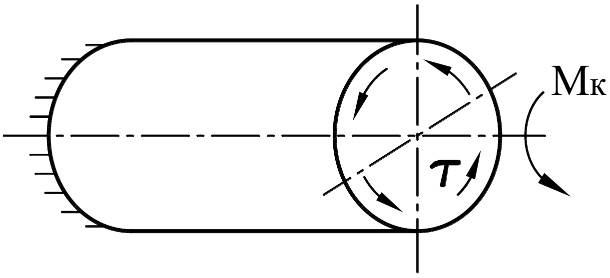
(411) □ (412) □ (413) □ (414) □

14.4.2. На каком участке **1**, **2** или **3** возникают наибольшие касательные напряжения? (ЗИ)



□ *на участке 1* (421)
□ *на участке 2* (422)
□ *на участке 3* (423)

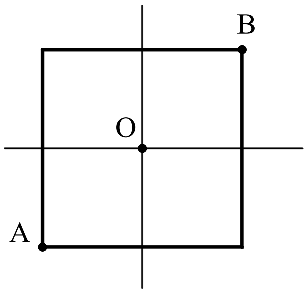
14.4.3. В поперечных сечениях при кручении возникают касательные напряжения τ. А есть ли τ в продольных волокнах? Если есть, то в каком направлении? (использовать закон парности) (ЗМ)



☐ *нет* (431)
☐ *направлены вдоль оси влево* (432)
☐ *направлены вдоль оси вправо* (433)
☐ *направлены под углом* 45° *к продольной оси* (434)

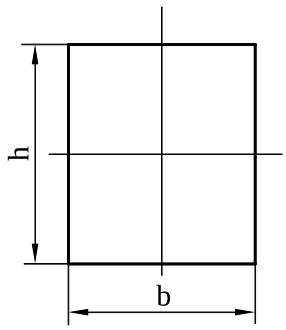
14.5. Внецентренное растяжение, сжатие

14.5.1. Дана точка приложения силы – **O** $(x = 0; y = 0)$. Где будет располагаться нейтральная линия? (МО)



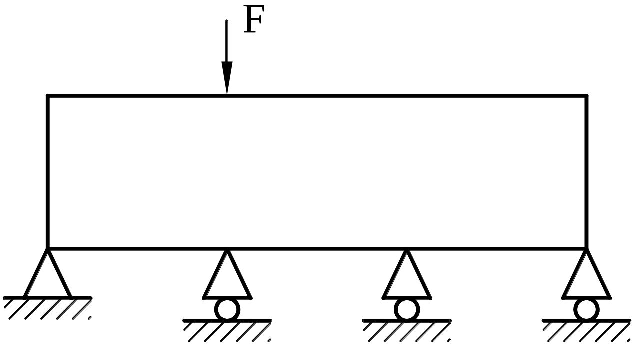
☐ *в точке O* (511)
☐ *в точке A* (512)
☐ *в точке B* (513)
☐ *в бесконечности* (514)

14.5.2. Какой фигурой изображается ядро сечения? (ЗА)



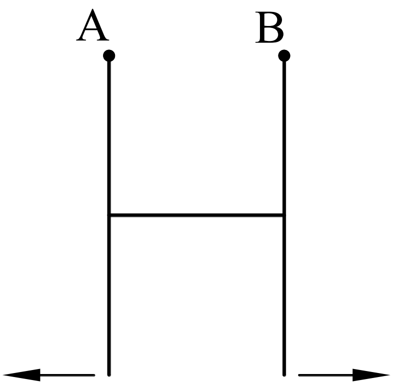
☐ *круг* (521)
☐ *квадрат* (522)
☐ *ромб* (523)
☐ *шестигранник* (524)

14.5.3. Сколько раз статически неопределима данная рама? (НО)



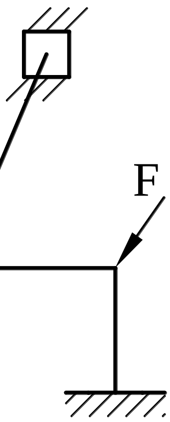
□ *8* (531)
□ *6* (532)
□ *4* (533)
□ *5* (534)
□ *2* (535)

14.5.4. Можно ли использовать интегралы Мора для определения взаимного перемещения точек **A** и **B**? (ВТ)



□ *нельзя* (541)
□ *можно* (542)
□ *можно, но только со способом Верещагина* (543)
□ *можно, но только для определения абсолютного перемещения или точки A или точки B* (544)

14.5.5. К каким системам относится данная конструкция? (ИЯ)

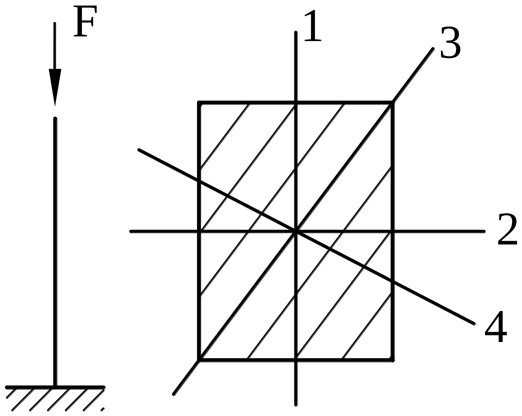


□ *к линейным* (551)
□ *к плоским* (552)
□ *к плоско-пространственным* (553)
□ *к пространственным* (554)

14.5.6. Что является критерием применяемости формулы Эйлера? (ШШ)

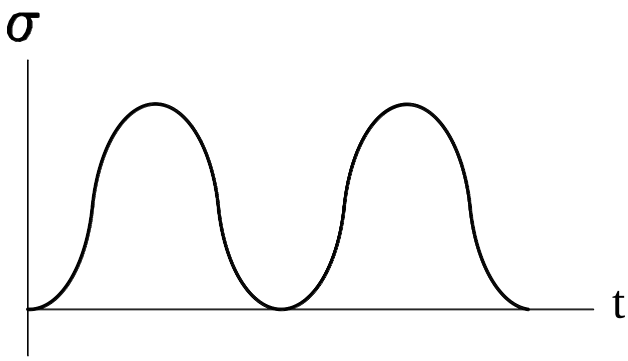
☐ *предел текучести* (561)
☐ *предел прочности* (562)
☐ *модуль сдвига* (563)
☐ *коэффициент продольного изгиба* (564)
☐ *предельная гибкость* (565)

14.5.7. Относительно какой оси произойдет продольный изгиб при потере устойчивости? (ТН)



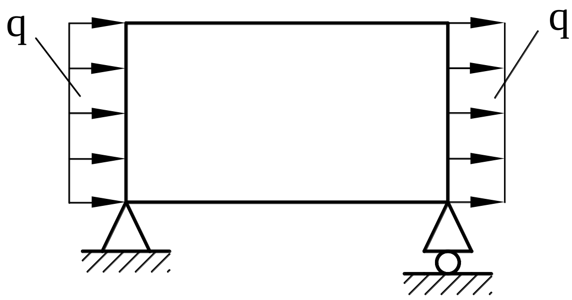
☐ *1* (571)
☐ *2* (572)
☐ *3* (573)
☐ *4* (574)

14.5.8. Чему равняется коэффициент асимметрии цикла **R**? (ХШ)



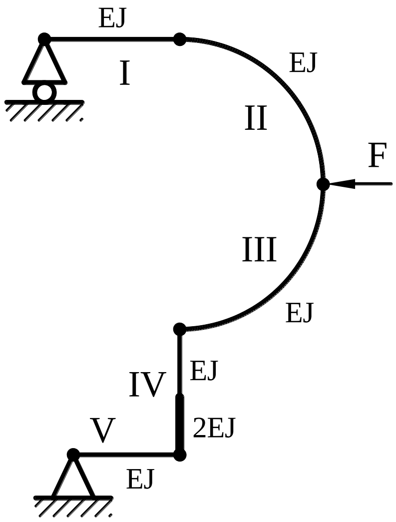
☐ $R = 0$ (581)
☐ $R = \infty$ (582)
☐ $R = \frac{1}{2}$ (583)
☐ $R = -1$ (584)

14.5.9. Сколько раз статически неопределима данная рама? (ХЕ)



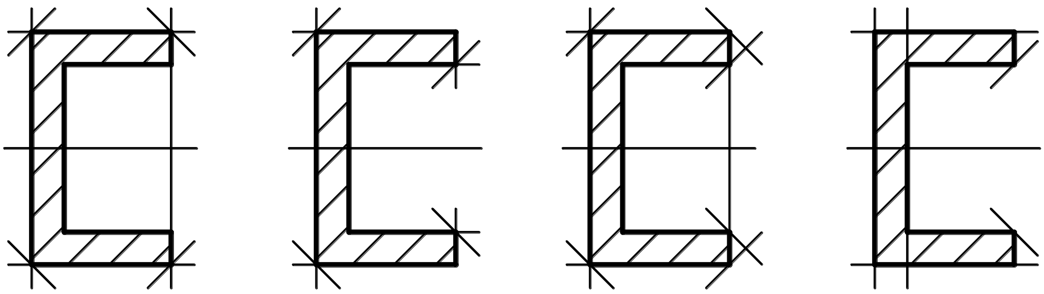
- ☐ *2* (591)
- ☐ *1* (592)
- ☐ *3* (593)
- ☐ *5* (594)
- ☐ *4* (595)

14.5.10. Для каких участков можно использовать способ Верещагина для определения перемещений? (ДН)



- ☐ *II*, *IV*, *V* (5101)
- ☐ *для всех* (5102)
- ☐ *II*, *III* (5103)
- ☐ *I*, *V* (5104)
- ☐ *только для IV* (5105)

14.5.11. Какой вариант обкатки нейтральной линии для получения ядра сечения является верным? (ЯК)



(5111)	(5112)	(5113)	(5114)
☐	☐	☐	☐

14.5.12. Что определяется по формуле Журавского? (ДМ)

- ☐ *нормальные напряжения* (5121)
- ☐ *критические напряжения* (5122)
- ☐ *линейную деформацию* (5123)
- ☐ *касательные напряжения* (5124)
- ☐ *прогиб* (5125)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1976.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1989.
4. Александров А.В. и др. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 2000.
5. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. А.С. Вольмира. М.: Наука, 1984.
6. Миролюбив А.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. М.: Высшая школа, 1974.
7. Буланов Э.А. Решение задач по сопротивлению материалов. М.: Высшая школа, 1994.

Учебное издание

ХОХЛОВ Виктор Александрович
ЦУКУБЛИНА Капитолина Николаевна
КУПРИЯНОВ Николай Амвросиевич
ЛОГВИНОВА Наталья Александровна

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Научный редактор *доктор технических наук, профессор Б.П. Белозеров*
Редактор *Л.А. Холопова*
Компьютерная верстка *Н.А. Логвинова*
Дизайн обложки *О.А. Аршинова*

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати 24.02.2011. Формат 60х84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 13,25. Уч.-изд. л. 12,0.
Заказ 236-11. Тираж 70 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru