

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
Отделение естественных наук ШБИП

УТВЕРЖДАЮ
Директор ШБИП
_____ Д.В. Чайковский
«__» _____ 2022 г.

О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических
процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодТ–05
для студентов всех специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
2022

УДК 53(076.5)
ББК 22.3я73
Р321

Р321 **Ревинская О.Г.**

Распределение Больцмана: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодТ–05 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – 18 с.

УДК 53(076.5)
ББК 22.3я73

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию
методическим семинаром отделения естественных наук ШБИП
«___» _____ 20__ г.

Зав. ОЕН ШБИП
проф., доктор физ.-мат. наук

В.П. Кривобоков

Председатель учебно-методической комиссии

С.И. Борисенко

Рецензент
доктор физ.-мат. наук, доцент Томского политехнического университета
С.И. Борисенко

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2002–2022
© Ревинская О.Г., Кравченко Н.С., 2002–2022
© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2022

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № МодТ–05 ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Распределение Больцмана

Цель работы: изучение распределения Больцмана на примере распределения взвешенных частиц по высоте в поле силы тяжести. Определение постоянной Больцмана.

1. Теоретическое содержание

Распределение Больцмана – это функция распределения, описывающая зависимость концентрации молекул идеального газа от высоты в поле силы тяжести (от их потенциальной энергии) в условиях термодинамического равновесия.

1.1. Зависимость концентрации молекул идеального газа от высоты

Когда на молекулы газа не действуют внешние силы, хаотическое (тепловое) движение приводит к тому, что частицы газа равномерно распределяются по объему сосуда, так что в единице объема содержится в среднем одинаковое число частиц. В равновесном состоянии давление и температура газа также одинаковы во всем объеме.

Влияние внешних сил, например, силы тяжести, в сочетании с хаотическим движением молекул приводит к неравномерному распределению молекул газа в пространстве. Соответственно этому распределению устанавливается и определенный закон изменения концентрации молекул и давления газа.

Рассмотрим газ, находящийся в поле силы тяжести в состоянии термодинамического равновесия. Будем считать, что температура газа T везде одинакова.

Пусть газ помещен в сосуд с площадью поперечного сечения S . Согласно закону Паскаля давление газа на высоте h определяется весом столба газа, расположенного выше, приходящимся на единицу площади (рис. 1). В описанных условиях вес газа равен силе тяжести газа M_2g

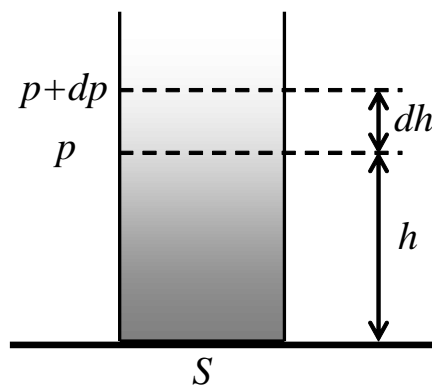


Рис. 1

$p = \frac{M_2 g}{S}$, где M_2 – масса газа, расположенного выше уровня h .

Над уровнем $h + dh$ расположено меньше газа $M_2 - dM_2$, поэтому давление $p + dp$ на высоте $h + dh$ равно

$$p + dp = \frac{(M_2 - dM_2)g}{S},$$

где dM_2 – масса газа, заключенного в объеме $dV = Sdh$. Следовательно, с увеличением высоты на dh давление изменяется на $dp = (p + dp) - p$

$$dp = -\frac{gdM_2}{S}.$$

Масса газа dM_2 – есть суммарная масса всех молекул газа, находящихся в объеме $dV = Sdh$. Если масса одной молекулы равна m , а dN – количество молекул в рассматриваемом объеме, то $dM_2 = m dN$. Количество молекул равно произведению концентрации молекул n на объем dV . Тогда

$$dM_2 = mdN = mnSdh.$$

С другой стороны согласно молекулярно-кинетической теории давление газа связано с его концентрацией $p = nkT$ (k – постоянная Больцмана). Следовательно, при постоянной температуре ($T = const$) изменение давления dp возможно только за счет изменения концентрации: $dp = kT dn$.

Подставив выражения для dM_2 и dp в уравнение $dp = -\frac{gdM_2}{S}$, выведенное из закона Паскаля, получим

$$dp = -\frac{gdM_2}{S} \Rightarrow kT dn = -\frac{mgnSdh}{S} \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT} dh.$$

Если считать, что концентрация молекул газа на высоте $h = 0$ равна n_0 , то полученное уравнение можно проинтегрировать по высоте от 0 до h следующим образом

$$\int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT} \int_0^h dh \Rightarrow \ln n - \ln n_0 = -\frac{mg}{kT} h$$

или $n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$.

Таким образом, концентрация молекул газа в поле силы тяжести убывает с ростом высоты по экспоненциальному закону (рис. 3). А так как давление пропорционально концентрации, то и давление газа убывает с высотой по тому же закону.

1.2. Зависимость концентрации частиц от их потенциальной энергии

Величина mgh в показателе экспоненты представляет собой потенциальную энергию одной молекулы газа на высоте h . Поэтому полученная формула устанавливает взаимосвязь между концентрацией n молекул (частиц) с потенциальной энергией $U = mgh$ и концентрацией n_0 частиц с энергией равной нулю. Нет никаких оснований считать, что поведение газа изменится, если вместо поля силы тяжести на него будет действовать какое-либо другое консервативное потенциальное поле, а выражение для энергии будет иметь другой вид.

Поэтому если газ находится в каком-нибудь потенциальном силовом поле, то концентрация частиц, обладающих заданной энергией U , определяется формулой

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}},$$

которая называется **формулой Больцмана (распределение Больцмана)**.

Полученное распределение является результатом конкуренции двух процессов (в показателе экспоненты): хаотического (теплового) движения молекул, стремящегося равномерно распределить частицы в пространстве, и направленного действия потенциального поля, стремящегося уменьшить потенциальную энергию частиц. С ростом потенциальной энергии U относительная концентрация частиц n/n_0 уменьшается (при $kT = const$), а с ростом энергии kT хаотического (теплового) движения – увеличивается (при $U = const$).

При больших температурах T_2 зависимость концентрации $n = n(U)$ от потенциальной энергии имеет более плавный вид (рис. 2), чем при малых температурах T_1 . Следовательно, при больших температурах T_2 увеличивается концентрация частиц с высокой потенциальной энергией. То есть повышение температуры T позволяет частицам приобрести более высокую потенциальную энергии U . В условиях однородного поля силы тяжести это означает, что при больших температурах частицы могут подняться на большую высоту h .

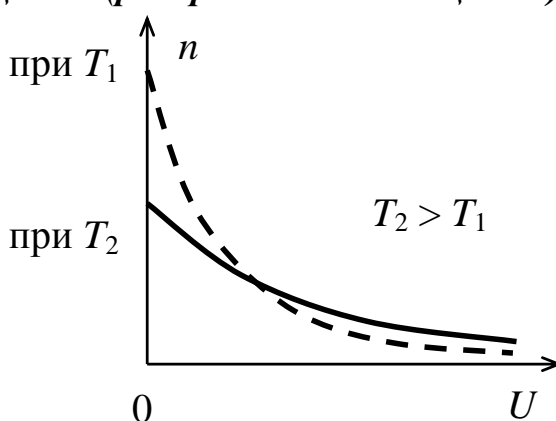


Рис. 2

1.3. Физический смысл распределения Больцмана

Распределение Больцмана позволяет определить концентрацию частиц на заданной высоте – количество частиц в единице объема. Рассмотрим идеальный газ, помещенный в сосуд с площадью основания S (рис. 1). На высоте h выделим элементарный объем $dV = Sdh$. Количество dN молекул (частиц) в этом объеме пропорционально величине объема и концентрации частиц

$$dN = n dV = n S dh.$$

Учитывая, что распределение концентрации n подчиняется формуле Больцмана, а в однородном поле силы тяжести потенциальная энергия частиц зависит от высоты $U = mgh$, получим

$$dN = n_0 e^{-\frac{mg}{kT}h} S dh.$$

Чтобы определить количество частиц N_{12} , находящихся в слое между уровнями h_1 и h_2 , необходимо проинтегрировать

полученное выражение по высоте h в пределах от h_1 до h_2 :

$$N_{12} = \int_{h_1}^{h_2} dN = n_0 S \int_{h_1}^{h_2} e^{-\frac{mg}{kT}h} dh = n_0 S \frac{kT}{mg} \left(e^{-\frac{mg}{kT}h_1} - e^{-\frac{mg}{kT}h_2} \right).$$

С геометрической точки зрения количество частиц N_{12} в слое между уровнями h_1 и h_2 – это площадь под кривой функции распределения Больцмана на интервале $[h_1, h_2]$ (рис. 3).

Общее число частиц N в сосуде неограниченной высоты ($h_1 = 0$, $h_2 = \infty$) равно

$$N = n_0 S \int_0^{\infty} e^{-\frac{mg}{kT}h} dh = n_0 S \frac{kT}{mg}, \quad N = n_0 S \frac{kT}{mg}.$$

Тогда количество частиц N_{12} в слое между уровнями h_1 и h_2 можно записать в виде

$$N_{12} = N \left(e^{-\frac{mg}{kT}h_1} - e^{-\frac{mg}{kT}h_2} \right),$$

где N – общее количество молекул газа.

Аналогично можно показать, что количество $N_{[0,h]}$ молекул газа, находящихся в слое от 0 до h , равно

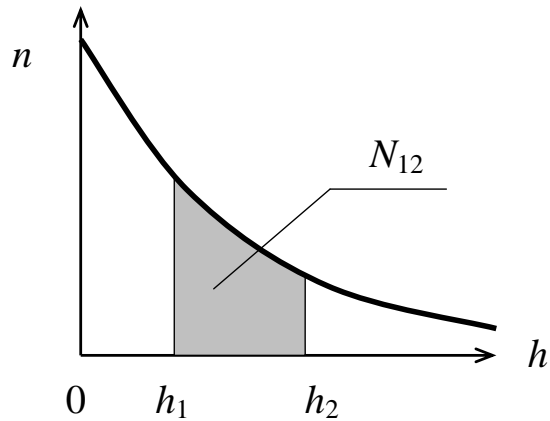


Рис. 3

$$N_{[0,h]} = N \left(1 - e^{-\frac{mg}{kT}h} \right).$$

Из выражения для общего количества молекул $N = n_0 S \frac{kT}{mg}$ видно, что $n_0 = N \frac{mg}{SkT}$. Следовательно, если общее количество N молекул газа фиксировано, то с ростом температуры T концентрация частиц n_0 на нулевой высоте $h = 0$ (с нулевой потенциальной энергией $U = 0$) уменьшается (рис. 2), а концентрация n частиц на больших высотах – возрастает.

Сравнивая распределение по высоте молекул газов различной массы m , можно заметить, что чем больше масса m молекул газа, тем больше их концентрация n_0 на нулевой высоте. С увеличением массы возрастает также и потенциальная энергия $U = mgh$ частиц. Следовательно, наблюдается более резкое убывание количества частиц с высотой.

Таким образом, распределение молекул газа по высоте в потенциальном поле силы тяжести зависит от температуры газа и массы молекул.

2. Рабочие формулы

Трудность экспериментального изучения распределения Больцмана заключается в том, что молекулы газов невидимы в микроскоп и измерение их концентраций на разных высотах невозможно. В 1908–10 гг. Ж. Перрен предложил эксперимент,

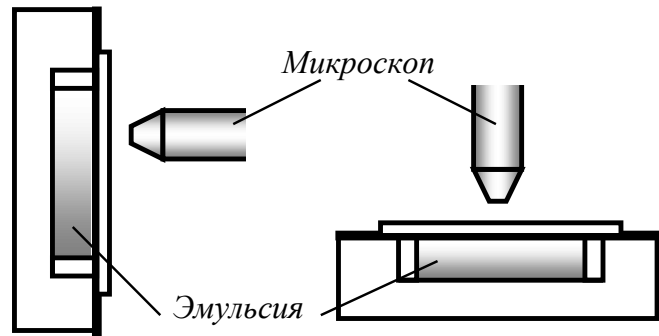


Рис. 4

позволивший не только изучить распределение Больцмана, но на его основе определить постоянную Больцмана. Известные к этому времени опыты с броуновским движением показали, что небольшие взвешенные в жидкости частицы можно трактовать, как невзаимодействующие молекулы очень больших размеров. Поэтому можно ожидать, что частицы типа броуновских, взвешенные в жидкости, под действием силы тяжести будут распределяться по высоте так же, как молекулы газа, то есть по закону Больцмана.

Для изучения распределения Больцмана Ж. Перрен приготовил эмульсию, растворив в жидкости специальным образом полученные частицы гуммигута одинакового диаметра. Чтобы под действием силы

тяжести частицы не оседали на дно кюветы, а оставались взвешенными в жидкости, они должны быть достаточно малы (диаметр менее 1 мкм). Поэтому распределение частиц по высоте исследовалось под микроскопом. Кювету с эмульсией (взвешенными в жидкости частицами) и микроскоп можно расположить двумя способами (рис. 4): кювета с эмульсией располагается вертикально, а микроскоп – горизонтально; или наоборот, кювета располагается горизонтально, а микроскоп – вертикально. В первом случае, чтобы наблюдать частицы, расположенные на разных высотах, перемещают окуляр микроскопа, а во втором – изменяют фокусировку. Перрен в своих опытах использовал оба способа. В данной работе кювета с жидкостью расположена вертикально, а микроскоп – горизонтально.

Запишем распределение Больцмана для частиц, взвешенных в жидкости. Сила Архимеда, действующая на частицу плотностью ρ в жидкости плотностью $\rho_{ж}$, уменьшает силу тяжести пропорционально весу вытесненной ею жидкости $m_{ж}g$ ($m_{ж} = V_0\rho_{ж}$ – масса жидкости, заключенная в объеме частицы V_0). То есть сила Архимеда приводит к уменьшению потенциальной энергии U частицы на высоте h

$$U = (mg - m_{ж}g)h = V_0(\rho - \rho_{ж})gh.$$

Следовательно, благодаря силе Архимеда концентрация броуновских частиц не так быстро будет убывать с высотой, как, например, в воздухе.

Если броуновские частицы имеют шарообразную форму, то объем каждой частицы равен $V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3$ (где r – радиус частицы). Тогда потенциальную энергию взвешенной частицы можно записать в виде

$$U = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_{ж})gh.$$

Подставляя полученное выражение для энергии в распределение Больцмана, получим, что в поле силы тяжести концентрация частиц зависит от высоты следующим образом:

$$n = n_0 e^{-\frac{4\pi r^3(\rho - \rho_{ж})gh}{3kT}}.$$

Для упрощения записей при дальнейших рассуждениях введем обозначение

$$C(T) = \frac{4\pi r^3(\rho - \rho_{ж})g}{3T}$$

– функция, зависящая от температуры T .

Тогда распределение Больцмана примет вид: $n = n_0 e^{-\frac{C(T)}{k}h}$.

Относительная концентрация (доля) $\frac{n}{n_0}$ частиц на высоте h :

$$\frac{n_0}{n} = e^{\frac{C(T)h}{k}},$$

Прологарифмируем полученное выражение:

$$\ln \frac{n_0}{n} = \frac{C(T)}{k} h.$$

Следовательно, если распределение частиц по высоте подчиняется распределению Больцмана, то логарифм относительной концентрации должен линейно зависеть от высоты. Такая несложная зависимость предоставляет метод для определения постоянной Больцмана k .

Постоянную Больцмана можно рассчитать, зная концентрацию частиц на двух уровнях n и n_0 , расположенных на высоте h один относительно другого, при заданной температуре T

$$k = \frac{C(T)h}{\ln \frac{n_0}{n}}.$$

Кроме того, для определения постоянной Больцмана можно использовать график зависимости логарифма относительной концентрации от высоты. Как было показано выше, эта зависимость носит линейный характер, следовательно, тангенс угла наклона $\text{tg } \alpha$ экспериментальной прямой будет равен $\frac{C(T)}{k}$. Тогда $k = \frac{C(T)}{\text{tg } \alpha}$.

Выполняя экспериментальные исследования, следует помнить, что броуновские частицы не только находятся в поле силы тяжести, но и движутся хаотически. Поэтому количество частиц на данной высоте может колебаться. Закон распределения Больцмана относится к статистическим закономерностям и справедлив при усреднении большого числа измерений.

3. Модель экспериментальной установки

В данной работе с помощью средств компьютерной графики моделируется распределение броуновских частиц взвешенных в вязкой жидкости в поле силы тяжести. Распределение частиц зависит от температуры жидкости, которую в работе можно изменять от точки кипения до точки затвердевания. В кювету с жидкостью помещены тождественные частицы шарообразной формы (одинакового диаметра). Для экспериментов можно использовать частицы диаметром от 0,3 до 0,6 мкм. Соотношение между плотностями частиц и жидкости таково, что взвешенные частицы можно наблюдать в диапазоне высот равным 277,2 мкм. Общее количество частиц в кювете фиксировано.

Так как размер частиц значительно меньше диапазона высот, то количество частиц на каждой высоте необходимо изучать под увеличением (под микроскопом). В работе можно использовать увеличение от 1:5 до 1:50. Измерения количества взвешенных частиц на различных высотах позволяют определить концентрацию частиц, построить функцию распределения и рассчитать постоянную Больцмана. При заданных условиях погрешность в определении постоянной Больцмана не превышает 5–6%.

Работа выполняется на IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание работы; порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста работы программы приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит раскрывающийся список для выбора жидкости, в которую помещаются броуновские частицы, счетчик для изменения температуры, ползунок для изменения массы (диаметра) частиц, раскрывающийся список для выбора увеличения области наблюдения.

Варианты выполнения работы

Вариант	Жидкость	Вариант	Жидкость
1	Раствор глицерина 50%	5	Тетраэтиленгликоль
2	Раствор триэтиленгликоля 85%	6	1,3-Бутиленгликоль
3	1,2-Пропиленгликоль	7	Масло касторовое
4	1,4-Бутиленгликоль	8	Масло подсолнечное

4. Порядок выполнения работы

4.1. Краткое описание хода работы

1. Выберите жидкость, в которой будет изучаться распределение взвешенных частиц (по указанию преподавателя).

Упражнение 1. Зависимость распределения частиц по высоте от массы частиц.

2. Задайте температуру жидкости, равную 320 К (47 °С).

3. Выберите частицы минимального диаметра (минимальной массы).

4. Подберите увеличение для области наблюдения.
5. Произвольно выберите горизонтальное положение области наблюдения.
6. Выберите вертикальное положение области наблюдения равным нулю.
7. Подсчитайте количество взвешенных частиц.
8. Подсчитайте количество взвешенных частиц на десяти высотах, начиная с нулевой.
9. Измените горизонтальное положение области наблюдения и повторите измерения (как в пунктах 6–8).
10. Выполните измерения для пяти положений области наблюдения по горизонтали.
11. Рассчитайте среднее количество частиц на каждой высоте.
12. Рассчитайте концентрацию частиц на каждой высоте.
13. Вычислите логарифм относительной концентрации частиц на каждой высоте.
14. Увеличьте массу (диаметр) взвешенных частиц.
15. Повторите измерения и расчеты (как в пунктах 4–13).
16. Постройте графики зависимости концентрации частиц от высоты.
17. Постройте графики зависимости логарифма относительной концентрации от высоты.
18. Сделайте выводы.
19. По тангенсу угла наклона линейных зависимостей определите значение постоянной Больцмана.

Упражнение 2. Зависимость распределения частиц по высоте от температуры.

20. Выберите частицы среднего диаметра (массы).
21. Задайте температуру жидкости близкую к минимальной.
22. Выполните измерения как в пунктах 4–13.
23. Увеличьте температуру жидкости.
24. Выполните измерения как в пунктах 4–13.
25. Постройте графики зависимости концентрации частиц от высоты.
26. Постройте графики зависимости логарифма относительной концентрации от высоты.
27. Сделайте выводы.
28. По тангенсу угла наклона линейных зависимостей определите значение постоянной Больцмана.
29. Вычислите среднее значение постоянной Больцмана.

4.2. Подробное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Раскрывающийся список **«Жидкость»** содержит набор жидкостей, обладающих различными плотностями: раствор глицерина, раствор триэтиленгликоля, 1,2-пропиленгликоль, 1,4-бутиленгликоль, тетраэтиленгликоль и др. Выберите жидкость, в которой будет изучаться распределение взвешенных частиц (по указанию преподавателя). Для выбранной жидкости под списком автоматически указывается ее плотность, необходимая для дальнейших расчетов, а также интервал температур от температуры кипения до температуры затвердевания.

Упражнение 1. Зависимость распределения частиц по высоте от массы частиц. Необходимо выполнить серию экспериментов для взвешенных частиц различной массы (диаметра) при одинаковой температуре.

2. Температуру жидкости можно изменять в пределах от точки затвердевания до точки кипения (у каждой жидкости свой диапазон температур, при котором данное вещество находится в жидком состоянии). Интервал доступных температур указан под счетчиком **«Температура»** при выборе жидкости. С помощью этого счетчика **«Температура»** задайте температуру жидкости, равную 320 К (47 °С).

3. В эксперименте могут использоваться взвешенные частицы различной массы. Массу частиц можно изменять в пределах от $0,02 \cdot 10^{-12}$ до $0,1 \cdot 10^{-12}$ г. С помощью ползунка **«Масса»**, расположенного на панели **«Взвешенные частицы»**, выберите для эксперимента частицы минимальной массы. Точное значение выбранной массы частиц указывается над ползунком.

Взвешенные частицы являются тождественными и имеют шарообразную форму. Плотность и соответствующий выбранной массе радиус частиц указывается на той же панели рядом с ползунком. Эти данные необходимы для дальнейших расчетов.

4. Жидкость вместе с помещенными в нее взвешенными частицами находится в кювете высотой 277,2 мкм, шириной 277,2 мкм, толщиной 5 мкм. Малая толщина кюветы позволяет одновременно наблюдать все частицы, расположенные на разной глубине. Некоторую выделенную область (область наблюдения) можно наблюдать при различном увеличении («под микроскопом»).

Область наблюдения («микроскоп») можно перемещать вдоль вертикального сечения кюветы в горизонтальном (по ширине кюветы) и вертикальном (по высоте кюветы) направлении либо с помощью мыши, либо с помощью вертикальной и горизонтальной полос **«Вертикальное положение области наблюдения»** и **«Горизонтальное положение области наблюдения»** на панели **«Кювета с жидкостью»**. Область наблюдения имеет форму квадрата. При перемещении положение выделенной области наблюдения в кювете изменяется дискретно, пропорционально размерам самой области наблюдения, которые указаны на панели **«Увеличенная область наблюдения»**. Благодаря этому одни и те же частицы не могут быть зафиксированы в двух соседних положениях области наблюдения. При перемещении выделенной области наблюдения по кювете ее горизонтальное и вертикальное положения автоматически фиксируются на панели **«Увеличенная область наблюдения»**.

Увеличенное изображение выделенной области наблюдения расположено справа на панели **«Увеличенная область наблюдения»**. Увеличение области наблюдения можно изменять в пределах от 1:5 до 1:50 с помощью счетчика **«Уве-**

личение» на той же панели. Обратите внимание, что большему увеличению соответствует меньший размер реальной выделенной области наблюдения в кювете с жидкостью, следовательно, меньшее количество частиц попадает в поле зрения «микроскопа».

Увеличение для области наблюдения необходимо подобрать так, чтобы **при измерении на десяти различных высотах** (начиная снизу) **наблюдалось ненулевое количество взвешенных частиц**. Если при данных условиях можно подобрать несколько увеличений, соответствующих данным требованиям, то предпочтение следует отдавать такому увеличению, при котором **в самом нижнем положении наблюдается 35–45 частиц** (желательно ближе к 40).

Чтобы подобрать увеличение, переместите область наблюдения в самое нижнее положение. С помощью счетчика *«Увеличение»* на панели *«Увеличенная область наблюдения»* измените масштаб произвольным образом. Следите, чтобы область наблюдения оставалась в самом нижнем положении (горизонтальное положение области наблюдения выбирается произвольно). Изменяйте (увеличивайте или уменьшайте) увеличение до тех пор, пока в нижнем положении не будут наблюдаться 35–45 частиц.

Необходимо убедиться, что подобранное увеличение позволяет измерить ненулевое количество частиц на десяти высотах. Для этого, не изменяя увеличения, с помощью полосы *«Вертикальное положение области наблюдения»* на панели *«Кювета с жидкостью»* поднимите область наблюдения на высоту, равную десяти высотам области наблюдения (размеры области наблюдения, а также ее вертикальное и горизонтальное положение указывается на панели *«Увеличенная область наблюдения»*). Убедитесь, что на этой высоте наблюдается *ненулевое* количество частиц *хотя бы в некоторых горизонтальных положениях* области наблюдения. Если на высоте, равной десяти высотам области наблюдения, взвешенных частиц нет (при любом горизонтальном положении области наблюдения), подберите другое увеличение.

Для выбранного увеличения запишите высоту и ширину области наблюдения (они указаны на панели *«Увеличенная область наблюдения»* справа от счетчика *«Увеличение»*). Зная эти линейные размеры и толщину кюветы можно определить объем жидкости, внутри которого расположены наблюдаемые взвешенные частицы.

5. Горизонтальное положение области наблюдения можно изменять либо с помощью мыши, либо с помощью полосы *«Горизонтальное положение области наблюдения»* в пределах ширины кюветы. При перемещении горизонтальное положение области наблюдения меняется дискретно пропорционально ширине области наблюдения при данном увеличении. Координаты области наблюдения указываются на панели *«Увеличенная область наблюдения»* в виде «Горизонтальное положение: **, ** мкм». Произвольно выберите и запишите горизонтальное положение области наблюдения.

6. Вертикальное положение области наблюдения можно изменять либо с помощью мыши, либо с помощью полосы *«Вертикальное положение области наблюдения»* в пределах высоты кюветы. При перемещении вертикальное положение области наблюдения также меняется дискретно пропорционально высоте области наблюдения при данном увеличении. Координаты области наблюдения указываются на панели *«Увеличенная область наблюдения»* в виде «Вертикальное положение (высота): **, ** мкм». Выберите вертикальное положение области наблюдения равное нулю.

7. Используя увеличенное изображение области наблюдения на панели «Увеличенная область наблюдения», подсчитайте количество взвешенных частиц.

ПОЛУЧЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ.

8. Не изменяя горизонтального положения, увеличьте вертикальное положение области наблюдения на величину, равную высоте области наблюдения. Подсчитайте количество взвешенных частиц.

Вновь увеличьте вертикальное положение (высоту) области наблюдения и подсчитайте количество частиц.

Измерения необходимо провести на десяти различных высотах подряд, начиная с нулевой, при фиксированном положении области наблюдения по горизонтали.

ПОЛУЧЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ.

9. Измените горизонтальное положение области наблюдения произвольным образом. Зафиксируйте его и вновь выполните измерения на десяти высотах, начиная с нулевой (как в пунктах 6–8).

10. Выполните измерения для пяти положений области наблюдения по горизонтали.

11. Рассчитайте среднее количество частиц на каждой высоте: просуммируйте количество частиц, наблюдавшихся на одной и той же высоте при различных положениях области наблюдения по горизонтали, и разделите на пять. Вычисления рекомендуется проводить с точностью до одного десятичного знака после запятой.

12. Концентрация частиц – это количество частиц в единице объема. Объем жидкости, попадающий в область наблюдения, очень мал. Поэтому чтобы определить концентрацию, необходимо среднее количество частиц на данной высоте разделить на объем, внутри которого располагались наблюдаемые частицы. Толщина слоя, в котором наблюдаются взвешенные частицы, равна толщине кюветы. Высота и ширина области наблюдения при данном увеличении указаны на панели «Увеличенная область наблюдения». Перемножив эти линейные размеры, получите объем V , в котором располагались наблюдаемые частицы.

Зная объем и среднее количество частиц, рассчитайте концентрацию частиц на каждой высоте с точностью до четырех значащих цифр.

13. Вычислите логарифм отношения концентрации частиц n_0 на нулевой высоте к концентрации частиц n на высоте h :

$$\ln \frac{n_0}{n}.$$

Вычислите величину $C(T)$ для шарообразных частиц плотности ρ радиусом r , взвешенных в жидкости плотностью $\rho_{ж}$ при температуре T

$$C(T) = \frac{4\pi r^3(\rho - \rho_{ж})g}{3T}.$$

$g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

Учитывая, что распределение Больцмана в этом случае можно записать как $n = n_0 e^{-\frac{C(T)h}{k}}$, для расчета постоянной Больцмана (k) воспользуйтесь формулой

$$k = \frac{C(T)h}{\ln \frac{n_0}{n}},$$

где $\ln \frac{n_0}{n}$ – логарифм относительной концентрации взвешенных частиц на некоторой высоте h .

Вычислите постоянную Больцмана по значениям логарифма относительной концентрации для всех высот кроме нулевой (значение постоянной Больцмана из расчетов).

Учитывая точность экспериментальных данных, все вычисления рекомендуется выполнять с точностью до четырех значащих цифр.

14. С помощью ползунка «*Масса*», расположенного на панели «*Взвешенные частицы*», выберите для эксперимента частицы максимальной массы. Точное значение выбранной массы частиц указывается над ползунком. Необходимый для расчетов радиус частиц, соответствующий выбранной массе, указывается на той же панели рядом с ползунком.

15. Повторите измерения и расчеты (как в пунктах 4–13). **Обратите внимание**, что в новых условиях эксперимента изменилось распределение взвешенных частиц по высоте, поэтому необходимо подобрать другое увеличение области наблюдения так, чтобы можно было выполнить измерения и получить ненулевые значения концентрации частиц на десяти различных высотах.

16. На одном графике постройте две зависимости концентрации частиц от высоты $n = n(h)$, соответствующие распределению частиц разной массы. Согласно распределению Больцмана обе зависимости должны носить экспоненциальный характер.

17. Так как распределение Больцмана описывается зависимостью вида $n = n_0 e^{-\frac{c(T)}{k}h}$, то логарифм относительной концентрации должен линейно зависеть от высоты: $\ln \frac{n_0}{n} = \frac{c(T)}{k}h$. На одном графике постройте две зависимости логарифма относительной концентрации от высоты $\ln(n_0/n) = f(h)$. Обе зависимости должны носить линейный характер.

18. Сделайте выводы.

Проанализируйте графические зависимости концентрации и логарифма относительной концентрации от высоты.

Соответствуют ли полученные зависимости распределению Больцмана?

Как с увеличением массы частиц изменяется распределение частиц по высоте в поле силы тяжести?

19. Если зависимость логарифма относительной концентрации $\ln \frac{n_0}{n} = f(h)$ от высоты носит линейный характер, то тангенс угла наклона прямой $\operatorname{tg} \alpha$ равен коэффициенту пропорциональности между логарифмом относительной концентрации и высотой:

$$\begin{aligned} \ln \frac{n_0}{n} &= \frac{c(T)}{k}h - \text{из распределения Больцмана;} \\ \ln \frac{n_0}{n} &= \operatorname{tg} \alpha \cdot h - \text{из линейного характера зависимости.} \\ \text{Следовательно, } \operatorname{tg} \alpha &= \frac{c(T)}{k} \text{ или } k = \frac{c(T)}{\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

Для каждой линейной зависимости логарифма относительной концентрации от высоты рассчитайте тангенс угла наклона графика. По тангенсу угла наклона вычислите значение постоянной Больцмана (значение постоянной Больцмана из графика).

Упражнение 2. Зависимость распределения частиц по высоте от температуры. Необходимо выполнить серию экспериментов для взвешенных частиц фиксированной массы (диаметра) при различных температурах.

20. Массу частиц можно изменять в пределах от $0,02 \cdot 10^{-12}$ до $0,1 \cdot 10^{-12}$ г. С помощью ползунка «*Масса*», расположенного на панели «*Взвешенные частицы*», выберите для эксперимента частицы средней массы. Точное значение выбранной массы частиц указывается над ползунком. Необходимый для расчетов радиус частиц, соответствующий выбранной массе, указывается на той же панели рядом с ползунком.

21. Температуру жидкости можно изменять в пределах от точки затвердевания до точки кипения (у каждой жидкости свой диапазон температур, при котором данное вещество находится в жидком состоянии). Интервал доступных температур указан под счетчиком «*Температура*» на панели «*Жидкость*». С помощью этого счетчика задайте температуру жидкости, в которой взвешены частицы, близкую к минимальной, но отличную от температуры затвердевания.

Выбирая температуру жидкости, следует также помнить, что с изменением температуры меняется вязкость жидкости. Согласно теории броуновского движения подвижность частиц, взвешенных в вязкой жидкости, с уменьшением температуры также уменьшается.

22. Выполните измерения как в пунктах 4–13. **Обратите внимание**, что в новых условиях эксперимента изменилось распределение взвешенных частиц по высоте, поэтому необходимо подобрать другое увеличение области наблюдения так, чтобы можно было выполнить измерения и получить ненулевые значения концентрации частиц на десяти различных высотах.

23. С помощью счетчика «*Температура*» на панели «*Жидкость*» задайте температуру жидкости, в которой взвешены частицы, близкую к максимальной, но отличную от температуры кипения.

Выбирая температуру жидкости, следует также помнить, что с изменением температуры меняется вязкость жидкости. Согласно теории броуновского движения подвижность частиц, взвешенных в вязкой жидкости, с увеличением температуры возрастает. Если при выбранной температуре взвешенные частицы начали слишком быстро двигаться, это будет затруднять подсчет частиц в области наблюдения. Тогда следует уменьшить температуру жидкости на 10–20 К.

Для корректности дальнейшего анализа результатов исследования температуру в пунктах 21 и 23 рекомендуется выбирать так, чтобы разница между ними была не менее 100–150 К.

24. Подобрав необходимое увеличение, выполните измерения как в пунктах 4–13.

25. Постройте графики зависимости концентрации частиц от высоты (также как в пункте 16).

26. Постройте графики зависимости логарифма относительной концентрации от высоты (также как в пункте 17).

27. Сделайте выводы.

Проанализируйте графические зависимости концентрации и логарифма относительной концентрации от высоты.

Соответствуют ли полученные зависимости распределению Больцмана?

Как с увеличением температуры жидкости изменяется распределение частиц по высоте в поле силы тяжести?

28. По тангенсу угла наклона линейных зависимостей логарифма относительной концентрации частиц от высоты определите значение постоянной Больцмана (также как в пункте 19).

29. В работе получены несколько значений постоянной Больцмана из расчетов (пункт 13 в каждой серии измерений). Вычислите среднее значение постоянной Больцмана по всем расчетам, выполненным в работе. Учитывая точность экспериментальных данных, расчеты рекомендуется выполнять с точностью до четырех значащих цифр.

Кроме того, постоянная Больцмана определялась по тангенсу угла наклона линейных зависимостей логарифма относительной концентрации (пункт 19). Рассчитайте среднее значение постоянной Больцмана, полученных из графиков.

Сравните значения постоянной Больцмана, полученные разными способами, с табличным значением, приведенным в справочной литературе. Для корректности сравнения при записи всех значений необходимо использовать одинаковое количество значащих цифр.

Таблица

		Горизонтальное положение					Среднее число частиц N	Концентрация n , мкм^{-3}	Логарифм относительной концентрации $\ln(n_0/n)$	Постоянная Больцмана k , 10^{-23} Дж/К
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5				
Вертикальное положение										
	...									
	h_3									
	h_2									
	h_1									
0										

5. Контрольные вопросы

1. Какую зависимость описывает распределение Больцмана?
2. Получите зависимость концентрации молекул идеального газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия при постоянной температуре, от высоты над поверхностью Земли.
3. Запишите закон распределения Больцмана для газа, находящегося в потенциальном консервативном силовом поле.
4. Какие характеристики газа и как влияют на распределение молекул газа по высоте в поле силы тяжести?
5. Распределение каких частиц и при каких условиях изучалось в опыте Ж. Перрена?

6. Как на основании исследования распределения взвешенных частиц по высоте можно определить постоянную Больцмана?
7. Опишите порядок выполнения работы.

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Учебно-методическое пособие по изучению моделей
физических процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодТ–05
для студентов всех специальностей

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати __. __. 2019. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____.
Заказ _____ . Тираж 50 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru