МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Отделение естественных наук ШБИП

УТВЕРЖДАЮ
Директор ШБИП
___________ Д.В. Чайковский
«___»__________ 2022 г.

О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических
процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодТ–04
для студентов всех специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
2022

УДК 53(076.5)
ББК 22.3я73
Р321

Р321 **Ревинская О.Г.**
Распределение Максвелла: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодТ–04 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2021. – 33 с.

УДК 53(076.5)
ББК 22.3я73

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию методическим семинаром отделения естественных наук ШБИП
«___» _________ 20___ г.

Зав. ОЕН ШБИП
проф., доктор физ.-мат. наук В.П. Кривобоков

Председатель учебно-методической комиссии
С.И. Борисенко

Рецензент
доктор физ.-мат. наук, доцент Томского политехнического университета
С.И. Борисенко

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА МодТ–04
ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Распределение Максвелла

Цель работы: изучение особенностей статистического распределения частиц по абсолютным значениям скорости. Исследование зависимости характеристик распределения от массы частиц газа, его температуры и направления движения частиц.

1. Теоретическое содержание

1.1. Распределение Максвелла по скоростям

В процессе становления молекулярно-кинетической теории газов некоторое время считалось, что все молекулы газа в условиях термодинамического равновесия движется с одинаковыми скоростями. Однако движение происходит в разных направлениях, тогда столкновения молекул происходят под различными углами. Это должно приводить к изменению скорости сталкивающихся молекул. Столкновения молекул газа между собой носят случайный характер, следовательно, их скорости должны являться случайными физическими величинами. Область возможных значений этой физической величины ничем не ограничена, поэтому скорости молекул в газе в условиях термодинамического равновесия – непрерывная случайная величина, для описания которой необходимо построить соответствующую функцию распределения $f(\vec{v})$ (см. Приложение 6.1). Функция распределения молекул газа по скоростям была выведена Дж. Максвеллом в 1859 г. и носит его имя.

Газ находится в состоянии термодинамического равновесия, в отсутствии внешних полей, действие которых могло бы изменить скорости хаотически движущихся молекул. Частицы газа движутся равномерно и прямолинейно, направление движения совпадает с направлением скорости.

Поскольку скорость $\vec{v}$ молекул (частиц) газа – непрерывная векторная случайная величина, то вероятность dP обнаружить частицу со скоростью, принимающей значение из интервала от $\vec{v}$ до $\vec{v} + d\vec{v}$, пропорциональна объему dV в пространстве скоростей, в пределах которого может быть изображен вектор скорости (см. Приложение 6.1.2)

$$dP = f(\vec{v})dV.$$

Длина интервала скоростей $d\vec{v}$ бесконечно мала, поэтому скорости молекул, попадающие в интервал $[\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}]$, и по величине и по направлению отличаются незначительно. В этом смысле можно говорить, что $f(\vec{v})$ – функция распределения молекул газа по скоростям в заданном направлении.

В декартовой системе координат вектор скорости $\vec{v}$ однозначно определяется через его проекции v_x, v_y, v_z. При столкновениях молекул газа между собой каждая проекция скорости изменяется независимо, в соответствии с законом сохранения импульса. Поэтому проекции скорости v_x, v_y, v_z на произвольно выбранную декартову систему координат являются независимыми случайными величинами. Вероятность dP_x того, что x-компонента скорости частицы принимает значение из интервала от v_x до $v_x + dv_x$, равна

$$dP_x = \phi(v_x)dv_x.$$

Аналогично, $dP_y = \phi(v_y)dv_y$ и $dP_z = \phi(v_z)dv_z$ – вероятности того, что y- и z-компоненты скорости принимают значения из интервалов $[v_y,\ v_y + dv_y]$ и $[v_z,\ v_z + dv_z]$, соответственно. В условиях термодинамического равновесия все направления движения молекул в газе равноправны. Поэтому три проекции скорости равноправны с точностью до переобозначения и описываются одинаковыми функциями распределения ϕ. Тогда вероятность того, что все три независимые компоненты скорости принимают значения в указанных интервалах одновременно, вычисляется как произведение вероятностей

$$dP = dP_x dP_y dP_z,$$

$$f(\vec{v})dV = \phi(v_x)\phi(v_y)\phi(v_z)dv_x dv_y dv_z.$$

Объем dV в пространстве скоростей, который соответствует интервалу $[\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}]$, в декартовой системе координат равен $dV = dv_x dv_y dv_z$. Поэтому функция распределения $f(\vec{v})$ молекул газа по скоростям представляет собой произведение функций распределения молекул газа по декартовым компонентам скорости

$$f(\vec{v}) = \phi(v_x)\phi(v_y)\phi(v_z).$$

Функции распределения по определению, как и вероятности, положительные, поэтому можно прологарифмировать полученное выражение

$$\ln f(\vec{v}) = \ln \phi(v_x) + \ln \phi(v_y) + \ln \phi(v_x).$$

Аргументы функций справа и слева в этом уравнении связаны соотношением $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Следовательно, эти два уравнения следует решать совместно:

$$\begin{cases} \ln f(\vec{v}) = \ln \phi(v_x) + \ln \phi(v_y) + \ln \phi(v_x), \\ v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \end{cases}$$

Переменные v_x, v_y, v_z – независимые. Продифференцируем оба уравнения по одной из них, например, по v_x

$$\frac{f'(\vec{v})}{f(\vec{v})}\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\phi'(v_x)}{\phi(v_x)}, \qquad v\frac{\partial v}{\partial v_x} = v_x.$$

Тогда $$\frac{1}{v}\frac{f'(\vec{v})}{f(\vec{v})} = \frac{1}{v_x}\frac{\phi'(v_x)}{\phi(v_x)}.$$

Аналогично можно получить

$$\frac{1}{v}\frac{f'(\vec{v})}{f(\vec{v})} = \frac{1}{v_y}\frac{\phi'(v_y)}{\phi(v_y)} \text{ и } \frac{1}{v}\frac{f'(\vec{v})}{f(\vec{v})} = \frac{1}{v_z}\frac{\phi'(v_z)}{\phi(v_z)}.$$

Значит, $$\frac{1}{v_x}\frac{\phi'(v_x)}{\phi(v_x)} = \frac{1}{v_y}\frac{\phi'(v_y)}{\phi(v_y)} = \frac{1}{v_z}\frac{\phi'(v_z)}{\phi(v_z)}.$$

Каждая дробь содержит функции только одной переменной. Переменные v_x, v_y, v_z являются независимыми. Функции от разных независимых переменных совпадают при любом значении переменных только, если это равные константы. Обозначим эту константу через $-2a$, тогда

$$\frac{1}{v_x}\frac{\phi'(v_x)}{\phi(v_x)} = -2a, \frac{1}{v_y}\frac{\phi'(v_y)}{\phi(v_y)} = -2a, \frac{1}{v_z}\frac{\phi'(v_z)}{\phi(v_z)} = -2a.$$

Получили дифференциальное уравнение на функцию распределения молекул по одной из декартовых компонент скорости. Решая его, получим

$$\frac{d\phi(v_x)}{\phi(v_x)} = -2av_x dv_x \Rightarrow \ln\frac{\phi(v_x)}{A} = -av_x^2 \text{ или } \phi(v_x) = A\exp(-av_x^2).$$

A – нормировочный коэффициент. Он должен обеспечивать нормировку функции распределения ϕ на единицу (см. Приложение 6.1.1). Проекция скорости может принимать как положительные, так и отрицательные значения, $v_x \in (-\infty, \infty)$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(v_x)dv_x = A\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-av_x^2)\, dv_x = 1.$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-av_x^2)\, dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (см. Приложение 6.2), значит нормировочный коэффициент $A = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$.

Для определения константы a используем теорему о распределении энергии по степеням свободы, которая говорит, что на одну степень свободы (в декартовой системе координат это, например, направление OX) приходится энергия, равная $\frac{1}{2}kT$. В отсутствии внешних полей частицы газа массой m обладают только кинетической энергией $\frac{mv^2}{2}$. Так как частицы движутся хаотически, то тепловая энергия $\frac{1}{2}kT$ соответствует средней кинетической энергии $\langle\varepsilon_x\rangle$ в направлении OX. Для вычисления средней кинетической энергии $\langle\varepsilon_x\rangle$ необходимо (см. Приложение 6.1.1) выполнить интегрирование величины $\frac{mv_x^2}{2}$ совместно с функцией распределения $\phi(v_x)$:

$$\langle\varepsilon_x\rangle = \left\langle\frac{mv_x^2}{2}\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{mv_x^2}{2}\cdot\phi(v_x)dv_x = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v_x^2\exp(-av_x^2)\,dv_x.$$

В соответствии с теоремой о равнораспределении энергии по степеням свободы должно получиться, что

$$\langle\varepsilon_x\rangle = \frac{1}{2}kT.$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}v_x^2\exp(-av_x^2)\,dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{4a^3}}$ (см. Приложение 6.2), значит

$$\frac{m}{2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{4a^3}} = \frac{1}{2}kT \Rightarrow a = \frac{m}{2kT}.$$

Как и предполагалось выше, константа a не зависит от направления и определяется температурой и массой молекул газа.

Тогда функции распределения частиц газа по декартовым компонентам скорости имеют вид

$$\phi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right), \phi(v_y) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right),$$

$$\phi(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right).$$

А ***функция распределения частиц газа по скоростям*** $f(\vec{v}) = \phi(v_x)\phi(v_y)\phi(v_z)$ примет вид

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Эта функция распределения описывает вероятность того, что скорость частиц газа будет находиться в элементарном объеме $dV = dv_x dv_y dv_z$ вблизи скорости $\vec{v}$ в пространстве скоростей.

1.2. Распределение Максвелла по абсолютным значениям скорости (по модулю скорости)

Хотя функция распределения $f(\vec{v})$ выводилась для скоростей незначительно отличающихся по направлению («фиксированного направления скорости»), ее явный вид

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

показывает, что плотность вероятности не зависит от направления, а зависит только от абсолютного значения (модуля) скорости $v = |\vec{v}|$. Следовательно, вероятность обнаружить частицу, движущуюся со скоростью в объеме dV, в одном направлении будет такой же, как и в другом направлении.

Тогда имеет смысл вычислить вероятность того, что частица имеет скорость, абсолютное значение которой лежит в интервале от v до $v + dv$. Все направления движения молекул независимы, поэтому искомая вероятность вычисляется как сумма вероятностей, а для непрерывной случайной величины – как интеграл по всем возможным направлениям движения частицы.

То есть вероятность dP обнаружить частицу, движущуюся со скоростью в объеме dV в пространстве скоростей в «фиксированном направлении»,

$$dP = f(\vec{v})dV \text{ или } dP = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dV$$

необходимо проинтегрировать по всем возможным направлениям движения. В декартовой системе координат, в которой объем в пространстве скоростей записывается в виде $dV = dv_x dv_y dv_z$, выполнять интегрирование по направлениям неудобно. В сферической системе тот же элементарный объем dV записывается в виде $dV = v^2 dv \sin\theta\, d\theta d\varphi$, где углы θ и φ задают направление и могут изменяться в пределах: $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Тогда

$$dP = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv \sin\theta\, d\theta d\varphi.$$

Проинтегрировав по углам в заданных пределах, получим искомую вероятность dP_v:

$$dP_v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} dP \sin\theta\, d\theta,$$

$$dP_v = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta,$$

$$dP_v = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv.$$

По определению случайной величины вероятность dP_v того, что абсолютная скорость частиц лежит в интервале от v до $v + dv$, также должна вычисляться через некоторую функцию распределения $F(v)$ следующим образом

$$dP_v = F(v)dv.$$

Следовательно, ***функция распределения $F(v)$ молекул газа по абсолютным значениям скорости*** имеет вид

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Эта функция распределения описывает плотность вероятности того, что абсолютная скорость частицы лежит в интервале $[v,\ v + dv]$ при всех возможных направлениях движения.

Функция $F(v)$ является непрерывной и положительно определенной на интервале $[0, \infty)$.

Проанализировав зависимость функции распределения $F(v)$ от абсолютного значения скорости, можно заметить, что с ростом v плотность вероятности с одной стороны растет за счет v^2, а с другой – убывает за счет экспоненты. Следовательно, функция распределения $F(v)$ должна иметь максимум (рис. 1). Определим, при каком значении скорости функция $F(v)$ имеет максимум. Для этого вычислим производную от функции $F(v)$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dF(v)}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(2v \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) + \right.$$

$$\left. + v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot \left(-\frac{2mv}{2kT}\right)\right) = 0,$$

$$8\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot \left(1 - \frac{mv^2}{2kT}\right) = 0.$$

Производная обращается в ноль при $v = 0$, $v = \infty$ и $v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Из формулы для $F(v)$ видно, что плотность вероятности является положительно определенной функцией. При $v = 0$ и $v = \infty$ она обращается в ноль, следовательно, при $v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ имеет максимум.

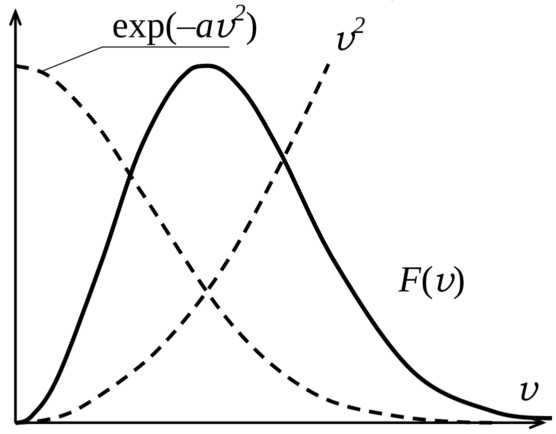


Рис. 1

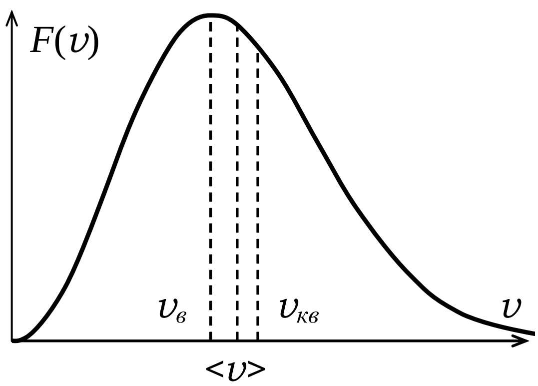


Рис. 2

Значение скорости $v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ называется ***наивероятнейшей скоростью***, потому что вероятность обнаружить частицы в интервале длиной dv вблизи $v_в$ больше, чем вблизи любого другого значения скорости.

Вычислим ***среднюю*** $\langle v \rangle$ и ***среднеквадратичную*** $v_{кв}$ ***скорость*** частиц газа. Для этого (см. Приложение 6.1.1) необходимо вычислить следующие интегралы по всем возможным значениям абсолютной скорости, $v \in [0, \infty)$:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v \cdot F(v)dv \text{ и } v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}, \ \langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 \cdot F(v)dv.$$

$$\langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \exp(-av^2)\, dv \text{ и}$$

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 \exp(-av^2)\, dv.$$

Интегралы $\int_0^\infty v^3 \exp(-av^2)\, dv = \frac{1}{2a^2}$, $\int_0^\infty v^4 \exp(-av^2)\, dv = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, где $a = \frac{m}{2kT}$ (см. Приложение 6.2), значит

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \ \ v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Сравнивая наивероятнейшую, среднюю и среднеквадратичную скорости, можно заметить, что $v_в < \langle v \rangle < v_{кв}$ (рис. 2).

Частицы обладают только кинетической энергией, поэтому ***средняя кинетическая энергия*** $\langle \varepsilon \rangle$ равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{m}{2} v_{кв}^2 = \frac{3}{2} kT.$$

Это полностью соответствует теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы, так как свободно движущиеся частицы обладают тремя степенями свободы.

Полученное выражение для средней энергии иллюстрирует однозначную связь температуры газа T со среднеквадратичной скоростью

$$\frac{m}{2} v_{кв}^2 = \frac{3}{2} kT.$$

Согласно теории вероятностей и статистическое физике если газ состоит из N независимых молекул (частиц), то вероятность dP_v того, что частица имеет абсолютную скорость из интервала $[v,\ v + dv]$, с одной стороны по определению функции распределения равна $dP_v = F(v)dv$. А с другой стороны та же вероятность dP_v – есть отношение количества частиц dN с интересующими нас скоростями к общему количеству N частиц в газе: $dP_v = dN/N$.

$$dP_v = F(v)dv = \frac{dN}{N}.$$

Тогда количество частиц dN, имеющих скорости в интервале $[v,\ v + dv]$, можно определить как

$$dN = N \cdot F(v)dv.$$

Физический смысл. Площадь под кривой $N{\cdot}F(v)$ на отрезке $[v_1,\ v_2]$ равна количеству молекул ΔN, имеющих абсолютные скорости в заданном интервале (рис. 3).

$$\Delta N = \int_{v_1}^{v_2} N \cdot F(v)dv.$$

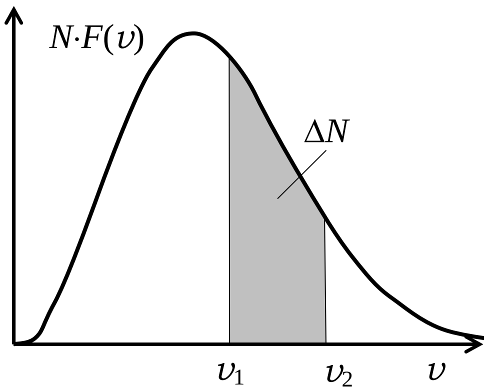


Рис. 3

Учитывая, что функция распределения $F(v)$ нормирована на единицу, площадь под кривой $N{\cdot}F(v)$ на интервале $[0, \infty)$ равна количеству молекул газа: $\int_0^{\infty} NF(v)dv = N \cdot 1$.

Как следует из явного вида распределения Максвелла по абсолютным значениям скорости

$$F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

доля частиц ΔN с различными скоростями зависит от температуры и массы молекул газа. При этом с увеличением температуры газа увеличивается доля быстрых молекул, а с увеличением массы молекул их подвижность уменьшается (рис. 4). Чтобы в этом убедиться, нужно рассмотреть интеграл от $N{\cdot}F(v)$ на одном и том же интервале $[v_1, v_2]$ при больших значениях скорости для разных масс и температур.

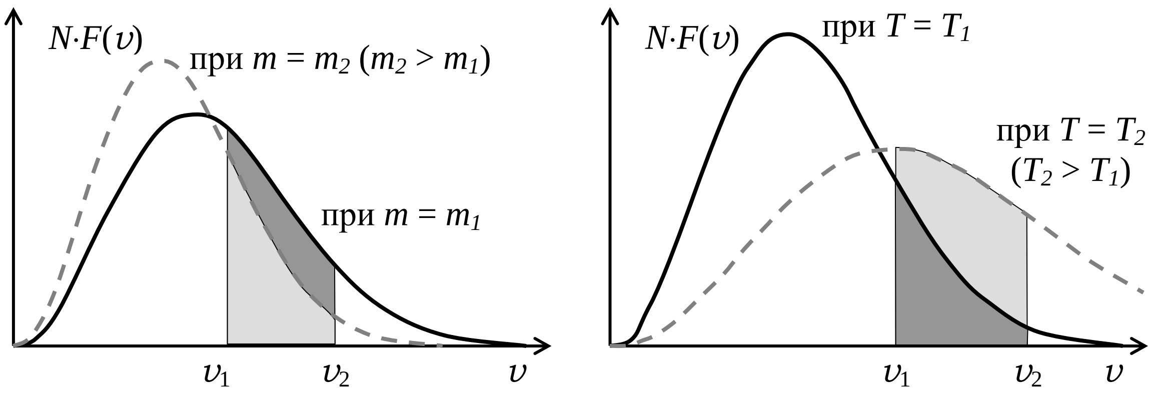


Рис. 4

2. Рабочие формулы

Если газ находится в состоянии, когда справедливо распределение Максвелла, то все частицы газа являются идентичными и движутся хаотично. При этом невозможно уследить даже за поведением одной частицы, не говоря уже о том, чтобы одновременно зафиксировать скорости всех частиц.

Чтобы изучать имеющееся распределение частиц по скоростям необходимо создать условия, при которых частицы газа из области, где установилось данное распределение, перешли бы в другую область, где за ними было бы легко наблюдать, но так, чтобы их скорости сохранились.

Распределение Максвелла наблюдается, когда отсутствуют внешние поля, действие которых могло бы повлиять на скорости молекул. На скорость частицы могут оказывать влияние гравитационное, электрическое и магнитное поля.

Пусть газ находится в некоторой области пространства, например, в сосуде, где гравитация отсутствует. Частицы газа будем считать незаряженными, поэтому электрическое и магнитное поля на них не влияют.

Внутри такого сосуда со временем установится термодинамическое равновесие, и скорости частиц будут подчиняться распределению Максвелла.

Если в сосуде сделать отверстие, то частицы будут вылетать из него с той же скоростью, которой они обладали в сосуде. В зависимости от размера и конструкции отверстия скорости вылетевших частиц будут иметь некоторое распределение по направлениям. Рассмотрим ***идеальный случай***, когда благодаря особой конструкции отверстия скорости всех вылетевших частиц будут направлены одинаково, перпендикулярно поперечному сечению отверстия. При этом модули скоростей останутся такими же, какими эти частицы обладали, находясь в сосуде. Поставив приемник на пути потока частиц, не удастся отделить быстро движущиеся частицы от медленных.

Чтобы вне сосуда разделить потоки частиц, имеющих разные по модулю скорости, необходимо подвергнуть их воздействию внешней силы, изменяющей направление движения частиц. Тогда частицы, имеющие разные по модулю скорости, будут разлетаться в разных направлениях и их легче будет пересчитать.

В качестве примера можно рассмотреть ***влияние силы тяжести на движение частиц газа, вылетевших из сосуда***.

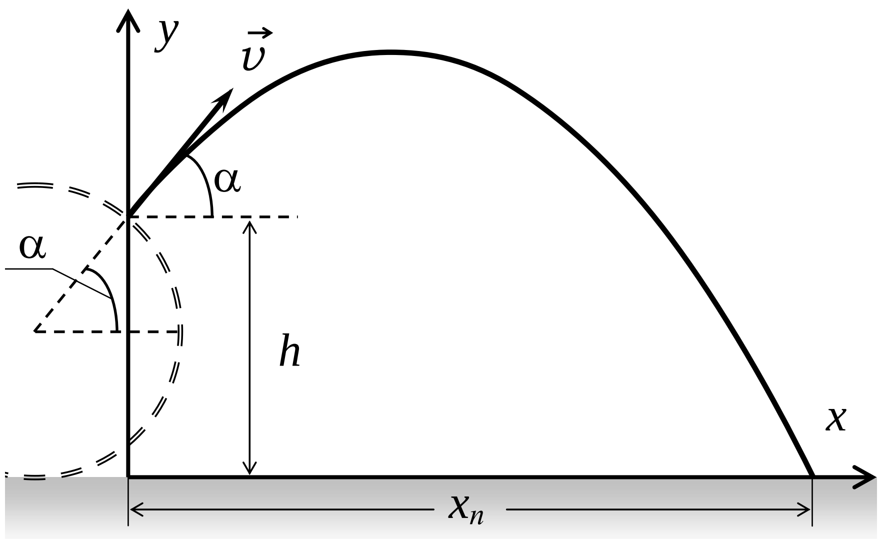


Рис. 5

Пусть сосуд с газом имеет сферическую форму, а перпендикуляр к поперечному сечению отверстия на его поверхности направлен под углом α к горизонту. Частицы, вылетая из сосуда, будут иметь некоторую скорость v, направленную под углом α. Под действием силы тяжести вылетевшие частицы будут притягиваться к Земле и падать на некоторую горизонтальную поверхность (рис. 5). Движение будет плоским (двумерным). Поэтому расположим систему координат XOY так, чтобы начало координат располагалось на горизонтальной поверхности строго под отверстием.

Тогда второй закон Ньютона $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g}$ в проекциях на оси OX и OY записывается в виде системы уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Учитывая, что в начальный момент времени частица находилась на высоте h, имела скорость v, направленную под углом α, решение можно записать в виде

$$x = (v\cos\alpha)\cdot t,$$

$$y = h + (v\sin\alpha)\cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Тогда дальность полета x_n – это координата x в момент падения t_n: $t_n = \frac{x_n}{v\cos\alpha}$. В этот момент времени координата $y = 0$:

$$y = h + x_n\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{gx_n^2}{2v^2\cos^2\alpha} = 0.$$

Полученное уравнение связывает дальность полета x_n частицы с модулем ее начальной скорости v. Следовательно, частицы с разной абсолютной скоростью в поле силы тяжести будут иметь разную дальность полета. Тогда можно определить, сколько частиц, вылетая из сосуда, имели абсолютные скорости в определенном интервале.

Для предстоящих расчетов определим скорость вылета частицы из сосуда по дальности полета.

$$v^2 = \frac{gx_n^2}{x_n\sin 2\alpha + 2h\cos^2\alpha} \text{ или } v = \sqrt{\frac{gx_n^2}{x_n\sin 2\alpha + h(1+\cos 2\alpha)}}.$$

На основании того же уравнения проанализируем зависимость дальности полета от угла α:

$$v^2(x_n\sin 2\alpha + 2h\cos^2\alpha) = gx_n^2 \text{ или } \frac{v^2}{g}\left(\sin 2\alpha + \frac{2h}{x_n}\cos^2\alpha\right) = x_n.$$

Если начальная высота h много меньше дальности полета x_n ($h << x_n$), то вторым слагаемым в левой части можно пренебречь: $x_n \approx \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha$. Дальность полета x_n будет максимальной, если $\sin 2\alpha \approx 1$, то есть при углах α около 45° или 135°.

При одном и том же распределении частиц по абсолютным скоростям, но разном расположении отверстия, вылетевшие частицы засыпят на горизонтальной поверхности область разной длины. Следует ожидать, что при расположении отверстия под углом α = 45° частицы, вылетевшие из резервуара, покроют область максимальной длины. Когда частицы располагаются в большой области, ее легче разделить на большее количество участков, и получить более подробную информацию о функции распределения частиц по абсолютным скоростям в резервуаре.

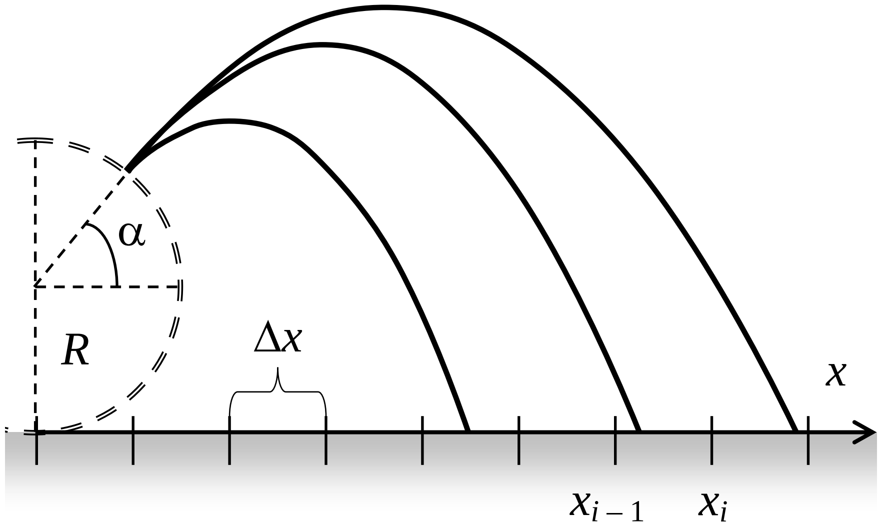


Рис. 6

Если область на горизонтальной поверхности, на которую падают частицы, разграничить на участки одинаковой длины Δx (рис. 6), можно посчитать, какое количество частиц окажется на участках, находящихся на разном расстоянии от сосуда. Каждому участку $[x_{i-1}, x_i]$ будет соответствовать определенный диапазон скоростей $[v_{i-1}, v_i]$, которыми должны обладать частицы, вылетая из сосуда, чтобы попасть на данный участок. По количеству частиц ΔN_i на каждом участке можно определить вероятность того, что частицы обладали скоростями из соответствующего интервала $[v_{i-1}, v_i]$: $\Delta P_i = \Delta N_i / N$ (N – общее количество вылетевших частиц). А также вычислить значение функции распределения: $F(v_i) = \frac{\Delta N_{i+1}}{N \Delta v_{i+1}}$, если $\Delta v_{i+1} = v_{i+1} - v_i$.

Следует обратить внимание, что если горизонтальная поверхность, на которую падают частицы, разделена на участки (ячейки) одинаковой длины Δx, то соответствующие длины интервалов скоростей Δv_i будут различны (v зависит от x_n линейно только при $\alpha = 0$).

3. Модель экспериментальной установки

Молекулы реальных газов имеют малую массу (~10^{-23} г) и размеры (~10^{-8} м). Учитывая полученную ранее связь между температурой и среднеквадратичной скоростью

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{m}{2} v_{кв}^2 = \frac{3}{2} kT,$$

легко заметить, что при комнатной температуре (~ 300 К) среднеквадратичная скорость молекул составляет ~ 10^2–10^3 м/с. В условиях, когда частицы разделяются по скоростям за счет влияния гравитационного поля, дальность полета таких молекул будет составлять ~ 10^4–10^5 м. Сравнивая дальность полета с размерами частиц, оказывается невозможно наблюдать за столь малыми частицами на столь большом расстоянии.

Поэтому в работе необходимо создать условия, при которых размеры и дальность полета частиц были бы соизмеримыми, а динамика их движения соответствовала распределению Максвелла по скоростям.

В работе используются тождественные частицы массой от 10 до 40 г. Для сравнения с молекулами газа введем понятие ***эффективной температуры*** – это средняя кинетическая энергия, выраженная в единицах температуры

$$T = \frac{2}{3k}\langle\varepsilon\rangle.$$

Для реальных газов эта величина соответствует реальной температуре. Учитывая связь меду температурой и среднеквадратичной скоростью, подберем эффективную температуру так, чтобы для частиц массой 10–40 г обеспечить дальность полета ~ 10^2 м. Для этого необходимо, чтобы эффективная температура частиц «газа» составляла ~ 10^{22} К, что соответствует средней кинетической энергии ~ 1 Дж. Даже при отсутствии гравитации частицы массой 10–40 г не могут обладать столь высокой энергией только за счет теплового движения. Чтобы обеспечить столь высокую эффективную температуру «газа», необходимо данной системе сообщить дополнительную кинетическую (механическую) энергию каким-либо способом до начала эксперимента. Механические энергии такого порядка в реальности легко достижимы. Если потерь энергии в системе нет, то все сообщенная системе энергия перейдет в хаотическое движение частиц «газа» (в сосуде создана невесомость). Это позволит полностью воспроизвести условия, при которых наблюдается распределение Максвелла по скоростям.

В работе с помощью средств компьютерной графики моделируется движение частиц в цилиндрическом сосуде (резервуаре), который сверху накрыт крышкой, имеющей форму полусферы того же радиуса. В сосуде созданы условия, исключающие воздействие на частицы каких-либо полей, в том числе гравитационных. В крышке имеется идеальное отверстие малого диаметра, которое можно перемещать вдоль центрального вертикального сечения полусферы (положение отверстия задается угловой координатой в пределах от 0 до 180°). Конструкция отверстия такова, что через него сосуд могут покинуть только частицы, имеющие фиксированное направление скорости (перпендикулярно сечению отверстия), при этом модуль скорости вылетевших частиц остается таким же, каким частицы обладали, находясь в сосуде – идеальное отверстие. Когда отверстие открывают, частицы, расположенные в данный момент времени вблизи отверстия и имеющие скорость в направлении отверстия, покидают резервуар. Вне резервуара гравитационное поле существует, а сопротивление воздуха отсутствует. Под действием силы тяжести вылетевшие под углом к горизонту частицы притягиваются к Земле и падают на горизонтальную поверхность вне резервуара.

Для подсчета вылетевших частиц, имеющих разные скорости, горизонтальную поверхность, на которую падают частицы, можно разделить на некоторое количество ячеек одинаковой длины. Количество ячеек справа и слева от резервуара одинаково и может меняться, начиная с пяти (5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25…) в больших пределах.

Под длительностью эксперимента в работе понимают время, в течение которого открыто отверстие. Длительность эксперимента можно варьировать в пределах от 10 до 300 с.

Работа выполняется IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание работы; порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста работы программы приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит ползунок для изменения массы частиц «газа», счетчики для изменения эффективной температуры «газа», положения отверстия на крышке резервуара (угла вылета частиц из резервуара), длительности эксперимента, а также раскрывающийся список для изменения количества ячеек на горизонтальной поверхности вне резервуара. На панелях инструментов «Газ» и «Эксперимент» расположены вспомогательные кнопки, позволяющие управлять моделью.

4. Порядок выполнения работы

4.1. Краткое описание хода работы

Определение длительности эксперимента (подготовительный этап)

1. Выберите минимально возможную массу частиц «газа».

2. Установите максимально возможное значение эффективной температуры «газа».

3. Установите угол вылета частиц из резервуара равным 45 градусов.

4. Задайте количество ячеек на поверхности вне резервуара равным 18.

5. Задайте минимально возможную длительность эксперимента.

6. Выполните эксперимент.

7. Определите, каково максимальное количество частиц в одной из ячеек.

8. Повторите опыт несколько раз. При каждом опыте фиксируйте максимальное количество частиц, накопившееся в ячейке.

9. Определите, при какой длительности эксперимента максимальное количество частиц в ячейке равно 50–60.

Упражнение 1. Зависимость распределения частиц по скоростям от массы частиц.

10. Установите максимально возможное значение эффективной температуры «газа».

11. Угол вылета частиц из резервуара оставьте равным 45 градусов.

12. Выберите минимально возможную массу частиц «газа».

13. Выполните эксперимент.

14. Подберите необходимое количество ячеек на поверхности вне резервуара.

15. Определите, сколько частиц попало в каждую ячейку.

16. Повторите опыт при тех же условиях еще 3 раза.

17. Определите среднее количество частиц в каждой ячейке и суммарное количество частиц во всех ячейках.

18. Вычислите координаты границ каждой ячейки.

19. Рассчитайте для каждой ячейки диапазон скоростей частиц, которые могут попасть в эту ячейку.

20. Постройте гистограмму.

21. Вычислите значения функции распределения, постройте график.

22. Определите наивероятнейшее значение скорости частиц.

23. Вычислите теоретическое значение наивероятнейшей скорости.

24. Сравните теоретическое и экспериментальное значение наивероятнейшей скорости.

25. Увеличьте массу частиц «газа» в 2 раза

26. Повторите эксперимент (13–24 пункты).

27. Увеличьте массу еще в 2 раза (в 4 раза по сравнению с первоначальной).

28. Повторите эксперимент (13–24 пункты).

29. Проанализируйте результаты и сделайте вывод.

Упражнение 2. Зависимость распределения частиц по скоростям от температуры «газа».

30. Выберите минимально возможную массу частиц «газа».

31. Угол вылета частиц из резервуара оставьте равным 45 градусов.

32. Установите максимально возможное значение эффективной температуры «газа».

33. Выполните эксперимент как в пунктах 13–24.

34. Уменьшите температуру «газа» в 2 раза по сравнению с первоначальной.

35. Повторите эксперимент (13–24 пункты).

36. Уменьшите температуру «газа» в 3 раза по сравнению с первоначальной.

37. Повторите эксперимент (13–24 пункты).

38. Проанализируйте результаты и сделайте вывод.

Упражнение 3. Зависимость распределения частиц по скоростям от направления.

39. Выберите минимально возможную массу частиц «газа».

40. Установите максимально возможное значение эффективной температуры «газа».

41. Установите некоторое значение угла вылета частиц из резервуара (по указанию преподавателя).

42. Выполните эксперимент как в пунктах 13–24.

43. Выполните эксперимент еще для двух значений угла вылета частиц из резервуара.

44. Проанализируйте результаты и сделайте вывод.

45. Вычислите среднее значение наивероятнейшей скорости.

46. Вычислите среднюю и среднеквадратичную скорости.

4.2. Детальное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

Определение длительности эксперимента (подготовительный этап)

В открытое в резервуаре отверстие могут вылететь только частицы, оказавшиеся вблизи отверстия. Кроме того, скорости этих частиц должны быть направлены в сторону отверстия (перпендикулярно сечению отверстия). Частицы в резервуаре движутся хаотично, поэтому они будут вылетать из отверстия неравномерно. Чем больше частиц окажется вблизи отверстия в некоторый момент времени, тем больше вылетит из резервуара.

Если отверстие в резервуаре открыть на длительное время, постепенно количество частиц в резервуаре будет уменьшаться. Поэтому будет уменьшаться и вероятность того, что около отверстия в данный момент времени окажется хотя бы одна частица. Поток частиц, вылетевших из отверстия, со временем будет уменьшаться.

Для успешного выполнения эксперимента необходимо определить, на какое время необходимо открывать отверстие в резервуаре. Если время будет выбрано слишком маленькое, из резервуара вылетит мало частиц. Тогда по сравнению с количеством частиц в одной ячейке, появление одной частицы будет существенно влиять на наблюдаемое в эксперименте распределение.

Если количество вылетающих в данный момент времени частиц много меньше количества ранее вылетевших частиц, то они уже не смогут оказать значительного влияния на наблюдаемое распределение.

В разных ячейках будет наблюдаться разное количество частиц. Если максимальное количество частиц в одной из ячеек около 50–60, то в соседних ячейках частиц будет меньше (20, 30 и т.д.) Появление 1–2 частиц по сравнению с 50–60 уже находящимися в ячейке можно считать незначительным. Если найти время, за которое максимальное количество частиц в одной из ячеек станет равным 50–60, то появление новых частиц станет несущественным не только для этой ячейки, но и для большинства соседних. Поэтому необходимо найти такой интервал времени, в течение которого максимальное количество частиц в одной из ячеек станет равным 50–60. Для этого проведите следующие исследования:

1. С помощью ползунка ***«Масса частицы»*** можно изменять массу в пределах от 10 до 40 г. Установите минимальное значение массы.

2. С помощью счетчика ***«Эффективная температура»*** можно изменять среднюю кинетическую энергию частиц, которая по аналогии с тепловой энергией хаотического движения молекул выражена в Кельвинах, и поэтому имеет смысл эффективной температуры газа. В работе эффективную температуру можно изменять в пределах $(250–1200) \cdot 10^{20}$ К. Установите максимально возможное значение эффективной температуры.

3. Резервуар, в котором находится «газ», накрыт крышкой, имеющей форму полусферы. В ней имеется отверстие, которое можно перемещать по поверхности крышки вдоль одного из ее центральных вертикальных сечений. Положение отверстия задается в полярных координатах (радиусом полусферы и углом). Благодаря особой конструкции отверстия, угол, под которым отверстие расположено на полусфере, соответствует углу, под которым частицы будут вылетать из резервуара. С помощью счетчика ***«Угол»*** положение отверстия на полусфере можно менять в пределах от 0 до 180°. Расположите отверстие под углом 45°. При этом в момент вылета из резервуара скорости частиц также будут направлены под углом 45° по отношению к горизонту, следовательно, частицы будут иметь максимальную дальность полета в поле силы тяжести.

4. Вылетев из резервуара, частицы под действием силы тяжести падают на горизонтальную поверхность на некотором расстоянии от него. Горизонтальная поверхность вправо и влево от резервуара заполнена ячейками одинаковой длины. Ко-

личество ячеек, видимых в области эксперимента, можно менять с помощью раскрывающегося списка ***«Количество ячеек»***. Задайте количество ячеек равным 18.

5. Время, на которое открывается отверстие в резервуаре, контролируется секундомером. Длительность эксперимента (время, на которое открывают отверстие) можно изменять в пределах от 10 до 300 с. С помощью счетчика ***«Длительность»*** на панели ***«Эксперимент»*** установите минимально возможную длительность эксперимента.

6. Нажмите кнопку ***«Начать»*** на панели ***«Эксперимент»***. Отверстие в резервуаре автоматически откроется. Из него начнут вылетать частицы. По истечении установленного времени отверстие автоматически закроется. При необходимости эксперимент может быть досрочно остановлен с помощью кнопки ***«Прервать»*** на панели ***«Эксперимент»***.

После того как отверстие закроется, дождитесь, пока все вылетевшие частицы упадут на горизонтальную поверхность.

7. Для определения количества частиц в ячейках в нижней части области эксперимента расположен ползунок ***«Датчик количества частиц в ячейках»***, показания которого отображаются на одноименной панели, расположенной ниже области эксперимента. При перемещении ползунка в некоторую ячейку на панели отображается ее номер и количество частиц, находящееся в этой ячейке.

Перемещая ползунок ***«Датчик количества частиц в ячейках»*** по ячейкам, определите, в какой ячейке находится максимальное количество частиц. Запишите это количество.

8. Не возвращая вылетевшие частицы в резервуар, и не изменяя длительность эксперимента, вновь нажмите кнопку ***«Начать»*** на панели ***«Эксперимент»***. Ранее вылетевшие частицы останутся в ячейках, а из резервуара начнут вылетать новые частицы.

Общая длительность эксперимента увеличится за счет того, что отверстие открывали два раза. Количество частиц в ячейках будет накапливаться. По окончании эксперимента вновь определите и запишите максимальное количество частиц, накопившееся в одной из ячеек. Вычислите суммарное время, в течение которого отверстие в резервуаре было открыто.

Повторите опыт 10–12 раз (при одной и той же длительности эксперимента, но не возвращая частицы в резервуар), каждый раз записывая суммарное время и максимальное количество частиц, накопившееся в одной из ячеек. Обратите внимание, что в разных опытах максимальное количество частиц может наблюдаться в разных ячейках.

9. Проанализируйте полученные результаты и определите, на какое минимальное время достаточно открыть резервуар, чтобы максимальное количество частиц в одной из ячеек стало равным 50–60. Так как частицы вылетают из резервуара случайно, необходимо выполнить контрольный эксперимент, чтобы окончательно выбрать длительность эксперимента для всех последующих опытов.

Для этого с помощью кнопки ***«Начальное состояние»*** верните все частицы в резервуар. На панели ***«Эксперимент»*** с помощью счетчика ***«Длительность»*** установите значение длительности эксперимента, при котором максимальное количество частиц в одной из ячеек (при выполнении пункта 8) было равно 50–60. Выполните контрольный эксперимент (нажмите кнопку «Начать» на панели «Эксперимент»). С помощью ***«Датчика количества частиц в ячейках»*** проверьте, позволяет ли выбранное время получить нужное максимальное количество частиц в одной ячейке равное 50–60:

- Если максимальное количество частиц соответствует 50–60, то во всех последующих опытах длительность эксперимента следует устанавливать равной значению, выбранному для контрольного эксперимента.
- Если максимальное количество частиц оказалось значительно меньше, чем 50–60, во всех последующих опытах следует устанавливать длительность эксперимента на 10 с больше, чем время контрольного эксперимента.

С помощью счетчика ***«Длительность»*** на панели ***«Эксперимент»*** установите уточненную таким образом длительность эксперимента и используйте во всех последующих опытах. Помните, поскольку движение частиц в резервуаре носит случайный характер, в каждом эксперименте при одной и той же длительности может наблюдаться разное максимальное количество частиц в ячейке.

Упражнение 1.

Зависимость распределения частиц по скоростям от массы частиц

10. С помощью кнопки ***«Начальное состояние»*** верните все частицы в резервуар.

Оставьте значение эффективной температуры таким же, как в пункте 2, и не меняйте его в течение всего упражнения.

11. Оставьте положение отверстия в резервуаре таким же, как в пункте 3, и не меняйте его в течение всего упражнения.

12. С помощью ползунка ***«Масса частицы»*** установите минимально возможное значение массы.

13. Выполните эксперимент. Длительность эксперимента должна соответствовать значению, полученному в пункте 9.

14. С помощью раскрывающегося списка ***«Количество ячеек»*** можно изменять количество ячеек на плоскости вне резервуара в широких пределах. Подберите количество ячеек так, чтобы **максимальное количество частиц в одной из ячеек** составляло **50–60 частиц**.

Если для выбранного количества ячеек максимальное количество частиц в одной из ячеек превышает 60, увеличьте количество ячеек. Если для выбранного количества ячеек максимальное количество частиц в одной из ячеек меньше 50, уменьшите количество ячеек.

Опираясь на эти критерии, подберите необходимое количество ячеек на плоскости вне резервуара. Для выбранного количества ячеек длина ячейки автоматически указывается на панели ***«Датчик количества частиц в ячейке»***. Это значение необходимо для дальнейших расчетов.

15. Последовательно перемещайте ползунок ***«Датчик количества частиц в ячейке»*** по ячейкам, заполненным частицами. Если количество ячеек при выполнении пункта 14 подобрано правильно, заполненными должны оказаться не менее 14–15 ячеек. Последовательно запишите номера ячеек i и количество частиц ΔN_i в 14–15 ячейках, **начиная с ячейки, над которой расположено отверстие** (независимо от количества частиц в ней).

16. Частицы вылетают из отверстия случайным образом. Поэтому для улучшения среднестатистических результатов исследования опыт следует повторить несколько раз. Не меняя количество ячеек и длительность эксперимента, повторите опыт при тех же условиях еще 3 раза (с помощью кнопки ***«Начальное состояние»***

верните частицы в резервуар; нажмите кнопку ***«Начать»*** на панели ***«Эксперимент»***; после окончания эксперимента выполните измерения как в пункте 15).

Запишите количество частиц в ячейках в каждом опыте.

17. По результатам проведенных опытов определите среднее количество частиц в каждой ячейке $\Delta N_i^{ср}$: сложите количество частиц, наблюдавшихся в ячейке с одним и тем же номером в каждом эксперименте, и разделите на 4 (количество экспериментов). Среднее значение вычисляйте с точностью до одного десятичного знака после запятой.

Рассчитайте суммарное количество частиц во всех ячейках N. Для этого просуммируйте средние значения количества частиц в ячейках. Вычисления также следует выполнять с точностью до одного десятичного знака после запятой.

18. Вычислите координаты границ каждой ячейки следующим образом.

Длина ячеек Δx указана на панели ***«Датчик количества частиц в ячейке»***, номер ячейки (i) – в области эксперимента под ячейками. Границы ячейки с номером i имеют координаты x_{i-1} и x_i: $x_i - x_{i-1} = \Delta x$. Ячейки откладываются относительно оси симметрии резервуара, а отверстие, из которого вылетают частицы, смещено по горизонтали относительно оси симметрии резервуара на величину $x_0 = R \cdot \cos\alpha$ (R – радиус полусферы, накрывающей резервуар, α – угол, под которым расположено отверстие). Тогда координаты границ ячейки относительно отверстия по горизонтали следует вычислять по формуле

$$x_i = i \cdot \Delta x - x_0 = i \cdot \Delta x - R \cdot \cos\alpha \quad \text{или} \quad x_i = x_{i-1} + \Delta x.$$

Центр полусферы, накрывающей резервуар, расположен на высоте, равной ее радиусу. Поэтому по вертикали отверстие расположено на высоте $h = R + R \cdot \sin\alpha$. Рассчитайте высоту, на которой расположено отверстие с точностью до двух десятичных знаков после запятой.

Для всех ячеек, для которых было записано количество частиц, вычислите координаты границ x_i также с точностью до двух десятичных знаков после запятой.

19. Рассчитайте для каждой ячейки диапазон скоростей частиц, которые могут попасть в эту ячейку следующим образом.

В ячейку с номером i могут попасть только частицы, дальность полета которых лежит в пределах от x_{i-1} до x_i. При движении тела под углом к горизонту дальность его полета определяется углом α, высотой h и скоростью v_i в начальный момент времени. Частицы вылетают из отверстия под одинаковым углом α и с одинаковой высоты h. В этих условиях дальность полета зависит от того, какую скорость имели частицы в резервуаре (при вылете из него). То есть, дальность полета x_i могут иметь только частицы, скорость вылета v_i которых из резервуара равна

$$v_i = \sqrt{\frac{g \cdot x_i^2}{h(1 + \cos 2\alpha) + x_i \sin 2\alpha}}$$

(g – ускорение свободного падения).

Частицы, попавшие в ячейку с номером i, имеют дальность полета в пределах от x_{i-1} до x_i, а значит, находясь в резервуаре, они обладали скоростями в пределах от v_{i-1} до v_i. Частицы, попавшие в ячейку, над которой находилось отверстие, имеют дальность полета в пределах от 0 до x_i, а значит, находясь в резервуаре, они обладали скоростями в пределах от 0 до v_i (если номер этой ячейки равен i).

Для всех ячеек, количество частиц в которых было записано, вычислите соответствующие скорости v_i. Расчеты рекомендуется выполнять с точностью до трех значащих цифр. Обратите внимание, что связь скорости с дальностью полета является нелинейной.

20. **Постройте гистограмму**: по горизонтальной оси отложите значения скорости v_i, соответствующие границам ячеек; над каждым отрезком $[v_{i-1}, v_i]$ постройте прямоугольник, высота которого равна среднему количеству частиц ΔN_i^{cp}, имевших скорости в этом интервале (в данной ячейке).

В ячейке с номером i находятся частицы, скорости которых лежат в интервале от v_{i-1} до v_i. Связь скорости с дальностью полета является нелинейной, поэтому длины отрезков $[v_{i-1}, v_i]$ постепенно уменьшаются с ростом номера ячейки i. Поэтому длина основания построенных прямоугольников будет уменьшаться с ростом номера ячейки.

21. Количество частиц dN, обладающих скоростями в интервале от v до $v + dv$, определяется функцией распределения $F(v)$

$$dN = N{\cdot}F(v)\,dv \qquad (N \text{ – суммарное количество частиц}).$$

На основе этого соотношения можно приближенно рассчитать значения функции распределения по экспериментальным данным:

$$F(v_i) \approx \frac{\Delta N_{i+1}^{cp}}{N \cdot \Delta v_{i+1}},$$

ΔN_{i+1}^{cp} – среднее количество частиц в ячейке; N – суммарное количество частиц; $\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$ – длина интервала скоростей. Обратите внимание, что по определению значение функции распределения $F(v_i)$ сопоставляется началу скоростного интервала $[v_i, v_{i+1}]$, поэтому для **вычисления значения функции распределения $\boldsymbol{F}$ в точке $\boldsymbol{v_i}$** следует использовать среднее количество частиц ΔN_{i+1}^{cp} и длину интервала скоростей Δv_{i+1} **для ($\boldsymbol{i}$ + 1)-й ячейки**.

Рассчитайте значения функции распределения для всех ячеек, количество частиц в которых было записано в эксперименте, кроме последней. Вычисления рекомендуется выполнять с точностью до трех значащих цифр.

Поверх построенной ранее гистограммы нанесите точки, соответствующие вычисленным значениям, откладывая их значения вдоль второй вертикальной оси. Вблизи этих точек проведите гладкую кривую – график функции распределения $F = F(v)$.

22. Наивероятнейшее значение скорости частиц будет соответствовать максимуму экспериментально полученной в пункте 21 функции распределения. По графику определите наивероятнейшее значение скорости и интервал скоростей $[v_{n-1}, v_n]$, в котором находится наивероятнейшая скорость.

23. Теоретическое значение наивероятнейшей скорости соответствует максимуму аналитической функции распределения и зависит от массы частиц m и температуры «газа» T:

$$v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (\text{k – постоянная Больцмана}).$$

Рассчитайте теоретическое значение наивероятнейшей скорости с точностью до трех значащих цифр.

24. Сравните теоретическое и экспериментальное значение наивероятнейшей скорости: определите, совпадает ли положение максимума экспериментально полученной функции распределения с теоретическим значением наивероятнейшей скоростью (принадлежит ли наивероятнейшая скорость $v_в$ интервалу $[v_{n-1}, v_n]$).

25. С помощью кнопки ***«Начальное состояние»*** верните все частицы в резервуар.

С помощью ползунка ***«Масса частицы»*** задайте значение массы, в 2 раза превышающее значение, выбранное в предыдущем эксперименте (в пункте 12).

26. Повторите эксперимент (13–24 пункты). Обратите внимание, что при этих условиях частицы иначе распределились на плоскости вне резервуара. Поэтому необходимо подобрать другое количество ячеек так, как описано в пункте 14.

27. С помощью ползунка ***«Масса частицы»*** задайте значение массы, в 2 раза превышающее значение, выбранное в предыдущем эксперименте (в пункте 25).

28. Повторите эксперимент (13–24 пункты), включая пункт 14, где необходимо подобрать количество ячеек на плоскости вне резервуара.

29. Проанализируйте результаты и сделайте вывод.

Как изменяется диапазон скоростей (наблюдавшийся в эксперименте), которыми могут обладать частицы различной массы при одинаковой температуре?

Как изменяется наивероятнейшая скорость движения частиц (экспериментально найденное значение) с увеличением их массы?

Соответствует ли экспериментально найденное положение максимума функции распределения теоретическому значению наивероятнейшей скорости в каждом эксперименте? Почему?

Упражнение 2.

Зависимость распределения частиц по скоростям от температуры «газа»

30. С помощью кнопки ***«Начальное состояние»*** верните все частицы в резервуар.

С помощью ползунка ***«Масса частицы»*** установите минимально возможное значение массы частиц «газа» и не меняйте ее в течение всего упражнения.

31. Оставьте положение отверстия в резервуаре таким же, как в пункте 3, и не меняйте его в течение всего упражнения.

32. С помощью счетчика ***«Эффективная температура»*** установите максимально возможное значение эффективной температуры «газа».

33. Выполните эксперимент как в пунктах 13–24, включая пункт 14, где необходимо подобрать количество ячеек на плоскости вне резервуара.

34. С помощью счетчика ***«Эффективная температура»*** установите эффективную температуру «газа», значение которой в 2 раза меньше, чем в предыдущем опыте (в пункте 32).

35. Повторите эксперимент (13–24 пункты), включая пункт 14, где необходимо подобрать количество ячеек на плоскости вне резервуара.

36. С помощью счетчика ***«Эффективная температура»*** установите эффективную температуру «газа», значение которой в 3 раза меньше, чем в пункте 32.

37. Повторите эксперимент (13–24 пункты), включая пункт 14, где необходимо подобрать количество ячеек на плоскости вне резервуара.

38. Проанализируйте результаты и сделайте вывод.

Как изменяется диапазон скоростей (наблюдавшихся в эксперименте), которыми могут обладать частицы одинаковой массы при различных температурах?

Как изменяется наивероятнейшая скорость движения частиц (экспериментально найденное значение) с уменьшением температуры «газа»?

Соответствует ли экспериментально найденное положение максимума функции распределения теоретическому значению наивероятнейшей скорости в каждом эксперименте? Почему?

Упражнение 3.

Зависимость распределения частиц по скоростям от направления

Варианты выполнения работы

Вариант	Углы	Вариант	Углы
1	0; 80; 150	11	20; 122; 165
2	2; 78; 152	12	22; 120; 167
3	4; 75; 153	13	24; 117; 168
4	6; 73; 155	14	26; 115; 170
5	8; 70; 156	15	28; 113; 171
6	10; 73; 158	16	30; 110; 173
7	12; 65; 159	17	32; 108; 174
8	14; 63; 161	18	34; 105; 175
9	16; 60; 162	19	36; 103; 177
10	18; 58; 164	20	38; 100; 178

39. С помощью кнопки ***«Начальное состояние»*** верните все частицы в резервуар.

С помощью ползунка ***«Масса частицы»*** установите минимально возможное значение массы частиц «газа» и не меняйте ее в течение всего упражнения.

40. С помощью счетчика ***«Эффективная температура»*** установите максимально возможное значение эффективной температуры «газа» и не меняйте ее в течение всего упражнения.

41. С помощью счетчика ***«Угол»*** можно изменять угловое расположение отверстия на полусфере, накрывающей резервуар, от 0 до 180° (для фиксированного вертикального центрального сечения полусферы). Установите значение угла, отличное от 45° (по указанию преподавателя).

42. Выполните эксперимент как в пунктах 13–24, включая пункт 14, где необходимо подобрать количество ячеек на плоскости вне резервуара.

43. Выполните эксперимент еще для двух значений угла вылета частиц из резервуара (углового расположения отверстия).

44. Проанализируйте результаты и сделайте вывод.

Как изменяется диапазон скоростей (наблюдавшихся в эксперименте), которыми могут обладать частицы, в зависимости от угла их вылета из резервуара?

Как изменяется номер ячейки, в которой наблюдалось максимальное количество частиц, при различных углах вылета из резервуара?

Как изменяется наивероятнейшая скорость движения частиц (экспериментально найденное значение) в зависимости от угла их вылета из резервуара?

Соответствует ли экспериментально найденное положение максимума функции распределения теоретическому значению наивероятнейшей скорости в каждом эксперименте? Почему?

45. Для трех полученных в этом упражнении экспериментальных значений наивероятнейшей скорости (положений максимума функции распределения) вычислите среднее значение с точностью до трех значащих цифр. Сравните полученное значение с теоретическим значением наивероятнейшей скорости.

46. Используя среднее значение наивероятнейшей скорости, полученное в предыдущем пункте, вычислите среднюю и среднеквадратичную скорости (экспериментальные значения) для данной функции распределения частиц «газа» по скоростям. Сравните полученные значения с теоретическими значениями средней и среднеквадратичной скорости частиц известной массы m при заданной температуре T.

5. Контрольные вопросы

1. При каких условиях можно наблюдать распределение Максвелла по скоростям?

2. Запишите функцию распределения Максвелла по скоростям.

3. Запишите функцию распределения Максвелла по абсолютным значениям скорости (по модулю скорости).

4. Как рассчитать вероятность того, что абсолютная скорость частицы принимает значение в интервале от v до $v + dv$?

5. Как рассчитать количество частиц, обладающих абсолютными скоростями в интервале от v_1 до v_2?

6. Как связана начальная скорость и дальность полета при движении тела под углом к горизонту в поле силы тяжести?

7. Как рассчитать значение функции распределения, если известна доля частиц, скорости которых лежат в известном диапазоне?

8. Опишите порядок выполнения работы.

Таблица

№ ячейки	Количество частиц ΔN_i	Количество частиц ΔN_i	Количество частиц ΔN_i	Количество частиц ΔN_i	Среднее количество частиц ΔN_i^{cp}	Координаты границ ячейки x_i	Скорости частиц v_i	Функция распределения $F(v_i)$

Суммарное количество частиц: | |

6. Приложение

6.1. Функция распределения

6.1.1. Скалярные случайные величины

Случайная величина – это величина, которая принимает одно из своих возможных значений случайным образом. Если все возможные значения случайной величины образуют множество дискретных значений, то случайная величина называется ***дискретной случайной величиной***. Если все возможные значения случайной величины образуют множество непрерывных значений, то ***случайная величина*** называется ***непрерывной***.

Пусть проведено некоторое количество N наблюдений за значениями дискретной случайной величины. В нескольких из них (N_i) данная случайная величина X принимала одно из возможных значений x. Под ***вероятностью*** P того, что дискретная случайная величина X принимает одно из возможных значений x, понимают относительную частоту появления данного значения при большом количестве наблюдений

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}.$$

Вероятность – положительная скалярная величина, которая может принимать значения от 0 до 1.

Если данное значение случайной величины не наблюдается никогда при любом количестве наблюдений, то вероятность зафиксировать такое значение равна нулю ($N_i = 0$, $P = 0$) – величина никогда не принимает данное значение. Если данное значение случайной величины наблюдается всегда при любом количестве наблюдений, то вероятность зафиксировать такое значение равна единице ($N_i = N$, $P = 1$) – величина всегда принимает данное значение. Вероятность того, что случайная величина принимает одно из нескольких возможных значений, равна сумме вероятностей наблюдения каждого из этих значений случайной величины $P = \lim_{N\to\infty} \sum_i \frac{N_i}{N}$. Вероятность того, что случайная величина принимает какое-либо (любое из всех возможных) значение, равна сумме вероятностей по всем возможным значениям. Но $\sum_i N_i = N$, следовательно, искомая вероятность равна единице ($P = 1$).

Так как для непрерывной случайной величины количество возможных значений бесконечно, говорить о том, что непрерывная случайная величина принимает некоторое фиксированное значение, не имеет смысла. Для непрерывной случайной величины изучают вероятность того, что наблюдаемое значение принадлежит интервалу от x до $x + dx$. Эта вероятность тем больше, чем больше длина интервала dx. Кроме того, вероятность будет разной в зависимости от того, где в области возможных значений выбран этот интервал. Как правило, данная зависимость выражается некоторой непрерывной функцией $\phi(x)$. Тогда вероятность dP того, что непрерывная случайная величина X принимает значение из интервала от x до $x + dx$, равна

$$dP = \phi(x)dx.$$

Функцию ϕ называют в этом случае ***плотностью вероятности*** или ***функцией распределения*** случайной величины X. Тогда говорят, что случайная величина X подчиняется распределению с плотностью вероятности $\phi(x)$.

Под ***плотностью вероятности*** можно понимать изменение вероятности на единичном интервале

$$\phi(x) = \frac{dP}{dx}.$$

Вероятность того, что случайная величина X принимает значение в интервале $[x_1, x_2]$, при известной функции распределения определяется интегрированием функции распределения $\phi(x)$ на заданном интервале

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \phi(x)dx.$$

Как и для дискретных случайных величин, вероятность того, что непрерывная случайная величина принимает какое-нибудь (любое из всех возможных) значение, равна единице. Следовательно, интеграл от функции распределения по всем возможным значениям должен быть равен единице. Это требование называется ***условием нормировки для функции распределения***. Если случайная величина может принимать значения на интервале $(-\infty, \infty)$, то условие нормировки для функции распределения такой случайной величины следует записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1.$$

Чтобы рассчитать ***среднее значение***, которое может принимать случайная величина X при известной функции распределения, необходимо проинтегрировать произведение этой случайной величины на ее функцию распределения по всей области возможных значений. Так, если случайная величина X подчиняется распределению с плотностью вероятности $\phi(x)$ на интервале $(-\infty, \infty)$, то среднее значение $\langle x\rangle$ такой случайной величины вычисляется следующим образом

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \phi(x)dx.$$

Аналогично среднее значение любой функции $y(x)$, зависящей от известной непрерывной случайной величины X, вычисляют путем ее совместного интегрирования с функцией распределения $\phi(x)$ данной случайной величины.

$$\langle y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) \cdot \phi(x)dx.$$

Например, если v – скорость частицы является случайной величиной, подчиняющейся на интервале $[0, \infty)$ некоторому распределению $F(v)$, то можно вычислить среднюю скорость частицы

$$\langle v\rangle = \int_{0}^{\infty} v \cdot F(v)dv.$$

Учитывая, что кинетическая энергия ε зависит от скорости частицы $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$, можно рассчитать среднюю кинетическую энергию:

$$\langle\varepsilon\rangle = \int_{0}^{\infty} \varepsilon(v) \cdot F(v)dv = \frac{1}{2}m\int_{0}^{\infty} v^2 \cdot F(v)\ dv.$$

Интегрирование проводится по такому интервалу, на котором определена плотность вероятности (функция распределения).

Наблюдения за значениями случайных величин носят статистический (вероятностный) характер. Определенные закономерности могут быть обнаружены только при очень большом количестве наблюдений. Однако, N наблюдений за одной случайной величиной эквивалентно одному наблюдению за N независимыми эквивалентными случайными величинами. Так, например, N наблюдений за скоростью одной молекулы газа с точки зрения статистики эквивалентно одному опыту, в котором одновременно фиксируются значения скоростей N эквивалентных независимо движущихся молекул того же газа.

Случайные величины называются независимыми, если каждая из них принимает свое значение независимо от остальных. По правилам математической статистики вероятности независимых событий, происходящих одновременно, перемножаются. Следовательно, если вероятность того, что непрерывная случайная величина X в каком-то испытании принимает значение в интервале от x до $x + dx$, равна $dP_x =$

$\phi_x(x)dx$, а вероятность того, что другая непрерывная случайная величина Y при другом испытании принимает значение в интервале от y до $y + dy$, равна $dP_y = \phi_y(y)dy$, тогда вероятность dP того, что обе случайные величины примут значения в указанных интервалах при одновременном наблюдении за ними, определяется как произведение вероятностей

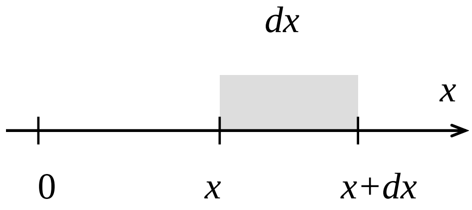
$$dP = dP_x \cdot dP_y = \phi_x(x)\phi_y(y)dxdy,$$

где ϕ_x и ϕ_y – функции распределения случайных величин X и Y, соответственно.

6.1.2. Векторные случайные величины

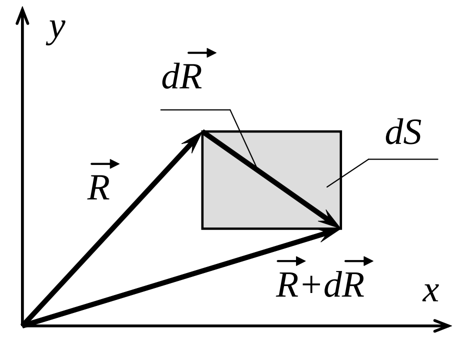
Функция распределения (плотность вероятности) также как и вероятность – положительно определенная скалярная функция.

Пусть непрерывная случайная величина R представляет собой ***скаляр***. Необходимо определить вероятность того, что эта величина принимает значения в интервале от x до $x + dx$. Тогда интересующие нас значения лежат внутри некоторого одномерного интервала длиной dx. Для такой случайной величины плотность вероятности $\phi(x)$ – это изменение вероятности dP, приходящееся на единичный интервал dx: $\phi(x) = \frac{dP}{dx}$. Тогда вероятность dP того, что случайная величина R принимает значение в интервале $[x,\ x + dx]$, пропорциональна длине интервала dx:



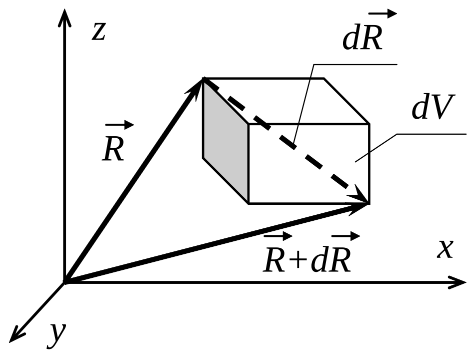
$$dP = \phi(x)dx.$$

Пусть непрерывная случайная величина $\vec{R}$ представляет собой ***вектор в двумерном пространстве***. Необходимо определить вероятность того, что эта величина принимает значения в интервале от $\vec{R}$ до $\vec{R} + d\vec{R}$. Тогда интересующие нас значения лежат внутри некоторого двумерного интервала площадью dS. Для такой случайной величины плотность вероятности $\phi(\vec{R})$ – это изменение вероятности dP, приходящееся на единичную площадь dS: $\phi(\vec{R}) = \frac{dP}{dS}$. Тогда вероятность dP того, что случайная величина $\vec{R}$ принимает значение в интервале $[\vec{R}, \vec{R} + d\vec{R}]$, пропорциональна площади



dS, в пределах которой могут лежать интересующие нас значения случайной величины:

$$dP = \phi(\vec{R})dS.$$



Пусть непрерывная случайная величина $\vec{R}$ представляет собой ***вектор в трехмерном пространстве***. Необходимо определить вероятность того, что эта величина принимает значения в интервале от $\vec{R}$ до $\vec{R} + d\vec{R}$. Тогда интересующие нас значения лежат внутри некоторого трехмерного интервала объемом dV. Для такой случайной величины плотность вероятности $\phi(\vec{R})$ – это изменение вероятности dP, приходящееся на единичный объем dV: $\phi(\vec{R}) = \frac{dP}{dV}$. Тогда вероятность dP того, что случайная величина $\vec{R}$ принимает значение в интервале $[\vec{R}, \vec{R} + d\vec{R}]$, пропорциональна объему dV, в пределах которого могут лежать интересующие нас значения случайной величины:

$$dP = \phi(\vec{R})dV.$$

6.2. Табличные интегралы

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ (a > 0), \qquad \int_0^\infty xe^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}\ (a > 0),$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ (a > 0), \qquad \int_0^\infty x^3e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a^2}\ (a > 0),$$

$$\int_0^\infty x^4e^{-ax^2}dx = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ (a > 0).$$

По свойству симметрии четных и нечетных функций можно также записать аналогичные интегралы на интервале (–∞, ∞):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-ax^2}dx + \int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ (a > 0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-ax^2}dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-ax^2}dx + \int_0^\infty xe^{-ax^2}dx = 0\ (a > 0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-ax^2} dx + \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \ (a > 0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{0} x^3 e^{-ax^2} dx + \int_{0}^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = 0 \ (a > 0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{0} x^4 e^{-ax^2} dx + \int_{0}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{4a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \ (a > 0).$$

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодТ–04 для студентов всех специальностей

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати __.__.2022. Формат 60х84/16. Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл.печ.л. ______. Уч.-изд.л. ______.
Заказ . Тираж 50 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru