

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
Отделение естественных наук ШБИП

УТВЕРЖДАЮ
Директор ШБИП
_____ Д.В. Чайковский
«__» _____ 2022 г.

О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко

НОРМАЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических
процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодО–01
для студентов всех специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
2022

УДК 53(076.5)

ББК 22.3я73

Р321

Р321 **Ревинская О.Г.**

Нормальная дисперсия света: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодО–01 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – 31 с.

УДК 53(076.5)

ББК 22.3я73

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию методическим семинаром отделения естественных наук ШБИП

«___» _____ 20__ г.

Зав. ОЕН ШБИП

проф., доктор физ.-мат. наук

И.В. Шаманин

Председатель учебно-методической комиссии

С.И. Борисенко

Рецензент

доктор физ.-мат. наук, доцент Томского политехнического университета

С.И. Борисенко

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2011–2022

© Ревинская О.Г., Кравченко Н.С., 2011–2022

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2022

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № МодО–01 ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Нормальная дисперсия света

Цель работы: экспериментальное изучение особенностей преломления света в треугольной призме и дисперсии света в веществе, из которого изготовлена эта призма. Получение параметров аналитической зависимости показателя преломления вещества от длины волны. Определение коэффициента дисперсии (числа Аббе) и среднего показателя преломления.

1. Теоретическое содержание

Показатель преломления вещества n – безразмерная физическая величина, характеризующая отношение скорости света c в вакууме к фазовой скорости v распространения света (как электромагнитной волны) в веществе

$$n = \frac{c}{v}.$$

Дисперсия света – это явление зависимости показателя преломления вещества от длины волны (или частоты) света, или, что то же самое, зависимость фазовой скорости распространения света в веществе от длины волны (или частоты). Экспериментально дисперсия света открыта И. Ньютоном около 1672 г., хотя теоретически достаточно хорошо была объяснена значительно позднее.

Для всех прозрачных веществ показатель преломления n увеличивается с уменьшением длины волны λ света: $\frac{dn}{d\lambda} < 0$. В видимом диапазоне (380–740 нм) длина волны света увеличивается от фиолетового (380–440 нм) к красному (625–740 нм). То есть для оптически прозрачных

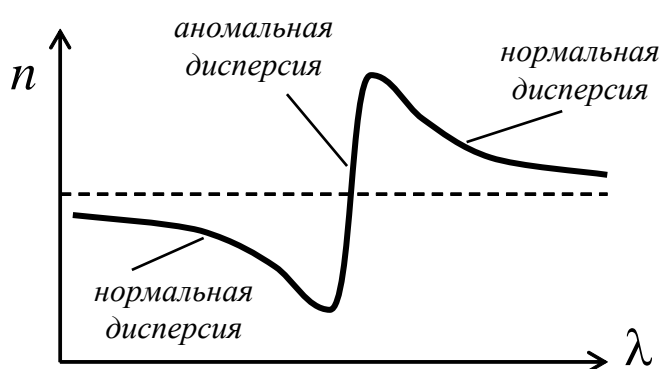


Рис. 1

сред красный свет имеет минимальный показатель преломления (максимальную скорость распространения), а фиолетовый – максимальный

показатель преломления (минимальную скорость распространения). Такую дисперсию света называют *нормальной*.

Дисперсия света называется *аномальной*, если показатель преломления n уменьшается с уменьшением длины волны λ света: $\frac{dn}{d\lambda} > 0$. Аномальная дисперсия наблюдается практически у всех газов вблизи линии поглощения. Для оптически прозрачных стекол аномальная дисперсия наблюдается в инфракрасной и ультрафиолетовой областях спектра. Вдали от линии поглощения дисперсия того же вещества носит нормальный характер (рис. 1). Область длин волн, в которой наблюдается аномальная дисперсия, соответствует ширине линии (полосы) поглощения данного вещества. Если вещество имеет несколько линий (полос) поглощения, то аномальная дисперсия наблюдается вблизи каждой из них.

1.1. Классическая электронная теория дисперсии света

Для объяснения дисперсии света (зависимости показателя преломления вещества от длины волны света) необходимо рассмотреть теорию взаимодействия света с веществом, которая может быть построена в рамках как классической, так и квантовой физики.

В рамках классической теории электромагнитных волн (теории Максвелла) фазовая скорость v распространения света в среде с диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостью равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Тогда показатель преломления n среды (вещества):

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu}.$$

Для большинства прозрачных сред $\mu \approx 1$. Поэтому при изучении оптических явлений можно полагать, что

$$n = \sqrt{\epsilon} \text{ или } n^2 = \epsilon.$$

Диэлектрическая проницаемость ϵ среды определяется ее диэлектрической восприимчивостью ϵ

$$\epsilon = 1 + \epsilon.$$

В изотропной однородной среде ϵ и ϵ являются скалярными константами, которые не зависят от пространственных координат.

По определению диэлектрическая восприимчивость ϵ связывает поляризованность \vec{P} диэлектрика, возникающую в результате его взаимодействия с электромагнитной волной, с напряженностью \vec{E} электрического поля этой волны

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \varkappa \vec{E} \text{ или в скалярном виде } P = \varepsilon_0 \varkappa E,$$

где $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 \cdot \text{с}^2 / (\text{кг} \cdot \text{м}^3)$ – электрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость вакуума).

Отсюда легко получить

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \varkappa = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}.$$

Если все молекулы вещества одинаковы, то поляризованность \vec{P} вещества пропорциональна поляризованности (дипольному моменту) \vec{p} одной молекулы:

$$\vec{P} = N \vec{p} \text{ или в скалярном виде } P = N p,$$

где N – концентрация молекул вещества в единице объема.

Подставив P , получим
$$n^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \cdot \frac{p}{E}.$$

Таким образом, чтобы получить зависимость показателя преломления n от длины волны λ (частоты ω) света, необходимо определить, как зависит от частоты ω дипольный момент p молекулы вещества.

В классической теории взаимодействия излучения с веществом дипольный момент атома (или молекулы) в электрическом поле обусловлен смещением электронной оболочки атома относительно ядра. Масса ядер велика по сравнению с массой электронов, поэтому в первом приближении смещением ядер при взаимодействии излучения с веществом можно пренебречь. Полностью заполненные электронные оболочки атомов (молекул) также являются малоподвижными. Поэтому основной вклад в дипольный момент атома (молекулы) дают электроны, находящиеся на внешних незаполненных уровнях. Такие *электроны* называют *оптическими*.

Предположим, что молекулы вещества, показатель преломления которого необходимо изучить, имеют *один оптический электрон*. Тогда дипольный момент молекулы \vec{p} создается за счет смещения \vec{r} этого электрона относительно положения равновесия (например, центра ядра):

$$\vec{p} = e \vec{r},$$

где e – заряд электрона.

Согласно электронной теории Лоренца отклонение оптического электрона от положения равновесия происходит в результате вынужденных колебаний электрона в переменном (гармоническом) электрическом поле электромагнитной волны.

Рассмотрим силы, действующие на оптический электрон массой m зарядом e в этих условиях.

В отсутствии внешних полей электрон в атоме некоторым образом движется по внешней орбите. Это движение в рамках классической теории можно считать гармоническими колебаниями. Следовательно, не уточняя природу, можно ввести некоторую **квазиупругую силу** $\vec{F}_{yn} = -m\omega_0^2\vec{r}$, заставляющую электрон колебаться гармонически с частотой ω_0 . В этом случае частоту ω_0 называют частотой собственных незатухающих колебаний электрона. Этой частоте соответствует длина волны $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$, которую называют собственной длиной волны.

Если среда (вещество) поглощает проходящий через нее свет, то говорят, что среда «оказывает сопротивление», для описания которого по аналогии с затухающими колебаниями вводят **силу сопротивления** $\vec{F}_{conp} = -2mb\dot{\vec{r}}$, которая должна приводить к затуханию собственных колебаний. Коэффициент «сопротивления» b зависит от природы атома (молекулы) и характеризует поглощение света веществом.

Электрическое поле электромагнитной волны выступает в роли **внешней вынуждающей силы** по отношению к собственным колебаниям электрона в атоме. Если \vec{E} – напряженность электрического поля, то внешнюю вынуждающую силу, действующую на оптический электрон, можно записать в виде: $\vec{F}_{en} = e\vec{E}$.

Под действием этих трех сил оптический электрон в атоме (молекуле) движется ускоренно. По второму закону Ньютона

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{ynp} + \vec{F}_{conp} + \vec{F}_{en} \quad \text{или} \quad \ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2\vec{r} - 2b\dot{\vec{r}} + \frac{e}{m}\vec{E}.$$

Напряженность электрического поля \vec{E} электромагнитной волны изменяется со временем по гармоническому закону

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t.$$

где \vec{E}_0 – амплитуда вектора напряженности электрического поля, ω – частота поля. То же самое можно записать в комплексном виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\ddot{\vec{r}} + 2b\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение полученного неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (уравнения затухающих колебаний) и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения (уравнения затухающих колебаний) $\ddot{\vec{r}} + 2b\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = 0$ с точностью до начальных условий име-

ет вид $\vec{r} = \vec{r}_{max} e^{-bt} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - b^2}t)$. Эта часть решения не зависит от ω – частоты вынуждающей силы (частоты света), поэтому не влияет на дисперсионные свойства вещества.

Рассмотрим частное решение неоднородного уравнения. Из теории дифференциальных уравнений известно, что его следует искать в виде аналогичном виду вынуждающей силы: $\vec{r} = \vec{C}_0 e^{i\omega t}$, где \vec{C}_0 – некоторая константа.

Дважды продифференцируем выражение $\vec{r} = \vec{C}_0 e^{i\omega t}$ по времени:

$$\dot{\vec{r}} = i\omega \vec{C}_0 e^{i\omega t} = i\omega \vec{r} \text{ и } \ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{C}_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 \vec{r}.$$

Подставив в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega)\vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{i\omega t} = e\vec{E}/m.$$

Тогда частное решение неоднородного дифференциального уравнения примет вид:

$$\vec{r} = \frac{e\vec{E}/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega)} \text{ или } \vec{r} = \frac{e\vec{E}}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}.$$

Чтобы явно выразить мнимую и действительную части, выполним следующие преобразования

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \frac{e\vec{E}}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} = \frac{e\vec{E}_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t)(\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega)}{m ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2)}, \\ \vec{r} &= \frac{e\vec{E}_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2b\omega \sin \omega t}{m ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2)} + \\ &+ i \frac{e\vec{E}_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2b\omega \cos \omega t}{m ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2)}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к вещественным величинам, запишем решение в виде

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \frac{e\vec{E}_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2b\omega \sin \omega t}{m ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2)} \\ \text{или } \vec{r} &= \frac{e}{m} \frac{\vec{E}_0 \cos(\omega t + \phi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}, \text{ где } \phi = -\arctg \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Постоянная величина ϕ – разность фаз между вынужденными колебаниями оптического электрона в атоме и колебаниями вектора напряженности электрического поля электромагнитной волны, вызванная затуханием (поглощением света веществом).

Если среда (вещество) слабо поглощает излучение, разность фаз между вынужденными колебаниями оптического электрона и полем можно считать равной нулю ($\phi \approx 0$), тогда

$$\vec{r} = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}_0 \cos \omega t}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$$

колебания оптического электрона определяются колебаниями электрического поля электромагнитной волны, проходящей через вещество. В результате дипольный момент атома (молекулы) также определяется колебаниями электрического поля

$$\vec{p} = e\vec{r} = \frac{e^2}{m} \frac{\vec{E}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$$

или в скалярной форме $p = \frac{e^2}{m} \frac{E}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$.

Тогда, учитывая полученное выражение для дипольного момента, запишем связь показателя преломления вещества (среды) с частотой проходящего через него света:

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \cdot \frac{p}{E} \Rightarrow$$

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$$

Таким образом, показатель преломления вещества n зависит от частоты света ω , то есть фазовая скорость распространения света разной частоты (длины волны) в одной и той же среде будет различна.

График полученной аналитической зависимости показателя преломления n от частоты света ω изображен на рис. 2. Учитывая связь длины волны света с частотой $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, можно заметить, что на рисунках 1 и 2 изображены аналогичные зависимости. Причем аномальная дисперсия наблюдается вблизи ω_0 – частоты собственных колебаний оптического электрона. Частота собственных колебаний оптического электрона соответствует частоте поглощения вещества. Следовательно, если атом (молекула) вещества имеет несколько оптических электронов с различными собственными частотами, то показатель преломления такого вещества будет иметь несколько областей аномальной дисперсии вблизи каждой частоты поглощения.

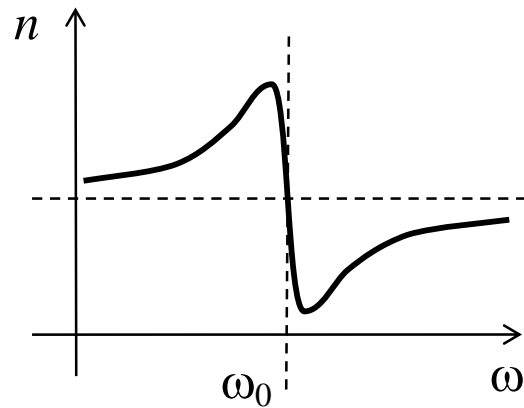


Рис. 2

1.2. Дисперсия света в видимом диапазоне

В видимом диапазоне (380–740 нм) оптически прозрачные стекла не поглощают свет (не имеют полос поглощения). Поэтому теоретическую зависимость показателя преломления n от частоты света ω , полученную ранее, можно записать, считая коэффициент затухания $b = 0$, в виде

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \Rightarrow n^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Для большинства оптически прозрачных стекол частота собственных колебаний оптического электрона ω_0 много больше частоты света ω в видимом диапазоне ($\omega_0 \gg \omega$). Тогда отношение ω/ω_0 можно считать малым

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Раскладывая дробь $\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ в ряд по величине ω/ω_0 , получим

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \dots \right)$$

$$\text{или } n = \sqrt{1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \dots \right)}$$

Используя стандартное разложение в ряд $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ (если x – мало), получим выражение для показателя преломления в виде

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} \right)^{-1/2} \left(2 + \frac{2e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \dots \right)$$

Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, запишем зависимость показателя преломления n от длины волны света λ

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e^2 N \lambda_0^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 m c^2} \right)^{-1/2} \left(2 + \frac{e^2 N \lambda_0^2}{2\pi^2 \varepsilon_0 m c^2} + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4 \dots \right)$$

Из полученного выражения видно, что коэффициенты при различных степенях λ^{-2} , λ^{-4} ... зависят только от характеристик самого вещества и для данного конкретного вещества являются константами. Поэтому зависимость показателя преломления от длины волны можно представить в виде

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \dots$$

где константы A , B , C (в рамках классической электронной теории) выражаются через такие характеристики вещества как концентрация атомов N и собственная длина волны оптического электрона λ_0 . Константы A , B , C различны для разных веществ и могут быть рассчитаны на основе экспериментально полученной зависимости $n = n(\lambda)$.

Полученная зависимость показателя преломления от длины волны описывает нормальную дисперсию света и известна как формула Коши. Для большинства оптически прозрачных веществ в формуле Коши для получения хорошего согласия теории с экспериментом можно ограничиться первыми двумя слагаемыми

$$n \approx A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

Если экспериментально определить показатель преломления для различных длин волн $n = n(\lambda)$, то числовые значения констант A и B можно определить по методу наименьших квадратов, либо из графика данной зависимости.

1.3. Свойства оптических стекол

Оптически прозрачные вещества, используемые в технике, называют оптическими стеклами. Оптические стекла бывают природного и искусственного происхождения. Они обладают различными показателями преломления и различными дисперсиями. Для объективности сравнения различных оптических стекол в физических и технических справочниках приводят сведения об их показателях преломления для одних и тех же длин волн: для желтой линии гелия (587,56 нм), красной и голубой линий водорода (656,28 нм и 486,13 нм) и т.д. Линии излучения атомов обозначают прописными и строчными буквами латинского алфавита. В частности, желтая линия гелия обозначается d , красная линия водорода – C , а голубая линия водорода – F . В таблицах показатели преломления оптических стекол для длин волн соответствующих линий обозначают как n_d , n_C и n_F . В справочниках обычно также приводится среднее значение показателя преломления, которое рассчитывается между показателями преломления n_C и n_F линий водорода

$$\bar{n} = \frac{1}{2}(n_C + n_F).$$

Для практического сравнения дисперсионных свойств оптических материалов вводят коэффициент дисперсии V (или число Аббе), который рассчитывают следующим образом

$$V = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}.$$

Чем больше число Аббе V , тем медленнее меняется показатель преломления в видимом диапазоне длин волн (разница $n_F - n_C$ меньше \Rightarrow коэффициент дисперсии V больше).

2. Рабочие формулы

2.1. Определение показателя преломления по ходу лучей в треугольной призме

Согласно законам геометрической оптики при прохождении луча света некоторой длины волны через границу раздела двух сред, имеющих разные показатели преломления, направление его движения меняется. Пусть луч света падает на границу между вакуумом ($n_0 = 1$) и оптически прозрачной средой ($n > 1$) под углом α к ее нормали (угол падения). Тогда в среде луч света будет составлять с той же нормалью к границе угол β (угол преломления), который определяется согласно закону преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n}{n_0} = n.$$

Экспериментальное определение показателя преломления для света фиксированной длины волны выполняется, как правило, на основе этого закона. На практике используют небольшого размера треугольную призму, проходя через которую луч света преломляется дважды (рис. 3) при переходе из вакуума в среду с показателем преломления n , и обратно.

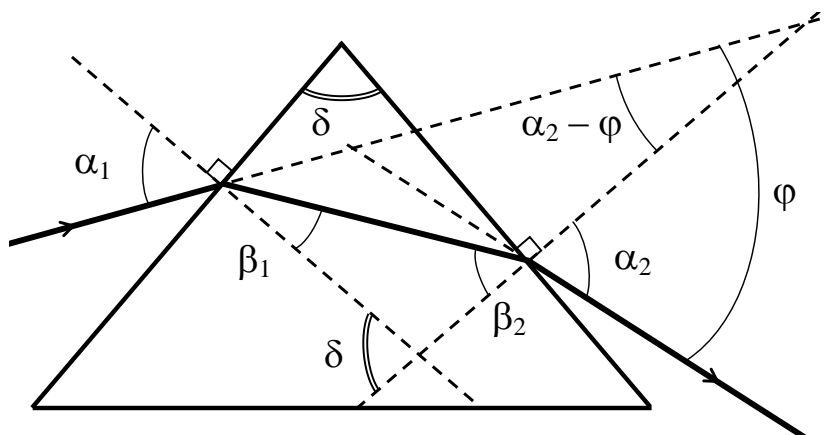


Рис. 3

При прохождении через призму изменение направления луча света зависит от угла между двумя границами раздела сред (гранями призмы). Угол δ между гранями призмы, через которые свет входит и выходит из призмы, называется *преломляющим углом призмы*. Направление третьей грани призмы (третьей границы раздела сред) на ход луча не

влияет. Для простоты будем считать призму равнобедренной, а ту сторону, через которую свет не проходит, – ее основанием.

Рассмотрим прохождение лучей через равнобедренную призму (рис. 3) с преломляющим углом δ . Пусть луч света падает на левую грань призмы под углом α_1 к ее нормали. Согласно закону преломления луч внутри призмы будет составлять угол β_1 с нормалью, проведенной к левой грани, и соответственно угол β_2 с нормалью к правой грани призмы. После преломления на правой грани луч выйдет из призмы под углом α_2 к нормали правой грани. Данная картина хода лучей является обратимой: если луч направить под углом α_2 на правую грань, то в результате преломления в призме луч выйдет под углом α_1 через левую грань призмы. Причем согласно закону преломления света

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = n \quad \text{и} \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = n.$$

На практике используют призмы небольшого размера, поэтому углы β_1 и β_2 (внутри призмы) плохо поддаются измерениям. Для экспериментального определения показателя преломления необходимо выразить n через внешние углы α_1 и α_2 . Следовательно, с учетом тригонометрии в выражениях закона преломления нужно исключить углы β_1 и β_2 .

Рассмотрев сумму углов треугольника, образованного внутри призмы лучом света и нормалью к правой и левой граням, получим

$$\beta_1 + \beta_2 = \delta.$$

Тогда, например,

$$\beta_2 = \delta - \beta_1.$$

Из закона преломления света на правой и левой гранях призмы

$$n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} \quad \text{следует, что} \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1}.$$

Из тригонометрии $\sin \beta_2 = \sin(\delta - \beta_1) = \sin \delta \cos \beta_1 - \cos \delta \sin \beta_1$. Тогда

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \delta \cos \beta_1 - \cos \delta \sin \beta_1}{\sin \beta_1} = \sin \delta \operatorname{ctg} \beta_1 - \cos \delta.$$

Из полученной формулы выразим $\operatorname{ctg} \beta_1$:

$$\operatorname{ctg} \beta_1 = \frac{\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \delta}{\sin \alpha_1 \sin \delta}.$$

Учитывая тригонометрические тождества

$$\cos^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \beta_1} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_1$$

и полученную зависимость между углами

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \beta_1} &= 1 + \frac{(\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \delta)^2}{\sin^2 \alpha_1 \sin^2 \delta} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \delta}{\sin^2 \alpha_1 \sin^2 \delta}, \end{aligned}$$

запишем закон преломления света на левой грани призмы $n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1}$ в виде $n^2 = \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \beta_1}$ и подставим полученное выражение для $\frac{1}{\sin^2 \beta_1}$

$$n^2 = \frac{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \delta}{\sin^2 \delta}.$$

Это выражение позволяет рассчитать показатель преломления n , измерив угла α_1 и α_2 (углы под которыми луч падает на призму и выходит из нее) и зная преломляющий угол δ призмы.

При симметричном ходе лучей ($\alpha_1 = \alpha_2$) выражение для показателя преломления существенно упрощается. Однако на практике трудно добиться абсолютно симметричного хода лучей.

2.2. Зависимость угла отклонения света φ от преломляющего угла призмы δ

Полученное выше выражение связывает углы α_1 и α_2 , под которыми луч света падает на призму и выходит из нее, с показателем преломления n и преломляющим углом δ призмы:

$$n^2 = \frac{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \delta}{\sin^2 \delta}$$

$$\text{или } \sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \delta = n^2 \sin^2 \delta.$$

Чтобы на основе этой зависимости проанализировать, как угол α_2 зависит от преломляющего угла призмы δ , преобразуем полученную формулу и выразим $\sin \alpha_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \delta &= n^2 \sin^2 \delta \Rightarrow \\ \sin^2 \alpha_2 + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \delta &= n^2 \sin^2 \delta - \sin^2 \alpha_1 \Rightarrow \\ \sin^2 \alpha_2 + 2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_1 \cos \delta + \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \delta &= \\ = n^2 \sin^2 \delta - \sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \delta &\Rightarrow \\ (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \delta)^2 &= n^2 \sin^2 \delta - \sin^2 \alpha_1 (1 - \cos^2 \delta) \Rightarrow \\ (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \delta)^2 &= n^2 \sin^2 \delta - \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \delta \Rightarrow \\ (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \delta)^2 &= \sin^2 \delta (n^2 - \sin^2 \alpha_1) \Rightarrow \\ \sin \alpha_2 &= \sin \delta \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \sin \alpha_1 \cos \delta. \end{aligned}$$

Из физического смысла показателя преломления n следует, что для всех сред (кроме вакуума) $n > 1$.

Выражение в правой части по модулю должно быть не больше единицы (т.к. по определению $|\sin \alpha_2| \leq 1$), тогда луч пройдет через призму. Если величина $\sin \delta \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \sin \alpha_1 \cos \delta$ по модулю больше единицы, то луч не может выйти из призмы. Это явление называется **полным внутренним отражением** (преломление света на правой грани призмы не наблюдается).

В условиях, когда полное внутреннее отражение НЕ наблюдается, проанализируем как угол α_2 , под которым луч выходит через правую грань призмы, зависит от преломляющего угла призмы δ при постоянном угле α_1 падения света на левую грань призмы. Для этого сначала из полученной ранее формулы выразим α_2 :

$$\alpha_2 = \arcsin(\sin \delta \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \sin \alpha_1 \cos \delta).$$

Далее правую часть этого равенства разложим в ряд по δ :

$$\begin{aligned} \alpha_2 \approx & -\alpha_1 + \delta \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}}{(1 - \sin^2 \alpha_1)^{1/2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(n^2 - 1) \sin \alpha_1}{(1 - \sin^2 \alpha_1)^{3/2}} \delta^2 + \\ & + \frac{1}{6} \cdot \frac{(n^2 - 1)(2 \sin^2 \alpha_1 + 1) \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}}{(1 - \sin^2 \alpha_1)^{5/2}} \delta^3 - \dots \end{aligned}$$

Для призм с малым преломляющим углом ($\delta \rightarrow 0$) всеми слагаемыми кроме первых двух можно пренебречь:

$$\alpha_2 \approx -\alpha_1 + \delta \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}}{(1 - \sin^2 \alpha_1)^{1/2}}.$$

То есть чем больше преломляющий угол δ призмы, тем больше угол α_2 , под которым луч выходит из правой грани призмы (при $\alpha_1 = \text{const}$). Для призм с большими преломляющими углами зависимость $\alpha_2(\delta)$ также является возрастающей, но носит нелинейный характер.

Введем угол φ между падающим лучом и лучом, вышедшим из призмы, который называют **углом отклонения света** при прохождении через призму. Из геометрии, рассмотрев сумму углов двух треугольников с одним общим углом $\alpha_2 - \varphi$ (рис. 3), нетрудно показать, что $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 - \delta$. Следовательно, учитывая разложение α_2 в ряд по δ , можно записать

$$\begin{aligned} \varphi \approx & \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}}{(1 - \sin^2 \alpha_1)^{1/2}} - 1 \right) \delta - \frac{1}{2} \cdot \frac{(n^2 - 1) \sin \alpha_1}{(1 - \sin^2 \alpha_1)^{3/2}} \delta^2 + \\ & + \frac{1}{6} \cdot \frac{(n^2 - 1)(2 \sin^2 \alpha_1 + 1) \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}}{(1 - \sin^2 \alpha_1)^{5/2}} \delta^3 - \dots \end{aligned}$$

То есть зависимость $\varphi(\delta)$ угла отклонения света от преломляющего угла призмы δ является линейно возрастающей только для призм с малым преломляющим углом (когда всеми слагаемыми кроме первого можно пренебречь). С увеличением δ зависимость $\varphi(\delta)$ становится нелинейной, но остается возрастающей: чем больше преломляющий угол призмы δ , тем сильнее луч света отклоняется от первоначального направления при прохождении через призму (при одном и том же угле падения α_1).

Таким образом, если хотят добиться большего отклонения луча света от первоначального направления, для эксперимента подбирают призмы с большим углом преломления.

2.3. Зависимость угла φ отклонения света от разности между углами наклона падающего и вышедшего лучей

Для дальнейшего анализа введем угол $\Delta = \alpha_1 - \alpha_2$, который показывает насколько отклонение от нормали падающего луча больше, чем вышедшего. Например, для симметричного хода лучей $\alpha_1 = \alpha_2$ угол $\Delta = 0$. Тогда из двух уравнений $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 - \delta$ и $\Delta = \alpha_1 - \alpha_2$ выразим углы α_1 и α_2

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varphi + \delta + \Delta) \text{ и } \alpha_2 = \frac{1}{2}(\varphi + \delta - \Delta).$$

После тригонометрических преобразований полученное ранее выражение

$$\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \delta = n^2 \sin^2 \delta$$

можно записать в виде

$$1 - (\cos \Delta + \cos \delta) \cos(\varphi + \delta) + \cos \Delta \cos \delta = n^2 \sin^2 \delta.$$

Выразив $\cos(\varphi + \delta)$, получим

$$\cos(\varphi + \delta) = \frac{1 - n^2 \sin^2 \delta + \cos \Delta \cos \delta}{\cos \Delta + \cos \delta} \text{ или}$$

$$\varphi \approx -\delta + \arccos\left(\frac{1 - n^2 \sin^2 \delta + \cos \Delta \cos \delta}{\cos \Delta + \cos \delta}\right).$$

Для упрощения анализа правую часть полученного выражения разложим в ряд по Δ :

$$\varphi \approx -\delta + \arccos\left(1 - \frac{n^2 \sin^2 \delta}{1 + \cos \delta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{(n^2 - 1) \sin \delta}{n(1 + \cos \delta)\sqrt{2 - n^2 \sin^2 \delta + 2 \cos \delta}} \Delta^2 + \dots$$

Таким образом, для фиксированной призмы ($\delta = \text{const}$) угол отклонения φ луча от первоначального направления зависит от разницы Δ между падающим и вышедшим лучами нелинейно. Исследуем эту зависимость на экстремум. Для этого вычислим производную

$$\frac{d\varphi}{d\Delta} = \frac{\Delta \cdot (n^2 - 1) \sin \delta}{n(1 + \cos \delta)\sqrt{2 - n^2 \sin^2 \delta} + 2 \cos \delta}$$

Легко заметить, что все сомножители в числителе и знаменателе, кроме Δ , положительные. Поэтому производная для отрицательных углов Δ меньше нуля, для положительных – больше нуля, а при $\Delta = 0$ – обращается в ноль. Следовательно, при $\Delta = 0$ угол отклонения φ луча от первоначального направления имеет минимум.

*При симметричном ходе лучей ($\Delta = 0$) угол отклонения φ оказывается минимальным для фиксированной длины волны света, проходящего через призму (рис. 4). Минимальный угол отклонения φ луча от первоначального направления, наблюдающийся при симметричном ходе лучей через призму (рис. 4б), называется **углом наименьшего отклонения**.*

2.4. Выбор оптимальных условий эксперимента

В видимом диапазоне разница между углами наименьшего отклонения луча от первоначального направления для света с разными длинами волн составляет 2–3 градуса, а отличия в значениях показателя преломления наблюдаются, только начиная с в третьего десятичного знака после запятой. Поэтому дисперсия относится к достаточно тонким эффектам и может быть достоверно измерена прибором, имеющим достаточную точность, и при достаточной тщательности выполнения эксперимента.

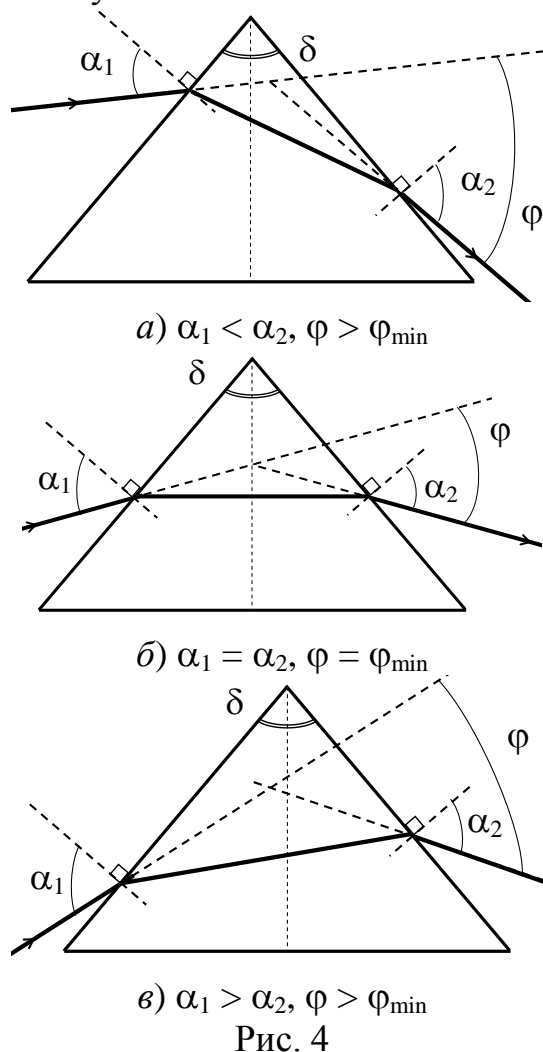


Рис. 4

При выполнении измерений на любом приборе следует помнить, что относительная погрешность измерений уменьшается с увеличением абсолютного значения измеряемой величины.

При использовании треугольной призмы для определения показателя преломления n света фиксированной длины волны (как было показано выше) необходимо измерить углы α_1 и α_2 отклонения падающего и вышедшего лучей от нормалей, проведенных соответственно к левой и правой граням призмы. Следовательно, для повышения точности измерения показателя преломления необходимо подобрать такой ход лучей через призму, чтобы углы α_1 и α_2 были по возможности как можно больше. Угол α_1 падающего луча обычно можно регулировать за счет положения источника света. Для увеличения угла α_2 вышедшего луча можно использовать призмы с большим преломляющим углом δ , при котором полное внутреннее отражение, однако, не наблюдается.

Следует отметить, что углы α_1 и α_2 неудобны для практического измерения, так как отсчитываются от разных граней призмы. Для практического измерения удобнее выбрать углы, которые отсчитываются от одного и того же направления, например, относительно горизонта.

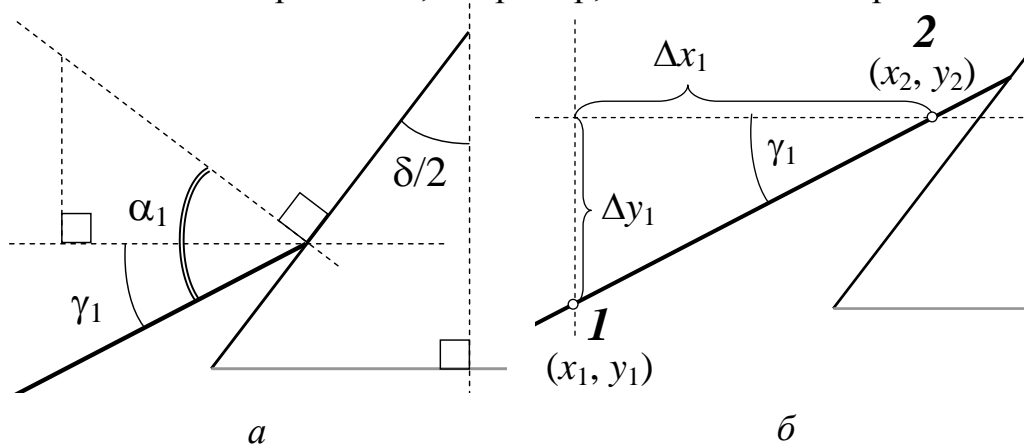


Рис. 5

Введем γ_1 – угол наклона луча, падающего на призму, относительно горизонта (рис. 5а). Тогда, учитывая, что грань призмы находится под углом $\delta/2$ к вертикали, из треугольников со взаимно перпендикулярными сторонами получим:

$$\alpha_1 - \gamma_1 = \frac{\delta}{2}.$$

Тогда угол α_1 падения луча на призму: $\alpha_1 = \gamma_1 + \frac{\delta}{2}$.

Аналогично для угла α_2 : $\alpha_2 = \gamma_2 + \frac{\delta}{2}$.

Причем угол отклонения $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 - \delta = \gamma_1 + \gamma_2$,

а разница Δ между углами, под которыми луч света падает на призму и выходит из нее:

$$\Delta = \alpha_1 - \alpha_2 = \gamma_1 - \gamma_2.$$

Искомые углы γ_1 и γ_2 можно получить, измерив, например, x - и y -координаты двух точек, через которые проходит каждый из лучей. Для уменьшения погрешности желательно выбирать максимально удаленные друг от друга точки. Пусть луч, падающий на призму, проходит через точку 1 с координатами (x_1, y_1) и точку 2 с координатами (x_2, y_2) . Тогда из треугольника (рис. 5б), образованного лучом с горизонтальной и вертикальной прямыми, получим тангенс угла γ_1

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{|x_2 - x_1|}{|y_2 - y_1|}.$$

Аналогичное выражение через координаты (x_3, y_3) и (x_4, y_4) двух других точек на вышедшем луче можно записать для угла γ_2 , под которым относительно горизонта луч света выходит из призмы. Зная $\operatorname{tg} \gamma_1$ и $\operatorname{tg} \gamma_2$, легко рассчитать γ_1 и γ_2 , а далее φ , Δ , α_1 и α_2 .

2.5. Определение параметров линейной зависимости по методу наименьших квадратов

Согласно изложенной выше теории экспериментальная зависимость показателя преломления от длины волны в простейшем случае имеет вид: $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$. Если ввести величину $z = \lambda^{-2}$, обратную квадрату длины волны, то зависимость $n(z)$ должна носить линейный характер: $n = A + Bz$.

Пусть из эксперимента получены k значений показателя преломления $n_1, n_2, n_3 \dots n_k$ для k различных значений величины $z_1, z_2, z_3 \dots z_k$. Тогда для расчета коэффициентов A и B по методу наименьших квадратов удобно предварительно вычислить следующие суммы:

$$S_z = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i, \quad S_{zz} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i^2, \quad S_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n_i, \quad S_{zn} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i \cdot n_i.$$

Тогда коэффициенты A и B можно рассчитать следующим образом:

$$A = \frac{S_n S_{zz} - S_z S_{zn}}{S_{zz} - S_z^2}, \quad B = \frac{S_{zn} - S_z S_n}{S_{zz} - S_z^2}.$$

Аналогичные результаты можно получить, если по экспериментальным значениям показателя преломления n и величины z в электронных таблицах MS Excel на диаграмме типа «Точечная» добавить линию тренда и показать ее уравнение.

Зная коэффициенты A и B , для данного вещества можно рассчитать показатель преломления для любой длины волны из видимого диапазона по формуле Коши $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$.

3. Модель экспериментальной установки

В данной работе средствами компьютерной графики моделируется прохождение луча света фиксированной длины волны через треугольную равнобедренную призму, изготовленную из некоторого оптически прозрачного стекла и окруженную вакуумом. Источник света, расположенный на некотором расстоянии слева от призмы, можно перемещать в вертикальном направлении. Длину волны света можно менять в видимом диапазоне от 380 нм до 740 нм с шагом 1 нм. Для определения координат точек, через которые проходит падающий и вышедший лучи света, в работе имеются горизонтальная и вертикальная линейки, которые позволяют делать измерения с точностью 0,05 см. При указанных условиях можно наблюдать дисперсию ряда оптических стекол. Рассчитанные по полученным данным значения показателя преломления n_d для желтой линии гелия отличаются от табличных менее чем на 0,01 %, значения числа Аббе (коэффициента дисперсии) – менее чем на 5 %.

Работа выполняется на IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание работы; порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста работы программы приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит раскрывающийся список материалов, из одного из которых изготовлена выбранная для эксперимента призма, набор кнопок для выбора равнобедренных призм с разными преломляющими углами, а также ползунки для выбора длины волны и перемещения источника света.

Варианты выполнения работы

Вариант	Материал, из которого изготовлена призма
1	Легкий крон ЛК3
2	Легкий крон ЛК6
3	Фосфатный крон ФК14

Вариант	Материал, из которого изготовлена призма
4	Баритовый крон К8
5	Крон К14
6	Тяжелый крон ТК17
7	Сверхтяжелый крон СТК3
8	Баритовый крон БК10
9	Сверхтяжелый крон СТК7
10	Кронфлинт КФ7
11	Баритовый флинт БФ6
12	Баритовый флинт БФ16
13	Баритовый флинт БФ25
14	Особый флинт ОФ4
15	Легкий флинт ЛФ5
16	Тяжелый баритовый флинт ТБФ4
17	Флинт Ф4
18	Тяжелый флинт ТФ1
19	Тяжелый флинт ТФ8
20	Тяжелый флинт ТФ4

4. Порядок выполнения работы

4.1. Краткое описание хода работы

1. Выберите вещество (материал), дисперсию которого будете изучать в эксперименте (по указанию преподавателя).

УПРАЖНЕНИЕ 1. Зависимость угла отклонения луча света от преломляющего угла призмы.

2. Выберите длину волны света, равную 560 нм.
3. Выберите призму с наименьшим преломляющим углом.
4. Измерьте горизонтальные координаты двух точек на падающем луче.
5. Рассчитайте вертикальное положение источника света, при котором свет падает на призму под заданным углом.
6. Измените положение источника света в соответствии с расчетами.
7. Измерьте координаты двух точек на вышедшем луче.
8. Повторите опыты, начиная с пункта 4, для всех призм, имеющих в работе.

9. Для каждого эксперимента рассчитайте угол отклонения луча света от первоначального направления.

10. Постройте график зависимости угла отклонения луча света от преломляющего угла призмы.

11. Сделайте вывод.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Зависимость угла отклонения луча света от разности между углами наклона падающего и вышедшего лучей.

12. Выберите длину волны света, равную 490 нм.

13. Установите источник света так, чтобы луч падал на призму горизонтально.

14. Подберите призму с наибольшим преломляющим углом, для которой НЕ наблюдается полное внутреннее отражение.

15. Измерьте координаты точек на падающем и вышедшем лучах.

16. Рассчитайте углы наклона падающего и вышедшего лучей по отношению к горизонту.

17. Рассчитайте разницу между углами наклона падающего и вышедшего лучей, а также угол отклонения луча света от первоначального направления.

18. Перемещая источник света по вертикали вниз, повторите опыт еще не менее 12 раз.

19. Повторите опыты с той же призмой для света длиной волны 640 нм.

20. Постройте график зависимости угла отклонения луча света от разницы между углами наклона падающего и вышедшего лучей.

21. Сделайте вывод.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Зависимость показателя преломления света от длины волны.

22. Установите источник света в самое нижнее положение.

23. Выберите минимальную длину волны.

24. Подберите призму с наибольшим преломляющим углом, для которой НЕ наблюдается полное внутреннее отражение.

25. Выберите длину волны равную 400 нм.

26. Для выбранной призмы отрегулируйте положение источника света.

27. Измерьте координаты точек на падающем и вышедшем лучах.

28. Рассчитайте углы наклона падающего и вышедшего лучей по отношению к горизонту.

29. Рассчитайте углы наклона падающего и вышедшего лучей по отношению к граням призмы.

30. Вычислите показатель преломления.
31. Повторите опыт еще для трех длин волн.
32. Повторите опыты еще с двумя призмами с меньшим преломляющим углом (по четыре длины волны света для каждой призмы).
33. Постройте график зависимости показателя преломления от длины волны.
34. Постройте график зависимости показателя преломления от величины, обратной квадрату длины волны.
35. Определите числовые параметры аналитической зависимости показателя преломления от длины волны.
36. Используя полученные параметры, рассчитайте показатель преломления для красной линии водорода, желтой линии гелия и голубой линии водорода.
37. Рассчитайте коэффициент дисперсии (число Аббе) и средний показатель преломления.
38. Сравните табличные значения показателя преломления для желтой линии гелия и числа Аббе со значением, полученным в эксперименте. Вычислите относительную погрешность.
39. Сделайте выводы.

4.2. Детальное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Раскрывающийся список на панели «*Призма*» содержит список оптически прозрачных материалов, обладающих разным показателем преломления и дисперсией: легкий крон ЛК3, легкий крон ЛК6, фосфатный крон ФК14, баритовый крон К8, крон К14, тяжелый крон ТК17, сверхтяжелый крон СТК3, баритовый крон БК10, сверхтяжелый крон СТК7, кронфлинт КФ7, баритовый флинт БФ6, баритовый флинт БФ16, баритовый флинт БФ25, особый флинт ОФ4, легкий флинт ЛФ5, тяжелый баритовый флинт ТБФ4, флинт Ф4, тяжелый флинт ТФ1, тяжелый флинт ТФ8, тяжелый флинт ТФ4. Это оптические стекла, из которых можно изготовить призму для изучения дисперсии света. Выберите вещество (материал), дисперсию которого будете изучать в эксперименте (по указанию преподавателя). Для выбранного материала под списком автоматически указываются табличные значения коэффициента дисперсии (число Аббе) и показателя преломления n_d для желтой линии гелия.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Зависимость угла отклонения луча света от преломляющего угла призмы.

В этом упражнении необходимо получить экспериментальные данные и на их основе построить график угла отклонения луча света от первоначального направления в зависимости от преломляющего угла призмы при условии, что угол наклона падающего луча по отношению к левой грани призмы НЕ будет меняться.

Поэтому для каждой из призм с разными преломляющими углами необходимо подобрать положение источника так, чтобы угол падения луча света по отношению к левой грани призмы был одинаковым. Упражнение рекомендуется выполнять для угла падения, равного 55° .

2. На панели **«Источник света»** расположен ползунок, позволяющий изменять длину волны света в видимом диапазоне от 380 до 740 нм. Под ползунком расположена цветовая шкала, позволяющая зрительно сопоставлять цвет и выбранную длину волны. Выбрать нужную длину волны можно, либо перемещая ползунок, либо щелкнув в нужном месте цветовой шкалы. Значение выбранной длины волны автоматически указывается над ползунком. Для точного выбора определенной длины волны света рекомендуется использовать скроллинг мыши.

Используя ползунок и цветовую шкалу, выберите длину волны света, равную 560 нм (зеленый свет).

3. На панели **«Призма»** расположен ряд кнопок, позволяющих выбирать призмы с разными преломляющими углами. В работе доступны призмы с преломляющими углами от 42 до 82 градусов. Все призмы изготовлены из одного и того же материала, выбранного при выполнении пункта 1. Преломляющий угол выбранной призмы автоматически указывается под кнопками на панели **«Призма»**. Выберите призму с наименьшим преломляющим углом.

4. По левому краю области эксперимента расположен ползунок **«Положение источника света»**, позволяющий перемещать источник света в вертикальном направлении. Горизонтальное положение источника света в работе остается неизменным. Значит, чтобы луч света из источника падал на призму под определенным углом, следует рассчитать только y -координату источника света. Для этого необходимо знать x -координату источника, а также x - и y - координаты точки, в которой луч света падает на левую грань призмы.

При перемещении источник света автоматически поворачивается так, чтобы луч света всегда падал в одно и то же место на левой грани призмы. Поэтому координаты точки падения луча света на призму НЕ ЗАВИСЯТ от положения источника света. Они зависят только от преломляющего угла призмы. Поэтому координаты точки падения луча света на призму можно измерять при любом положении источника света. Однако удобнее установить источник так, чтобы до падения на левую грань и внутри призмы луч света располагался под углами, сильно отличающимися друг от друга. Это позволит достовернее разглядеть точку, в которой луч света падает на левую грань призмы. Учитывая это, с помощью ползунка **«Положение источника света»** установите источник света, например, в самое нижнее (по отношению к экрану) положение.

Выше области эксперимента и справа от нее находятся горизонтальная и вертикальная измерительные линейки. Вертикальная линейка расположена так, что y -координата точки, в которой луч света падает на левую грань призмы, всегда равна нулю. Обе линейки имеют ползунки прокрутки и синхронизованные с ними белые измерительные линии. Чтобы измерить координаты какой-либо точки в области эксперимента, сначала с помощью одного ползунка прокрутки (например, расположенного на горизонтальной линейке) совместите измерительную линию с выбранной точкой, а затем с помощью другого ползунка прокрутки (например, расположенного на вертикальной линейке) совместите другую измерительную линию с той же точкой в области эксперимента. Обратите внимание: если точка пересечения измерительных линий находится на луче света, рядом с измерительными линиями в

области эксперимента автоматически отображаются их координаты с точностью 0,05 см (хотя цена деления каждой из линеек 0,2 см).

Используя эти инструменты, измерьте горизонтальную (x -) координату точки, в которой луч света падает на левую грань призмы. Убедитесь, что y -координата этой точки равна нулю. Для точного позиционирования измерительных линий используйте скроллинг мыши.

Обозначив через x_1 горизонтальную координату источника света, а через x_2 – измеренную горизонтальную координату точки, в которой луч света падает на левую грань призмы, вычислите вспомогательную величину $\Delta x_1 = |x_2 - x_1|$. Вычисления выполняйте в сантиметрах с точностью до двух десятичных знаков после запятой.

5. Если точки 1 и 2, через которые проходит падающий луч света, имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , соответственно, то тангенс угла наклона падающего луча по отношению к горизонту равен $\text{tg } \gamma_1 = \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|} = \frac{|y_2 - y_1|}{\Delta x_1}$, где $\Delta x_1 = |x_2 - x_1|$, x_1 и x_2 – измеренные в предыдущем пункте координаты.

Угол наклона α_1 падающего луча по отношению к нормали левой граней призмы отличается от угла наклона γ_1 падающего луча по отношению к горизонту на половину преломляющего угла δ призмы: $\alpha_1 - \gamma_1 = \frac{\delta}{2}$. Следовательно, $\gamma_1 = \alpha_1 - \frac{\delta}{2}$. Тогда

$$\frac{|y_2 - y_1|}{\Delta x_1} = \text{tg} \left(\alpha_1 - \frac{\delta}{2} \right) \quad \text{или} \quad |y_2 - y_1| = \Delta x_1 \cdot \text{tg} \left(\alpha_1 - \frac{\delta}{2} \right).$$

Если x_1, y_1 – координаты источника света, x_2, y_2 – координаты точки, в которой луч падает на призму ($y_2 = 0$), то чтобы луч света падал на призму под определенным углом α_1 , y -координату источника света необходимо вычислять следующим образом:

$$y_1 = \Delta x_1 \cdot \text{tg} \left(\alpha_1 - \frac{\delta}{2} \right).$$

По этой формуле рассчитайте координату y_1 , соответствующую такому положению источника света, при котором свет будет падать на призму под заданным углом $\alpha_1 = 55^\circ$. Результат запишите в сантиметрах с точностью до трех десятичных знаков после запятой.

6. С помощью ползунка «**Положение источника света**» установите источник света в новое (рассчитанное в предыдущем пункте) положение. Если по техническим причинам не удастся выбрать положение источника света, в точности совпадающее с рассчитанным, выберите положение источника света наиболее близкое к рассчитанному. Точные координаты текущего положения источника света указываются на панели «**Источник света**».

Запишите установленную y -координату источника света.

Обратите внимание, что положение точки, в которой луч света падает на левую грань призмы, при перемещении источника света не изменилось.

7. Для определения угла наклона вышедшего из призмы луча измерьте координаты двух точек, через которые проходит этот луч: (x_3, y_3) и (x_4, y_4) . Для уменьшения погрешности получаемых в дальнейшем результатов следует выбирать точки максимально удаленные друг от друга, но не совпадающие ни с точкой выхода луча из правой грани призмы, ни с максимально удаленной от призмы точкой на вышед-

шем луче. Для упрощения дальнейших расчетов для измерения координат рекомендуется выбрать точки, имеющие ЦЕЛОЕ ЗНАЧЕНИЕ (в см) x -координаты и расположенные на расстоянии 1–2 см от точки выхода луча из правой грани призмы и от максимально удаленной от призмы точки на вышедшем луче соответственно.

Для измерения координат каждой выбранной точки на луче света сначала с помощью ползунка прокрутки, расположенного над горизонтальной линейкой, точно совместите вертикальную измерительную линию с делением на горизонтальной линейке, соответствующим выбранному целому значению (используйте скроллинг мыши). Затем с помощью ползунка прокрутки, расположенного рядом с вертикальной линейкой, совместите горизонтальную измерительную линию с точкой пересечения луча света и вертикальной измерительной линии так, чтобы рядом с каждой из измерительных линий появились значения их координат (используйте скроллинг мыши). Убедитесь, что x -координата вертикальной измерительной линии равна выбранному целому значению. Если выбранному целому значению x -координаты на луче света соответствует несколько значений y -координат, то в качестве измеренного значения запишите среднее из них. Действуя описанным способом, измерьте и запишите координаты двух точек на вышедшем луче: (x_3, y_3) и (x_4, y_4) .

8. С помощью кнопок на панели «**Призма**» выберите призму с преломляющим углом больше предыдущего с таким расчетом, чтобы в этом упражнении поочередно использовать все призмы.

Обратите внимание! Если для какой-то из призм для рассчитанного положения источника свет падает на ее левую грань, проходит внутри призмы, но НЕ выходит через правую грань – имеет место **полное внутреннее отражение** (преломление света на правой грани призмы невозможно).

Повторите опыты (пункты 4–7) для всех призм, имеющихся в работе, для которых не наблюдается полное внутреннее отражение для заданного угла падения луча света на призму. Призмы выбирайте так, чтобы преломляющий угол постепенно увеличивался.

9. Для каждого эксперимента по координатам (x_1, y_1) и (x_2, y_2) рассчитайте угол γ_1 наклона падающего луча по отношению к горизонту:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|} \Rightarrow \gamma_1 = \operatorname{arctg} \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|}.$$

С помощью координат (x_3, y_3) и (x_4, y_4) рассчитайте угол γ_2 наклона вышедшего луча по отношению к горизонту:

$$\gamma_2 = \operatorname{arctg} \frac{|y_4 - y_3|}{|x_4 - x_3|}.$$

Для удобства можно предварительно рассчитать величины $\Delta x_1 = |x_2 - x_1|$, $\Delta y_1 = |y_2 - y_1|$, $\Delta x_2 = |x_4 - x_3|$, $\Delta y_2 = |y_4 - y_3|$. А затем вычислить искомые углы: $\gamma_1 = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ и $\gamma_2 = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}$.

Зная углы γ_1, γ_2 наклона падающего и вышедшего лучей относительно горизонта, рассчитайте угол φ отклонения луча света от первоначального направления:

$$\varphi = \gamma_1 + \gamma_2.$$

РЕКОМЕНДУЕТСЯ вычислять все углы в градусах с точностью до трех десятичных знаков после запятой.

10. Постройте график зависимости угла φ отклонения луча света от преломляющего угла δ призмы.

11. Сделайте вывод.

Как ведет себя угол отклонения луча света от первоначального направления с увеличением преломляющего угла призмы?

Является ли полученная зависимость монотонной?

Как полученная зависимость согласуется с теорией?

УПРАЖНЕНИЕ 2. Зависимость угла отклонения луча света от разности между углами наклона падающего и вышедшего лучей.

В этом упражнении необходимо получить экспериментальные данные и на их основе построить график угла отклонения луча света от первоначального направления в зависимости от разности между углами наклона падающего и вышедшего лучей для фиксированного преломляющего угла призмы (фиксированной призмы). Перед началом измерений необходимо подобрать призму с подходящим преломляющим углом.

12. Используя ползунок «*Длина волны*» и цветовую шкалу на панели «*Источник света*», выберите длину волны света, равную 490 нм (голубой свет).

13. Вертикальные координаты в области эксперимента отсчитываются от точки падения луча света на левую грань призмы ($y_2 = 0$ всегда). Чтобы луч падал на призму горизонтально, необходимо, чтобы вертикальная координата источника света тоже равнялась нулю. С помощью ползунка «*Положение источника света*» установите источник света так, чтобы его вертикальная координата равнялась нулю. Точное значение положения источника света отображается на панели «*Источник света*». При необходимости используйте скроллинг мыши.

14. Перебирая кнопки на панели «*Призма*» так, чтобы преломляющий угол призмы уменьшался, подберите призму с наибольшим преломляющим углом, для которой НЕ наблюдается полное внутреннее отражение. Эта призма будет использоваться во всех опытах упражнения 2.

15. На падающем луче света выберите две точки следующим образом: 1) точку, совпадающую с положением источника света; 2) точку, имеющую целое значение (в см) x -координаты и расположенную на расстоянии 1–2 см от точки, в которой луч света падает на левую грань призмы.

Координаты (x_1, y_1) первой точки (источника света) указаны на панели «*Источник света*». Координаты (x_2, y_2) второй точки измерьте с помощью расположенных рядом с измерительными линейками ползунков прокрутки и синхронизованных с ними измерительных линий как описано в пункте 7.

На вышедшем луче света выберите две точки также как в предыдущем упражнении: 1) точку, имеющую целое значение (в см) x -координаты и расположенную на расстоянии 1–2 см от точки, в которой луч света выходит из правой грани призмы; 2) точку, имеющую целое значение (в см) x -координаты и расположенную на расстоянии 1–2 см от самой удаленной от призмы точки вышедшего луча. Координаты (x_3, y_3) и (x_4, y_4) каждой из этих точек измерьте так же, как описано в пункте 7.

16. Рассчитайте углы наклона падающего и вышедшего лучей по отношению к горизонту, как описано в пункте 9.

17. Зная углы γ_1, γ_2 наклона падающего и вышедшего лучей относительно горизонта, для каждого эксперимента рассчитайте угол φ отклонения луча света от первоначального направления:

$$\varphi = \gamma_1 + \gamma_2$$

и разницу между углами наклона падающего и вышедшего лучей:

$$\Delta = \gamma_1 - \gamma_2.$$

18. Перемещая источник света с помощью ползунка *«Положение источника света»* по вертикали вниз на 1 см, повторите опыт еще не менее 12 раз, начиная с пункта 15. Углы наклона падающего луча при этом в разных опытах будут различными, а преломляющий угол призмы – одинаковым.

19. Начиная с пункта 15, для призмы, выбранной при выполнении пункта 14, повторите опыты для света длиной волны 640 нм (красный свет), изменяя положение источника света по вертикали также как при выполнении пунктов 13 и 18.

20. На графике зависимости угла отклонения луча света от разницы между углами наклона падающего и вышедшего лучей постройте две кривые, соответствующие разным длинам волн.

21. Сделайте вывод.

Как ведет себя угол отклонения луча света от первоначального направления с увеличением разности между углами наклона падающего и вышедшего лучей?

Является ли полученная зависимость монотонной?

Если есть минимум или максимум, при каких условиях они наблюдаются?

Какой разнице между углами наклона падающего и вышедшего лучей соответствует симметричный ход лучей?

Как полученная зависимость согласуется с теорией?

УПРАЖНЕНИЕ 3. Зависимость показателя преломления света от длины волны.

В этом упражнении необходимо получить экспериментальные данные и на их основе построить графическую и аналитическую (на основе формулы Коши) зависимости показателя преломления вещества, из которого изготовлена призма, от длины волны света. В упражнении также необходимо рассчитать средний показатель преломления и число Аббе. Измерения рекомендуется выполнять с использованием призм с тремя различными преломляющими углами.

22. С помощью ползунка *«Положение источника света»* установите источник света в самое нижнее (по отношению к экрану) положение.

23. С помощью ползунка *«Длина волны»* на панели *«Источник света»* выберите минимальную (из доступных) длину волны света.

24. Для оптимальных условий изучения дисперсии необходимо чтобы и преломляющий угол призмы был как можно больше, и угол между нормалью к грани призмы и лучом света был максимально большим (но доступным для измерения), как для падающего, так и для вышедшего луча. Поэтому, не изменяя положение источника света, переключая кнопки на панели *«Призма»*, подберите призму с таким преломляющим углом, чтобы вышедший из призмы через правую грань луч упал на вертикальную линейку как можно ниже (в пределах области эксперимента).

Для этого сначала выберите призму с максимальным преломляющим углом (призма 11). Наблюдайте за ходом лучей. Если наблюдается полное внутреннее отражение или луч, вышедший из призмы, не попадает на вертикальную измерительную линейку, возьмите призму с меньшим преломляющим углом. Перебирайте призмы так, чтобы их преломляющий угол постепенно уменьшался, пока не добьетесь нужного хода лучей.

Запишите преломляющий угол выбранной призмы.

В дальнейшем в опытах будут участвовать еще две призмы с меньшими преломляющими углами.

25. Не меняя положение источника света, с помощью ползунка «*Длина волны*» на панели «*Источник света*» выберите длину волны, равную 400 нм. При необходимости используйте скроллинг мыши.

26. По возможности для выбранной призмы постарайтесь добиться такого хода лучей, при котором вышедший луч падает на вертикальную измерительную линейку как можно ниже. Для этого можно немного сместить источник света с помощью ползунка «*Положение источника света*». Запишите указанные на панели «*Источник света*» координаты и не меняйте их во всех опытах с выбранной призмой.

27. На падающем и вышедшем лучах света выберите по две точки и измерьте их координаты также как описано в пункте 15.

28. Углы наклона падающего и вышедшего лучей по отношению к горизонту рассчитайте, как описано в пункте 9.

РЕКОМЕНДУЕТСЯ рассчитывать все углы *в градусах с точностью до четырех десятичных знаков после запятой* (более грубые расчеты сделают изучение дисперсии недостоверным).

29. Углы наклона α_1 , α_2 падающего и вышедшего лучей по отношению к нормальям соответствующих граней призмы отличаются от углов наклона γ_1 , γ_2 падающего и вышедшего лучей по отношению к горизонту на половину преломляющего угла δ призмы:

$$\alpha_1 = \gamma_1 + \frac{\delta}{2} \text{ и } \alpha_2 = \gamma_2 + \frac{\delta}{2}.$$

Рассчитайте углы наклона α_1 , α_2 падающего и вышедшего лучей по отношению к граням призмы. При расчетах количество значащих цифр углов α_1 , α_2 должно быть таким же, как у углов γ_1 , γ_2 .

30. Для расчета показателя преломления используйте формулу:

$$n = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \delta}{\sin^2 \delta}}.$$

где α_1 , α_2 – углы наклона падающего и вышедшего лучей по отношению к нормальям соответствующих граней призмы, δ – преломляющий угол призмы. Вычисления необходимо выполнять с точностью до пяти десятичных знаков после запятой.

31. Не изменяя положение источника света, повторите действия, описанные в пунктах 27–30, еще для трех длин волн, отличающихся друг от друга на 90 нм. То есть для призмы, выбранной в пункте 24, измерения следует проводить для длин волн: 400, 490, 580 и 670 нм.

32. Чем больше преломляющий угол призмы, тем больше угол отклонения луча от его первоначального направления, и тем меньше погрешность измерений в опытах с такой призмой. Поэтому из всех призм, преломляющий угол которых меньше, чем у призмы, выбранной при выполнении пункта 24, выберите призму с самым большим преломляющим углом. Длину волны источника света установите равной 430 нм и вновь отрегулируйте положение источника света, как описано в пункте 26. Не изменяя положение источника света, повторите действия, описанные

в пунктах 27–30, для четырех длин волн, отличающихся друг от друга на 90 нм, начиная с 430 нм.

Из всех призм, преломляющий угол которых меньше, чем у уже использованных в этом упражнении призм, выберите призму с самым большим преломляющим углом. Длину волны источника света установите равной 460 нм и вновь отрегулируйте положение источника света, как описано в пункте 26. Не изменяя положение источника света, повторите действия, описанные в пунктах 27–30, для четырех длин волн, отличающихся друг от друга на 90 нм, начиная с 460 нм.

33. Показатель преломления является характеристикой вещества и не зависит от геометрии призмы. Поэтому по результатам опытов со всеми тремя призмами постройте один график зависимости показателя преломления n от длины волны λ . Проанализируйте, какой характер носит построенная зависимость. Учитывая, что все оптические стекла не имеют полос поглощения в видимом диапазоне, построенная зависимость должна носить монотонный характер – нормальная дисперсия.

34. По результатам опытов со всеми тремя призмами рассчитайте величину z , обратную квадрату длины волны $z = \lambda^{-2}$. Учитывая значения длин волн в видимом диапазоне, результаты расчетов удобно выразить в единицах 10^{-4} нм^{-2} и записать с точностью до пяти десятичных знаков после запятой. Постройте график зависимости показателя преломления n от величины z , обратной квадрату длины волны в соответствующих единицах. Согласно теории эта зависимость должна носить линейный характер.

35. Для определения числовых параметров аналитической зависимости показателя преломления от длины волны сначала рассчитайте следующие суммы:

$$S_z = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i, \quad S_{zz} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i^2, \quad S_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n_i, \quad S_{zn} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i \cdot n_i,$$

где k – количество длин волн, для которых проводились измерения.

Далее рассчитайте константы A и B по формулам (по методу наименьших квадратов):

$$A = \frac{S_n S_{zz} - S_z S_{zn}}{S_{zz} - S_z^2}, \quad B = \frac{S_{zn} - S_z S_n}{S_{zz} - S_z^2}.$$

Константа A безразмерная, а константу B следует выразить в единицах 10^4 нм^2 . Обе константы (в указанных единицах) необходимо вычислять с точностью до пяти десятичных знаков после запятой.

36. Учитывая полученные в предыдущем пункте параметры A и B , по формуле Коши (зависимости показателя преломления от длины волны) $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ рассчитайте показатель преломления n_C для красной линии водорода (656,28 нм), n_d для желтой линии гелия (587,56 нм) и n_F для голубой линии водорода (486,13 нм) с точностью до пяти десятичных знаков после запятой.

37. Рассчитайте коэффициент дисперсии (число Аббе) и средний показатель преломления по формулам:

$$V = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \quad \text{и} \quad \bar{n} = \frac{1}{2} (n_C + n_F).$$

Число Аббе вычисляйте с точностью до одного, а среднюю дисперсию – с точностью до пяти десятичных знаков после запятой.

38. Сравните вычисленное при выполнении пункта 36 значение показателя преломления n_d для желтой линии гелия с его табличным значением $n_{d таб}$, автоматически отображенным на панели «**Призма**» при выборе материала, из которого изготовлены все использованные в работе призмы (см. пункт 1). Вычислите относительную погрешность

$$\frac{|n_d - n_{d таб}|}{n_{d таб}} \cdot 100\% \text{ в процентах.}$$

Сравните вычисленное при выполнении пункта 37 значение числа Аббе V с его табличным значением $V_{таб}$, автоматически отображенным на панели «**Призма**» при выборе материала, из которого изготовлены все использованные в работе призмы (см. пункт 1). Вычислите относительную погрешность

$$\frac{|V - V_{таб}|}{V_{таб}} \cdot 100\% \text{ в процентах.}$$

39. Сделайте выводы.

Как ведет себя показатель преломления с увеличением длины волны света, проходящего через призму?

Какой характер дисперсии (нормальный или аномальный) имеет изученное вещество (материал) в видимой области спектра?

На сколько различаются значения показателя преломления изученного вещества в видимой части спектра?

Призмы с каким преломляющим углом следует выбирать для проведения опытов по изучению дисперсии света? Почему?

Какой аналитической формулой описывается зависимость показателя преломления вещества от длины волны?

Сравните значения коэффициента дисперсии и показателя преломления для желтой линии гелия, полученные экспериментально, с табличными данными.

5. Контрольные вопросы

1. Что характеризует показатель преломления?

2. Какое явление называют дисперсией света? При каких условиях наблюдается нормальная, аномальная дисперсия

Таблица

Длина волны λ , нм	Вышедший луч						Падающий луч				Показатель преломления n	$\sin \alpha_2$	$\sin \alpha_1$	$\alpha_2, ^\circ$	$\alpha_1, ^\circ$	$\gamma_2, ^\circ$	$\gamma_1, ^\circ$	
	x_1 , см	y_1 , см	x_2 , см	y_2 , см	Δx_1 , см	Δy_1 , см	x_3 , см	y_3 , см	x_4 , см	y_4 , см								Δx_2 , см
400																		
490																		
580																		
670																		

света?

3. Как дисперсия света объясняется классической электронной теорией?

4. Какой зависимостью описывается дисперсия для оптических стекол в области видимого излучения?

5. Какие характеристики используются для описания оптических стекол в физических или технических справочниках (таблицах)?

6. В чем состоит закон преломления света на границе раздела двух сред?

7. Получите формулу для расчета показателя преломления по ходу лучей в треугольной призме.

8. Кратко опишите последовательность выполнения работы.

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

НОРМАЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

Учебно-методическое пособие по изучению моделей
физических процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодО–01
для студентов всех специальностей

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати __.__.2022. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».

Печать RISO. Усл.печ.л. 1,86. Уч.-изд.л. 1,68.

Заказ 000-22. Тираж 30 экз.



Издательство

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ