МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
Отделение естественных наук ШБИП

УТВЕРЖДАЮ
Директор ШБИП
___________ Д.В. Чайковский
«___»_________ 2022 г.

О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко

ДВИЖЕНИЕ ИНЕРТНОГО ТЕЛА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических
процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодМ–07
для студентов всех специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
2022

УДК 53. 076

Ревинская О.Г.
Движение инертного тела в гравитационном поле: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодМ–07 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – 29 с.

УДК 53.076

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию методическим семинаром отделения естественных наук ШБИП
«___» _________ 20___ г.

Зав. ОЕН ШБИП
проф., доктор физ.-мат. наук В.П. Кривобоков

Председатель учебно-методической комиссии
А.В. Макиенко

Рецензент
доктор тех. наук, профессор Томского политехнического университета
В.А. Москалев

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № МодМ–07
ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Движение инертного тела в гравитационном поле

Цель работы: изучение движения тела в гравитационном поле одной из планет Солнечной системы (например, Земли). Изучение законов Кеплера.

1. Теоретическое содержание

Сила, действующая на материальную точку, называется ***центральной***, если она зависит только от расстояния до источника поля (силы) и направлена вдоль прямой, соединяющей материальную точку с источником поля. В общем виде центральная сила может быть записана

$$\vec{F} = F_r(r)\frac{\vec{r}}{r},$$

где $F_r(r)$ – проекция силы на прямую, соединяющую материальную точку с источником поля. Одним из наиболее распространенных видов центральных сил является сила, проекция которой обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника поля до материальной точки

$$F_r(r) = \frac{\alpha}{r^2},$$

где α – константа, обусловленная природой взаимодействия.

Примером центральной силы такого вида может служить сила гравитационного взаимодействия двух тел массами m_1 и m_2, когда одна из них выступает в качестве источника поля для другой

$$F_r(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

1.1. Задача о движении двух тел

Гравитационное взаимодействие двух тел относится в физике к задаче о движении двух тел, которую можно свести к задаче о движении одного тела приведенной массы в поле центральных сил.

Рассмотрим движение двух тел массами m_1 и m_2, силы взаимодействия которых являются центральными. Согласно третьему закону Ньютона, если тело m_2 действует на тело m_1 с силой $\vec{F}$, то тело m_1 действует на тело m_2 с силой $(-\vec{F})$. Учитывая общий вид центральной силы, запишем второй закон Ньютона (уравнения движения) для каждого из взаимодействующих тел:

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}, m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{F},$$

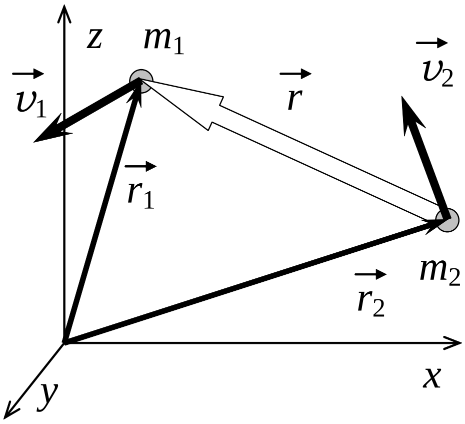


Рис. 1

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиус-векторы взаимодействующих тел в произвольной декартовой системе координат (рис. 1), причем $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Тело m_1 имеет скорость $\vec{v}_1$, тело m_2 имеет скорость $\vec{v}_2$.

Рассматриваемая система является замкнутой, так как на нее не действуют другие силы, кроме центральных. Центральная сила

$$\vec{F} = F_r(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

зависит только от относительного расположения тел $\vec{r}$. Поэтому на основе имеющейся системы двух уравнений получим кинематическое уравнение относительного движения тел. Для этого поделим каждое из уравнений Ньютона на массу и вычтем одно из другого

$$\frac{d^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) F_r(r)\frac{\vec{r}}{r};$$

$$M\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F_r(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

где $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ называют ***приведенной массой***.

Полученное уравнение можно интерпретировать как движение тела приведенной массы M в поле центральной силы $\vec{F}$: тело массой M расположено на расстоянии $\vec{r}$ от источника поля и движется со скоростью $\vec{v}$, равной скорости относительного движения тел $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Таким образом, задача о движении двух тел в физике сводится к задаче о движении одного тела.

Рассмотрим, как можно интерпретировать полученное уравнение при различных соотношениях масс взаимодействующих тел. Если масса тела m_2 значительно превосходит массу тела m_1 ($m_2 >> m_1$), то

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1 \Rightarrow M \approx m_1.$$

Полученное уравнение движения тела приведенной массы преобразуется в уравнение движения тела массой m_1 относительно тела массой m_2 (система отсчета связывается с телом массой m_2):

$$M\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F_r(r)\frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow m_1\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F_r(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

Аналогично можно показать, что если $m_1 >> m_2$, то уравнение движения тела приведенной массы преобразуется в уравнение движения тела массой m_2 относительно тела массой m_1 (система отсчета связывается с телом массой m_1). То есть тело большей массы выступает в качестве источника поля, в котором движется тело меньшей массы.

1.2. Движение тела приведенной массы в поле центральной силы

В общем случае имеем движение тела приведенной массы M, описываемое кинематическим уравнением

$$M\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F_r(r)\frac{\vec{r}}{r},$$

характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$ и скоростью $\vec{v}$. На тело приведенной массы действует единственная сила $\vec{F}$, являющаяся центральной. Проанализируем, каким будет движение тела приведенной массы в этих условиях.

1. ***Движение*** тела приведенной массы в поле центральной силы ***является плоским***, так как момент этой силы равен нулю.

Действительно, момент силы определяется как векторное произведение силы $\vec{F}$ на радиус-вектор в точке ее приложения $\vec{r}$. Для центральной силы момент силы равен

$$[\vec{r}\ \vec{F}] = F_r(r)\frac{1}{r}[\vec{r}\ \vec{r}] = 0.$$

2. Согласно второму закону Ньютона действие силы приводит к изменению импульса тела $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$. Следовательно,

$$[\vec{r}\ \vec{F}] = 0 \Rightarrow \left[\vec{r}\ \frac{d\vec{P}}{dt}\right] = 0.$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\ \vec{P}] = \left[\vec{r}\ \frac{d\vec{P}}{dt}\right] + \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \vec{P}\right] = \left[\vec{r}\ \frac{d\vec{P}}{dt}\right] = 0.$$

Векторное произведение импульса тела на его радиус-вектор называется ***моментом импульса*** $\vec{L}$. Из полученного выражения следует, что $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ – ***момент импульса сохраняется при движении тела в поле центральных сил*** ($\vec{L} = [\vec{r}\ \vec{P}] = M[\vec{r}\ \vec{v}] = const$).

3. Других сил кроме центральной на тело приведенной массы не действует, поэтому система является замкнутой. Для нее ***сохраняется*** и

полная механическая энергия системы E, включающая кинетическую $T = \frac{Mv^2}{2}$ и потенциальную U. Потенциальная энергия U равна работе по перемещению тела из данной точки на бесконечность: $U = \int_r^{\infty}(\vec{F}d\vec{r}) = \int_r^{\infty} F_r(r)dr$. Если сила обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника поля $F_r(r) = \frac{\alpha}{r^2}$, то потенциальная энергия

$$U = \int_r^{\infty} F_r(r)dr = \int_r^{\infty} \frac{\alpha}{r^2}dr = \frac{\alpha}{r}.$$

Следовательно, полная энергия тела приведенной массы в поле центральной силы равна

$$E = \frac{Mv^2}{2} + \frac{\alpha}{r} = const.$$

1.3. Уравнение движения тела приведенной массы в полярной системе координат

Уравнение движения тела приведенной массы определяется действием только центральной силы, обладающей центральной симметрией

$$M\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F_r(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

Следовательно, и движение тела обладает центральной симметрией. Кроме того, как было показано выше, движение тела является плоским ($\vec{L} = const$). Поэтому для описания траектории движения тела удобнее перейти в полярную систему координат (рис. 2). Декартовы координаты x и y связаны с полярными координатами r и φ следующими соотношениями:

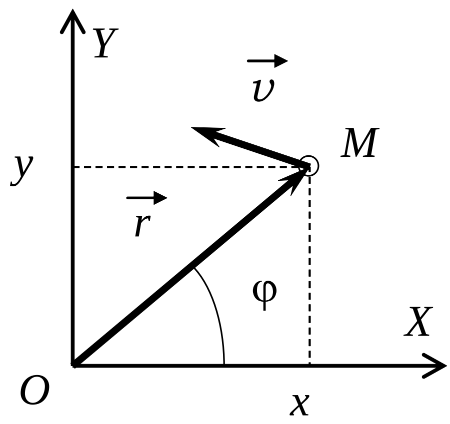


Рис. 2

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Перепишем закон сохранения энергии и закон сохранения момента импульса в полярных координатах. Для этого сначала запишем компоненты скорости:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\sin\varphi, \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + \dot{\varphi}r\cos\varphi.$$

В декартовых координатах вектор $\vec{r}$ при движении в плоскости XOY имел координаты $\vec{r} = (x, y, 0)$, а вектор скорости $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$. Момент импульса $\vec{L} = M[\vec{r}\ \vec{v}]$ в декартовых координатах записывается через определитель вида

$$\vec{L} = M[\vec{r}\ \vec{v}] = M\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = M(x\dot{y} - \dot{x}y)\hat{k}.$$

Вектор момента импульса направлен только вдоль орта $\hat{k}$, поэтому $L = M(x\dot{y} - \dot{x}y)$. Получим выражение для момента импульса в полярных координатах, подставив в это выражение соответствующие выражения в полярных координатах:

$$L = M(r\cos\varphi\,\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\, r\dot{\varphi}\cos\varphi -$$
$$-r\sin\varphi\,\dot{r}\cos\varphi + r\sin\varphi\, r\dot{\varphi}\sin\varphi) =$$
$$= Mr^2\dot{\varphi}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = Mr^2\dot{\varphi}$$

Закон сохранения момента импульса $L = Mr^2\dot{\varphi} = const$.

Аналогично преобразуем кинетическую и потенциальную энергию. Кинетическая энергия:

$$T = \frac{Mv^2}{2} = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) =$$
$$= \frac{M}{2}(\dot{r}^2\cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi +$$
$$+\dot{r}^2\sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi),$$
$$T = \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Кинетическая энергия T представляет собой совокупность радиального $\frac{M}{2}\dot{r}^2$ (вдоль радиус-вектора) и нормального движения $\frac{M}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{M}{2}r^2\omega^2$ (перпендикулярно радиус-вектору), где $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость.

Потенциальная энергия $U = \frac{\alpha}{r}$.

Тогда закон сохранения энергии в полярной системе координат примет вид: $E = \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r} = const$.

Из выражения для момента импульса выразим угловую скорость $\dot{\varphi}$ и подставим в выражение для закона сохранения энергии:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{Mr^2} \Rightarrow E = \frac{M}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{M^2r^2}\right) + \frac{\alpha}{r} = const \text{ или}$$
$$E = \frac{M}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2Mr^2} + \frac{\alpha}{r} = const.$$

Продифференцируем полученное выражение по времени

$$\frac{M}{2}2\dot{r}\,\ddot{r} - \frac{L^2}{Mr^3}\dot{r} - \frac{\alpha}{r^2}\dot{r} = 0 \text{ или}$$
$$M\ddot{r} = \frac{L^2}{Mr^3} + \frac{\alpha}{r^2}.$$

Полученное выражение представляет собой ***второй закон Ньютона в полярной системе координат***: тело приобретает радиальное ускорение $\ddot{r}$ вследствие действия двух сил: центробежной ($\frac{L^2}{Mr^3}$) и центральной ($\frac{\alpha}{r^2}$). Наличие центробежной силы говорит о том, что выбранная система отсчета является неинерциальной. Она движется ускоренно вместе с источником поля.

Энергию системы в полярных координатах

$$E = \frac{M}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2Mr^2} + \frac{\alpha}{r}$$

можно рассматривать как совокупность кинетической энергии радиального движения $\frac{M}{2}\dot{r}^2$, потенциальной энергии центрального поля $\frac{\alpha}{r}$ и кинетической энергии движения по окружности (центробежной энергии) $\frac{L^2}{2Mr^2}$. Величину, равную $\Phi(r) = \frac{L^2}{2Mr^2} + \frac{\alpha}{r}$, называют ***эффективной потенциальной энергией*** тела приведенной массы.

1.4. Траектория тела в центральном поле

В полученном уравнении движения тела приведенной массы (втором законе Ньютона)

$$M\ddot{r} = \frac{L^2}{Mr^3} + \frac{\alpha}{r^2}$$

все силы, действующие на тело, зависят только от величины, обратно пропорциональной расстоянию r до источника поля. Поэтому для нахождения решения этого уравнения удобно сделать замену переменных

$$r(t) = \frac{1}{\xi(\varphi)}.$$

Тогда полученное ранее выражение $\dot{\varphi} = \frac{L}{Mr^2}$ можно записать как

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{Mr^2} = \frac{L}{M}\xi^2.$$

Выразим первую и вторую производную от расстояния r в новых переменных

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\xi^2}\,\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{\xi^2}\,\frac{d\xi}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{\xi^2}\,\dot{\varphi}\,\frac{d\xi}{d\varphi} = -\frac{1}{\xi^2}\,\frac{L}{M}\xi^2\,\frac{d\xi}{d\varphi},$$

$$\dot{r} = -\frac{L}{M}\,\frac{d\xi}{d\varphi}.$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{M}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right) = -\frac{L}{M}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{L^2}{M^2}\xi^2\,\frac{d^2\xi}{d\varphi^2},$$

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{M^2}\xi^2\frac{d^2\xi}{d\varphi^2}.$$

Подставляя полученное выражение для второй производной в уравнение движения, получим

$$M\ddot{r} = \frac{L^2}{Mr^3} + \frac{\alpha}{r^2} \quad \Rightarrow \quad -M\frac{L^2}{M^2}\xi^2\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} = \frac{L^2}{M}\xi^3 + \alpha\xi^2,$$

$$-\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} = \xi + \frac{\alpha M}{L^2} \qquad \text{или} \qquad \frac{d^2\xi}{d\varphi^2} + \left(\xi + \frac{\alpha M}{L^2}\right) = 0.$$

Замена переменных $\chi(\varphi) = \xi(\varphi) + \frac{\alpha M}{L^2}$ позволяет свести полученное уравнение к стандартному уравнению гармонических колебаний с частотой равной единице

$$\frac{d^2\chi}{d\varphi^2} + \chi = 0.$$

Решением данного уравнения является гармоническая зависимость χ от φ с амплитудой A и некоторой начальной фазой $\varphi_{\min}$:

$$\chi = A\cos(\varphi_{\min} - \varphi).$$

Возвращаясь к переменным ξ и r, получим искомое решение в виде

$$\chi = \xi + \frac{\alpha M}{L^2} = A\cos(\varphi_{\min} - \varphi) \Rightarrow \frac{1}{r} = A\cos(\varphi_{\min} - \varphi) - \frac{\alpha M}{L^2}.$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha M}{L^2}\left(\frac{AL^2}{\alpha M}\cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1\right).$$

Введем обозначения $p = \frac{L^2}{\alpha M}$ и $\varepsilon = \frac{AL^2}{\alpha M}$. Тогда решение примет вид

$$r = \frac{p}{\varepsilon\cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1}.$$

Определить константу ε можно, подставив r в выражение для энергии

$$E = \frac{M}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2Mr^2} + \frac{\alpha}{r}.$$

Возьмем производную от r и подставим в нее $\dot{\varphi} = \frac{L}{Mr^2}$:

$$\dot{r} = \frac{p}{(\varepsilon\cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1)^2}(\varepsilon\sin(\varphi_{\min} - \varphi)\,\dot{\varphi}) = \frac{L}{Mp}\varepsilon\sin(\varphi_{\min} - \varphi).$$

Тогда закон сохранения энергии

$$E = \frac{M}{2}\frac{L^2}{M^2p^2}\varepsilon^2\sin^2(\varphi_{\min} - \varphi) + \frac{L^2}{2Mp^2}(\varepsilon\cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1)^2 +$$

$$+\frac{\alpha}{p}(\varepsilon\cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1).$$

Выполнив тригонометрические преобразования и подставив $p = \frac{L^2}{\alpha M}$, получим

$$\frac{\alpha^2 M}{2L^2}(\varepsilon^2 - 1) = E.$$

$$\text{Отсюда } \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{2L^2}{\alpha^2 M}E + 1}.$$

Таким образом, в ***полярных координатах уравнение траектории*** имеет вид

$$r = \frac{p}{\varepsilon\cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1}, \qquad \text{где } p = \frac{L^2}{\alpha M}, \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{1 + \frac{2L^2}{\alpha^2 M}E}.$$

Это ***уравнение конических сечений***, записанное в полярных координатах. Константа p называется ***фокальным параметром*** кривой, а константа ε – ***эксцентриситетом***. Из курса геометрии известно, что в зависимости от эксцентриситета конические сечения могут принимать форму круга ($\varepsilon = 0$), эллипса ($|\varepsilon| < 1$), параболы ($|\varepsilon| = 1$) или гиперболы ($|\varepsilon| > 1$).

При движении по замкнутой траектории (эллипс, круг) полярный угол φ изменяется в интервале $[-\pi; \pi]$ (или в интервале $[0; 2\pi]$). При движении по незамкнутой траектории (парабола, гипербола) полярный угол φ изменяется в небольших пределах вблизи $\varphi_{\min}$ (рис. 3).

Полярная координата r является положительной ($r \geq 0$) по определению. При этом фокальный параметр p и эксцентриситет ε могут быть как положительными, так и отрицательными.

Например, для замкнутых траекторий ($|\varepsilon| < 1$ – эллипс или круг) при любых значениях полярного угла $\varphi \in [-\pi; \pi]$ знаменатель $\varepsilon\cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1$ всегда отрицательный. Поэтому для замкнутых траекторий фокальный параметр p всегда отрицательный, а эксцентриситет может быть как положительным, так и отрицательным (рис. 3*а*).

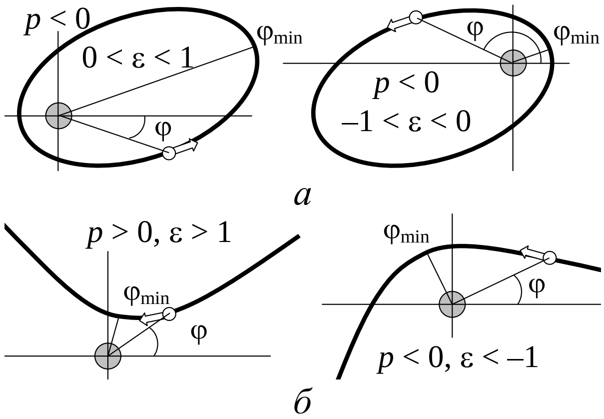


Рис. 3

Для незамкнутых траекторий ($|\varepsilon| \geq 1$ – парабола или гипербола) знаменатель $\varepsilon\cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1$ может быть как положительным, так и отрицательным (интервал изменения углов φ ограничен значениями вблизи φ_{min}, поэтому косинус всегда положителен). Поэтому фокальный параметр тоже может быть как положительным, так и отрицательным. Причем если $\varepsilon \geq 1$, то и $p > 0$. А если $\varepsilon \leq -1$, то $p < 0$ (рис. 3*б*).

При угле* $\varphi = \varphi_{min}$** (косинус равен единице) ***тело, движущееся, например, по замкнутой траектории ($p < 0$) с эксцентриситетом $-1 < \varepsilon < 0$, будет ***находиться на минимальном расстоянии от рассеивающего центра***

$$r_{\min} = \frac{|p|}{1 + |\varepsilon|},$$

так как знаменатель в выражении $r = \frac{|p|}{1+|\varepsilon|\cos(\varphi_{\min}-\varphi)}$ имеет максимальное значение.

Точка траектории, расстояние от рассеивающего центра до которой минимально, называется ***перигеем***. В перигее радиальная скорость движущегося тела $\dot{r} = \frac{L}{Mp}\varepsilon\sin(\varphi_{\min} - \varphi)$ обращается в ноль, а угловая $\omega = \dot{\varphi} = \frac{L}{Mr_{\min}^2}$ и тангенциальная $v_{\varphi} = \omega r = \frac{L}{Mr_{\min}}$ скорости максимальны. То есть скорость $\vec{v}$ направлена перпендикулярно радиус-вектору $\vec{r}$.

Если траектория движения замкнута (эллипс), то кроме перигея, она имеет и ***апогей*** – точку наибольшего удаления от источника поля. ***При угле* $\varphi = \varphi_{min} \pm \pi$** (косинус равен минус единице) ***тело***, движущееся по замкнутой траектории ($p < 0$) с эксцентриситетом $-1 < \varepsilon < 0$, будет ***находиться на максимальном расстоянии от рассеивающего центра***

$$r_{\max} = \frac{|p|}{1 - |\varepsilon|},$$

так как знаменатель в выражении $r = \frac{|p|}{1+|\varepsilon|\cos(\varphi_{\min}-\varphi)}$ имеет минимальное значение.

В апогее радиальная скорость тела $\dot{r}$ также обращается в ноль (скорость $\vec{v}$ направлена перпендикулярно радиус-вектору $\vec{r}$), а угловая $\omega = \dot{\varphi} = \frac{L}{Mr_{\max}^2}$ и тангенциальная $v_{\phi} = \omega r = \frac{L}{Mr_{\max}}$ скорости минимальны.

Таким образом, для замкнутых траекторий угол φ_{min} задает направление прямой, соединяющей перигей и апогей.

При положительном эксцентриситете $0 < \varepsilon < 1$ для замкнутых траекторий ($p < 0$) апогей и перигей меняются местами

$$r_{\min} = \frac{|p|}{1 + \varepsilon} \text{ при } \varphi = \varphi_{\min} \pm \pi; \; r_{\max} = \frac{|p|}{1 - \varepsilon} \text{ при } \varphi = \varphi_{\min}.$$

1.5. Траектория движения тела в гравитационном поле

В гравитационном поле сила, действующая на тело массой m_1 со стороны другого тела массой m_2, является центральной и равна

$$F_r(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G = 6,6740831·10^{-11} Н·м^2/кг^2 (по данным 2014 г.).

Константа α в этом случае примет вид $\alpha = -Gm_1m_2$ и может быть только отрицательной (α < 0). Соответственно, и фокальный параметр $p = \frac{L^2}{\alpha M} < 0$ при движении в гравитационном поле тоже всегда отрицателен.

Как показано выше, при любых значениях p и ε траектория движения тела имеет хотя бы одну точку (перигей, или перигей и апогей), в которой скорость перпендикулярна радиус-вектору. Обозначим через A точку траектории, в которой скорость $\vec{v}_A$ перпендикулярна радиус-вектору $\vec{r}_A$ (рис. 4).

Физические величины L и E являются постоянными (сохраняющимися со временем), их значения не зависят от того, в какой момент времени движения тела (например, в момент времени, когда тело находилось в точке A) их рассчитывают. Поэтому выразим величины L и E через параметры тела в точке A: v_A, r_A. Тогда в точке A по определению момента импульса можно записать

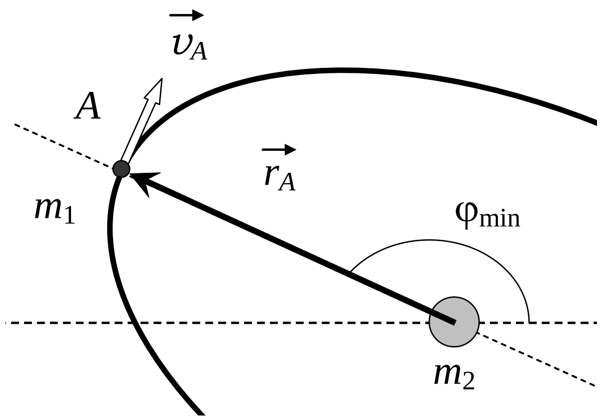


Рис. 4

$$\vec{L} = M[\vec{r}_A\ \vec{v}_A] \Rightarrow L = Mr_Av_A\sin\frac{\pi}{2} = Mr_Av_A,$$

$$L = Mr_Av_A.$$

Энергия в точке A $$E = \frac{Mv_A^2}{2} + \frac{\alpha}{r_A}.$$

Опираясь на эти выражения энергии и момента импульса, проанализируем уравнение траектории, записанное в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{\varepsilon\cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1}, \quad \text{где } p = -\frac{L^2}{|\alpha|M}, \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{1 + \frac{2L^2}{\alpha^2 M}E}.$$

В полярных координатах расстояние r считается положительным.

При гравитационном притяжении (α < 0) фокальный параметр траектории p отрицателен (p < 0), а эксцентриситет ε в зависимости от полной энергии E может принимать любые значения. Поэтому можно наблюдать различные конические сечения. Как видно из формулы, связывающей эксцентриситет и энергию, чтобы наблюдать движение с эксцентриситетом 0 ≤ |ε| ≤ 1, необходимо, чтобы энергия E была отрицательной. Если энергия равна нулю, будем наблюдать движение по параболе.

Анализ траектории тела в гравитационном поле можно также осуществлять на основе сопоставления полной энергии налетающей частицы $E = \frac{M}{2}\dot{r}^2 + \Phi(r)$ и эффективной потенциальной энергии Φ(r), введенной в разделе 1.3.

Рассмотрим эффективную потенциальную энергию

$$\Phi(r) = \frac{L^2}{2Mr^2} + U(r) = \frac{L^2}{2Mr^2} + \frac{\alpha}{r}.$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ отрицательна (α < 0). В зависимости от величины центробежной энергии $\frac{L^2}{2Mr^2}$ эффективная энергия Φ(r) может заходить в область отрицательных энергий (рис. 5*а*) или будет оставаться всегда положительной (рис. 5*б*). Если эффективная потенциальная энергия положительна, то будет наблюдаться только незамкнутое движение (гипербола или парабола) с приближением к источнику поля на минимальное расстояние $r_{\min}$, соответствующее точке пересечения полной энергии с графиком эффективной энергии.

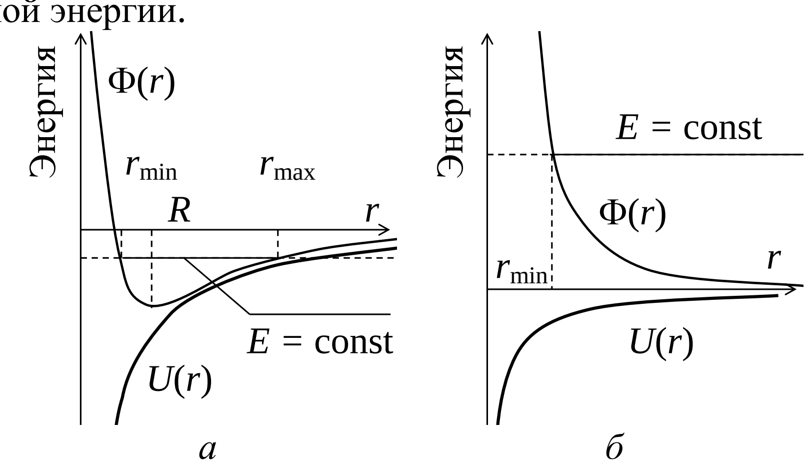
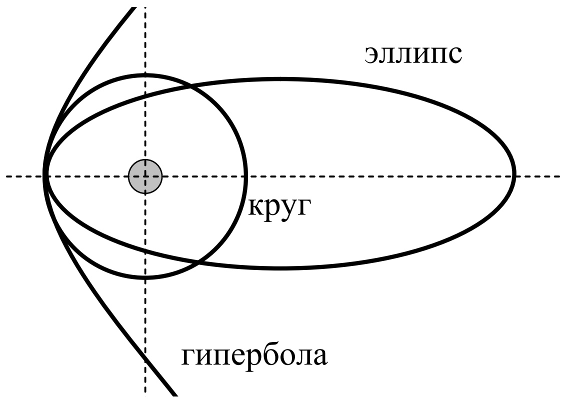


Рис. 5

Если эффективная энергия заходит в область отрицательных энергий, то возможно движение по замкнутой траектории (эллипс или окружность). При этом тело то приближается к источнику поля на расстояние $r_{\min}$, то удаляется от него на расстояние $r_{\max}$. Эти точки также соответствуют точкам пересечения полной энергии с графиком эффективной энергии и называются точками поворота. При движении по окружности тело будет постоянно находиться на одинаковом расстоянии R от источника поля, которое соответствует минимуму эффективной потенциальной энергии (рис. 5*а*).

2. Законы Кеплера

Законы движения тела в гравитационном поле впервые были установлены экспериментально в 1609–1619 году немецким ученым И. Кеплером на основе астрономических наблюдений, проведенных Т. Браге в 1577–1597 гг. Впервые законы Кеплера были сформулированы для движения планет вокруг Солнца, а в дальнейшем благодаря теоретическим выкладкам И. Ньютона они были обобщены для любого гравитационного взаимодействия.



В настоящее время приняты следующие формулировки законов Кеплера.

I закон Кеплера: все тела вблизи планет движутся по орбитам являющимся коническими сечениями (кругом, эллипсом, параболой, гиперболой); планета находится в одном из фокусов орбиты.

II закон Кеплера: радиус-вектор, соединяющий центр планеты с телом, «заметает» равные площади за равные промежутки времени.

III закон Кеплера: при движении по эллиптическим орбитам квадраты периодов обращения относятся как кубы больших полуосей эллипсов.

2.1. Первый закон Кеплера

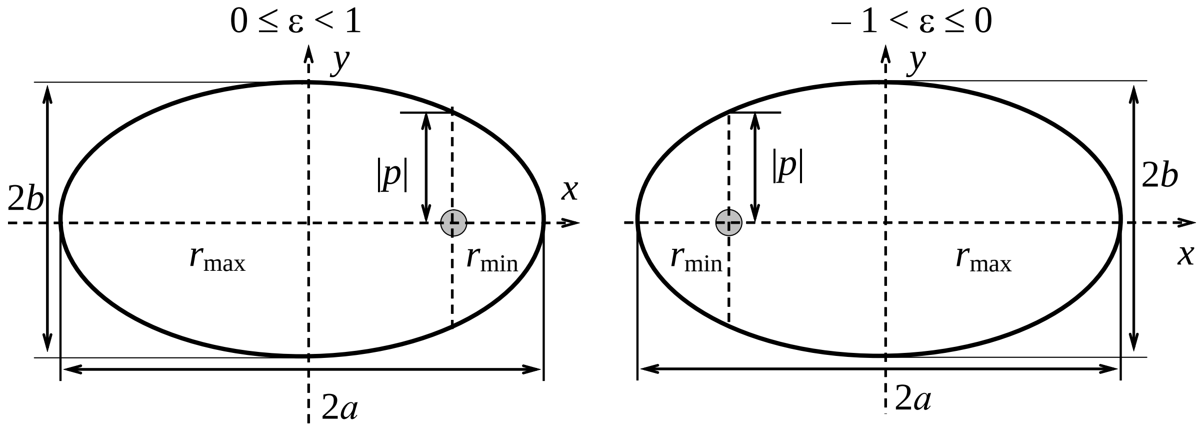
При изучении движения тела в гравитационном поле некоторой планеты (например, Земли) наибольший интерес представляют замкнутые эллиптические траектории (орбиты). Это периодическое движение, повторяющееся в пространстве и во времени.

В изучаемой задаче физически выделенного направления не существует, начало отсчета полярного угла можно выбрать произвольным образом.

Эллиптическая орбита имеет отрицательный фокальный параметр $p < 0$ и эксцентриситет меньше единицы $0 \le |\varepsilon| < 1$. Для удобства записи уравнения траектории выберем начало отсчета полярного угла так, чтобы $\varphi_{\min} = \pi$ (рис. 6). Тогда уравнение эллипса в выбранных полярных координатах примет вид

$$r = \frac{p}{\varepsilon\cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1} = \frac{|p|}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Если эксцентриситет ε – ***положительная величина***, то в выбранной системе отсчета перигей (минимальное удаление от планеты) будет наблюдаться, как было доказано ранее при угле $\varphi = \varphi_{\min} \pm \pi$, то есть при $\varphi = 0$, а апогей (максимальное удаление) – при $\varphi = \varphi_{\min} = \pi$ (рис. 6*а*). Уравнение эллипса при этом имеет вид $r = \frac{|p|}{1+\varepsilon\cos\varphi}$.



$p < 0$; $\varphi_{\min} = \pi$

Рис. 6

Если эксцентриситет ε – ***величина отрицательная***, то, наоборот, в выбранной системе отсчета при угле $\varphi = 0$ будет наблюдаться апогей эллиптической орбиты, а при $\varphi = \pi$ – перигей (рис. 6*б*). С учетом знака эксцентриситета уравнение эллипса примет вид $r = \frac{|p|}{1-|\varepsilon|\cos\varphi}$.

Каждый из этих случаев соответствует расположению источника гравитационного поля (планеты) в двух различных точках – фокусах эллиптической кривой. Для круга ($\varepsilon = 0$) положения фокусов совпадают.

В геометрии эллипс имеет большую a и малую b полуоси. Угол $\varphi_{\min} = \pi$ задает направление большой полуоси эллипса, которая в этом случае совпадает с осью OX декартовой системы координат (рис. 6).

Тогда при фиксированном положении большой полуоси на плоскости (например, при $\varphi_{\min} = \pi$) для описания эллипса достаточно иметь две положительные константы: либо $|p|$ и $|\varepsilon|$, либо a и b, либо $r_{\min}$ и $r_{\max}$.

Эти три пары констант связаны между собой следующими соотношениями:

$$a = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min}) \text{ и } b = \sqrt{r_{\max} r_{\min}},$$

$$|p| = \frac{2r_{\max} r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \text{ и } |\varepsilon| = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}},$$

$$a = \frac{|p|}{1 - \varepsilon^2} \text{ и } b = \frac{|p|}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Таким образом, если из эксперимента определить значения a и b, либо $r_{\min}$ и $r_{\max}$, то можно рассчитать геометрические параметры траектории: фокальный параметр $|p|$ и эксцентриситет $|\varepsilon|$.

2.2. Второй закон Кеплера

Второй закон Кеплера вытекает из закона сохранения момента импульса.

При движении в центральном поле за промежуток времени dt полярный угол, характеризующий положение тела, изменится на $d\varphi$. Тогда площадь dS, «заметаемая» радиус-вектором r, в полярных координатах равна

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

Разделив обе части на dt, получим $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$. Согласно закону сохранения момента импульса $L = Mr^2\dot{\varphi} = const$. Следовательно,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{2M} = const.$$

Тогда $$\Delta S = \int_{t}^{t+\Delta t} \frac{L}{2M} dt = \frac{L}{2M} \Delta t.$$

За любые промежутки равные времени Δt радиус-вектор частицы «заметает» равные площади:

$$\Delta S = \frac{L}{2M} \Delta t.$$

2.3. Третий закон Кеплера

При движении по замкнутой (эллиптической) траектории тело совершает полный оборот вокруг планеты за время T, называемое периодом обращения. При этом радиус вектор «заметает» площадь, равную площади эллипса $S = \pi ab$ (a и b – полуоси эллипса). Согласно второму закону Кеплера

$$S = \frac{L}{2M}T = \pi ab.$$

Фокальный параметр траектории p связан с моментом импульса $|p| = \frac{L^2}{|\alpha|M}$. Следовательно, $L = \sqrt{M|p|\cdot|\alpha|}$.

С другой стороны, учитывая связь параметров эллипса $|p|$ и $|\varepsilon|$ с его полуосями $a = \frac{|p|}{1-\varepsilon^2}$ и $b = \frac{|p|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, легко показать, что $|p| = \frac{b^2}{a}$. Выразив b, получим $b = \sqrt{a|p|}$.

Подставив выражения для L и b в уравнение площади, получим

$$\frac{\sqrt{M|\alpha|\cdot|p|}}{2M}T = \pi a\sqrt{a|p|}.$$

Сократим и возведем в квадрат:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 M}{|\alpha|}a^3 \quad \text{или} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_2}a^3 \quad (\text{при } M \approx m_1).$$

Отсюда видно, что при движении по эллиптической орбите квадрат периода обращения прямо пропорционален кубу большой полуоси эллипса. Следовательно, при движении вокруг одной и той же планеты отношение квадратов периодов равно отношению кубов больших полуосей двух различных движений.

3. Рабочие формулы

3.1. Площадь сектора эллипса

Для изучения второго закона Кеплера необходимо вычислять площадь сектора эллипса. Пусть сектор, площадь которого надо вычислить, характеризуется полярными углами φ_1 и φ_2 ($\varphi_2 > \varphi_1$) и соответствующими радиальными координатами r_1 и r_2 (рис. 7). Тогда площадь сектора в полярных координатах равна

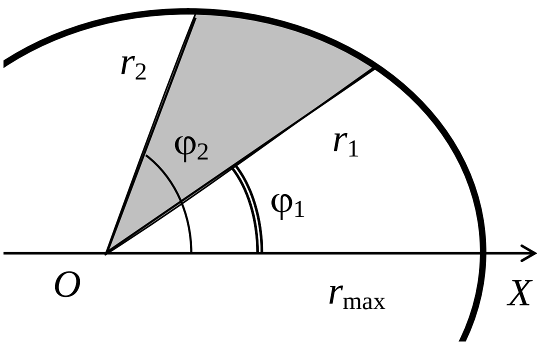


Рис. 7

$$S_{сек} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2}r^2 d\varphi.$$

Получим площадь сектора эллипса, для которого $\varphi_{min} = \pi$ (большая полуось направлена вдоль оси OX декартовой системы координат). Тогда уравнение траектории в полярных координатах имеет вид:

$$r = \frac{|p|}{\varepsilon\ \cos\varphi + 1}.$$

Согласно правилам интегрального исчисления для вычисления площади нужно посчитать первообразную

$$I = \int \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{p^2}{2} \int \frac{d\varphi}{(\varepsilon \cos\varphi + 1)^2}.$$

Тогда площадь сектора будет равна разности первообразных

$$S_{\text{сек}} = I(\varphi_2) - I(\varphi_1) \text{ или } S_{сек} = I(r_2) - I(r_1).$$

Учитывая связь параметров траектории p и ε с величинами a, b, $r_{\min}$ и $r_{\max}$, искомую первообразную можно записать в виде

$$I(r) = \int \frac{1}{2} r^2 d\varphi = ab \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r - r_{\min}}{r_{\max} - r}} - \frac{1}{2a} \sqrt{(r - r_{\min})(r_{\max} - r)} \right].$$

В частности

$$I(\varphi = \pm\pi) = I(r_{\min}) = 0,$$
$$I(\varphi = 0) = I(r_{\max}) = -\frac{\pi}{2} ab.$$

Так как подынтегральная функция четная, полученную формулу следует применять только для вычисления площади сектора, ограниченного углами φ_1 и φ_2, имеющими одинаковые знаки.

Из геометрических соображений легко заметить, что

$$S_{сек} = I(r_2) - I(r_1) \text{ при } \varphi_1 > 0 \text{ и } \varphi_2 > 0;$$
$$S_{сек} = I(r_1) - I(r_2) \text{ при } \varphi_1 < 0 \text{ и } \varphi_2 < 0;$$
$$S_{сек} = [I(r_2) - I(r_{\max})] + [I(r_1) - I(r_{\max})] = \pi ab + I(r_1) + I(r_2)$$
$$\text{при } \varphi_1 < 0 \text{ и } \varphi_2 > 0.$$

3.2. Физические параметры взаимодействия

Движение тела в гравитационном поле характеризуется следующими физическими константами:

- полная механическая энергия системы E;
- момент импульса L.

Зная параметры траектории p, ε можно определить эти константы, используя аналитические выражения для параметров траектории

$$p = \frac{L^2}{\alpha M}, \qquad \varepsilon = \pm \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\alpha^2 M} E}$$

и связь параметров с длиной полуосей эллипса a, b: $a = \frac{|p|}{1-\varepsilon^2}$ и $b = \frac{|p|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ $\left(|p| = \frac{b^2}{a} \text{ и } \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{b}{a}\right)$.

Рассмотрим $p = \frac{L^2}{\alpha M}$ и $|p| = \frac{b^2}{a}$. Приравняв эти два выражения, получим момент импульса L

$$L^2 = b^2 \frac{|\alpha| M}{a} \quad \text{или} \quad L = b\sqrt{\frac{|\alpha| M}{a}}.$$

Рассмотрим $\varepsilon = \pm\sqrt{1 + \frac{2L^2}{\alpha^2 M} E}$ и $\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{b}{a}$. Возведем оба выражения в квадрат, подставим $L^2 = b^2 \frac{|\alpha| M}{a}$ в выражение для эксцентриситета

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2L^2}{\alpha^2 M} E = 1 + \frac{2b^2}{a|\alpha|} E \Rightarrow$$

$$1 - \varepsilon^2 = -\frac{2b^2}{a|\alpha|} E = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{|\alpha|}{2a}.$$

И действительно, анализ характера движения тела на основе эффективной потенциальной энергии показал, что при движении по замкнутым траекториям полная механическая энергия отрицательна.

3.3. Связь периода обращения по эллиптической орбите с полной энергией системы

Учитывая, что по третьему закону Кеплера период обращения по эллиптической орбите связан с его большой полуосью

$$T^2 = \frac{4\pi^2 M}{|\alpha|} a^3,$$

а полная энергия системы определяет длину полуоси: $E = -\frac{|\alpha|}{2a}$, можно получить связь периода обращения с полной энергией системы

$$T^2 = -\frac{4\pi^2 M}{|\alpha|} \cdot \frac{|\alpha|^3}{8E^3} \text{ или } T^2 = -\frac{\pi^2 M |\alpha|^2}{2} \cdot \frac{1}{E^3}.$$

Квадрат периода обратно пропорционален кубу полной энергии.

3.4. Связь площади, охватываемой эллиптической траекторией, с физическими константами взаимодействия

Очевидно, что должна наблюдаться взаимосвязь площади $S = \pi ab$ эллиптической траектории с физическими константами взаимодействия E и L.

Зная связь E и L с размерами эллипса a, b: $L = b\sqrt{\frac{|\alpha|M}{a}}$ и $E = -\frac{|\alpha|}{2a}$, получим

$$S = \pi ab = \pi aL\sqrt{\frac{a}{|\alpha|M}} = \frac{\pi|\alpha|}{\sqrt{8M}}\frac{L}{|E|^{3/2}}.$$

Таким образом, $$S = \frac{\pi|\alpha|}{\sqrt{8M}}\frac{L}{|E|^{3/2}}.$$

4. Модель экспериментальной установки

В данной работе с помощью средств компьютерной графики моделируется процесс движения тела известной массы вблизи некоторой планеты (например, Земли). Масса планеты значительно превосходит массу тела, поэтому планету можно считать неподвижной. Движение происходит только под действием гравитационных сил. Для измерения координат тела используются вертикальная и горизонтальная линейки. Для измерения углов в полярных координатах используется транспортир, по которому можно выполнять изменения с точность до 1 градуса.

Работа выполняется на IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание работы; порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит раскрывающийся список для выбора планеты, ползунок для изменения скорости и счетчик для изменения расстояния от точка A до центра планеты, а также кнопки, позволяющие управлять экспериментом. В точке A скорость (задаваемая с помощью ползунка) направлена перпендикулярно прямой, соединяющей точку A с центром планеты. При заданном положении транспортира точка A характеризуется углом π в полярных координатах. Если орбита (траектория) тела является замкнутой, движение начинается из точки *A*. Если траектория тела является незамкнутой, движение начинается из бесконечности.

Варианты выполнения работы

Вариант	Планета
1	Меркурий
2	Венера
3	Земля
4	Марс

Вариант	Планета
5	Юпитер
6	Сатурн
7	Уран
8	Нептун
9	Плутон

5. Порядок выполнения работы

5.1. Краткое описание хода работы

1. Выберите планету – источник гравитационного поля (по указанию преподавателя).

Упражнение 1. Первый закон Кеплера.

2. Установите максимально возможное расстояние от планеты до точки *A* траектории.

3. Подберите минимальную скорость тела в точке *A*.

4. Подберите максимальную скорость тела в точке *A*.

5. Подберите максимальную для условий данного эксперимента скорость тела в точке *A*.

6. Подберите скорости для 5 различных расстояний от планеты до точки *A*, включая максимальное.

7. Постройте графики зависимости скоростей от расстояния до планеты в точке *A*.

Упражнение 2. Второй закон Кеплера.

8. Установите максимально возможное расстояние от планеты до точки *A* траектории.

9. Установите скорость тела в точке равной максимальной для условий данного эксперимента (из упражнения 1).

10. Задайте интервал времени для измерения углов.

11. Выполните эксперимент.

12. Измерьте минимальные и максимальные X- и Y-координаты траектории.

13. Измерьте углы для 10 последовательных положений тела.

14. Измените направление движения.

15. Повторите опыты для минимального и среднего расстояний от планеты до точки *A* траектории.

16. Для каждого из трех опытов вычислите параметры траектории и площади зафиксированных секторов.

17. Проанализируйте полученные результаты.

Упражнение 3. Третий закон Кеплера.

18. Установите максимально возможное расстояние от планеты до точки A траектории.

19. Установите скорость тела в точке равной максимальной для условий данного эксперимента (из упражнения 1).

20. Выполните эксперимент.

21. Измерьте минимальную и максимальную Х-координаты траектории.

22. Вычислите полуоси эллипса и период обращения тела вокруг планеты.

23. Вычислите момент импульса, полную энергию и площадь эллипса.

24. Проделайте серию опытов для пяти значений скорости, не изменяя расстояния в точке A.

25. Выполните три серии опытов для самых больших расстояний в точке A.

26. Постройте график зависимости квадрата периода от куба величины обратной энергии.

27. Сравните теоретическое значение коэффициента пропорциональности с тангенсом угла наклона графика, построенного в пункте 26.

28. Постройте график зависимости площади эллипса от отношения момента импульса к энергии в степени 3/2.

29. Постройте три графика эффективной потенциальной энергии. Отметьте полную энергию.

30. Определите из графиков расстояния минимального и максимального приближения тела к планете.

31. Сравните минимальное и максимальное расстояния, полученные из экспериментов и из графиков.

32. Сделайте выводы.

5.2. Детальное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Раскрывающийся список ***«Планета»*** содержит набор планет Солнечной системы. Выберите планету, которая в эксперименте будет выполнять роль источника поля (по указанию преподавателя). Для выбранной планеты под списком авто-

матически указываются ее масса и радиус, необходимые для теоретических расчетов в дальнейшем.

Упражнение 1. Первый закон Кеплера.

В этом упражнении необходимо выяснить, при каких условиях наблюдаются эллиптические траектории.

2. Счетчик ***«Расстояние до точки А»*** позволяет менять расстояние от центра планеты до точки траектории, в которой скорость тела перпендикулярна радиус вектору, от некоторого максимального значения до минимального, незначительно превосходящего радиус планеты. Установите максимально возможное расстояние от планеты до точки *А* траектории.

3. Ползунок ***«Скорость в точке А»*** позволяет изменять скорость тела в заданных пределах. Пределы изменения скорости различны для разных планет. С помощью ползунка ***«Скорость в точке А»*** установите произвольное значение скорости

Нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Тело начнет двигаться вокруг планеты. Наблюдайте за траекторией тела. Движение по замкнутой траектории начинается из точки *А* и длится два оборота независимо от того помещается ли траектория в области эксперимента или выходит за его пределы. Движение по незамкнутым траекториям начинается на границе области эксперимента и заканчивается, когда тело покинет область эксперимента. Во время движения тело оставляет за собой видимый след в области эксперимента.

При необходимости остановить движение тела можно с помощью кнопки ***«Остановить эксперимент»***. Удалить построенные траектории можно с помощью кнопки ***«Очистить область эксперимента»***.

В теоретических рассуждениях и тело и планета считаются материальными точками. В эксперименте планета имеет сферическую форму. При малых скоростях будут наблюдаться эллиптические траектории, в некоторых точках которых расстояние до центра планеты меньше радиуса планеты. Эта ситуация соответствует падению тела на поверхность планеты. В изучаемой модели движение будет продолжаться, так как планета тоже считается материальной точкой.

Подберите такое наименьшее значение скорости в точке *А*, при котором не будет происходить столкновений с планетой.

Для более точного регулирования скорости с помощью ползунка ***«Скорость в точке А»*** используйте скроллинг мыши.

4. При увеличении скорости тела возрастает полная энергия системы, эксцентриситет траектории становится больше единицы. Следовательно, тело начнет двигаться не по замкнутым эллиптическим траекториям, а по незамкнутым (парабола, гипербола). Наблюдая за траекториями тела, помните, что движение по незамкнутым траекториям начинается на границе области эксперимента, а движение по замкнутым траекториям – из точки *А*.

Подберите наибольшее значение скорости тела в точке *А*, при котором еще наблюдаются эллиптические траектории, если даже они выходят за границы области эксперимента.

5. Изменяя скорость с помощью ползунка ***«Скорость в точке А»***, подберите такое максимальное значение скорости, при которой эллиптическая траектория наблюдаются (видна целиком) **в пределах области эксперимента**. То есть необходимо найти эллиптическую траекторию *максимальной площади*, координаты любой

точки которой могут быть измерены с помощью расположенных в области эксперимента (справа и внизу) линеек.

6. Повторите исследования, описанные в пунктах 3–5, для минимально возможного расстояния от планеты до точки *А* и еще трех точек, равномерно расположенных между максимальным и минимальным положениями (например, при движении вокруг Земли для расстояний 12, 28, 44, 60 и 76 $\cdot 10^6$м).

7. На одном графике постройте три зависимости скорости от расстояния в точке *А*: зависимость минимальной, максимальной и максимальной для данных условий эксперимента скоростей. Полученные зависимости показывают, в каком диапазоне скоростей наблюдается движение по замкнутым эллиптическим траекториям.

Упражнение 2. Второй закон Кеплера.

В этом упражнении необходимо убедиться, что за одинаковые промежутки времени радиус вектор тела «заметает» одинаковые площади. Для этого нужно измерить параметры траектории и углы, ограничивающие сектора, площадь которых будет вычисляться.

Перед выполнением упражнения очистите область эксперимента от построенных ранее траекторий с помощью соответствующей кнопки.

8. С помощью счетчика ***«Расстояние до точки А»*** установите наибольшее расстояние от планеты до точки *А* траектории из тех, для которых проводились исследования в упражнении 1.

9. Для выбранного расстояния с помощью ползунка ***«Скорость в точке А»*** установите значение скорости максимальное для условий данного эксперимента, полученное в упражнении 1 (позволяющее получить максимально большую эллиптическую траекторию, помещающуюся в области эксперимента для этого расстояния до точки *А*).

10. На соответствующей панели инструментов установите флажок ***«Фиксировать положения тела…»*** и с помощью счетчика выберите интервал времени, через которое в области эксперимента будут фиксироваться положения тела во время его движения по орбите.

Время измеряется в относительных единицах – в долях периода $T_{кр}$ движения по круговой орбите, радиус которой приведен на той же панели инструментов. С помощью счетчика ***«Доли периода»*** задайте интервал времени, через которое будут фиксироваться положения тела, равным 0,3 от этого периода.

Проследите, чтобы переключатель ***«Направление движения»*** находился в положении ***«против часовой стрелки»***.

11. Нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Начнется движение тела в заданных условиях. Через равные промежутки времени положение тела будет фиксироваться с помощью отрезков луча, соединяющего центр планеты с положением тела. Так как траектория замкнутая, движение будет продолжаться в течение двух полных периодов обращения тела вокруг планеты. Фиксироваться положения тела будут только в течение одного периода.

12. Справа и снизу от области эксперимента расположены линейки для измерения декартовых координат тела. Планета находится в начале координат. Каждая из линеек снабжена ползунком, который позволяет перемещать связанную с ним измерительную линию, чтобы облегчить измерение координат тела.

С помощью ползунка ***«Измерение координаты X»*** совместите измерительную линию с точкой наибольшего удаления тела от планеты. По горизонтальной линейке выполните измерения координаты X_{max}, которая равна максимальному расстоянию r_{max}.

Затем аналогично измерьте координаты X_{min}, модуль которой равен минимальному расстоянию r_{min} (расстоянию от центра планеты до точки A).

С помощью ползунка ***«Измерение координаты Y»*** измерьте максимальное значение координаты Y, которое соответствует длине малой полуоси b эллипса.

13. Используя лучи, фиксировавшие положение тела, по транспортиру измерьте (с точностью 0,5°) полярные углы 10 положений тела. Первое измерение должно соответствовать положению точки A. Далее – по направлению движения: при движении против часовой стрелки углы должны возрастать, начиная с –180°, при движении по часовой стрелки углы должны уменьшаться, начиная со 180°.

ПОЛУЧЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ.

14. С помощью переключателя ***«Направление движения»*** выберите движение ***«по часовой стрелке»***.

15. Повторите эксперимент и измерения, описанные в пунктах 11–13, для:

- наименьшего расстояния от планеты до точки A, из изученных в упражнении 1, и интервала времени, равного 0,2 периода движения по круговой орбите;
- среднего значения расстояния от планеты до точки A, из изученных в упражнении 1, и интервала времени, равного 0,25 периода движения по круговой орбите.

При этом выберите значение скорости максимальное для условий данного эксперимента, подобранное в упражнении 1 для соответствующего расстояния до точки A траектории.

16. Для каждого из трех экспериментов вычислите параметры траектории:

$$a = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min}) = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min}) \text{ и } b = y_{\max}.$$

$$\text{А так же} \quad |p| = \frac{2r_{\max}r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \text{ и } |\varepsilon| = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}.$$

Так как траектория тела является эллипсом с эксцентриситетом $0 \le |\varepsilon| < 1$ и фокальным параметром $p < 0$, то для каждого измеренного угла необходимо рассчитать расстояние от центра планеты до тела в данной точке траектории.

Рассмотрим траекторию движения тела. Если в выбранной системе отсчета тело ***максимально приближается*** к планете при $\varphi = 0$ (т.е. $r_{min} = r(\varphi = 0)$), то ***эксцентриситет ε траектории положителен***. Поэтому для расчетов следует использовать формулу

$$r = \frac{|p|}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Если в выбранной системе отсчета тело ***максимально приближается*** к планете при $\varphi = \pm 180$ (т.е. $r_{min} = r(\varphi = \pm 180)$), то ***эксцентриситет ε траектории отрицателен***. Поэтому для расчетов следует использовать формулу

$$r = \frac{|p|}{1 - |\varepsilon| \cos \varphi}.$$

Высчитайте величины $z_1 = \sqrt{\frac{r - r_{\min}}{r_{\max} - r}}$ и $z_2 = \sqrt{(r - r_{\min})(r_{\max} - r)}$.

Первообразную для вычисления площади: $I(r) = ab\left[\operatorname{arctg} z_1 - \frac{z_2}{2a}\right]$. Значение арктангенса (arctg) следует вычислять **в радианах**.

Для каждой пары двух соседних углов φ_1 и φ_2 вычислите площадь сектора:

$$S_{сек} = I(r_2) - I(r_1) \text{ при } \varphi_1 > 0 \text{ и } \varphi_2 > 0;$$

$$S_{сек} = I(r_1) - I(r_2) \text{ при } \varphi_1 < 0 \text{ и } \varphi_2 < 0;$$

$$S_{сек} = [I(r_2) - I(r_{\max})] + [I(r_1) - I(r_{\max})] = \pi ab + I(r_1) + I(r_2)$$

$$\text{при } \varphi_1 < 0 \text{ и } \varphi_2 > 0.$$

17. Для каждого из трех опытов вычислите среднее значение площади сектора, заметаемого радиус-вектором при движении тела по орбите. Является ли площадь сектора константой в каждом из проведенных опытов?

Упражнение 3. Третий закон Кеплера.

В данном упражнении необходимо по параметрам орбиты определить период обращения; построить зависимость периода от полной энергии E системы и зависимость площади эллиптической орбиты от физических констант движения E и L.

Прежде чем приступить к этому упражнению отключите флажок ***«Фиксировать положение тела…»***. Очистите область эксперимента.

18. С помощью счетчика ***«Расстояние до точки А»*** установите максимально возможное расстояние от планеты до точки A траектории.

19. Для выбранного расстояния с помощью ползунка ***«Скорость в точке А»*** установите значение скорости, максимальное для условий данного эксперимента, полученное в упражнении 1.

20. Нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Начнется движение тела в заданных условиях.

21. Используя ползунок ***«Измерение координаты Х»***, измерьте минимальную и максимальную Х-координаты траектории.

22. Вычислите длину большой a и малой b полуосей эллипса и период обращения тела вокруг планеты.

$$a = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min}),\;\; b = \sqrt{r_{\max} r_{\min}},\;\; T = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{Gm_2}},$$

где $G = 6{,}6740831 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 (по данным 2014 г.).

23. Вычислите момент импульса, полную энергию и площадь эллипса.

$$L = b\sqrt{\frac{|\alpha| M}{a}}, \qquad E = -\frac{|\alpha|}{2a}, \qquad S = \pi ab \;\; (M \approx m_1).$$

Вычислите вспомогательные величины: $\frac{L^2}{2M}, T^2, \frac{1}{E^3}, \frac{L}{|E|^{3/2}}$.

24. Проделайте серию опытов для пяти значений скорости, не изменяя расстояния в точке A. Каждое последующее значение скорости уменьшайте на одинаковую величину dv примерно равную 1/10 от первоначальной скорости (скорости, заданной в пункте 19): $v_i = v_{i-1} - dv$.

25. Среди расстояний от точки A до центра планеты, использованных в упражнении 1, выберите три самых больших. Проведение серии экспериментов при

самом большом расстоянии описано в пунктах 17–22. Выполните еще две серии опытов выбранных из упражнения 1 расстояний.

26. По данным всех трех серий экспериментов постройте график зависимости квадрата периода от куба величины обратной энергии $T^2 = f\left(\frac{1}{E^3}\right)$. Полученный график должен отражать линейную зависимость. По графику определите тангенс угла наклона прямой.

27. Сравните теоретическое значение коэффициента пропорциональности зависимости $T^2 = f\left(\frac{1}{E^3}\right)$ с тангенсом угла наклона графика, построенного в пункте 26.

28. По данным всех трех серий экспериментов, проведенных в пунктах 18–25, постройте график зависимости площади эллипса от отношения момента импульса к энергии в степени 3/2 $S = f\left(\frac{L}{|E|^{3/2}}\right)$. Каков характер полученной зависимости? Как он объясняется с точки зрения теории?

29. В каждой из трех серий экспериментов выберите второй опыт (для скорости на 1/10 меньше максимальной).

Для значений переменной r в пределах от 0 до максимального значения координаты на горизонтальной линейке вычислите значения: 1) потенциальной энергии; 2) центробежной энергии для каждого из выбранных опытов; 3) эффективной энергии для каждого из выбранных опытов.

По полученным данным на одном графике постройте три кривые – зависимости эффективной потенциальной энергии от расстояния до центра планеты. На том же графике отметьте соответствующие выбранным опытам значения полной энергии.

30. Для каждого из выбранных опытов по пересечению кривой эффективной потенциальной энергии с соответствующим значением полной энергии определите минимальное и максимальное расстояние, на которое тело приближается к планете. На том же графике проведите вертикальную линию через точку, соответствующую радиусу планеты.

31. Сравните минимальное и максимальное расстояния, полученные из экспериментов и из графиков.

32. Сделайте выводы.

По каким траекториям может двигаться тело в гравитационном поле планеты (звезды)?

От чего зависит форма траектории?

Как площадь сектора эллипса, «заметаемая» радиус-вектором движущегося тела зависит от времени наблюдения?

Как меняется скорость тела при удалении от планеты? при приближении к ней?

Как, исходя из размеров эллиптической орбиты, определить период обращения, энергию и момент импульса взаимодействующих тел?

От каких физических характеристик системы зависит площадь эллиптической орбиты и период обращения по ней?

Опишите характер зависимости эффективной потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух тел от расстояния до источника поля.

Когда наблюдается движение по замкнутым траекториям?

Таблица

Расстояние в точке A r_A, 10^6м	Скорость в точке A υ_A, 10^3м/с	Интервал времени Δt	$r_{\min} = \lvert x_{\min} \rvert$, 10^6м	$r_{\max} = x_{\max}$, 10^6м	Большая полуось a, 10^6м	Малая полуось b, 10^6м	Фокальный параметр $\lvert p \rvert$, 10^6м	Эксцентриситет $\lvert \varepsilon \rvert$

№	Полярный угол φ	Расстояние r, 10^6м	z_1	z_2	Интеграл $I(r)$	Площадь сектора $S_{сек}$, 10^{12}м^2
1						
…						
10						
Средняя площадь сектора:						

6. Контрольные вопросы

1. Какую силу называют центральной? Приведите пример центральной силы.

2. Можно ли в случае центрального взаимодействия задачу о движении двух тел свести к задаче о движении одного тела? Как?

3. Докажите, что движение тела приведенной массы в центральном поле является плоским.

4. Получите закон сохранения момента импульса, закон сохранения энергии и второй закон Ньютона (уравнение движения) в полярных координатах для движения тела приведенной массы в центральном поле.

5. Решите уравнение движения тела в полярных координатах.

6. По каким траекториям может двигаться тело в гравитационном поле?

7. Сформулируйте законы Кеплера.

8. Как рассчитать площадь сектора эллипса?

9. Как период обращения по эллиптической орбите зависит от большой полуоси эллипса? от полной энергии системы?

10. Как зависит площадь эллиптической орбиты от физических констант взаимодействия?

11. Опишите порядок выполнения работы.

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

ДВИЖЕНИЕ ИНЕРТНОГО ТЕЛА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей
физических процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодМ–07
для студентов всех специальностей

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати __.__.2022. Формат 60х84/16. Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл.печ.л. _____. Уч.-изд.л. _____.
Заказ . Тираж 50 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru