МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
Отделение естественных наук ШБИП

УТВЕРЖДАЮ
Директор ШБИП
___________ Д.В. Чайковский
«__»__________ 2022 г.

О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических
процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодМ–05
для студентов всех специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
2022

УДК 53. 076

Ревинская О.Г.
Работа и энергия: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодМ–05 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – 30 с.

УДК 53.076

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию методическим семинаром отделения естественных наук ШБИП
«___» _________ 20___ г.

Зав. ОЕН ШБИП
проф., доктор физ.-мат. наук В.П. Кривобоков

Председатель учебно-методической комиссии
С.И. Борисенко

Рецензент
доктор физ.-мат. наук, доцент Томского политехнического университета
С.И. Борисенко

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № МодМ–05
ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Работа и энергия

Цель работы: изучение работы неконсервативных сил на примере силы трения скольжения при прямолинейном движении и движении по окружности. Изучение зависимости работы силы трения от массы движущегося тела, формы и длины пройденного им пути. Определение коэффициента трения.

1. Теоретическое содержание

Энергия – это скалярная физическая величина, характеризующая состояние тела или системы тел, изменение которой осуществляется через совершение работы. То есть, чтобы тело или систему тел перевести из одного состояние в другое (из состояния с одной энергией в состояние с другой энергией), к телу или системе тел необходимо приложить некоторую силу, совершающую ненулевую работу.

В классической нерелятивистской механике состояние тела характеризуется его положением $\vec{r}$ и скоростью $\vec{v}$. Следовательно, в этом случае энергия (полная энергия), характеризующая состояние тела, является функцией координат и скорости. Кроме полной энергии, характеризующей состояние тела в целом, выделяют отдельные виды энергии, характеризующие состояние тела по отношению к отдельным видам движения и взаимодействия с другими телами. В частности принято выделять кинетическую энергию поступательного движения, потенциальную энергию поля силы тяжести, потенциальную энергию упругой деформации и т.д.

В большинстве случаев начало отсчета энергии зависит от выбранной системы отсчета. Однако в физике основное значение имеет не абсолютное значение энергии, а ее относительное изменение, которое равно работе всех сил, действующих на тело.

1.1. Работа силы

Работа – это мера изменения энергии тела или системы тел.

В механике ***работа*** dA ***силы*** $\vec{F}$ – это скалярная физическая величина, равная скалярному произведению этой силы на элементарное перемещение $d\vec{r}$ тела вдоль участка пути

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}).$$

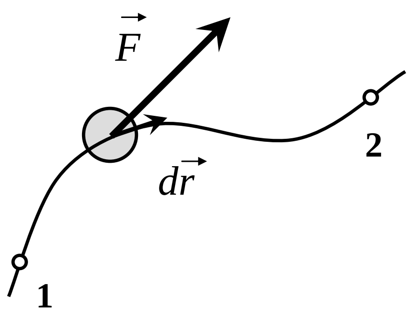


Рис. 1

Работа A_{12} силы $\vec{F}$ на участке траектории между точками 1 и 2 (рис. 1) рассчитывается путем интегрирования элементарной работы dA по всему участку траектории

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r}).$$

Очевидно, сила, действующая перпендикулярно направлению движения тела, не совершает работу ($dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = 0$, т.к. $\vec{F} \perp d\vec{r}$) и не изменяет механическое состояние (энергию) тела.

Работа, как и энергия, измеряется в джоулях:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н·м} = 1 \frac{кг \cdot м^2}{с^2}.$$

Силы разной природы при движении по одному и тому же участку траектории могут совершать разную работу.

1.1.1. Работа силы тяжести

Рассчитаем работу силы тяжести $m\vec{g}$ при перемещении тела вдоль участка траектории между точками 1 и 2.

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_1^2 (m\vec{g} \cdot d\vec{r}).$$

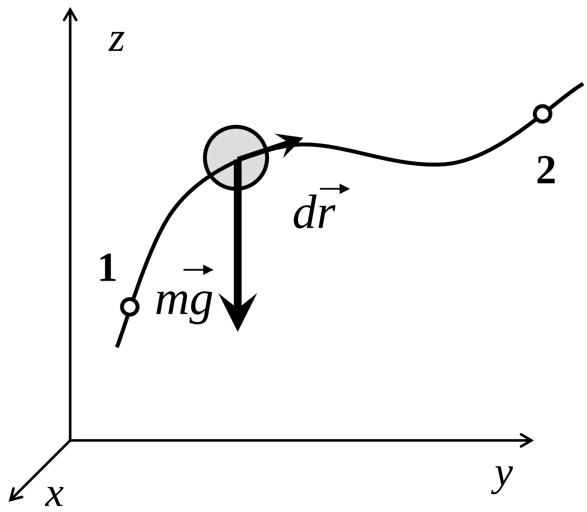


Рис. 2

В декартовой системе координат вектор элементарного перемещения можно записать в виде $d\vec{r} = dx \cdot \hat{\imath} + dy \cdot \hat{\jmath} + dz \cdot \hat{k}$. Сила тяжести направлена вертикально вниз, противоположно оси z (рис. 2): $m\vec{g} \perp \hat{\imath}$, $m\vec{g} \perp \hat{\jmath}$, $m\vec{g} \uparrow\downarrow \hat{k}$. Следовательно,

$$A_{12} = \int_1^2 (m\vec{g} \cdot d\vec{r}) = -\int_1^2 mg \cdot dz = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = mgz_1 - mgz_2$$

$$\text{или } A_{12} = mgh_1 - mgh_2,$$

если h_1 и h_2 – высота, на которой находилось тело в точках 1 и 2 соответственно.

Работа силы тяжести зависит от разности высот ($h_1 - h_2$) на которых расположены начальная и конечная точки участка траектории, и не зависит ни от формы, ни от длины пути, по которому двигалось тело.

1.1.2. Работа силы упругости

Пусть $\Delta x = |x - x_0|$ – величина деформации пружины жесткостью k. Рассчитаем работу силы упругости, подчиняющейся закону Гука $\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$, направленной вдоль оси x, при перемещении тела вдоль участка траектории между точками 1 и 2.

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -\int_1^2 (k\Delta\vec{x} \cdot d\vec{r}).$$

В декартовой системе координат вектор элементарного перемещения можно записать в виде $d\vec{r} = dx \cdot \hat{\imath} + dy \cdot \hat{\jmath} + dz \cdot \hat{k}$. Сила упругости $\vec{F}$ направлена горизонтально, вдоль оси x (рис. 3): $\vec{F} \uparrow\uparrow \hat{\imath}$.

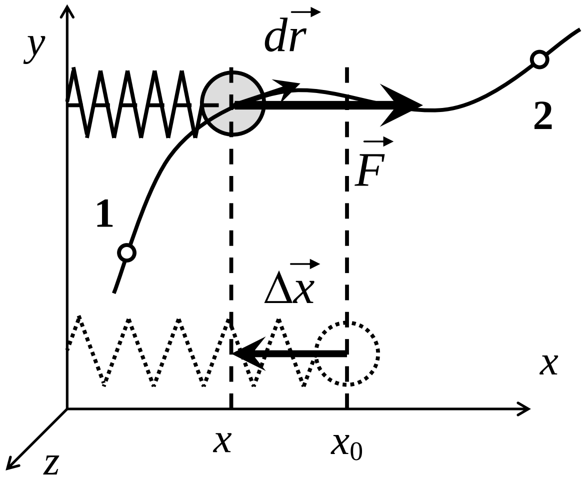


Рис. 3

Вектор деформации $\Delta\vec{x}$ направлен противоположно оси x ($\Delta\vec{x} \uparrow\downarrow \hat{\imath}$) из положения x_0, когда пружина не деформирована, в сторону деформации. Например, если пружина сжата ($x < x_0$), то $\Delta\vec{x} = (x - x_0) \cdot \hat{\imath} = -|x - x_0| \cdot \hat{\imath} = -\Delta x \cdot \hat{\imath}$. Следовательно,

$$A_{12} = -\int_1^2 (k\Delta\vec{x} \cdot d\vec{r}) = \int_1^2 k\Delta x \cdot dx$$

Учитывая, что $dx = d(x - x_0) = -d(x_0 - x) = -d(\Delta x)$, работа силы упругости равна

$$A_{12} = k\int_{1}^{2} \Delta x dx = -k\int_{\Delta x_1}^{\Delta x_2} \Delta x d(\Delta x) = k\frac{\Delta x_1^2}{2} - k\frac{\Delta x_2^2}{2}.$$

Работа силы упругости зависит от величины деформации в начальном Δx_1 и конечном Δx_2 состоянии, и не зависит от того двигалось ли тело в других направлениях или нет.

1.1.3. Работа силы трения скольжения

Рассчитаем работу силы трения скольжения $F = \mu|N|$ при перемещении тела вдоль некоторой траектории между точками 1 и 2 ($|N|$ – модуль силы нормального давления тела на опору, μ – коэффициент трения).

$$A_{12} = \int_{1}^{2} (\vec{F} \cdot d\vec{r}).$$

Сила трения скольжения всегда направлена в сторону, противоположную движению (перемещению): $\vec{F} \uparrow\downarrow d\vec{r}$. Следовательно,

$$A_{12} = \int_{1}^{2} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -\int_{1}^{2} F \cdot dr = -\mu\int_{1}^{2} |N| \cdot dr.$$

Модуль силы нормального давления $\vec{N}$ по третьему закону Ньютона равен модулю силы реакции опоры $\vec{R}_{\text{оп}}$: $\vec{N} = -\vec{R}_{on}$. Сила реакции опоры зависит от того, по какой поверхности движется тело.

Если тело движется по горизонтальной поверхности, сила реакции опоры направлена вертикально вверх (рис. 4*а*), равна mg и постоянна вдоль всей траектории (из второго закона Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную плоскости: $R_{on} - mg = 0$). Тогда модуль силы нормального давления $|N| = mg$, а работа силы трения равна

$$A_{12} = -\mu mg\int_{1}^{2} dr = -\mu mgS_{12},$$

где S_{12} – длина участка траектории между точками 1 и 2.

Если тело движется по наклонной плоскости под углом α к горизонту, сила реакции опоры направлена перпендикулярно наклонной плоскости (рис. 4*б*), равна $mg \cos \alpha$ и тоже постоянна вдоль всей траектории (из второго закона Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную плоскости: $R_{on} - mg \cos \alpha = 0$). Тогда модуль силы нормального давления $|N| = mg \cos \alpha$, а работа силы трения равна

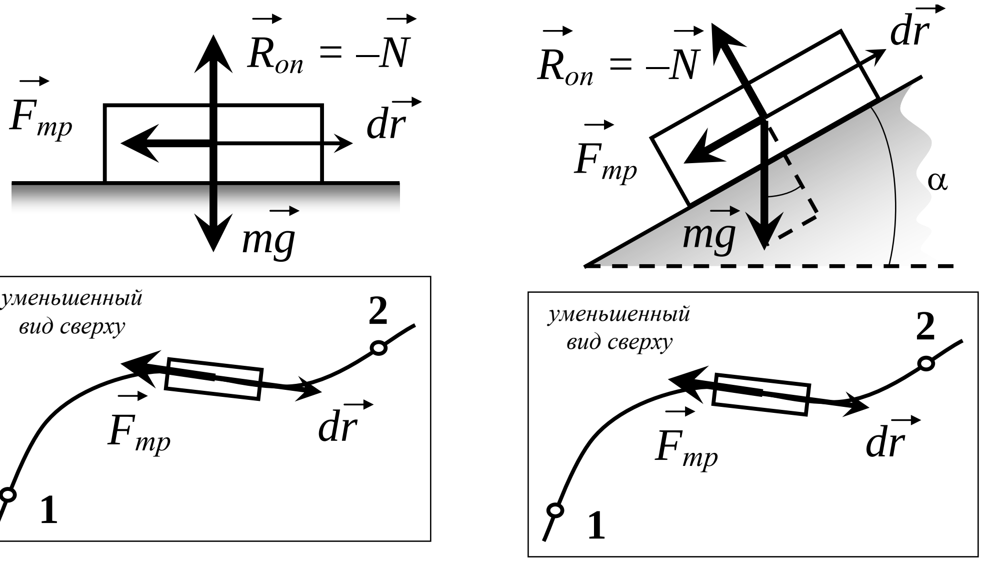
$$A_{12} = -\mu mg\cos\alpha\int_1^2 dr = -\mu mg\cos\alpha\cdot S_{12},$$

где S_{12} – длина участка траектории между точками 1 и 2.

Из приведенных примеров видно, что при движении тела по плоскости (наклонной или горизонтальной) работа силы трения A_{12} прямо пропорциональна длине пути S_{12}, пройденного телом:

$\frac{A_{12}}{S_{12}} = -\mu mg = const$ (при движении по горизонтальной плоскости);

$\frac{A_{12}}{S_{12}} = -\mu mg\cos\alpha = const$ (при движении по наклонной плоскости).



а *б*

Рис. 4

Если во время движения между точками 1 и 2 поверхность, по которой движется тело, меняет свой наклон, то сила нормального давления (сила реакции опоры) будет различна в каждой точке траектории. Тогда работу $A_{12} = -\mu\int_1^2 N(r)\cdot dr$ нужно вычислять с учетом изменения наклона траектории в каждой точке на интересующем нас участке пути.

В общем случае работа силы трения скольжения зависит не только от начального и конечного положения тела, но и от длины пути, по которому оно двигалось. Зависимость работы силы трения от длины пути является линейной (прямо пропорциональной) только при движении тела по плоскости. При движении по опоре другой формы зависимость работы силы трения от длины пути может носить нелинейный характер.

1.2. Консервативные и неконсервативные силы

Из приведенных выше примеров видно, что по отношению к работе силы можно разделить на две группы. Для одних работа на некотором участке пути зависит от формы и длины пути, для других – не зависит. Силы, работа которых не зависит от формы и длины пути, называются ***консервативными***. Силы, работа которых зависит от формы и длины пути, называются ***неконсервативными***.

В частности, сила тяжести и сила упругости (описываемая законом Гука) являются консервативными силами, а сила трения – неконсервативной.

Поле консервативной силы также называется консервативным.

1.3. Потенциальная энергия

Работа консервативных сил на участке траектории между точками 1 и 2 представляет собой разность двух однотипных величин, каждая из которых зависит от состояния системы, соответственно, в точках 1 и 2. Например, для силы тяжести – это величина mgh, зависящая от высоты над поверхностью Земли, для силы упругости – это величина $k\frac{\Delta x^2}{2}$, зависящая от сжатия пружины.

Работа – это мера изменения энергии тела или системы тел. Следовательно, величина, которая изменяется при совершении работы, и есть энергия. Рассматривая отдельные силы, получаем изменение отдельных видов энергии.

Когда работу совершает сила тяжести, изменяется величина $U = mgh$ – энергия поля силы тяжести.

$$A_{12} = mgh_1 - mgh_2 = U_1 - U_2 = -\Delta U_{тяж}.$$

Когда работу совершает сила упругости, изменяется величина $U = k\frac{\Delta x^2}{2}$ – энергия сжатой пружины.

$$A_{12} = k\frac{\Delta x_1^2}{2} - k\frac{\Delta x_2^2}{2} = U_1 - U_2 = -\Delta U_{упр}.$$

Следовательно, если тело находится в поле консервативной силы, то говорят, что оно обладает определенной энергией: в точке 1 – энергией U_1, в точке 2 – энергией U_2.

В механике ненулевое значение энергии U тела в поле консервативных сил характеризует потенциальную возможность движения. Например, если тело поднято на некоторую высоту $h > 0$, то предоставленное само себе тело начнет двигаться вниз под действием силы тяжести. Если сжатие (растяжение) пружины отлично от нуля $\Delta x \neq 0$, то предоставленный сам себе незакрепленный конец пружины тоже начнет двигаться. Поэтому энергию тела в поле консервативных сил называют ***потенциальной***.

Таким образом, потенциальная энергия тела в данной точке характеризует состояние тела или системы тел по отношению к возможности движения. В качестве нулевого отсчета потенциальной энергии, как правило, выбирается такое состояние тела или системы, из которого самопроизвольное движение невозможно. Например, в поле силы тяжести – это положение на поверхности Земли. Но если речь идет только об изменении потенциальной энергии, нулевой отсчет может быть выбран произвольно, исходя из удобства решения поставленной задачи.

1.4. Кинетическая энергия

Если на тело массы m действуют силы $\sum\vec{F}$, равнодействующая которых отлична от нуля, то согласно второму закону Ньютона скорость тела изменяется

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum\vec{F}.$$

Рассчитаем работу A_Σ всех сил, действующих на тело, при движении по участку траектории между точками 1 и 2. С одной стороны, работа – скалярная величина, поэтому работа суммарной силы равна сумме работ всех сил, действующих на тело

$$A_\Sigma = \int_1^2 \left(\sum\vec{F}\cdot d\vec{r}\right) = \sum\int_1^2 (\vec{F}\cdot d\vec{r}) = \sum A_{12}.$$

С другой стороны, из второго закона Ньютона

$$A_\Sigma = \int_1^2 \left(\sum\vec{F}\cdot d\vec{r}\right) = \int_1^2 \left(m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}\right) = \int_1^2 \left(m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \vec{v}dt\right) = m\int_1^2 (d\vec{v}\cdot\vec{v}).$$

Рассмотрим дифференциал $d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = (d\vec{v}\cdot\vec{v}) + (\vec{v}\cdot d\vec{v}) = 2(\vec{v}\cdot d\vec{v})$. Тогда скалярное произведение $(\vec{v}\cdot d\vec{v}) = \frac{1}{2}d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{2}d(v^2)$. Следовательно, суммарную работу можно вычислить

$$A_\Sigma = m\int_1^2 (d\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{m}{2}\int_1^2 d(v^2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

$$A_\Sigma = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Работа – мера изменения энергии. Суммарная работа всех сил, действующих на тело, также была выражена через изменение некоторой величины $\frac{mv^2}{2}$, которая характеризует каждое из состояний 1 и 2 через модуль скорости тела в этих точках траектории. Поскольку работа приводит к изменению величины $\frac{mv^2}{2}$, то величина $E_K = \frac{mv^2}{2}$ – энергия. Эта энергия характеризует скорость перемещения тела (кинетику) в данной точке, поэтому ее называют ***кинетической*** энергией.

$$A_\Sigma = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta E_K.$$

1.5. Закон сохранения энергии

Как было показано выше, работа всех сил $\sum \vec{F}$, действующих на тело, при движении по участку траектории между точками 1 и 2 с одной стороны равна сумме работ этих сил

$$A_\Sigma = \sum A_{12}.$$

С другой стороны, эта работа ведет к изменению кинетической энергии тела

$$A_\Sigma = \Delta E_K \Rightarrow \Delta E_K = \sum A_{12}.$$

Это один из вариантов записи закона сохранения энергии: чтобы изменить кинетическую энергию тела (или системы тел) необходимо совершить ненулевую работу.

Если среди сил, действующих на тело, есть консервативные и неконсервативные, $\sum A_{12} = \sum A_{12}^{КОН} + \sum A_{12}^{НЕКОН}$. Работа консервативных сил выражается через изменение потенциальной энергии тела

$$\sum A_{12}^{КОН} = -\Delta U.$$

Тогда закон сохранения энергии можно записать в виде:

$$\Delta E_K = -\Delta U + \sum A_{12}^{НЕКОН}.$$

Изменение кинетической энергии тела (или системы тел) происходит за счет изменения потенциальной энергии тела и за счет работы неконсервативных сил.

Запишем полученное выражение через значения кинетической и потенциальной энергии в точках 1 и 2:

$$\Delta E_K = E_{K_2} - E_{K_1}, -\Delta U = U_1 - U_2.$$

Тогда
$$E_{K_2} - E_{K_1} = U_1 - U_2 + \sum A_{12}^{НЕКОН}$$

или

$$E_{K_2} + U_2 = E_{K_1} + U_1 + \sum A_{12}^{НЕКОН}.$$

Полной механической энергией E тела (системы тел) в данной точке называется сумма кинетической и потенциальной энергии этого тела с учетом всех потенциальных сил, действующих на тело.

$$E = E_K + U.$$

Если на тело не действуют неконсервативные силы ($\sum A_{12}^{НЕКОН} = 0$), то полная механическая энергия сохраняется:

$$E_{K_2} + U_2 = E_{K_1} + U_1 \Rightarrow E_2 = E_1.$$

Если на тело действуют неконсервативные силы, то полная механическая энергия тела (системы тел) уменьшается:

$$E_{K_2} + U_2 = E_{K_1} + U_1 + \sum A_{12}^{\text{НЕКОН}} \Rightarrow E_2 = E_1 + \sum A_{12}^{НЕКОН}$$

$$\text{или } E_2 - E_1 = \sum A_{12}^{НЕКОН}.$$

Силы, работа которых на любом участке пути является отрицательной, называются ***диссипативными***. Работа диссипативных сил ведет к уменьшению полной механической энергии системы, то есть к потерям (диссипации) энергии. Примером диссипативных сил является сила трения скольжения.

2. Рабочие формулы

Рассмотрим следующую систему взаимодействующих тел.

Тело шарообразной формы имеет сквозное отверстие, проходящее через диаметр. Через это отверстие пропущена стальная направляющая, по которой тело может скользить с трением. Направляющая закреплена на вертикальной опоре и имеет прямолинейный и круговой участки (рис. 5). Направляющая обеспечивает движение тела по фиксированной траектории в вертикальной плоскости. На одном конце прямолинейного участка направляющей расположена пружина. В начальный момент тело располагается вплотную к пружине. Сжимая пружину, и удерживая возле нее тело, можно сообщить системе началь-

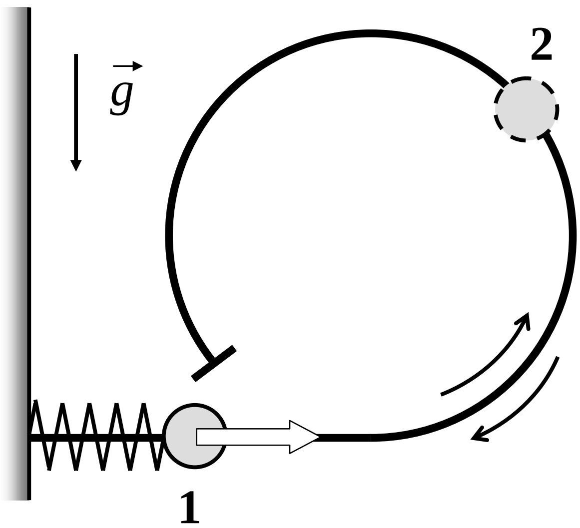


Рис. 5

ную энергию. Когда тело и пружину перестают удерживать, тело под действием силы упругости начинает двигаться. Когда пружина полностью распрямится, сила упругости перестает действовать на тело. Так как тело не соединено с пружиной, оно продолжает двигаться по инерции вдоль направляющей.

В зависимости от того какой энергией обладала система в начальный момент времени тело может: подняться на небольшую высоту по круговому участку направляющей и начать скатываться вниз; подняться до наивысшей точки направляющей; преодолеть наивысшую точку направляющей и начать скатываться вниз по противоположной стороне кругового участка направляющей. На всем пути движения действует сила трения. Поэтому если в начальный момент система обладала достаточно малой энергией, то тело может не достичь кругового участка направляющей.

2.1. Закон сохранения энергии

Рассмотрим случай, когда тело поднялось по круговому участку направляющей на некоторую высоту (меньше наивысшей точки направляющей) и скатывается вниз по той же стороне кругового участка направляющей, по которой оно поднималось. В этом случае траектория тела имеет точку максимального подъема h_{max}, в которой тело останавливается ($v = 0$).

На тело действует сила тяжести, сила трения скольжения и сила упругости. Сила тяжести и сила упругости (если для ее описания можно воспользоваться законом Гука) являются консервативными, в каждой точке траектории каждой из них соответствует определенная потенциальная энергия. Сила трения – диссипативная сила. Сила тяжести и сила трения действуют на протяжении всего движения тела. Сила упругости действует на небольшом отрезке прямолинейного участка траектории, пока сжатие пружины отлично от нуля. За начало отсчета высоты (потенциальной энергии силы тяжести) примем высоту, на которой находилось тело в начальный момент времени.

Рассмотрим движение тела (рис. 5) из точки 1 (начальное положение тела) до точки 2 (точка наивысшего подъема h_{max}). В начальный момент, в точке 1 тело покоится ($v = 0$) $E_{K_1} = 0$, поэтому его полная механическая энергия E_1 в этой точке равна потенциальной энергии сжатой пружины (потенциальную энергию силы тяжести в этой точке приняли за ноль):

$$E_1 = E_{K_1} + U_1 = U_1 = k\frac{\Delta x^2}{2}.$$

В точке 2 скорость тела также равна нулю ($v = 0$), кинетическая энергия $E_{K_2} = 0$. При движении по круговому участку сила упругости на тело не действует. Следовательно, полная механическая энергия E_2 системы в точке 2 равна потенциальной энергии силы тяжести

$$E_2 = E_{K_2} + U_2 = U_2 = mgh_{max}.$$

Обозначим работу силы трения на участке траектории между точками 1 и 2 как A. Тогда согласно закону сохранения энергии

$$E_2 - E_1 = A.$$

Учитывая, что диссипативные силы приводят к потерям энергии, $E_1 > E_2$

$$E_1 - E_2 = |A| \text{ или } U_1 - U_2 = |A|.$$

Таким образом, зная потенциальную энергию в начальной точке $U_1 = k\frac{\Delta x^2}{2}$ и в точке максимального подъема $U_2 = mgh_{max}$, можно рассчитать работу силы трения на всем участке пути от начальной точки до точки максимального подъема.

2.2. Работа силы трения скольжения

Направляющая, по которой движется тело, имеет два участка различной формы. Так как сила трения скольжения – это неконсервативная сила, то ее работа зависит как от формы, так и от длины пути, по которому движется тело.

Рассмотрим работу силы трения скольжения $F = \mu|N|$. Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную движению, поэтому работа силы трения всегда отрицательна

$$A = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -\mu \int_1^2 |N| \cdot dr,$$

μ – коэффициент трения, $|N|$ – модуль силы нормального давления $\vec{N}$ тела на опору, который по третьему закону Ньютона равен модулю силы реакции опоры $\vec{R}_{\text{оп}}$: $\vec{N} = -\vec{R}_{on}$ или $|N| = |R_{on}|$.

Работа силы трения при движении по горизонтальному участку направляющей

При движении по горизонтальному прямолинейному участку направляющей длиной L сила реакции опоры $\vec{R}_{on}$ направлена вертикально вверх (рис. 6*а*) и одинакова во всех точках, через которые проходит тело. Следовательно, $|N| = mg$. Смещение тела dr происходит в одном направлении $dr = dl$. Пусть длина прямолинейного участка направляющей, по которой двигалось тело, равна L, тогда работу силы трения на этом участке можно записать как

$$A_{пр} = -\mu \int_1^2 |N| \cdot dr = -\mu \int_0^L mg \cdot dl = -\mu mg \int_0^L dl = -\mu mgL.$$

Таким образом, работа силы трения скольжения на горизонтальном прямолинейном участке направляющей прямо пропорциональна длине пройденного телом пути.

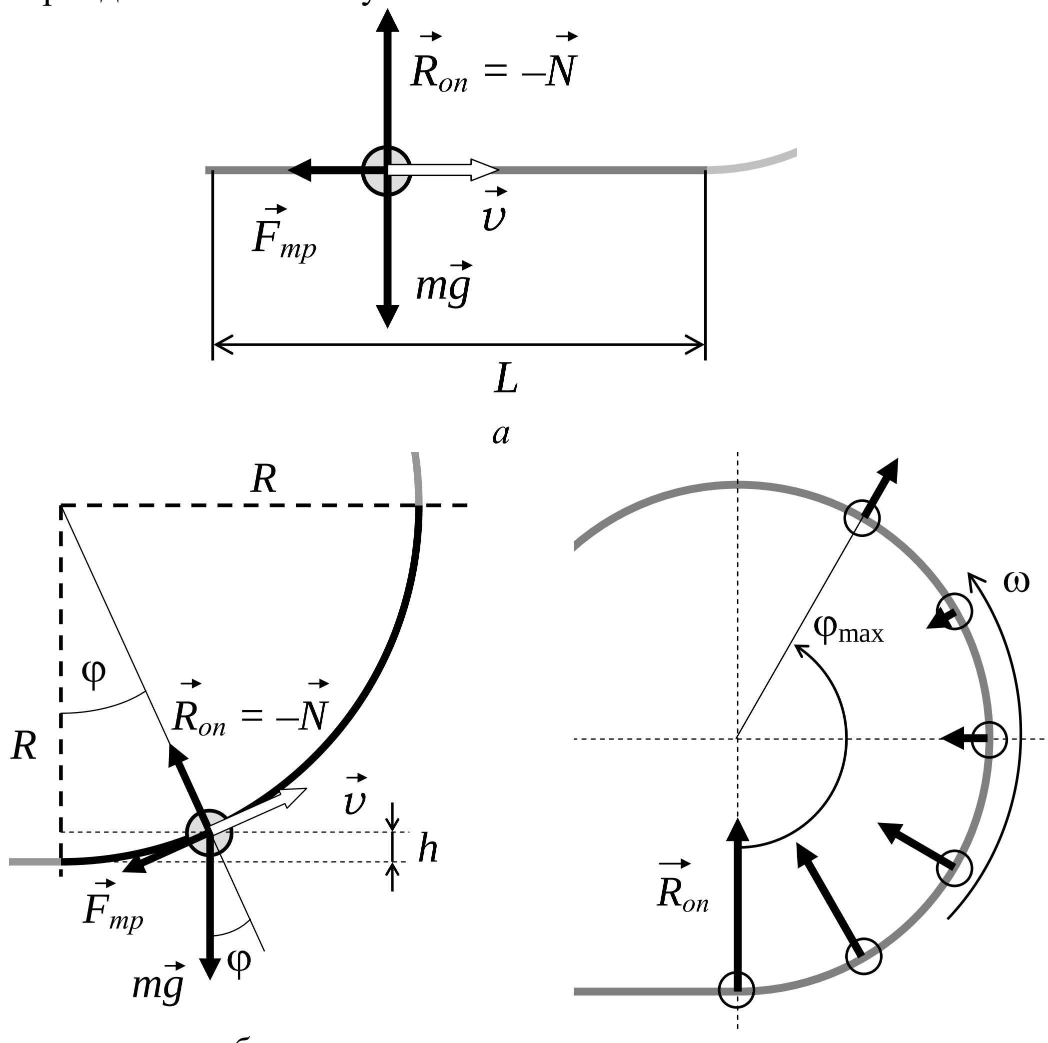


Рис. 6

Работа силы трения при движении по круговому участку направляющей

При движении по ***круговому участку направляющей*** сила реакции опоры $\vec{R}_{оп}$ направлена вдоль радиуса окружности (к центру или от нее). Положение тела на окружности (рис. 6*б*) удобно задавать в полярных координатах R и φ (R – радиус окружности, φ – полярный угол, за нулевое значение которого примем положение, когда тело переходит с прямолинейного участка направляющей на круговой – самое нижнее положение на круговом участке направляющей).

Чтобы определить модуль силы реакции опоры $|R_{оп}|$, запишем второй закон Ньютона $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ в проекции на радиальное направление (в полярных координатах):

$$ma_r = \sum F_r \text{ или } mR\omega^2 = R_{оп} - mg\cos\varphi,$$

где $\sum F_r$ – сумма радиальных проекций всех сил, действующих на тело, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ – угловая скорость движения тела по окружности, $a_r = R\omega^2 = R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ – центростремительное ускорение, $R = const$ – радиус окружности; сила трения направлена по касательной, перпендикулярно радиусу, поэтому ее проекция на радиальное направление равна нулю.

Тогда сила реакции опоры: $R_{оп} = m(R\omega^2 + g\cos\varphi)$.

Проанализируем изменение силы реакции опоры при подъеме по круговому участку направляющей.

При подъеме по круговому участку направляющей угловая скорость ω постепенно уменьшается от некоторого значения до нуля в точке наивысшего подъема φ_{max}, которой соответствует высота h_{max}.

Полярный угол φ при этом возрастает от 0 до φ_{max}. С ростом φ величина $g\cos\varphi$ уменьшается и при $\varphi > \pi/2$ становится отрицательной.

Учитывая, что центростремительное ускорение $R\omega^2$ положительная величина, очевидно, что сила реакции опоры при переходе тела с прямолинейного участка на круговой ($\varphi = 0$) максимальна и направлена вертикально вверх (к центру окружности). По мере продвижения тела по круговому участку направляющей сила реакции опоры будет уменьшаться (рис. 6*в*). При подъеме на высоту h, которой соответствует полярный угол $\varphi > \pi/2$, сила реакции опоры $R_{оп} = m(R\omega^2 - g|\cos\varphi|)$ может стать отрицательной, то есть сменит направление (от центра окружности).

Поэтому при расчете работы силы трения необходимо учитывать модуль силы реакции опоры

$$|R_{оп}| = m|R\omega^2 + g\cos\varphi|.$$

Тогда работа силы трения между точками 1 ($h = 0$, $\varphi = 0$) и 2 ($h = h_{max}$, $\varphi = \varphi_{max}$) на круговом участке направляющей равна

$$A_{кр} = -\mu\int_1^2 |N|\cdot dr = -\mu m\int_1^2 |R\omega^2 + g\cos\varphi|\cdot dr.$$

Перемещение тела происходит по окружности, поэтому $dr = R\,d\varphi$. Тогда чтобы вычислить работу силы трения по круговому участку от точки 1, где $\varphi = 0$, до точки максимального подъема $\varphi = \varphi_{max}$, необходимо рассчитать интеграл:

$$A_{кр} = -\mu m \int_1^2 |R\omega^2 + g\cos\varphi| \cdot dr = -\mu mR \int_0^{\varphi_{max}} |R\omega^2 + g\cos\varphi| \cdot d\varphi,$$

Обозначим $I(\varphi_{max}) = \int_0^{\varphi_{max}} |R\omega^2 + g\cos\varphi| \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi_{max}} |R_{оп}/m| \cdot d\varphi,$

тогда работу силы трения можно записать в виде

$$A_{кр} = -\mu mR \cdot I(\varphi_{max}).$$

Чтобы рассчитать интеграл $I(\varphi_{max})$, необходимо знать зависимость угловой скорости от полярного угла $\omega = \omega(\varphi)$. Эту зависимость можно получить либо из второго закона Ньютона в проекции на орт полярного угла, либо из экспериментальных данных. И в том и в другом случае задача сводится к численному интегрированию.

Полученное выражение

$$A_{кр} = -\mu mR \int_0^{\varphi_{max}} |R\omega^2 + g\cos\varphi| \cdot d\varphi$$

позволяет ***качественно проанализировать работу силы трения скольжения*** при движении по круговому участку направляющей.

1. Зависимость работы силы трения от массы движущегося тела и коэффициента трения. Запишем выражение для работы силы трения при подъеме тела до некоторой точки, описываемой полярным углом $\varphi_0 \leq \varphi_{max}$,

$$A_{\text{кр}}(\varphi_0) = -\mu mR \int_0^{\varphi_0} |R\omega^2 + g\cos\varphi| \cdot d\varphi \text{ или } A_{кр}(\varphi_0) = -\mu mR \cdot I(\varphi_0),$$

$$\text{где } I(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} |R\omega^2 + g\cos\varphi| \cdot d\varphi.$$

Интеграл $I(\varphi_0)$ не зависит ни от массы тела m, ни от коэффициента трения μ. Следовательно, работа силы трения на круговом участке прямо пропорциональна коэффициенту трения и массе тела (также как и на линейном участке, и при движении по плоскости).

2. Зависимость работы силы трения от длины пути, пройденного телом. Характер зависимости работы силы трения от длины пройденного телом пути определяется интегралом

$$I(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} |R\omega^2 + g\cos\varphi| \cdot d\varphi.$$

Модуль – положительная величина, поэтому для одной и той же зависимости $\omega = \omega(\varphi)$ значение интеграла $I(\varphi_0)$ будет возрастать с увеличением длины интервала интегрирования $[0, \varphi_0]$. Длина пути при движении по участку окружности $[0, \varphi_0]$ равна $R\varphi_0$. Следовательно, с ростом длины пути, пройденного телом по круговому участку направляющей, возрастает интервал интегрирования и значение интеграла $I(\varphi_0)$. Таким образом, чем больше длина пути, пройденного телом по круговому участку направляющей, тем больше модуль работы силы трения. Однако характер этой зависимости нелинейный, так как в процессе движения изменяется сила реакции опоры.

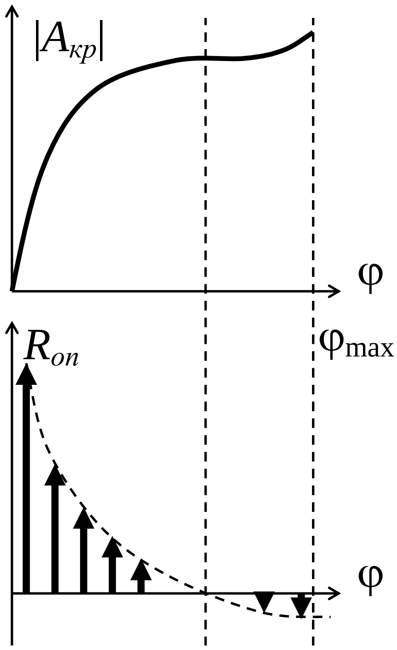


Рис. 7

Проанализируем взаимосвязь характера зависимости (возрастания) модуля работы силы трения с характером изменения силы реакции опоры. В начале пути по круговому участку направляющей сила трения максимальна, поэтому модуль работы силы трения резко возрастает. По мере подъема сила трения уменьшается (рис. 6*в*), и работа силы трения увеличивается медленнее. В области, где сила реакции опоры меняет направление, сила трения вновь начинает возрастать, а работа силы трения начнет увеличиваться быстрее (рис. 7). Таким образом, зависимость модуля работы силы трения от длины пути при движении по круговому участку направляющей является нелинейной в отличие от движения на линейном участке или на плоскости.

***3. Зависимость работы силы трения от радиуса** R* направляющей можно проанализировать самостоятельно.

Для количественного анализа рассмотрим, как можно рассчитать интеграл $I(\varphi_{max})$ по экспериментально полученной зависимости $\varphi(t)$ полярного угла от времени при движении по круговому участку направляющей.

Численный расчет интеграла $I(\varphi_{max})$ с использованием экспериментальных данных

Для численного расчета интеграла

$$I(\varphi_{max}) = \int\limits_{0}^{\varphi_{max}} |R\omega^2(\varphi) + g\cos\varphi| \cdot d\varphi = \int\limits_{0}^{\varphi_{max}} |R_{on}/m| \cdot d\varphi$$

на интервале интегрирования [0, φ_{max}] выбирают некоторое (достаточно большое) количество точек 0, φ_1, φ_2, … φ_k, … , φ_{max}. Тогда искомый интеграл $I(\varphi_{max})$ можно представить как сумму интегралов

$$I(\varphi_{max}) = \int\limits_{0}^{\varphi_{max}} |R_{on}/m| \cdot d\varphi = \int\limits_{0}^{\varphi_1} |R_{on}/m| \cdot d\varphi + \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} |R_{on}/m| \cdot d\varphi + \cdots$$

$$+ \int\limits_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} |R_{on}/m| \cdot d\varphi + \cdots + \int\limits_{\varphi_{max-1}}^{\varphi_{max}} |R_{on}/m| \cdot d\varphi = \sum_{i=1}^{max} \int\limits_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} |R_{on}/m| \cdot d\varphi.$$

Если каждый из отрезков [φ_{i-1}, φ_i] можно считать малым, то силу реакции опоры $|R_{on}/m|$, отнесенную к массе тела, на этом отрезке можно считать постоянной и равной $|R_{on}/m|_{cp_i}$ – среднему значению на отрезке [φ_{i-1}, φ_i]. Тогда интеграл

$$\int\limits_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} |R_{on}/m| \cdot d\varphi \approx |R_{on}/m|_{cp_i} \int\limits_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} d\varphi = |R_{on}/m|_{cp_i}(\varphi_i - \varphi_{i-1}) =$$

$$= |R_{on}/m|_{cp_i}\Delta\varphi_i.$$

Следовательно, искомый интеграл $I(\varphi_{max})$ можно приближенно рассчитать как

$$I(\varphi_{max}) \approx \sum_{i=1}^{max} |R_{on}/m|_{cp_i}\Delta\varphi_i,$$

где $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, а $|R_{on}/m|_{cp_i} = \left|R\omega^2_{cp_i} + g\cos\varphi_{cp_i}\right|$.

Для каждого отрезка [φ_{i-1}, φ_i] очевидно, что среднее значение угла φ_{cp_i} равно

$$\varphi_{cp_i} = \frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_{i-1}).$$

Если из эксперимента известно, в какой момент времени t_i тело находилось на высоте h_i, то можно определить соответствующий этой высоте полярный угол

$$\varphi_i = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{h_i - R}{R}\right).$$

Среднюю угловую скорость ω_{cp_i} при движении по отрезку [φ_{i-1}, φ_i] можно приближенно рассчитать как

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \omega_{cp_i} \approx \frac{\Delta\varphi_i}{\Delta t_i} = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}.$$

Таким образом, при движении по круговому участку направляющей от $\varphi = 0$ до точки максимального подъема φ_{max} интеграл $I(\varphi_{max})$, необходимый для расчета работы силы трения, приближенно можно рассчитать как сумму

$$I(\varphi_{max}) \approx \sum_{i=1}^{max} |R_{on}/m|_{cp_i} \Delta\varphi_i.$$

Тогда работа $A_{кр}$ и длина пути L_{max} на этом участке траектории $[0, \varphi_{max}]$ равны

$$A_{кр} = -\mu m R \cdot I(\varphi_{max}) \text{ и } L_{max} = R\varphi_{max}.$$

2.3. Экспериментальное определение зависимости работы силы трения от длины пути

Любому углу $\varphi_k \leq \varphi_{max}$ соответствует интеграл $I(\varphi_k)$, который также можно приближенно рассчитать с помощью суммы, содержащей меньшее количество слагаемых

$$I(\varphi_k) = \int_0^{\varphi_k} |R_{on}/m| \cdot d\varphi \approx \sum_{i=1}^{k} |R_{on}/m|_{cp_i} \Delta\varphi_i.$$

Тогда работа силы трения и длина пути при движении тела на отрезке $[0, \varphi_k]$ круговой направляющей будет равна

$$A_{\text{кр}}(\varphi_k) = -\mu m R I(\varphi_k) \approx -\mu m R \sum_{i=1}^{k} |R_{\text{оп}}/m|_{\text{ср}_i} \Delta\varphi_i \text{ и } L_{\varphi_k} = R\varphi_k.$$

Чтобы получить зависимость работы силы трения от длины пройденного телом пути, необходимо определить работу силы трения на отрезках различной длины, например, на отрезках $[0, \varphi_1]$, $[0, \varphi_2]$, … $[0, \varphi_k]$, … , $[0, \varphi_{max}]$, при одних и тех же условиях проведения эксперимента. Каждому отрезку соответствует длина пути, интеграл и работа силы трения:

$$[0, \varphi_1]\colon L_{\varphi_1} = R\varphi_1,\ \ I(\varphi_1) \approx |R_{\text{оп}}/m|_{\text{ср}_1} \Delta\varphi_1,\ \ A_{кр}(\varphi_1) = -\mu m R I(\varphi_1);$$

$$[0, \varphi_2]\colon L_{\varphi_2} = R\varphi_2,\ \ I(\varphi_2) \approx \sum_{i=1}^{2} |R_{\text{оп}}/m|_{\text{ср}_i} \Delta\varphi_i,\ \ A_{кр}(\varphi_2) = -\mu m R I(\varphi_2);$$

. . . .

$$[0, \varphi_k]\colon L_{\varphi_k} = R\varphi_k,\ \ I(\varphi_k) \approx \sum_{i=1}^{k} |R_{\text{оп}}/m|_{\text{ср}_i} \Delta\varphi_i, A_{кр}(\varphi_k) = -\mu m R I(\varphi_k);$$

. . . .

$$[0, \varphi_{max}]: L_{\varphi_{max}} = R\varphi_{max}, \ \ I(\varphi_{max}) \approx \sum_{i=1}^{max} |R_{\text{оп}}/m|_{\text{ср}_i} \Delta\varphi_i,$$

$$A_{кр}(\varphi_{max}) = -\mu mRI(\varphi_{max}).$$

Здесь количество слагаемых в суммах постепенно возрастает с увеличением длины пути.

Таким образом, можно получить экспериментальную зависимость работы силы трения скольжения от длины пути, пройденного телом по круговому участку направляющей. Учитывая, что сила реакции опоры постоянно меняется при подъеме, следует ожидать, что эта зависимость окажется нелинейной.

Следует заметить, что для описанных выше расчетов необходимо знание коэффициента трения μ.

2.4. Определение коэффициента трения

Если в эксперименте подобраны условия так, что тело, поднявшись по круговому участку на максимальную высоту (ниже наивысшей точки), начинает скатываться вниз, то из закона сохранения энергии модуль работы силы трения на всем пути до точки максимального подъема равен

$$|A| = U_1 - U_2, \text{где } U_1 = k\frac{\Delta x^2}{2}, \ \ U_2 = mgh_{max}.$$

До точки максимального подъема тело движется сначала по линейному участку направляющей, а затем по круговому, поэтому

$$A = A_{\text{пр}} + A_{\text{кр}}, \text{где } A_{\text{пр}} = -\mu mgL, A_{кр} = -\mu mRI(\varphi_{max}),$$

где $I(\varphi_{max}) \approx \sum_{i=1}^{max} |R_{on}/m|_{cp_i} \Delta\varphi_i$ рассчитывается по экспериментальным данным до максимального угла подъема.

Тогда $$|A| = \mu(mgL + mRI(\varphi_{max})) \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{|A|}{mgL + mRI(\varphi_{max})} \text{ или } \mu = \frac{k\frac{\Delta x^2}{2} - mgh_{max}}{mgL + mRI(\varphi_{max})}.$$

Таким образом, на основе полученных из экспериментальных данных значений $|A|$, mgL и $mRI(\varphi_{max})$ можно определить коэффициент трения μ.

3. Модель экспериментальной установки

В данной работе с помощью средств компьютерной графики моделируется процесс движения тела сферической формы по плоской стальной направляющей, которая закреплена в вертикальной плоскости и состоит из двух участков: горизонтального прямолинейного и кругового. Начальная энергия, необходимая для движения, сообщается телу за счет стартовой пружины, сжатие которой можно изменять в пределах от 0 до 25 см. Длина стартовой пружины в несжатом состоянии такова, что сила упругости, возникающая при сжатии пружины на 25 см или менее, может быть описана законом Гука. Для определения высоты, на которую поднимается тело по направляющей, в работе используется датчик высоты, который автоматически выключается, если тело пересекло уровень, на котором установлен датчик. С помощью этого датчика можно измерять высоту с точностью до 0,25 см. С датчиком высоты синхронизован секундомер, с помощью которого с точностью до 10^{-4} с можно определить время, за которое тело поднимется на высоту, на которую установлен датчик. При указанных условиях погрешность определения коэффициента трения не превышает 5%.

Работа выполняется на IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание работы; порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста работы программы приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит раскрывающийся список для выбора материала, из которого изготовлено тело, панель инструментов для выбора стартовой пружины, счетчики для изменения массы тела и радиуса кругового участка направляющей, переключатель для управления датчиком высоты, а также ползунки для перемещения датчика высоты и изменения сжатия стартовой пружины.

Варианты выполнения работы

Вариант	Материал
1	полиуретан
2	никель
3	дерево (дуб)
4	медь
5	цинк

Вариант	Материал
6	алюминий
7	бронза
8	сталь
9	чугун

4. Порядок выполнения работы

4.1. Краткое описание хода работы

1. Выберите материал, из которого изготовлено тело, (по указанию преподавателя).
2. Установите максимальное значение радиуса кругового участка стальной направляющей.
3. Выберите тело максимальной массы (из возможных).
4. Подберите стартовую пружину, с помощью которой тело может преодолеть наивысшую точку направляющей.
5. Подберите сжатие пружины так, чтобы максимальная высота подъема тела была меньше диаметра кругового участка направляющей.
6. Измерьте высоту и время максимального подъема тела.
7. Измерьте время прохождения телом 25–35 точек, расположенных ниже точки максимального подъема.
8. Рассчитайте полярный угол, угловую скорость и силу реакции опоры, деленную на массу тела.
9. Постройте график зависимости угла подъема тела от времени.
10. Постройте график зависимости силы реакции опоры от угла подъема.
11. Численно рассчитайте интеграл, необходимый для определения работы силы трения на круговом участке траектории.
12. Рассчитайте потенциальную энергию сжатой пружины в начальный момент времени.
13. Рассчитайте потенциальную энергию тела в точке максимального подъема.
14. Рассчитайте работу силы трения из закона сохранения энергии.
15. Рассчитайте коэффициент трения.
16. Рассчитайте работу силы трения при подъеме до различных точек кругового участка направляющей.
17. Для тех же точек рассчитайте длину пути, пройденного телом.
18. Выберите тело меньшей массы.
19. Повторите измерения как в пунктах 4–10 и 16–17.
20. Уменьшите радиус кругового участка направляющей.
21. Повторите измерения как в пунктах 4–10 и 16–17.
22. Постройте графики зависимости модуля работы силы трения от длины пути при движении по круговому участку направляющей.
23. Проанализируйте полученные результаты, сделайте выводы.

4.2. Детальное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Раскрывающийся список на панели ***«Тело»*** содержит набор материалов, которые характеризуются различными коэффициентами трения о сталь: полиуретан, никель, дерево (дуб), медь, цинк, алюминий, бронза, сталь, чугун. Выберите материал, из которого будет изготовлено тело, участвующее в эксперименте (по указанию преподавателя).

2. На панели ***«Стальная направляющая»*** расположен счетчик ***«Радиус кругового участка»***, с помощью которого можно изменять радиус кругового участка стальной направляющей, по которой движется тело, в диапазоне от 34 до 50 см. С помощью этого счетчика установите максимальное значение радиуса.

3. Массу тела можно изменять в пределах от 200 до 600 г. С помощью счетчика ***«Масса»***, расположенного на панели ***«Тело»*** выберите для эксперимента тело максимальной массы. Тело имеет форму шара, через диаметр которого проходит сквозное отверстие, позволяя телу скользить по направляющей, не падая с нее. Радиус тела автоматически указывается под счетчиком «Масса».

4. На панели ***«Сжатие пружины»*** расположен ползунок, с помощью которого можно изменять сжатие стартовой пружины в пределах от 0 до 25 см. Точное значения сжатия автоматически указывается над ползунком. С помощью этого ползунка добейтесь максимально возможного сжатия пружины.

На панели ***«Стартовая пружина»*** расположены кнопки, с помощью которых можно выбирать пружины с разными коэффициентами жесткости. Длина в несжатом состоянии и коэффициент жесткости выбранной пружины автоматически указывается под кнопками. Необходимо подобрать стартовую пружину, с помощью которой тело может преодолеть наивысшую точку направляющей.

Для этого сначала выберите пружину с минимальным коэффициентом жесткости. Нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Ограничитель, удерживающий тело и пружину в сжатом положении, опустится. Тело начнет двигаться. Эксперимент автоматически завершится, когда тело прекратит движение. Во время эксперимента кнопки «Стартовая пружина», ползунки «Положение датчика высоты» и «Сжатие пружины», раскрывающийся список на панели «Тело» и счетчики «Масса» и «Радиус кругового участка» недоступны. (При необходимости эксперимент можно прервать, нажав на кнопку ***«Остановить эксперимент»***. После этого все кнопки, ползунки, список и счетчики вновь станут доступными.)

Наблюдайте за движением тела. Если тело не достигло кругового участка направляющей, или, поднявшись по круговому участку направляющей на некоторую высоту, тело начинает скатываться вниз по той же стороне направляющей, по которой оно поднималось, выберите пружину с большим коэффициентом жесткости и повторите эксперимент. Из всех имеющихся в работе пружин выберите пружину с наименьшим коэффициентом жесткости, позволяющую телу преодолеть наивысшую точку направляющей (то есть, поднявшись на максимальную высоту по одной стороне кругового участка направляющей, спуститься вниз по другой стороне).

5. С помощью выбранной в предыдущем пункте пружины при максимальном сжатии тело, поднявшись по одной стороне кругового участка направляющей, спускается вниз по другой стороне. Необходимо подобрать такое сжатие пружины, при

котором тело поднимается по направляющей как можно выше, а затем скатывается обратно по той же стороне направляющей, по которой оно поднималось.

Для этого уменьшите сжатие стартовой пружины с помощью ползунка на панели ***«Сжатие пружины»*** и нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Подберите сжатие пружины, чтобы высота подъема тела по круговому участку направляющей была максимальной, при этом тело не должно перелетать через высшую точку. При определенной начальной энергии стартовой пружины за счет трения тело может остановиться при приближении к высшей точке, не скатываясь далее ни назад, ни вперед. Необходимо добиться такого движения тела, при котором оно поднимается как можно выше по направляющей и скатывается обратно.

ЗАПИШИТЕ НАЙДЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ В ТАБЛИЦУ.

6. Справа от области эксперимента расположен датчик высоты, который можно перемещать по вертикали с помощью ползунка ***«Положение датчика высоты»***. Точное положение датчика указывается на панели ***«Датчик высоты»***, расположенной ниже области эксперимента. С помощью ползунка ***«Положение датчика высоты»*** (на глаз) установите датчик на высоту близкую к точке максимального подъема тела.

На панели ***«Датчик высоты»*** также расположен переключатель ***«Включен»***, который позволяет включать и выключать датчик высоты. Если датчик включен, а тело, двигаясь, пересекает уровень, на котором установлен датчик, то он автоматически выключается. Перед началом эксперимента необходимо с помощью переключателя ***«Включен»*** включить датчик высоты.

Нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Наблюдайте за движением тела и датчиком высоты. Если тело поднимется выше датчика высоты, он автоматически выключается.

Перемещайте датчик высоты так, чтобы определить максимальную высоту подъема тела. Для более точного изменения положения датчика высоты используйте скроллинг мыши. Если минимальное увеличение высоты расположения датчика приводит к тому, что тело не долетает до него при своем движении, то предыдущее положение датчика высоты следует считать соответствующим высоте максимального подъема тела.

ЗАПИШИТЕ НАЙДЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ В ТАБЛИЦУ.

При нажатии на кнопку «Начать эксперимент» автоматически включается секундомер, расположенный на панели «Датчик высоты» и синхронизованный с ним. Когда тело пересекает уровень, на котором установлен датчик высоты, он автоматически выключается, а секундомер останавливается. То есть секундомер фиксирует время, за которое тело поднимается на высоту, на которой установлен датчик. Запишите время подъема тела на максимальную высоту.

7. Двигаясь по направляющей, тело может оказаться на высоте от 0 до 100 см (диаметр кругового участка направляющей). Максимальная высота подъема тела h_{max} в проведенном эксперименте близка к диаметру кругового участка направляющей. Для получения данных об угловой скорости тела при движении по круговому участку траектории необходимо измерить время прохождения телом 25–35 точек ниже точки максимального подъема. Чтобы рассчитать положение (высоту) этих точек, разделите диаметр кругового участка направляющей на 25–35 – получите расстояние между точками Δh (например, 100 см : 25 = 4 см). Все точки кроме последней должны быть на одинаковом расстоянии друг от друга. Первая точка должна располагаться на нулевой высоте. Последняя точка – на высоте максимального

подъема h_{max}, измеренной ранее. Если условия эксперимента подобраны правильно, то последняя точка (точка максимального подъема) должна располагаться на высоте, ниже диаметра кругового участка направляющей меньше, чем расстояние между точками.

Таким образом,

первая точка: $h_1 = 0$

вторая точка: $h_2 = \Delta h$

третья точка: $h_3 = 2\Delta h$ и т.д.

последняя точка: $h_n = h_{max}$ $(2R - \Delta h < h_{max} < 2R)$

(где R – радиус кругового участка направляющей).

Рассчитайте высоты для проведенного эксперимента.

Время прохождения телом последней точки (h_{max}) измерено при выполнении предыдущего пункта хода работы.

Не изменяя условий эксперимента (жесткости и сжатия пружины, массы тела как в пунктах 3-5), с помощью ползунка ***«Положение датчика высоты»*** переместите датчик высоты в другую (одну из рассчитанных) точку. Включите датчик высоты с помощью переключателя ***«Включен»***. Вновь выполните эксперимент, нажав кнопку ***«Начать эксперимент»***. Когда тело пересечет уровень, на котором расположен датчик высоты, он автоматически выключится, а секундомер остановится, показывая время прохождения телом заданной точки.

ЗАПИШИТЕ ПОКАЗАНИЯ СЕКУНДОМЕРА В ТАБЛИЦУ.

Не изменяя пружины и ее сжатия, поочередно перемещая датчик, измерьте время прохождения телом каждой из рассчитанных точек.

8. Из тригонометрии легко показать, что положение тела, находящегося на круговой направляющей радиуса R на высоте h_i, описывается полярным углом

$$\varphi_i = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{h_i - R}{R}.$$

Угловую скорость тела можно приближенно рассчитать

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \omega_{\text{ср}_i} \approx \frac{\Delta\varphi_i}{\Delta t_i} = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}.$$

Сила реакции опоры, деленная на массу

$$(R_{\text{оп}}/m)_{\text{ср}_i} = R\omega^2_{\text{ср}_i} + g\cos\varphi_{\text{ср}_i}\text{, где } \varphi_{\text{ср}_i} = \frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_{i-1}).$$

Рассчитайте полярный угол, угловую скорость и силу реакции опоры, деленную на массу тела (а также необходимые для этого вспомогательные величины) для всех точек, время прохождения телом которых было измерено ранее (пункт 7).

9. По полученным данным постройте график зависимости угла φ_i подъема тела от времени. Проанализируйте, можно ли считать движение тела по круговому участку направляющей равномерным? равнозамедленным? Почему?

10. Чтобы рассчитать силу реакции опоры в разные моменты времени, домножьте каждое значение $(R_{on}/m)_{cp_i}$ на массу тела m. Постройте график зависимости силы реакции опоры от угла подъема. Проанализируйте, является ли сила реакции опоры постоянной при движении по круговому участку направляющей? меняет ли сила реакции опоры направление? на какой высоте сила реакции опоры обращается в ноль?

11. Чтобы численно рассчитать интеграл

$$I(\varphi_{max}) = \int_0^{\varphi_{max}} |R_{on}/m| d\varphi,$$

каждое значение модуля силы реакции опоры, деленной на массу $|R_{\text{оп}}/m|_{\text{ср}_i}$, рассчитанной при выполнении пункта 8, домножьте на $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ и просуммируйте по всем значениям:

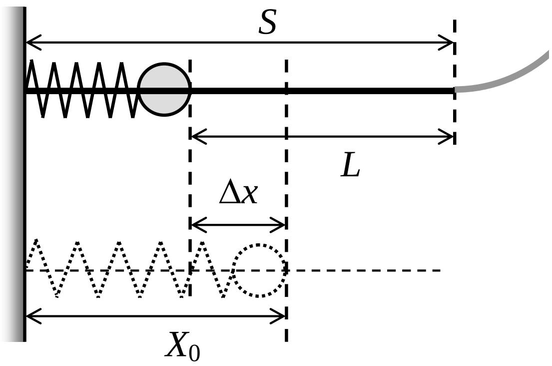
$$I(\varphi_{max}) \approx \sum_{i=1}^{max} |R_{on}/m|_{cp_i} \Delta\varphi_i.$$

12. Рассчитайте потенциальную энергию сжатой пружины в начальный момент времени: $U_1 = k\frac{\Delta x^2}{2}$, где k, Δx – соответственно, коэффициент жесткости и сжатие пружины.

13. Рассчитайте потенциальную энергию тела массой m в точке максимального подъема h_{max}: $U_2 = mgh_{max}$ (ускорение свободного падения g = 9,81 м/с^2).

14. В начальный момент времени система обладала только потенциальной энергией U_1, в точке максимального подъема – только потенциальной энергией U_2. Во время движения сила трения совершала работу A. Модуль работы силы трения – разница между потенциальными энергиями в начальный момент времени U_1 и в точке максимального подъема U_2. Рассчитайте модуль работы силы трения.

15. Модуль работы силы трения на прямолинейном участке траектории тела равен $|A_{\text{пр}}| = \mu mgL$, где L – длина прямолинейного участка направляющей, пройденного телом, μ – коэффициент трения. Если длина всего прямолинейного участка направляющей равна S, длина несжатой пружины, расположенной на конце направляющей, равна X_0, а сжатие пружины равно Δx, то по прямой тело прошло расстояние



$$L = S - X_0 + \Delta x.$$

Модуль работы силы трения на круговом участке траектории равен $|A_{кр}| = \mu mRI(\varphi_{max})$, где $I(\varphi_{max})$ – рассчитанный при выполнении пункта 11 интеграл.

Работа A силы трения скольжения на всем пути до точки максимального подъема равна сумме работ на прямолинейном и круговом участке траектории: $A = A_{пр} + A_{кр}$.

Рассчитайте значения: mgL, $mRI(\varphi_{max})$.

С их помощью и значения модуля работы, рассчитанного в пункте 14, вычислите коэффициент трения

$$\mu = \frac{|A|}{mgL + mRI(\varphi_{max})}.$$

16. Для построения зависимости работы силы трения от длины пути пройденного телом по круговому участку направляющей необходимо для каждого полярного угла φ_i рассчитать $I(\varphi_i)$ как сумму слагаемых $|R_{\text{оп}}/m|_{\text{ср}_k}\Delta\varphi_k$ по значениям, соответствующих полярным углам от нулевого до φ_i включительно: $I(\varphi_i) \approx \sum_{k=1}^{i}|R_{on}/m|_{cp_k}\Delta\varphi_k$ (i = 1, 2 … max).

На основе этих полученных значений рассчитайте модуль работы силы трения при движении по различным отрезкам вдоль круговой направляющей:

$$\left|A_{кр}(\varphi_i)\right| = \mu mRI(\varphi_i) \approx \mu mR\sum_{k=1}^{i}|R_{on}/m|_{cp_k}\Delta\varphi_k.$$

Следует заметить, что каждому полярному углу φ_i соответствует отрезок [0, φ_i] на круговой направляющей, для расчета работы на котором сумма должна содержать i слагаемых:

[0, φ_1]: $\left|A_{кр}(\varphi_1)\right| \approx \mu mR|R_{on}/m|_{cp_1}\Delta\varphi_1$ – одно слагаемое;

[0, φ_2]: $\left|A_{кр}(\varphi_2)\right| \approx \mu mR\sum_{k=1}^{2}|R_{on}/m|_{cp_k}\Delta\varphi_k$ – два слагаемых;

. . . .

[0, φ_i]: $\left|A_{кр}(\varphi_i)\right| \approx \mu mR\sum_{k=1}^{i}|R_{on}/m|_{cp_k}\Delta\varphi_k$ – i слагаемых;

. . . .

[0, φ_{max}]: $\left|A_{кр}(\varphi_{max})\right| \approx \mu mR\sum_{k=1}^{max}|R_{on}/m|_{cp_k}\Delta\varphi_k$ – максимальное количество слагаемых как в пункте 11.

Все суммы начинаются с единицы (наименьший отличный от нуля измеренный угол) и отличаются друг от друга на одно слагаемое.

Используйте коэффициент трения μ, полученный в пункте 15.

17. Для каждого измеренного полярного угла φ_i рассчитайте длину пути, пройденного телом по круговому участку направляющей от нуля до φ_i:

$$L\varphi_i = R\varphi_i,$$

где R – радиус кругового участка направляющей.

18. С помощью счетчика ***«Масса»*** на панели ***«Тело»*** выберите тело меньшей массы по своему усмотрению. Для облегчения анализа результатов исследования рекомендуется выбрать массу значительно отличающуюся от максимальной (использованной ранее).

Радиус кругового участка направляющей оставьте таким же, как в пункте 2.

19. Повторите измерения как в пунктах 4–10 и 16–17.

Зависимость угла подъема тела от времени для тела меньшей массы постройте на том же графике, который был получен в пункте 9.

Зависимость силы реакции от угла подъема для тела меньшей массы постройте на том же графике, который был получен в пункте 10.

20. С помощью счетчика ***«Радиус кругового участка»*** на панели ***«Стальная направляющая»*** уменьшите радиус кругового участка направляющей по своему усмотрению. Для облегчения анализа результатов исследования рекомендуется выбрать радиус значительно отличающийся от максимального (используемого ранее), но кратный 3.

Массу тела оставьте такой же, как в пункте 18.

21. Повторите измерения как в пунктах 4–10 и 16–17.

Зависимость угла подъема тела от времени для движения по направляющей меньшего радиуса постройте на том же графике, который был получен в пункте 9.

Зависимость силы реакции от угла подъема для движения по направляющей меньшего радиуса постройте на том же графике, который был получен в пункте 10.

22. По результатам проведенных исследований постройте график зависимости модуля работы силы трения на круговом участке направляющей от длины пути, на котором изобразите три кривые, соответствующие опытам: 1) с телом большой массы и направляющей большого радиуса; 2) с телом малой массы и направляющей большого радиуса; 3) с телом малой массы и направляющей малого радиуса. На графике проведите вспомогательную вертикальную прямую, пересекающую все три кривые. Точки пересечения экспериментальных кривых с проведенной прямой соответствуют работе силы трения, совершенной при перемещении вдоль траектории одинаковой длины.

23. Проанализируйте полученные результаты, сделайте выводы.

Является ли зависимость работы силы трения скольжения на круговом участке траектории от длины пути линейной, квадратичной и т.д.?

Как работа силы трения зависит от силы реакции опоры?

Как изменяется работа силы трения с увеличением массы тела?

Как изменяется работа силы трения с увеличением радиуса кругового участка направляющей?

При каких условиях (какой массе, каком радиусе направляющей) работа силы трения будет максимальна, если тело проходит по круговому участку направляющей путь одинаковой длины?

Изменится ли характер зависимости работы силы трения скольжения на круговом участке направляющей от длины пути, если высота наивысшего подъема тела будет равна радиусу направляющей ($h_{max} = R$)?

5. Контрольные вопросы

1. Что понимают под энергией тела или системы тел?

2. Что такое работа силы на некотором участке пути? Чему равна работа силы тяжести, силы упругости, силы трения скольжения на некотором участке пути?

3. Какие силы называются консервативными и неконсервативными?

4. Что характеризует потенциальная энергия тела? Как рассчитать потенциальную энергию тела в поле силы тяжести, в поле силы упругости?

5. Что характеризует и как рассчитывается кинетическая энергия?

6. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии, если на систему действуют только консервативные силы?

7. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии, если на систему действуют и консервативные, и неконсервативные силы?

8. Какие силы называются диссипативными? почему?

9. Запишите закон сохранения энергии для системы, изучаемой в эксперименте.

10. Как рассчитать работу силы трения скольжения на горизонтальном прямолинейном участке пути?

11. Как рассчитать работу силы трения скольжения на круговом участке пути?

12. Как, исходя из закона сохранения полной механической энергии для системы, используемой в эксперименте, определить коэффициент трения?

13. Опишите порядок выполнения работы.

Таблица

№	Время t_i, с	Высота h_i, см	Полярный угол φ_i (в радианах)	$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$	$\varphi_{ср} = (\varphi_i + \varphi_{i-1})/2$	Угловая скорость $\omega_i = \Delta\varphi_i/(t_i - t_{i-1})$, рад/с	$R\,\omega_i^2$, 1/с^2	$g\cos(\varphi_{ср})$, 1/с^2	Сила реакции опоры, деленная на массу тела, $R_{оп}/m = R\omega^2 + g\cos(\varphi_{ср})$, м/с^2	$\lvert R_{оп}/m\rvert\Delta\varphi_i$	Модуль работы силы трения $\lvert A_{кр}(\varphi_i)\rvert$, Н·см	Длина пути $L\varphi_i = R\varphi_i$, см
…												
2												
1		0										

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей
физических процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодМ–05
для студентов всех специальностей

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати __.__.2022. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл.печ.л. _____. Уч.-изд.л. ______.
Заказ . Тираж 50 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru