МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
Отделение естественных наук ШБИП

---

УТВЕРЖДАЮ
Директор ШБИП
___________ Д.В. Чайковский
«__»__________ 2022 г.

**О.Г. Ревинская, А.Г. Рипп, Н.С. Кравченко**

# ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических
процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодК–08
для студентов всех специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
2022

УДК 53(076.5)
ББК 22.3я73
Р321

**Ревинская О.Г.**

Р321 Пружинный маятник на наклонной плоскости: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодК–08 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, А.Г. Рипп, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – 31 с.

**УДК 53(076.5)**
**ББК 22.3я73**

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию методическим семинаром отделения естественных наук ШБИП
«___» _________ 20___ г.

Зав. ОЕН ШБИП
проф., доктор физ.-мат. наук В.П. Кривобоков

Председатель учебно-методической комиссии
С.И. Борисенко

*Рецензент*
доктор физ.-мат. наук, доцент Томского политехнического университета
*С.И. Борисенко*

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № МодК–08 ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

## *Пружинный маятник на наклонной плоскости*

***Цель работы***: изучение особенностей затухания колебаний пружинного маятника за счет трения скольжения на наклонной плоскости. Определение модуля силы трения и работы силы трения скольжения. Исследование зависимости декремента затухания от времени и физических характеристик маятника.

## 1. Теоретическое содержание

***Пружинный маятник*** – колебательная система, состоящая из массивного тела, прикрепленного к концу невесомой пружины, второй конец которой закреплен неподвижно. Под колебаниями пружинного маятника принято понимать движение массивного тела как материальной точки. ***Колебания*** пружинного маятника являются ***гармоническими*** (происходящими по гармоническому закону с постоянной амплитудой и частотой колебаний) если: деформацию (сжатие и растяжение) пружины можно описать законом Гука; массой пружины можно пренебречь; силы трения в системе пренебрежимо малы.

Если влиянием трения на движение пружинного маятника пренебречь нельзя, колебания в такой системе будут затухающими. ***Затухающими*** называют ***колебания***, амплитуда которых постоянно уменьшается со временем вследствие потерь колебательной системой энергии, потраченной, например, на преодоление трения.

В случае вязкого трения принято считать, что колебания пружинного маятника происходят по гармоническому закону с постоянной частотой, но с амплитудой, экспоненциально убывающей со временем.

В случае сухого трения колебания пружинного маятника также будут затухающими, но затухание (уменьшение амплитуды) будет носить иной (неэкспоненциальный) характер. Рассмотрим движение пружинного маятника, когда на тело (материальную точку) действует сухое трение на примере трения скольжения по наклонной плоскости.

### 1.1. Движение пружинного маятника по наклонной плоскости

Рассмотрим пружинный маятник, который может двигаться с трением вдоль наклонной плоскости: тело массой $m$, соединенное с невесомой пружиной жесткостью $k$, лежит на наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту; второй конец пружины закреплен в верхней точке наклонной плоскости. Чтобы записать закон движения тела (материальной точки) в этих условиях, рассмотрим силы, действующие на тело: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{R}$, сила упругости со стороны пружины $\vec{F}_{упр}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$. Согласно второму закону Ньютона, ускорение $\vec{a}$ тела массой $m$ зависит от векторной суммы всех сил, действующих на тело:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр} + m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{тр}.$$

Если в процессе движения тело не покидает наклонную плоскость, то его траектория является плоской (расположена в одной плоскости).

Пусть пружина может деформироваться (растягиваться и сжиматься) только в одном направлении вдоль наклонной плоскости (вдоль прямой). Если тело начинает движение без начальной скорости, то в этих условиях тело будет двигаться вдоль той же прямой. То есть движение тела будет одномерным (вдоль одного выделенного направления). Движение тела также будет одномерным, если тело начнет движение с отличной от нуля скоростью, направленной параллельно прямой, вдоль которой может деформироваться пружина.

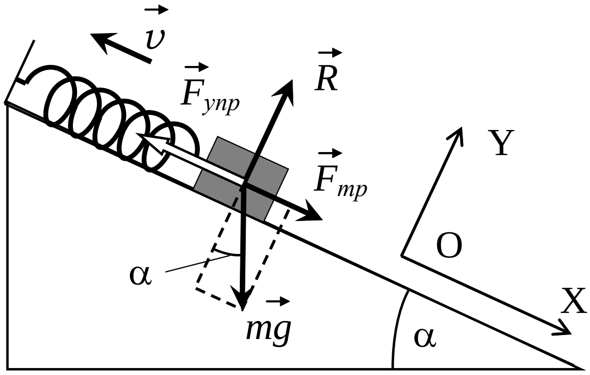


Рис. 1

Для описания одномерного движения тела по наклонной плоскости удобно выбрать декартову систему координат XOY так, чтобы ось OY была направлена перпендикулярно наклонной плоскости, а ось OX – параллельно прямой, вдоль которой движется тело (рис. 1). ***Начало координат*** удобно совместить с точкой, в которой соединенная с телом пружина не деформирована. Тогда $x$-координата тела не только будет задавать его положение на наклонной плоскости ($y = 0$ всегда), но и величину деформации связанной с телом пружины. Направим ось OX так, чтобы положительной координате тела соответствовало растяжение, а отрицательной – сжатие пружины. Тогда уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на выбранную систему координат примет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg \cdot \sin\alpha \pm |F_{тр}|,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = R - mg \cdot \cos\alpha = 0.$$

Сила терния $\vec{F}_{тр}$ всегда направлена в сторону противоположную движению, поэтому знак проекции силы трения на ось OX зависит от того, в какую сторону движется тело (в выбранной системе координат проекция силы трения положительна, когда тело движется вверх по наклонной плоскости; отрицательна, когда тело движется вниз). При колебаниях пружинного маятника на наклонной плоскости направления движения тела поочередно изменяются, соответственно, знаки проекции силы трения чередуются.

Модуль силы трения $|F_{тр}|$ пропорционален модулю силы нормального давления $|N|$, который по третьему закону Ньютона равен модулю силы реакции опоры $|R|$: $|F_{тр}| = \mu|N| = \mu|R|$, где $\mu$ – ***коэффициент трения*** – безразмерная физическая величина, зависящая от свойств трущихся поверхностей. Из проекции уравнения движения тела на ось OY ($y$-координата тела в выбранной системе координат не изменяется со временем) легко получить, что

$$R = mg \cdot \cos\alpha.$$

Тогда $|F_{тр}| = \mu|R| = \mu \cdot mg\, |\cos\alpha|$.

Угол $\alpha$ между наклонной плоскостью и горизонтом всегда $0° \le \alpha < 90°$, поэтому $\cos\alpha$ всегда положителен, и знак модуля можно опустить. Таким образом,

$$|F_{тр}| = \mu|R| = \mu mg \cdot \cos\alpha.$$

Следовательно, модуль силы трения скольжения – постоянная (не зависящая ни от координаты, ни от времени) величина.

С учетом этого движение тела будет описываться поочередно двумя уравнениями:

***при движении тела по наклонной плоскости***

| ***вверх*** | ***вниз*** |
|---|---|
| $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg \cdot \sin\alpha + \lvert F_{тр}\rvert$ | $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg \cdot \sin\alpha - \lvert F_{тр}\rvert$ |

Так как $mg \sin\alpha$ и $|F_{тр}|$ не зависят ни от координат, ни от времени, удобно ввести следующие обозначения для констант в каждом из уравнений:

| | |
|---|---|
| $X_{0+} = \dfrac{1}{k}(mg\sin\alpha + \lvert F_{тр}\rvert) = const$ | $X_{0-} = \dfrac{1}{k}(mg\sin\alpha - \lvert F_{тр}\rvert) = const$ |

Тогда дифференциальные уравнения можно представить в виде:

| | |
|---|---|
| $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(x - X_{0+})$ | $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(x - X_{0-})$ |

Анализ сил, действующих на тело, показывает, что их равнодействующая в выбранной системе координат направлена вдоль оси OX. Правая часть обоих уравнений – проекция равнодействующей на ось OX:

| | |
|---|---|
| $-k(x - X_{0+})$ | $-k(x - X_{0-})$ |

Положение тела, в котором на тело не действуют внешние силы или их действие скомпенсировано (равнодействующая равна нулю), называется ***точкой (положением) равновесия***. Тогда пружинный маятник на наклонной плоскости будет иметь положение равновесия в точке $x$ такой, что

| | |
|---|---|
| $-k(x - X_{0+}) = 0$ | $-k(x - X_{0-}) = 0$ |

$$\Downarrow$$

| | |
|---|---|
| $x = X_{0+}$ | $x = X_{0-}$ |

Таким образом, ***физический смысл*** введенных ранее констант $X_{0+}$ и $X_{0-}$ – ***положение равновесия***. Причем, при движении вверх и вниз по наклонной плоскости пружинный маятник имеет два различных положения равновесия:

$$X_{0+} = \frac{1}{k}(mg\sin\alpha + |F_{\text{тр}}|) \text{ и } X_{0-} = \frac{1}{k}(mg\sin\alpha - |F_{mp}|).$$

Эти точки тем сильнее отличаются друг от друга, чем больше сила трения скольжения.

Чтобы получить решение уравнений движения, в каждом из дифференциальных уравнений сделаем замену переменных:

| | |
|---|---|
| $z_+ = x - X_{0+}$, $dz_+ = dx$<br>для движения вверх<br>$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(x - X_{0+})$ | $z_- = x - X_{0-}$, $dz_- = dx$<br>для движения вниз<br>$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(x - X_{0-})$ |

$$\Downarrow$$

| | |
|---|---|
| $\dfrac{d^2z_+}{dt^2} + \dfrac{k}{m}z_+ = 0$ | $\dfrac{d^2z_-}{dt^2} + \dfrac{k}{m}z_- = 0$ |

Согласно теории дифференциальных уравнений оба уравнения – уравнения гармонических колебаний величин $z_+$ и $z_-$, соответственно (с частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ с амплитудой $A$). Следовательно, решения этих дифференциальных уравнений можно записать в виде

| | |
|---|---|
| $z_+ = A\cos(\omega t + \varphi_+)$ | $z_- = A\cos(\omega t + \varphi_-)$ |

где значения амплитуды $A$ и начальной фазы $\varphi_+$, $\varphi_-$ колебаний определяются из начальных условий. Возвращаясь к исходным обозначениям, получим зависимость координаты $x$ тела от времени

при движении тела по наклонной плоскости

| вверх | вниз |
|---|---|
| $z_+ = x - X_{0+} = A\cos(\omega t + \varphi_+)$<br>или<br>$x = X_{0+} + A\cos(\omega t + \varphi_+)$ | $z_- = x - X_{0-} = A\cos(\omega t + \varphi_-)$<br>или<br>$x = X_{0-} + A\cos(\omega t + \varphi_-)$ |

Полученное решение показывает, что и вверх, и вниз по наклонной плоскости ***тело движется с одной и той же (постоянной) частотой*** $\omega = \sqrt{k/m}$. Следовательно, период колебаний пружинного маятника на наклонной плоскости постоянная величина, равная $T = 2\pi/\omega$.

Полученные зависимости координат тела от времени содержат постоянные слагаемые $X_{0+} = const$ и $X_{0-} = const$, соответственно. Следовательно, колебания происходят относительно этих положений равновесия маятника.

Так как движение тела одномерное, скорость тела всегда направлена вдоль оси OX. Рассмотрим, как изменяется со временем проекция скорости на ось OX. Для этого продифференцируем по времени полученные зависимости координат тела:

при движении тела по наклонной плоскости

| вверх | вниз |
|---|---|
| $v = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_+)$ | $v = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_-)$ |

Пусть пружинный маятник на наклонной плоскости начинает движение без начальной скорости ($v(0) = v_0 = 0$) из точки с координатой $x = A_0 > 0$. Тело начнет двигаться вверх, а его координата и проекция скорости будут описываться уравнениями: $x = X_{0+} + A\cos(\omega t + \varphi_+)$ и $v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_+)$. Тогда можно определить начальную фазу $\varphi_+$ колебаний маятника. В момент времени $t = 0$ проекция скорости тела равна нулю:

$$v_0 = v|_{t=0} = -A\omega\sin\varphi_+ = 0 \Rightarrow \varphi_+ = 0.$$

Имеем $v = -A\omega\sin\omega t$ – зависимость проекции скорости тела на ось OX от времени при движении вверх по наклонной плоскости.

Спустя время $t = T/2 = \pi/\omega$ синус обратиться в ноль – тело остановится и начнет двигаться в противоположную сторону. При этом его координата и проекция скорости будут уже описываться уравнениями: $x = X_{0-} + A\cos(\omega t + \varphi_-)$ и $v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_-)$. Тогда определим начальную фазу $\varphi_-$ при движении тела вниз по наклонной плоскости:

$$v|_{t=T/2} = -A\omega\sin(\pi + \varphi_-) = A\omega\sin\varphi_- = 0 \Rightarrow \varphi_- = 0.$$

Таким образом, одномерные колебания пружинного маятника на наклонной плоскости описываются следующими зависимостями от времени координаты и проекции скорости:

при движении тела по наклонной плоскости

| вверх | вниз |
|---|---|
| $x = X_{0+} + A\cos\omega t$<br>$v = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t$ | $x = X_{0-} + A\cos\omega t$<br>$v = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t$ |

Из полученных уравнений видно, что модуль скорости $|\upsilon| = A\omega|\sin \omega t|$ максимален, когда $|\sin \omega t| = 1$, а $\cos \omega t = 0$. То есть при движении по наклонной плоскости вверх – когда тело находится в точке $x = X_{0+}$, а при движении вниз – в точке $x = X_{0-}$. Таким образом, в точках, соответствующих положениям равновесия $X_{0+}$ и $X_{0-}$, тело обладает максимальной по модулю скоростью.

Тело меняет направление движения (знак проекции скорости) каждые полпериода. Поэтому уравнения $x = X_{0+} + A \cos \omega t$ и $x = X_{0-} + A \cos \omega t$, описывающие зависимость координаты тела от времени, тоже чередуются каждые полпериода. Следовательно, положения равновесия маятника чередуется $X_{0+}$, $X_{0-}$, $X_{0+}$, $X_{0-}$ … (рис. 2). При этом каждые полупериода происходит смещение положения равновесия маятника на одну и ту же величину $\Delta X_0$ (то в одну, то в другую сторону):

$$X_{0+} = \frac{1}{k}(mg\sin\alpha + |F_{mp}|),\ X_{0-} = \frac{1}{k}(mg\sin\alpha - |F_{mp}|) \Rightarrow$$

$$\Delta X_0 = |X_{0+} - X_{0-}| = \frac{1}{k}(mg\sin\alpha + |F_{mp}|) - \frac{1}{k}(mg\sin\alpha - |F_{mp}|),$$

$$\Delta X_0 = 2\frac{|F_{mp}|}{k}.$$

Следует отметить, что при движении маятника на горизонтальной плоскости ($\alpha = 0$) положения равновесия $X_{0+} = |F_{mp}|/k$ и $X_{0-} = -|F_{mp}|/k$ расположены симметрично относительно начала координат (положения тела, в котором пружина не деформирована), а на наклонной плоскости ($\alpha > 0$) – несимметрично (рис. 2).

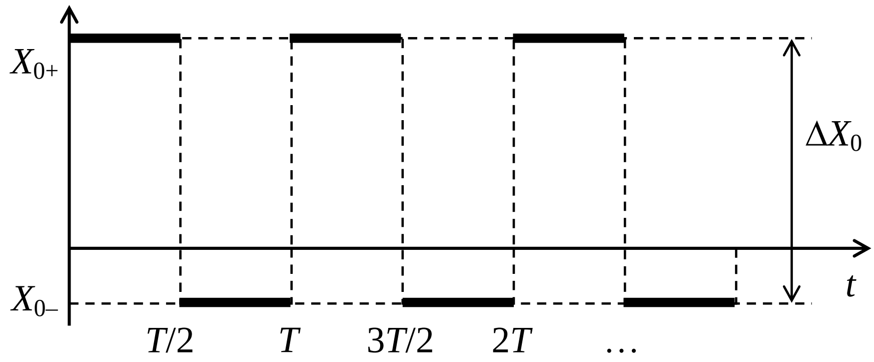



Рис. 2

Таким образом, ***положение равновесия маятника – дискретная физическая величина***, которая в процессе движения маятника может принимать поочередно одно из двух значений: $X_{0+}$ или $X_{0-}$. Зависимость положения равновесия от времени носит разрывный кусочно-линейный характер (рис. 2). Такое поведение положения равновесия маятника со временем вызвано наличием постоянной силы трения скольжения в системе.

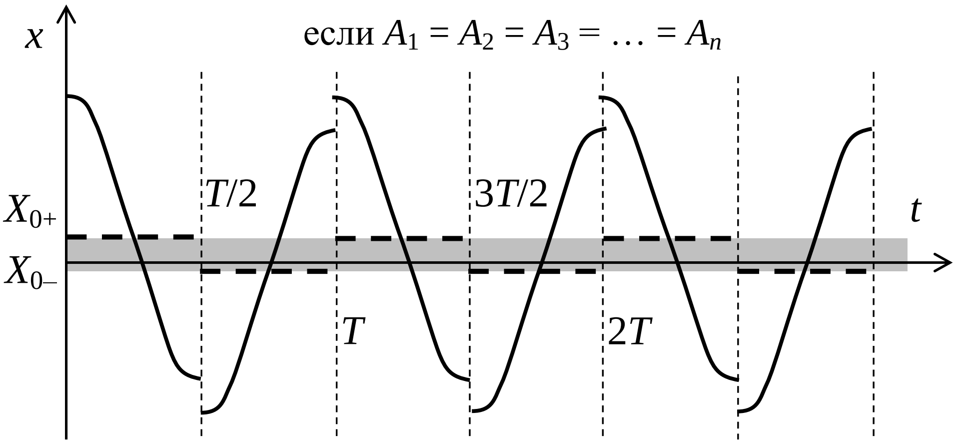



Рис. 3

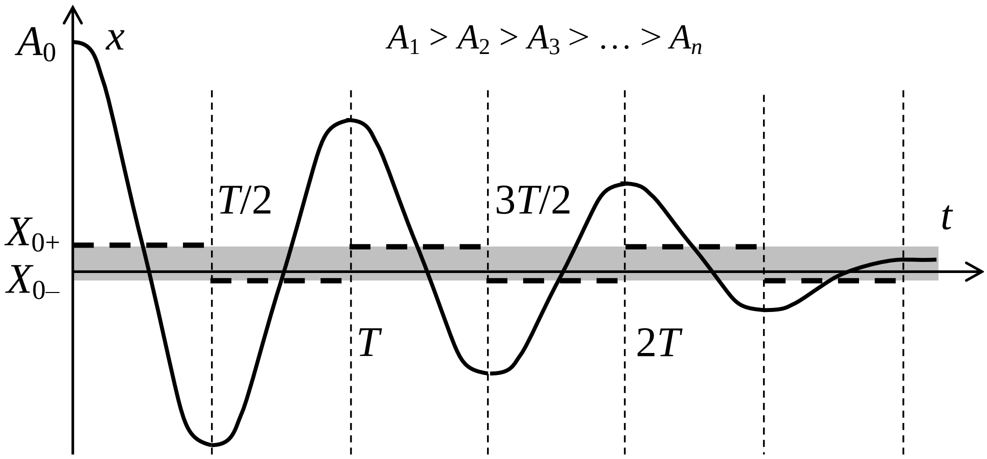



Рис. 4

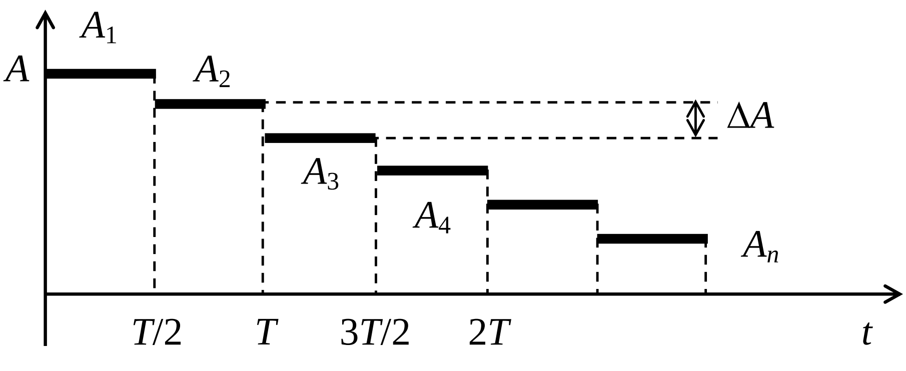



Рис. 5

Если бы при таком поведении положения равновесия гармонические колебания пружинного маятника совершались с постоянной амплитудой $A$, то функция $x = x(t)$ представляла бы собой разрывную кусочно-гладкую функцию (рис. 3). Однако это не так – маятник движется так, что координата тела меняется непрерывно (рис. 4). Чтобы при кусочно-линейном характере изменения положения равновесия $X_{0\pm}$ получить непрерывный характер зависимости $x = x(t)$, необходимо чтобы амплитуда колебаний $A$ также являлась кусочно-непрерывной функцией, изменяясь каждые полпериода (рис. 5):

$$A(t)=\begin{cases} A_1 & 0\le t\le T/2, & \text{движение вверх}\\ A_2 & T/2\le t\le T, & \text{движение вниз}\\ A_3 & T\le t\le 3T/2, & \text{движение вверх}\\ \dots & \dots & \dots\\ A_n & (n-1)T/2\le t\le nT/2, & (n \text{ – номер полупериода})\\ \dots & \dots & \end{cases}$$

Учитывая эти рассуждения, зависимость от времени координаты тела следует записать в виде

$$x(t)=\begin{cases} X_{0+}+A_1\cos\omega t & 0\le t\le T/2, & \text{движение вверх}\\ X_{0-}+A_2\cos\omega t & T/2\le t\le T, & \text{движение вниз}\\ X_{0+}+A_3\cos\omega t & T\le t\le 3T/2, & \text{движение вверх}\\ X_{0-}+A_4\cos\omega t & 3T/2\le t\le 2T, & \text{движение вниз}\\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

В начальный момент времени координата тела была равна $x = A_0 > 0$, пружина растянута, движение начинается вверх, значит

$$x(t)|_{t=0}=A_0=X_{0+}+A_1\Rightarrow A_1=A_0-X_{0+}.$$

Чтобы функция была гладкой и непрерывной необходимо, чтобы ее соседние куски на границе (в момент времени кратный полупериоду) имели одинаковые значения. Так, например, в момент времени $t = T/2$ тело имеет некоторую координату, которую можно вычислить независимо по двум последовательно расположенным кускам кривой $x(t)$ с амплитудами $A_1$ и $A_2$

$$x(T/2)=X_{0+}+A_1\cos(\omega T/2)=X_{0-}+A_2\cos(\omega T/2).$$

Отсюда, зная $A_1$, можно получить $A_2$

$$X_{0+}+A_1\cos\pi=X_{0-}+A_2\cos\pi\ \Rightarrow\ A_2=A_1-(X_{0+}-X_{0-}).$$

Аналогично для соседних кусков функции $x(t)$ с амплитудами $A_2$ и $A_3$ получим

$$x(T)=X_{0-}+A_2\cos(\omega T)=X_{0+}+A_3\cos(\omega T)\ \Rightarrow$$
$$X_{0-}+A_2\cos2\pi=X_{0+}+A_3\cos2\pi\Rightarrow A_3=A_2-(X_{0+}-X_{0-}) \text{ и т.д.}$$

В общем виде можно записать,

$$A_n=A_{n-1}-(X_{0+}-X_{0-}) \text{ или } A_n=A_{n-1}-\Delta A.$$

Учитывая явный вид двух дискретных положений равновесия $X_{0+}$ и $X_{0-}$, получим

$$\Delta A=X_{0+}-X_{0-}=\frac{1}{k}(mg\sin\alpha+|F_{mp}|)-\frac{1}{k}(mg\sin\alpha-|F_{mp}|) \text{ или}$$
$$\Delta A=X_{0+}-X_{0-}=2\frac{|F_{mp}|}{k}.$$

Из полученного выражения видно, что разница между дискретными значениями положения равновесия $(X_{0+}-X_{0-})$ – положительная величина. Следовательно, амплитуда колебаний пружинного маятника

$A_n = A_{n-1} - \Delta A$ дискретно уменьшается каждые полпериода на положительную величину $\Delta A = 2\frac{|F_{mp}|}{k}$ и остается постоянной в течение каждого полупериода (рис. 5).

Тогда ***амплитуду колебаний пружинного маятника в n-м полупериоде*** можно также записать в виде:

$$A_n = A_1 - (n-1)\Delta A \text{ или } A_n = A_0 - X_{0+} - (n-1)\Delta A.$$

Окончательно можно записать, что ***зависимость координаты тела от времени*** имеет вид

$$x(t) = X_{0\pm} + A_n \cos \omega t \text{ при } (n-1)T/2 \le t \le nT/2,\ n = 1, 2, 3\ldots$$

$$\text{где } A_n = A_0 - X_{0+} - (n-1)\Delta A,\ \Delta A = 2\frac{|F_{mp}|}{k},$$

$$X_{0\pm} = \begin{cases} X_{0+}, & n \text{ – нечетное (движение вверх)} \\ X_{0-}, & n \text{ – четное (движение вниз)} \end{cases}$$

$$X_{0+} = \frac{1}{k}(mg\sin\alpha + |F_{\text{тр}}|), X_{0-} = \frac{1}{k}(mg\sin\alpha - |F_{mp}|).$$

Таким образом, зависимость координаты тела от времени описывается гладкой кусочно-непрерывной функцией. Границами отдельных кусков этой функции являются экстремумы (точки остановки, в которых скорость обращается в ноль, а тело меняет направление движения). Так как частота колебаний постоянна, функция имеет экстремумы через каждые полпериода.

Поскольку амплитуда колебаний пружинного маятника постоянно уменьшается, то такие колебания принято называть затухающими.

От величины изменения амплитуды за полупериод $\Delta A$ зависит, как быстро затухают колебания. Очевидно, тело будет двигаться, пока амплитуда колебаний больше нуля. За один период амплитуда колебаний уменьшается на $2\Delta A$. Чем больше $\Delta A$, тем меньше полных колебаний совершит тело до остановки.

С увеличением модуля силы трения изменение амплитуды $\Delta A = 2|F_{mp}|/k$ за полупериод увеличивается, следовательно, тело совершит меньше колебаний до остановки. Заставить маятник совершать большее количество колебаний можно, либо увеличив жесткость пружины, либо уменьшив силу трения.

Модуль силы трения $|F_{mp}| = \mu mg \cdot \cos\alpha$ зависит от массы тела $m$, коэффициента трения $\mu$ и угла наклона $\alpha$ плоскости по отношению к горизонту. Увеличение угла наклона плоскости $\alpha$ равносильно уменьшению трения в системе.

### 1.1.1. Начало и окончание движения пружинного маятника

Рассмотрим, при каких начальных условиях (начальном положении $A_0$ при нулевой начальной скорости) возможно инициировать движение маятника на наклонной плоскости. Для этого второй закон Ньютона в выбранной системе координат запишем в виде

при движении тела по наклонной плоскости

| вверх | вниз |
|---|---|
| $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg\sin\alpha + \lvert F_{тр}\rvert$ | $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg\sin\alpha - \lvert F_{тр}\rvert$ |

или

| | |
|---|---|
| $a = -\dfrac{1}{m}(kx - mg\sin\alpha + \lvert F_{тр}\rvert)$ | $a = -\dfrac{1}{m}(kx - mg\sin\alpha - \lvert F_{тр}\rvert)$ |

Чтобы ***тело начало двигаться вверх по наклонной плоскости*** ($\vec{F}_{тр}\uparrow\uparrow$ OX) без начальной скорости, в начальный момент времени $t = 0$ проекция ускорения на ось OX должна быть отрицательной ($a < 0$). Определим, каким должно быть начальное растяжение пружины $x = A_0$, чтобы создать такое ускорение:

$$a(0) = -\frac{1}{m}(kA_0 - mg\sin\alpha - \lvert F_{тр}\rvert) < 0 \Rightarrow kA_0 > mg\sin\alpha + \lvert F_{тр}\rvert$$

или $A_0 > X_{0+}$.

Чтобы ***тело начало двигаться вниз по наклонной плоскости*** ($\vec{F}_{тр}\uparrow\downarrow$ OX) без начальной скорости, в начальный момент времени $t = 0$ проекция ускорения на ось OX должна быть положительной ($a > 0$). Чтобы создать такое ускорение, начальное растяжение пружины $x = A_0$ должно быть:

$$a(0) = -\frac{1}{m}(kA_0 - mg\sin\alpha + \lvert F_{тр}\rvert) > 0 \Rightarrow kA_0 < mg\sin\alpha - \lvert F_{тр}\rvert$$

или $A_0 < X_{0-}$.

Таким образом, если $A_0 \in [X_{0-}, X_{0+}]$, маятник двигаться не начнет – создаваемой такой деформацией пружины силы упругости не достаточно, чтобы преодолеть силу трения $\mu mg\cos\alpha$ и составляющую силы тяжести $mg\sin\alpha$, направленную вдоль наклонной плоскости. Без начальной скорости движение маятника начнется, только если начальное сжатие (растяжение) пружины $A_0 > X_{0+}$ или $A_0 < X_{0-}$.

Начав движение без начальной скорости, тело каждые полпериода ($t = nT/2$) останавливается в точке $x(nT/2)$ и вновь начинает движение, но уже в противоположном направлении. Поэтому неравенства ($x(nT/2) > X_{0+}$ или $x(nT/2) < X_{0-}$ , $n = 0, 1, 2, \ldots$) описывают не только ***условия***, при которых ***может начаться движение маятника***, но и ***условия возобновления (продолжения)*** этого ***движения*** после очередной остановки.

Через полпериода после начала движения скорость тела обращается в ноль. Если в этот момент тело находится в точке, которая лежит вне отрезка [$X_{0-}$, $X_{0+}$], то тело вновь начнет двигаться, но в противоположном направлении до следующей остановки. Так будет продолжаться до тех пор, пока точки остановки (поворота) лежат вне отрезка [$X_{0-}$, $X_{0+}$]. Как только тело остановится в точке, принадлежащей отрезку [$X_{0-}$, $X_{0+}$], движение возобновиться не сможет. Тогда тело остановится окончательно – колебания прекратятся.

Таким образом, движение маятника по наклонной плоскости при наличии трения не может начинаться из интервала [$X_{0-}$, $X_{0+}$], и всегда заканчивается в этом интервале (рис. 4).

Так как конечная точка, после прохождения которой колебания полностью прекращаются, тоже является точкой поворота, ***полное время колебаний*** (от начала движения до окончательной остановки) всегда составляет целое число полупериодов.

В отличие от затухающих колебаний в вязкой среде, амплитуда которых убывает по экспоненциальному закону, а колебания прекращаются в точке равновесия, колебания пружинного маятника на наклонной плоскости при наличии сухого трения прекращаются между точками, характеризующими два возможных положения равновесия $X_{0+}$ и $X_{0-}$.

### 1.1.2. Движение пружинного маятника без трения

Если в рассматриваемой системе трение отсутствует ($\mu = 0$), то полученная зависимость координаты тела от времени сводится к гармоническим (незатухающим) колебаниям.

Действительно при $\mu = 0$

$$X_{0+} = X_{0-} = \frac{1}{k} mg \sin\alpha = X_0;$$

$$\Delta A = \frac{2|F_{mp}|}{k} = \frac{2}{k}\mu mg \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A_0 - X_0.$$

А зависимость координаты тела от времени примет вид

$$x(t) - X_0 = (A_0 - X_0)\cos\omega t.$$

Это гладкая непрерывная функция, описывающая гармонические колебания с постоянной амплитудой ($A_0 - X_0$) относительно постоянного положения равновесия $X_0$. При этом положение равновесия маятника зависит от угла наклона плоскости по отношению к горизонту.

***На горизонтальной плоскости*** ($\alpha = 0$) пружинный маятник в отсутствии трения колеблется по гармоническому закону $x(t) = A_0 \cos \omega t$ относительно нулевого положения равновесия $X_0 = \frac{1}{k} mg \sin\alpha = 0$ – положения незакрепленного конца нерастянутой пружины. Амплитуда колебаний равна модулю начального смешения, а колебания начинаются при любом, отличном от нуля, начальном смещении тела из положения равновесия $X_0$.

***В вертикальной плоскости*** ($\alpha = \pi/2$) пружинный маятник в отсутствии трения колеблется по гармоническому закону относительно положения равновесия $X_0 = mg/k$ – растяжения пружины, при котором сила упругости уравновешивает силу тяжести. Амплитуда колебаний зависит от того, на сколько начальное положение тела удалено от положения равновесия. Колебания также начинаются при любом, отличном от нуля, начальном смещении тела из положения равновесия $X_0 = mg/k$.

***На наклонной плоскости*** ($0 < \alpha < \pi/2$) пружинный маятник в отсутствии трения колеблется по гармоническому закону относительно положения равновесия $0 < X_0 < mg/k$.

Если каждое из этих движений рассматривается независимо, то удобно начало координат совместить не с положением незакрепленного конца несжатой пружины, а с положением равновесия маятника. Тогда уравнение колебаний во всех трех случаях примет одинаковый вид $x(t) = A \cos \omega t$. При этом следует помнить, что эти уравнения получены относительно разных систем координат (по-разному направленных, с различным положением начала отсчета, связанного с положением равновесия маятника).

Положение равновесия зависит от условий исследования (угла наклона плоскости по отношению к горизонту). Поэтому если проводимые исследования предполагают сравнение колебаний маятника на наклонной плоскости, расположенной под разными углами по отношению к горизонту, то удобнее выбрать начало системы координат в некоторой фиксированной точке на наклонной плоскости, не связанной с положением равновесия маятника в различных условиях.

При наличии трения скольжения в системе положение равновесия маятника дискретно меняется каждые полпериода, поэтому начало системы координат также удобно связать не с положением равновесия маятника, а с фиксированной точкой на наклонной плоскости – положением тела, при котором пружина не деформирована, как это было сделано в п. 1.1.

## 1.2. Работа силы трения при движении пружинного маятника на наклонной плоскости

При наличии трения скольжения в системе амплитуда колебаний пружинного маятника на наклонной плоскости постоянно уменьшается. Следовательно, уменьшается полная механическая энергия изучаемой колебательной системы. Согласно закону сохранения энергии полная механическая энергия $E$ системы при переходе из состояния 1 в состояние 2 уменьшается за счет работы, совершаемой неконсервативными силами

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A_{12}^{НЕКОН}.$$

При движении пружинного маятника по наклонной плоскости среди всех сил, действующих на тело, только сила трения является неконсервативной.

Рассмотрим работу силы трения $\vec{F}_{тр}$ при движении тела по наклонной плоскости от точки 1 до точки 2 вниз. По определению работа силы равна интегралу от скалярного произведения силы на элементарное перемещение $d\vec{r}$ тела

$$A_{тр12} = \int_1^2 (\vec{F}_{тр} \cdot d\vec{r}).$$

Сила трения скольжения всегда направлена в сторону противоположную перемещению. При движении вдоль оси OX получим

$$(\vec{F}_{тр} \cdot d\vec{r}) = |F_{тр}| \cdot |dx| \cdot \cos\pi = -|F_{тр}| \cdot |dx|.$$

Тогда работа силы трения при перемещении тела из точки с координатами $x_1$ до точки с координатами $x_2 > x_1$ (вниз по наклонной плоскости, $dx = 0$)

$$A_{тр12} = -\int_{x_1}^{x_2} |F_{тр}| \cdot dx = -|F_{тр}|(x_2 - x_1) = -|F_{тр}|\Delta x$$

отрицательна и пропорциональна длине пути $\Delta x$, пройденного телом.

Аналогичное выражение получится и при движении тела вверх по наклонной плоскости. Таким образом, ***работа силы трения при движении тела по наклонной плоскости*** отрицательна, пропорциональна модулю силы трения и длине пути $S$, пройденного телом по наклонной плоскости

$$A_{тр} = -|F_{тр}|S.$$

Полная механическая энергия пружинного маятника в произвольный момент времени представляет собой сумму кинетической $\frac{mv^2}{2}$ и потенциальной энергии, состоящей из потенциальной энергии $mgh$ тела поднятого над Землей в поле силы тяжести и потенциальной энергии сжатой пружины $\frac{kx^2}{2}$.

Рассмотрим, как изменится полная энергия за время движения маятника до полной остановки.

В начальный момент времени тело находилось в точке с координатой $x_1 = A_0$ (рис. 6), оно покоилось ($\upsilon_0 = 0$) на высоте $h_0$, а пружина была растянута на величину $A_0$. Если сила упругости, действующая на тело со стороны пружины, описывается законом Гука, то полная механическая энергия $E_0$ тела в начальный момент времени равна

$$E_0 = mgh_0 + \frac{kx_1^2}{2} = mgh_0 + \frac{kA_0^2}{2}.$$

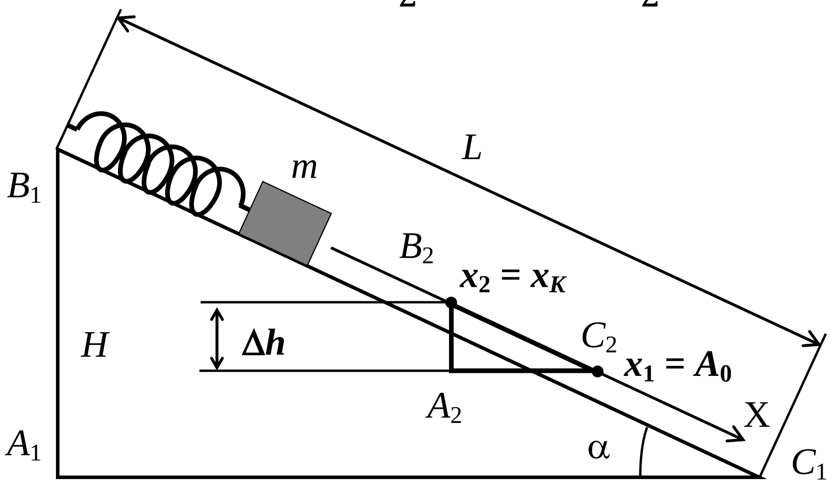



Рис. 6

В конечный момент времени (когда колебания прекратились) тело остановилось ($v = 0$), находясь на высоте $h_0 + \Delta h$. Пружина при этом может оказаться растянутой, например, на величину $x_2 = x_K \in [X_{0-}, X_{0+}]$. Тогда полная энергия $E_K$ тела в конечный момент времени равна

$$E_K = mgh_0 + mg\Delta h + \frac{kx_2^2}{2} = mgh_0 + mg\Delta h + \frac{kx_K^2}{2}.$$

За время движения ***полная механическая энергия тела изменилась*** (уменьшилась) на величину

$$\Delta E = E_K - E_0 = -\left(\frac{k}{2}(A_0^2 - x_K^2) - mg\Delta h\right).$$

Эта энергия ($\Delta E$) пошла на преодоление работы силы трения $A_{тр}$

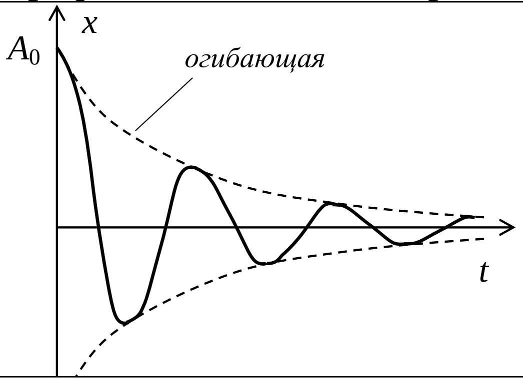
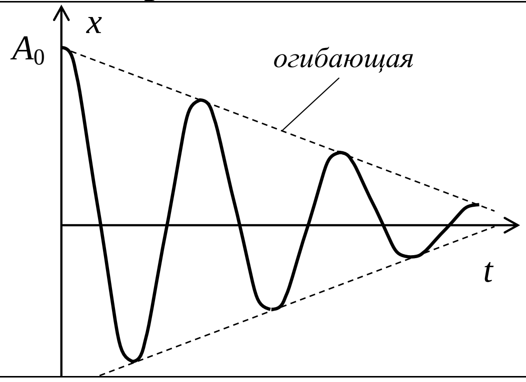
$$|A_{тр}| = |\Delta E| = \frac{k}{2}(A_0^2 - x_K^2) - mg\Delta h.$$

Таким образом, экспериментально работу силы трения при движении маятника на плоскости до остановки можно рассчитать либо определив значение модуля силы трения и измерив путь, пройденный телом, либо по изменению полной механической энергии, задаваемой координатами тела в начальный и конечный моменты времени.

## 1.3. Сравнение затухающих колебаний пружинного маятника, вызванных сухим и вязким трением

Сравним колебания одинаковых пружинных маятников, состоящих из тела массой $m$ и невесомой пружины жесткостью $k$, на наклонной плоскости и в среде с коэффициентом вязкости η при одинаковых начальных условиях.

| Пружинный маятник в вязкой среде | Пружинный маятник на наклонной плоскости |
|---|---|
| **1. Закон движения** | |
| $x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$<br>– гладкая непрерывная функция (β ~ η – коэффициент затухания, пропорциональный коэффициенту вязкости η среды и зависящий от формы тела) | $x(t) = X_{0\pm} + A_n \cos \omega t$<br>– гладкая кусочно-непрерывная функция |
| **2. Начальное положение** (начальные условия) | |
| при $t = 0$ $x = A_0$ | |
| **3. Начальная скорость** (начальные условия) | |
| при $t = 0$ $v = 0$ | |
| **4. Частота колебаний** | |
| $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \beta^2}$<br>меньше частоты свободных незатухающих колебаний пружинного маятника | $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$<br>совпадает с частотой свободных незатухающих колебаний пружинного маятника |
| Колебания происходят с постоянной частотой | |
| **5. Положение равновесия** | |
| $x = 0$<br>– константа | $x = X_{0\pm} = \frac{1}{k}(mg \sin \alpha \pm \lvert F_{mp} \rvert)$<br>принимает одно из двух возможных значений $X_{0+}$ и $X_{0-}$, которые чередуются каждые полпериода (в течение одного полупериода колебаний положение равновесия остается константой) |
| **5. Амплитуда колебаний** | |
| $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$<br>– гладкая непрерывная функция; убывает со временем по экспоненциальному закону | $A_n = A_{n-1} - \Delta A =$<br>$= A_0 - X_{0+} - (n-1)\Delta A$<br>– негладкая кусочно-непрерывная функция, состоящая из горизонтальных прямолинейных отрезков одинаковой длины;<br>каждые полпериода убывает на |

| **Пружинный маятник в вязкой среде** | **Пружинный маятник на наклонной плоскости** |
|---|---|
| | одинаковую величину (в течение одного полупериода колебаний остается константой)<br>$n$ – целая часть отношения $2t/T$ (времени движения $t$ к полупериоду колебаний $T/2$) – зависит от времени. |
| **6. График зависимости координаты тела от времени** | |
| <br> | <br> |
| **7. Продолжительность колебаний** | |
| $t = \infty$ | $t = n\,T/2$<br>– целое (конечное) число полупериодов |
| **8. Конечное положение (полное прекращение колебаний)** | |
| через $t = \infty$ $x = 0$<br>маятник останавливается в положении равновесия | через $t = n\,T/2$ $x = \in [X_{0-}, X_{0+}]$<br>маятник останавливается в точке, расположенной на интервале между двумя возможными положениями равновесия $X_{0+}$ и $X_{0-}$ |
| **9. Декремент затухания** – отношение значений амплитуды, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, $\frac{A(t)}{A(t+T)}$ | |
| $$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$<br>– постоянная величина | $$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_n}{A_{n+2}} = \frac{A_n}{A_n - 2\Delta A} = = 1 + \frac{2\Delta A}{A_n - 2\Delta A} = 1 + \frac{2\Delta A}{A_{n+2}} = = 1 + \frac{2\Delta A}{A_0 - X_{0+} - (n+1)\Delta A}$$<br>– возрастает от периода к периоду, так как отношение $\Delta A/A_{n+2}$ увеличивается |

# 2. Рабочие формулы

## 2.1. Определение характеристик затухающих колебаний

Итак, основными характеристиками затухающих колебаний пружинного маятника на наклонной плоскости являются частота колебаний, закон изменения амплитуды и закон изменения положения равновесия со временем.

Так как колебания происходят с постоянной частотой в эксперименте ***для определения частоты*** ω колебаний маятника необходимо измерить период $T$ колебания (время одного полного колебания). Тогда частоту колебаний можно рассчитать: $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

***Для получения зависимости положения равновесия и амплитуды от времени*** необходимо измерить по две координаты тела, относящиеся к одному и тому же полупериоду движения, в пределах которого координата тела выражается одним и тем же уравнением $x(t) = X_{0\pm} + A_n \cos \omega t$ через соответствующую амплитуду $A_n$ и положение равновесия $X_{0\pm}$ (один кусок кусочно-непрерывной функции). Измерив координаты тела, соответствующие двум различным моментам времени, можно получить два уравнения на два неизвестных $A_n$ и $X_{0\pm}$. Чтобы упростить эти уравнения, можно измерить координаты точек, соответствующие началу и концу выбранного полупериода $t = (n - 1)T/2$ и $t = nT/2$. В эти моменты времени тело останавливается и меняет направление движения, то есть график зависимости координаты тела от времени $x = x(t)$ в этих точках будет иметь экстремумы (максимумы или минимумы), а косинус будет равен +1 или –1. Поэтому точки, отличающиеся по времени на полпериода, являются наиболее удобными для измерений.

Если измерения относятся к нечетному полупериоду ($n = 2k+1$ – движение вверх), то началу полупериода ($t = (n - 1)T/2 = kT$) будет соответствовать максимум координаты

$$x(t) = x_{max} = X_{0+} + A_n \cos(\omega \cdot kT) = X_{0+} + A_n \cos(2k\pi) = X_{0+} + A_n.$$

Концу полупериода ($t = nT/2 = (2k+1)T/2$) будет соответствовать минимум координаты

$$x(t) = x_{min} = X_{0+} + A_n \cos(\omega \cdot (2k+1)T/2) =$$
$$= X_{0+} + A_n \cos((2k+1)\pi) = X_{0+} - A_n.$$

Тогда, измерив координаты $x_{max}$ и $x_{min}$, можно определить $A_n$ и $X_{0+}$ из системы уравнений

$$x_{max} = X_{0+} + A_n, \qquad x_{min} = X_{0+} - A_n.$$
$$A_n = \frac{1}{2}(x_{max} - x_{min}), \qquad X_{0+} = \frac{1}{2}(x_{max} + x_{min}).$$

Аналогично для четного полупериода ($n = 2k$ – движение вниз) можно показать, что началу полупериода соответствует минимум координаты, а концу – максимум. При этом получится аналогичная система уравнений

$$x_{min} = X_{0-} - A_n, \qquad x_{max} = X_{0-} + A_n.$$

$$A_n = \frac{1}{2}(x_{max} - x_{min}), \qquad X_{0-} = \frac{1}{2}(x_{max} + x_{min}).$$

Таким образом, чтобы получить зависимость амплитуды и положения равновесия маятника от времени, необходимо последовательно выполнить измерения всех $x_{\max}$ и $x_{\min}$, а затем для каждых двух соседних $x_{\max}$ и $x_{\min}$ выполнить расчеты:

$$A_n = \frac{1}{2}(x_{max} - x_{min}), \qquad X_{0\pm} = \frac{1}{2}(x_{max} + x_{min}).$$

## 2.2. Путь, пройденный телом за время колебаний

Для определения работы силы трения скольжения за время колебаний маятника на наклонной плоскости необходимо рассчитать полный путь, пройденный телом до полной остановки.

В каждом полупериоде тело проходит отрезки пути разной длины. В одном полупериоде тело движется между экстремумами функции $x(t)$ от точки с координатой $x_{n-1} = x_{\max}$ до точки с координатой $x_n = x_{\min}$ (в нечетных полупериодах – движение вверх), либо, наоборот – от точки с координатой $x_{n-1} = x_{\min}$ до точки с координатой $x_n = x_{\max}$ (в четных полупериодах – движение вниз). Тогда путь $s_n$, пройденный телом за один полупериод, будет равен

$$s_n = x_{\max} - x_{\min} = |\, x_{n-1} - x_n|.$$

Маятник совершает колебания в течение целого количества полупериодов. Поэтому конечная координата тела $x_K$, в которой колебания маятника прекращаются, также является точкой экстремума (точкой поворота, принадлежащей отрезку $[X_{0-}, X_{0+}]$, после которой движение не может возобновиться). Следовательно, полный путь, пройденный телом, равен сумме отрезков пути $s_n$ на каждом полупериоде

$$S = \sum(x_{max} - x_{min}) = \sum_n |x_{n-1} - x_n|.$$

## 2.3. Определение высоты, на которой находится тело

Пусть маятник находится на наклонной плоскости высотой $H$, длиной $L$ (рис. 6).

Пусть за некоторое время тело переместилось из точки с координатой $x_1$ в точку с координатой $x_2$ вверх по наклонной плоскости. Определим, на сколько при этом увеличилась высота, на которой находится тело по отношению к горизонту. Чтобы определить изменение высоты

$\Delta h$, рассмотрим подобные треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. По свойству подобия треугольников

$$\frac{H}{L} = \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta h}{x_1 - x_2}.$$

$$\text{Тогда} \quad \Delta h = (x_1 - x_2) \cdot \frac{H}{L}.$$

Изменение высоты $\Delta h$ пропорционально изменению координаты $(x_1 - x_2)$ не только при движении вверх, но и при движении вниз. Поэтому в эксперименте достаточно измерять только координаты тела, характеризующие различные положения тела на плоскости.

Следует отметить также, что при движении маятника на горизонтальной плоскости ($H = 0$) тело всегда находится на одной и той же высоте по отношению к поверхности Земли, поэтому $\Delta h = 0$, а потенциальная энергия тела в поле силы тяжести не изменяется.

## 3. Модель экспериментальной установки

В данной работе с помощью средств компьютерной графики моделируется движение пружинного маятника на деревянной наклонной плоскости. Трение в системе представлено только силой трения скольжения тела о наклонную плоскость. Остальные виды трения отсутствуют. Высоту наклонной плоскости можно изменять от 0 до 150 см. Для определения времени, за которое маятник совершает заданное количество колебаний, используется секундомер, способный измерять время с точностью до 1 миллисекунды. Для определения координат тела используется измерительный инструмент, позволяющий определять координаты с точностью $10^{-3}$ см. При указанных условиях погрешность измерения периода колебаний и работы силы трения скольжения в эксперименте не превышает 1%.

Работа выполняется на IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание работы; порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста работы программы приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит раскрывающийся список для выбора материала, из которого изготовлено тело, счетчик для изменения массы тела, ползунок для изменения высоты наклонной плоскости, панель с кнопками для выбора пружины, секундомер для измерения времени движения маятника, а также вспомогательные кнопки, позволяющие управлять экспериментом.

**Варианты выполнения работы**

| Вариант | Материал | Вариант | Материал |
|---|---|---|---|
| 1 | Полиуретан | 2 | Никель |
| 3 | Дерево | 4 | Медь |
| 5 | Цинк | 6 | Алюминий |
| 7 | Бронза | 8 | Латунь |
| 9 | Сталь | 10 | Чугун |

## 4. Порядок выполнения работы

### 4.1. Краткое описание хода работы

1. Выберите материал, из которого изготовлено тело (по указанию преподавателя).

2. Установите **высоту наклонной плоскости равную нулю**.

3. Выберите **тело большой массы**.

4. Подберите пружину с жесткостью, обеспечивающей многократные колебания тела.

**Тяжелое тело на горизонтальной плоскости**

5. Выполните эксперимент и измерьте время, за которое маятник совершает несколько колебаний.

6. Измерьте координаты всех максимумов и минимумов графика, включая координату тела в момент остановки.

7. Вычислите период колебаний.

8. Вычислите положения равновесия и амплитуды колебаний маятника в каждом полупериоде.

9. Вычислите изменение положения равновесия и амплитуды в каждом полупериоде.

10. Вычислите среднее значение изменения положения равновесия и амплитуды за полупериод колебаний.

11. Вычислите значение модуля силы трения.

12. Вычислите длину пути, пройденного телом в каждом полупериоде.

13. Вычислите полную длину пути, пройденного телом за время колебаний.

14. Вычислите значение работы силы трения для полученной длины пути.

15. Вычислите значение работы силы трения из закона сохранения энергии.

16. Вычислите относительную погрешность значения работы силы трения.

17. Вычислите декремент для каждого периода колебаний.

**Тяжелое тело на наклонной плоскости**

18. Установите **максимально возможную высоту наклонной плоскости**.

19. Выполните эксперимент и измерения как в пунктах 5–6.

20. Выполните расчеты как в пунктах 7–17.

21. Вычислите теоретическое значение периода колебаний.

22. Вычислите относительную погрешность периода колебаний для каждого эксперимента.

**Легкое тело на горизонтальной плоскости**

23. **Уменьшите массу тела на треть**.

24. Выполните эксперимент **на горизонтальной плоскости**.

25. Выполните измерения и расчеты как в пунктах 5–17.

**Легкое тело на наклонной плоскости**

26. Выполните эксперимент **на наклонной плоскости** такой же высоты, как в пункте 18.

27. Выполните измерения и расчеты как в пунктах 5–17.

28. По результатам экспериментов постройте графики зависимости положения равновесия, амплитуды и декремента затухания от времени.

29. Рассчитайте, при каких условиях тело малой массы (пункт 23) будет двигаться также как тело большой массы (пункт 3).

30. Сделайте выводы.

## 4.2. Подробное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Плоскость, по которой движется пружинный маятник, изготовлена из дерева. Раскрывающийся список ***«Материал»*** на панели ***«Тело»*** содержит набор материалов, характеризуемых различными коэффициентами трения скольжения по дереву: полиуретан, никель, дерево, медь, цинк, алюминий, бронза, латунь, сталь, чугун. Выберите материал, из которого будет изготовлено тело, используемое в эксперименте (по указанию преподавателя). Для выбранного материала под списком автоматически указывается значение коэффициента трения этого материала по дереву.

2. Слева от области эксперимента расположен ползунок ***«Высота наклонной плоскости»***, перемещение которого позволяет изменять высоту наклонной плоскости от 0 (горизонтальная плоскость) до 150 см. С помощью этого ползунка установите высоту наклонной плоскости равную нулю, **чтобы пружинный маятник находился на горизонтальной плоскости**.

3. Счетчик ***«Масса»*** на панели ***«Тело»*** позволяет изменять массу тела от 70 до 180 г. С помощью этого счетчика задайте **массу тела, близкую к максимальной**: 180–120 г. Рекомендуется выбрать значение, кратное 3.

4. Кнопки на панели ***«Пружина»*** позволяют выбирать для эксперимента пружины с различной жесткостью. Коэффициент жесткости для выбранной пружины автоматически указывается под кнопками.

Необходимо подобрать пружину так, чтобы во всех последующих опытах маятник совершал достаточно большое (6–15) количество колебаний. Для этого достаточно, чтобы при движении маятника с телом большой массы на горизонтальной плоскости (трение максимально) график зависимости координаты тела от времени имел **не менее пяти максимумов, значения которых больше 1/4 начальной координаты тела**.

Чтобы подобрать подходящую пружину сначала с помощью кнопок на панели ***«Пружина»*** выберите пружину с наименьшей жесткостью. Нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Маятник начнет двигаться. Одновременно с этим ниже области эксперимента будет строиться график зависимости координаты тела от времени. Обратите внимание, что в начальный момент времени координата тела равна начальному растяжению пружины: 40 см. Наблюдайте за графиком. После того как тело остановится, посчитайте, какое количество максимумов графика имеют значение больше 10 см (1/4 начальной координаты тела). Максимум, в котором тело находилось в начальный момент времени, учитывать не нужно.

Если количество максимумов, значения которых больше 10 см, меньше пяти, выберите пружину с другой жесткостью. Вновь выполните эксперимент (нажмите кнопку «Начать эксперимент»).

Необходимо из всех доступных пружин подобрать пружину с минимальной жесткостью, позволяющей получить колебания маятника с пятью максимумами (не считая начального положения), значения которых больше 10 см.

Зафиксируйте (запишите) подобранную таким образом пружину.

Очистите график с помощью кнопки ***«Очистить график»***.

**Тяжелое тело на горизонтальной плоскости**

5. Прежде чем выполнить эксперимент, перейдите в режим использования секундомера. Для этого на панели ***«Секундомер»*** установите переключатель (флажок) ***«Использовать»***.

Нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Маятник вновь начнет двигаться с одновременным построением графика зависимости координаты тела от времени. Одновременно включится секундомер. Координаты тела на графике фиксируются только в течение ограниченного промежутка времени (5,6 с).

Секундомер настроен на измерение времени прохождения телом точек, где тело останавливается и меняет направление движения. Со временем колебания затухают, и точки сближаются. Время прохождения близко расположенных точек трудно фиксировать. Поэтому секундомер настроен только на измерение точек поворота, расположенных на расстоянии больше 10 см от начала координат. Каждой точке поворота соответствует полупериод колебаний.

Кроме времени секундомер также фиксирует количество пройденных телом точек поворота (количество полупериодов колебаний).

Секундомер автоматически выключается, когда тело впервые пройдет точку поворота (экстремум графика), расположенный на расстоянии меньше 10 см от начала координат. Тело будет продолжать двигаться, пока не остановится.

Эксперимент закончится, когда тело окончательно остановится. При этом секундомер выключится раньше.

Запишите количество зафиксированных секундомером полупериодов колебаний маятника и время, в течении которого они происходили.

6. Справа от графика зависимости координаты тела от времени расположен ползунок ***«Измерение координаты»***, который позволяет измерять координаты отдельных точек графика с помощью синхронизованной с ним измерительной линией.

Чтобы измерить координату какой-либо точки графика, необходимо, перемещая ползунок, совместить измерительную линию с интересующей точкой. Точное положение измерительной линии отображается справа от ползунка ***«Измерение координаты»*** в виде «Координата: **,*** см».

Измерьте последовательно координаты $x_n$ всех минимумов и максимумов графика, включая координату тела $x_K$ в момент остановки (в конечный момент времени). ЗАПИШИТЕ ИЗМЕРЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ТАБЛИЦУ.

7. С помощью секундомера было измерено время $t$ и количество $N$ полупериодов колебаний. Тогда продолжительность одного полупериода равна $t/N$, а период колебаний маятника $T = 2\cdot(t/N)$.

Так как точность секундомера равна $10^{-3}$ с, вычислите период колебаний с точностью до четырех десятичных знаков после запятой.

8. По каждым двум соседним измеренным значениям координат максимумов $x_{\max}$ и минимумов $x_{\min}$ графика вычислите положение равновесия и амплитуду колебаний: $A_n = \frac{1}{2}|x_{n-1} - x_n| = \frac{1}{2}(x_{max} - x_{min})$, $X_{0\pm} = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n) = \frac{1}{2}(x_{max} + x_{min})$.

Так как точность измерения координаты равна $10^{-3}$ см, вычислите положение равновесия и амплитуду колебаний маятника с точностью до четырех десятичных знаков после запятой.

9. По каждым двум соседним значениям амплитуды $A_n$ и $A_{n+1}$ вычислите изменение амплитуды $\Delta A = A_n - A_{n+1}$.

По каждым двум соседним значениям положения равновесия $X_{0+}$ и $X_{0-}$ вычислите изменение положения равновесия $\Delta X_0 = |\, X_{0+} - X_{0-}|$.

10. Чтобы вычислить среднее значение изменения амплитуды $\Delta A_{ср}$, необходимо сложить все полученные значения и разделить на их количество.

Аналогично чтобы вычислить среднее значение изменения положения равновесия $\Delta X_{0\,ср}$ необходимо сложить все полученные значения и разделить на их количество.

11. Согласно теории изменение амплитуды $\Delta A = 2\frac{|F_{тр}|}{k}$. Зная коэффициент жесткости пружины $k$ и среднее значение изменения амплитуды $\Delta A_{ср}$, полученное из эксперимента в пункте 10, вычислите модуль силы трения $|F_{тр}|$.

Согласно теории изменение положения равновесия $\Delta X_0 = 2\frac{|F_{тр}|}{k}$. Зная коэффициент жесткости пружины $k$ и среднее значение изменения положения равновесия $\Delta X_{0\,ср}$, полученное из эксперимента в пункте 10, вычислите модуль силы трения $|F_{тр}|$.

Таким образом, получим два *экспериментальных значения* модуля силы трения $|F_{тр}|$. Чтобы сравнить полученные экспериментальные значения с теоретическим $F_{тр}| = \mu mg \cos\alpha$, выполните следующие расчеты.

Значение $\cos\alpha$ можно рассчитать из геометрических параметров наклонной плоскости: $H$ – высота, $L$ – длина наклонной плоскости. Тогда из прямоугольного треугольника

$$\sin\alpha = \frac{H}{L} \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{\sqrt{L^2 - H^2}}{L}.$$

Коэффициент трения μ тела о деревянную поверхность автоматически указывается на панели ***«Тело»*** при выборе материала, из которого изготовлено участвующее в эксперименте тело (см. пункт 1). Таким образом, *теоретическое значение* модуля силы трения $|F_{тр}|$ можно рассчитать по формуле

$$|F_{тр}| = \mu mg\cos\alpha = \mu mg\frac{\sqrt{L^2 - H^2}}{L}.$$

Сравните рассчитанное по этой формуле теоретическое значение модуля силы трения $|F_{тр}|$ с полученными ранее двумя экспериментальными значениями. Для корректного сравнения необходимо, чтобы в записи теоретического и экспериментальных значений использовалось одинаковое количество значащих цифр.

12. В пункте 6 были измерены координаты тела, соответствующие максимумам и минимумам графика зависимости координаты тела от времени. Эти точки соответствуют точкам поворота тела при движении по плоскости. За один полупериод тело проходит путь между двумя точками поворота.

Для каждых двух соседних измеренных координат $x_n$ и $x_{n-1}$ (включая конечную $x_K$ и начальную координату $A_0$) вычислите длину пути $s_n$, пройденного телом в каждом полупериоде $s_n = |x_n - x_{n-1}|$.

13. Чтобы вычислить полную длину пути, пройденного телом за время колебаний, просуммируйте длины всех отрезков пути $s_n$, пройденные телом в каждом полупериоде и рассчитанные при выполнении предыдущего пункта,

$$S = \Sigma\, s_n.$$

14. Работа силы трения при движении тела по наклонной плоскости равна (из определения работы) $A_{тр} = -\,|F_{тр}|\, S$.

Экспериментальное значение модуля силы трения $|F_{тр}|$ было вычислено при выполнении пункта 11, а полный путь $S$, пройденный телом, – при выполнении пункта 13. По этим данным вычислите значение модуля работы силы трения $A_{тр\,S}$.

Результат расчетов должен содержать такое же количество значащих цифр, как и исходные данные.

15. Из закона сохранения энергии работу силы трения можно вычислить, не используя явный вид силы трения, по изменению полной механической энергии между конечным и начальным положениями маятника. Так как и в начальном, и в конечном положении тело покоилось, полная механическая энергия:

- в начальный момент времени $E_0 = mgh_0 + \frac{kA_0^2}{2}$,
- в конечный момент времени $E_K = mgh_0 + mg\Delta h + \frac{kx_K^2}{2}$,

где $A_0$, $h_0$ – координата и высота расположения тела в начальный момент времени, $x_K$ – координата тела в конечный момент времени, $\Delta h$ – разница высот между начальной и конечной точками

$$\Delta h = \Delta x \cdot \frac{H}{L},$$

где $\Delta x = A_0 - x_K$, $H$ – высота, $L$ – длина наклонной плоскости.

Тогда из закона сохранения энергии модуль работы силы трения равен

$$A_{тр} = E_0 - E_K = \frac{k}{2}(A_0^2 - x_K^2) - mg\Delta x\frac{H}{L}.$$

Рассчитайте необходимые величины и вычислите модуль работы силы трения $A_{тр\,E}$ из закона сохранения энергии.

Для корректного сравнения значения модуля работы силы трения $A_{тр\,S}$ и $A_{тр\,E}$ должны содержать одинаковое количество значащих цифр.

16. Вычислите относительную погрешность модуля работы силы трения в процентах $\delta A = \frac{|A_{тр\,S} - A_{тр\,E}|}{A_{тр\,E}} \cdot 100\%$.

17. Декремент $\frac{A(t)}{A(t+T)}$ характеризует изменение амплитуды колебаний за период. Для всех рассчитанных в пункте 8 значений амплитуды кроме двух последних рассчитайте отношения $A_n/A_{n+2}$.

### Тяжелое тело на наклонной плоскости

18. Слева от области эксперимента расположен ползунок ***«Высота наклонной плоскости»***, перемещение которого позволяет изменять высоту наклонной плоскости от 0 (горизонтальная плоскость) до 150 см. С помощью этого ползунка **установите максимально возможную в данной работе высоту наклонной плоскости**, чтобы отличия от движения маятника на горизонтальной плоскости были максимальными. При перемещении ползунка точное значение высоты наклонной плоскости автоматически указывается на панели ***«Наклонная плоскость»*** в виде «Высота: ***.** см».

19. Не изменяя массы тела и жесткости пружины, выполните эксперимент и измерения как в пунктах 5–6. Очищать график (стирать кривую, описывающую зависимость координаты тела от времени на горизонтальной плоскости) НЕ рекомендуется – на графике зависимости координаты тела от времени останется кривая, описывающая движение того же маятника на горизонтальной плоскости.

Обратите внимание! Увеличение угла наклона плоскости эквивалентно уменьшению силы трения, поэтому время движения тела до полной остановки увеличится.

20. Выполните расчеты как в пунктах 7–17.

21. Согласно теории частота колебаний пружинного маятника, состоящего из тела массой $m$ и пружины с жесткостью $k$, не зависит от угла наклона плоскости, по которой движется маятник, и равна $\omega = \sqrt{k/m}$. Тогда период колебаний маятника равен $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$. Вычислите теоретическое значение периода колебаний $T_{ТЕОР}$. Для корректного сравнения теоретическое значение периода должно содержать такое же количество значащих цифр, как и экспериментальное значение периода $T_Э$, полученное при выполнении пункта 7.

Сравните период колебаний маятника на горизонтальной и на наклонной плоскости с полученным теоретическим значением периода колебаний $T_{ТЕОР}$.

22. Вычислите относительную погрешность периода колебаний пружинного маятника $\delta T = \frac{|T_Э - T_{ТЕОР}|}{T_{ТЕОР}} \cdot 100\%$ для эксперимента на горизонтальной плоскости, а также для эксперимента на наклонной плоскости.

### Легкое тело на горизонтальной плоскости

23. Нажмите кнопку ***«Очистить график»***.

Счетчик ***«Масса»*** на панели ***«Тело»*** позволяет изменять массу тела от 70 до 180 г. С помощью этого счетчика задайте массу тела, значение которой **меньше** массы, выбранной при выполнении пункта 3, **на треть**. Например, если в первом и втором опыте использовалось тело массой 180 г, выберите массу, равную 120 г.

Обратите внимание! С уменьшением массы тела сила трения скольжения уменьшается, поэтому время движения тела до полной остановки увеличится. Координаты тела на графике фиксируются только в течение ограниченного промежутка времени (5,6 с). Если при выполнении пункта 4 выбрана пружина слишком большой жесткости, время колебаний маятника (время движения тела до полной остановки) может оказаться больше, чем 5,6 с. В этом случае использовать график для измерения конечной координаты и координат тела в нескольких последних точках поворота не удастся. Тогда необходимо вернуться к выполнению пункта 4, более тщательно подобрать пружину и заново выполнить все эксперименты.

24. С помощью ползунка ***«Высота наклонной плоскости»***, расположенного слева от области эксперимента, установите высоту наклонной плоскости равную нулю, чтобы пружинный маятник находился на горизонтальной плоскости. Для выбранного в пункте 23 значения массы, не меняя пружину, выполните эксперимент **на горизонтальной плоскости** (нажмите кнопку «Начать эксперимент»).

25. Выполните измерения и расчеты как в пунктах 5–17.

**Легкое тело на наклонной плоскости**

26. Для выбранного в пункте 23 значения массы, не меняя пружину, выполните эксперимент **на наклонной плоскости** такой же высоты, как в пункте 18. Очищать график (стирать кривую, описывающую зависимость координаты тела от времени на горизонтальной плоскости) НЕ рекомендуется.

Обратите внимание! Увеличение угла наклона плоскости эквивалентно уменьшению силы трения, поэтому время движения тела до полной остановки увеличится. Координаты тела на графике фиксируются только в течение ограниченного промежутка времени (5,6 с). Если при выполнении пункта 4 выбрана пружина слишком большой жесткости, время колебаний маятника (время движения тела до полной остановки) может оказаться больше, чем 5,6 с. В этом случае использовать график для измерения конечной координаты и координат тела в нескольких последних точках поворота не удастся. Тогда необходимо вернуться к выполнению пункта 4, более тщательно подобрать пружину и заново выполнить все эксперименты.

27. Выполните измерения и расчеты как в пунктах 5–17, 21–22.

28. Нажмите кнопку ***«Очистить график»***. Повторите первый (для тела большой массы на горизонтальной плоскости) и последний (тело малой массы на наклонной плоскости) эксперименты.

На графике зависимости координаты тела от времени будут построены две кривые. Зарисуйте этот график или сохраните в виде bmp- или jpg-файла с помощью кнопки ***«Сохранить график»***.

По результатам всех проведенных экспериментов и расчетов постройте следующие графики:

- кусочно-непрерывный график зависимости от времени **амплитуды** маятника, колеблющегося **на горизонтальной плоскости** – две ступенчатые зависимости, соответствующие колебаниям **тел разной массы**;
- кусочно-непрерывный график зависимости от времени **положения равновесия** маятника, колеблющегося **на горизонтальной плоскости** – две ступенчатые зависимости, соответствующие колебаниям **тел разной массы**;
- кусочно-непрерывный график зависимости от времени **амплитуды** маятника, колеблющегося **на наклонной плоскости** – две ступенчатые зависимости, соответствующие колебаниям **тел разной массы**;

- кусочно-непрерывный график зависимости от времени **положения равновесия** маятника, колеблющегося **на наклонной плоскости** – две ступенчатые зависимости, соответствующие колебаниям **тел разной массы**;
- график зависимости от времени **декремента затухания** маятника – четыре гладкие кривые, соответствующие колебаниям **тел разной массы и на наклонной, и на горизонтальной плоскости**.

На всех графиках (кроме графика зависимости координаты тела от времени) вдоль всей оси времени последовательно отметьте отрезки, равные длительности полупериода колебаний.

29. Все характеристики колебаний пружинного маятника на плоскости (частота, изменение амплитуды и положения равновесия) зависят от отношения $m/k$.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad A_n = A_0 - X_{0+} - (n-1)\Delta A,\quad \Delta A = 2\frac{|F_{тр}|}{k} = 2\mu\frac{m}{k}g\cos\alpha,$$

$$X_{0\pm} = \frac{m}{k}g\sin\alpha \pm \mu\frac{m}{k}g\cos\alpha.$$

Следовательно, при одинаковых начальных условиях разные маятники, имеющие одинаковое отношение $m/k$, будут иметь одинаковые характеристики колебаний на одной и той же наклонной плоскости, описываться одной и той же зависимостью координаты тела от времени.

В первых двух экспериментах использовался маятник, состоящий из тела массой $m_1$ (пункт 3) и пружины с коэффициентом жесткости $k_1$ (пункт 4). В последующих опытах (третьем и четвертом) масса тела равна $m_2$. Рассчитайте, пружину какой жесткости $k_2$ необходимо подобрать, чтобы маятник, состоящий из тела массой $m_2$ (пункт 23) и пружины с жесткостью $k_2$, двигался по наклонной плоскости также как маятник, состоящий из тела массой $m_1$ и пружины с жесткостью $k_1$. Для этого отношения $m/k$ этих маятников должны быть равны

$$\frac{m_1}{k_1} = \frac{m_2}{k_2}.$$

Из этого отношения получите и рассчитайте коэффициент жесткости пружины, с помощью которой можно заставить тело малой массы (пункт 23) двигаться также как тело большой массы (пункт 3).

Если пружина с рассчитанной жесткостью есть в работе, выберите ее и выполните эксперимент с маятником, состоящим из этой пружины и тела малой массы, на горизонтальной и наклонной плоскости, предварительно очистив график. Сравните, одинаково ли движутся маятники с одинаковыми отношениями $m/k$. Для этого, не очищая график, повторите первый и второй опыт.

30. Сделайте выводы:

Какое движение совершает пружинный маятник на плоскости?

Как изменяется амплитуда колебаний маятника на плоскости со временем?

Как изменяется положение равновесия маятника на плоскости со временем?

Как изменяется декремент затухания колебаний маятника на плоскости со временем?

Как зависят от массы колеблющегося тела изменение амплитуды, изменение положения равновесия и длительность колебаний?

Как зависят от угла наклона плоскости, по которой движется маятник, изменение амплитуды, изменение положения равновесия и длительность колебаний?

Как работа силы трения при движении маятника до остановки на горизонтальной плоскости зависит от массы тела? Почему?

Как работа силы трения при движении маятника до остановки на наклонной плоскости зависит от массы тела? Почему?
Как работа силы трения одного и того же маятника до остановки зависит от угла наклона плоскости, по которой он движется?
Совпадают ли теоретические и экспериментальные значения периода колебаний маятника и работы силы трения при движении маятника до остановки? Почему?
Почему тело малой массы можно заставить колебаться на пружине также как тело большой массы? При каких условиях?

## 5. Контрольные вопросы

1. Что такое пружинный маятник?
2. Какие колебания называются затухающими?
3. Каким уравнением описываются колебания пружинного маятника на плоскости, если трением скольжения тела по плоскости пренебречь нельзя? Как получить решение этого уравнения?
4. По какому закону изменяется амплитуда колебаний маятника на плоскости?
5. Как зависит от времени положение равновесия пружинного маятника, колеблющегося на плоскости?
6. При каких начальных условиях невозможно движение пружинного маятника на наклонной плоскости?
7. Зависит ли от времени декремент затухания пружинного маятника, колеблющегося на плоскости?
8. Как работа силы трения скольжения, возникающая между телом и плоскостью, зависит от пути, пройденного телом? от массы тела?
9. Сохраняется ли полная механическая энергия при колебаниях пружинного маятника на плоскости? На что расходуется энергия?
10. Как из эксперимента определить положение равновесия, амплитуду и период колебаний пружинного маятника на плоскости?
11. Как из эксперимента определить путь, пройденный телом за время движения пружинного маятника на плоскости до остановки?
12. Опишите порядок выполнения работы.

**Таблица**

| $n$ (№ полупериода) | Координаты тела $x_n$, см | | Положение равновесия $X_{0\pm}$, см | Изменение положения равновесия $\Delta X_0$, см | Длина пути $s_n$, см | Амплитуда $A_n$, см | Изменение амплитуды $\Delta A$, см | Декремент |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | max | 40 | | | | | | |
| 1 | min | | | | | | | |
| 2 | max | | | | | | | |
| … | | | | | | | | |

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна
РИПП Александр Гешелевич
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

# ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодК–08 для студентов всех специальностей

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати __.__.2022. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл.печ.л. 1,86. Уч.-изд.л. 1,68.
Заказ . Тираж 30 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru