МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
Отделение естественных наук ШБИП

УТВЕРЖДАЮ
Директор ШБИП
___________ Д.В. Чайковский
«__»_________ 2022 г.

О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических
процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодК–06
для студентов всех специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
2022

УДК 53. 076

Ревинская О.Г.

Гармонический анализ: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодК–06 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – 22 с.

УДК 53.076

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию методическим семинаром отделения естественных наук ШБИП
«___» _________ 20___ г.

Зав. ОЕН ШБИП
проф., доктор физ.-мат. наук В.П. Кривобоков

Председатель учебно-методической комиссии
А.В. Макиенко

Рецензент
доктор тех. наук, профессор Томского политехнического университета
В.А. Москалев

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № МодК–06 ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Гармонический анализ

Цель работы: изучение сходимости Фурье-разложения периодического негармонического движения.

1. Теоретическое содержание

Функция $f(t)$ называется ***периодической***, если через равные отрезки времени T ее значения повторяются $f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \ldots = f(t + nT)$. Наименьший отрезок времени, через который значения функции повторяются, называется ***периодом*** T.

Движение является периодическим, если уравнение движения $x(t)$ описывается периодической функцией. Движение считается ***гармоническим***, если уравнение движения $x(t)$ может быть преобразовано в выражение в виде одной функции косинуса или синуса (гармонической функции)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \text{ или } x(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Тогда для описания периодического движения достаточно задать амплитуду A, начальную фазу φ и циклическую частоту ω, связанную с периодом выражением $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Движение считается ***негармоническим***, если уравнение движения не удается записать в виде одной гармонической функции.

В результате сложения гармонических колебаний, совпадающих по направлению и имеющих кратные циклические частоты ω, 2ω, 3ω, $\ldots n\omega$, получается одномерное периодическое негармоническое движение с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

В свою очередь, любое одномерное периодическое движение $x = f(t)$ с периодом T можно представить в виде суммы гармонических колебаний с кратными циклическими частотами ω, 2ω, 3ω, $\ldots$ $n\omega$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)),$$

$$где\ \ a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\cos(n\omega t)\,dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\sin(n\omega t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Такое представление периодической функции $f(t)$ называется ***разложением*** этой ***функции в ряд Фурье*** или ***гармоническим анализом сложного периодического движения***. Члены ряда Фурье, соответствующие гармоническим колебаниям с частотой ω, называются ***первой*** или ***основной гармоникой***. Члены ряда Фурье, соответствующие гармоническим колебаниям с частотами 2ω, 3ω, … nω, называются, соответственно, ***второй, третьей, …, n-ой гармониками***. Совокупность этих гармоник образует ***спектр*** периодического движения $f(t)$. Независящие от времени величины a_0, a_n, b_n определяют вклад (амплитуду) каждой гармоники и называются ***коэффициентами Фурье***. Под спектром периодического движения часто понимают зависимость амплитуды гармоники α_n от ее частоты $n\omega$. Эта зависимость имеет дискретный характер (рис. 1). Амплитуда гармоники α_n выражается через коэффициенты Фурье a_n и b_n: $\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

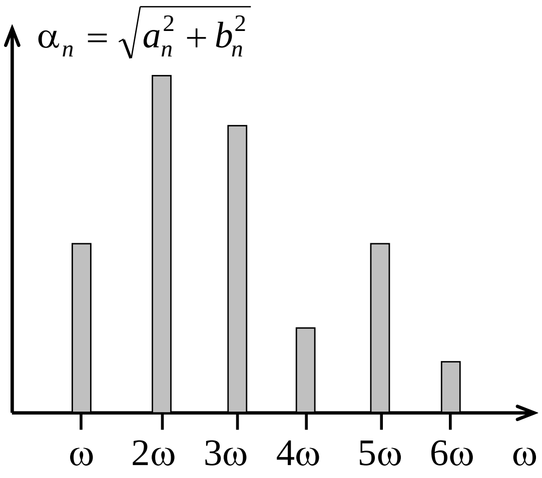


Рис. 1

Гармонический анализ предоставляет возможность другого представления закона периодического движения, которое может быть удобным в ряде задач.

В некоторых случаях бесконечный ряд Фурье оказывается конечным. Это зависит от закона периодического движения $f(t)$.

Если функция $f(t)$ является гармонической, например $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, все коэффициенты Фурье, кроме коэффициентов при основной гармонике обратятся в ноль

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t.$$

Спектр состоит из одной основной частоты (гармоники).

Если функция $f(t)$ является суммой конечного числа кратных колебаний (пакет колебаний), например $f(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(3\omega t)$, отличными от нуля будут коэффициенты только при гармониках, входящих в пакет

$$f(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(3\omega t) = a_1\cos(\omega t) + a_3\cos(3\omega t).$$

Спектр состоит из двух частот (гармоник).

Для периодических негармонических функций $f(t)$, которые невозможно записать в виде конечной суммы кратных колебаний, ряд Фурье будет бесконечным. Говорят, что такая функция имеет бесконечный спектр.

Из математического анализа известно, что если абсолютная величина $|f(t)|$ интегрируема в течение всего периода T, то коэффициенты a_n, b_n ряда Фурье для функции $f(t)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, ряд Фурье сходится к функции $f(t)$.

Если функция $f(t)$ интегрируема на интервале $[-T/2; T/2]$, ряд Фурье сходится, а вклад (амплитуда) гармоник более высокого порядка уменьшается с ростом n.

Разложение функции в ряд Фурье используется, как правило, для приближенного представления функции. Для этого заменяют функцию $f(t)$ не бесконечным, а конечным рядом Фурье с теми же коэффициентами

$$F_N(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)).$$

Функция $F_N(t)$ имеет конечный спектр. Гармонику, соответствующую наибольшей частоте $N\omega$, входящей в спектр функции $F_N(t)$, называют ***старшей гармоникой Фурье-разложения***. Точность приближения определяется количеством N гармоник, включенных в спектр. Погрешность ε равна вкладу отброшенного ряда

$$\varepsilon = \sum_{n=N+1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)).$$

Погрешность ε может быть различной в разные моменты времени. Погрешность будет наибольшей в те моменты времени, когда значения косинуса и синуса максимальны по модулю. Тогда можно считать, что погрешность ε приближения в любой момент времени по модулю не превышает

$$\varepsilon \le \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_n + b_n)\right|.$$

Из математического анализа известно, что если функция $f(t)$ в течение всего периода имеет непрерывные производные до $(m-1)$-го порядка включительно, а m-ая производная кусочно-непрерывна, то коэффициенты Фурье a_n и b_n убывают не медленнее, чем $1/n^m$

$$|a_n| < \frac{C}{n^m}, \quad |b_n| < \frac{C}{n^m} \quad (C = const).$$

Тогда погрешность ε можно оценить как

$$\varepsilon < C \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^m}.$$

Если $m > 1$, то сумму бесконечного ряда можно оценить интегралом

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^m} \approx \int_{N+1}^{\infty} n^{-m} dn = \frac{1}{(m+1)(N+1)^{m+1}}.$$

Ряд сходится быстро.

Если $m = 1$, то ряд сходится медленно, а погрешность можно оценить как

$$\varepsilon < C \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \approx C\left(1 - \frac{1}{3\pi} \ln\left(\frac{3\pi}{5}(N+1)\right)\right).$$

Таким образом, замена периодической функции $f(t)$ конечным рядом Фурье, содержащим N гармоник, дает приближенное представление исходной функции, погрешность ε которого не превышает

$$\varepsilon < \frac{C}{(m-1)(N+1)^{m-1}} \text{ при } m > 1 \text{ или}$$

$$\varepsilon < C\left(1 - \frac{1}{3\pi} \ln\left(\frac{3\pi}{5}(N+1)\right)\right) \text{ при } m = 1,$$

где C – константа, значение которой зависит от закона периодического движения $f(t)$; m – максимальный порядок отличной от нуля производной, которую имеет функция $f(t)$ на интервале $[-T/2; T/2]$.

В данной работе необходимо определить, при каком минимальном количестве гармоник можно считать, что конечный ряд Фурье удовлетворительно заменяет изучаемую функцию $f(t)$, и оценить погрешность этого приближения.

1.1. Расчет коэффициентов Фурье и погрешности

Наиболее часто Фурье-анализ используется для представления периодического движения $f(t)$, имеющего кусочно-непрерывную форму, непрерывные участки которого представляют собой отрезки прямых. Период изучаемого движения равен T, амплитуда (максимальное отклонение от положения равновесия) равно A.

Для вычисления коэффициентов Фурье необходимо:

1) записать функцию $f(t)$ в аналитическом виде;
2) вычислить интегралы, входящие в коэффициенты Фурье на каждом отрезке, где функция $f(t)$ непрерывна;
3) найти суммарные коэффициенты разложения.

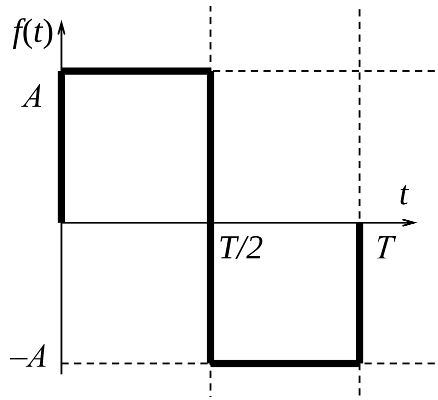
Используя свойства симметрии тригонометрических функций при вычислении коэффициентов Фурье удобнее перейти от интегралов на интервале $[-T/2;\ T/2]$ к интегралам на интервале $[0;\ T]$.

Для вычисления погрешности разложения необходимо:

1) выражения для a_n и b_n представить в виде C/n^m;
2) определить наименьшую степень числа n и константу C при нем;
3) вычислить погрешность.

Рассмотрим несколько примеров расчета коэффициентов Фурье и погрешности приближения.

Закон движения ПРЯМОУГОЛЬНОЙ формы.



Аналитический закон движения:

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t \le T/2; \\ -A, & T/2 \le t \le T. \end{cases}$$

Используя таблицу интегралов, приведенную в приложении, получим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{2}{T}A\int_0^{T/2} dt - \frac{2}{T}A\int_{T/2}^{T} dt = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{T}A\int_0^{T/2} \cos(n\omega t)\,dt - \frac{2}{T}A\int_{T/2}^{T} \cos(n\omega t)\,dt =$$

$$= \frac{2}{T}A\left(\frac{T}{n\pi}\sin(n\pi) - \frac{T}{2n\pi}\sin(2n\pi)\right) = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{T}A\int_0^{T/2} \sin(n\omega t)\,dt - \frac{2}{T}A\int_{T/2}^{T} \sin(n\omega t)\,dt =$$

$$= \frac{2}{T}A\left(-\frac{T}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{T}{2n\pi}\cos(2n\pi)\right) = \frac{2A}{n\pi}(1 - (-1)^n).$$

Получили $a_0 = 0$, $a_\mathrm{n} = 0$, $b_n = \frac{2A}{n\pi}(1 - (-1)^n)$.

Ряд Фурье

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(n\omega t) = b_1 \sin(\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + . . .$$

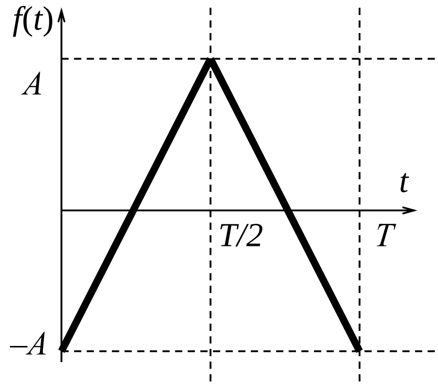
В разложении участвуют только синус-компоненты нечетных гармоник.

Из вида коэффициента b_n определим, что $m = 1$, $C = \frac{4A}{\pi}$ (коэффициент b_n отлично от нуля только для нечетных n). Тогда погрешность $\varepsilon < \frac{4A}{\pi}(3\pi - \ln\frac{N+1}{3\pi})$ имеет логарифмический вид и убывает медленно. Следует ожидать, что для разложения движения прямоугольной формы в ряд Фурье необходимо большое количество гармоник.

Закон движения ТРЕУГОЛЬНОЙ формы (равнобедренный треугольник).

Аналитический закон движения:

$$f(t) = \begin{cases} A\left(\frac{4}{T}t - 1\right), & 0 \le t \le T/2; \\ A\left(-\frac{4}{T}t + 3\right), & T/2 \le t \le T. \end{cases}$$



Используя таблицу интегралов, приведенную в приложении, получим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{2}{T}A\int_0^{T/2}\left(\frac{4}{T}t - 1\right)dt$$

$$+\frac{2}{T}A\int_{T/2}^{T}\left(-\frac{4}{T}t + 3\right)dt = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{T}A\int_0^{T/2}\left(\frac{4}{T}t - 1\right)\cos(n\omega t)\,dt + \frac{2}{T}A\int_{T/2}^{T}\left(-\frac{4}{T}t + 3\right)\cos(n\omega t)\,dt =$$

$$= -\frac{4A}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)\left(\cos(n\pi) - 1\right) = \frac{4A}{n^2\pi^2}(-1)^n(1 - (-1)^n),$$

$$b_n = \frac{2}{T}A\int_0^{T/2}\left(\frac{4}{T}t - 1\right)\sin(n\omega t)\,dt + \frac{2}{T}A\int_{T/2}^{T}\left(-\frac{4}{T}t + 3\right)\sin(n\omega t)\,dt =$$

$$= -\frac{2A}{n^2\pi^2}\left(2\sin(n\pi)\left((-1)^n - 1\right) + n\pi - n\pi(-1)^{2n}\right) = 0.$$

Получили $a_0 = 0$, $a_n = \frac{4A}{n^2\pi^2}(-1)^n(1-(-1)^n)$, $b_n = 0$.

Ряд Фурье

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega t) = a_1 \cos(\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + . . .$$

В разложении участвуют только косинус-компоненты нечетных гармоник.

Из вида коэффициента a_n определим, что $m = 2$, $C = \frac{8A}{\pi^2}$ (коэффициент a_n отличен от нуля только при нечетных n). Тогда погрешность $\varepsilon < \frac{8A}{\pi^2(N+1)}$ убывает как $1/(N + 1)$. Ряд сходится быстрее. Следует ожидать, что для разложения движения треугольного вида данной формы в ряд Фурье необходимо меньше гармоник, чем для разложения движения прямоугольной формы.

2. Приложение

Таблица интегралов

В таблице учтено, что частота ω связана с периодом T соотношением $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

$$\int dt = t; \qquad \int t dt = \frac{1}{2}t^2.$$

$$\int \cos(n\omega t)\, dt = \frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t) = \frac{T}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right);$$

$$\int t \cdot \cos(n\omega t)\, dt = \frac{t}{n\omega}\sin(n\omega t) + \frac{1}{n^2\omega^2}\cos(n\omega t) =$$

$$= t\frac{T}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \frac{T^2}{4\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right).$$

$$\int \sin(n\omega t)\, dt = -\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t) = -\frac{T}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right);$$

$$\int t \cdot \sin(n\omega t)\, dt = -\frac{t}{n\omega}\cos(n\omega t) + \frac{1}{n^2\omega^2}\sin(n\omega t) =$$

$$= -t\frac{T}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \frac{T^2}{4\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right).$$

Тригонометрические тождества

$$\sin(n\pi) = 0; \qquad \sin(n2\pi) = 0;$$

$$\sin\left(n\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=(-1)^n\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right);$$

если n – четное (n = 2k), $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2k\frac{\pi}{2}\right)=0;$

если n – нечетное (n = 2k + 1), $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k.$

$$\cos(n\pi)=(-1)^n; \qquad \cos(n2\pi)=1;$$

$$\cos\left(n\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=(-1)^n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right);$$

если n – четное (n = 2k), $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2k\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k;$

если n – нечетное (n = 2k + 1), $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=0.$

3. Модель экспериментальной установки

В данной работе с помощью средств компьютерной графики моделируется движение двух тел. Одно тело движется по периодическому негармоническому закону, другое – по закону, описываемому конечным рядом Фурье для этого периодического движения. Оба движения происходят одновременно. Количество гармоник, включенных в ряд Фурье, можно изменять в интервале от 1 до 800.

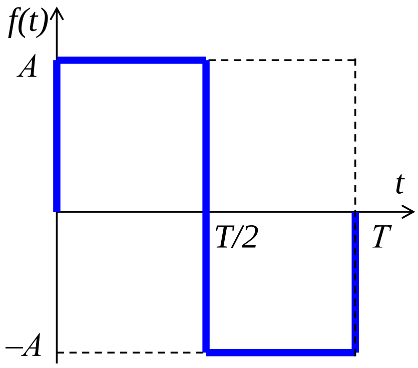
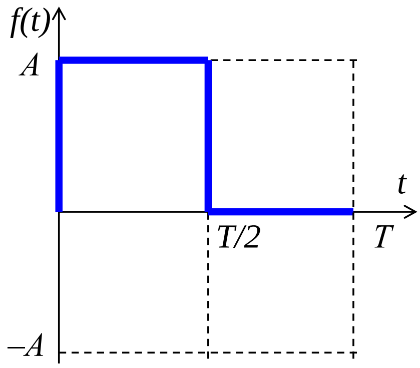
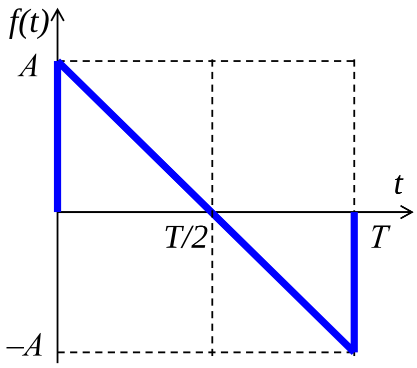
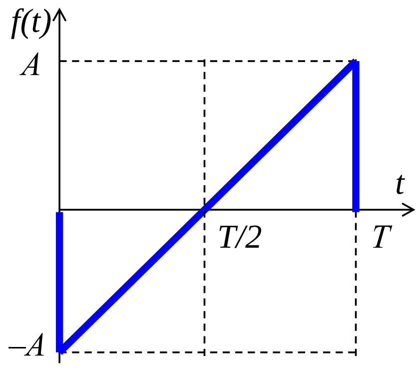
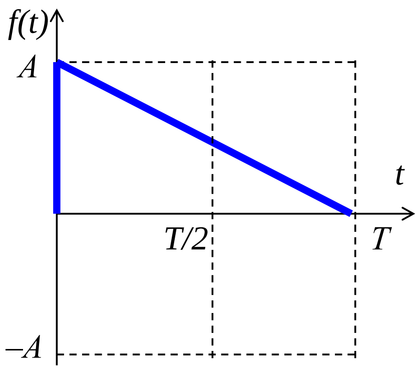
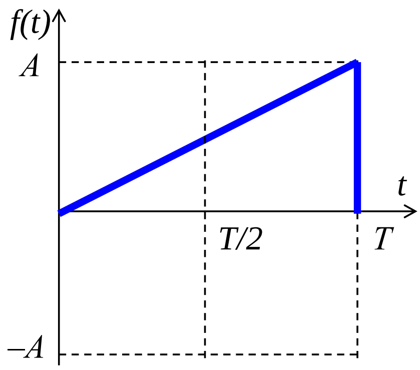
Необходимо, изменяя количество гармоник ряда Фурье, добиться, чтобы законы движения обоих тел выглядели одинаково. Для облегчения сравнения на экране строятся графики зависимости координаты того и другого тела от времени.

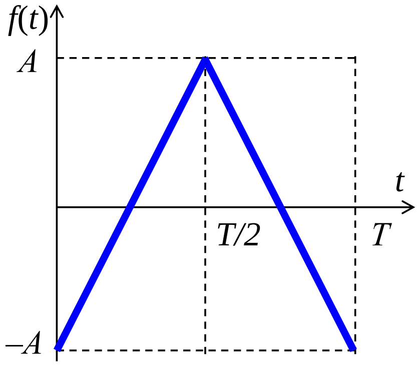
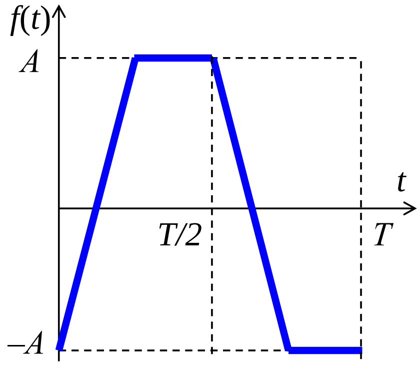
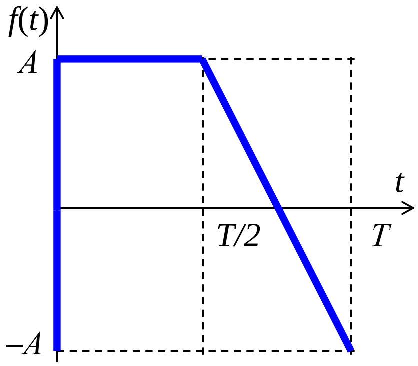
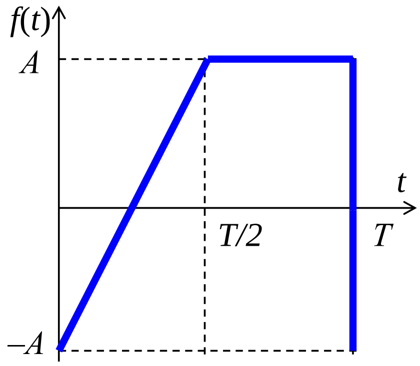
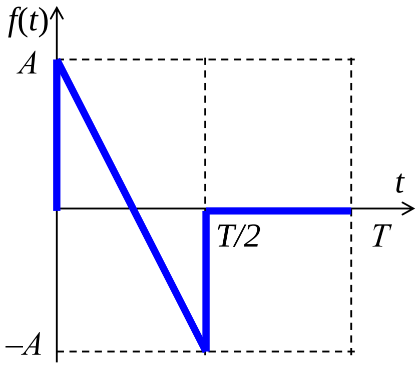
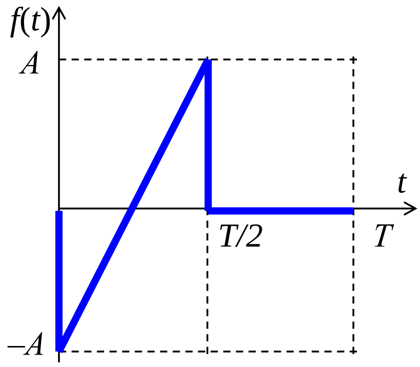
Работа выполняется на IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание; порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста работы программы приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит раскрывающийся список для выбора закона периодического негармонического движения, счетчик для изменения количества включенных в ряд Фурье гармоник, а также вспомогательные кнопки и переключатель, позволяющие регулировать процесс построения графиков и выбора закона периодического движения.

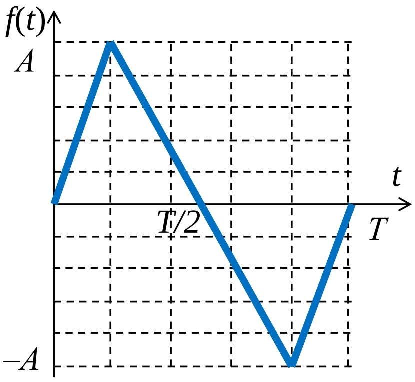
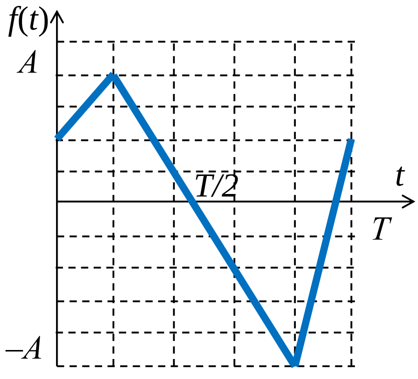
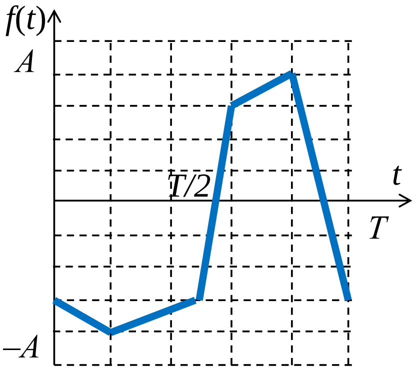
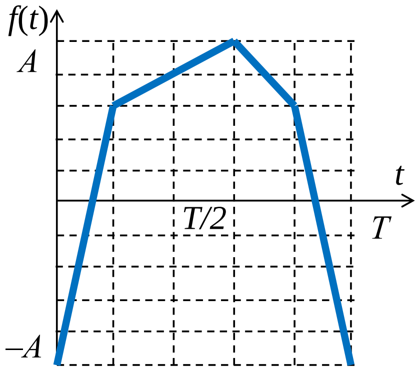
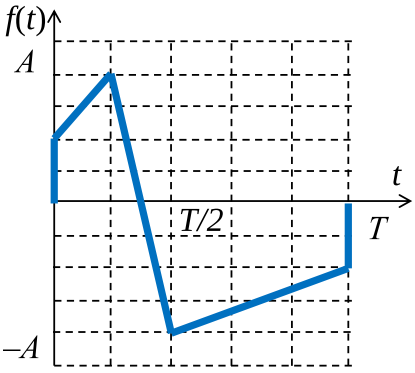
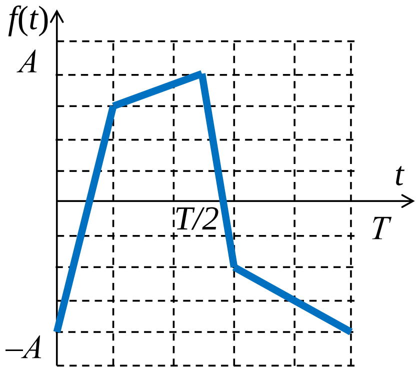
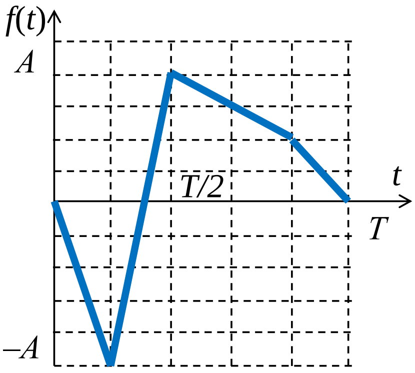
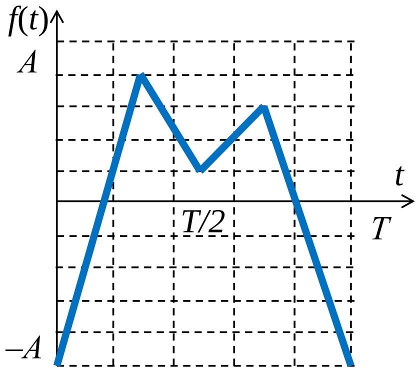
ВАРИАНТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

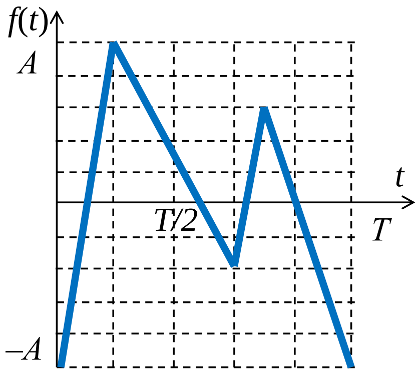
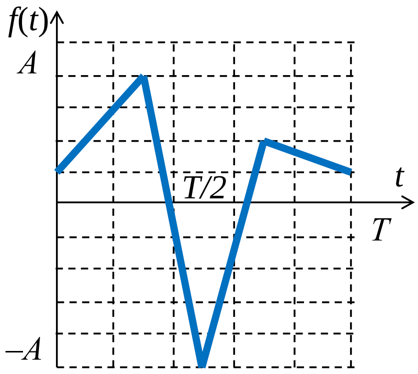
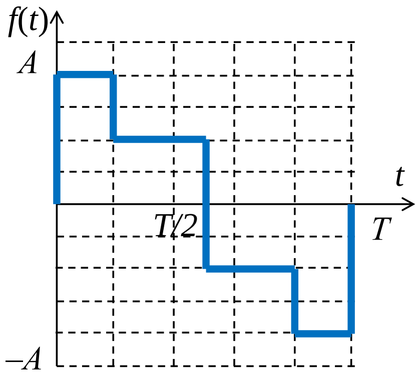
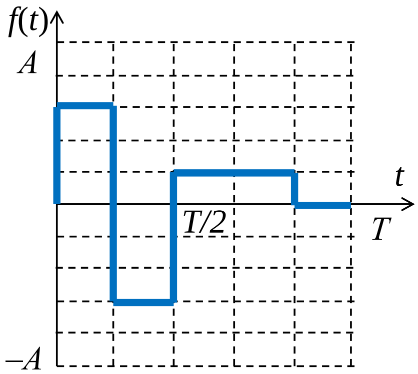
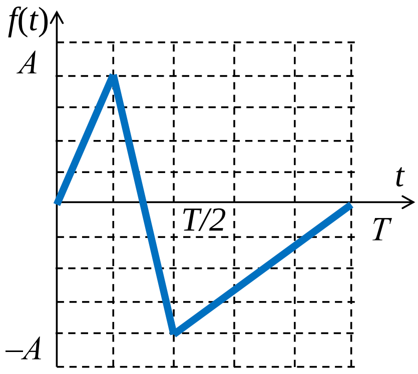
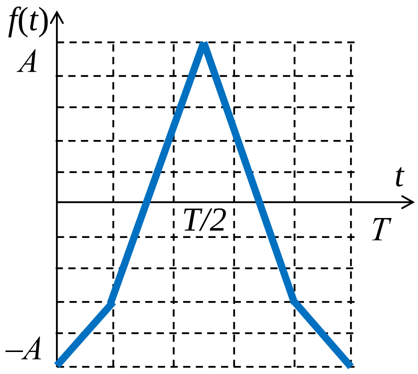
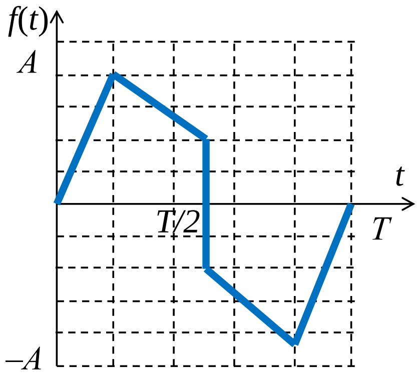
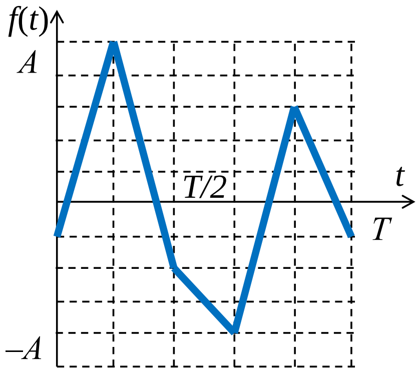
Стандартные законы негармонического движения

<table>
<tr><th>№</th><th>Закон движения</th><th>№</th><th>Закон движения</th></tr>
<tr><td>Вариант 1</td><td>Прямоугольник (1)

</td><td>Вариант 2</td><td>Прямоугольник (2)

</td></tr>
<tr><td>Вариант 3</td><td>Прямоугольный треугольник (1)

</td><td>Вариант 4</td><td>Прямоугольный треугольник (2)

</td></tr>
<tr><td>Вариант 5</td><td>Треугольник (3)

</td><td>Вариант 6</td><td>Треугольник (4)

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>№</th><th>Закон движения</th><th>№</th><th>Закон движения</th></tr>
<tr><td>Вариант 7</td><td>Равнобедренный треугольник

</td><td>Вариант 8</td><td>Равнобедренная трапеция

</td></tr>
<tr><td>Вариант 9</td><td>Прямоугольная трапеция (1)

</td><td>Вариант 10</td><td>Прямоугольная трапеция (2)

</td></tr>
<tr><td>Вариант 11</td><td>Импульс (1)

</td><td>Вариант 12</td><td>Импульс (2)

</td></tr>
</table>

Дополнительные законы негармонического движения

№	Закон движения	№	Закон движения
Вариант 1		**Вариант 2**	
Вариант 3		**Вариант 4**	
Вариант 5		**Вариант 6**	
Вариант 7		**Вариант 8**	

№	Закон движения	№	Закон движения
Вариант 9		**Вариант 10**	
Вариант 11		**Вариант 12**	
Вариант 13		**Вариант 14**	
Вариант 15		**Вариант 16**	

4. Порядок выполнения работы

4.1. Краткое описание хода работы

ЭТАП 1. Изучение негармонического движения стандартной формы.

1. Выберите вид негармонического движения (по указанию преподавателя).

2. Установите минимальное количество складываемых колебаний Фурье-разложения.

3. Постройте график координаты тела.

4. Наблюдайте за движением тел. Можно ли считать, что Фурье-разложение совпадает с изучаемым движением?

5. Если совпадения нет, увеличьте количество складываемых колебаний Фурье-разложения. Повторите опыт, начиная с пункта 3.

6. Повторяйте опыт, пока Фурье-разложение не совпадет с изучаемым движением.

7. Вычислите коэффициенты Фурье для изучаемого негармонического периодического движения.

8. Постройте спектр Фурье-разложения.

9. Определите погрешность полученного Фурье разложения.

ЭТАП 2. Изучение негармонического движения нестандартной формы.

10. Постройте произвольной формы закон негармонического движения путем задания нескольких точек (узлов), соединенных прямыми линиями.

11. Повторите опыты для нового закона периодического движения (пункты 2–9).

12. Соедините тот же набор узлов плавными линиями.

13. Повторите опыты для нового закона периодического движения (пункты 2–6).

14. Сделайте вывод.

4.2. Подробное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

ЭТАП 1. Изучение негармонического движения стандартной формы.

В работе имеется раскрывающийся список «Закон периодического движения», в котором представлены несколько движений стандартной формы: движение прямоугольной формы, несколько движений треугольной формы, а также движение трапециевидной формы. Пункт «Другой» данного списка позволяет перейти в режим конструирования произвольной формы закона периодического движения. Данный пункт списка используется на втором этапе работы.

1. С помощью раскрывающегося списка ***«Закон периодического движения»*** выберите один из стандартных видов движения (по указанию преподавателя). Под списком автоматически будет изображен график выбранного закона движения на одном периоде движения. Координата изображается в единицах амплитуды A, время – в единицах периода T. Эти значения необходимы для вычисления теоретических значений коэффициентов Фурье-разложения.

2. С помощью счетчика ***«Количество колебаний n»*** оставьте в Фурье-разложении одну гармонику.

3. Постройте график координаты тела.

Для этого нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Начнется движение обеих машинок. Одновременно строятся графики суммы n колебаний от времени $x = x(t)$ и графики последних складываемых колебаний $\sin(n\omega t)$ и $\cos(n\omega t)$ – старшей гармоники. Движение происходит в течение фиксированного времени. Раскрывающийся список «Закон периодического движения» и счетчик «Количество колебаний» станут недоступными. Когда время эксперимента закончится, оба тела автоматически остановятся.

Если в процессе эксперимента Вы вспомнили, что неправильно установили какую-либо величину (выбрали закон движения или количество гармоник), нажмите кнопку ***«Остановить эксперимент»***. Машинки остановятся. Раскрывающийся список «Закон периодического движения» и счетчик «Количество колебаний» станут доступными. После этого можно сделать необходимые изменения и повторить опыт.

4. В процессе выполнения эксперимента наблюдайте за движением машинок. Можно ли считать, что Фурье-разложение совпадает с изучаемым движением?

Если движения обоих экспериментальных тел (машинок) синхронны, можно считать, что Фурье-разложение хорошо заменяет изучаемое негармоническое периодическое движение. Необходимо добиться, чтобы машинки двигались синхронно в течение всего эксперимента.

5. Если совпадения нет, с помощью счетчика ***«Количество колебаний n»*** увеличьте количество складываемых колебаний Фурье-разложения. Повторите опыт, начиная с пункта 3.

При изменении количества гармоник рядом с графиками старших гармоник $\sin(n\omega t)$ и $\cos(n\omega t)$ автоматически указывается, является ли соответствующий коэффициент ряда Фурье отличным от нуля или нет.

Увеличьте значение счетчика ***«Количество колебаний»*** на единицу. Если оба коэффициента при добавленной таким образом гармонике оказались равны нулю, увеличьте значение счетчика, пока хотя бы один коэффициент при старшей гармонике не окажется отличным от нуля. Нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***.

Не рекомендуется строить на одном графике больше 2–3 зависимостей разложения Фурье. Для того чтобы очистить график нажмите кнопку ***«Очистить график»***.

6. Повторяйте опыт, пока Фурье-разложение не совпадет с изучаемым движением.

Начиная с некоторого количества складываемых колебаний, движение, моделируемое конечным рядом Фурье, и изучаемое движение начнут совпадать. Любое дальнейшее увеличение количества складываемых гармоник не будет приводить к изменению характера движения, так как ряд Фурье сходится. Необходимо найти наименьшее количество $N_{\min}$ складываемых колебаний, необходимое для того, чтобы в масштабе, представленном на экране, конечный ряд Фурье точно моделировал изучаемое движение.

Убедитесь, что найденное Вами количество $N_{\min}$ складываемых колебаний является наименьшим. Для этого уменьшите (относительно $N_{\min}$) количество складываемых гармоник на единицу (если оба коэффициента при получившейся старшей гармонике равны нулю, уменьшайте количество складываемых гармоник, пока хотя бы один коэффициент не станет отличным от нуля). Нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Если Фурье-разложение и изучаемое движение начинают различаться, вернитесь к выбранному ранее количеству гармоник $N_{\min}$ с ненулевыми коэффициентами при старшей гармонике. Вновь выполните эксперимент. Если движения не различаются, еще раз увеличьте количество складываемых гармоник до ближайшей гармоники, хотя бы один коэффициент которой отличен от нуля. Вновь выполните эксперимент. Если движения по-прежнему не различаются, тогда выбранное количество гармоник $N_{\min}$ следует считать наименьшим.

НАЙДЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ.

Постройте на одном графике три эти случая: 1) Фурье разложение с наименьшим количеством гармони $N_{\min}$; 2) Фурье-разложение с ближайшим меньшим наименьшего количеством гармоник (с отличным от нуля хотя бы одним коэффициентом при старшей гармонике); 3) Фурье-разложение с ближайшим б*о*льшим наименьшего количеством гармоник (с отличным от нуля хотя бы одним коэффициентом при старшей гармонике). Зарисуйте или сохраните в виде bmp- или jpg-файла полученный график. Чтобы сохранить график, нажмите кнопку ***«Сохранить график»***.

Вновь задайте найденное минимальное количество гармоник $N_{\min}$. Запишите, какой знак имеют коэффициенты a_n и b_n для старшей гармоники ($a_n = 0$, < 0 или > 0; $b_n = 0$, < 0 или > 0). Уменьшите количество гармоник на единицу и вновь запишите знаки обоих коэффициентов. Повторяйте исследования, пока сочетание знаков коэффициентов не начнет повторяться. Определите закономерность этого повторения, какие гармоники имеют одинаковые знаки коэффициентов (например, с четными номерами и с нечетными).

7. Вычислите коэффициенты Фурье для изучаемого негармонического периодического движения.

Изучаемый закон периодического движения является кусочно-непрерывной функцией, состоящей из конечного числа прямолинейных отрезков.

Для того, что вычислить коэффициенты Фурье необходимо:

1) записать аналитический вид изучаемой функции на каждом отрезке, где функция является линейной в виде: $f(t) = d(t - t_1) + c$ на отрезке $[t_1, t_2]$ (границы отрезка определяйте из графика закона периодического движения); константы c, d для линейной на отрезке $[t_1, t_2]$ функции $f(t)$ выражаются через значения этой функции на концах отрезка: $c = f(t_1)$, $d = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$;

2) вычислить на каждом отрезке $[t_1, t_2]$ интегралы вида

$$\tilde{a}_0 = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} (d(t-t_1)+c)dt\,;$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} (d(t-t_1)+c)\cos(n\omega t)\,dt\,;$$

$$\tilde{b}_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} (d(t-t_1)+c)\sin(n\omega t)\,dt\,;$$

3) вычислить коэффициенты Фурье, как сумму интегралов на всех отрезках:

$$a_0 = \sum \tilde{a}_0, \quad a_n = \sum \tilde{a}_n, \quad b_n = \sum \tilde{b}_n.$$

Для упрощения вычислений используйте стандартные интегралы, приведенные в справочниках или приложении.

8. Постройте спектр полученного Фурье-разложения.

Для этого вычислите числовые значения коэффициентов Фурье a_n и b_n и амплитуды $\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ для первых 10–15 гармоник спектра периодического движения.

РАССЧИТАННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ.

Проверьте, соответствуют ли знаки рассчитанных коэффициентов a_n и b_n записанным ранее (в пункте 6) закономерностям.

Постройте спектр: график зависимости амплитуды α_n гармоники от частоты $n\omega$ – над каждым значением частоты ω, 2ω, 3ω… нарисуйте прямоугольник высотой α_n.

9. Для определения погрешности полученного Фурье-разложения сначала проанализируйте аналитический вид (формулы) коэффициентов Фурье a_n и b_n , полученные в пункте 7.

Определите наименьшую степень m числа n, которая входит в формулы для коэффициентов Фурье a_n, b_n и константу C при этой степени $1/n^m$. Если a_n и b_n имеют одинаковую степень m, то для определения константы C необходимо рассматривать сумму коэффициентов. Значение константы C берется по модулю.

Конечный ряд Фурье приближенно заменяет изучаемое движение. Погрешность такой замены равна

$$\varepsilon < \frac{C}{(m-1)(N+1)^{m-1}} \quad \text{при } m > 1$$

$$\text{или} \quad \varepsilon < C\left(1 - \frac{1}{3\pi}\ln\left(\frac{3\pi}{5}(N+1)\right)\right) \text{ при } m = 1.$$

ЭТАП 2. Изучение негармонического движения нестандартной формы.

В работе имеется раскрывающийся список ***«Закон периодического движения»***, в котором представлены несколько движений стандартной формы, а также пункт ***«Другой»***. Выберите пункт ***«Другой»*** данного списка и перейдите в режим конструирования произвольной формы закона периодического движения.

Закон периодического движения задается путем расположения нескольких точек (узлов) на графике.

10. Постройте произвольной формы закон негармонического движения путем задания нескольких точек (узлов), соединенных прямыми линиями. Для этого установите переключатель из группы ***«Соединять…»*** в положение ***«Прямыми»***.

УЗЛОВЫЕ ТОЧКИ можно располагать ТОЛЬКО В ТОЧКАХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЛИНИЙ КООРДИНАТНОЙ СЕТКИ.

На графике закона периодического движения узлы изображаются синими квадратиками.

Для того чтобы закон движения считался заданным, необходимо задать хотя бы два узла: в момент времени $t = 0$ и в момент времени $t = T$. Конструируемый закон периодического движения должен получиться непрерывным по времени при его многократном повторении, поэтому нужно ОБЯЗАТЕЛЬНО один из узлов расположить в точке, соответствующей моменту времени $t = 0$, и один из узлов – в точке, соответствующей моменту времени $t = T$. Иначе закон движения получится разрывным во времени.

Чтобы **ЗАДАТЬ НОВЫЙ УЗЕЛ** необходимо выполнить следующие действия:

1) подведите курсор мыши к одной из точек пересечения линий координатной сетки графика закона периодического движения (курсор мыши изменит внешний вид). Выполните ***однократный щелчок мыши***. В указанном месте появится белый квадрат.

2) Если в указанном месте ранее не было узла, кнопка ***«Добавить»*** станет активной.

3) Нажмите кнопку ***«Добавить»***.

4) Квадрат, изображающий узел, станет синим и автоматически соединится с другими узлами (если они есть) прямыми линиями.

Чтобы **УДАЛИТЬ УЗЕЛ** необходимо выполнить следующие действия:

1) подведите курсор мыши к узлу, который хотите удалить, (курсор мыши изменит внешний вид). Выполните ***однократный щелчок мыши***. В указанном месте появится белый квадрат.

2) Если в указанном месте есть узел, кнопка ***«Удалить»*** станет активной.

3) Нажмите кнопку ***«Удалить»***.

4) Квадрат, изображающий узел, исчезнет. Остальные узлы (если они есть) автоматически соединятся прямыми линиями.

Чтобы **ИЗМЕНИТЬ ПОЛОЖЕНИЕ УЗЛА** необходимо выполнить следующие действия:

1) подведите курсор мыши к узлу, положение которого хотите изменить, (курсор мыши изменит внешний вид). Выполните ***однократный щелчок мыши***. В указанном месте появится белый квадрат.

2) подведите манипулятор мышь к одной из точек пересечения линий координатной сетки графика закона периодического движения, куда хотите переместить выбранный узел, (курсор мыши изменит внешний вид). Выполните ***однократный щелчок мыши***.

3) Узел переместится на новое место. Квадрат, изображающий узел, вновь станет синим. Все узлы автоматически соединятся прямыми линиями заново.

Воспроизведите один из законов периодического движения, предложенных в методических указаниях, или придумайте свой (по указанию преподавателя). Зарисуйте сконструированный Вами закон периодического движения.

11. Повторите опыты для нового закона периодического движения (пункты 2–9): подберите минимальное количество складываемых колебаний (гармоник), при котором ряд Фурье не отличается от изучаемого закона движения; вычислите коэффициенты a_n, b_n ряда Фурье; постройте спектр и определите погрешность получившегося представления.

12. Соедините тот же набор узлов плавными линиями. Для этого установите переключатель из группы ***«Соединять…»*** в положение ***«Плавно»***.

Положения узловых точек, изображенных на графике закона периодического движения синими квадратиками, не изменятся. Соединение узловых точек будет осуществляться методом сплайн-интерполяции. То есть закон периодического движения будет представлять собой гладкую кусочно-непрерывную функцию, составленную из полиномов третьей степени и имеющую непрерывную первую производную.

Рекомендации. Если какой-нибудь участок криволинейного графика закона движения выходит за пределы области построения графика закона криволинейного движения, ограниченной линиями координатной сетки, необходимо изменить положения узлов так, чтобы весь график располагался внутри заданной области. После этого следует вернуться к этапу изучения кусочно-прямолинейной произвольной формы закона движения (пункт 11), а затем продолжить изучение криволинейной формы закона движения.

Зарисуйте полученный закон периодического движения.

13. Повторите опыты для нового закона периодического движения (пункты 2–6): подберите минимальное количество складываемых колебаний (гармоник), при котором ряд Фурье не отличается от изучаемого закона движения.

Сравните количество гармоник, необходимое для представления кусочно-прямолинейного закона движения, и количество гармоник, необходимое для представления криволинейного закона движения.

Зависит ли минимальное количество гармоник от способа соединения узлов?

Сравните коэффициенты a_n и b_n Фурье-разложения для одного и того же расположения узлов, соединенного прямыми и соединенного кривыми: станут ли нулевые коэффициенты ненулевыми; изменятся ли знаки у ненулевых коэффициентов? Для этого задайте количество гармоник, подобранное для плавного соединения узлов. Поочередно переключая в группе ***«Соединять…»*** переключатель из положения ***«Плавно»*** в положение ***«Прямыми»*** и обратно, запишите, какой знак имеют коэффициенты для старшей гармонике в обоих случаях ($a_n = 0$, < 0 или > 0; $b_n = 0$, < 0 или > 0). Уменьшите количество гармоник и вновь запишите знаки обоих коэффициентов для прямолинейного и криволинейного (плавного) соединения узлов. Повторяйте исследования, пока сочетание знаков коэффициентов не начнет повторяться для обоих случаев.

14. Сделайте вывод.

Является ли ряд Фурье сходящимся?

Можно ли подобрать конечное количество гармоник ряда Фурье, позволяющее точно заменить изучаемый кусочно-непрерывный закон движения конечным рядом Фурье?

Одинаково ли количество гармоник, необходимое для замены изучаемого движения конечным рядом Фурье, для движений разного вида? Чем это можно объяснить?

Таблица

<table>
<tr><td colspan="12">Закон периодического движения</td><td colspan="12">Ряд Фурье</td></tr>
<tr><td colspan="12">график</td><td colspan="12">график</td></tr>
<tr><td colspan="12">Амплитуда A, см</td><td colspan="12"></td></tr>
<tr><td colspan="12">Период T, с</td><td colspan="12"></td></tr>
<tr><td colspan="12">Количество гармоник $N_{\min}$</td><td colspan="12"></td></tr>
<tr><td colspan="24">Знаки коэффициентов Фурье</td></tr>
<tr><td colspan="8">Номер гармоники</td><td colspan="8">Знак коэффициента a_n</td><td colspan="8">Знак коэффициента b_n</td></tr>
<tr><td colspan="8">$N_{\min}$</td><td colspan="8"></td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="8">…</td><td colspan="8"></td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="8">…</td><td colspan="8"></td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="12">Вид кусочно-непрерывной
функции $f(t)$</td><td colspan="12"></td></tr>
<tr><td colspan="24">Коэффициенты Фурье</td></tr>
<tr><td colspan="24">a_0 =</td></tr>
<tr><td colspan="24">a_n =</td></tr>
<tr><td colspan="24">b_n =</td></tr>
<tr><td colspan="24">Значения коэффициентов Фурье и амплитуд гармоник</td></tr>
<tr><td colspan="6">Номер гармоники</td><td colspan="6">Коэффициент a_n</td><td colspan="6">Коэффициент b_n</td><td colspan="6">Амплитуда гармоники</td></tr>
<tr><td colspan="6">1</td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6">2</td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6">…</td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6">…</td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="24">Погрешность</td></tr>
<tr><td colspan="12">Младшая степень m
в коэффициентах Фурье</td><td colspan="12">m =</td></tr>
<tr><td colspan="12">Константа C при младшей степени
$1/n$ в коэффициентах a_n, b_n</td><td colspan="12">C =</td></tr>
<tr><td colspan="12">Погрешность ε</td><td colspan="12"></td></tr>
</table>

5. Контрольные вопросы

1. Какое движение называется периодическим?
2. Какое движение называется негармоническим?
3. Что такое Фурье-анализ?

4. Когда ряд Фурье является конечным?
5. Как оценить погрешность замены бесконечного ряда Фурье конечным?
6. Опишите порядок выполнения работы.

При создании данной работы авторы опирались на материалы моделирующей лабораторной работы «Гармонический анализ», написанной К.Б. Коротченко, Ю.А. Сивовым в 1996–98 гг.

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодК–06 для студентов всех специальностей

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати __.__.2022. Формат 60х84/16. Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл.печ.л. ____. Уч.-изд.л. ____.
Заказ . Тираж 50 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru