

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
Отделение естественных наук ШБИП

---

УТВЕРЖДАЮ  
Директор ШБИП  
\_\_\_\_\_ Д.В. Чайковский  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

**О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко**

## **ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ**

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических  
процессов и явлений на компьютере  
с помощью лабораторной работы № МодК–03  
для студентов всех специальностей

Издательство  
Томского политехнического университета  
2022

УДК 53. 076

**Ревинская О.Г.**

Вынужденные колебания: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодК–03 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – 16 с.

**УДК 53.076**

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию  
методическим семинаром отделения естественных наук ШБИП

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Зав. ОЕН ШБИП  
проф., доктор физ.-мат. наук

В.П. Кривобоков

Председатель учебно-методической комиссии

А.В. Макиенко

*Рецензент*

доктор тех. наук, профессор Томского политехнического университета  
*В.А. Москалев*

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2002–2022

© Кравченко Н.С., Ревинская О.Г., 2002–2022

© Оформление. Издательство Томского  
политехнического университета, 2022

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № МодК–03 ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

## *Вынужденные колебания*

*Цель работы:* изучение особенностей вынужденного колебательного движения. Построение резонансной кривой. Определение частоты резонанса.

### 1. Теоретическое содержание

#### 1.1. Вынужденные механические колебания

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии, возникающие за счет сопротивления среды. Такая компенсация может быть обеспечена введением какого-либо периодически действующего фактора. В случае механических колебаний роль периодически действующего фактора играет *внешняя вынуждающая сила*  $F(t)$ . Рассмотрим, как изменится движение пружинного маятника массой  $m$  и коэффициентом жесткости пружины  $k$  (под действием силы упругости  $F_{\text{упр}}$ ) в среде с коэффициентом сопротивления  $b$  (сила сопротивления среды  $F_{\text{ср}}$  пропорциональна скорости) под воздействием внешней вынуждающей силы  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ , изменяющейся по гармоническому закону с частотой  $\Omega$  и амплитудой  $F_0$ . Согласно второму закону Ньютона уравнение движения пружинного маятника примет вид

$$ma = F_{\text{ср}} + F_{\text{упр}} + F(t).$$

Тогда

$$ma = -bv - kx + F(t)$$

$$\text{или } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx + F_0 \cos \Omega t.$$

Полученное уравнение легко свести к неоднородному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t.$$

Из математического анализа известно, что решение уравнений такого вида представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Однородное

уравнение  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$  в зависимости от начальных условий имеет общее решение вида

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \text{ или } x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

и описывает затухающие гармонические колебания пружинного маятника с начальной амплитудой  $A_0$ , начальной фазой  $\varphi_0$ , коэффициентом затухания  $\beta = \frac{b}{2m}$  и частотой  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – частота собственных (незатухающих) колебаний того же маятника.

Чтобы получить частное решение неоднородного уравнения удобно преобразовать вынуждающую силу с помощью формулы Эйлера  $\cos \Omega t = \frac{1}{2}(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$ . Тогда неоднородное дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{2m} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}).$$

Из математического анализа известно, что частное решение уравнения такого типа следует искать в виде

$$x = C_1 e^{i\lambda t} + C_2 e^{-i\lambda t},$$

где  $C_1, C_2, \lambda$  – искомые константы. Вычислив производные и приведя подобные, получим

$$\begin{aligned} (-\lambda^2 + 2i\beta\lambda + \omega_0^2)C_1 e^{i\lambda t} + (-\lambda^2 - 2i\beta\lambda + \omega_0^2)C_2 e^{-i\lambda t} = \\ = \frac{F_0}{2m} e^{i\Omega t} + \frac{F_0}{2m} e^{-i\Omega t}. \end{aligned}$$

Данное уравнение имеет решение только, если  $\lambda = \Omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\beta\Omega)C_1 &= \frac{F_0}{2m}; \\ (\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\beta\Omega)C_2 &= \frac{F_0}{2m}. \end{aligned}$$

В результате получим частное решение в виде

$$\begin{aligned} x = \frac{F_0}{2m} \frac{1}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2)} \times \\ \times ((\omega_0^2 - \Omega^2)(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) + 2i\beta\Omega(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t})). \end{aligned}$$

Применение формул Эйлера  $(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) = 2 \cos \Omega t$  и  $(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) = 2i \sin \Omega t$  позволяет записать частное решение следующим образом

$$x = \frac{F_0}{m} \frac{1}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2)} ((\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Omega t - 2\beta\Omega \sin \Omega t)$$

$$\text{или } x = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \varphi),$$

где начальная фаза  $\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{2\beta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$ .

Полученное частное решение дифференциального уравнения описывает гармоническое колебания с частотой вынуждающей силы с постоянной амплитудой, но смещенное по сравнению с силой на фазу  $\varphi$ .

В результате полное решение уравнения вынужденных колебаний в зависимости от начальных условий примет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + A \cos(\Omega t + \varphi)$$

или  $x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + A \cos(\Omega t + \varphi),$

где амплитуда  $A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$

Из полученного решения видно, что вынужденные колебания представляют собой сумму двух колебательных движений: затухающих колебаний с частотой  $\omega$ , амплитуда которых убывает по экспоненциальному закону, и незатухающих колебаний с постоянной амплитудой  $A$  и частотой вынуждающей силы  $\Omega$ . Совместный вклад этих двух колебательных движений и описывает сложное поведение пружинного маятника под действием внешней периодической силы, которое условно можно разбить на ряд этапов (рис. 1).

На первом этапе, когда затухание свободных колебаний является незначительным, наблюдается сложение двух гармонических колебаний. Продолжительность первого этапа зависит от величины затухания  $\beta$  в системе. Если коэффициент затухания достаточно велик, то данный этап может оказаться незаметным для наблюдателя.

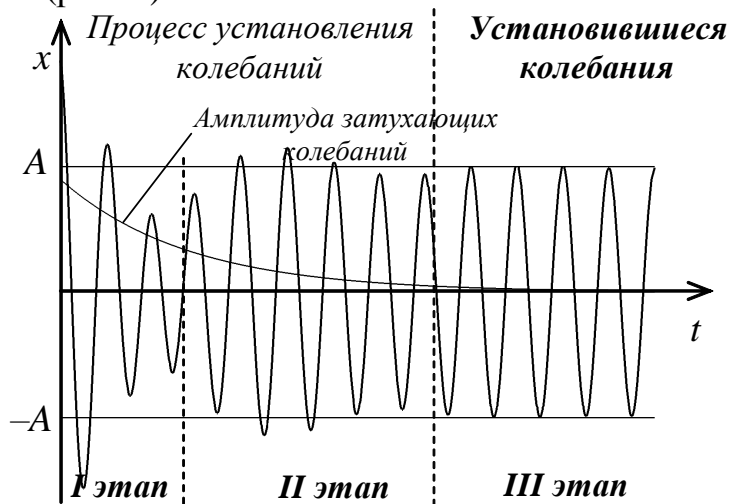


Рис. 1

Постепенно амплитуда свободных колебаний уменьшается и начинает оказывать меньшее влияние на движение маятника, в то время как амплитуда колебаний с частотой вынуждающей силы остается по-

стоянной (второй этап). На первых двух этапах амплитуда колебаний маятника может меняться.

Наконец, начиная с некоторого момента времени, амплитуда затухающих колебаний становится много меньше амплитуды колебаний с частотой вынуждающей силы  $A_0 e^{-\beta t} \ll A$  (третий этап). То есть затухающие колебания перестают оказывать влияние на колебания маятника. Маятник начинает совершать гармонические колебания с постоянной амплитудой и частотой вынуждающей силы. Такие колебания называют *установившимися*. Первые два этапа называют периодом установления колебаний. Длительность этого периода зависит от коэффициента затухания, а также от отношения амплитуды свободных колебаний  $A_0$  и амплитуды установившихся колебаний  $A$ . Чем больше коэффициент затухания, тем быстрее наступает этап установившихся колебаний. Чем больше амплитуда свободных колебаний  $A_0$  по сравнению с амплитудой установившихся колебаний  $A$ , тем процесс установления колебаний продолжительнее.

## 1.2. Явление резонанса

Амплитуда установившихся колебаний описывается выражением

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

и зависит не только от амплитуды вынуждающей силы  $F_0$ , а также зависит от частоты собственных колебаний  $\omega_0$  маятника, частоты вынуждающей силы  $\Omega$  и коэффициента затухания  $\beta$ . Зависимость амплитуды установившихся колебаний от частоты вынуждающей силы  $A = A(\Omega)$  имеет максимум (рис. 2).

Не трудно показать, что максимум амплитуды соответствует минимуму подкоренного выражения. Выполнив дифференцирование и приравняв производную к нулю, получим значение частоты вынуждающей силы  $\Omega_p$ , при которой амплитуда установившихся колебаний имеет максимум,

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

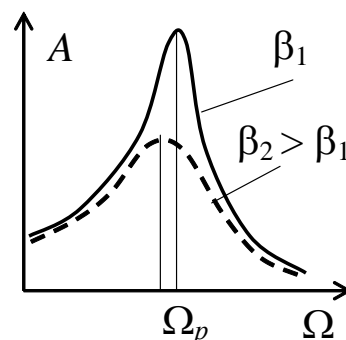


Рис. 2

Частота  $\Omega_p$  называется *резонансной частотой* или *частотой резонанса*. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных (установившихся) колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте  $\Omega_p$  называется *резонансом*. График зависимости амплитуды

вынужденных (установившихся) колебаний от частоты вынуждающей силы  $A = A(\Omega)$  называется *резонансной кривой*.

При малых значениях коэффициента затухания  $\beta \ll \omega_0$  резонансная частота незначительно отличается от частоты собственных колебаний  $\Omega_p \approx \omega_0$ . С увеличением коэффициента затухания  $\beta$  резонансная частота  $\Omega_p$  уменьшается. Максимальное значение амплитуды при этом тоже уменьшается. Максимум зависимости  $A = A(\Omega)$  становится более низким и широким.

В данной работе необходимо построить резонансные кривые для одного и того же маятника в двух средах с разными коэффициентами затухания. Для этого необходимо измерить амплитуду установившихся колебаний при различных значениях частоты вынуждающей силы.

### 1.3. Начальная фаза установившихся колебаний

На этапе установившихся колебаний движение происходит с постоянной амплитудой  $A$  и некоторой начальной фазой  $\varphi$

$$x = A \cos(\Omega t + \varphi).$$

Начальная фаза установившихся колебаний характеризует разность фаз между вынуждающей силой  $F(t)$  и установившимися колебаниями и зависит от собственной частоты колебаний  $\omega_0$ , коэффициента затухания  $\beta$  и частоты вынуждающей силы  $\Omega$

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{2\beta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

С ростом частоты вынуждающей силы  $\Omega$  начальная фаза  $\varphi$  установившихся колебаний убывает монотонно (рис. 3). Когда частота вынуждающей силы  $\Omega$  равна частоте собственных колебаний маятника  $\omega_0$ , фаза равна  $-\pi/2$ . А когда  $\Omega \gg \omega_0$ , фаза стремится к  $-\pi$ . Таким образом, начальная фаза установившихся колебаний всегда отрицательна, то есть установившиеся колебания всегда по фазе отстают от силы.

С увеличением коэффициента затухания  $\beta$  уменьшение фазы  $\varphi$  в зависимости от частоты вынуждающей силы  $\Omega$  становится более плавным. Однако, для любого коэффициента затухания начальная фаза установившихся колебаний равна  $-\pi/2$ , если  $\Omega = \omega_0$ .

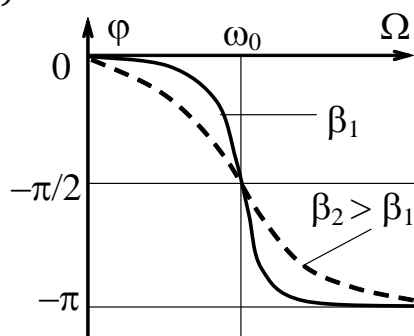


Рис. 3

В данной работе необходимо построить график зависимости разности фаз между установившимися колебаниями и вынуждающей силой от частоты вынуждающей силы для одного и того же маятника в двух средах с разными коэффициентами затухания. Для этого необходимо измерить амплитуду  $A$  установившихся колебаний и координату маятника  $x(t)$  в заданный момент времени (когда наблюдаются установившиеся колебания). Тогда фаза установившихся колебаний в момент времени  $t$

$$\Phi(t) = \Omega t + \varphi = \arccos\left(\frac{x(t)}{A}\right).$$

Фаза вынуждающей силы в тот же момент времени равна  $\Omega t$ . Тогда разность фаз между установившимися колебаниями и вынуждающей силой можно определить

$$\varphi = \Phi(t) - \Omega t = \arccos\left(\frac{x(t)}{A}\right) - \Omega t.$$

## 2. Модель экспериментальной установки

В данной работе с помощью средств компьютерной графики моделируется процесс вынужденных колебаний пружинного маятника по закону  $x = A_0 e^{-\beta t} \cos \omega t + A \cos(\Omega t + \varphi)$ . Движение происходит *под действием силы упругости, силы сопротивления среды и внешней вынуждающей силы*, изменяющейся по гармоническому закону  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ . Сила тяжести и все компенсирующие ее силы направлены перпендикулярно направлению движения маятника (перпендикулярно плоскости экрана) и не оказывают влияния на движение.

Вынуждающая сила в работе изображена в виде вертикального металлического стержня, который может двигаться в вертикальном направлении по гармоническому закону с различными частотами. Пружинный маятник присоединен к нижнему торцу стержня. Для того чтобы стержень мог колебаться с различными частотами без потери энергии, он должен приводиться в движение каким-либо механизмом. Устройство механизма может быть различным. Колебания стержня могут генерироваться, например, электромагнитом, равномерно вращающимся диском или каким-либо другим способом. Характер устройства, создающего вынуждающую силу, не оказывает влияния на процесс вынужденных колебаний пружинного маятника. Поэтому внешний вид устройства, заставляющего стержень двигаться гармонически, в работе не приводится (изучение устройства не является целью работы). Однако, устройство таково, что вынуждающая сила совершает гармонические колебания по закону  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$  в том же направлении, что и



пружинный маятник. Частота вынуждающей силы для разных опытов может быть выбрана из диапазона 0,6 до 2 рад/с и не может быть изменена во время проведения опыта. В каждом опыте частота вынуждающей силы не зависит от времени.

Для определения амплитуды установившихся колебаний в работе используется измерительный прибор, способный измерять координату с точностью до 1 мм. Изменять частоту вынуждающей силы можно в диапазоне от 0,6 до 2 рад/с с точностью 0,01 рад/с. При указанных условиях погрешность определения резонансной частоты в эксперименте не превышает 0,5–1,5 %, погрешность определения собственной частоты 1,5–4 %, коэффициента затухания – 5–9 %.

Работа выполняется на IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание работы; порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста работы программы приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит раскрывающийся список для выбора среды, ползунков для изменения частоты вынуждающей силы, панель инструментов с кнопками для выбора маятника, ползунков для измерения координаты маятника, а также вспомогательные кнопки и переключатель, позволяющие управлять экспериментом и регулировать процесс построения графика зависимости координаты тела от времени движения.

### Варианты выполнения работы

Вариант	Маятник	Среда 1	Среда 2
1	1	Бром (18°C)	Раствор спирта этилового 80%
2	2	Бром (18°C)	Раствор спирта этилового 80%
3	3	Бром (18°C)	Раствор спирта этилового 80%
4	4	Бром (18°C)	Раствор спирта этилового 80%
5	5	Бром (18°C)	Раствор спирта этилового 80%
6	6	Бром (18°C)	Раствор спирта этилового 80%
7	1	Бром (18°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
8	2	Бром (18°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
9	4	Бром (18°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
10	5	Бром (18°C)	Раствор сахара 20% (20°C)

<b>Вариант</b>	<b>Маятник</b>	<b>Среда 1</b>	<b>Среда 2</b>
11	1	Бром (18°C)	Изопропиловый спирт (30°C)
12	1	Бром (18°C)	Нитробензол (30°C)
13	1	Бутиловый спирт (60°C)	Раствор спирта этилового 80%
14	2	Бутиловый спирт (60°C)	Раствор спирта этилового 80%
15	4	Бутиловый спирт (60°C)	Раствор спирта этилового 80%
16	5	Бутиловый спирт (60°C)	Раствор спирта этилового 80%
17	1	Бутиловый спирт (60°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
18	2	Бутиловый спирт (60°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
19	4	Бутиловый спирт (60°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
20	1	Бутиловый спирт (60°C)	Изопропиловый спирт (30°C)
21	4	Бутиловый спирт (60°C)	Изопропиловый спирт (30°C)
22	1	Этанол (20°C)	Раствор спирта этилового 80%
23	2	Этанол (20°C)	Раствор спирта этилового 80%
24	4	Этанол (20°C)	Раствор спирта этилового 80%
25	5	Этанол (20°C)	Раствор спирта этилового 80%
26	1	Этанол (20°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
27	2	Этанол (20°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
28	4	Этанол (20°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
29	1	Децилбензол (80°C)	Раствор спирта этилового 80%
30	2	Децилбензол (80°C)	Раствор спирта этилового 80%
31	4	Децилбензол (80°C)	Раствор спирта этилового 80%
32	1	Децилбензол (80°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
33	4	Децилбензол (80°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
34	1	Анилин (70°C)	Раствор спирта этилового 80%
35	2	Анилин (70°C)	Раствор спирта этилового 80%
36	4	Анилин (70°C)	Раствор спирта этилового 80%
37	1	Анилин (70°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
38	4	Анилин (70°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
39	1	Гексилбензол (30°C)	Раствор спирта этилового 80%
40	4	Гексилбензол (30°C)	Раствор спирта этилового 80%
41	1	Гексилбензол (30°C)	Раствор сахара 20% (20°C)
42	1	Скипидар (20°C)	Раствор спирта этилового 80%

### 3. Порядок выполнения работы

#### 3.1. Краткое описание хода работы

1. Выберите маятник (по указанию преподавателя).
2. Выберите среду (по указанию преподавателя).
3. Установите минимальное значение частоты внешней силы.
4. Постройте график координаты тела от времени движения.
5. Измерьте амплитуду установившихся колебаний.
6. Измерьте координату маятника в момент времени, соответствующий окончанию эксперимента.
7. Установите новое значение частоты внешней силы.
8. Повторите опыт для 8 значений частоты внешней силы.
9. Определите частоту, при которой амплитуда установившихся колебаний имела наибольшее значение.
10. Вблизи полученного значения сделайте еще 5–6 измерений.
11. Постройте резонансную кривую.
12. Определите резонансную частоту.
13. Постройте график зависимости разности фаз установившихся колебаний и вынуждающей силы от частоты вынуждающей силы.
14. Определите частоту собственных колебаний.
15. Вычислите коэффициент затухания.
16. Вычислите теоретическое значение резонансной частоты.
17. Выберите другую среду (по указанию преподавателя).
18. Повторите опыт, начиная с пункта 2.
19. Сделайте выводы.

#### 3.2. Подробное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

1. С помощью кнопок на панели инструментов «*Маятник*» выберите маятник (по указанию преподавателя). Под кнопками автоматически указываются значения коэффициента жесткости пружины, масса и радиус тела для выбранного маятника. Эти значения необходимы для вычисления теоретических значений частоты собственных колебаний, коэффициента затухания и резонансной частоты.

2. Раскрывающийся список «*Среда*» содержит набор жидкостей, обладающих различными вязкостями: бром, анилин, скипидар, раствор сахара 20% и т.д. Выберите среду, в которой будет проходить эксперимент (по указанию преподавателя). Для выбранной среды под списком автоматически указывается коэффициент вязкости, который необходим для вычисления теоретического значения коэффициента затухания.

3. С помощью ползунка «*Частота*» установите минимальное значение частоты внешней силы. Точное значение установленной частоты указывается над ползунком в виде: «*Частота (рад/с): \*\*\**».

4. Постройте график координаты тела от времени движения. Для этого нажмите кнопку **«Начать эксперимент»**. Начнется движение маятника. Одновременно строится график координаты тела от времени. Движение происходит в течение фиксированного времени. Список сред, кнопки на панели инструментов «Маятник» и ползунок «Частота» во время эксперимента являются недоступными. Когда время эксперимента закончится, маятник автоматически остановится.

Если в процессе эксперимента Вы вспомнили, что неправильно установили какую-либо величину (выбрали среду, маятник или частоту вынуждающей силы), нажмите кнопку **«Остановить эксперимент»**. Маятник остановится. Список сред, кнопки на панели инструментов «Маятник» и ползунок «Частота» станут доступными. После этого можно сделать необходимые изменения и повторить опыт.

5. Измерьте амплитуду установившихся колебаний (величину максимумов и минимумов).

Первоначальное отклонение пружинного маятника от положения равновесия равно 3 см. В течение некоторого времени колебания маятника представляют собой сумму затухающих и вынужденных колебаний. В это время амплитуда и частота колебаний могут меняться. Когда собственные колебания станут много меньше вынужденных, наступает этап установившихся колебаний. При этом амплитуда и частота колебаний маятника постоянны.

На графике найдите 2–3 соседних максимума или минимума одинаковой высоты. Справа от построенного графика зависимости координаты тела от времени расположен ползунок **«Измерение координаты»**, с перемещением которого синхронизована измерительная линия. Перемещая ползунок **«Измерение координаты»**, совместите измерительную линию с выбранными максимумами или минимумами. Для более точного совмещения используйте скроллинг мыши. Значение координаты измерительной линии автоматически указывается рядом с графиком в виде: **«Координата  $x$ , см: \*.\*»**. Значение координаты следует брать по модулю, так как амплитуда – положительная величина.

**РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ.**

6. Измерьте координату маятника в момент времени, соответствующий окончанию эксперимента следующим образом.

Длительность эксперимента 50 секунд. С помощью ползунка **«Измерение координаты»** совместите измерительную линию с концом графика зависимости координаты тела от времени. Для более точного совмещения используйте скроллинг мыши. Значение координаты измерительной линии автоматически указывается рядом с графиком в виде: **«Координата  $x$ , см: \*.\*»**. По графику определите, к какому полупериоду движения (первому или второму) относится измеренная координата (в первом полупериоде координата убывает, во втором – возрастает).

**РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ.**

7. С помощью ползунка **«Частота»** установите новое значение частоты внешней силы на 0,2 рад/с больше предыдущего. Точное значение установленной частоты указывается над ползунком в виде: **«Частота (рад/с): \*\*\*»**. Повторите опыт, начиная с пункта 4.

8. Повторите опыт для 8 значений частоты внешней силы.

Частоту рекомендуется изменять равномерно на одинаковую величину так, чтобы использовать весь диапазон ползунка **«Частота»**.

Чтобы измерения были более точными, необходимо после построения каждого двух-трех кривых очищать график с помощью кнопки **«Очистить график»**.

9. Сравните измеренные значения амплитуды между собой. Определите, при какой частоте вынуждающей силы амплитуда имела наибольшее значение.

10. Вблизи полученного при выполнении предыдущего пункта значения частоты вынуждающей силы сделайте еще 5–6 измерений с шагом меньше предыдущего в 5 раз (0,04 рад/с). Выполните по 3 измерения справа и слева от предполагаемого максимума. Это позволит более точно определить резонансную частоту.

11. Постройте резонансную кривую: график зависимости амплитуды установившихся колебаний от частоты вынуждающей силы. Для этого нанесите экспериментальные точки на график и соедините их плавной линией.

12. Определите резонансную частоту: по графику зависимости амплитуды установившихся колебаний от частоты вынуждающей силы (резонансной кривой) определите частоту, при которой кривая имеет максимум.

13. Перед построением графика зависимости разности фаз установившихся колебаний и вынуждающей силы от частоты вынуждающей силы выполните следующие расчеты.

Для каждого эксперимента определите **период вынуждающей силы**  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ .

Для каждой измеренной координаты  $x(t)$ , соответствующей концу эксперимента, и амплитуды установившихся колебаний  $A$  вычислите **фазу установившихся колебаний**. Функция  $\arccos$  является однозначной только от 0 до  $\pi$  (первая половина периода). Поэтому если координата тела относилась к первому полупериоду, фазу установившихся колебаний вычисляют, как  $\Phi_1 = \arccos\left(\frac{x(t)}{A}\right)$ ; если координата тела относилась ко второму полупериоду, фаза равна  $\Phi_1 = 2\pi - \arccos\left(\frac{x(t)}{A}\right)$ . Эта фаза характеризует движение в последнем неполном периоде.

Учитывая негармонический характер движения маятника на начальном этапе (пока колебания не станут установившимися), невозможно по графику зависимости координаты тела  $x(t)$  от времени достоверно определить количество полных колебаний, совершенных вынуждающей силой с частотой  $\Omega$ , невозможно. Поэтому **количество  $n$  полных периодов** (полных колебаний) **от начала движения** до начала последнего неполного периода рассчитайте следующим образом:  $n = \frac{t - \frac{\Phi_1}{\Omega}}{T}$ , отбросив дробную часть ( $n$  – целое число).

Определите **полную фазу** колебаний маятника  $\Phi(t) = 2\pi n + \Phi_1$ . Определите **разность фаз** установившихся колебаний и вынуждающей силы  $\varphi = \Phi(t) - \Omega t$  ( $t = 50$  с). Рассчитайте разность фаз установившихся колебаний и вынуждающей силы в единицах  $\pi$ :  $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\pi}$ .

Вычислите разность фаз в единицах  $\pi$  для всех проведенных экспериментов. Нанесите полученные значения на график. Проведите плавную кривую.

14. Из графика зависимости разности фаз от частоты вынуждающей силы определите частоту собственных колебаний. Для этого проведите горизонтальную прямую через значение  $\tilde{\varphi} = -0,5$  (соответствующее значению  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ). Точка пересечения данной прямой с экспериментальной кривой соответствует частоте собственных колебаний.

15. Вычислите коэффициент затухания, который связывает резонансную частоту с частотой собственных колебаний  $\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ .

16. Вычислите теоретическое значение резонансной частоты.

По значениям коэффициента жесткости  $k$  пружины и массы  $m$  тела вычислите частоту собственных колебаний маятника  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

По значениям коэффициента вязкости  $\eta$  среды, массы  $m$  и радиуса  $R$  тела вычислите коэффициент затухания  $\beta = \frac{3\pi R}{m} \eta$ .

С помощью частоты  $\omega_0$  собственных колебаний и коэффициента затухания  $\beta$  определите резонансную частоту  $\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ .

Теоретическое и экспериментальные значения собственной частоты, коэффициента затухания и резонансной частоты должны иметь одинаковое количество значащих цифр.

17. В раскрывающемся списке «Среда» представлены жидкости, обладающие различной вязкостью. Выберите среду, коэффициент вязкости которой больше, чем в предыдущем эксперименте (по указанию преподавателя). Для выбранной среды под списком автоматически указывается коэффициент вязкости, который необходим для вычисления теоретического значения коэффициента затухания.

18. Повторите опыт, начиная с пункта 2.

Резонансную кривую для маятника в среде с другим коэффициентом вязкости постройте на том же графике, что и предыдущую.

График зависимости разности фаз установившихся колебаний и вынуждающей силы от частоты вынуждающей силы – на том же графике, что и график соответствующей зависимости для маятника в среде с меньшим коэффициентом вязкости.

19. Сделайте выводы.

Сравните теоретические и экспериментальные значения собственной частоты, коэффициента затухания и резонансной частоты. На сколько процентов отличается экспериментальное значение от теоретического (для каждой величины)?

Как изменяется резонансная частота с увеличением коэффициента вязкости среды?

Как изменяется максимально возможное значение амплитуды установившихся колебаний с увеличением коэффициента вязкости среды?

Как изменяется начальная фаза установившихся колебаний с изменением частоты вынуждающей силы? Как меняется характер этой зависимости с увеличением вязкости среды?

#### 4. Контрольные вопросы

1. Какие колебания называют вынужденными?
2. Каким уравнением описываются вынужденные колебания? Как получить решение этого уравнения?
3. Какие колебания называют установившимися и почему?
4. Что такое резонансная кривая и резонансная частота?
5. Опишите порядок выполнения работы.

Таблица

Среда														
Частота вынуждающей силы, рад/с														
Амплитуда установившихся колебаний, см														
Конечная координата тела, см														
Полупериод, в котором наблюдалась конечная координата														
Фаза колебаний в последнем периоде, рад														
Количество полных периодов от начала движения														
Полная фаза колебаний, рад														
Разность фаз в единицах $\pi$														

При создании данной работы авторы опирались на материалы моделирующей лабораторной работы «Вынужденные колебания», написанной К.Б. Коротченко, Ю.А. Сивовым в 1996–98 гг.

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна  
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

## **ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ**

Учебно-методическое пособие по изучению моделей  
физических процессов и явлений на компьютере  
с помощью лабораторной работы № МодК–03  
для студентов всех специальностей

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством  
предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати \_\_. \_\_. 2022. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».  
Печать RISO. Усл.печ.л. \_\_\_\_\_. Уч.-изд.л. \_\_\_\_\_.  
Заказ \_\_\_\_\_. Тираж 50 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет  
Система менеджмента качества  
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована  
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.  
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru