

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
Отделение естественных наук ШБИП

УТВЕРЖДАЮ
Директор ШБИП
_____ Д.В. Чайковский
«__» _____ 2022 г.

О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических
процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодЭ–04
для студентов всех специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
2022

УДК 53(076.5)
ББК 22.3я73
Р321

Р321 Ревинская О.Г.

Движение заряженной частицы в кулоновском поле: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодЭ–04 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – 27 с.

УДК 53(076.5)
ББК 22.3я73

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию
методическим семинаром отделения естественных наук ШБИП
«___» _____ 20___ г.

Зав. ОЕН ШБИП
проф., доктор физ.-мат. наук

В.П. Кривобоков

Председатель учебно-методической комиссии

А.В. Макиенко

Рецензент

доктор тех. наук, профессор Томского политехнического университета
В.А. Москалев

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2002–2022
© Ревинская О.Г., Кравченко Н.С., 2002–2022
© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2022

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № МодЭ–04 ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Движение заряженной частицы в кулоновском поле

Цель работы: изучение движения одной заряженной частицы в поле другой заряженной частицы. Выявление взаимосвязи геометрических параметров траектории налетающей частицы с ее полной механической энергией и моментом импульса.

1. Теоретическое содержание

Сила, действующая на материальную точку, называется *центральной*, если она зависит только от расстояния до источника поля (силы) и направлена вдоль прямой, соединяющей материальную точку с источником поля. В общем виде центральная сила может быть записана

$$\vec{F} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

где $F_r(r)$ – проекция силы на прямую, соединяющую материальную точку с источником поля. Одним из наиболее распространенных видов центральных сил является сила, проекция которой обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника поля до материальной точки

$$F_r(r) = \frac{\alpha}{r^2},$$

где α – константа, обусловленная природой взаимодействия.

Примером центральной силы такого вида может служить сила кулоновского взаимодействия двух частиц с зарядами q_1 и q_2 , когда одна из них выступает в качестве источника поля для другой

$$F_r(r) = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

1.1. Задача о движении двух тел

Взаимодействие двух заряженных тел относится в физике к задаче о движении двух тел, которую можно свести к задаче о движении одного тела приведенной массы в поле центральных сил.

Рассмотрим движение двух тел массами m_1 и m_2 , силы взаимодействия которых являются центральными. Согласно третьему закону Ньютона, если тело массой m_2 действует на тело массой m_1 с силой \vec{F} , то тело массой m_1 действует на тело массой m_2 с силой $(-\vec{F})$. Учитывая

общий вид центральной силы, запишем второй закон Ньютона (уравнения движения) для каждого из взаимодействующих тел:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}, m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{F},$$

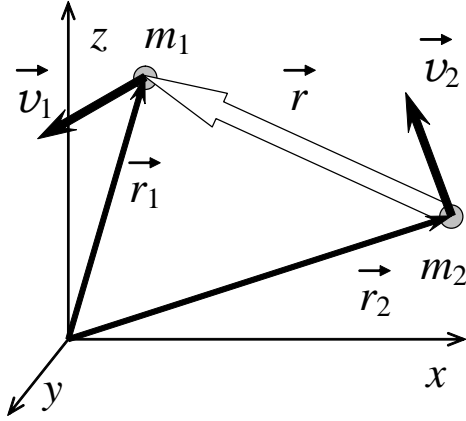


Рис. 1

где \vec{r}_1 и \vec{r}_2 – радиус-векторы взаимодействующих тел в произвольной декартовой системе координат (рис. 1), причем $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. В некоторый момент времени тело массой m_1 имеет скорость \vec{v}_1 , а тело массой m_2 имеет скорость \vec{v}_2 .

Рассматриваемая система является замкнутой, так как на нее не действуют другие силы, кроме центральной. Центральная сила

$$\vec{F} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

зависит только от относительного расположения тел \vec{r} . Поэтому на основе имеющейся системы двух уравнений получим кинематическое уравнение относительного движения тел. Для этого поделим каждое из уравнений Ньютона на массу и вычтем одно из другого

$$\frac{d^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F_r(r) \frac{\vec{r}}{r};$$

$$M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

где $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ называют **приведенной массой**.

Полученное уравнение можно интерпретировать как движение тела приведенной массы M в поле центральной силы \vec{F} : тело массой M расположено на расстоянии \vec{r} от источника поля и движется со скоростью \vec{v} , равной скорости относительного движения тел $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Таким образом, задача о движении двух тел в физике сводится к задаче о движении одного тела.

Рассмотрим, как можно интерпретировать полученное уравнение при различных соотношениях масс взаимодействующих тел. Если масса тела m_2 значительно превосходит массу тела m_1 ($m_2 \gg m_1$), то

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1 \Rightarrow M \approx m_1.$$

Полученное уравнение движения тела приведенной массы преобразуется в уравнение движения тела массой m_1 относительно тела массой m_2 (система отсчета связывается с телом массой m_2):

$$M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow m_1 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Аналогично можно показать, что если $m_1 \gg m_2$, то уравнение движения тела приведенной массы преобразуется в уравнение движения тела массой m_2 относительно тела массой m_1 (система отсчета связывается с телом массой m_1). То есть тело большей массы выступает в качестве источника поля, в котором движется тело меньшей массы. В этом случае тело, являющееся источником поля, называют **рассеивающим центром**, а более легкое тело – **налетающей частицей**.

1.2. Движение тела приведенной массы в поле центральной силы

В общем случае имеем движение тела приведенной массы M , описываемое кинематическим уравнением

$$M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

и характеризуемое радиус-вектором \vec{r} и скоростью \vec{v} . На тело приведенной массы действует единственная сила \vec{F} , являющаяся центральной. Проанализируем, каким будет движение тела приведенной массы в этих условиях.

1. **Движение** тела приведенной массы в поле центральной силы **является плоским**, так как момент этой силы равен нулю.

Действительно, момент силы определяется как векторное произведение силы \vec{F} на радиус-вектор в точке ее приложения \vec{r} . Для центральной силы момент силы равен

$$[\vec{r} \vec{F}] = F_r(r) \frac{1}{r} [\vec{r} \vec{r}] = 0.$$

2. Согласно второму закону Ньютона действие силы приводит к изменению импульса тела $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$. Поскольку движение является плоским, то

$$[\vec{r} \vec{F}] = 0 \Rightarrow [\vec{r} \frac{d\vec{P}}{dt}] = 0.$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \vec{P}] = [\vec{r} \frac{d\vec{P}}{dt}] + [\frac{d\vec{r}}{dt} \vec{P}] = [\vec{r} \frac{d\vec{P}}{dt}] = 0.$$

Векторное произведение импульса тела на его радиус-вектор называется **моментом импульса** \vec{L} . Из полученного выражения следует,

что $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ – *момент импульса сохраняется при движении тела в поле центральных сил* ($\vec{L} = [\vec{r} \vec{P}] = M[\vec{r} \vec{v}] = const$).

3. Других сил кроме центральной на тело приведенной массы не действует, поэтому система является замкнутой. Для нее *сохраняется и полная механическая энергия* системы E , включающая кинетическую $T = \frac{Mv^2}{2}$ и потенциальную U . Потенциальная энергия U равна работе по перемещению тела из данной точки пространства на бесконечность:

$$U = \int_r^{\infty} \vec{F} d\vec{r} = \int_r^{\infty} F_r(r) dr.$$

Если сила обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника поля $F_r(r) = \frac{\alpha}{r^2}$, то потенциальная энергия

$$U = \int_r^{\infty} F_r(r) dr = \int_r^{\infty} \frac{\alpha}{r^2} dr = \frac{\alpha}{r}.$$

Следовательно, полная энергия тела приведенной массы в поле центральной силы равна

$$E = \frac{Mv^2}{2} + \frac{\alpha}{r} = const.$$

1.3. Уравнение движения тела приведенной массы в полярной системе координат

Уравнение движения тела приведенной массы определяется действием только центральной силы, обладающей центральной симметрией

$$M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Следовательно, и движение тела обладает центральной симметрией. Кроме того, как было показано выше, движение тела является плоским ($\vec{L} = const$). Поэтому для

описания траектории движения тела удобнее перейти в полярную систему координат (рис. 2). Декартовы координаты x и y связаны с полярными координатами r и φ следующими соотношениями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

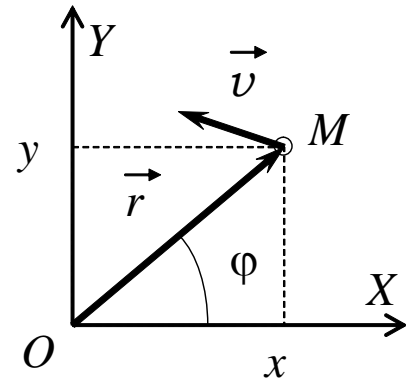


Рис. 2

Перепишем закон сохранения энергии и закон сохранения момента импульса в полярных координатах. Для этого сначала запишем компоненты скорости:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi.\end{aligned}$$

В декартовых координатах вектор \vec{r} при движении в плоскости XOY имел координаты $\vec{r} = (x, y, 0)$, а вектор скорости $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$. Момент импульса $\vec{L} = M[\vec{r} \vec{v}]$ в декартовых координатах записывается через определитель вида

$$\vec{L} = M[\vec{r} \vec{v}] = M \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = M(x\dot{y} - \dot{x}y)\hat{k}.$$

Вектор момента импульса направлен только вдоль орта \hat{k} , поэтому $L = M(x\dot{y} - \dot{x}y)$. Получим выражение для момента импульса в полярных координатах, подставив в это выражение соответствующие выражения в полярных координатах:

$$\begin{aligned}L &= M(r \cos \varphi \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi r \dot{\varphi} \cos \varphi - \\ &\quad - r \sin \varphi \dot{r} \cos \varphi + r \sin \varphi r \dot{\varphi} \sin \varphi) = \\ &= Mr^2 \dot{\varphi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = Mr^2 \dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Тогда закон сохранения момента импульса $L = Mr^2 \dot{\varphi} = const$.

Аналогично преобразуем кинетическую и потенциальную энергию. Кинетическая энергия:

$$\begin{aligned}T &= \frac{Mv^2}{2} = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \\ &= \frac{M}{2}(\dot{r}^2 \cos^2 \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad + \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi) \\ &= \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2).\end{aligned}$$

Из полученного выражения видно, что кинетическая энергия представляет собой совокупность радиального $\frac{M}{2}\dot{r}^2$ (вдоль радиус-вектора) и нормального движения $\frac{M}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{M}{2}r^2\omega^2$ (перпендикулярно радиус-вектору), где $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость.

$$\text{Потенциальная энергия } U = \frac{\alpha}{r}.$$

Тогда закон сохранения механической энергии:

$$E = \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r} = const.$$

Из выражения для момента импульса выразим угловую скорость $\dot{\phi}$ и подставим в выражение для закона сохранения энергии:

$$\dot{\phi} = \frac{L}{Mr^2} \Rightarrow E = \frac{M}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{M^2 r^2} \right) + \frac{\alpha}{r} = \text{const} \text{ или}$$

$$E = \frac{M}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2Mr^2} + \frac{\alpha}{r} = \text{const}.$$

Продифференцируем полученное выражение по времени

$$\frac{M}{2} 2\dot{r} \ddot{r} - \frac{L^2}{Mr^3} \dot{r} - \frac{\alpha}{r^2} \dot{r} = 0 \text{ или}$$

$$M\ddot{r} = \frac{L^2}{Mr^3} + \frac{\alpha}{r^2}.$$

Полученное выражение представляет собой **второй закон Ньютона в полярной системе координат**: тело приобретает радиальное ускорение \ddot{r} вследствие действия двух сил: центробежной ($\frac{L^2}{Mr^3}$) и центральной ($\frac{\alpha}{r^2}$). Наличие центробежной силы говорит о том, что выбранная система отсчета является неинерциальной. Она движется ускоренно вместе с источником поля (центром рассеяния).

Энергию системы в полярных координатах

$$E = \frac{M}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2Mr^2} + \frac{\alpha}{r}$$

можно рассматривать как совокупность кинетической энергии радиального движения $\frac{M}{2} \dot{r}^2$, потенциальной энергии центрального поля $\frac{\alpha}{r}$ и кинетической энергии движения по окружности (центробежной энергии) $\frac{L^2}{2Mr^2}$. Величину, равную $\Phi(r) = \frac{L^2}{2Mr^2} + \frac{\alpha}{r}$, называют **эффективной потенциальной энергией** тела приведенной массы.

1.4. Траектория тела в центральном поле

В полученном уравнении движения тела приведенной массы (втором законе Ньютона)

$$M\ddot{r} = \frac{L^2}{Mr^3} + \frac{\alpha}{r^2}$$

все силы, действующие на тело, зависят только от величины ($1/r$), обратно пропорциональной расстоянию до рассеивающего центра (источника поля), в положительных степенях. Поэтому для нахождения решения этого уравнения удобно сделать замену переменных

$$r(t) = \frac{1}{\xi(\varphi)}.$$

Тогда полученное ранее выражение $\dot{\phi} = \frac{L}{Mr^2}$ можно записать как

$$\dot{\phi} = \frac{L}{Mr^2} = \frac{L}{M} \xi^2.$$

Выразим первую и вторую производную от расстояния r в новых переменных

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\xi^2} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{\xi^2} \frac{d\xi}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{\xi^2} \dot{\phi} \frac{d\xi}{d\phi} = -\frac{1}{\xi^2} \frac{L}{M} \xi^2 \frac{d\xi}{d\phi},$$

$$\dot{r} = -\frac{L}{M} \frac{d\xi}{d\phi}.$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{M} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi}{d\phi} \right) = -\frac{L}{M} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d\xi}{d\phi} \right) \cdot \frac{d\phi}{dt} = -\frac{L^2}{M^2} \xi^2 \frac{d^2\xi}{d\phi^2},$$

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{M^2} \xi^2 \frac{d^2\xi}{d\phi^2}.$$

Подставляя полученное выражение для второй производной в уравнение движения, получим

$$M\ddot{r} = \frac{L^2}{Mr^3} + \frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow -M \frac{L^2}{M^2} \xi^2 \frac{d^2\xi}{d\phi^2} = \frac{L^2}{M} \xi^3 + \alpha \xi^2,$$

$$-\frac{d^2\xi}{d\phi^2} = \xi + \frac{\alpha M}{L^2} \quad \text{или} \quad \frac{d^2\xi}{d\phi^2} + \left(\xi + \frac{\alpha M}{L^2} \right) = 0.$$

Замена переменных $\chi(\phi) = \xi(\phi) + \frac{\alpha M}{L^2}$ позволяет свести полученное уравнение к стандартному уравнению гармонических колебаний с частотой равной единице

$$\frac{d^2\chi}{d\phi^2} + \chi = 0.$$

Решением данного уравнения является гармоническая зависимость χ от ϕ с амплитудой A и некоторой начальной фазой ϕ_{\min} :

$$\chi = A \cos(\phi_{\min} - \phi).$$

Возвращаясь к переменным ξ и r , получим искомое решение в виде

$$\chi = \xi + \frac{\alpha M}{L^2} = A \cos(\phi_{\min} - \phi) \Rightarrow \frac{1}{r} = A \cos(\phi_{\min} - \phi) - \frac{\alpha M}{L^2}.$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha M}{L^2} \left(\frac{AL^2}{\alpha M} \cos(\phi_{\min} - \phi) - 1 \right)$$

Введем обозначения $p = \frac{L^2}{\alpha M}$ и $\varepsilon = \frac{AL^2}{\alpha M}$. Тогда решение примет вид

$$r = \frac{p}{\varepsilon \cos(\phi_{\min} - \phi) - 1}.$$

Определить константу ε можно, подставив r в выражение для энергии

$$E = \frac{M}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2Mr^2} + \frac{\alpha}{r}.$$

Возьмем производную от r и подставим в нее $\dot{\varphi} = \frac{L}{Mr^2} = \frac{L}{Mp^2} (\varepsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1)^2$:

$$\dot{r} = \frac{p}{(\varepsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1)^2} (\varepsilon \sin(\varphi_{\min} - \varphi) \dot{\varphi}) = \frac{L}{Mp} \varepsilon \sin(\varphi_{\min} - \varphi).$$

Тогда полную механическую энергию запишем в виде

$$E = \frac{M}{2} \frac{L^2}{M^2 p^2} \varepsilon^2 \sin^2(\varphi_{\min} - \varphi) + \frac{L^2}{2Mp^2} (\varepsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1)^2 + \frac{\alpha}{p} (\varepsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1).$$

Выполнив тригонометрические преобразования и подставив $p = \frac{L^2}{\alpha M}$, получим

$$\frac{\alpha^2 M}{2L^2} (\varepsilon^2 - 1) = E.$$

$$\text{Отсюда } \varepsilon = \pm \sqrt{\frac{2L^2}{\alpha^2 M} E + 1}.$$

Таким образом, в **полярных координатах уравнение траектории** имеет вид

$$r = \frac{p}{\varepsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1}, \quad \text{где } p = \frac{L^2}{\alpha M}, \quad \varepsilon = \pm \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\alpha^2 M} E}.$$

Это **уравнение конических сечений**, записанное в полярных координатах. Константа p называется **фокальным параметром** кривой, а константа ε – **эксцентриситетом**. Из курса геометрии известно, что в зависимости от эксцентриситета конические сечения могут принимать форму круга ($\varepsilon = 0$), эллипса ($0 < |\varepsilon| < 1$), параболы ($|\varepsilon| = 1$) или гиперболы ($|\varepsilon| > 1$).

При движении по замкнутой траектории (эллипс, круг) полярный угол φ изменяется в интервале $[-\pi; \pi]$ (или в интервале $[0; 2\pi]$). При движении по незамкнутой траектории (парабола, гипербола) полярный угол φ изменяется в небольших пределах вблизи φ_{\min} (рис. 3).

Полярная координата r является положительной ($r \geq 0$) по определению. При этом фокальный параметр p и эксцентриситет ε могут быть как положительными, так и отрицательными.

Например, для замкнутых траекторий ($|\varepsilon| < 1$ – эллипс или круг) при любых значениях полярного угла $\varphi \in [-\pi; \pi]$ знаменатель $\varepsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1$ всегда отрицательный. Поэтому для замкнутых траекторий фокальный параметр p всегда отрицательный, а эксцентриситет может быть как положительным, так и отрицательным (рис. 3а).

Для незамкнутых траекторий ($|\varepsilon| \geq 1$ – парабола или гипербола) знаменатель $\varepsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1$ может быть как положительным, так и отрицательным (интервал изменения углов φ ограничен значениями вблизи φ_{\min} , поэтому косинус всегда положителен). Поэтому фокальный параметр тоже может быть как положительным, так и отрицательным. Причем если $\varepsilon \geq 1$, то и $p > 0$. А если $\varepsilon \leq -1$, то $p < 0$ (рис. 3б).

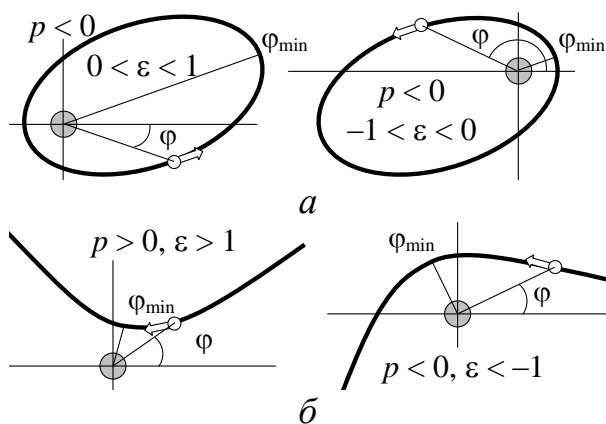


Рис. 3

При угле $\varphi = \varphi_{\min}$ (косинус равен единице) тело, движущееся, например, по незамкнутой траектории ($|\varepsilon| \geq 1$), будет находиться на минимальном расстоянии от рассеивающего центра

$$r_{\min} = \frac{p}{\varepsilon - 1},$$

так как и при положительных ($\varepsilon \geq 1, p > 0$), и при отрицательных ($\varepsilon \leq -1, p < 0$) параметрах траектории знаменатель в выражении $r = \frac{p}{\varepsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1}$ имеет максимальное значение.

Точка траектории, расстояние от рассеивающего центра до которой минимально, называется **перигеем**. В перигее (т.е. при $r = r_{\min}$) радиальная скорость движущегося тела $\dot{r} = \frac{L}{Mp} \varepsilon \sin(\varphi_{\min} - \varphi)$ обращается в ноль, а угловая $\omega = \dot{\varphi} = \frac{L}{Mr_{\min}^2}$ и тангенциальная $v_{\varphi} = \omega r \Big|_{r=r_{\min}} = \frac{L}{Mr_{\min}}$ скорости максимальны.

1.5. Траектория движения заряженной частицы в кулоновском поле

Сила, действующая на частицу с зарядом q_1 со стороны другой частицы с зарядом q_2 , (сила Кулона) является центральной и равна

$$F_r(r) = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$$

Константа α в этом случае примет вид: $\alpha = kq_1q_2$ и может быть как *положительной* ($\alpha > 0$) в случае *отталкивания одноименных зарядов*, так и *отрицательной* ($\alpha < 0$) в случае *притяжения зарядов, имеющих разные знаки*.

Рассмотрим, как будет двигаться заряженная частица массой m_1 и зарядом q_1 в кулоновском поле, если в начальный момент времени она имела скорость \vec{v}_0 и находилась на расстоянии r_0 от рассеивающего центра массой m_2 и зарядом q_2 ($m_2 \gg m_1$). Как было показано ранее, в этом случае система отсчета связывается с

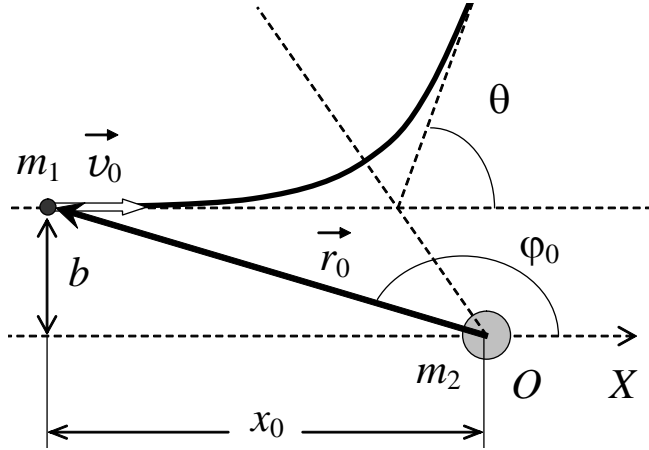


Рис. 4

телом большей массы – m_2 (рис. 4): m_1 – налетающая частица, m_2 – рассеивающий центр. Если за направление оси ОХ в декартовых координатах (и начало отсчета угла φ в полярных координатах) принять направление скорости \vec{v}_0 , то расстояние b между осью ОХ и направлением скорости называют *прицельным расстоянием*.

Физические величины L и E являются постоянными (сохраняющимися со временем), их значения не зависят от того, в какой момент времени движения частицы (например, в начальный) их рассчитывают. Поэтому удобно выразить величины L и E через параметры начального состояния налетающей частицы v_0, x_0, b .

По определению момента импульса

$$\vec{L} = M[\vec{r}_0 \vec{v}_0] \Rightarrow L = Mr_0 v_0 \sin \varphi_0 ;$$

$$b = r_0 \sin \varphi_0 \Rightarrow L = Mb v_0.$$

$$\text{Энергия } E = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{\alpha}{r_0}, \text{ где } r_0^2 = b^2 + x_0^2.$$

Опираясь на эти выражения энергии и момента импульса, проанализируем уравнение траектории, записанное в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{\epsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1}, \text{ где } p = \frac{L^2}{\alpha M}, \epsilon = \pm \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\alpha^2 M} E}.$$

Легко заметить, что знак фокального параметра p определяется знаком константы взаимодействия α .

В полярных координатах расстояние r всегда положительное. Поэтому *при отталкивании* ($\alpha > 0$) фокальный параметр $p \geq 0$. Из выражения для энергии через параметры начального состояния видно, что энергия частицы при этом положительна $E > 0$. Следовательно, эксцентриситет ε может быть $|\varepsilon| \geq 1$. То есть *при отталкивании налетающая частица может двигаться по гиперболе или параболе*. Движение по параболе возможно только при $L = 0$ – при лобовом ударе ($b = 0$). Фокальный параметр p у такой параболы тоже равен нулю, поэтому парабола является вырожденной – движение происходит по параболическому закону вдоль прямой (оси ОХ).

При притяжении ($\alpha < 0$) фокальный параметр $p < 0$. Энергия частицы может быть как положительной, так и отрицательной. Поэтому эксцентриситет ε траектории может принимать любые значения. Следовательно, в зависимости от величины момента импульса и энергии системы *при притяжении* можно наблюдать *различные конические сечения*. Чтобы наблюдать движение с эксцентриситетом $0 \leq |\varepsilon| < 1$, необходимо, чтобы энергия E была отрицательной. Если энергия равна нулю, будет наблюдаться движение по параболе.

Для незамкнутых траекторий, таких как парабола и гипербола вводят понятие *угла рассеяния* θ – угол, на который отклоняется налетающая частица от своего первоначального направления движения.

Анализ траектории заряженной частицы в кулоновском поле можно также осуществлять на основе сопоставления полной энергии налетающей частицы $E = \frac{M}{2} \dot{r}^2 + \Phi(r)$ и эффективной потенциальной энергии $\Phi(r)$, введенной в разделе 1.3.

Рассмотрим эффективную потенциальную энергию

$$\Phi(r) = \frac{L^2}{2Mr^2} + \frac{\alpha}{r}$$

при притяжении $\alpha < 0$ и отталкивании $\alpha > 0$ (рис. 5).

При отталкивании ($\alpha > 0$) потенциальная энергия кулоновского взаимодействия $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ положительна и убывает с увеличением расстояния от рассеивающего центра. Центробежная энергия $\frac{L^2}{2Mr^2}$ положительна всегда. Поэтому эффективная потенциальная энергия при отталкивании положительна (рис. 5а). Движение возможно только если полная энергия системы превосходит эффективную потенциальную энергию (кинетическая энергия не может быть отрицательной). В точке, где полная энергия $E = const$ пересекает эффективную $\Phi(r)$, кинетическая энергия частицы равна нулю. Эта точка соответствует минимальному

расстоянию r_{\min} , на которое налетающая частица может приблизиться к источнику поля. Частица движется по гиперболе.

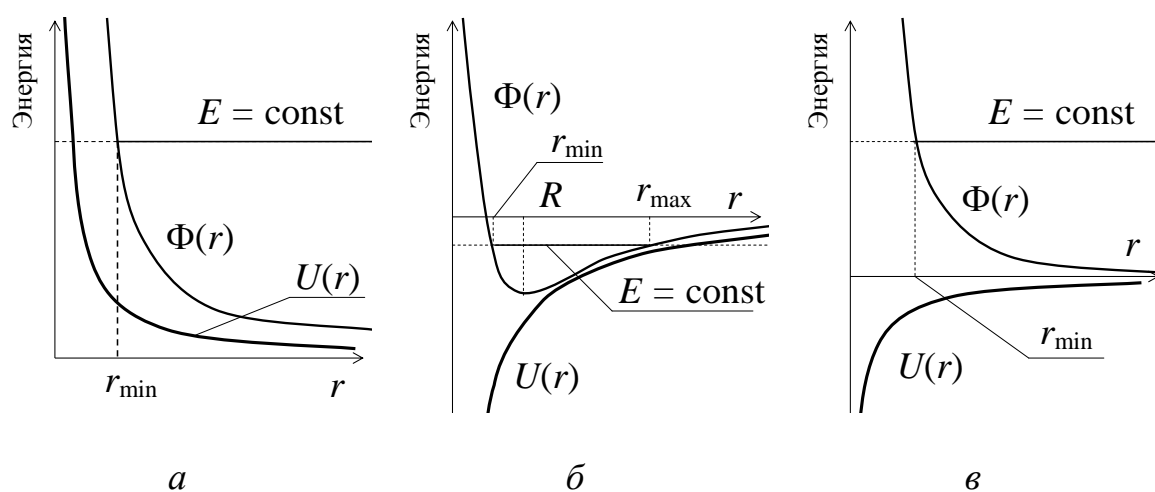


Рис. 5

При притяжении ($\alpha < 0$) потенциальная энергия кулоновского взаимодействия $U(r)$ отрицательна. В зависимости от величины центробежной энергии $\frac{L^2}{2Mr^2}$ эффективная энергия $\Phi(r)$ может заходить в область отрицательных энергий (рис. 5б) или будет оставаться всегда положительным, как и при отталкивании (рис. 5в). Если эффективная потенциальная энергия $\Phi(r)$ положительна, то будет наблюдаться только незамкнутое движение (гипербола или парабола) с минимальным приближением к рассеивающему центру на расстояние, соответствующее точке пересечения полной энергии с графиком эффективной энергии.

Если эффективная энергия $\Phi(r)$ заходит в область отрицательных энергий, то возможно движение по замкнутой траектории (эллипс или окружность). При этом частица то приближается к рассеивающему центру на расстояние r_{\min} , то удаляется от него на расстояние r_{\max} . Эти точки также соответствуют точкам пересечения полной энергии E с графиком эффективной энергии $\Phi(r)$. При движении по окружности частица будет постоянно находиться на одинаковом расстоянии от рассеивающего центра R , которое соответствует минимуму эффективной потенциальной энергии (рис. 5б).

2. Рабочие формулы

2.1. Геометрические параметры траектории

Уравнение траектории движения частицы в кулоновском поле

$$r = \frac{p}{\varepsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1}$$

имеет три параметра: p , ε и φ_{\min} . Рассмотрим, как можно их рассчитать из эксперимента.

По свойству косинуса при любых значениях p и ε траектория является симметричной относительно угла φ_{\min} . Наблюдая за движением заряженной частицы вблизи рассеивающего центра, угол φ_{\min} , при котором частица приближается к источнику поля на минимальное расстояние, можно определить с помощью

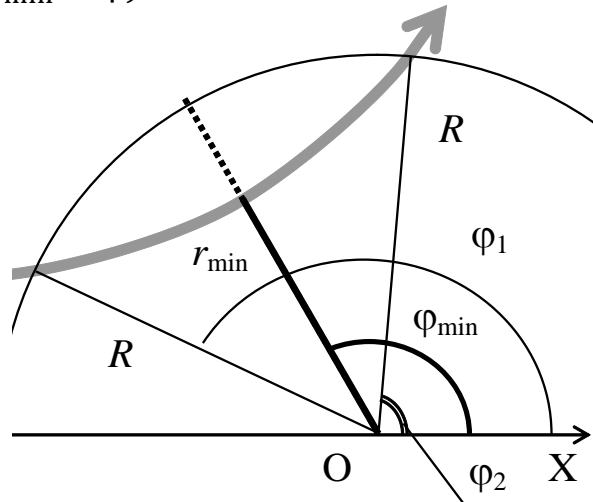


Рис. 6

транспорта. Совместим центр транспорта с источником поля. Чтобы определить угол φ_{\min} достаточно измерить два угла φ_1 и φ_2 , при которых частица в процессе своего движения находилась на одинаковом расстоянии от рассеивающего центра, например, на расстоянии, равном радиусу транспорта R (рис. 6). Пусть, влетая в область эксперимента, частица пересекает границу транспорта. Эта точка описывается углом φ_1 и расстоянием R до рассеивающего центра. Покидая область эксперимента, она вновь пересекает границу транспорта. Эта точка также расположена на расстоянии R от рассеивающего центра, но соответствует углу φ_2 . По свойству симметрии углы φ_1 и φ_2 отличаются от угла φ_{\min} на одинаковую величину

$$\varphi_2 - \varphi_{\min} = \varphi_{\min} - \varphi_1 \Rightarrow \varphi_{\min} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Чтобы определить параметры p и ε , необходимо измерить координаты движущейся частицы в двух положениях, находящихся на разном расстоянии от рассеивающего центра. Например, выберем точку, находящуюся на минимальном расстоянии r_{\min} от центра рассеяния (при $\varphi = \varphi_{\min}$), и точку, находящуюся на расстоянии, равном радиусу транспорта R , соответствующую углу φ_2 (рис. 6). Запишем уравнения траектории для обоих случаев

$$R = \frac{p}{\varepsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi_2) - 1} \quad \text{и} \quad r_{\min} = \frac{p}{\varepsilon - 1}.$$

Решая совместно эти два уравнения относительно p и ε , найдем параметры траектории:

$$\frac{R}{r_{\min}} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi_2) - 1}$$

$$\varepsilon(R \cos(\varphi_{\min} - \varphi_2) - r_{\min}) = R - r_{\min},$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{R - r_{\min}}{R \cos(\varphi_{\min} - \varphi_2) - r_{\min}} \text{ и}$$

$$p = r_{\min}(\varepsilon - 1) = r_{\min} \left(\frac{R - r_{\min}}{R \cos(\varphi_{\min} - \varphi_2) - r_{\min}} - 1 \right).$$

Из полученных выражений видно, что для незамкнутых траекторий ($|\varepsilon| \geq 1$) фокальный параметр p и эксцентриситет ε имеют одинаковые знаки.

2.2. Угол рассеяния

Для незамкнутых траекторий вводят понятие *угла рассеяния* θ – угол, на который отклоняется налетающая частица от своего первоначального направления. По геометрическому построению можно показать, что угол рассеяния θ зависит только от угла φ_{\min} .

Проведем прямую b параллельно начальной скорости через точку первого пересечения траектории с транспортом (рис. 7). Ось OX параллельна прямой b . Пусть прямая a соединяет центр рассеяния с перигеем (точкой траектории частицы, расположенной на минимальном расстоянии от рассеивающего центра). Она пересекает прямые OX и b под одним и тем же углом. Поэтому $\beta = \varphi_{\min}$.

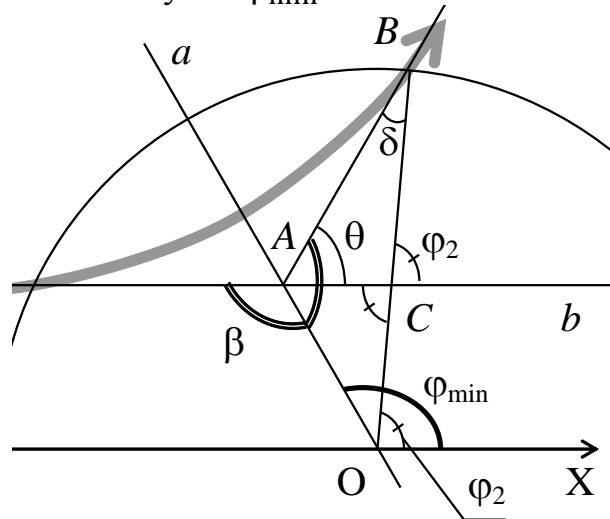


Рис. 7

А по свойству симметрии траектории угол $\angle OAB$ тоже равен β . Из треугольника $\triangle OAB$: $\beta + (\varphi_{\min} - \varphi_2) + \delta = \pi$ (сумма углов треугольника). Из треугольника $\triangle ABC$: $\theta + \delta + (\pi - \varphi_2) = \pi$ (сумма углов треугольника). Решая совместно, получим

$$\theta - (\beta + \varphi_{\min} - \pi) = 0 \text{ или}$$

$$\theta = 2\varphi_{\min} - \pi.$$

В общем случае (и для положительных, и для отрицательных значений угла φ_{\min}), рассуждая аналогично, получим

$$\theta = 2|\varphi_{\min}| - \pi.$$

2.3. Физические параметры взаимодействия

Движение заряженной частицы в кулоновском поле характеризуется следующими физическими константами:

- константа кулоновского взаимодействия α ;
- полная механическая энергия системы E ;
- момент импульса L .

Зная параметры траектории p , ε можно определить эти константы, используя аналитические выражения для параметров траектории

$$p = \frac{L^2}{\alpha M}, \quad \varepsilon = \pm \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\alpha^2 M} E}$$

и связь момента импульса с начальной скоростью и прицельным параметром $L = Mbv_0$.

Рассмотрим $p = \frac{L^2}{\alpha M}$ и $L = Mbv_0$ и получим выражение константы кулоновского взаимодействия α через фокальный параметр p :

$$\alpha = \frac{Mv_0^2 b^2}{p}.$$

Теперь, зная α , найдем E и L .

Подставим $\frac{L^2}{\alpha M} = p$ в выражение для эксцентриситета

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2L^2}{\alpha^2 M} E = 1 + \frac{2p}{\alpha} E \Rightarrow E = \frac{\alpha(\varepsilon^2 - 1)}{2p}.$$

$$\text{И, наконец, } L = \pm \sqrt{\alpha M p}.$$

Знак «+» соответствует положительному значению прицельного параметра, а «-» – отрицательному.

Таким образом, зная параметры траектории p и ε , можно рассчитать параметры взаимодействия следующим образом

$$\alpha = \frac{Mv_0^2 b^2}{p}, \quad E = \frac{\alpha(\varepsilon^2 - 1)}{2p}, \quad L = \pm \sqrt{\alpha M p}.$$

Очевидно, что знаки константы кулоновского взаимодействия α и фокального параметра p совпадают, а полная механическая энергия E может быть как положительной ($|\varepsilon| > 1$), так и отрицательной ($|\varepsilon| < 1$).

3. Модель экспериментальной установки

В данной работе с помощью средств компьютерной графики моделируется процесс движения альфа-частицы в кулоновском поле рассеивающего центра. Масса частицы, являющейся рассеивающим центром, значительно превосходит массу налетающей альфа-частицы, поэтому рассеивающий центр можно считать неподвижным. Движение

происходит только под действием кулоновских сил. Сила тяжести и все компенсирующие ее силы направлены перпендикулярно плоскости, в которой движется альфа-частица, и не оказывают влияния на ее движение. Для измерения координат альфа-частицы используются вертикальная и горизонтальная линейки, позволяющие определять координаты с точностью до $0,1 \text{ \AA}$. Для измерения углов используется транспортир, по которому можно выполнять измерения с точностью до 1 градуса. При указанных условиях погрешность определения коэффициента кулоновского взаимодействия α не превышает 1,4–4,5%.

Работа выполняется на IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание работы; порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит раскрывающийся список для выбора тяжелой частицы, являющейся рассеивающим центром, ползунки для изменения прицельного расстояния и начальной скорости налетающей альфа-частицы, а также кнопки, позволяющие управлять экспериментом.

Варианты выполнения работы

Вариант	Тяжелая частица
1	Ядро кальция (${}_{40}\text{Ca}^{+20}$)
2	Ядро цинка (${}_{65}\text{Zn}^{+30}$)
3	Ядро циркония (${}_{91}\text{Zr}^{+40}$)
4	Ядро сурьмы (${}_{121}\text{Sb}^{+51}$)
5	Ядро золота (${}_{197}\text{Au}^{+79}$)
6	Отрицательный ион стронция (${}_{88}\text{Sr}^{-10}$)
7	Отрицательный ион скандия (${}_{45}\text{Sc}^{-9}$)
8	Отрицательный ион титана (${}_{48}\text{Ti}^{-8}$)
9	Отрицательный ион ванадия (${}_{51}\text{V}^{-7}$)
10	Положительный ион никеля (${}_{59}\text{Ni}^{+8}$)
11	Положительный ион кобальта (${}_{59}\text{Co}^{+7}$)
12	Положительный ион железа (${}_{59}\text{Fe}^{+6}$)

4. Порядок выполнения работы

4.1. Краткое описание хода работы

1. Выберите тяжелую частицу – центр рассеяния (по указанию преподавателя).

Упражнение 1. Изучение зависимости параметров движения заряженной частицы в кулоновском поле от прицельного расстояния.

2. Установите максимально возможное прицельное расстояние.

3. Подберите начальную скорость налетающей частицы.

4. Измерьте углы, соответствующие точкам пересечения движущейся частицей границы транспорта.

5. Измерьте координаты приближения альфа-частицы к рассеивающему центру на минимальное расстояние.

6. Выполните опыт для 17 значений прицельного расстояния.

7. Рассчитайте угол рассеяния и параметры траектории для каждого опыта.

8. Рассчитайте константы кулоновского взаимодействия, момент импульса и полную механическую энергию частицы для каждого опыта.

Упражнение 2. Изучение зависимости параметров движения заряженной частицы в кулоновском поле от начальной скорости налетающей частицы.

9. Установите прицельное расстояние 1–2 ангстрема.

10. Подберите начальную скорость налетающей частицы.

11. Выполните опыт для 11 значений начальной скорости.

12. Для каждого опыта выполните измерения как в пунктах 4–5.

13. Для каждого опыта выполните расчеты как в пунктах 7–8.

По результатам двух упражнений:

14. Постройте графики зависимостей фокального параметра и эксцентриситета траектории, минимального расстояния и угла рассеяния от прицельного расстояния.

15. Постройте графики зависимостей фокального параметра и эксцентриситета траектории, минимального расстояния и угла рассеяния от начальной скорости.

16. Постройте графики зависимости угла рассеяния от полной энергии и момента импульса частицы.

17. По результатам всех экспериментов вычислите среднее значение константы кулоновского взаимодействия.

18. Рассчитайте теоретическое значение константы кулоновского взаимодействия. Сравните с полученными результатами.

19. По результатам второго упражнения рассчитайте константу центробежной энергии.

20. Постройте график зависимости потенциальной энергии кулоновского взаимодействия от расстояния до рассеивающего центра.

21. На том же графике постройте три графика эффективной потенциальной энергии. Отметьте значения полной энергии.

22. По графику определите минимальное расстояние, на которое частица приблизилась к рассеивающему центру.

23. Сравните минимальные расстояния, полученные из расчетов и из графиков.

24. Сделайте выводы.

4.2. Детальное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Раскрывающийся список **«Тяжелая частица»** содержит набор ядер и ионов, обладающих разными массами и зарядами. С помощью этого списка выберите частицу, которая в эксперименте будет выступать в качестве рассеивающего центра (по указанию преподавателя). Для выбранной частицы под списком автоматически указываются ее заряд и масса, необходимые для теоретических расчетов.

Упражнение 1. Изучение зависимости параметров движения заряженной частицы в кулоновском поле от прицельного расстояния.

В этом упражнении необходимо провести серию экспериментов с различными значениями прицельного расстояния при фиксированном значении начальной скорости налетающей частицы.

Прежде чем приступить к выполнению экспериментов, необходимо подобрать значение начальной скорости налетающей частицы. Далее следует зафиксировать найденное значение начальной скорости и выполнить измерения для различных значений прицельного расстояния.

2. Слева от области эксперимента расположен ползунок **«Прицельное расстояние»**, который позволяет изменять прицельное расстояние (например, в пределах от -8 до 8 \AA). При перемещении ползунка точное значение установленного прицельного расстояния указывается на панели инструментов **«Альфа-частица»**. Перемещая ползунок, установите максимально доступное значение прицельного расстояния.

3. Ползунок **«Начальная скорость»** на панели инструментов **«Альфа-частица»** позволяет изменять начальную скорость налетающей альфа-частицы в пределах $(0,2-6) \cdot 10^5 \text{ м/с}$. При перемещении ползунка точное значение установленной начальной скорости альфа-частицы указывается над ползунком.

Перемещая ползунок, выберите минимально возможное в данной работе значение начальной скорости налетающей альфа-частицы.

Нажмите кнопку **«Начать эксперимент»** – альфа-частица начнет двигаться в заданных условиях. Наблюдайте за ее траекторией. Эксперимент закончится, ко-

гда после приближения к рассеивающему центру частица начнет удаляться и вылетит за пределы транспорта.

Перемещая ползунок **«Начальная скорость»**, необходимо подобрать такую начальную скорость частицы, чтобы при максимальном значении прицельного расстояния точка, в которой частица пересекает границу транспорта, удаляясь от рассеивающего центра, в полярных координатах описывалась бы углом, измеренным по транспорту:

- 70–80 градусов в случае отталкивания;
- 20–30 градусов в случае притяжения.

Если наблюдаемая траектория не соответствует этим требованиям, с помощью ползунка измените начальную скорость альфа-частицы и вновь нажмите кнопку **«Начать эксперимент»**. Подобранный таким образом начальную скорость запишите в таблицу.

Очистите область эксперимента с помощью соответствующей кнопки.

4. Для выбранной в пункте 3 начальной скорости и максимально возможного прицельного расстояния вновь выполните эксперимент (нажмите кнопку «начать эксперимент») и выполните следующие измерения.

Изображенный в области эксперимента транспорт позволяет выполнять измерения полярных углов с точностью до 1 градуса. По транспорту определите полярный угол φ_1 для точки, в которой траектория альфа-частицы пересекла границу транспорта, приближаясь к центру рассеяния («начальный» угол). Аналогично определите полярный угол φ_2 для точки, в которой траектория частицы вновь пересекла границу транспорта, но уже удаляясь от рассеивающего центра («конечный» угол). Запишите полученные значения «начального» и «конечного» углов в таблицу.

5. Для измерения горизонтальной и вертикальной (декартовых) координат справа и снизу от области эксперимента расположены линейки, по которым можно выполнять отсчеты с точностью 0,1 Å. Каждая линейка снабжена ползунком (**«Измерение координаты X»**, **«Измерение координаты Y»**) и связанной с ним измерительной линией. Перемещая ползунки вдоль линеек, совместите обе измерительные линии с точкой, в которой налетающая частица находилась от рассеивающего центра на минимальном расстоянии. Обратите внимание, что после окончания эксперимента эта точка автоматически отмечается на траектории альфа-частицы серой вспомогательной линией. Поэтому для выполнения измерений с помощью ползунков **«Измерение координаты X»** и **«Измерение координаты Y»** совместите обе измерительные линии с точкой пересечения траектории частицы со вспомогательной серой линией. По вертикальной и горизонтальной линейкам выполните отсчет и запишите измеренные координаты x_{\min} и y_{\min} в таблицу.

6. Не изменяя начальную скорость альфа-частицы, выполните опыты для 8 положительных значений прицельного расстояния, 8 отрицательных и при лобовом ударе (прицельное расстояние равно нулю).

Для каждого опыта выполните измерения, как описано в пунктах 4 и 5.

Обратите внимание, **при лобовом ударе** «начальный» угол (угол для точки, в которой траектория альфа-частицы пересекла границу транспорта, приближаясь к центру рассеяния) всегда равен 180 градусов, а «конечный» ± 180 градусов (угол для точки, в которой траектория частицы вновь пересекла границу транспорта, но уже удаляясь от рассеивающего центра). Для правильного выбора знака наблюдайте, ка-

ким был «конечный» угол при положительных значениях прицельного параметра. Если при положительных значениях прицельного параметра «конечный» угол был положительным, то считайте, что при лобовом ударе «конечный» угол тоже положительный (180 градусов). И наоборот.

Если заряженные частицы притягиваются, то при лобовом столкновении (прицельное расстояние равно нулю) происходит упругий удар, в результате которого легкая альфа-частица меняет направление скорости на противоположное. Тогда рассуждать о минимальном расстоянии, на которое частица приблизилась к рассеивающему центру, некорректно. Следовательно, в этом случае измерения координат x_{\min} и y_{\min} не имеет смысла.

7. Для каждого из проведенных экспериментов рассчитайте геометрические параметры траектории:

- Полярный угол φ_{\min} , соответствующий точке, в которой налетающая частица находилась (или могла бы находиться) на минимальном расстоянии от рассеивающего центра: $\varphi_{\min} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, где φ_1 и φ_2 – «начальный» и «конечный» углы, измеренные по транспортиру в каждом опыте.
- Угол рассеяния: $\theta = 2|\varphi_{\min}| - \pi$.
- Минимальное расстояние, на которое приближается налетающая частица к рассеивающему центру: $r_{\min} = \sqrt{x_{\min}^2 + y_{\min}^2}$.
- Эксцентриситет траектории: $\varepsilon = \frac{R - r_{\min}}{R \cos(\varphi_{\min} - \varphi_2) - r_{\min}}$.
- Фокальный параметр траектории: $p = r_{\min} \left(\frac{R - r_{\min}}{R \cos(\varphi_{\min} - \varphi_2) - r_{\min}} - 1 \right)$ или $p = r_{\min}(\varepsilon - 1)$.

Здесь R – радиус транспортира, φ_2 – «конечный» угол.

Учитывая, что в работе углы по транспортиру можно измерять с точностью до градуса, а координаты – с точностью до $0,1 \text{ \AA}$, рассчитывайте углы θ и φ_{\min} с точностью до $0,1^\circ$, p и r_{\min} – с точностью до $0,01 \text{ \AA}$, а безразмерную величину ε – с точностью $0,01$.

8. Зная вычисленные в пункте 9 геометрические параметры траектории p и ε , для каждого из проведенных опытов рассчитайте физические константы взаимодействия:

- Константу кулоновского взаимодействия $\alpha = \frac{Mv_0^2 b^2}{p}$.
- Полную механическую энергию $E = \frac{\alpha(\varepsilon^2 - 1)}{2p}$.
- Момент импульса $L = \pm \sqrt{\alpha M p}$ (знак «+» соответствует положительному значению прицельного параметра, а «–» – отрицательному).

Здесь M – приведенная масса, v_0 – начальная скорость налетающей частицы, b – прицельное расстояние. Рассчитанные значения округлите так, чтобы количество значащих цифр в рассчитанных величинах соответствовало количеству значащих цифр в исходных данных.

Упражнение 2. Изучение зависимости параметров движения заряженной частицы в кулоновском поле от начальной скорости налетающей частицы.

В этом упражнении необходимо провести серию экспериментов с различными значениями начальной скорости налетающей частицы при фиксированном зна-

чении прицельного расстояния. Для получения более наглядных результатов рекомендуется предварительно подобрать оптимальный диапазон изменения скоростей.

9. С помощью ползунка «**Прицельное расстояние**» установите и не изменяйте в течение всего упражнения:

- в случае отталкивания прицельное расстояние около 1 ангстрема ($\sim 1/10$ радиуса транспортира);
- в случае притяжения прицельное расстояние около 2 ангстрем ($\sim 1/6$ радиуса транспортира).

10. Чтобы подобрать оптимальный диапазон для начальной скорости альфа-частицы, сначала с помощью ползунка «**Начальная скорость**» установите максимальное значение скорости: $6,0 \cdot 10^5$ м/с. Нажмите кнопку «**Начать эксперимент**». Наблюдайте за траекторией частицы.

Необходимо подобрать начальную скорость налетающей частицы так, чтобы при фиксированном значении прицельного расстояния точка, в которой частица пересекает границу транспортира, удаляясь от рассеивающего центра, в полярных координатах описывалась бы углом, измеренным по транспортиру, который

- при отталкивании лежит в пределах 20–30 градусов;
- при притяжении – 0–10 градусов.

Если наблюдаемая траектория не соответствует этим требованиям, с помощью ползунка измените начальную скорость альфа-частицы и вновь нажмите кнопку «**Начать эксперимент**». Подобранную таким образом начальную скорость запишите в таблицу.

Очистите область эксперимента.

11. Найденное в предыдущем пункте значение начальной скорости будет наибольшим v_{\max} в данной серии опытов. В качестве наименьшего значения v_{\min} начальной скорости возьмите скорость в 10 раз меньшую максимальной: $v_{\min} = v_{\max}/10$.

Если полученное значение v_{\min} меньше $0,2 \cdot 10^5$ м/с (минимально возможного), возьмите $v_{\min} = 0,2 \cdot 10^5$ м/с.

Далее необходимо рассчитать другие значения начальной скорости, при которых будут выполняться опыты. Для этого сначала вычислите вспомогательную величину: $\Delta = \left(\frac{v_{\min}}{v_{\max}}\right)^{1/10}$ с точностью не менее двух знаков после запятой.

Тогда первое значение начальной скорости возьмите равным $v_1 = v_{\max}$. Все последующие 10 значений рассчитайте по формуле: $v_i = \Delta \cdot v_{i-1}$.

То есть, $v_1 = v_{\max}$; $v_2 = \Delta \cdot v_1$; $v_3 = \Delta \cdot v_2$; $v_4 = \Delta \cdot v_3$; и т.д.

Округлите полученные значения скорости до двух знаков после запятой, запишите в таблицу.

Для каждого из рассчитанных значений начальной скорости выполните опыты, не меняя прицельного расстояния. Чтобы с помощью ползунка «**Начальная скорость**» точно задать вычисленные значения скорости используйте скроллинг мыши.

12. Для каждого опыта выполните измерения как в пунктах 4–5.

Проанализируйте полученные при измерениях координаты. Если для различных значений начальной скорости получились одинаковые (почти одинаковые) значения координат, наибольшее значение начальной скорости при выполнении пункта 10 было выбрано неудачно. В этом случае необходимо вновь выполнить пункты 10–11, выбрав в качестве максимального такое значение начальной скорости, начиная с

которого измеренные координаты будут различными. Это поможет корректно проанализировать зависимость параметров траектории от начальной скорости

13. Выполните расчеты как в пунктах 7–8.

По результатам двух упражнений:

14. По результатам упражнения 1 на одном графике постройте кривые зависимостей фокального параметра p и эксцентриситета ε траектории движения частицы в кулоновском поле от прицельного расстояния b .

Постройте график зависимости минимального расстояния r_{\min} , на которое подлетает частица к рассеивающему центру, и график угла рассеяния θ от прицельного расстояния b .

Проанализируйте полученные графические зависимости:

Какими коническими сечениями являлись траектории в проведенных опытах (упражнение 1)? Как зависят геометрические параметры траектории от прицельного расстояния? В каком случае альфа-частица приблизилась к рассеивающему центру на минимальное расстояние? В каком случае отклонение частицы от первоначального направления движения было максимальным?

15. По результатам упражнения 2 (также как и в пункте 14) на одном графике постройте кривые зависимостей фокального параметра p и эксцентриситета ε траектории движения частицы в кулоновском поле от начальной скорости v_0 . Зависимости минимального расстояния r_{\min} , на которое подлетает частица к рассеивающему центру, и угла рассеяния θ от начальной скорости v_0 постройте на двух отдельных графиках.

Проанализируйте полученные графические зависимости:

Какими коническими сечениями являлись траектории в проведенных опытах (упражнение 2)? Как зависят геометрические параметры траектории от начальной скорости? В каком случае альфа-частица приблизилась к рассеивающему центру на минимальное расстояние? В каком случае отклонение частицы от первоначального направления движения было максимальным?

16. Зависимость угла рассеяния θ от полной энергии E налетающей частицы постройте по результатам упражнения 2.

Для построения зависимости угла рассеяния θ от момента импульса L частицы используйте результаты и первого, и второго упражнений.

Проанализируйте полученные графические зависимости.

17. По результатам всех экспериментов за исключением лобового удара вычислите среднее значение константы кулоновского взаимодействия α (сложите все полученные значения и разделите на количество экспериментов).

18. Зная заряды взаимодействующих частиц, рассчитайте теоретическое значение константы кулоновского взаимодействия $\alpha = kq_1q_2$. Сравните теоретическое значение константы α со средним значением этой константы, полученным из эксперимента в пункте 17. Для корректного сравнения оба значения должны иметь одинаковое количество значащих цифр.

19. Центробежная энергия $\frac{L^2}{2Mr^2}$ обратно пропорциональна квадрату расстояния r до рассеивающего центра. Для каждого опыта во втором упражнении рассчитайте величину $\frac{L^2}{2M}$ (константу центробежной энергии), где M – приведенная масса.

20. Зная константу кулоновского взаимодействия α , вычислите значения потенциальной (кулоновской) энергии $U = \alpha/r$ для различных расстояний r до рассеивающего центра в пределах от $0,01 \text{ \AA}$ до расстояния, равного радиусу транспорта R : $r \in [0,01 \text{ \AA}; R]$.

По этим данным постройте график зависимости потенциальной энергии кулоновского взаимодействия U от расстояния до рассеивающего центра r .

21. Среди результатов упражнения 2 выберите три опыта: 1) опыт, в котором налетающая частица имела наибольшую полную энергию; 2) опыт, в котором частица имела энергию примерно в 50 раз меньше максимальной; 3) опыт, в котором полная энергия налетающей частицы является средним значением между случаями 1 и 2.

Для выбранных случаев рассчитайте значения центробежной $\frac{L^2}{2Mr^2}$ и эффективной потенциальной энергии $\Phi(r) = \frac{L^2}{2Mr^2} + U(r)$ на том же интервале $r \in [0,01 \text{ \AA}; R]$, который указан в пункте 20.

На графике зависимости кулоновской энергии U от расстояния до рассеивающего центра постройте графики зависимости эффективной потенциальной энергии $\Phi(r)$ для трех выбранных случаев. Проведите три горизонтальные прямые, соответствующие значениям полной энергии E , для которых были построены эти графики.

22. По графику определите минимальное расстояние r_{\min} , на которое налетающая частица приближается к рассеивающему центру. Для этого найдите точку пересечения кривой, являющейся графиком эффективной энергии $\Phi(r)$, с прямой, являющейся графиком полной энергией E частицы, соответствующей этому же опыту.

23. Сравните минимальные расстояния, полученные из расчетов и из графиков.

24. Сделайте выводы:

По каким траекториям может двигаться частица в кулоновском поле, и какие траектории наблюдались в эксперименте? Почему?

Как зависят геометрические параметры траектории от прицельного расстояния налетающей частицы?

Как зависят геометрические параметры траектории от начальной скорости налетающей частицы?

Как зависит угол рассеяния от физических констант взаимодействия: полной энергии и момента импульса налетающей частицы?

Как минимальное расстояние, на которое налетающая частица приближается к рассеивающему центру, зависит от полной энергии частицы?

Как меняется скорость частицы при приближении к рассеивающему центру? при удалении от него?

5. Контрольные вопросы

1. Какую силу называют центральной? Приведите пример центральной силы.

2. Можно ли в случае центрального взаимодействия задачу о движении двух тел свести к задаче о движении одного тела? Как?

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей
физических процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодЭ–04
для студентов всех специальностей

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати __.__.2022. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».

Печать RISO. Усл.печ.л. 1,86. Уч.-изд.л. 1,68.

Заказ . Тираж 50 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru