ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ

Директор ЭЛТИ

____________А. П. Суржиков

«____»______________2007 г.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Методические указания
для студентов 1 курса всех специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
Томск 2007

УДК515

Начертательная геометрия. Инженерная графика: Методические указания по теме "Взаимное положение прямых и плоскостей" для студентов 1 курса всех специальностей / Сост. С. П. Буркова, Г.Ф. Винокурова, А. И. Озга. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007.– 68 с.

Рецензент доц. кафедры НГГ ЭЛТИ,
канд. техн. наук Б.А. Франковский

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры начертательной геометрии и графики «20» октября 2006 г.

Зав. кафедрой
доц., канд. техн. наук С. П. Буркова

Председатель учебно-методической комиссии

А.Н. Дудкин

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. ФОРМАТЫ ПО ГОСТ 2.301-68

Чертежным форматом называется размер конструкторского документа.

ГОСТ 2.301-68 устанавливает основные и ряд дополнительных форматов. Размеры и обозначения основных форматов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Обозначения форматов	А0	А1	А2	А3	А4
Размеры сторон форматов, мм	841х1189	549х841	420х549	297х420	210х297

Формат с размерами сторон 1189 х 841 мм, площадь которого равна 1 м, и другие форматы, полученные путем последовательного деления этого и последующих форматов на две равные части параллельно меньшей стороне соответствующего формата, принимаются за основные.

При необходимости допускается применять формат А5 с размерами сторон 148 х 210 мм.

ГОСТ 2.301-68 допускает использование дополнительных форматов, образуемых увеличением коротких сторон основных форматов на величину, кратную их размерам. Обозначение дополнительных форматов составляется из обозначения основного формата и его кратности, например, А0х2, А4х8 и т. д.

Рамку чертежа проводят, отступая 20 мм слева и по 5 мм со всех других сторон от границ формата, рис. 1.1.

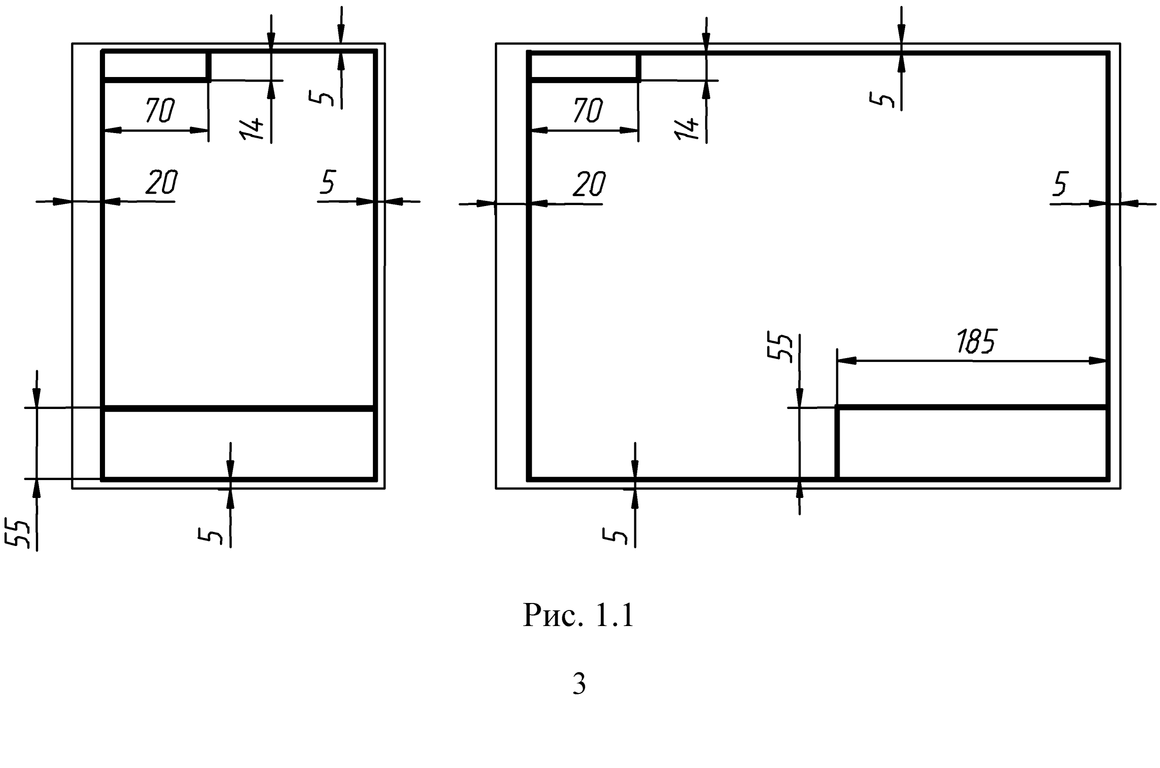


Рис. 1.1

1.2. ОСНОВНАЯ НАДПИСЬ ПО ГОСТ 2.104-68

Внизу листа располагается основная надпись – форма 1 по ГОСТ 2.104 – 68 (рис. 1.2); в левом верхнем углу выполняется дополнительная графа основной надписи (14х70 мм), в которой записывается обозначение чертежа, повернутое на 180°.

В графах основной надписи необходимо указать:

в графе 1 -наименование изделия (размер шрифта – 7);

в графе 2- обозначение чертежа (размер шрифта – 7):

$$\underbrace{\textbf{КГГ}}_{\text{а}}\underbrace{\textbf{3}}_{\text{б}}\textbf{.}\ \underbrace{\textbf{731000}}_{\text{в}}\textbf{.}\ \underbrace{\textbf{005}}_{\text{г}}$$

а – код кафедры начертательной геометрии и графики – КГГ;

б – номер работы (1);

в – классификационную характеристику детали (731000 – корпус);

г –вариант задания (005);

в графе 3 – материал детали (например, Ст3 ГОСТ 380-94);

в графе 4 – «У» (учебный чертеж) (размер шрифта – 5);

в графе 6 – масштаб чертежа (размер шрифта – 5);

в графе 7 – порядковый номер листа (на заданиях, состоящих из одного листа, графу не заполняют);

в графе 8 – общее количество листов задания (графу заполняют только на первом листе);

в графе 9 – ТПУ, факультет, номер группы (размер шрифта – 3,5);

в графе 10 – фамилию студента;

в графе 11 – фамилию преподавателя;

в графе 12 – подпись студента;

в графе 13 – дату выполнения чертежа.

Все остальные графы не заполняются.

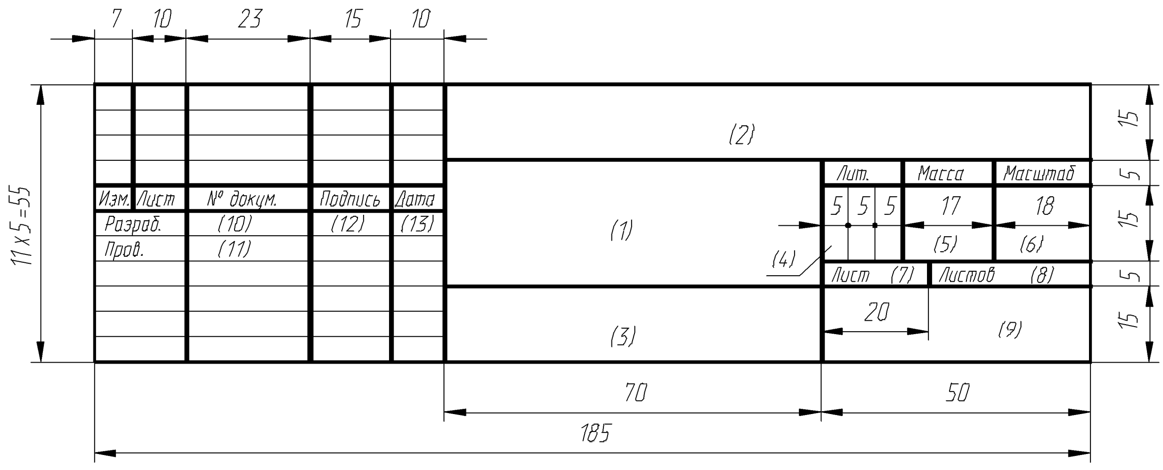


Рис. 1.2. Основная надпись (форма 1)

1.3. МАСШТАБЫ ПО ГОСТ 2.302-68

Масштабом чертежа называют отношение линейных размеров изображенного на чертеже объекта к его действительным размерам.

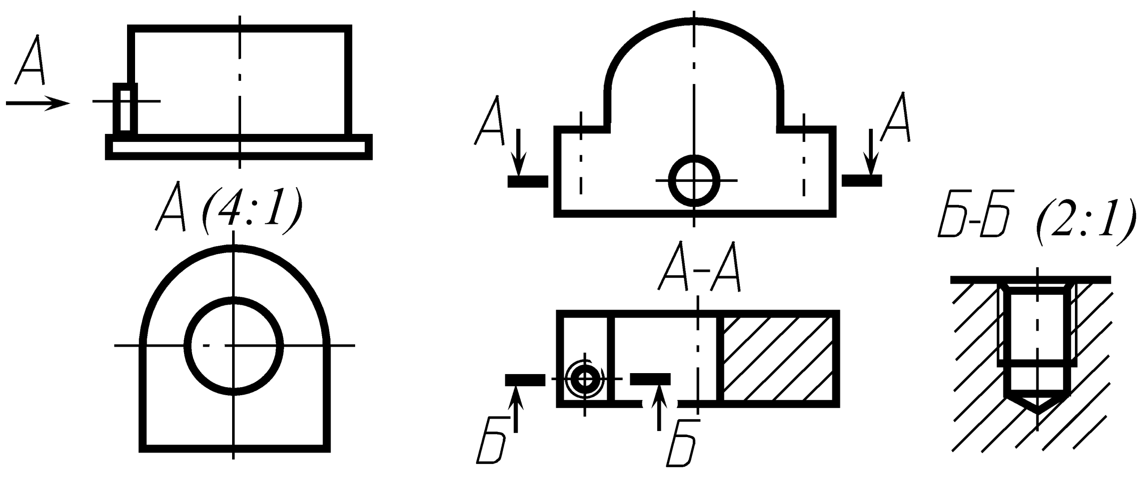
Предпочтительно выполнять чертежи в масштабе 1:1. Однако в зависимости от величины и сложности предмета, а также от вида чертежа часто приходится размеры изображения предмета увеличивать или уменьшать по сравнению с истинными размерами. В этих случаях прибегают к построению изображения в масштабе.

В соответствии с ГОСТ 2.302-68 «Масштабы», устанавливаются следующие виды масштабов: натуральная величина, масштабы уменьшения и масштабы увеличения (см. табл. 2).

Таблица 2

Натуральная величина	1:1								
Масштабы уменьшения	1:2	1:2,5	1:4	1:5	1:10	1:15	1:20	1:25	1:40
Масштабы увеличения	2:1	2,5:1	4:1	5:1	10:1	20:1	40:1	50:1	100:1

Масштаб указывают в предназначенной для этого графе основной надписи. Если отдельное изображение (вид, разрез, сечение, выносной элемент) выполнено в масштабе, отличном от масштаба чертежа, он указывается непосредственно над изображением рядом с надписью, относящейся к данному изображению. Например, А (4:1), Б-Б (2:1), рис. 1.3 (а, б).



а) б)

Рис. 1.3

1.4. ЛИНИИ ПО ГОСТ 2.303-68

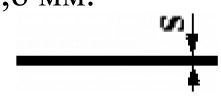
Изображения выполняют в виде сочетания линий, различных по назначению, начертанию, размерам и наименованию.

ГОСТ 2.303-68 устанавливает начертание и назначение девяти типов линий, которые могут применяться на чертежах всех отраслей промышленности и строительства. В этом стандарте указано только основное назначение линий. Специальное их назначение, например, для изображения резьбы, шлицев и т. д., устанавливают соответствующие стандарты ЕСКД. Начертание и *основное* назначение линий приведены в табл. 3.

За исходную принята сплошная толстая основная линия, обозначаемая буквой ***s***. В зависимости от размеров и сложности чертежа, а также его назначения и формата она может выбираться в пределах 0,5 - 1,5 мм. Толщину остальных линий устанавливают в зависимости от толщины основной линии (табл. 3). Толщина линий каждого типа должна быть одинакова для всех изображений одного масштаба на данном чертеже.

Типы линий необходимо твердо усвоить и строго придерживаться правил их начертания при выполнении чертежей.

Сплошная толстая основная линия применяется для изображения видимого контура предмета, контура вынесенного сечения, рамки чертежа. Рекомендуемая толщина сплошной толстой основной линии при выполнении чертежей 0,8 мм.



Сплошная тонкая линия применяется при вычерчивании контура наложенного сечения, выносных и размерных линий, линий штриховки, линий-выносок, подчеркивания надписей, линий ограничения выносных элементов на видах, разрезах и сечениях, воображаемых линий переходов.

Сплошной волнистой линией вычерчивают линии обрыва длинной детали, линии разграничения вида и разреза. Проводят ее от руки, слегка волнистую.

Штриховую линию применяют при вычерчивании линий невидимого контура и невидимых линий перехода. Штриховые линии должны пересекаться и заканчиваться штрихами.

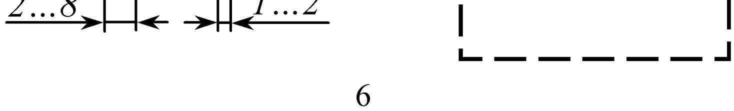


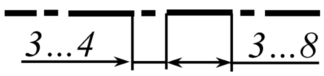
Таблица 3

Наименование	*Толщина линии **s** (0,5-1,5)мм*	*Начертание*	*Основное назначение*
1.Сплошная толстая - основная	s		Линии видимого контура, линии контура вынесенного сечения.
2. Сплошная тонкая	s/2 - s/3		Линии контура наложенного сечения, линии штриховки, линии-выноски, полки линий-выносок Подчеркивание надписей, линии для изображения пограничных деталей (обстановка), линии ограничения выносных элементов на видах, разрезах и сечениях, линии перехода (воображаемые).
3. Сплошная волнистая	s/2 - s/3		Линии обрыва, линии разграничения вида и разреза.
4. Штриховая	s/2 - s/3		Линии невидимого контура.
5. Штрихпунктирная	s/2 - s/3		Линии осевые и центровые, линии сечений, являющиеся осями симметрии для наложенных или вынесенных сечений.
6. Штрихпунктирная утолщенная	s/2 - 3/2 s		Линии, обозначающие поверхности, подлежащие термообработке или покрытию.
7. Разомкнутая	s - 3/2 s		Линии сечений.
8. Сплошная тонкая линия с изломами	s/2 - s/3		Длинные линии обрыва.
9. Штрихпунктирная с двумя точками	s/2 - s/3		Линии сгиба на развертках, линии для изображения частей изделий в крайних или промежуточных положениях, линии для изображения развертки, совме-

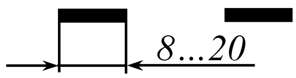
			щенной с видом.

Штрихпунктирной тонкой линией вычерчивают линии осевые и центровые, линии сечений, являющиеся осями симметрии для наложенных и вынесенных сечений. Длина штрихов может быть от 5 до 30 мм, но, как правило, берут 15 ... 20 мм. Расстояние между штрихами от 3 до 5 мм. Штрихпунктирные линии должны пересекаться и заканчиваться штрихами. Центры окружностей должны отмечаться пересечением штрихов. Если диаметр окружности или размер других геометрических фигур на изображении менее 12 мм, штрихпунктирные линии, применяемые в качестве центровых, следует заменить сплошными тонкими линиями. При пересечении штриховых и штрихпунктирных линий штрихи должны пересекаться.

Штрихпунктирную утолщенную линию применяют для обозначения поверхности, подлежащей термообработке или покрытию, для изображения элементов, расположенных перед секущей плоскостью (наложенные проекции).

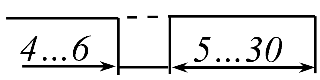


Разомкнутой линией показывают положение линий сечения. В сложных сечениях и разрезах допустимо концы разомкнутой линии соединять штрихпунктирной тонкой линией.



Сплошную тонкую линию с изломами применяют при вычерчивании длинного края оборванного изображения детали.

Штрихпунктирную тонкую линию с двумя точками применяют для обозначения линий сгибов на развертках, для изображения частей изделий в крайних или промежуточных положениях, а также для изображения развертки, совмещенной с видом.



Взаиморасположение линий специального назначения (линий-выносок, размерных линий и др.) устанавливается соответствующими стандартами ЕСКД.

1.5. ШРИФТЫ ЧЕРТЕЖНЫЕ ПО ГОСТ 2.304-81

Все надписи на чертежах следует выполнять шрифтами, установленными ГОСТ 2.304-81 «Шрифты чертежные». Этот ГОСТ включает русский, латинский и греческий алфавиты, а также арабские и римские цифры и знаки. В свою очередь, каждый алфавит содержит прописные (заглавные) и строчные буквы.

Высота прописных букв (***h***) в миллиметрах определяет размер шрифта. Он может быть равен (1,8); 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40 мм. Рекомендуемые размеры шрифта 3,5; 5; 7; 10, рис. 4.

Устанавливаются следующие типы шрифта:

тип А без наклона (толщина линий шрифта *d*=1/14 *h*);

тип А с наклоном около 75 (*d*=1/14 *h*);

тип Б без наклона (*d*=1/10 *h*);

тип Б с наклоном около 75 (*d*=1/101 *h*), рис. 1.4.

Для оформления чертежей рекомендуется применять шрифт типа Б с наклоном. Все параметры указанного шрифта приведены в табл. 4 и 5.

Расположение надписей на чертежах. Современный рабочий чертеж обычно содержит большое число разнообразных цифровых и буквенных надписей, которые необходимо правильно располагать и выполнять четким шрифтом.

Надписи внутри контура проекций (за исключением размерных чисел) помещают только в самых крайних случаях. Если по необходимости надпись должна пересечь линию чертежа, то линию в этом месте следует прервать. Если надпись подчеркивают линией или наносят вдоль нее, то между линией и надписью необходимо оставить просвет приблизительно в 1 мм.

Надписи в спецификациях, ведомостях, основных надписях и т. п., следует располагать, оставляя примерно равные расстояния сверху и снизу от линий, а в соответствующих случаях - и справа и слева.

2. НАЗНАЧЕНИЕ РАБОТЫ №0

Изучение основных положений ЕСКД: ГОСТ 2.301-68 (Форматы), ГОСТ 2.302-68 (Масштабы), ГОСТ 2.303-68 (Линии), ГОСТ 2.304-84 (Шрифты чертежные) и освоения практического их применения при выполнении технических чертежей.

2.1. СОДЕРЖАНИЕ

На формате А3 по образцу, представленному на рис. 1.5, а, по размерам, указанным на рис. 1.5, б, выполнить чертежным шрифтом домашнюю работу №0 (Титульный лист).

Таблица 4

Шрифт типа Б с наклоном

Параметр		Относительн. размер	Размеры. мм							
Размер шрифта	*h*	10*d*	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10	14	20
Высота строчных букв	*c*	7*d*	1,3	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10	14
Расстояние между буквами	*a*	2*d*	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8	4,0
Минимальный шаг строк	*b*	17*d*	3,1	4,3	6,0	8,5	12	17	24	34
Мин. расст. между словами	*e*	6*d*	1,1	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,4	12
Толщина линий шрифта	*d*	*d*	0,18	0,25	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0

Примечания: 1. Расстояние ***a*** между буквами, соседние линии которых не параллельны между собой (например, ГА, АТ), может быть уменьшено наполовину, т.е. на толщину ***d*** линии шрифта.

2. Минимальным расстоянием ***e*** между словами, разделенными знаками препинания, является расстояние между знаком препинания и следующим за ним словом.

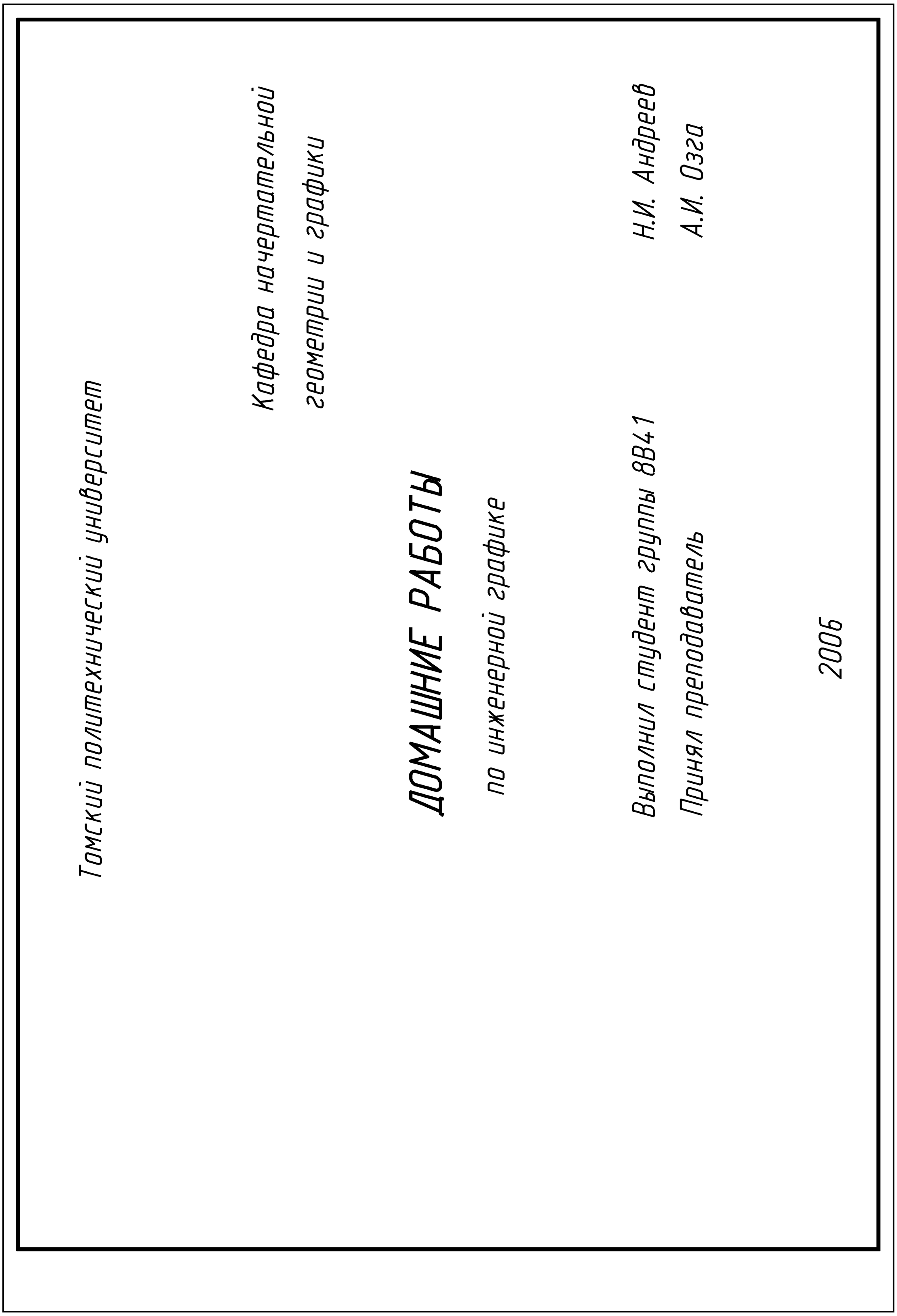
Таблица 5

Ширина букв и цифр для шрифта типа Б с наклоном

Буквы и цифры		Относительн. размер	**Размер шрифта, мм**				
			2,5	3,5	5,0	7,0	10
Ширина цифр и знака №	*1*	3*d*	0,8	1,1	1,5	2,1	3
	4	4,5*d*	1,1	1,6	2,3	3,2	4,5
	2,3,5,6,7,8,9,0	5*d*	1,3	1,8	2,5	3,5	5
	№	10*d*	2,5	3,5	5	7	10
Ширина прописных букв	*Г,Е,З,С*	5*d*	1,5	1,8	2,5	3,5	5
	Б,В,И,Й,К,Л,Н,О,П	6*d*	1,5	2,1	3	4,2	6
	Р,Т,У,Ц,Ч,Ъ,Ь,Э,Я	6*d*	1,5	2,1	3	4,2	6
	А,Д,М,Х,Ы,Ю	7*d*	1,8	2,5	3,5	4,9	7
	Ж,Ф,Ш,Щ	8*d*	2	2,8	4	5,6	8
Ширина строчных букв	*с*	4*d*	1	1,4	2	2,8	4
	з	4,5*d*	1,1	1,6	2,3	3,2	4,5
	а,б,в,г,д,е,и,к,л,н	5*d*	1,3	1,8	2,5	3,5	5
	о,п,р,у,х,ц,ч,ъ,ь,э,я	5*d*	1,3	1,8	2,5	3,5	5
	м,ы,ю	6*d*	1,5	2,1	3	4,2	6
	ж,т,ф,ш,щ	7*d*	1,8	2,5	3,5	4,9	7


АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУ
ФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ
абвгдежзиклмнопрсту
фхцчшщъыьэюя
ABCDEFGHIJKLMNOPQRST
UVWXYZ
abcdefghijklmnopqrst
uvwxyz
1234567890 З №
75°
e
a
d
Группа Разработал
h
g
c
b
Гб Га ГА
ТА Та Тр

Рис. 1.4


Томский политехнический университет

Кафедра начертательной
геометрии и графики

ДОМАШНИЕ РАБОТЫ

по инженерной графике

Выполнил студент группы 8В41 Н.И. Андреев
Принял преподаватель А.И. Озга

2006

Рис. 1.5, а

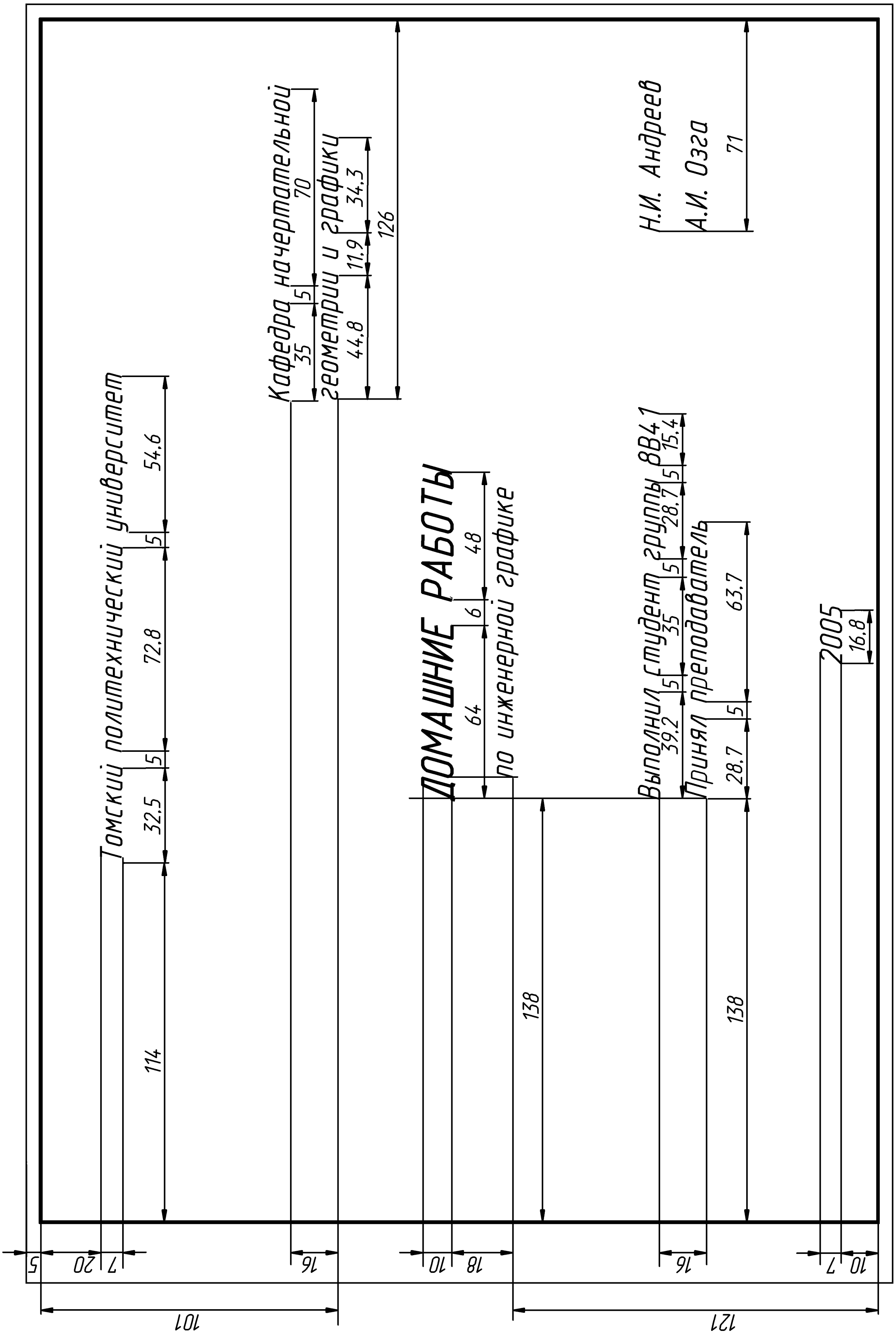

Томский политехнический университет
Кафедра начертательной
геометрии и графики
ДОМАШНИЕ РАБОТЫ
по инженерной графике
Выполнил студент группы 8В41
Н.И. Андреев
Принял преподаватель
А.И. Озга
2005

Рис. 1.5, б

2. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

Изображения объектов трехмерного пространства на плоскости получают методом проецирования.

Аппарат проецирования включает в себя проецируемый объект, проецирующие лучи и плоскость, на которой получается изображение объекта.

2.1. Центральное проецирование

Центральное проецирование представляет собой общий случай проецирования геометрических образов на заданную плоскость. Проецирование осуществляется из некоторой точки – центра проецирования. Центр проецирования не должен находиться в плоскости проекций. На рис. 2.1 точка *S* - центр проецирования, плоскость *P* - плоскость проекций. Чтобы получить центральную проекцию точки, проводят проецирующую прямую через данную точку и центр проецирования. Точка пересечения этой прямой с плоскостью проекций является центральной проекцией заданной точки на выбранную плоскость.

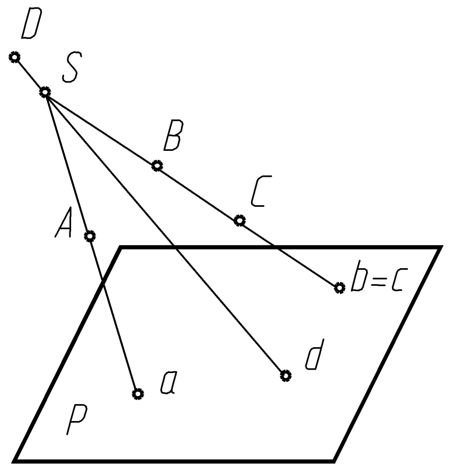


Рис. 2.1

Точки *a, b, c, d* являются центральными проекциями точек *A, B, C, D* на плоскости *P*.

Центральные проекции *b* и *c* двух различных точек *B* и *C*, лежащих на одной проецирующей прямой, совпадают.

Следовательно, при заданных плоскости проекции и центре проецирования одна точка в пространстве имеет одну центральную проекцию. Но одна проекция точки не позволяет однозначно определить положение точки в пространстве. Для обеспечения обратимости чертежа нужны дополнительные условия.

Отметим основные свойства центрального проецирования:

1.При центральном проецировании:

а) точка проецируется в точку;

б) если прямая не проходит через центр проецирования, она проецируется в прямую (проецирующая прямая – в точку);

в) если плоская (двумерная) фигура не принадлежит проецирующей плоскости, она проецируется в двумерную фигуру (если фигура принадлежит проецирующей плоскости, она проецируется в прямую линию);

г) трехмерная фигура проецируется в двумерную;

д) центральные проекции фигур сохраняют взаимную принадлежность, непрерывность и некоторые другие геометрические свойства.

2. При заданном центре проецирования фигуры на параллельных плоскостях подобны.

3. Центральное проецирование устанавливает однозначное соответствие между фигурой и ее изображением, например изображения на киноэкране, фотопленке.

Центральные проекции имеют большую наглядность, но имеют и недостатки. Они заключаются в сложности построения изображения предмета и определения его истинных размеров. Поэтому этот способ имеет ограниченное применение. Центральное проецирование применяется при построении перспектив зданий и сооружений, в живописи и т.д.

2.2. Параллельное проецирование

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального проецирования. При этом центр проецирования удален в бесконечность (S_∞). При параллельном проецировании применяют параллельные проецирующие прямые. Их проводят в заданном направлении относительно плоскости проекций. Если направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то проекции называют ***прямоугольными или ортогональными***, в других случаях – ***косоугольными.***

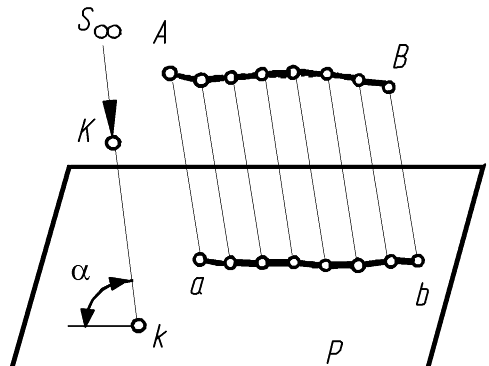


Рис. 2.2

На рис. 2.2 направление проецирования указано стрелкой под углом $\alpha \neq 90°$ к плоскости проекций P.

При параллельном проецировании сохраняются все свойства центрального проецирования, которые дополняются новыми:

1. Параллельные проекции взаимно параллельных прямых параллельны, а отношение длин отрезков этих прямых равно отношению длин их проекций.

2. Плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в такую же фигуру.

3. Параллельный перенос фигуры в пространстве или плоскости проекций не изменяет вида и размеров проекции фигуры.

Применяя приемы параллельного проецирования точки и линии, можно строить параллельные проекции поверхности и тела. Параллельные проекции, как и центральные, не обеспечивают обратимости чертежа.

Способ прямоугольных проекций

Чертеж в системе прямоугольных проекций образуется при проецировании предмета не на одну, а на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Этот способ является частным случаем параллельного проецирования. Направление проецирования l перпендикулярно плоскости проекций. Из точки опускается перпендикуляр на плоскость проекций. Основание перпендикуляра является прямоугольной (ортогональной) проекцией точки.

Осуществлять проецирование на две взаимно перпендикулярные плоскости впервые предложил Гаспар Монж.

Такое проецирование обеспечивает обратимость чертежа. ***Обратимость чертежа – однозначное определение положения точки в пространстве по ее проекциям.*** Одну из плоскостей принято располагать горизонтально – ее называют ***горизонтальной плоскостью проекций H***, другую - ей перпендикулярно. Такую вертикальную плоскость называют ***фронтальной плоскостью проекций V***. Эти плоскости проекций пересекаются по линии, которая называется ***осью проекций*** (рис. 2.3).

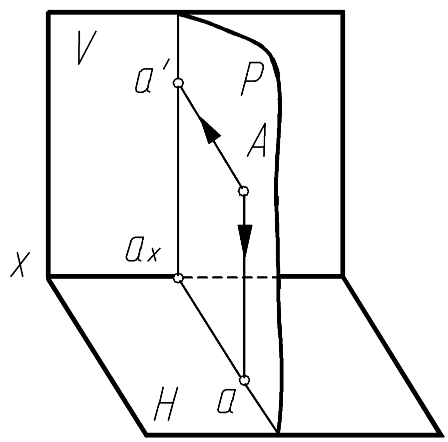


Рис. 2..3

Чтобы получить проекции точки на плоскости, опускаем из точки A в пространстве перпендикуляры (проецирующие лучи) до встречи с плоскостями H и V. Проецирующие лучи образуют плоскость P. Эта плоскость перпендикулярна плоскостям H и V и пересекает их по прямым, перпендикулярным оси проекций, а саму ось в точке a_x, то есть прямые aa_x, $a'a_x$ и ось x взаимно перпендикулярны.

Построение некоторой точки A в пространстве по двум заданным ее проекциям – горизонтальной a и фронтальной a' показано на рис. 2.4. Точку A находят в пересечении перпендикуляров, проведенных из проекции a к плоскости H и из проекции a' к плоскости V. Проведенные перпендикуляры принадлежат одной плоскости P, перпендикулярной плоскостям H и V, и пересекаются в единственной искомой точке A пространства.

Таким образом, две прямоугольные проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве относительно данной системы взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

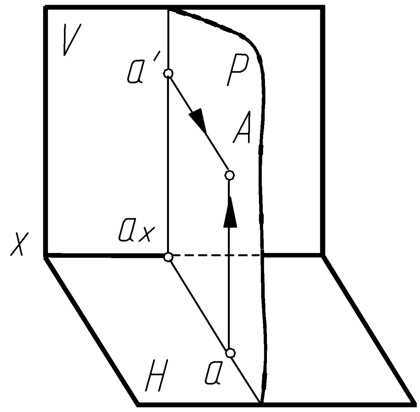


Рис. 2.4

3. ТОЧКА И ПРЯМАЯ

Для полного выявления наружных и внутренних форм деталей и их соединений вводят три и более плоскости проекций.

Введем в систему плоскостей *H* и *V* третью плоскость. Располагаем ее перпендикулярно плоскостям *H* и *V*. Эту плоскость называют ***профильной плоскостью проекций*** и обозначают буквой ***W*** (рис. 3.1). Плоскость *W* пересекает плоскость *H* и *V* по линиям (осям проекций) *y* и *z*. Точку пересечения всех осей называют ***началом координат*** и обозначают буквой *O* (начальная буква латинского слова «*origo*» – начало). Оси *x, y, z* взаимно перпендикулярны.

Три взаимно-перпендикулярные плоскости делят пространство на восемь частей, восемь октантов (рис. 3.2) (от лат. *octo* – восемь).

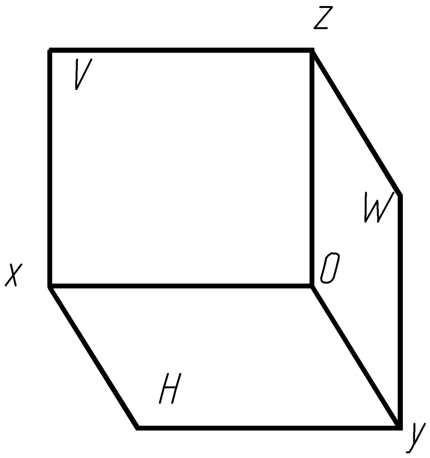


Рис. 3.1

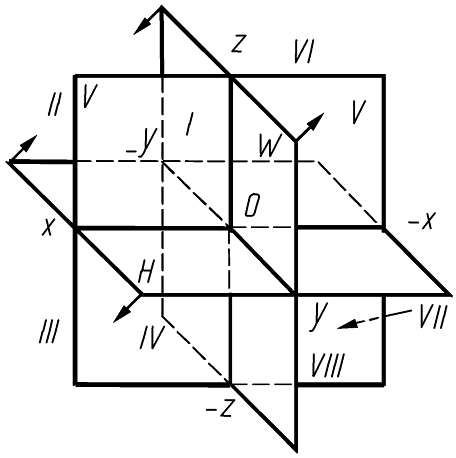


Рис. 3.2

В нашей стране принята европейская система расположения проекций. Ось *x* направлена от начала координат влево, *y* – вперед (к нам), *z* – вверх. Обратные направления координатных осей считаются отрицательными.

3.1. Чертеж точки

Опустим из точки *A* проецирующие лучи (перпендикуляры) до пересечения с плоскостями проекций *H, V* и *W*. Точки пересечения перпендикуляров с плоскостями проекций – это проекции точки на каждую из плоскостей проекций:

a – горизонтальная;

a′ – фронтальная;

a″ – профильная.

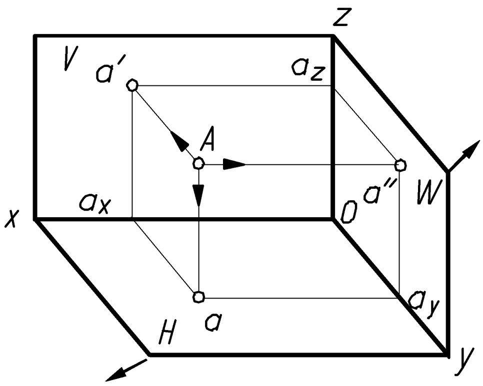


Рис. 3.3

Данное наглядное изображение точки в системе плоскостей *H*, *V* и *W* (рис. 3.3) неудобно для черчения из-за сложности. Преобразуем его так, чтобы горизонтальная и профильная плоскости проекций совпали с фронтальной плоскостью проекций, образуя одну плоскость чертежа (рис. 3.4).

Это преобразование осуществляют путем поворота вокруг оси *x* плоскости *H* на угол 90° вниз и плоскости *W* на угол 90° вправо вокруг оси *z*. В результате указанного совмещения плоскостей получаем чертеж, который называется ***эпюр Монжа*** (от франц. *epure* – чертеж, проект).

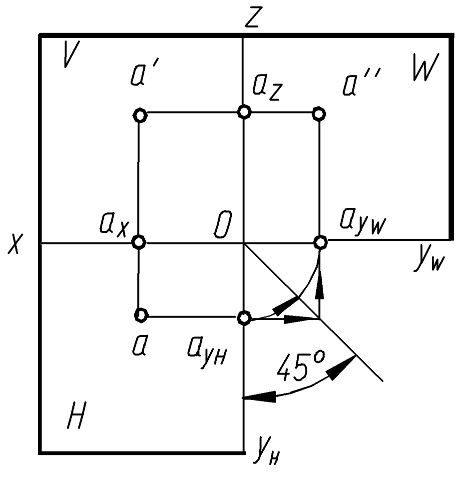


Рис. 3.4

На эпюре мы не можем показать пространственную картину расположения плоскостей проекций и точки. Но эпюр обеспечивает точность изображений при значительной простоте построений.

В дальнейшем эпюр Монжа, а также проекционные чертежи будем называть одним словом – ***чертеж*** (или комплексный чертеж).

Горизонтальная и фронтальная проекции точки (*a* и *a′*) расположены на одном перпендикуляре к оси *x* – на линии связи *aa′*, фронтальная и профильная проекции (*a′* и *a″*) – на одном перпендикуляре к оси *z* – на линии связи *a′a″*.

Построение профильной проекции точки по ее фронтальной и горизонтальной проекциям показано на рис. 3.4. При построении можно использовать дугу окружности с центром в точке *O*, или биссектрису угла $y_H O y_W$. Первый способ более точный.

Таким образом, на комплексном чертеже трех ортогональных проекций точки

- две проекции находятся на одной линии связи;
- линии связи перпендикулярны осям проекций;
- две проекции точки определяют положение ее третьей проекции;
- две проекции точки определяют положение точки в пространстве.

Положение точки в пространстве задается при помощи трех ее координат (абсциссы x, ординаты y и аппликаты z), то есть трех чисел, выражающих расстояние от этой точки до координатных плоскостей проекций. Запись координат точки производят в такой форме: $A\ (x,\ y,\ z)$.

Положение точки на плоскости определяется двумя координатами:

$$a(x,y); \qquad a'(x,z); \qquad a''(y,z).$$

По отношению к плоскостям проекций точка может занимать как общее (точка A), так и частные (точки B и C) положения (рис. 3.5). Если точка лежит в плоскости проекций, то две ее проекции лежат на осях проекций (точка B). У такой точки одна ее координата равна нулю. Если точка принадлежит одновременно двум плоскостям проекций (точка C), то она лежит на оси проекций. Две ее проекции совпадают, а третья совпадает с точкой O – началом координат. В этом случае две ее координаты равны нулю. Если точка принадлежит трем плоскостям проекций, то она расположена в начале координат.

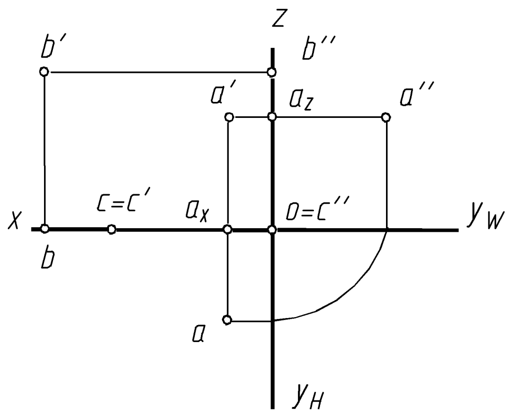


Рис. 3.5

Таким образом, величины отрезков линий связи на чертеже определяют численное расстояние проецируемой точки до плоскости проекций. Отрезок a_xa указывает, на каком расстоянии (глубине) расположена точка от фронтальной плоскости проекций, отрезок a_xa' – расстояние (высоту) от точки до горизонтальной плоскости проекций и отрезок $a'a_z$ – расстояние от точки до профильной плоскости проекций (рис. 3.4).

3.2. Взаимное положение двух точек. Условия видимости на чертеже

Рассмотрим чертеж модели, изображенной на рис. 3.6. Проекции некоторых точек совпадают, так как они расположены на одной проецирующей прямой. Например, на горизонтальной плоскости совпали проекции a и b вершин A и B – они лежат на одной горизонтально – проецирующей прямой. На фронтальной плоскости совпали проекции c' и d' вершин C и D – они лежат на одной фронтально-проецирующей прямой.

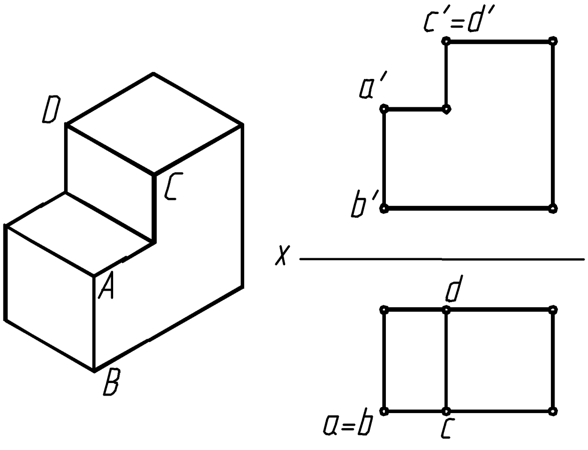


Рис. 3.6

Точки, лежащие на одной проецирующей прямой, называют ***конкурирующими***. A и B – горизонтально-конкурирующие точки, а C и D – фронтально-конкурирующие точки и т.д.

Ясно, что если две точки лежат на одной проецирующей прямой, то одна из них закрывает другую. Как определить, какая из них будет видимая и какая невидимая?

Из двух горизонтально-конкурирующих точек на горизонтальной плоскости видима та, которая расположена в пространстве выше.

Анализируя положение фронтальных проекций точек (рис. 3.7), определяем, что точка A имеет большую координату z, чем точка B. Следовательно, точка A расположена выше точки B и при проецировании на горизонтальную плоскость проекций закроет точку B. Точка A на горизонтальной плоскости видима, точка B – невидима. На фронтальной плоскости они обе видимы.

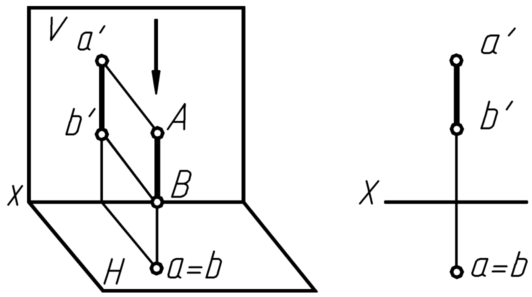


Рис. 3.7

Из двух фронтально-конкурирующих точек на фронтальной плоскости проекций будет видима та, которая расположена ближе к наблюдателю, стоящему лицом к фронтальной плоскости проекций (рис. 3.8).

Какая из точек ближе к наблюдателю, можно определить по горизонтальным проекциям. Например, сравнивая горизонтальные проекции точек D и C , заключаем, что на фронтальной плоскости проекций видима точка C, а точка D – невидима, так как $y_C > y_D$.

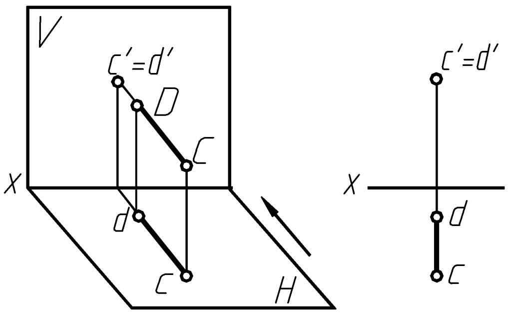


Рис. 3.8

Из двух профильно - конкурирующих точек на профильной плоскости проекций будет видима та точка, которая расположена левее.

Итак, если на чертеже одноименные проекции точек не совпадают или совпадает только одна пара проекций, то такие точки в пространстве не совпадают, а удалены друг от друга на определенное расстояние (рис. 3.7, 3.8).

3.3. Чертеж отрезка прямой. Прямые частного положения

Наглядное изображение отрезка *AB* прямой и его ортогональное проецирование на плоскость *P* показано на рис. 3.9. Рассмотрим ортогональное проецирование отрезка *AB* с учетом свойств параллельного проецирования. Проецирующие прямые *Aa* и *B* образуют проецирующую плоскость *Q*. Линия пересечения плоскостей *Q* и *P* проходит через проекции *a* и *b* точек *A* и *B* на плоскости проекций *P*. Эта линия и является единственной проекцией прямой *AB* на плоскости проекций *P*.

Наглядное изображение проецирования отрезка *AB* прямой на две плоскости проекций в системе *H, V* показано на рис. 3.10, чертеж – на рис. 3.11.

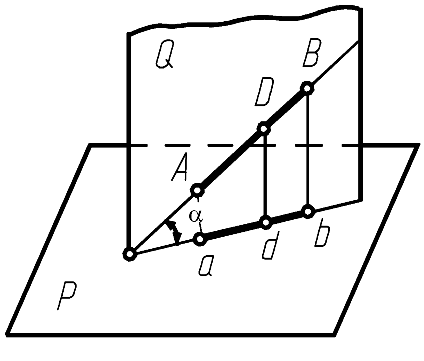


Рис. 3.9

Если какая-либо точка принадлежит прямой, то ее проекция принадлежит проекции прямой. Например, точка *D* (рис. 3.9) принадлежит прямой *AB*, ее проекции – проекциям прямой.

Относительно плоскостей проекции прямая может занимать различные положения:

– не параллельное ни одной из плоскостей проекций *H, V, W;*

– параллельное одной из плоскостей проекций (прямая может и принадлежать этой плоскости);

– параллельное двум плоскостям проекций, то есть перпендикулярное третьей.

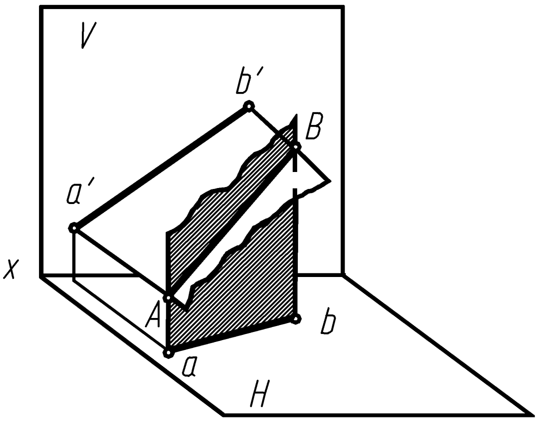


Рис. 3.10

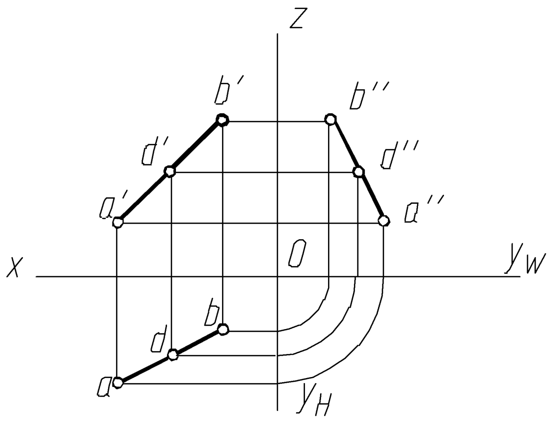


Рис. 3.11

Прямую, не параллельную ни одной из плоскостей проекций, называют ***прямой общего положения*** (рис. 3.9 – 3.11). Прямую, параллельную одной из плоскостей проекций или двум плоскостям проекций (то есть перпендикулярную третьей), называют ***прямой частного положения.***

На рис. 3.12 – 3.14 приведены наглядные изображения и чертежи прямых частного положения – прямых, параллельных плоскостям проекций. Такие прямые называют ***прямыми уровня.*** Различают три вида таких прямых.

Прямая *AB* параллельна плоскости *H*

Такую прямую ее называют ***горизонтальной прямой*** (рис. 3.12).

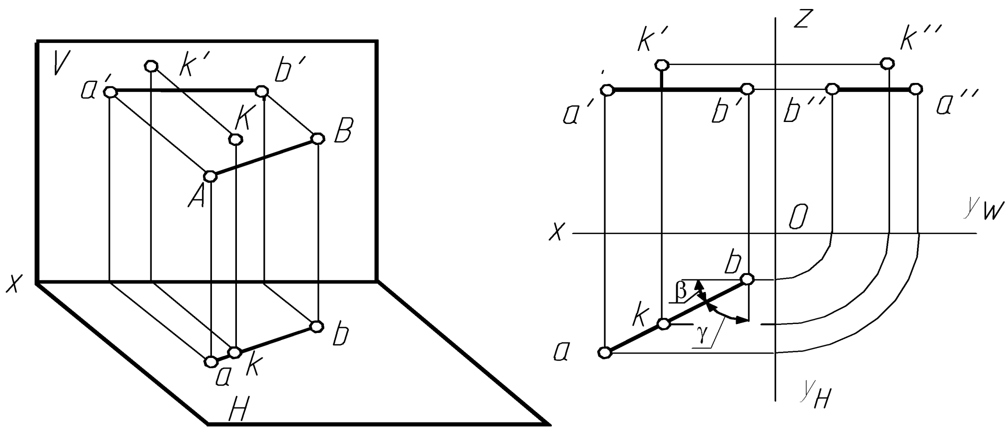


Рис. 3.12

Фронтальная проекция прямой $a'b'$ параллельна оси x; профильная проекция $a''b''$ параллельна оси y_W; длина горизонтальной проекции отрезка равна длине самого отрезка $ab=AB$; угол β, образованный горизонтальной проекцией и осью проекции x, равен углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций; угол γ, образованный горизонтальной проекцией и осью проекции y_H, равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций:

$$|ab| = |AB|; \quad (a'b') \parallel (Ox); \quad (a''b'') \parallel (Oy_w);$$
$$(AB\,\hat{}\,V) = (ab\,\hat{}\,Ox) = \beta; \quad (AB\,\hat{}\,W) = (ab\,\hat{}\,Oy_H) = \gamma.$$

Прямая *CD* параллельна плоскости *V*

Такую прямую называют ***фронтальной прямой*** (рис. 3.13).

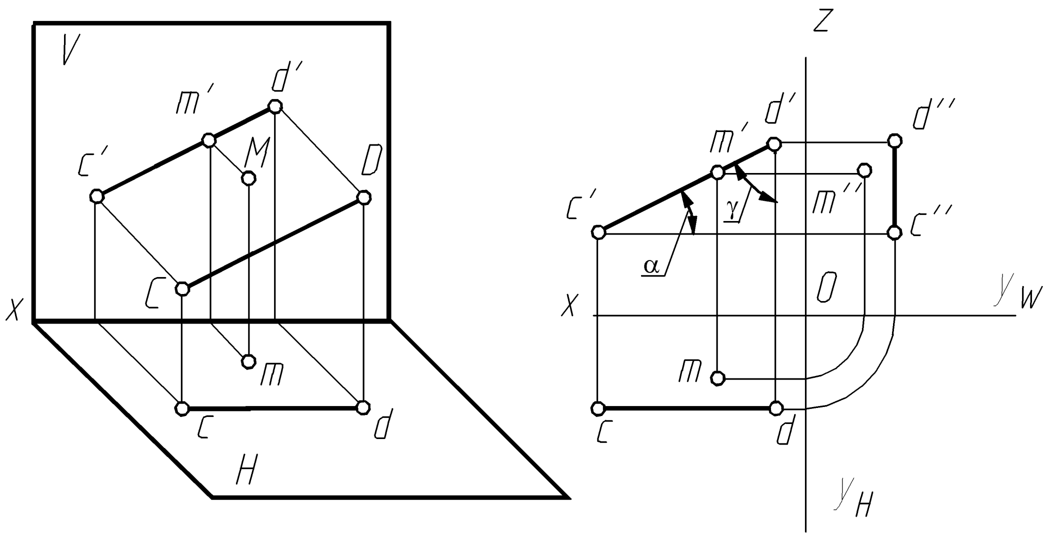


Рис. 3.13

Горизонтальная проекция прямой cd параллельна оси x; профильная проекция $c''d''$ параллельна оси z; длина фронтальной проекции отрезка равна длине самого отрезка $c'd'=CD$; угол α, образованный фронтальной проекцией и осью проекций x, равен углу наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций; угол γ, образованный фронтальной проекцией и осью z, равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций:

$$|c'd'| = |CD|; \quad (cd) \parallel (Ox); \quad (c''d'') \parallel (Oz);$$
$$(CD\,\hat{}\,H) = (c'd'\,\hat{}\,Ox) = \alpha; \quad (CD\,\hat{}\,W) = (c''d''\,\hat{}\,Oz) = \gamma.$$

Прямая *EF* параллельна плоскости *W*

Такая прямая носит название ***профильная прямая*** (рис. 3.14).

Горизонтальная проекция прямой ef параллельна оси y_H; фронтальная проекция $e'f'$ параллельна оси z; длина профильной проекции отрезка равна длине самого отрезка $e''f''=EF$, углы α и β, образованные профильной проекцией с осями y_W и z, равны углам наклона прямой к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций соответственно:

$$|e''f''| = |EF|; \quad (ef) \parallel (Oy_H); \quad (e'f') = (Oz);$$
$$(EF \wedge H) = (e''f'' \wedge Oy_w) = \alpha; \quad (EF \wedge V) = (e''f'' \wedge Oz) = \beta.$$

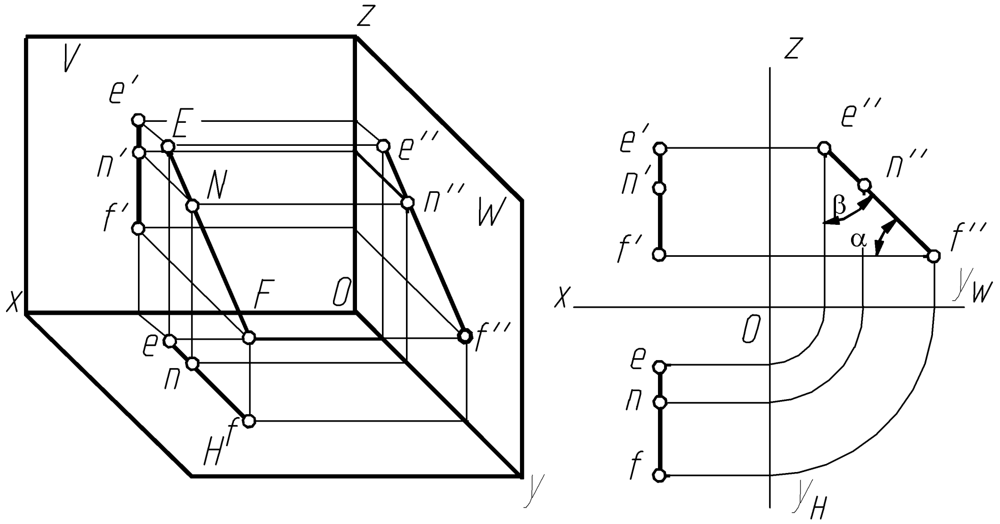


Рис. 3.14

Следовательно, каждая линия уровня проецируется в истинную величину на ту плоскость проекций, которой она параллельна. На ту же плоскость проекций проецируются без искажения и углы, которые эта прямая образует с остальными двумя плоскостями проекций.

На рис. 3.15 приведены чертежи прямых, перпендикулярных плоскостям проекций. Такие прямые называются ***проецирующими прямыми.***

Прямая *AB* перпендикулярна плоскости *H*

AB – горизонтально-проецирующая прямая. Ее проекция $a'b'$ перпендикулярна оси x, проекция $a''b''$ перпендикулярна оси y_w, проекции a и b совпадают (рис. 3.15, а):

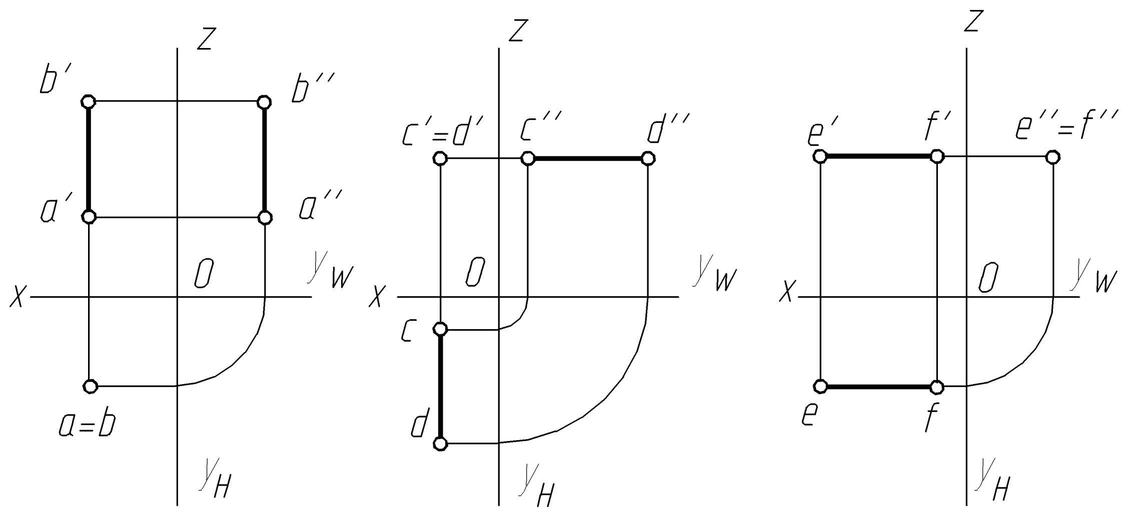
$$(AB) \perp H; \quad (AB) \parallel V; \quad (AB) \parallel W;$$
ab – точка; $|a'b'| = |a''b''| = |AB|; \quad (a'b') \perp (Ox); \quad (a''b'') \perp (Oy_w).$

Прямая *CD* перпендикулярна плоскости *V*

CD – фронтально-проецирующая прямая. Ее проекция cd перпендикулярна оси x, проекция $c''d''$ перпендикулярна оси z, проекции c' и d' совпадают (рис. 3.15, б):

$(CD) \perp V; \quad (CD) \,//\, H; \quad (CD) \,//\, W;$

$c'd'$ – точка; $|cd| = |c''d''| = |CD|; \quad (cd) \perp (Ox); \quad (c''d'') \perp (Oz).$



а *б* *в*

Рис. 3.15

Прямая *EF* перпендикулярна плоскости *W*

EF – профильно-проецирующая прямая. Ее проекция *ef* перпендикулярна оси y_H, проекция $e'f'$ перпендикулярна оси z, проекции e'' и f'' совпадают (рис. 3.15, в):

$(EF) \perp W; \quad (EF) \,//\, H; \quad (EF) \,//\, V;$

$e''f''$ – точка; $|ef| = |e'f'| = |EF|; \quad (ef) \perp (Oy_н); \quad (e'f') \perp (Oz).$

Из чертежа видно, что проецирующая прямая является вместе с тем и прямой двойного уровня, так как она параллельна одновременно двум другим плоскостям проекций.

Следовательно, на две плоскости проекций проецирующие прямые проецируются без искажения, то есть в натуральную величину, а на третью – в точку.

3.4. Взаимное положение точки и прямой

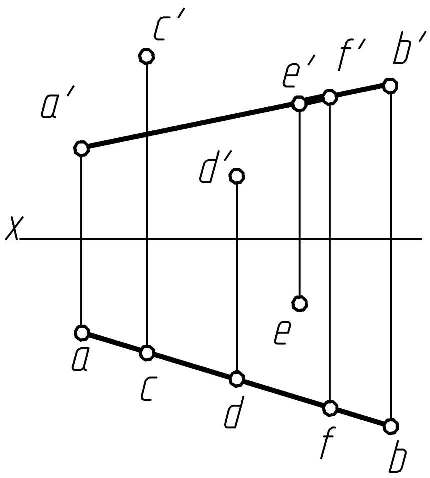


Рис. 3.16

Точка и прямая в пространстве могут быть различно расположены относительно друг друга и плоскости проекций.

Если точка в пространстве принадлежит прямой, то ее проекции принадлежат соответствующим проекциям этой прямой.

На рис. 3.12 – 3.14 это положение показано на наглядных изображениях и чертежах прямых линий и точек.

Рассмотрим еще раз это положение на плоскостном чертеже (рис. 3.16).

Точка F принадлежит прямой AB, так как горизонтальная проекция f точки принадлежит горизонтальной проекции ab прямой, а фронтальная проекция f' точки принадлежит фронтальной проекции $a'b'$ прямой:

$(\cdot)\ F \in (AB) \Rightarrow (f \in ab) \wedge (f' \in a'b')$.

Точка C лежит над прямой AB, точка D лежит под прямой AB, точка E лежит за прямой AB:

$(\cdot)\ C \notin (AB) \Rightarrow (c \in ab) \wedge (c' \notin a'b')$;

$(\cdot)\ D \notin (AB) \Rightarrow (d \in ab) \wedge (d' \notin a'b')$;

$(\cdot)\ E \notin (AB) \Rightarrow (e \notin ab) \wedge (e' \in a'b')$.

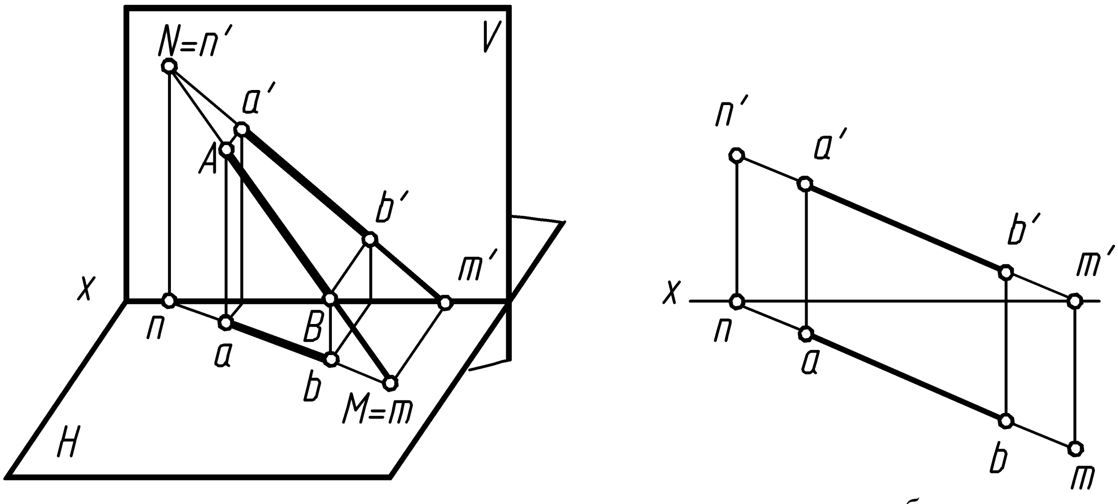
3.5. Следы прямой

Точки пересечения прямой линии с плоскостями проекций называются ***следами прямой.*** На рис. 3.17,а точка M – горизонтальный след прямой, точка N – фронтальный.

Горизонтальная проекция m горизонтального следа прямой совпадает с самим следом – точкой M (рис. 3.17, а), а фронтальная проекция этого следа m' лежит на оси x. Фронтальная проекция n' фронтального следа прямой совпадает с фронтальным следом – точкой N, а горизонтальная проекция n лежит на той же оси проекций.

Чтобы построить на плоскостном чертеже горизонтальный след прямой (точки m и m'), надо продолжить фронтальную проекцию $a'b'$ прямой до пересечения с осью x (точка m'). Затем через нее провести перпендикуляр к оси x до пересечения с продолжением горизонтальной проекции ab. Точка m – горизонтальная проекция горизонтального следа.

Для построения проекций фронтального следа (точек n и n') необходимо продолжить горизонтальную проекцию ab прямой до пересечения с осью x (точка n). Затем через нее провести перпендикуляр к оси x до пересечения с продолжением фронтальной проекции $a'b'$. Точ-



а б

Рис. 3.17

ка n' – фронтальная проекция фронтального следа. Построение проекций следов прямой показано на рис. 3.17,б.

Прямая может пересекать и профильную плоскость проекций, то есть иметь профильный след. Этот след на профильной плоскости проекций совпадает со своей проекцией. Фронтальная и горизонтальная проекции его лежат соответственно на осях z и y.

3.6. Взаимное положение двух прямых

Прямые в пространстве могут занимать различные взаимные положения:

- пересекаться, то есть иметь одну общую точку;
- быть параллельными, если точка пересечения прямых удалена в бесконечность;
- скрещиваться, то есть не иметь общих точек.

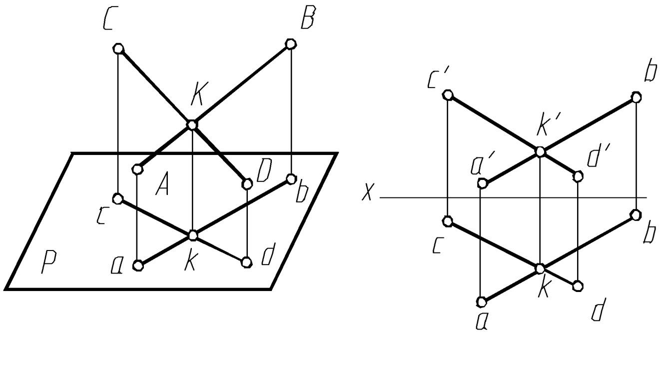


Рис. 3.18

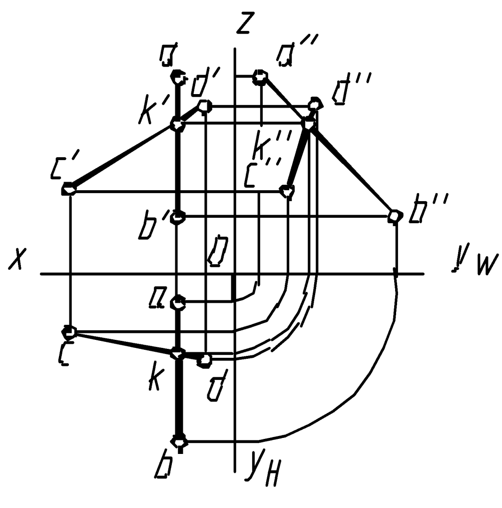


Рис. 3.19

Пересекающиеся прямые. Если прямые пересекаются, то их одноименные проекции пересекаются между собой и точки пересечения проекций лежат на одной линии связи.

Наглядное изображение двух прямых *AB* и *CD*, пересекающихся в точке *K*, приведено на рис. 3.18, а; их чертеж в системе плоскостей *H* и *V* - на рис. 3.18, б.

Если одна из прямых профильная, то чтобы ответить на вопрос, пересекаются ли прямые, следует построить их профильные проекции.

На рис. 3.19 все проекции точки *K (k, k′, k″)* одновременно принадлежат прямой *AB* и прямой *CD.* Это значит, что прямые *AB* и *CD* пересекаются.

На рис. 3.20 профильная проекция *k″* точки *K* принадлежит профильной проекции *c″d″* и не принадлежит профильной проекции *a″b″*. Это значит, что прямые *AB* и *CD* не пересекаются, они скрещиваются.

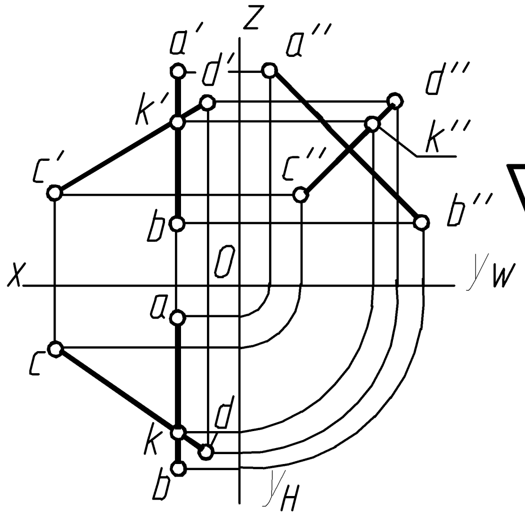


Рис. 3.20

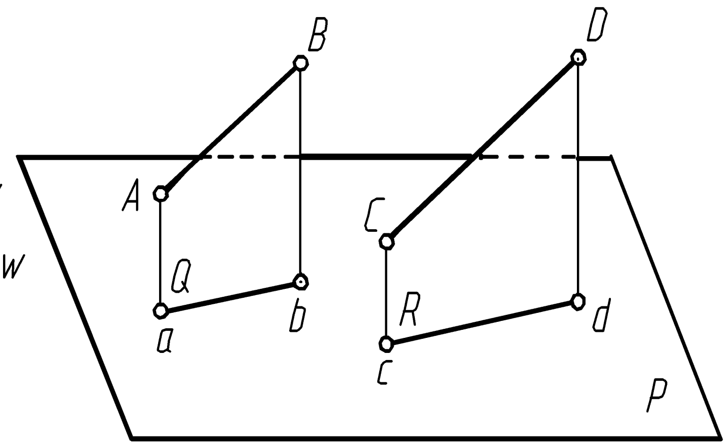


Рис. 3.21

Параллельные прямые. Если прямые в пространстве параллельны, то их одноименные проекции параллельны между собой. Действительно, на рис. 3.21 проецирующие плоскости *Q* и *R*, проведенные через параллельные прямые *AB* и *CD*, параллельны между собой. С плоскостью проекций *P* они пересекаются по параллельным прямым *ab* и *cd* – проекциям прямых *AB* и *CD.* Чертеж двух параллельных прямых общего положения приведен на рис. 3.22, чертежи параллельных прямых частного оложения – на рис. 3.23:

а) горизонтальных прямых (рис. 3.23, а);

б) фронтальных прямых (рис. 3.23, б);

в) профильных прямых (рис. 3.23, в).

О параллельности прямых в пространстве можно судить по параллельности их одноименных проекций на двух плоскостях проекций. При этом нужно учитывать некоторые условия.

Для прямых общего положения: если одноименные проекции прямых общего положения параллельны в системе двух любых плоскостей проекций, то прямые параллельны (рис. 3.22).

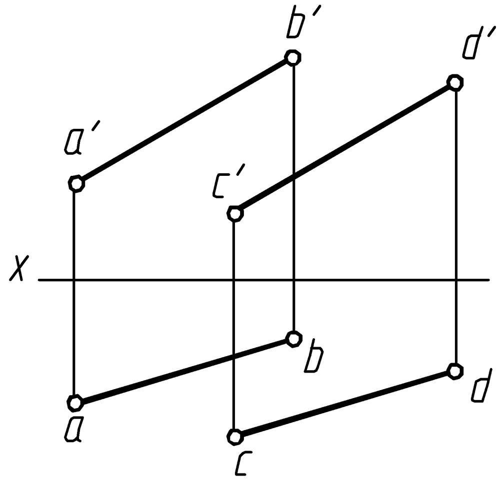
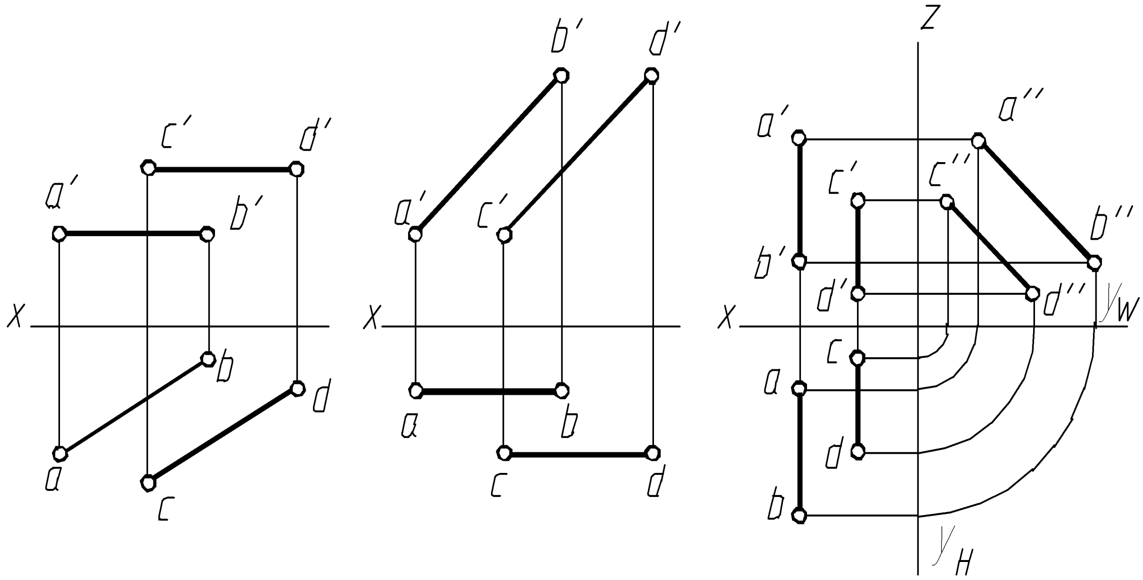


Рис. 3.22

Для прямых частного положения: если одноименные проекции прямых параллельны одной из осей проекций, то прямые параллельны при условии параллельности одноименных проекций на той плоскости проекций, которой параллельны прямые (рис. 3.23).



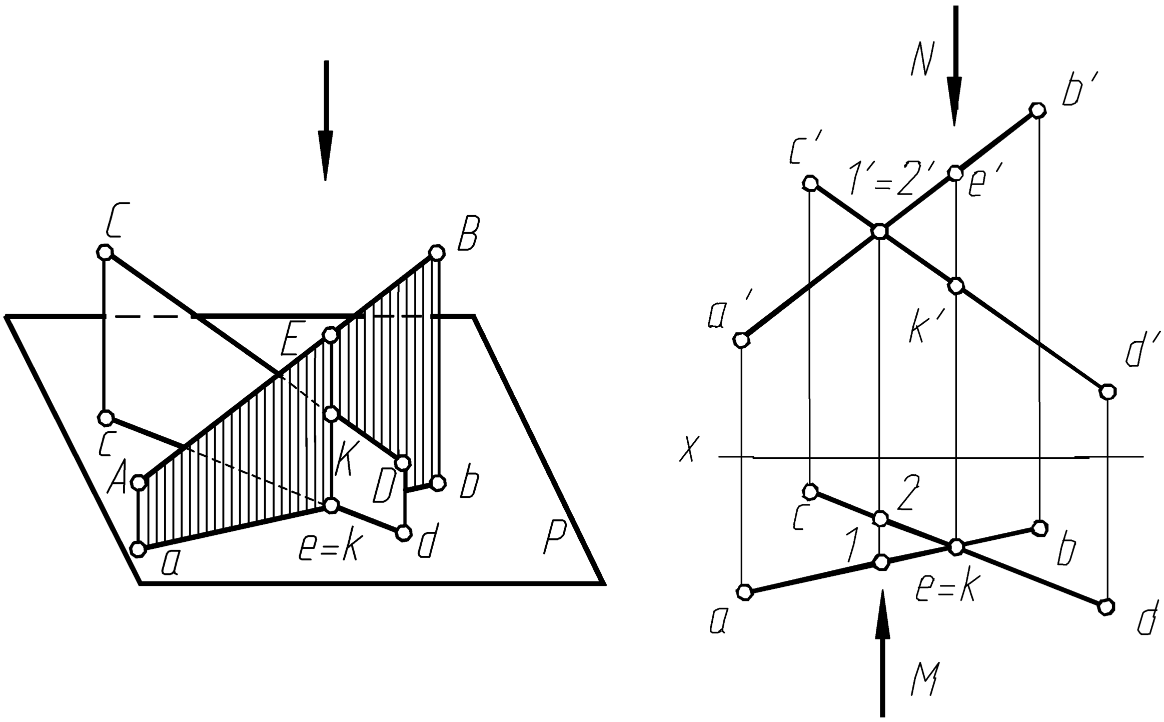
AB//H
а

AB//V
б

AB//W
в

Рис. 3.23

Скрещивающиеся прямые. Если прямые в пространстве не пересекаются, а скрещиваются (рис. 3.24), то хотя на чертеже их одноименные проекции и пересекаются, но точки пересечения проекций не лежат на одной линии связи. Эти точки не являются общими для прямых.



а *б*

Рис. 3.24

Сравнивая положение таких точек, определяют, какая из изображенных на чертеже прямых выше другой или ближе другой к наблюдателю.

На рис. 3.24,а видно, что точка *E* (принадлежащая прямой *AB*) расположена выше точки *K* (принадлежащей прямой *CD*). При взгляде сверху по указанной стрелке точка *E* закрывает точку *K*. Соответственно и на чертеже (рис. 3.24, б) фронтальная проекция *e*′ расположена выше фронтальной проекции *k*′. При взгляде сверху по стрелке *N* при проецировании на плоскость *H* точка *e* закрывает точку *k*. Прямая *AB* проходит над прямой *CD*.

На плоскости *V* совпадают фронтальные проекции 1′ и 2′ точек прямых *AB* и *CD*. При взгляде спереди по стрелке *M* видно, что точка 1 прямой *AB* находится ближе к наблюдателю, и при проецировании на плоскость *V* точка 1 прямой *AB* закрывает точку 2 прямой *CD*. Прямая *AB* расположена ближе к наблюдателю.

Рассмотренные точки скрещивающихся прямых, проекции которых на одной из плоскостей совпадают, называются ***конкурирующими точками.***

3.7. Проецирование плоских углов

Любой линейный угол образуется двумя пересекающимися прямыми. На плоскости проекций он проецируется в общем случае с искажением. Однако, если обе стороны угла параллельны какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость угол проецируется без искажения. Например, стороны угла *ABC* (рис. 3.25) параллельны горизонталь-

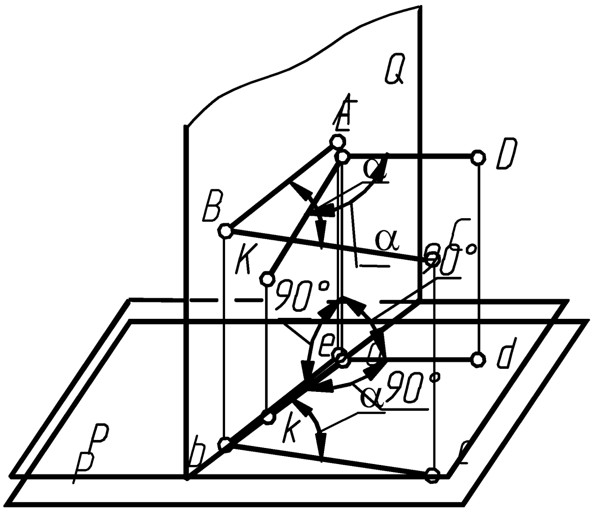


Рис. 3.25

ной плоскости *P*, поэтому угол α спроецировался на нее без изменений.

Исключение составляет прямой угол. Он проецируется в истинную величину даже тогда, когда лишь одна из его сторон параллельна плоскости проекций. Рассмотрим теорему о проецировании прямого угла.

Теорема. Прямой угол проецируется в виде прямого угла, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а вторая ей не перпендикулярна.

Пусть сторона *ED* прямого угла *KED* параллельна плоскости *P*, а сторона *EK* ей не перпендикулярна (рис. 3.26). Требуется доказать, что его проекция – угол *ked* – равна 90°.

$$(ED \perp EK) \wedge (ED \parallel P)\ (EK \not\perp P) \Rightarrow (ed) \perp (ek).$$

Доказательство. Спроецируем стороны угла на плоскость *P*. Для этого проведем проецирующие лучи перпендикулярно плоскости. Через прямые *EK* и *Ee* проведем дополнительную плоскость *Q*. Плоскость *Q* (так как она проведена через прямую *Ee*, перпендикулярную плоскости *P*) перпендикулярна плоскости *P*. Прямая *ED* перпендикулярна плоскости *Q*, так как она перпендикулярна двум прямым этой плоскости *EK* и *Ee.* Прямая *ed* также перпендикулярна плоскости *Q*, так как прямая *ED* и ее проекция *ed* параллельны между собой по условию. Следовательно, прямая *ed* перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости, в том числе и прямой *ek*. Значит, угол *ked* – прямой.

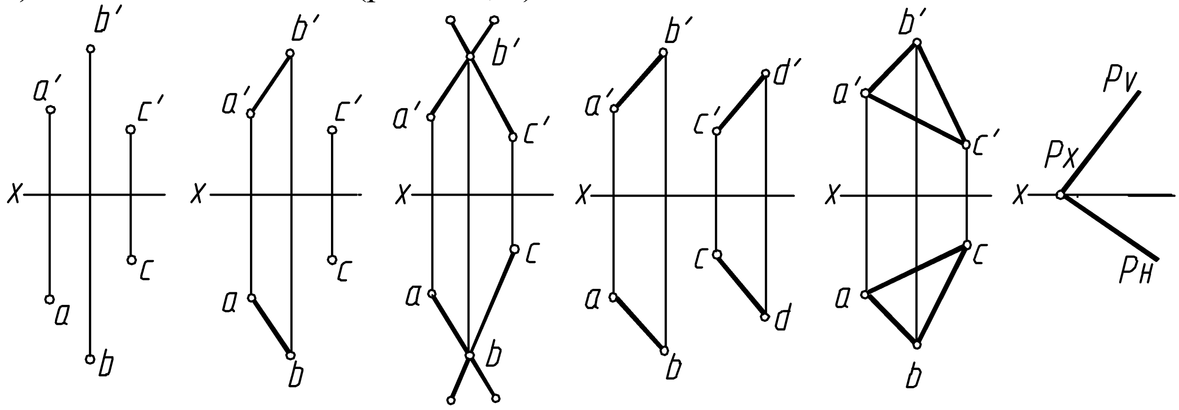
$$(EK) \wedge (Ee) \subset Q;\ \ (ED) \perp (EK);\ \ (ED) \perp (Ee);\ \ (ED) \perp Q;$$
$$(ed) \,//\, (ED),\ \ (ed) \perp Q;\ \ (ed) \perp (ek);\ \ \text{угол } ked = 90°.$$

4. ПЛОСКОСТЬ

4.1. Способы задания плоскости

На чертеже плоскость может быть задана (рис. 4.1) несколькими способами:

а) проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой (рис. 4.1, а);
б) проекциями прямой и точки, не лежащей на этой прямой (рис. 4.1, б);
в) проекциями двух пересекающихся прямых (рис. 4.1, в);
г) проекциями двух параллельных прямых (рис. 4.1, г);
д) проекциями любой плоской фигуры (рис. 4.1, д;
е) следами плоскости (рис. 4.1, е).



а *б* *в* *г* *д* *е*

Рис. 4.1

От одного задания плоскости можно перейти к другому. Например, если мы проведем через точки *A* и *B* (рис. 4.1, а) прямую, то от задания плоскости тремя точками мы перейдем к заданию плоскости точкой и прямой (рис. 4.1, б) и т.д.

В ряде случаев плоскость более наглядно может быть изображена при помощи прямых, по которым она пересекает плоскости проекций.

Прямые, по которым плоскость пересекает плоскости проекций, называются ***следами плоскости*** (рис. 4.2):

P_V – фронтальный след плоскости *P*;

P_H – горизонтальный след плоскости *P*;

P_W –профильный след плоскости *P*.

Точки пересечения плоскости с осями проекций *(P_x, P_y, P_z)* называются ***точками схода следов***.

Чтобы построить след плоскости, необходимо построить одноименные следы двух прямых, лежащих в плоскости (рис. 4.2).

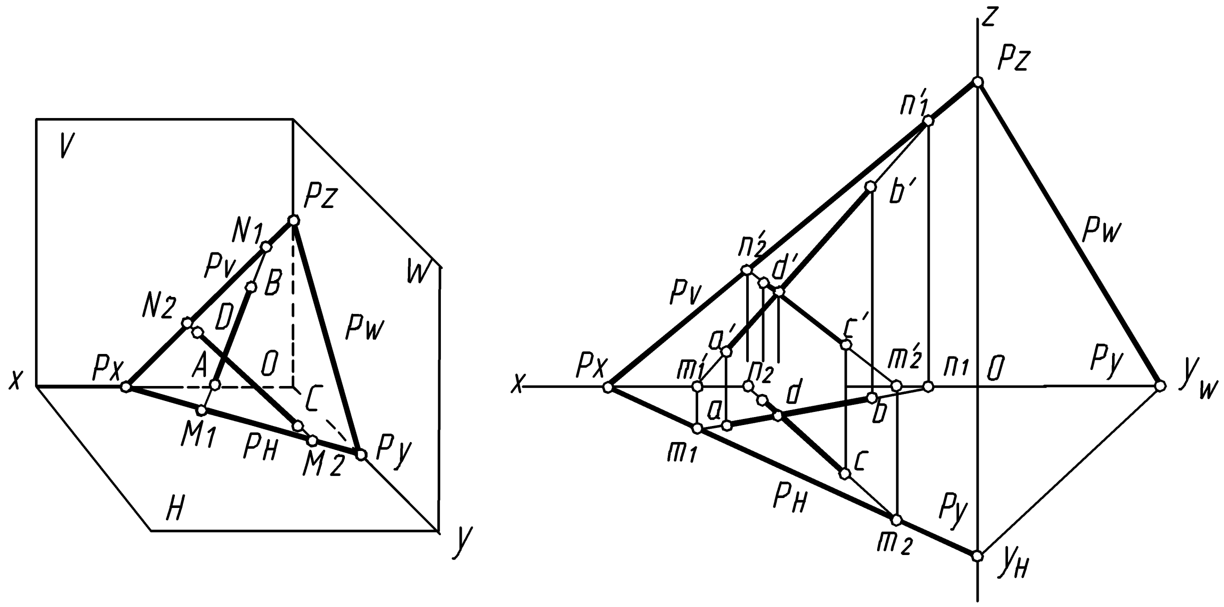


Рис. 4.2

4.2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций

Относительно плоскостей проекций плоскость может занимать следующие положения:

1. Наклонена ко всем плоскостям проекций.
2. Перпендикулярна плоскости проекций.
3. Параллельна плоскости проекций.

Плоскость, не перпендикулярную и не параллельную ни одной из плоскостей проекций, называют ***плоскостью общего положения.*** Такими являются плоскости, изображенные на рис. 4.1, 4.2, а также на рис. 4.3.

Плоскость, которая по мере удаления от наблюдателя *повышается*, называется ***восходящей*** (рис. 4.4). Плоскость, *понижающаяся* по мере удаления от наблюдателя, называется ***нисходящей*** (рис. 4.5).

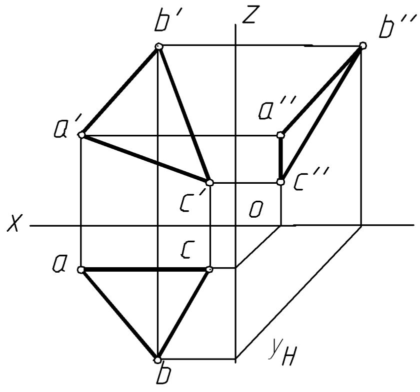


Рис. 4.3

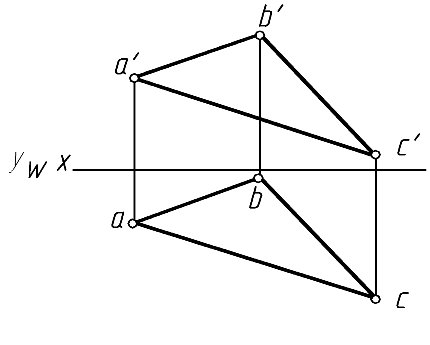


Рис. 4.4

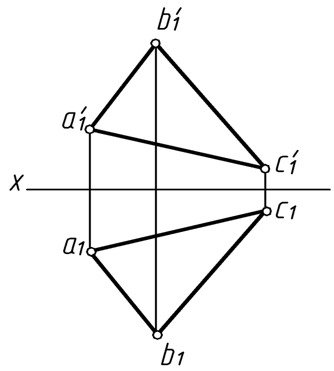


Рис. 4.5

На чертеже можно различить изображения восходящей и нисходящей плоскостей. Для этого проанализируем проекции треугольника, которым она задана. Из чертежа, на котором изображена восходящая плоскость (рис. 4.4), видно, что обе проекции треугольника ABC – горизонтальная abc и фронтальная $a'b'c'$ – имеют одинаковые обходы порядка обозначений (по часовой стрелке). Проекции треугольника $A_1B_1C_1$, которыми задана нисходящая плоскость (рис. 4.5), имеют противоположные обходы обозначений: горизонтальная $a_1b_1c_1$ – против движения часовой стрелки, фронтальная $a'_1b'_1c'_1$ – по часовой стрелке.

Плоскости частного положения. Плоскости, перпендикулярные или параллельные к плоскостям проекций, называют *плоскостями частного положения*.

Плоскость, перпендикулярную к плоскости проекций, называют проецирующей.

Рассмотрим правила проецирования таких плоскостей.

Горизонтально-проецирующая плоскость *P(ABCD)* ⊥ *H*

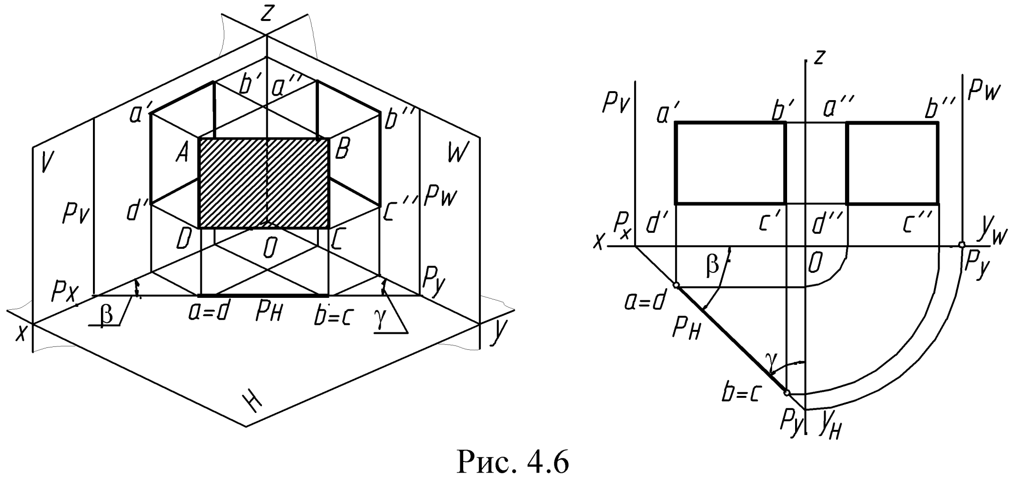


Рис. 4.6

Фронтально-проецирующая плоскость *Q(ABCD)* ⊥ *V*

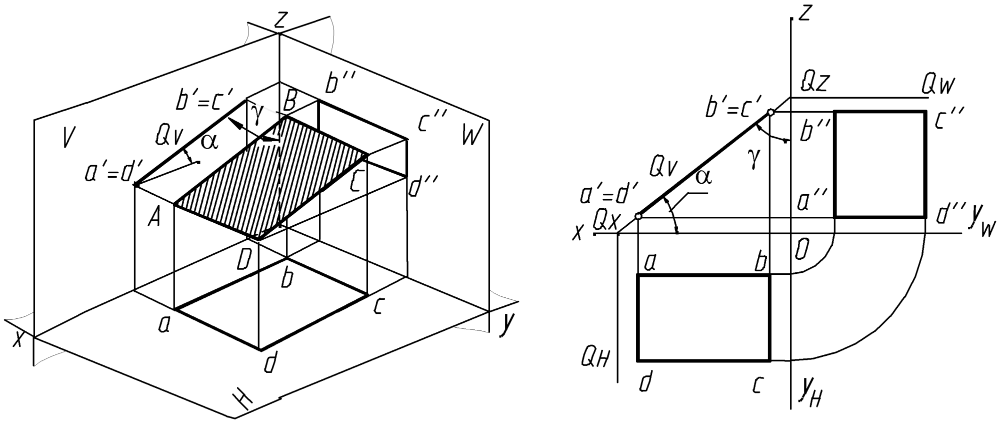


Рис. 4.7

Профильно-проецирующая плоскость *T(ABCD)* ⊥ *W*

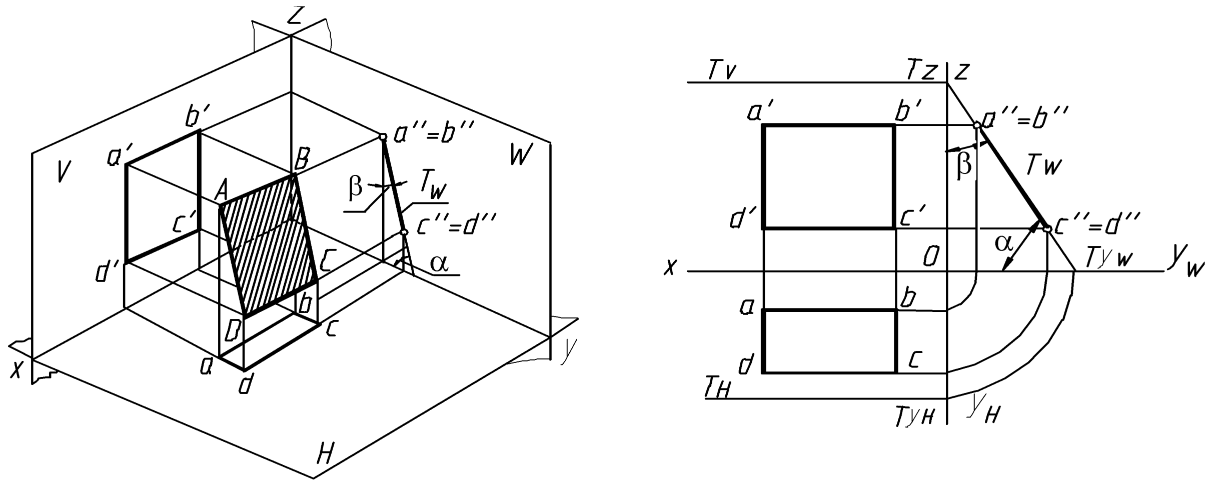


Рис. 4.8

Плоскость проецируется в прямую линию на ту плоскость проекций, которой она перпендикулярна. Эту проекцию можно рассматривать и как след плоскости. На эту же плоскость проекций в натуральную величину проецируются углы наклона данной плоскости к двум другим плоскостям проекций.

Проецирующие плоскости обладают собирательным свойством: если точка, линия или фигура расположены в плоскости, перпендикулярной плоскости проекций, то на этой плоскости их проекции совпадают со следом проецирующей плоскости.

Плоскости, параллельные плоскости проекций, называются плоскостями уровня. Плоскости уровня перпендикулярны одновременно двум плоскостям проекций (двояко проецирующие).

Рассмотрим правила проецирования таких плоскостей.

Горизонтальная плоскость *P(ABCD) II H*

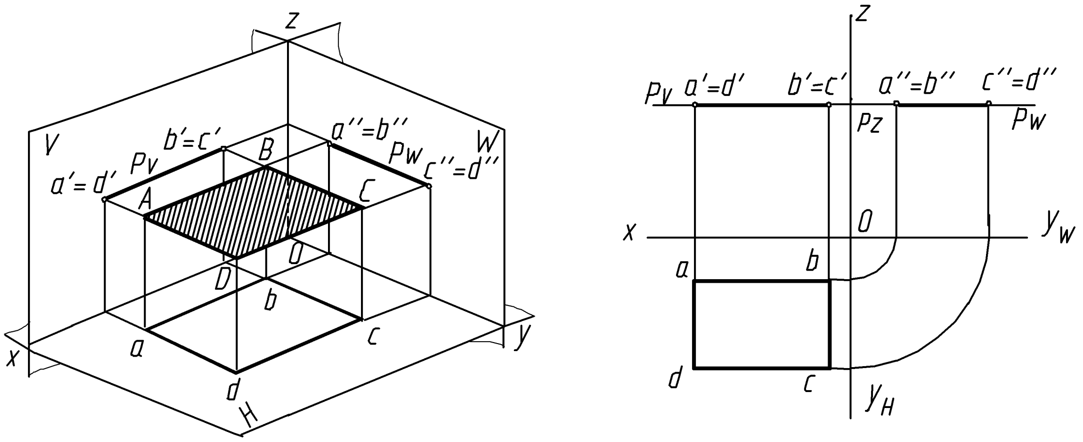


Рис. 4.9

Фронтальная плоскость *Q(ABCD) II V*

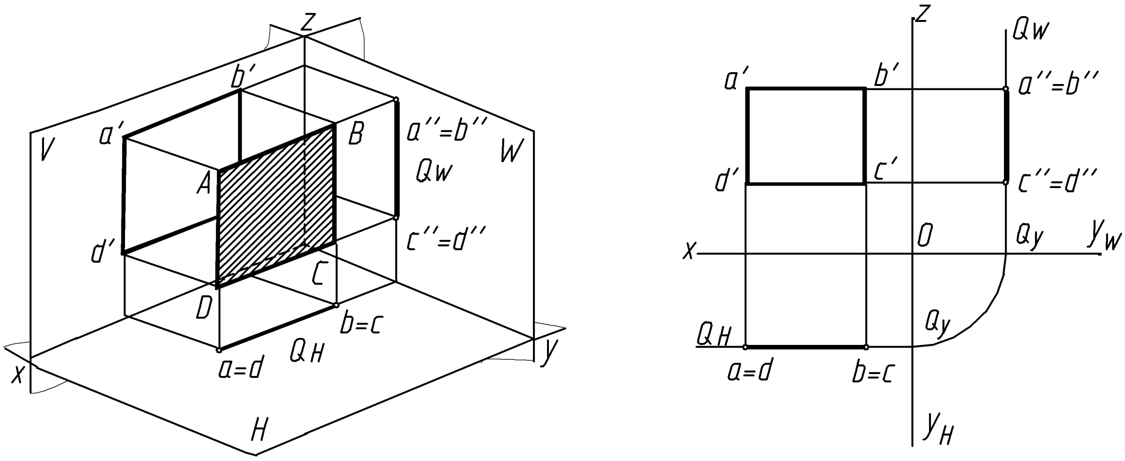


Рис. 4.10

Профильная плоскость *T(ABCD) II W*

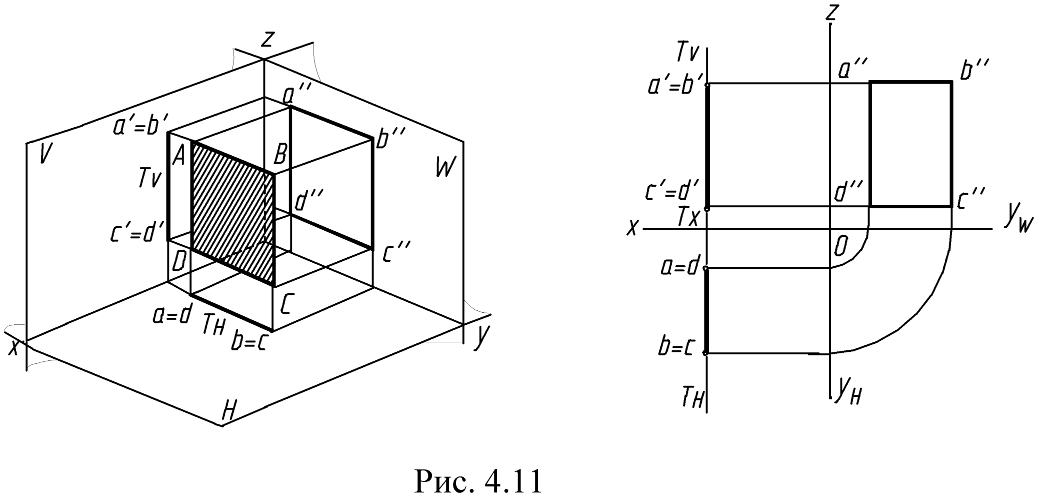


Рис. 4.11

Любая линия или фигура, лежащая в плоскости уровня, проецируется без искажения на ту плоскость проекций, которой данная плоскость параллельна. На две другие плоскости проекций плоскость уровня проецируется в виде отрезков прямых линий (следов), перпендикулярных оси проекций, разделяющей эти плоскости проекций.

4.3. Точка и прямая в плоскости

К числу основных задач, которые решают на плоскости, относят следующие:

- проведение в плоскости прямой;
- построение в плоскости некоторой точки;
- построение недостающей проекции точки, лежащей в плоскости;
- проверка принадлежности точки плоскости.

Решение этих задач основано на известных положениях геометрии: прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие плоскости, или если она проходит через одну точку этой плоскости параллельно прямой, лежащей в этой плоскости.

Построение в плоскости прямой линии

Чтобы построить в плоскости прямую линию (рис. 4.12), необходимо в этой плоскости отметить две точки, например, точки *A* и *K*. Затем через них провести прямую *A*1 *(ak и a′k′)*.

На рис. 4.13 прямая *BK* принадлежит плоскости треугольника *ABC,* так как она проходит через вершину *B* и параллельна стороне треугольника *AC (b′k′|| a′c′ и bk || ac).*

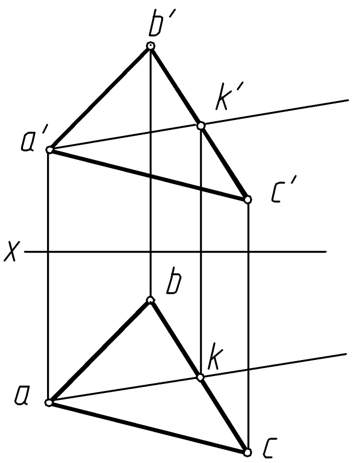


Рис. 4.12

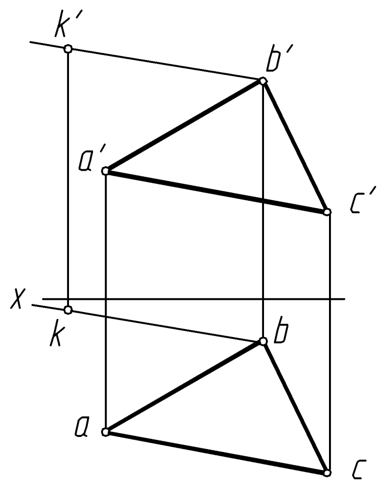


Рис. 4.13

Построение в плоскости некоторой точки

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

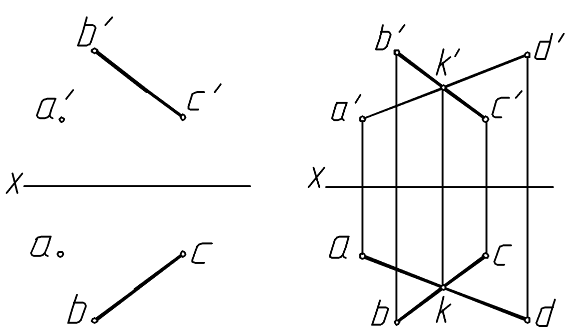


Рис. 4.14

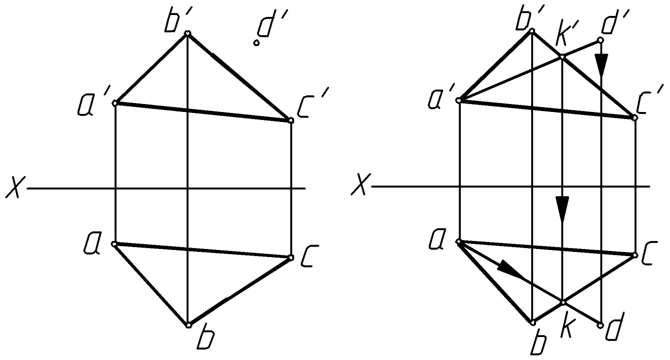


Рис. 4.15

Для построения в плоскости точки в этой плоскости проводят вспомогательную прямую и на ней отмечают точку.

На чертеже плоскости, заданной проекциями точки *A (a* и *a′)* и прямой *BC (bc и b′c′)* (рис. 4.14), проведены проекции вспомогательной прямой *AK (ak* и *a′ k′),* принадлежащей плоскости. На ней отмечены проекции *d* и *d′* точки *D*, принадлежащей этой плоскости.

Построение недостающей проекции точки

На рис. 4.15 плоскость задана треугольником *ABC (abc* и *a′b′c′).*

Принадлежащая этой плоскости точка *D* задана проекцией *d′.* Требуется найти горизонтальную проекцию точки *D*. Ее строят с помощью вспомогательной прямой. Прямая принадлежит плоскости и проходит через точку *D*. Для этого проводим фронтальную проекцию прямой *AK,* строим ее горизонтальную проекцию *ak* и на ней отмечаем горизонтальную проекцию *d* точки.

Проверка принадлежности точки плоскости

Для проверки принадлежности точки плоскости используют вспомогательную прямую. Прямая принадлежит плоскости. Так, на рис. 4.16 плоскость задана параллельными прямыми *AB* и *CD*, точка – проекциями *e* и *e′.* Проекции вспомогательной прямой проводят так, чтобы она проходила через одну из проекций точки. Например, фронтальная проекция вспомогательной прямой

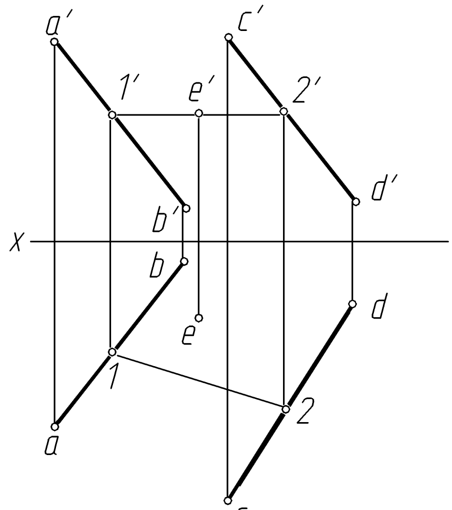


Рис. 4.16

1′- 2′ проходит через фронтальную проекцию точки *e′*. Построив горизонтальную проекцию прямой 1 - 2, видим, что горизонтальная проекция *e* точки ей не принадлежит. Следовательно, точка *E* не принадлежит плоскости.

4.4. Главные линии плоскости

Прямых, принадлежащих плоскости, очень много. Среди них есть прямые, занимающие особое, частное положение в плоскости. К ним относятся горизонтали, фронтали, профильные прямые и линии наибольшего наклона к плоскостям проекций. Эти линии называются ***главными линиями плоскости.***

Горизонталь **–** прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис. 4.17).

Фронтальная проекция горизонтали *a′ k* параллельна оси *x*, профильная – оси *y*.

Фронталь – прямая, лежащая в плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций (рис. 4.18). Горизонтальная проекция фронтали *ck* параллельна оси *x***,** профильная – оси *z*.

Профильная прямая – прямая, лежащая в плоскости и параллельная профильной плоскости проекций. Горизонтальная проекция профильной прямой *bk* параллельна оси *y*, фронтальная – оси *z* (рис. 4.19).

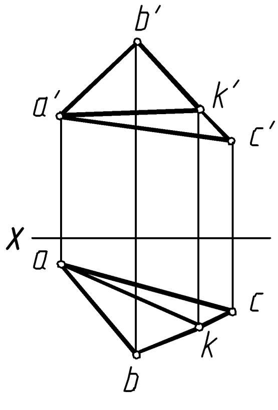


Рис. 4.17

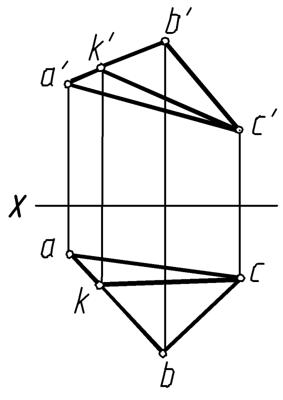


Рис. 4.18

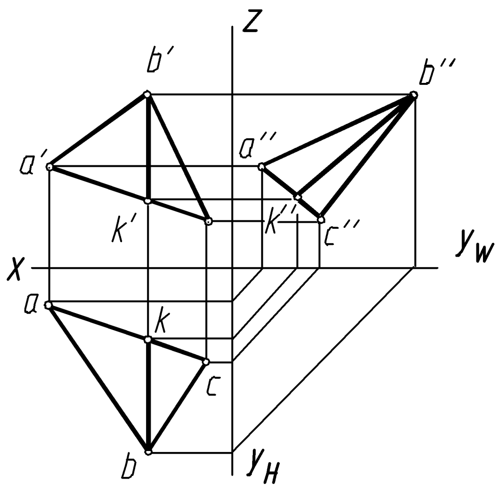


Рис. 4.19

Рассмотренные линии являются линиями наименьшего наклона к плоскостям проекций.

Из трех линий наибольшего наклона к плоскостям проекций отметим линию наибольшего наклона к горизонтальной плоскости. Эту линию называют ***линией ската.***

Линия ската – это прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная ее горизонтальному следу или ее горизонтали (рис. 4.20). Линия наибольшего наклона на чертеже позволяет определить величину двугранного угла между заданной плоскостью и плоскостью проекций. Этот угол будет равен линейному углу, который составляет линия наибольшего наклона со своей проекцией на эту плоскость.

Для определения угла наклона используем метод прямоугольного треугольника (рис. 4.21).

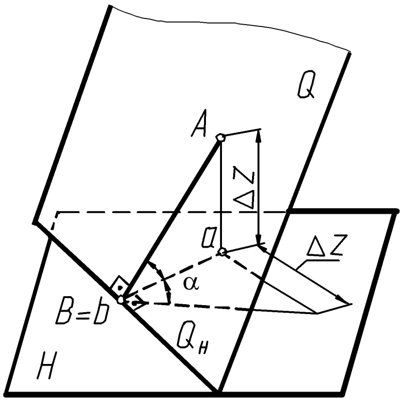


Рис. 4.20

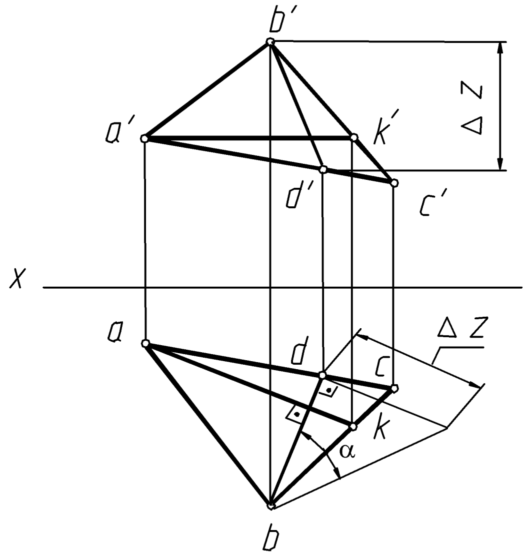


Рис. 4.21

4.5. Взаимное положение прямой и плоскости

Взаимное положение прямой и плоскости определяется количеством общих точек:

а) если прямая имеет две общие точки с плоскостью, то она принадлежит этой плоскости;

б) если прямая имеет одну общую точку с плоскостью, то прямая пересекает плоскость;

в) если точка пересечения прямой с плоскостью удалена в бесконечность, то прямая и плоскость параллельны.

Задачи, в которых определяется взаимное расположение различных геометрических фигур относительно друг друга, называются ***позиционными задачами.***

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости. Чтобы построить такую прямую, надо в плоскости задать прямую и параллельно ей провести нужную прямую.

Пусть плоскость задается тре-

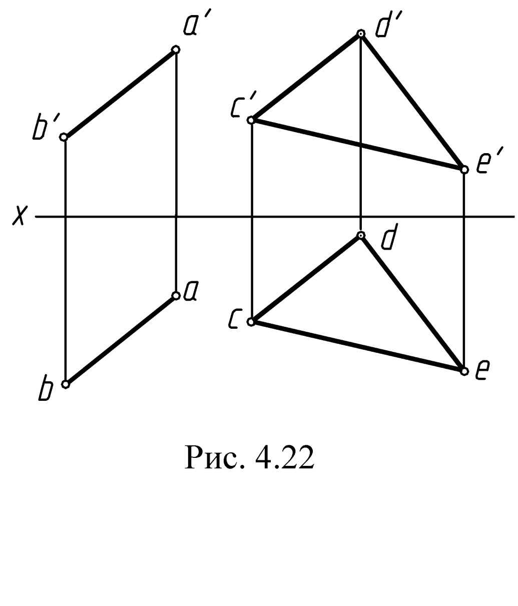


Рис. 4.22

угольником *CDE*. Через точку *A* (рис. 4.22) необходимо провести прямую *AB*, параллельную плоскости *P*. Для этого через фронтальную проекцию a' точки *A* проведем фронтальную проекцию $a'b'$ искомой прямой параллельно фронтальной проекции любой прямой, лежащей в плоскости *P*, например прямой *CD* ($a'b' \parallel c'd'$). Через горизонтальную проекцию *a* точки *A* параллельно *cd* проводим горизонтальную проекцию *ab* искомой прямой *AB* ($ab \parallel cd$).Прямая *AB* параллельна плоскости *P*, заданной треугольником *CDE*.

Прямая будет также параллельна плоскости, если она лежит в плоскости, параллельной данной.

Построение точки пересечения прямой с плоскостью

Задача на построение точки пересечения прямой с плоскостью широко применяется в начертательной геометрии. Она лежит в основе решения следующих задач:

- на пересечение двух плоскостей;
- на пересечение поверхности с плоскостью;
- на пересечение прямой с поверхностью;
- на взаимное пересечение поверхностей.

Построить точку пересечения прямой с плоскостью – значит найти точку, принадлежащую одновременно заданной прямой и плоскости. Графически такая точка определяется как точка пересечения прямой с линией, лежащей в плоскости.

Плоскость занимает проецирующее положение

Если плоскость занимает проецирующее положение (например, она перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, рис. 4.23), то фронтальная проекция точки пересечения должна одновременно при-

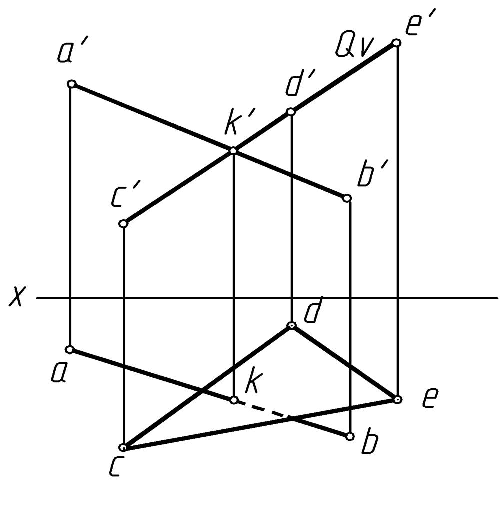


Рис. 4.23

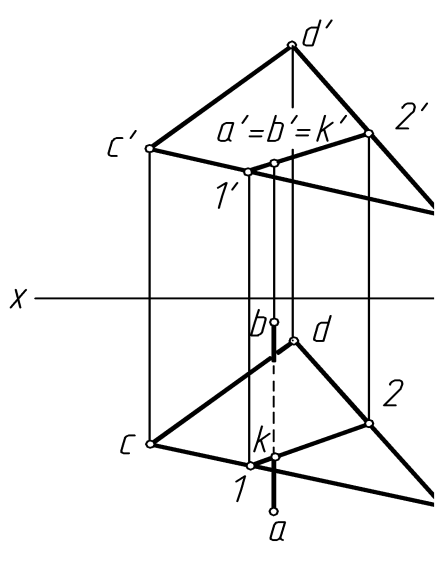


Рис. 4.24

надлежать фронтальному следу плоскости и фронтальной проекции прямой, то есть быть в точке их пересечения. Поэтому сначала определяется фронтальная проекция k' точки K (точки пересечения прямой AB с фронтально-проецирующей плоскостью Q (Δ CDE)), а затем ее горизонтальная проекция.

Прямая занимает проецирующее положение

На рис. 4.24 изображена плоскость общего положения P (Δ CDE) и фронтально-проецирующая прямая AB, пересекающая плоскость в точке K. Фронтальная проекция точки – точка k' – совпадает с точками a' и b'. Для построения горизонтальной проекции точки пересечения проведем через точку K в плоскости P прямую (например, 1–2). Сначала построим ее фронтальную проекцию, а затем горизонтальную. Точка K является точкой пересечения прямых AB и 1-2, то есть точка K одновременно лежит на прямой AB и в плоскости P и, следовательно, является точкой их пересечения.

Прямая и плоскость занимают общее положение

В этом случае линия, лежащая в плоскости и пересекающаяся с данной прямой, может быть получена как линия пересечения вспомогательной секущей плоскости P, проведенной через прямую AB, с данной плоскостью Q (линия MN) (рис. 4.25).

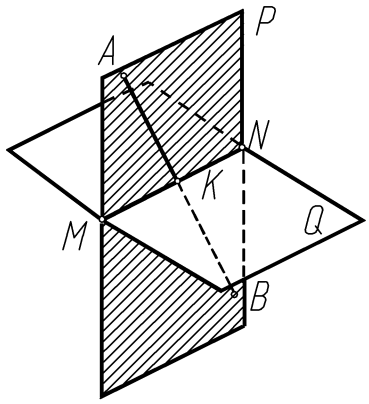


Рис. 4.25

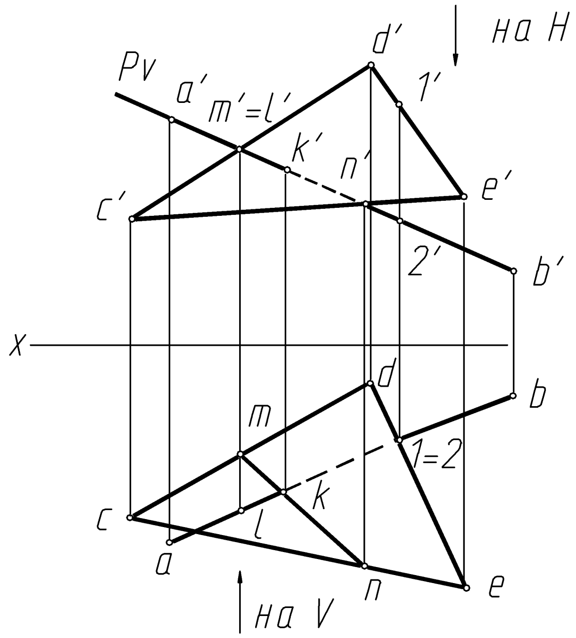


Рис. 4.26

Точку пересечения прямой с плоскостью строят по следующему плану.

1. Через прямую AB проводим вспомогательную плоскость P (лучше проецирующую);
2. Строим линию пересечения MN заданной плоскости Q (Δ CDE) и вспомогательной плоскости P;
3. Так как прямые AB и MN лежат в одной плоскости P, то определяем точку их пересечения (точку K), которая является точкой пересечения прямой AB с плоскостью Q.
4. Определяем взаимную видимость прямой AB и плоскости Q.

Для определения видимых участков прямой AB анализируем положение точек на скрещивающихся прямых (конкурирующих точек).

Так, точки M и L находятся на скрещивающихся прямых AB и CD: $M\in CD$, $L\in AB$. Их фронтальные проекции m' и l' совпадают. По горизонтальной проекции при взгляде по стрелке на плоскость V видно, что точка L (проекция l) находится перед точкой M (проекция m) , то есть она закрывает точку M при проецировании на фронтальную плоскость. Следовательно, прямая AB слева от точки K расположена перед треугольником CDE и на фронтальной проекции она будет видима. Вправо от точки K прямую AB закрывает треугольник CDE до точки N, соответственно отрезок $k'n'$ показан как невидимый.

Невидимый участок на горизонтальной проекции прямой AB выявлен анализом положения точек 1 и 2 ($1\in DE$, $2\in AB$), принадлежащих скрещивающимся прямым AB и DE. По фронтальной проекции видно, что если смотреть по стрелке на плоскость H, то сначала видно точку 1, расположенную выше точки 2. На горизонтальной проекции точка 1 закрывает точку 2. В этом месте прямая AB закрыта треугольником CDE до точки их пересечения K (участок проекции $k2$).

4.6. Взаимное положение плоскостей

Общим случаем взаимного положения двух плоскостей является их пересечение. В частном случае, когда линия пересечения удалена в бесконечность, плоскости становятся параллельными. Параллельные плоскости совпадают при сокращении расстояния между ними до нуля.

Параллельные плоскости

Плоскости будут параллельными, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

Например, через точку D (рис. 4.27) требуется провести плоскость, параллельную заданной (Δ ABC). Проводим через точку две прямые, параллельные двум любым прямым, находящимся в заданной плоскости, например сторонам треугольника.

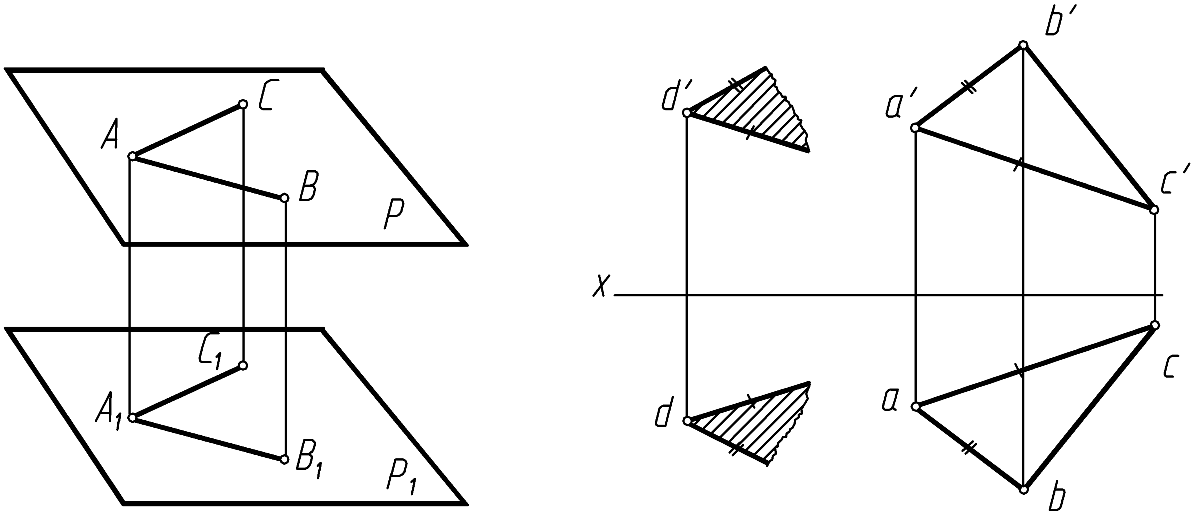


Рис. 4.27

Пересекающиеся плоскости

Линия пересечения двух плоскостей определяется

- двумя точками, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям;
- одной точкой, принадлежащей двум плоскостям, и известным направлением линии.

В обоих случаях задача заключается в нахождении точек, общих для двух плоскостей.

Пересечение двух проецирующих плоскостей

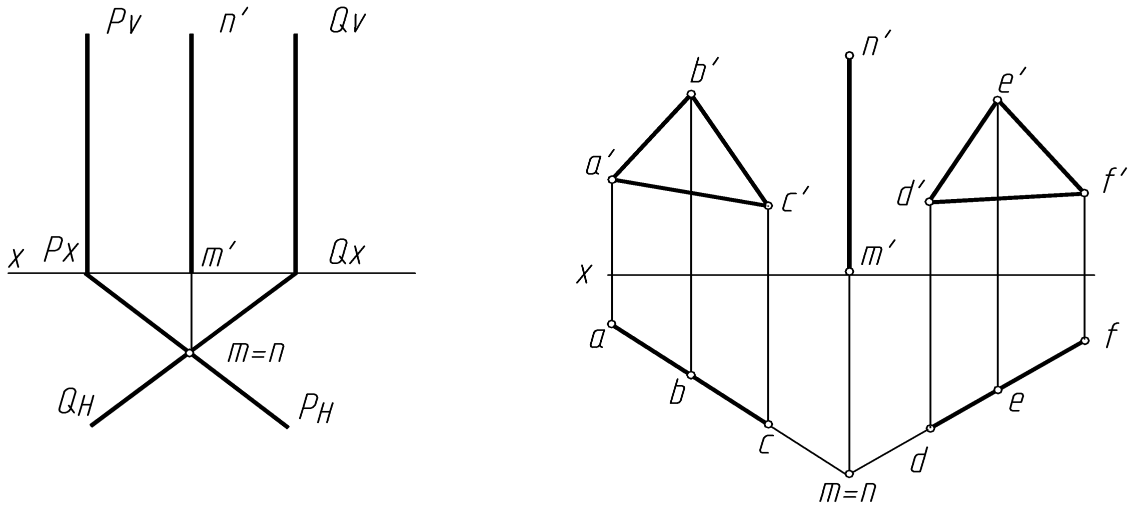


Рис. 4.28

Если плоскости занимают частное положение, например, как на рис. 4.28, являются горизонтально-проецирующими, то проекцией линии пересечения на плоскость проекций, которой данные плоскости перпендикулярны (в данном случае горизонтальной), будет точка. Фронтальная проекция линии пересечения перпендикулярна оси проекций.

Пересечение проецирующей плоскости и плоскости общего положения

В этом случае одна проекция линии пересечения совпадает с проекцией проецирующей плоскости на той плоскости проекций, которой она перпендикулярна. На рис. 4.29 показано построение проекций линии пересечения фронтально-проецирующей плоскости, заданной следами, а на рис. 4.30 – горизонтально-проецирующей плоскости (треугольник *ABC*) с плоскостью общего положения (треугольник *DEF*).

На фронтальной проекции (рис. 4.29) в пересечении следа плоско-

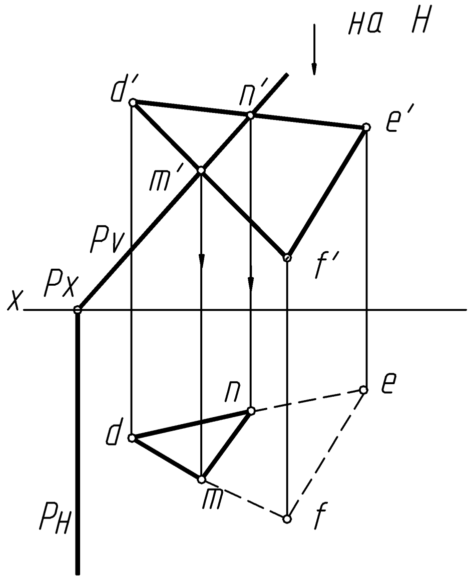


Рис. 4.29

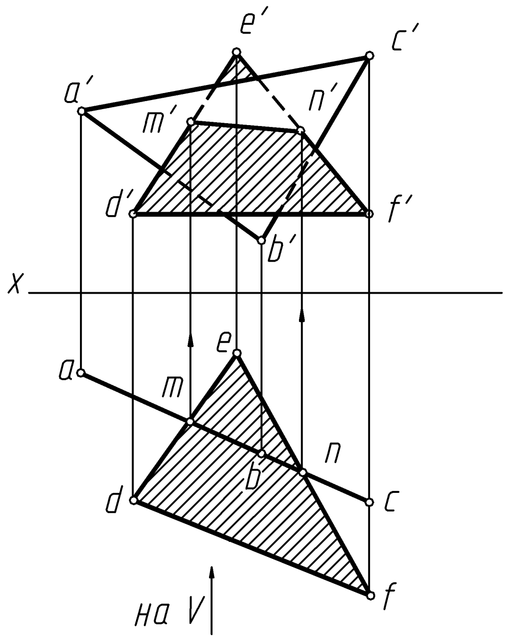


Рис. 4.30

сти P_v и сторон *DE* и *DF* треугольника *DEF* находим фронтальные проекции n' и m' линии пересечения. По линиям связи находим горизонтальные проекции точек *M* и *N* линии пересечения.

При взгляде по стрелке на плоскость *H* по фронтальной проекции видно, что часть треугольника левее линии пересечения *MN (m′n′)* находится над плоскостью *P*, то есть будет видимой на горизонтальной плоскости проекций. Остальная часть – под плоскостью *P*, то есть невидима.

Подобным образом находится линия пересечения для плоскостей, изображенных на рис. 4.30.

Пересечения плоскостей общего положения

Общий прием построения линии пересечения таких плоскостей заключается в следующем. Вводим вспомогательную плоскость (посредник) и строим линии пересечения вспомогательной плоскости с двумя заданными (рис. 4.31). В пересечении построенных линий находим общую точку двух плоскостей. Чтобы найти вторую общую точку, повторяем построение с помощью еще одной вспомогательной плоскости.

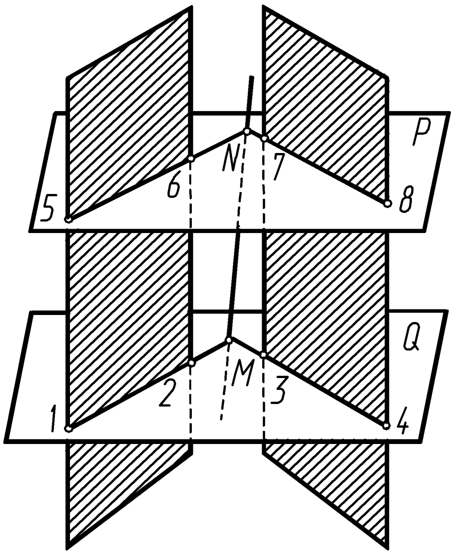


Рис. 4.31

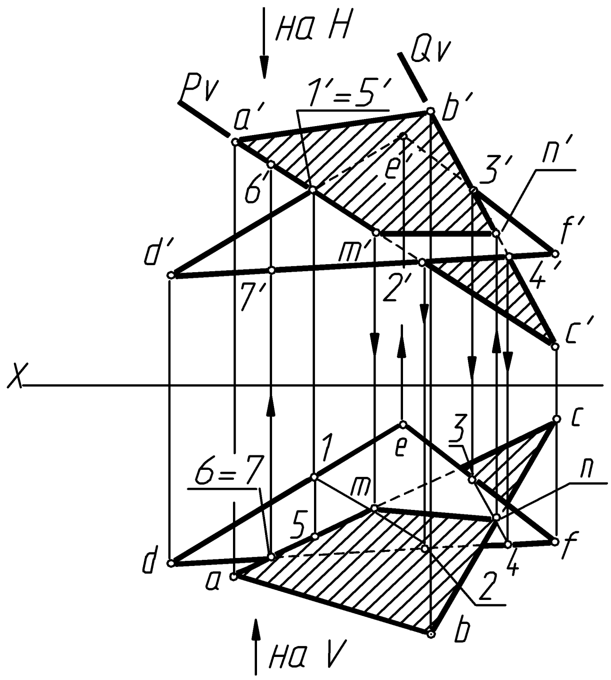


Рис. 4.32

При решении подобных задач удобнее в качестве посредников применять проецирующие плоскости.

На рис. 4.32 дано построение линии пересечения двух треугольников. Решение выполняем в следующей последовательности. Проводим две вспомогательные фронтально-проецирующие плоскости – плоскость *P* через сторону *AC* и плоскость *Q* через сторону *BC* треугольника *ABC*. Плоскость *P* пересекает треугольник *DEF* по прямой 1-2. В пересечении горизонтальных проекций 1-2 и *ac* находим горизонтальную проекцию точки *M(m)* линии пересечения. Плоскость *Q* пересекает треугольник *DEF* по прямой 3-4. В пересечении горизонтальных проекций 3-4 и *bc* находим горизонтальную проекцию точки *N(n)* линии пересечения. Фронтальные проекции этих точек, а следовательно, и линии пересечения, находим, проводя линии связи.

Анализ взаимной видимости треугольников на плоскостях проекций выполняем с помощью конкурирующих точек.

Для определения видимости на фронтальной плоскости проекций сравниваем фронтально-конкурирующие точки 1 и 5. Эти точки лежат на скрещивающихся прямых *AC* и *DE*. Их фронтальные проекции совпадают. На горизонтальной проекции видно, что при взгляде по стрелке на плоскость *V* точка 5 расположена ближе к наблюдателю. Поэтому она закрывает точку 1. Следовательно, участок прямой *AC* левее точки *M* будет видимым на фронтальной плоскости проекций.

Для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций сравниваем горизонтально-конкурирующие точки 6 и 7. Они лежат на скрещивающихся прямых *AC* и *DF*. Их горизонтальные проекции совпадают. При взгляде по стрелке на плоскость *H* видно, что точка 6 и прямая *AC* расположены выше точки 7 и прямой *DF*. Следовательно, участок *AM* прямой *AC* на горизонтальной плоскости проекций будет видимым.

4.7. Способ замены плоскостей проекций

Для упрощения решения метрических и позиционных задач применяются различные методы преобразования ортогональных проекций. После таких преобразований новые проекции позволяют решать задачу минимальными графическими средствами.

Способ замены плоскостей проекций состоит в том, что одна из плоскостей заменяется новой. Эта плоскость выбирается перпендикулярно оставшейся плоскости проекций. Геометрическая фигура при этом не меняет своего положения в пространстве. Новую плоскость располагают так, чтобы по отношению к ней геометрическая фигура занимала частное положение, удобное для решения задачи.

На рис. 4.33 изображен пространственный чертеж отрезка прямой общего положения *AB* и его проекции на плоскостях *H* и *V*. Заменив плоскость *V* новой вертикальной плоскостью V_1, параллельной отрезку *AB*, получим новую систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей V_1 и *H*. Относительно этих плоскостей отрезок *AB* занимает частное положение $(AB \parallel V_1)$. X_1 – новая ось проекций. Новая проекция отрезка *AB* $(a'_1 b'_1)$ равна его натуральной величине, а угол α равен натуральной величине угла наклона отрезка *AB* к плоскости *H*.

При замене фронтальной плоскости (как видно из рис. 4.33) постоянными остаются *z* координаты, так как расстояние от точек до горизонтальной плоскости проекций *H* не изменяется. Следовательно, для построения новой проекции отрезка (рис. 4.34) необходимо:

а) провести новую ось x_1 параллельно горизонтальной проекции отрезка *AB* на любом расстоянии от нее;

б) провести линии связи через горизонтальные проекции *a* и *b* перпендикулярно оси x_1;

в) от точек пересечения линий связи с осью x_1 отложить z координаты точек A и B;

г) полученные точки a'_1 и b'_1 соединить прямой линией.

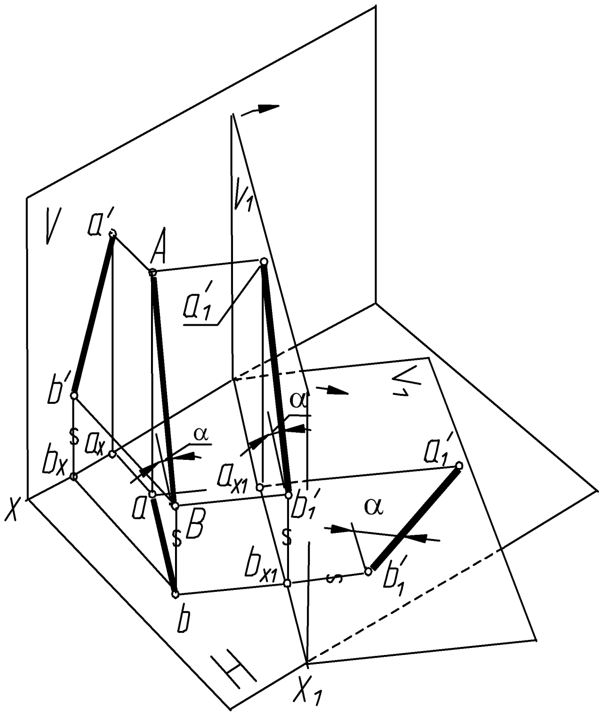


Рис. 4.33

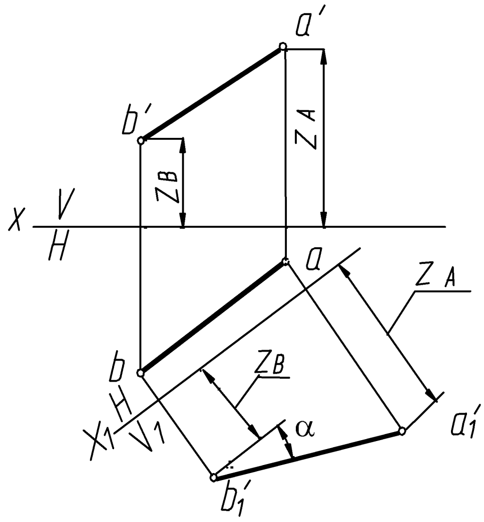


Рис. 4.34

При замене горизонтальной плоскости проекции H на новую плоскость координаты y точек остаются неизменными, так как расстояние от точки до фронтальной плоскости проекций не изменится. Эти координаты используются при проецировании точки на новую плоскость H_1, расположенную перпендикулярно плоскости проекций V.

Если для решения задачи необходима замена двух плоскостей проекций, то есть от исходной системы плоскостей проекций $x\frac{V}{H}$ необходимо перейти к новой $x_2\frac{V_1}{H_1}$, то это можно сделать по одной из следующих схем:

$$x\frac{V}{H} \to x_1\frac{V_1}{H} \to x_2\frac{V_1}{H_1} \quad \text{или} \quad x\frac{V}{H} \to x_1\frac{V}{H_1} \to x_2\frac{V_1}{H_1}.$$

Четыре основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций

1. ***Прямую общего положения преобразовать в прямую, параллельную одной из плоскостей проекций. Такое преобразование позволяет определить натуральную величину отрезка прямой и углы наклона его к плоскостям проекций*** (*рис.* 4.35 *и* 4.36).

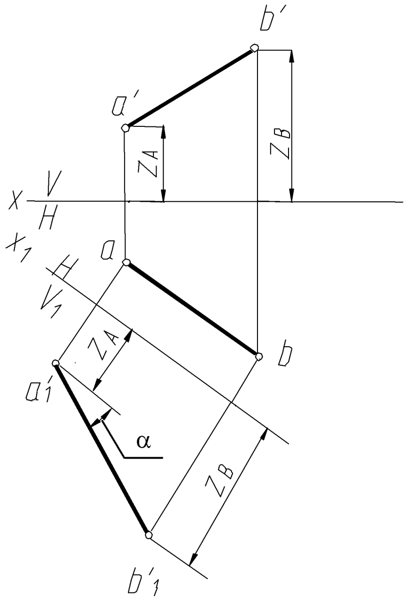


Рис. 4.35

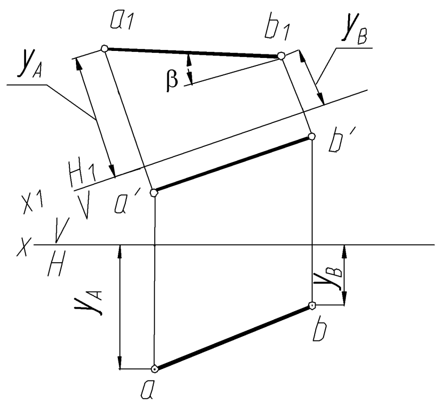


Рис. 4.36

При решении задачи новую плоскость, например, V_1 (рис. 4.35), ставим в положение, параллельное отрезку. В этом случае новая ось проекций будет проходить параллельно горизонтальной проекции прямой:

$$x\frac{V}{H} \rightarrow x_1\frac{V_1}{H};\quad V_1 \perp H;\quad V_1 \,//\, AB;\quad x_1 \,//\, ab.$$

Через горизонтальные проекции a и b, перпендикулярно новой оси x_1, проводим линии связи и на них откладываем z координаты точек (то есть расстояние от оси x до фронтальной проекции точек). Новая проекция $a'_1b'_1$ будет равна натуральной величине отрезка, а угол α равен углу наклона отрезка к плоскости H.

При замене горизонтальной плоскости проекций на новую располагаем эту плоскость параллельно отрезку AB. Так мы определим натуральную величину отрезка и угол наклона его к плоскости V – угол β (рис. 4.36).

В этом случае ось проекций новой плоскости проводим параллельно фронтальной проекции прямой $a'b'$, а координаты y берем с горизонтальной плоскости проекций:

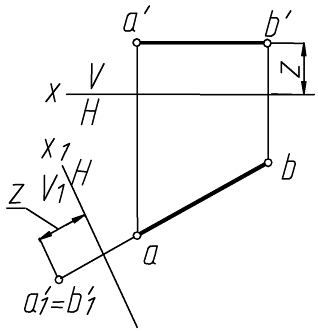


Рис. 4.37

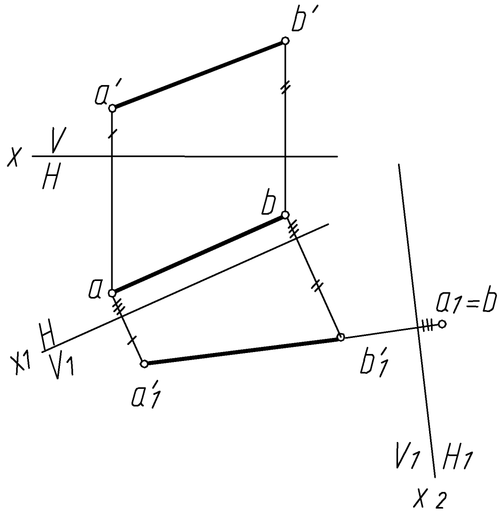


Рис. 4.38

$$x\frac{V}{H} \to x_1\frac{V}{H_1};\quad H_1 \perp V;\quad H_1 // AB;\quad x_1 // a'b'.$$

2. ***Прямую, параллельную одной из плоскостей проекций, преобразовать в проецирующую прямую, то есть поставить в положение, перпендикулярное плоскости проекций, чтобы прямая на эту плоскость спроецировалась в точку*** (*рис.* 4.37).

Так как данная прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций, то для преобразования ее в проецирующую прямую, необходимо заменить фронтальную плоскость V на новую V_1. Располагаем плоскость V_1 перпендикулярно AB. Тогда на плоскость V_1 прямая спроецируется в точку (a'_1=b'_1).

$$x\frac{V}{H} \to x_1\frac{V_1}{H};\quad V_1 \perp H;\quad V_1 \perp AB;\quad x_1 \perp ab.$$

Чтобы прямую общего положения AB* (рис. 4.38) *преобразовать в проецирующую, проводят две замены, то есть обе задачи, первую и вторую, решают последовательно. Сначала прямую общего положения преобразуют в прямую, параллельную плоскости проекций (прямую уровня), а затем эту прямую преобразуют в проецирующую.

$$x\frac{V}{H} \to x_1\frac{V_1}{H};\quad V_1 \perp H;\quad V_1 // AB;\quad x_1 // ab;$$

$$x_1\frac{V_1}{H} \to x_2\frac{V_1}{H_1};\quad H_1 \perp V_1;\quad H_1 \perp AB;\quad x_2 \perp a'_1 b'_1$$

3. ***Плоскость P (Δ ABC) общего положения преобразовать в проецирующую (рис. 4.39), то есть в расположенную перпендикулярно к одной из плоскостей проекций.***

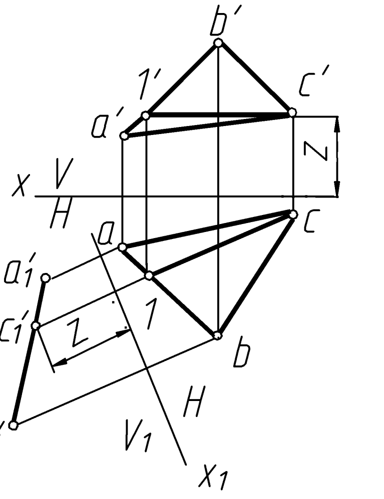


Рис. 4.39

Заменим, например, плоскость V на новую плоскость V_1. Расположим V_1 перпендикулярно плоскости H и плоскости P. Плоскость V_1 будет перпендикулярна плоскости P, если мы ее расположим перпендикулярно какой-нибудь линии плоскости. Для упрощения решения задачи в качестве этой линии возьмем горизонталь (линию, параллельную горизонтальной плоскости проекций). Строим в плоскости P горизонталь $C1$ и перпендикулярно ей проводим новую плоскость V_1. Ось x_1 проводим в любом месте перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали $(x_1 \perp c1)$. Строим новую фронтальную проекцию плоскости P. Горизонталь на новую плоскость спроецируется в точку $(c_1{}' = 1_1{}')$, а плоскость

P (Δ ABC) – в линию $a'_1c'_1b'_1$; $x\dfrac{V}{H} \to x_1\dfrac{V_1}{H}$; $V_1 \perp H$; $V_1 \perp P$(Δ ABC);

$V_1 \perp C1$ ($C1$ – *горизонталь*); $x_1 \perp (c1)$.

Для преобразования плоскости P в горизонтально-проецирующую плоскость, необходимо заменить плоскость H на новую, расположив ее перпендикулярно плоскости V и фронтали плоскости P (которую предварительно проводим в этой плоскости).

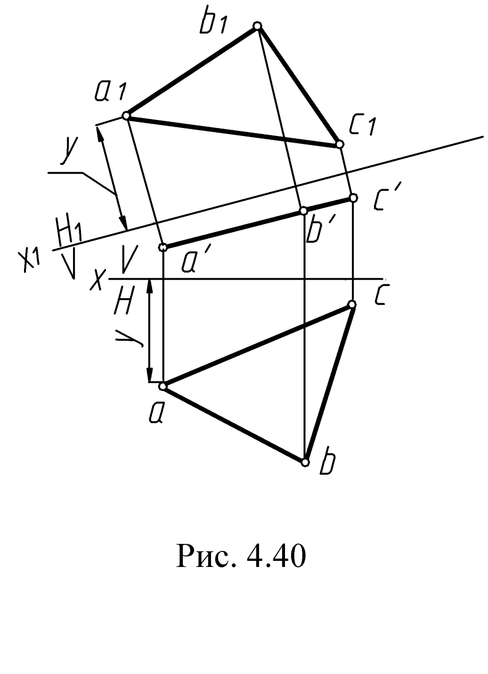


Рис. 4.40

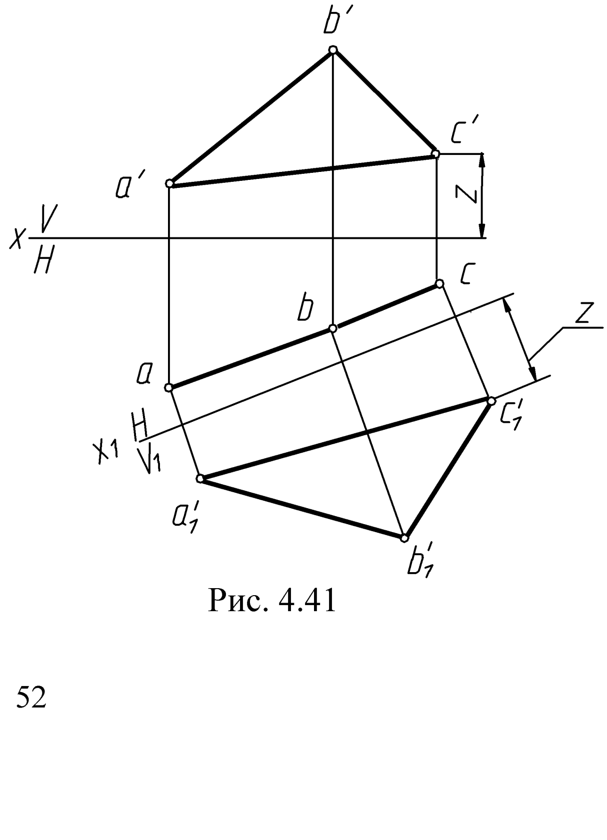


Рис. 4.41

4. ***Преобразовать плоскость Р (ΔАВС) из плоскости проецирующей в плоскость уровня (плоскость, параллельную одной из плоскостей проекций). При таком преобразовании мы определяем натуральную величину плоской фигуры (рис. 4.40 и 4.41).***

На рис. 4.40 изображена фронтально-проецирующая плоскость. Заменим горизонтальную плоскость H на новую H_1. Расположим ее перпендикулярно плоскости V и параллельно плоскости P.

Новую ось проекций x_1 проводим параллельно фронтальной проекции $a'b'c'$ и новые линии связи перпендикулярно x_1. Так как заменена горизонтальная плоскость проекций, то координаты y остаются неизменными. Перенесем их на новую плоскость. В результате получаем новую горизонтальную проекцию треугольника, равную натуральной величине треугольника ABC.

$$x\frac{V}{H} \to x_1\frac{V}{H_1};\quad H_1 \perp V;\quad H_1 // P(\Delta ABC);\quad x_1 // a'b'c'.$$

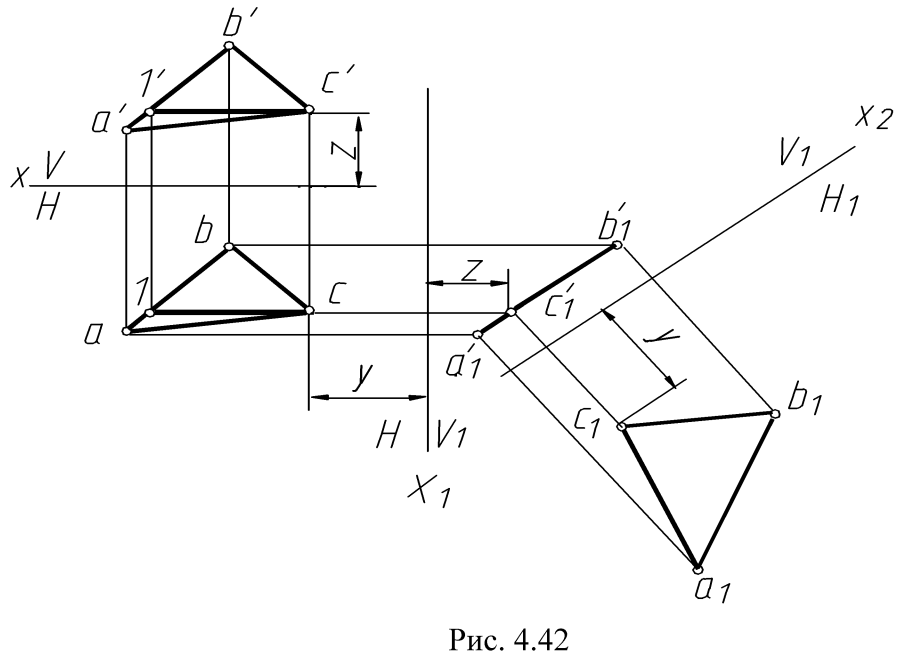


Рис. 4.42

Задача решается аналогично, если плоскость $P(\Delta ABC)$ горизонтально-проецирующая (рис. 4.41). В этом случае заменяется фронтальная плоскость V на новую V_1. Она проводится перпендикулярно плоскости H и параллельно плоскости P. Ось x_1 строится параллельно линии abc. При такой замене координаты z не изменяются. Измеряем их на фронтальной плоскости проекций и откладываем на линиях связи от новой оси x_1.

$$x\frac{V}{H} \to x_1\frac{V_1}{H};\quad V_1 \perp H;\quad V_1 // P(\Delta ABC);\quad x_1 // abc.$$

Для того, чтобы преобразовать плоскость общего положения в плоскость, которая будет параллельна одной из плоскостей проекций, необходимо провести две замены, то есть решить совместно третью и четвертую задачи (рис. 4.42).

$$x\frac{V}{H} \to x_1\frac{V_1}{H}; \quad V_1 \perp H;\ V_1 \perp P(\Delta\, ABC);\ V_1 \perp C1$$

$$(C1 - \textit{горизонталь});\ x_1 \perp (c1);$$

$$x_1\frac{V_1}{H_1} \to x_2\frac{V_1}{H_1}; \quad H_1 \perp V_1; \quad H_1 // P(\Delta\, ABC);$$

$$x_2 // a'_1 c'_1 b'_1.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как может быть задана на чертеже плоская фигура?
2. Что называется следом плоскости?
3. Дайте определение плоскости общего положения.
4. Какая плоскость называется проецирующей?
5. Какая плоскость называется плоскостью уровня?
6. При каких условиях прямая будет принадлежать плоскости?
7. При каких условиях точка принадлежит плоскости?
8. Какие линии называются главными линиями плоскости?
9. Назовите условия параллельности прямой и плоскости.
10. Какие построения нужно выполнить, чтобы найти точку пересечения прямой с плоскостью?
11. Какое взаимное положение могут занимать плоскости?
12. Как по чертежу можно определить, параллельны ли между собой две плоскости общего положения?
13. Как строится линия пересечения двух плоскостей?
14. В чем заключается способ замены плоскостей проекций?
15. В какой взаимосвязи должны быть старая и новая плоскости проекций?
16. Какие операции нужно выполнить, чтобы преобразовать:

    -прямую общего положения в проецирующую прямую;

    -плоскость общего положения в плоскость уровня?

5. НАЗНАЧЕНИЕ РАБОТЫ №1

Закрепление теоретического материала по взаимному положению прямых и плоскостей, решению задач способом перемены плоскостей проекций и построению линии пересечения плоских фигур.

5.1. Содержание

1. Определить кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми *AS* и *BC*. Построить проекции общего перпендикуляра к данным прямым.
2. Определить натуральную величину треугольника *ABC* и кратчайшее расстояние от точки *S* до плоскости треугольника *ABC*. Построить проекции перпендикуляра к плоскости.
3. Построить линию пересечения плоских фигур и определить их взаимную видимость.

Данные для выполнения заданий приведены в табл. №6 и №7 (стр. 66-67).

5.2. Методические указания по выполнению первого задания

Как уже указывалось, в первом задании требуется определить кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми. Этим расстоянием является длина перпендикуляра, проведенного к той и другой прямой. Решение задачи зависит от расположения прямых относительно плоскостей проекций. Рассмотрим три примера.

Пример 1. Одна прямая перпендикулярна плоскости проекций (например, *AS* – горизонтально-проецирующая прямая); вторая *BC* – прямая общего положения, рис. 5.1

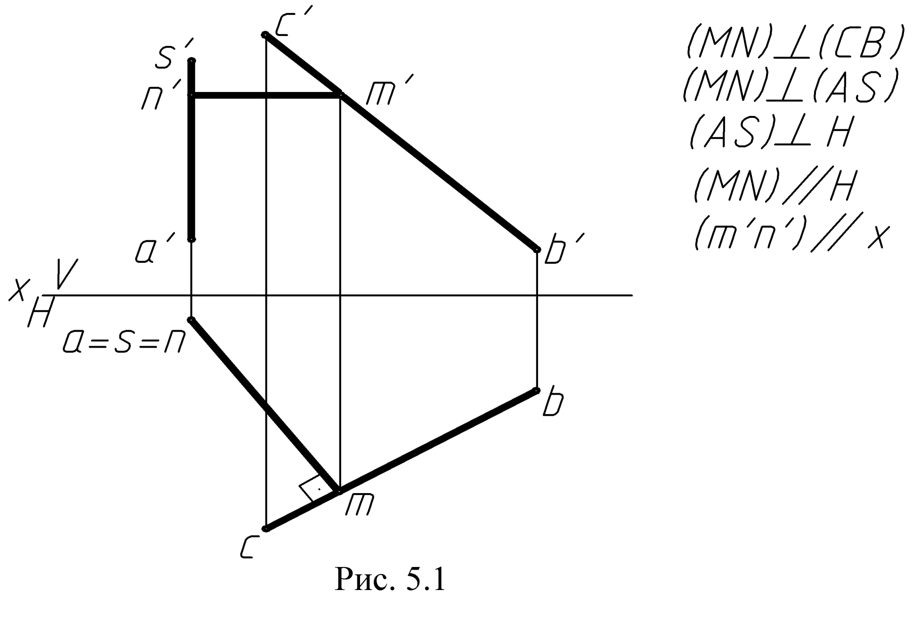


Рис. 5.1

Прямая AS перпендикулярна плоскости H, поэтому перпендикуляр к ней будет параллелен плоскости H и на эту плоскость спроецируется в натуральную величину. Для построения горизонтальной проекции перпендикуляра – $m\ n$, необходимо из точки $a=s$ опустить перпендикуляр на bc. Отметив горизонтальную проекцию точки M – точку m, находим ее фронтальную проекцию – m'. Так как прямая $(MN)//H$, то ее фронтальная проекция $m'n'$ будет параллельна оси x. Проводим $(m'n')//x$.

Пример 2. Во втором примере одна прямая параллельна плоскости проекций (например, AS – параллельна плоскости H), вторая BC – прямая общего положения (рис. 5.2).

Для решения задачи применим способ перемены плоскостей проекций и добьемся такого положения, чтобы одна из прямых стала проецирующей. В нашем случае рационально заменить плоскость V на V_1, которую необходимо расположить перпендикулярно AS, т.к. $AS//H$. Новую ось x_1 проводим перпендикулярно as и строим новые фронтальные проекции прямых AS – $a'_1s'_1$ и BC – $b'_1c'_1$. Для этого из горизонтальных проекций точек проводим перпендикуляры к оси x_1 и откладываем на них (от точек пересечения их с осью x_1) z – координаты точек.

В системе плоскостей H и V_1 прямая AS стала проецирующей ($AS\perp V_1$) и дальнейшее решение задачи аналогично рассмотренному выше случаю.

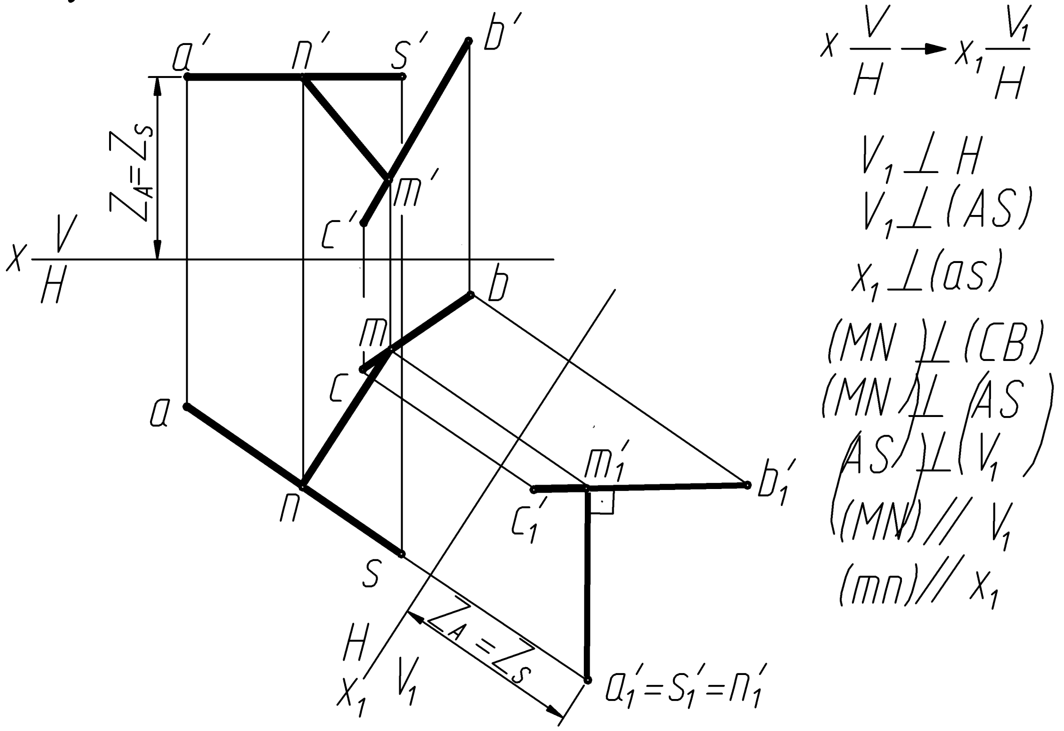
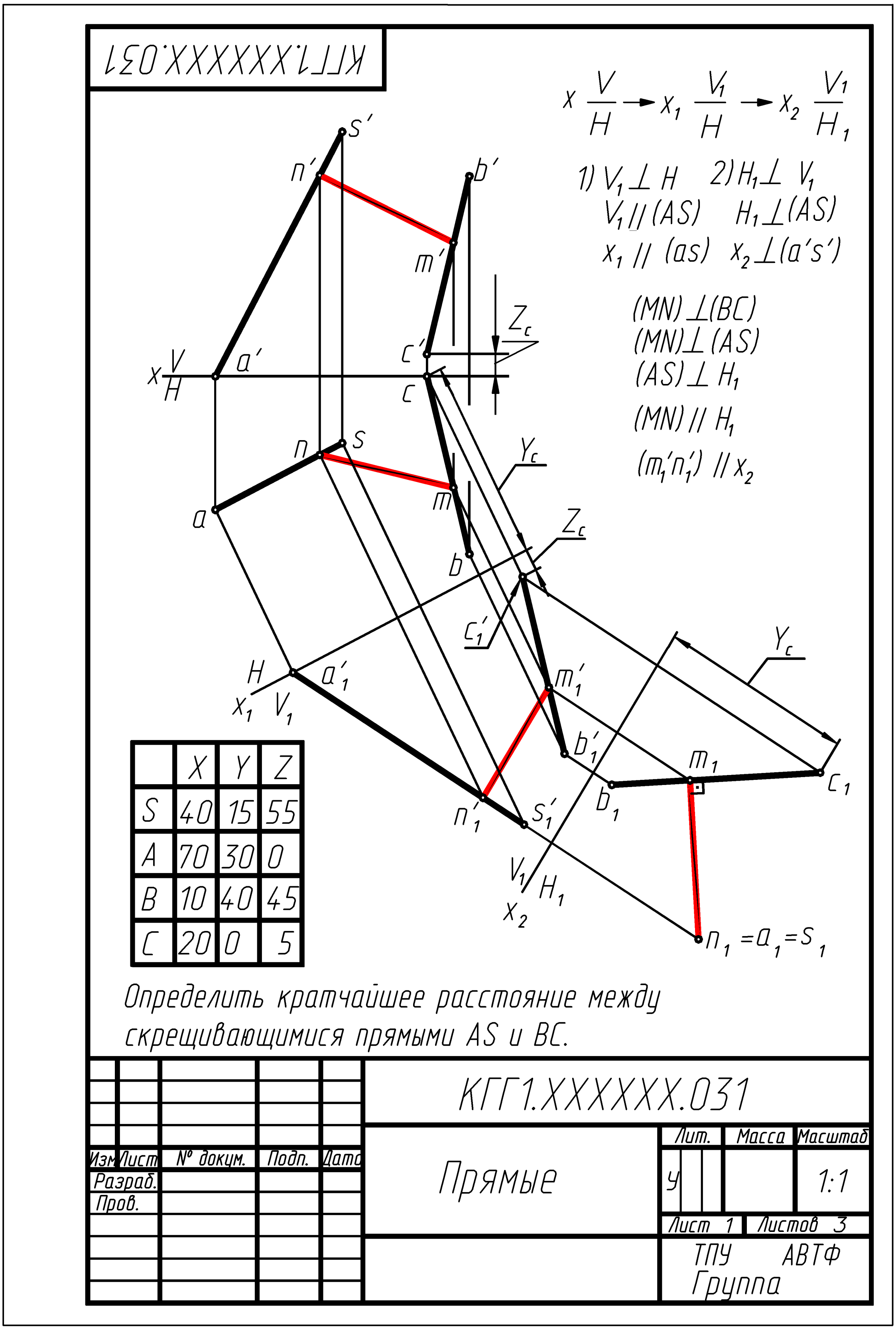


Рис. 5.2



	X	Y	Z
S	40	15	55
A	70	30	0
B	10	40	45
C	20	0	5

Рис. 5.3

Из точки $a'_1=s'_1$ проводим прямую, перпендикулярную $b'_1c'_1$ и отмечаем точки m'_1 и n'_1 (рис. 4). Строим горизонтальную проекцию точки M – точку m. Так как $MN//V_1$, то горизонтальная проекция mn параллельна оси x_1. Отметив точку n, строим фронтальные проекции точек – точки n' и m' и соединяем их прямой линией.

Пример 3. В третьем случае обе прямые – прямые общего положения (рис. 5.3). Применяя способ перемены плоскостей проекций, заменим плоскости проекций так, чтобы одна из прямых (например, AS) стала проецирующей. Для этого необходимо сделать две замены плоскостей проекций.

При первой замене новую плоскость V_1 располагаем параллельно прямой AS. Ось x_1 проводим параллельно as и строим новые фронтальные проекции прямых – $a'_1s'_1$ и $b'_1c'_1$. Для этого из горизонтальных проекций точек a, s, b, c проводим перпендикуляры к оси x_1 и от точек их пересечения с осью откладываем на них z – координаты точек A, S, B, C.

При второй замене новую плоскость H_1 располагаем перпендикулярно AS. Ось x_2 проводим перпендикулярно $a'_1s'_1$ и строим горизонтальные проекции прямых – a_1s_1 и b_1c_1. Линии связи при этом проводим перпендикулярно оси x_2 и от точек пересечения их с осью откладываем на них y – координаты точек (т. е. расстояние от горизонтальных проекций точек до оси x_1). На плоскость H_1 прямая AS проецируется в точку $a_1=s_1$, из которой проводим прямую, перпендикулярную b_1c_1 и отмечаем точки n_1 и m_1 (рис. 8).

Так как прямая $(MN)//H_1$, то на эту плоскость она проецируется в натуральную величину, а ее проекция $(m'_1n'_1)//x_2$. Проведя линию связи из точки m, находим m'_1 и строим $(m'_1n'_1)//x_2$. Определив точки m'_1 и n'_1, строим горизонтальную проекцию отрезка – $m\ n$ и фронтальную проекцию – $m'n'$.

На рис. 5.3 приведен образец выполнения первого задания.

5.3. Методические указания по выполнению второго задания

Во втором задании требуется решить две задачи – определить натуральную величину треугольника ABC (плоскость Q) и кратчайшее расстояние от точки S до плоскости треугольника ABC. Построить проекции перпендикуляра к плоскости.

Рассмотрим отдельно решение каждой задачи.

В первой задаче требуется определить натуральную величину треугольника ABC. Если плоскость треугольника параллельна какой–либо плоскости проекций, например, H, то на эту плоскость треугольник проецируется в натуральную величину (рис. 5.4). Если плоскость треугольника перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, например, V (рис. 5.5), то для определения его натуральной величины необходимо заменить горизонтальную плоскость H на новую, расположив новую плоскость H_1 параллельно плоскости треугольника. В этом случае новая ось x_1 будет параллельна линии $a'c'b'$. Проведя из точек a',c',b' перпендикуляры к новой оси x_1 и откладывая на них (от точек пересечения перпендикуляров с ось x_1) y – координаты точек, получим новую горизонтальную проекцию треугольника ABC.

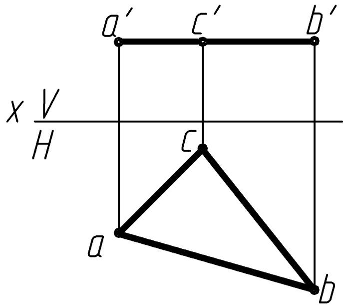


Рис. 5.4

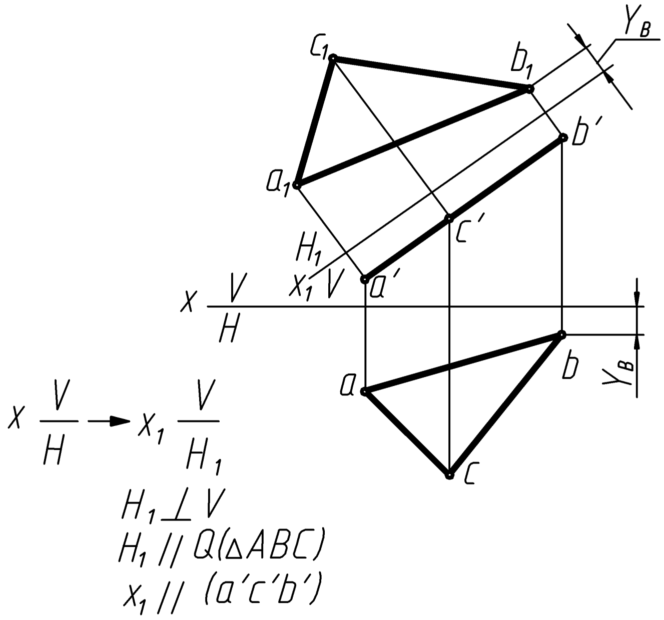


Рис. 5.5

И, наконец, треугольник лежит в плоскости общего положения. В этом случае для определения его натуральной величины требуется сделать две замены плоскостей проекций (рис. 5.6).

При первой замене заменим плоскость V на V_1, расположив ее перпендикулярно плоскости треугольника. Для этого новую плоскость необходимо поставить перпендикулярно горизонтали треугольника. Вначале строим фронтальную проекцию горизонтали – $(a'1')//x$, а затем ее горизонтальную проекцию – $a1$. Новую ось x_1 проводим из условия $x_1 \perp (a1)$. Проведя из точек a, b, c перпендикуляры к оси x_1 и отложив на них (от точек пересечения перпендикуляра с осью x_1) z – координаты точек, получим новую фронтальную проекцию треугольника. Так как плоскость треугольника перпендикулярна плоскости V_1, то полученные проекции точек будут лежать на одной линии.

При второй замене плоскость H_1 располагаем параллельно плоскости треугольника. На эту плоскость треугольник спроецируется в натуральную величину. Ось x_2 проводим параллельно линии $b'_1a'_1c'_1$ и строим новые горизонтальные проекции точек. Для этого из точек b'_1,a'_1,c'_1 проводим перпендикуляры к оси x_2 и от точек пересечения их с осью откладываем на них y – координаты точек (т. е. расстояние от горизонтальных проекций точек до оси x_1). Полученные проекции точек a_1, b_1, c_1 соединяем прямыми линиями.

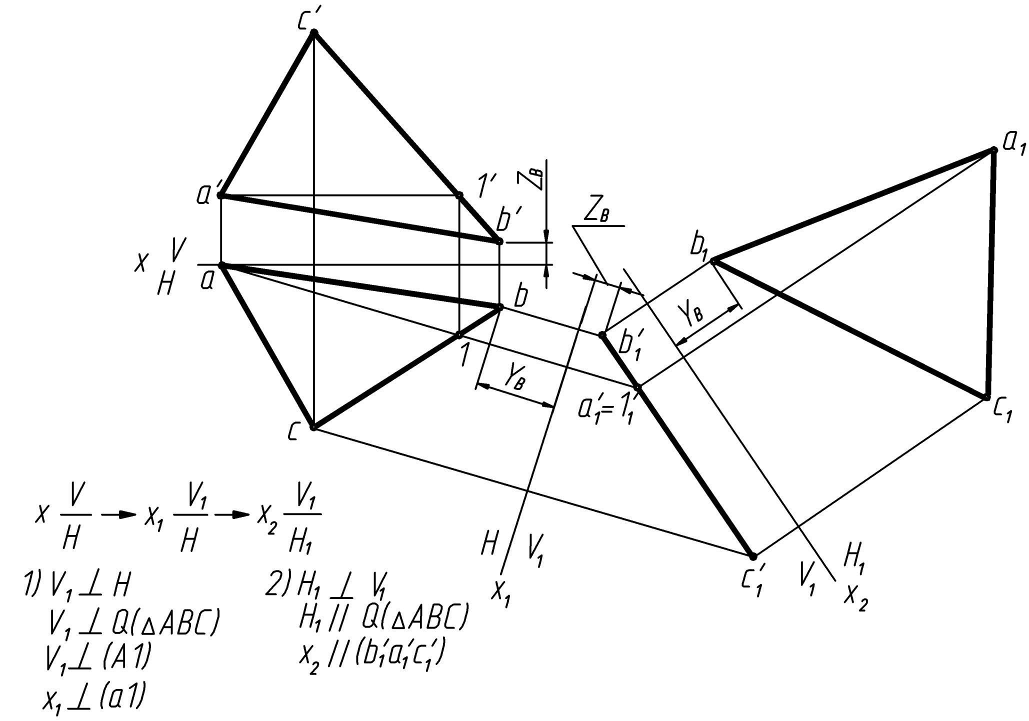


Рис. 5.6

Во второй задаче необходимо определить кратчайшее расстояние от точки S до плоскости треугольника и построить проекции перпендикуляра.

Если плоскость треугольника перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, например, плоскости V, то в этом случае расстояние от точки до плоскости треугольника спроецируется на плоскость V в натуральную величину (рис. 5.7). Для построения фронтальной проекции перпендикуляра необходимо из точки s' опустить перпендикуляр на линию $a'c'b'$ и отметить точку пересечения его с этой линией – точку n'. Так как прямая $(SN)//V$, то ее горизонтальная проекция sn будет параллельна оси x. Проводим $(sn)//x$.

Если плоскость треугольника занимает общее положение в пространстве, то, применяя способ перемены плоскостей проекций, преобразуем ее в проецирующую (рис. 5.8). Решение этой задачи мы рассматривали выше. Заменив плоскость V на V_1 и расположив ее перпендикулярно плоскости треугольника, мы перенесем в новую систему и точку S. Опустив перпендикуляр из точки s'_1 на линию $b'_1a'_1c'_1$, мы определим фронтальную проекцию перпендикуляра, опущенного из точки S на плоскость треугольника – $s'_1n'_1$. Так как перпендикуляр $(SN)//V_1$, то на плоскость V_1 он спроецируется в натуральную величину, а его горизонтальная проекция sn будет параллельна оси x_1. Строим $(sn)//x_1$. Из горизонтальной проекции точки N – n проводим линию связи и от точки пересечения ее с осью x, откладывая на ней z_N (расстояние от точки n'_1 до оси x_1). Получаем точку n'. Точку n' соединяем с точкой s'. На рис. 5.9 приведен образец выполнения второго задания.

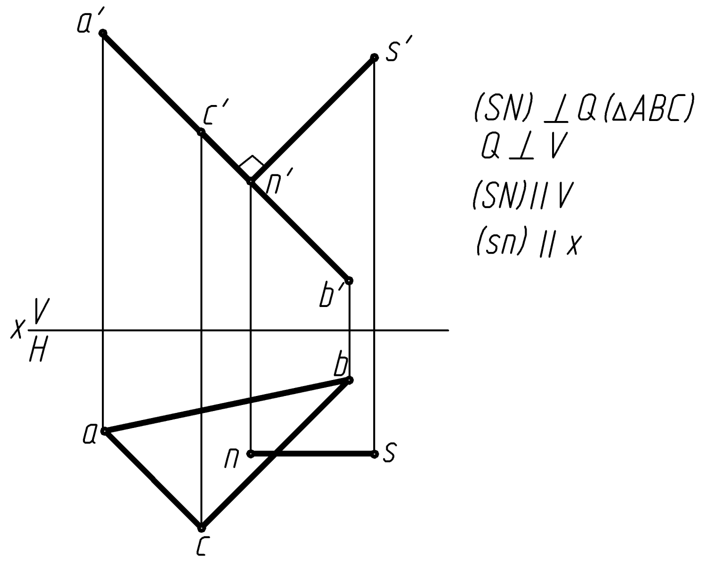


Рис. 5..7

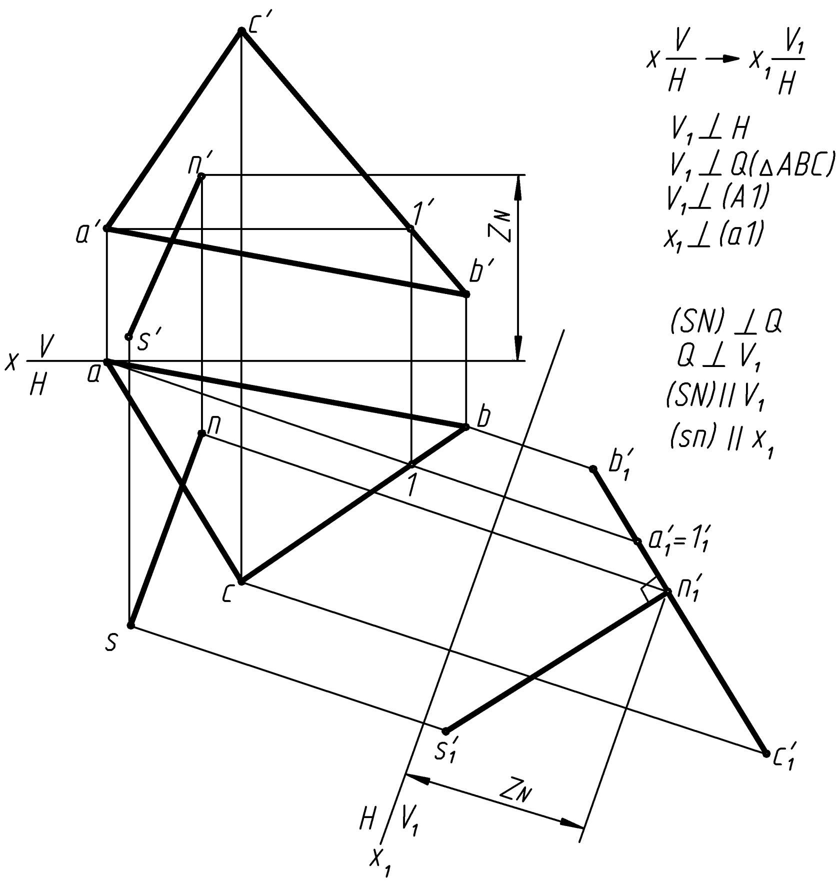
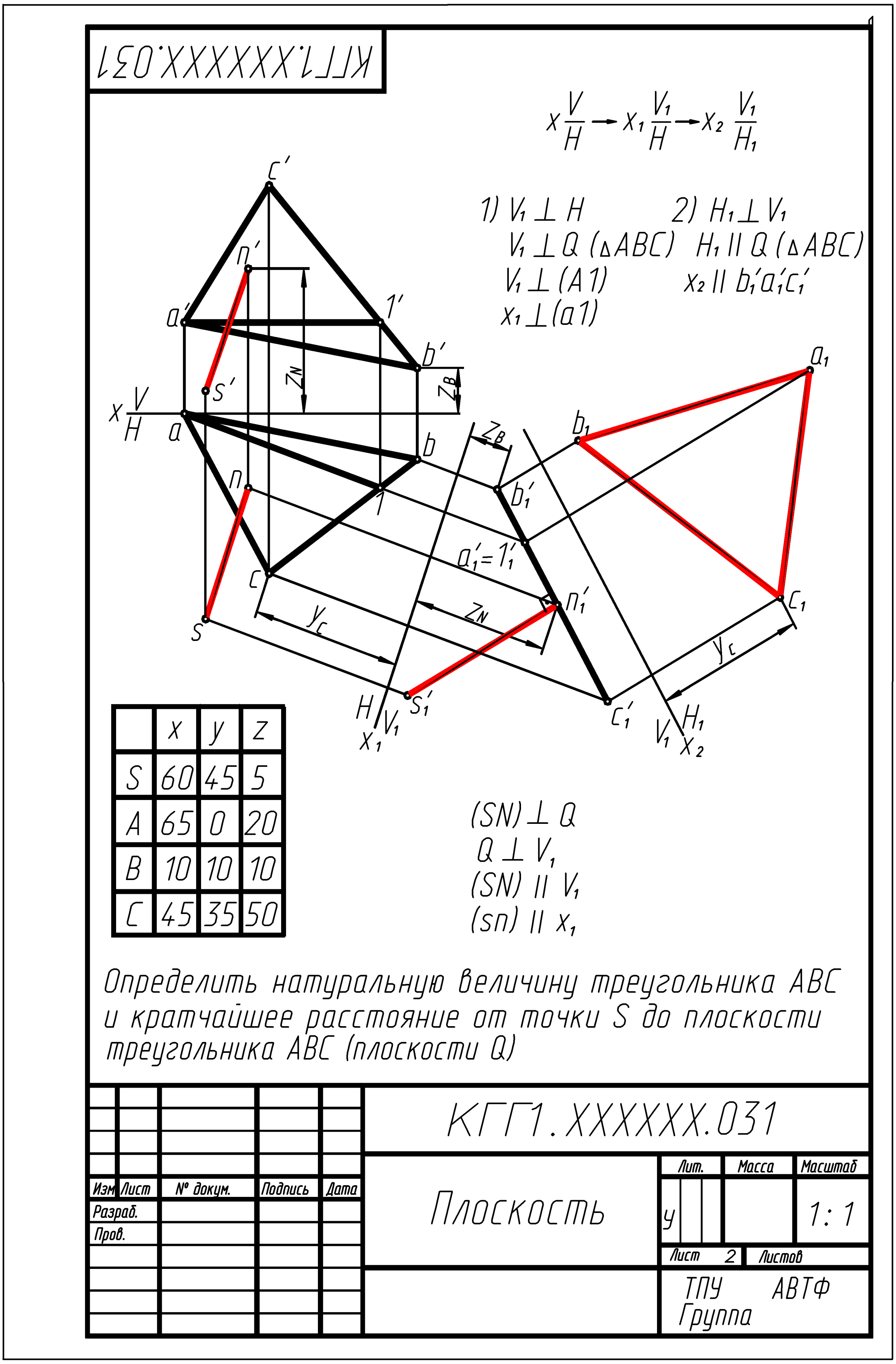


Рис. 5..8



	x	y	z
S	60	45	5
A	65	0	20
B	10	10	10
C	45	35	50

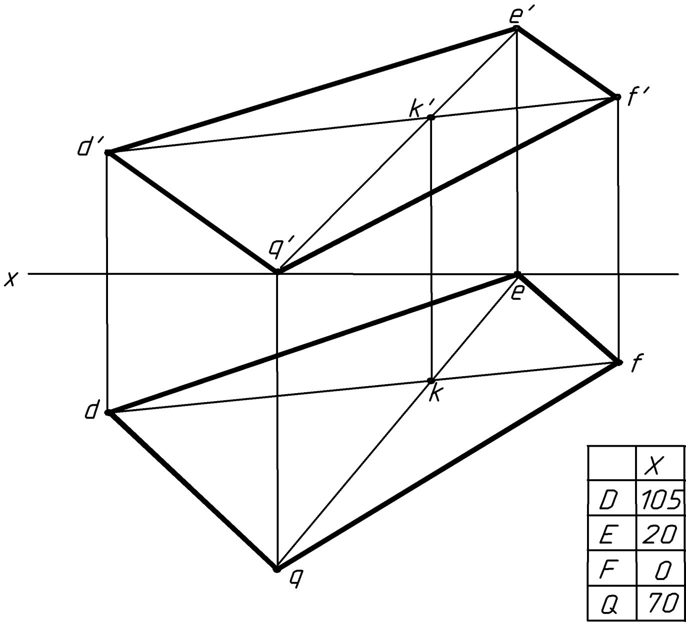
Рис. 5.9

5.4. Методические указания по выполнению третьего задания

В третьем задании требуется построить линию пересечения плоских фигур и определить их взаимную видимость.

В заданиях, где одна из плоских фигур – четырехугольник, не полностью даны координаты одной из точек. Например, на рис. 5.10 приведено задание для четырехугольника *DEFQ*, в котором неизвестно значение *z* точки *F*.

Фронтальную проекцию точки $F - f'$ находят из условия принадлежности точки плоскости. Для этого на плоскости *H* строят проекции диагоналей четырехугольника – *df* и *qe* и отмечают точку их пересечения – точку *k*. Проводят линию $q'e'$ и находят точку k' из условия $(\cdot)K \in (DE)$. Через точки d', k' проводят прямую до пересечения с линией связи, проведенной из точки *f*, и отмечают точку f'.



	X	Y	Z
D	105	40	35
E	20	0	70
F	0	25	?
Q	70	85	0

Рис. 5.10

Для построения линии пересечения двух плоских фигур необходимо найти две общие точки, принадлежащие той и другой фигуре. Эту задачу можно решить, определив точки пересечения сторон одной фигуры с плоскостью второй (рис. 5.12). Например, определим точку пересечения стороны *AB* треугольника *ABC* с плоскостью четырехугольника *DEFQ*. Рассмотрим задачу на отдельном чертеже, для чего построим проекции четырехугольника и прямой *AB* (рис. 5.11). Через прямую АВ проведем горизонтально - проецирующую плоскость *S* ($AB \subset S \perp H$). В этом случае след плоскости S_H будет сов падать с *ab*. Плоскость *S* пересекает сторону *DE* в точке *1*, а сторону *QF* в точке *2*. Отмечаем горизонтальные проекции точек и строим их фронтальные проекции $1'$ и $2'$; $(\cdot)1=(DE)\cap S$, $(\cdot)2=(QF)\cap S$. Так как прямые AB и 12 лежат в одной плоскости S, то отметим точку их пересечения – $(\cdot)N=(AB)\cap(12)$ вначале на фронтальной плоскости – точку n', а затем на горизонтальной – точку n.

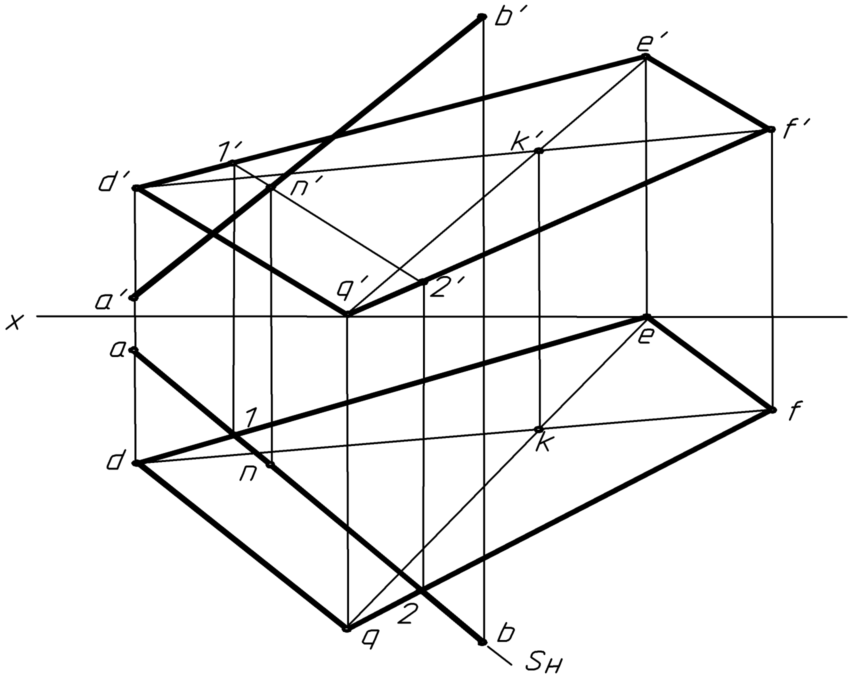


Рис. 5.11

Для определения второй общей точки – точки M, через сторону QF проведем фронтально-проецирующую плоскость P и определим точку пересечения прямой QF с плоскостью треугольника ABC (рис. 5.12).

$$(QF)\subset P\perp V;$$
$$(\cdot)3=(BC)\cap P;$$
$$(\cdot)4=(AC)\cap P;$$
$$(\cdot)M=(QF)\cap(34).$$

Проекции точек n и m и n' и m' соединяем прямыми линиями.

Считая плоские фигуры непрозрачными, определяем их взаимную видимость.

Для определения видимости на плоскости H отметим точку пересечения проекций сторон ac и qf – проекции двух конкурирующих точек 5 и 6, т.к. прямые AC и QF в пространстве скрещиваются. Пусть $(\cdot)5\in QF$, а $(\cdot)6\in AC$. Из чертежа видно, что точка $5'$ лежит выше, чем точка $6'$ ($z_5>z_6$), следовательно, на горизонтальной проекции точка 5 видима и видима проекция qf прямой QF, на которой она лежит. Прямая qf

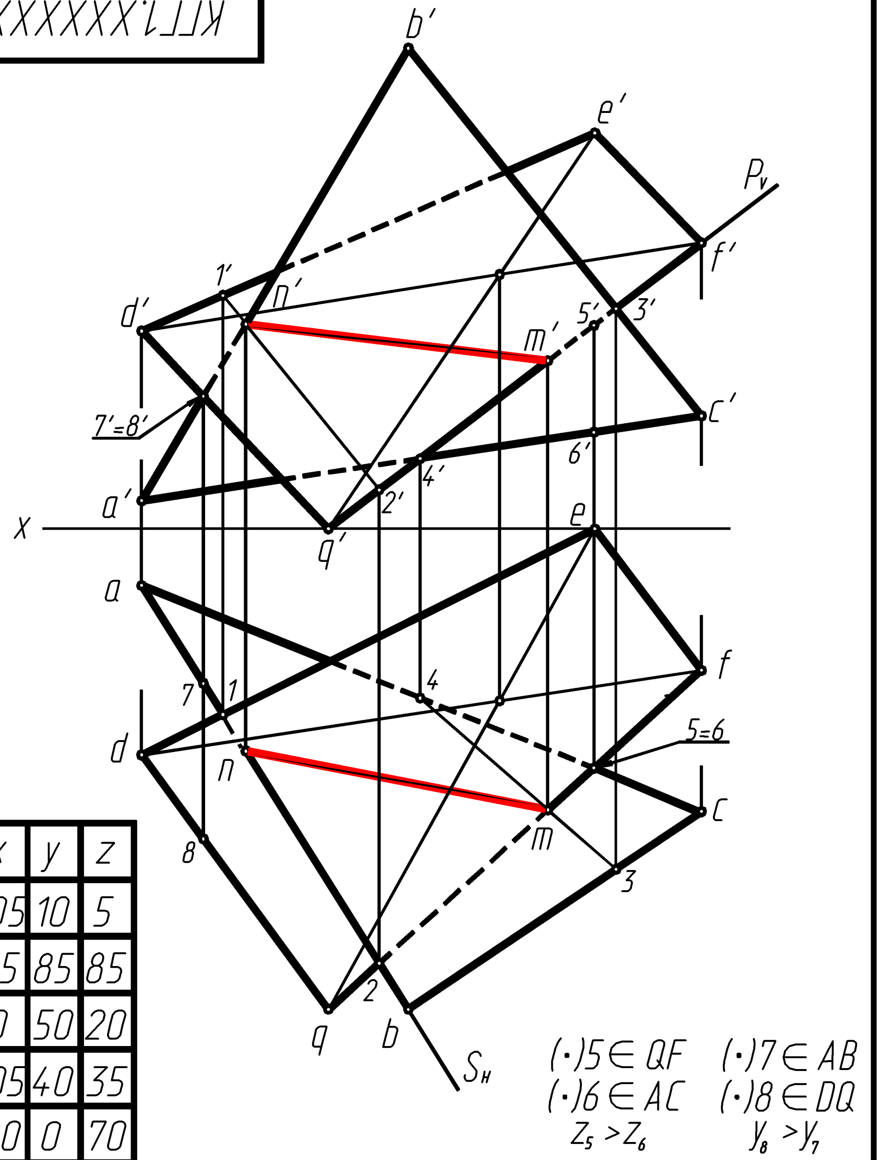
будет видима на участке от точки *f* до точки *m*. На участке *m2* она невидима, а далее опять видима.

Видимость сторон на плоскости *V* определена с помощью конкурирующих точек *7* и *8* (рис.5.12). Точка *8* (принадлежащая прямой *DQ*) к нам ближе, чем точка *7* (принадлежащая прямой *AB*), поэтому на фронтальной проекции она видима. Следовательно, $d'q'$ – видима, а прямая $a'b'$ на участке от точки $7'=8'$ до точки n' – невидима и т.д.

На рис. 5.12 приведен образец выполнения третьего задания.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Основные способы проецирования.
2. Основные правила об ортогональных проекциях точки на плоскостном чертеже.
3. Прямые уровня и свойства их проекций.
4. Проецирующие прямые и свойства их проекций.
5. Условия принадлежности точки прямой.
6. Взаимное положение двух прямых.
7. Свойства проекций скрещивающихся прямых. Как определяется видимость точек и прямых на чертеже?
8. Теорема о проецировании прямого угла.
9. Способы задания плоскости на чертеже.
10. Частные случаи расположения плоскостей в пространстве и особенности их расположения на чертеже.
11. Условия принадлежности точки и прямой плоскости.
12. Прямые частного положения в плоскости.
13. Условия параллельности двух плоскостей.
14. Построение линии пересечения двух плоскостей общего положения.
15. Условие параллельности прямой и плоскости.
16. Определение точки пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения.
17. Способ замены плоскостей проекций.
18. Две основные задачи преобразования прямой.
19. Две основные задачи преобразования плоскости.



	x	y	z
A	105	10	5
B	55	85	85
C	0	50	20
D	105	40	35
E	20	0	70
F	0	25	?
Q	70	85	0

Построить линию пересечения плоских фигур и определить их взаимную видимость

КГГ1.XXXXXX.031

Изм	Лист	№ докум.	Подпись	Дата
Разраб.				
Пров.				

Пересечение плоскостей

Лит.	Масса	Масштаб
У		1: 1

Лист 3 Листов

ТПУ АВТФ
Группа

Рис. 5.12

Таблица 6

Данные к первому и второму заданиям

№ вар.	S			A			B			C		
	x	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*
1	60	40	35	25	5	45	10	40	10	65	10	0
2	35	60	5	65	20	25	0	50	45	20	10	0
3	60	10	50	30	60	35	5	20	10	60	30	5
4	10	0	15	70	20	10	40	0	50	10	45	30
5	55	40	35	25	0	55	0	50	20	50	20	0
6	45	45	10	60	25	45	25	0	0	0	45	20
7	50	45	40	65	25	0	30	5	40	10	50	20
8	75	20	10	30	10	40	10	25	10	55	50	10
9	75	25	15	50	50	15	45	15	45	5	15	5
10	60	10	20	35	15	55	0	30	25	50	55	10
11	30	50	45	10	20	10	55	50	10	75	0	55
12	50	0	40	65	20	0	10	10	15	45	50	30
13	65	40	50	35	40	5	5	10	40	60	0	20
14	50	45	0	60	0	30	15	10	5	40	30	50
15	65	30	45	30	40	5	10	10	45	70	0	15
16	45	0	40	65	20	0	10	40	40	20	0	10
17	55	50	10	30	35	50	5	10	15	60	5	25
18	0	15	0	55	0	25	35	55	0	0	30	45
19	65	40	50	40	40	5	10	15	45	65	0	20
20	65	0	40	55	30	25	25	0	0	0	20	40
21	40	55	45	55	0	25	30	50	0	0	20	25
22	75	25	20	45	60	20	0	25	10	45	30	55
23	75	10	15	60	20	50	45	50	10	5	10	10
24	60	20	10	40	55	20	10	20	35	60	10	50
25	30	50	60	10	10	20	55	10	50	45	50	0
26	55	40	0	65	0	20	5	10	10	40	30	50
27	75	50	40	40	0	40	5	50	20	70	20	0
28	20	50	45	10	20	10	35	50	10	60	0	50
29	10	15	0	65	10	30	45	60	0	10	40	40
30	10	0	15	60	25	10	45	0	55	0	40	40

Таблица 7

Данные к третьему заданию

№ вар.	1 плоскость									2 плоскость											
	A			*B*			*C*			*D*			*E*			*F*			*Q*		
	x	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*
1	75	90	10	120	10	85	5	5	5	125	60	65	90	5	15	5	15	35	40	70	?
2	120	40	15	75	80	75	20	10	0	115	0	5	40	85	35	15	25	10	-	-	-
3	135	45	35	45	10	85	15	70	10	125	55	55	85	5	10	0	25	55	70	85	?
4	120	50	10	90	100	75	10	20	45	50	85	5	105	40	30	25	10	80	-	-	-
5	120	75	55	85	0	5	10	40	80	105	0	75	20	?	25	0	30	60	75	70	20
6	0	45	65	70	100	10	120	10	40	10	20	10	55	75	65	125	45	15	-	-	-
7	115	20	20	90	80	60	0	35	20	125	65	15	100	15	70	15	5	70	40	65	?
8	90	10	20	60	70	70	10	40	20	100	20	60	50	70	10	20	30	50	-	-	-
9	105	5	35	45	65	85	0	25	5	110	10	15	120	70	65	0	70	65	15	?	15
10	100	30	25	75	65	65	15	10	0	90	60	5	50	5	70	5	45	25	-	-	-
11	105	30	25	35	0	85	0	70	25	95	60	45	45	80	80	0	20	?	65	10	15
12	10	30	60	70	100	0	130	20	50	10	10	10	55	70	70	125	10	20	-	-	-
13	95	60	65	75	0	0	0	30	60	105	25	55	60	0	75	5	15	45	30	50	?
14	0	40	60	70	100	0	120	10	40	10	20	10	55	75	65	125	50	15	-	-	-
15	120	55	20	80	0	80	5	20	45	110	30	55	30	50	70	15	0	?	80	0	10
16	125	20	15	75	5	70	40	70	5	110	40	20	55	5	60	25	55	15	-	-	-
17	120	50	25	55	0	80	5	70	10	110	0	0	90	65	55	10	?	70	40	10	5
18	115	20	5	75	80	70	25	55	15	115	45	30	40	5	60	85	85	0	-	-	-
19	100	30	25	35	10	70	0	70	0	90	10	?	75	60	60	5	45	60	20	0	10
20	20	30	0	50	100	80	125	30	35	0	80	10	70	15	60	110	60	20	-	-	-
21	100	30	55	0	0	55	60	75	5	105	55	0	75	0	70	30	?	55	10	55	10
22	95	20	50	70	70	40	40	10	5	105	45	10	65	5	55	10	70	20	-	-	-
23	125	45	40	25	45	70	50	0	0	105	50	25	90	?	65	10	30	50	20	70	10
24	90	0	0	55	65	60	0	30	30	100	30	30	40	70	5	10	0	70	-	-	-
25	115	60	10	65	0	55	10	85	10	115	35	?	35	90	60	20	35	25	85	0	0
26	10	30	60	60	95	0	120	20	30	110	45	10	55	80	70	10	0	10	-	-	-
27	95	60	0	70	10	70	15	75	20	110	35	40	50	?	55	10	40	30	40	85	0
28	120	20	30	70	5	55	10	65	5	100	50	10	35	10	0	20	75	60	-	-	-
29	110	0	20	15	40	65	80	70	0	120	25	40	50	0	55	10	65	?	90	80	0
30	110	45	35	10	85	75	50	0	0	10	45	30	100	65	0	55	10	80	-	-	-

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винокурова Г.Ф., Степанов Б.Л. Инженерная графика: Учебное пособие (часть 1). – Томск: Изд. ТПУ, 2000. – 190 с.: ил.
2. Чекмарев А.А. Инженерная графика: Учебник для вузов. – 3-е изд., стер.- М.: Высш. шк.,2000.- 365 с.: ил.
3. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии: Учебное пособие. – М.: Высш. шк., 1998. – 272 с.: ил.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Методические указания для студентов 1 курса всех специальностей

Составители: Светлана Петровна Буркова
Галина Федоровна Винокурова
Анатолий Иосифович Озга

Подписано к печати 20.02.07. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл.печ.л. 3,95. Уч.-изд.л. 3,58.
Заказ . Тираж 100 экз.

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.