

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций для студентов ТПУ
всех специальностей

Томск 2009

Лекция 5. Поверхности

Способы задания поверхности

Существуют различные способы задания поверхности.

1. Аналитический способ

Поверхность в этом случае описана математическим выражением и представляется как геометрическое место точек или линий, удовлетворяющих уравнению $F(x, y, z) = 0$.

Например, поверхность шара задана уравнением: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

2. Задание поверхности *каркасом*.

Этот способ используется при задании сложных поверхностей. Поверхность задается семейством линий, принадлежащих поверхности (каркасом). Каркасы могут быть сетчатые, линейчатые, точечные.

При задании поверхности каркасом необходимо иметь ряд ее параллельных сечений, которые можно рассматривать как положения образующей переменного вида. Такой способ применяется при изготовлении кузовов автомобилей, в самолетостроении и судостроении.

Способ задания поверхности каркасом с помощью линий пересечения поверхности плоскостями уровня применяется в топографии, горном и дорожном деле. Проекция линии уровня на плоскость проекций с соответствующими отметками представляют собой карту рельефа местности. Поверхность, отнесенная к земной поверхности, называется *топографической* (рис. 1).

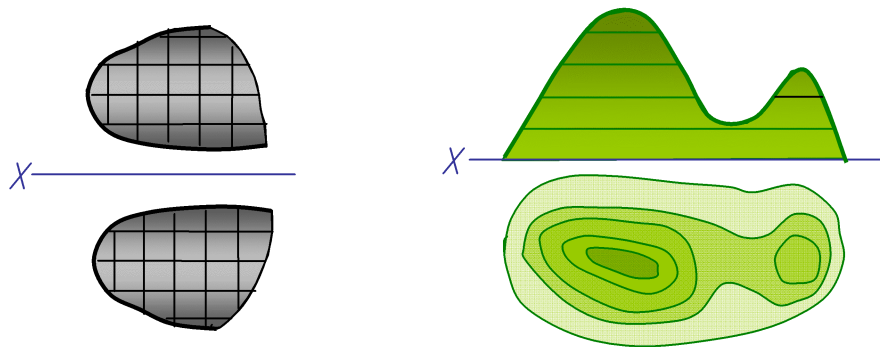


Рис. 1

3. Кинематический способ

В начертательной геометрии поверхности рассматриваются как множество последовательных положений движущейся линии. Такой способ образования поверхности называется *кинематическим*.

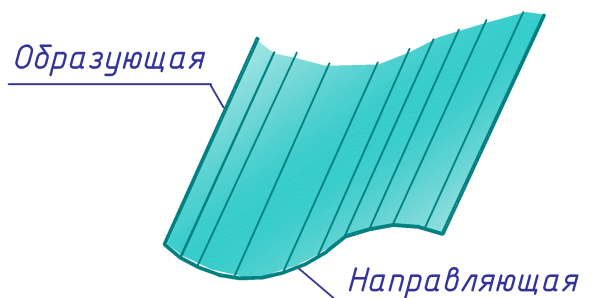


Рис. 2

Линия (кривая или прямая) движется в пространстве и создает поверхность. Она называется

образующей. Как правило, образующая движется по второй линии. Эта линия называется *направляющей* (рис. 2).

Классификация поверхностей

Поверхности можно разделить на несколько классов в зависимости от формы образующей, а также от формы, числа и расположения направляющих:

1. Поверхности закономерные и не закономерные.
2. Линейчатые (образованные перемещением прямой линии) и нелинейчатые (криволинейные) поверхности.
3. Поверхности развертывающиеся (или торсы) и неразвертывающиеся.

Развертывающиеся поверхности – поверхности, которые после разреза их по образующей могут быть односторонне совмещены с плоскостью без наличия разрывов и складок.

Неразвертывающиеся поверхности – поверхности, которые не могут быть совмещены с плоскостью без наличия разрывов и складок.

4. Поверхности с образующей постоянной формы и поверхности с образующей переменной формы.

5. Поверхности с поступательным, вращательным или винтовым движением образующей.

Задание поверхности на чертеже

Чтобы задать поверхность на комплексном чертеже, достаточно иметь на нем такие элементы поверхности, которые позволяют построить каждую ее точку. Совокупность этих элементов называется *определителем поверхности*.

Определитель поверхности состоит из двух частей:

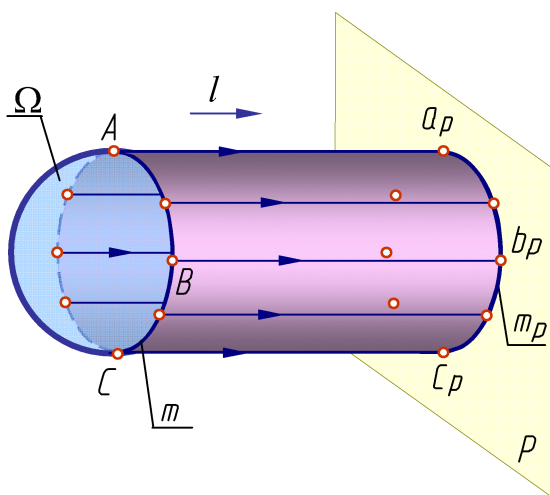


Рис. 3

- *геометрической части*, включающей постоянные геометрические элементы (точки, линии), которые участвуют в образовании поверхности;

- *алгоритмической части*, задающей закон движения образующей, характер изменения ее формы.

Когда какая-нибудь поверхность Ω проецируется с помощью параллельных лучей на плоскость проекций P , то проецирующие прямые, касающиеся поверхности Ω ,

образуют цилиндрическую поверхность (рис. 3). Эти проецирующиеся

прямые касаются поверхности Ω в точках, образующих некоторую линию m , которая называется *контурной линией*.

Проекция контурной линии m на плоскость P , m_p , называется *очерком поверхности*.

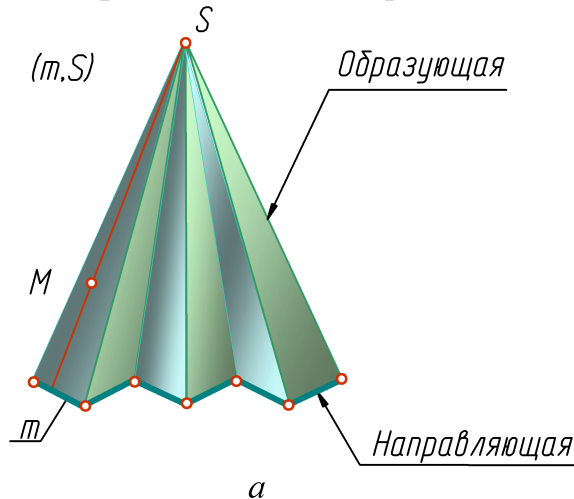
Чтобы сделать чертеж более наглядным строят *очерк поверхности*, а также ее наиболее важные линии и точки.

Линейчатые поверхности

Гранные поверхности

Гранной поверхностью называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. Гранные поверхности можно разделить на два вида: пирамидальные (рис. 4, а) и призматические (рис. 4, б).

Пирамидальная поверхность



Призматическая поверхность

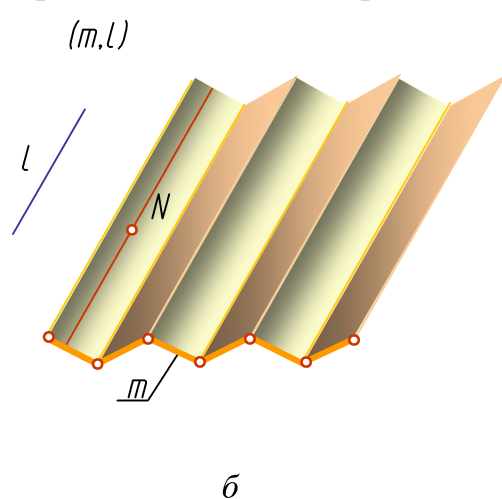


Рис. 4

Пирамидальной называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. При этом все образующие проходят через некоторую неподвижную точку S . Определитель поверхности – ломаная направляющая m и точка S .

Призматической называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. При этом все образующие проходят параллельно некоторому заданному направлению l . Определитель поверхности – ломаная направляющая m и направление l .

Точка на поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-нибудь линии, принадлежащей поверхности.

Линия принадлежит поверхности, если она проходит через точки, принадлежащие поверхности.

Следовательно, если точка принадлежит поверхности, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям линии этой поверхности.

Точки M и N принадлежат соответственно пирамидальной и призматической поверхностям, так как принадлежат прямым, расположенным на этих поверхностях.

Часть пространства, ограниченная со всех сторон поверхностью, называется *телом*.

Многогранники

Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Рассмотрим два многогранника – пирамиду и призму.

Пирамида представляет собой многогранник, у которого одна грань – основание (произвольный многоугольник). Остальные грани (боковые) – треугольники с общей вершиной S , называемой вершиной пирамиды.

Для задания на чертеже пирамиды достаточно задать ее основание и вершину. Чтобы построить проекции точки на поверхности пирамиды, нужно через эту точку провести вспомогательную прямую, принадлежащую поверхности пирамиды (рис. 5).

Ω – пирамида $SABC$. $(\bullet) M(m') \in \Omega$. $m - ?$

$(\bullet) M \in S1$

$(\bullet) M \in 2-3$

$(\bullet) M \in B4$

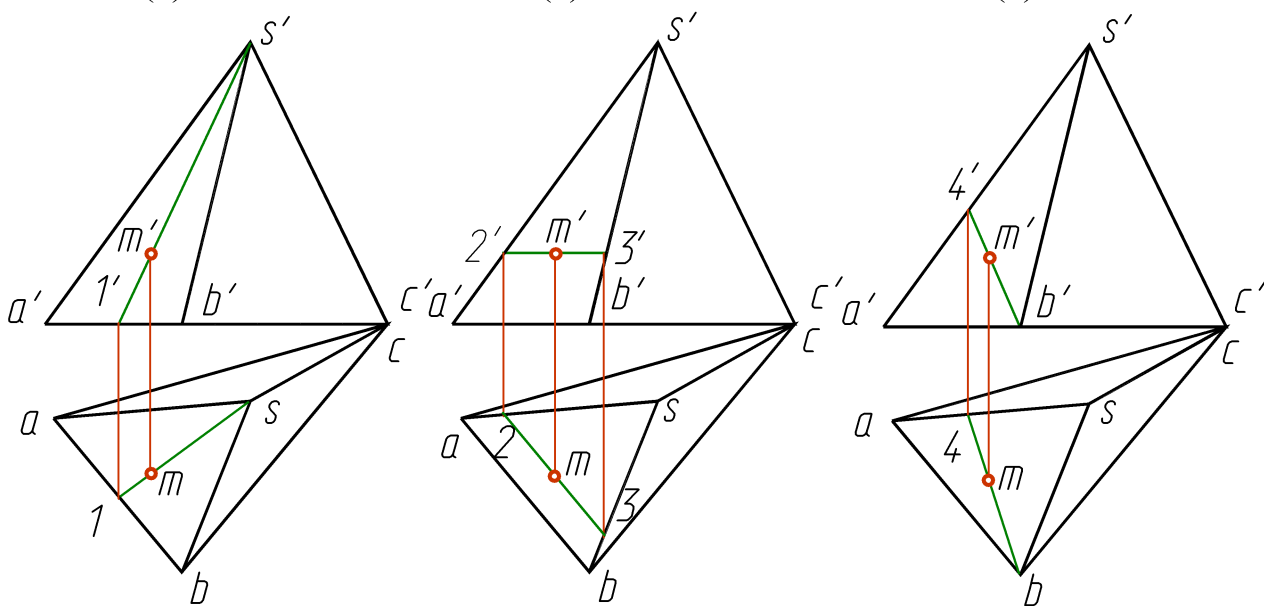


Рис. 5

Призмой называется многогранник, у которого основания – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами. Боковые грани призмы – параллелограммы. Если ребра боковых граней перпендикулярны основанию, то призму называют *прямой* (рис. 6), если нет – *наклонной* (рис. 7). Для задания призмы достаточно задать одно ее основание и боковое ребро. Чтобы построить недостающую проекцию точки, лежащей на грани призмы, нужно через эту точку провести прямую.

Σ – призма ABC . $(\bullet) M(m') \in \Sigma$.
 $m - ?$

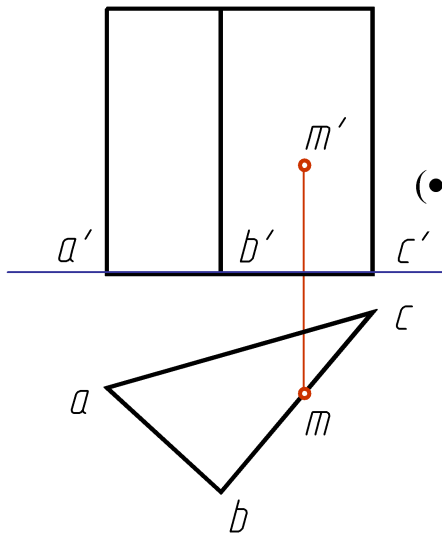


Рис. 6

$(\bullet) M \in \text{грани } BC$

Σ – призма ABC . $(\bullet) M(m') \in \Sigma$.
 $m - ?$

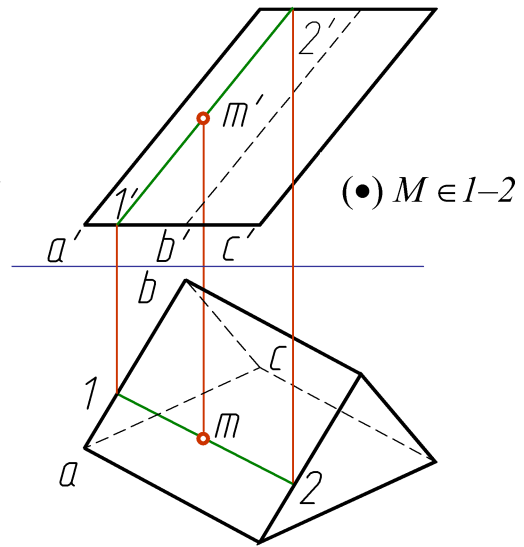


Рис. 7

$(\bullet) M \in 1-2$

Пересечение многогранников плоскостями

В пересечении гранных поверхностей плоскостями получаются многоугольники. Их вершины определяются как точки пересечения ребер гранных поверхностей с секущей плоскостью.

Многоугольник сечения может быть построен двумя способами:

1. Вершины многоугольника находятся как точки пересечения прямых (ребер) с секущей плоскостью;
2. Стороны многоугольника находятся как линии пересечения плоскостей (граней) многогранника с секущей плоскостью.

В качестве примера построим сечение призмы (рис. 8) и пирамиды (рис. 9) фронтально-проецирующими плоскостями.

Секущая плоскость является фронтально - проецирующей, следовательно, все линии, лежащие в этой плоскости (в том числе и фигура сечения на фронтальной проекции), совпадут с фронтальным следом Q_V плоскости Q . Таким образом, фронтальные проекции фигур сечения $1'2'3'$ определяются при пересечении фронтальных проекций ребер призмы и пирамиды со следом Q_V . Горизонтальные проекции точек 1, 2 и 3 находим при помощи линий связи на горизонтальных проекциях соответствующих ребер.

Грани прямой призмы на плоскость, которой они перпендикулярны, проецируются в линии, ребра – в точки. Поэтому все точки и линии, находящиеся на гранях и ребрах призмы проецируются соответственно на эти линии и точки. Проекция фигуры сечения призмы совпадает с горизонтальной проекцией самой призмы (рис. 8).

Ω – призма ABC . $Q \perp V$
 $\Omega \cap Q = \Delta 123$

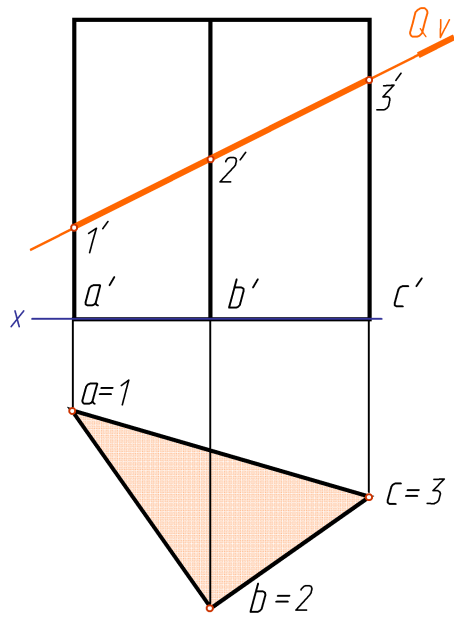


Рис. 8

Ω – пирамида $SABC$. $Q \perp V$
 $\Omega \cap Q = \Delta 123$

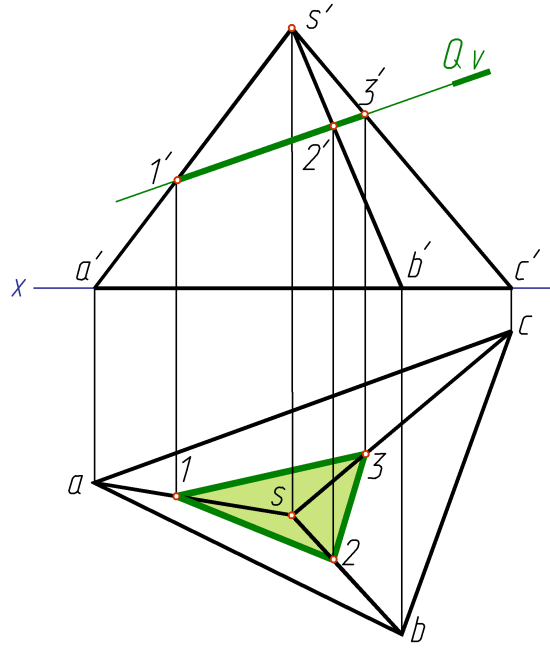


Рис. 9

Криволинейные поверхности

Коническая поверхность образуется движением прямолинейной образующей по криволинейной направляющей. При этом образующая проходит через некоторую неподвижную точку S , которая называется вершиной (рис. 10).

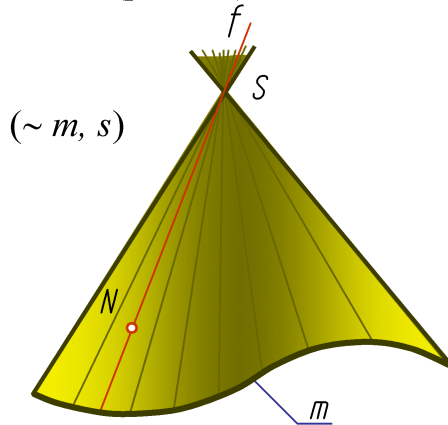
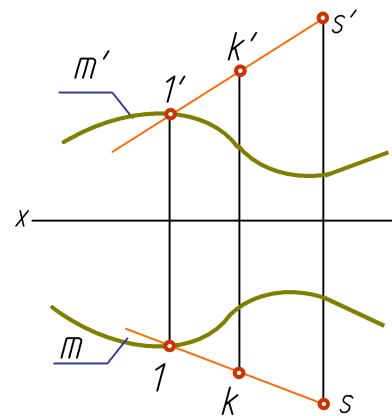


Рис. 10



Коническая поверхность определена на чертеже, если заданы направляющая и вершина. Тело, ограниченное конической поверхностью и плоскостью, называется конусом. Конус будет круговым, если в его основании лежит круг.

Точка N принадлежит конической поверхности, так как она принадлежит образующей f этой поверхности; точка K принадлежит конической поверхности, так как она принадлежит образующей $S1$ ($k \in s1$, $k' \in s'1'$) данной поверхности (рис. 10).

Цилиндрическая поверхность образуется движением прямолинейной образующей параллельно заданной прямой линии l по криволинейной направляющей (рис. 11).

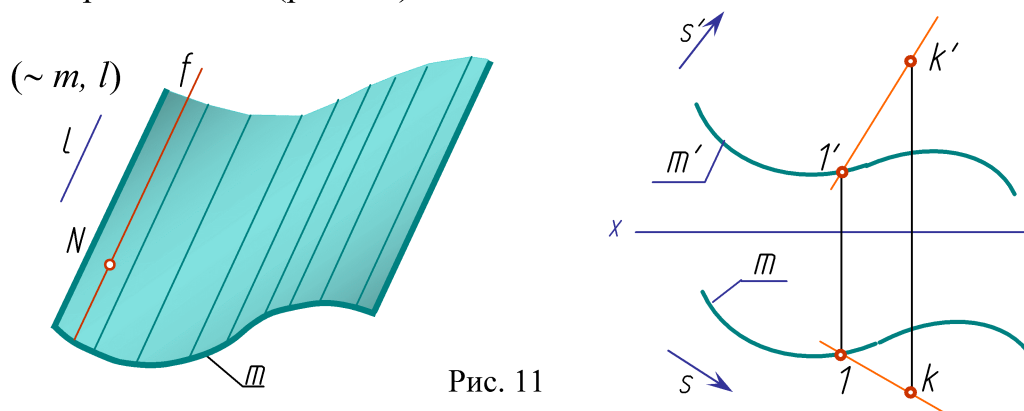


Рис. 11

Цилиндрическая поверхность определена, если задана направляющая и образующая. Для построения чертежа цилиндрической поверхности удобно выбирать в качестве направляющей линию пересечения цилиндрической поверхности с плоскостью проекций или другой плоскостью, ей параллельной.

Цилиндрическая поверхность также может быть незамкнутой или замкнутой. Тело, ограниченное цилиндрической замкнутой поверхностью и двумя параллельными плоскостями, называется *цилиндром*. Цилиндрические поверхности различают по виду нормального сечения, например, круговой цилиндр, эллиптический цилиндр и т.д.

Точка N принадлежит цилиндрической поверхности, так как она

принадлежит образующей f этой поверхности; точка K принадлежит цилиндрической поверхности, так как она принадлежит образующей, проходящей через точку l параллельно направлению S данной поверхности (рис. 11).

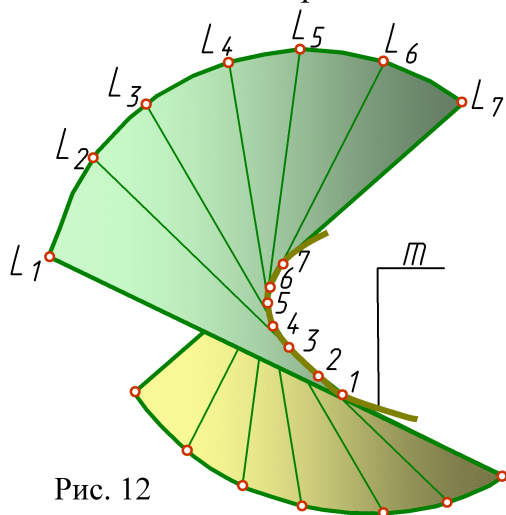


Рис. 12

Торс (поверхность с ребром возврата) образуется движением прямолинейной образующей, касающейся во всех своих положениях некоторой пространственной кривой, называемой *ребром возврата* (от франц. *tors* – витой, крученный).

Ребро возврата m является направляющей торса. Торс состоит из двух полостей, разделенных ребром возврата (рис. 12).

Если ребро возврата вырождается в точку, поверхность торса превращается в коническую. В случае, когда ребро возврата вырождается в бесконечно удаленную точку, торсовая поверхность превращается в цилиндрическую.

Лекция 6. Поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, образованная вращением образующей вокруг неподвижной оси (рис. 1). Эта поверхность определяется на чертеже заданием образующей и оси вращения.

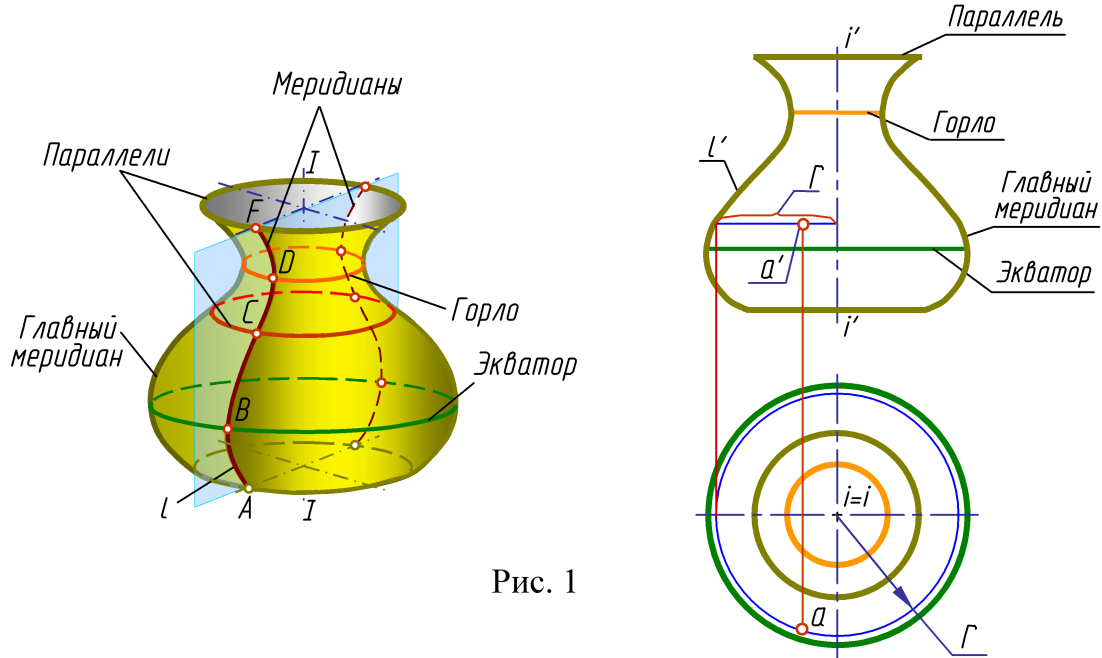


Рис. 1

Каждая точка образующей l описывает при своем вращении окружность, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси вращения, с центром на оси. Эти окружности называются *параллелями*. Наибольшая из этих параллелей называется *экватором*, наименьшая – *горлом*.

Плоскость, проходящую через ось поверхности вращения, называют *меридианальной*. Линию ее пересечения с поверхностью – *меридианом*. Меридиан, параллельный фронтальной плоскости проекций, называется *главным меридианом*. Все меридианы равны между собой.

На чертеже ось вращения II располагают перпендикулярно к одной из плоскостей проекций, например горизонтальной. Тогда все параллели проецируются на эту плоскость в истинную величину. Экватор и горло определяют горизонтальный очерк поверхности. Фронтальным очерком такой поверхности будет главный меридиан, то есть меридиан, расположенный во фронтальной плоскости.

Точки на поверхностях вращения могут быть построены с помощью параллелей, то есть окружностей на поверхности.

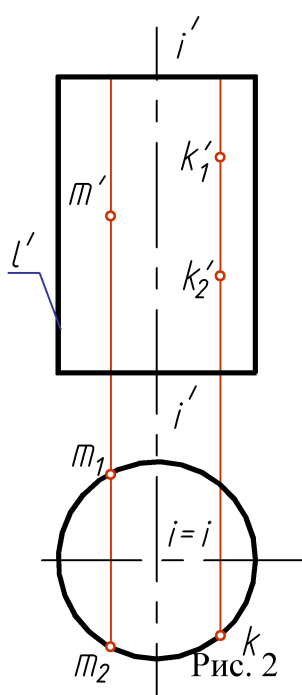
Цилиндр вращения

Цилиндром вращения называется поверхность, образованная вращением прямой вокруг параллельной ей оси.

Если ось цилиндра перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальные проекции точек, лежащих на его поверхно-

сти, будут расположены на окружности, в которую спроецируется цилиндр на горизонтальную плоскость H (рис. 2).

Задача. Найти недостающие проекции точек M и K (рис. 2).



$\varphi(l, II)$
 $M(m')$
 $K(k)$
 $\overline{m(m_1, m_2) - ?}$
 $k'(k'_1, k'_2) - ?$

Для того, чтобы найти горизонтальную проекцию точки M , проведем линию связи от фронтальной проекции $M(m')$ до пересечения с горизонтальной проекцией цилиндра (окружностью). Задача имеет два ответа: точки m_1 и m_2 .

Однозначно определить положение фронтальной проекции точки K по одной только горизонтальной проекции k невозможно. По линии связи, проведенной от горизонтальной проекции этой точки, на поверхности цилиндра может находиться бесчисленное множество точек. В этом случае необходима дополнительная информация о положении точки K .

При пересечении цилиндра вращения плоскостью, параллельной оси вращения, в сечении получаются две прямые – образующие (рис. 3).

Если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения, в результате сечения получится окружность (рис. 4).

В общем случае, когда секущая плоскость наклонена к оси вращения цилиндра, в сечении получается эллипс (рис. 5).

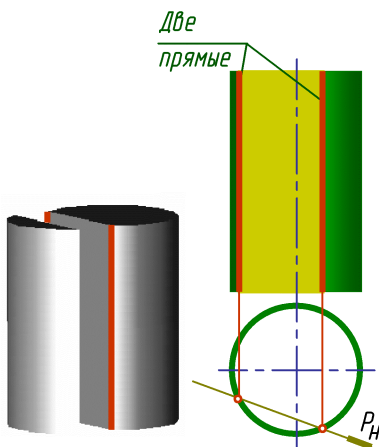


Рис. 3

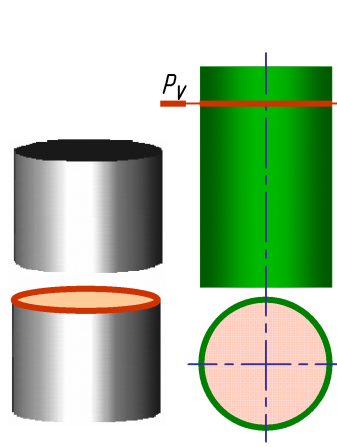


Рис. 4

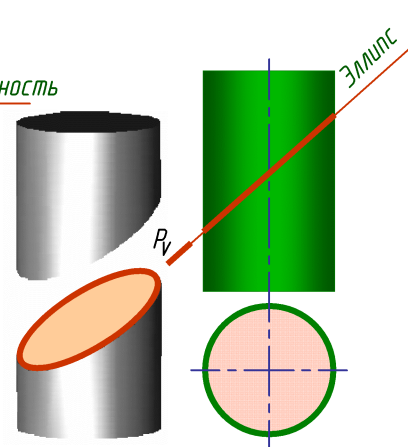
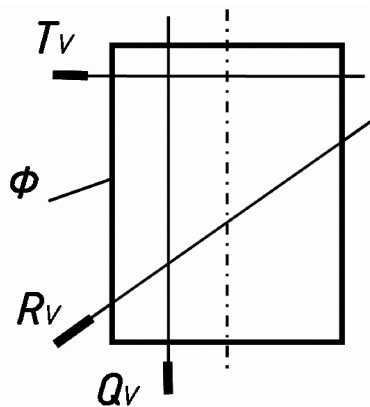


Рис. 5



$$Q(Q_v) \cap \Phi = 2 \text{ образующие}$$

$$T(T_v) \cap \Phi = \text{окружность}$$

$$R(R_v) \cap \Phi = \text{эллипс}$$

Рис. 6

Сечение цилиндра плоскостью

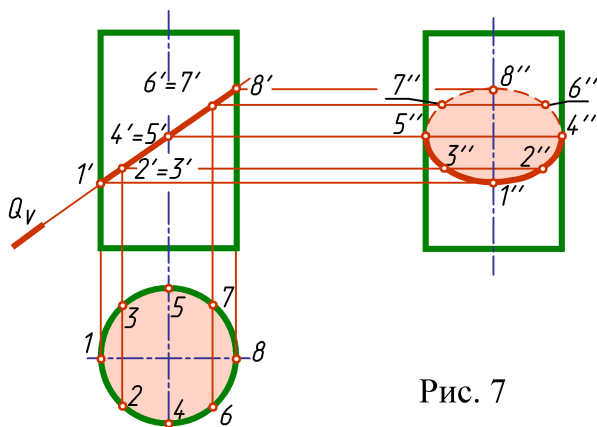


Рис. 7

В общем случае построение линии пересечения поверхности плоскостью заключается в нахождении общих точек, то есть точек, принадлежащих одновременно секущей плоскости и поверхности.

Для нахождения этих точек применяют способ дополнительных секущих плоскостей:

1. Проводят дополнительную плоскость.

2. Строят линии пересечения дополнительной плоскости с поверхностью и дополнительной плоскости с заданной плоскостью.

3. Определяют точки пересечения полученных линий.

Дополнительные плоскости проводят таким образом, чтобы они пересекали поверхность по наиболее простым линиям.

Нахождение точек линии пересечения начинают с определения характерных (опорных) точек. К ним относятся

- верхние и нижние, левая и правая и точки границы видимости;
- точки, характеризующие данную линию пересечения (для эллипса – точки большой и малой осей).

Для более точного построения линии пересечения необходимо построить еще и дополнительные (промежуточные) точки.

Прямой круговой конус

Сечение конуса плоскостью

В зависимости от направления секущей плоскости в сечении конуса вращения могут получиться различные линии.

- Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, в его сечении получается *две прямые* – образующие (треугольник) (рис. 8, а).

- В результате пересечения конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса, получается *окружность* (рис. 8, б).

Если секущая плоскость наклонена к оси вращения конуса и не проходит через его вершину, в сечении конуса могут получиться эллипс, парабола или гипербола (рис. 8, в, г, д) – в зависимости от величины угла наклона секущей плоскости.

- *Эллипс* получается в том случае, когда угол β наклона секущей плоскости меньше угла наклона α образующих конуса к его основанию ($0 < \beta < \alpha$), т.е. когда плоскость пересекает все образующие данного конуса (рис. 8, в).

- Если углы α и β равны (то есть секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса), в сечении получается *парабола* (рис. 8, г).

- Если секущая плоскость направлена под углом, который изменяется в пределах $90^\circ \geq \beta > \alpha$, то в сечении получается *гипербола*. В этом случае секущая плоскость параллельна двум образующим конуса. Гипербола имеет две ветви, так как коническая поверхность двухполостная (рис. 8, д).

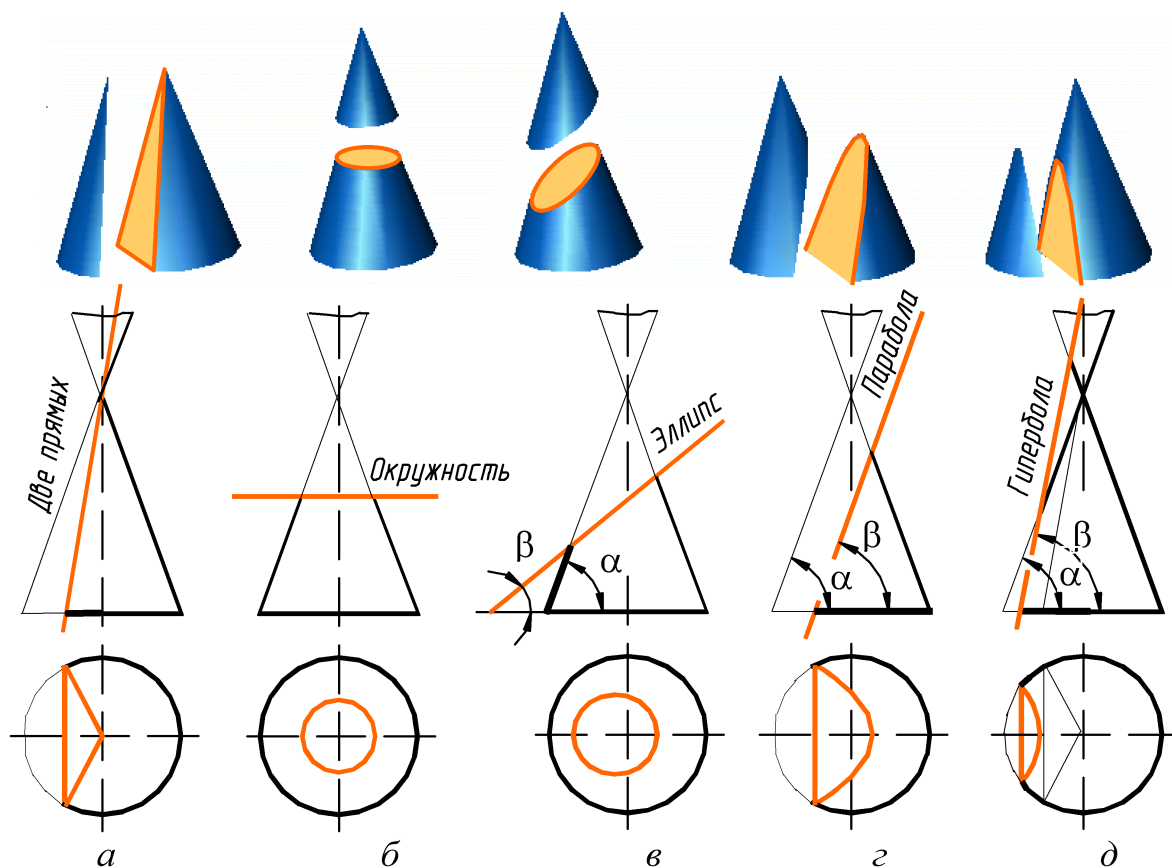


Рис. 8

Точка на конусе

Для конуса наиболее простыми линиями являются прямые (образующие) и окружности.

Горизонтальную проекцию точки A найдем с помощью образующей. Проведем через точку A и вершину конуса S вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость $P(P_V)$. Она пересекает конус по двум образующим SM и SN . Их фронтальные проекции совпадают. Строим горизонтальные проекции образующих. Затем проводим через точку a' линию связи. На пересечении линии связи и горизонтальных проекций образующих определим горизонтальную проекцию точки. Задача имеет два ответа: точки a_1 и a_2 (рис. 9).

(•) $A \in SN$ или (•) $A \in SM$

Горизонтальную проекцию точки B найдем, построив окружность, на которой она лежит. Для этого через точку проведем горизонтальную плоскость $T(T_V)$, которая пересекает конус по окружности радиуса r .

(•) $B \in \text{Окр } r$

Строим горизонтальную проекцию этой окружности. Через точку b' проведем линию связи до ее пересечения с окружностью. Задача также имеет два ответа – точки b_1 и b_2 .

Рассмотрим пример построения проекций линии пересечения конуса фронтально - проецирующей плоскостью $P(P_V)$. В этом случае в сечении получается эллипс (рис. 10).

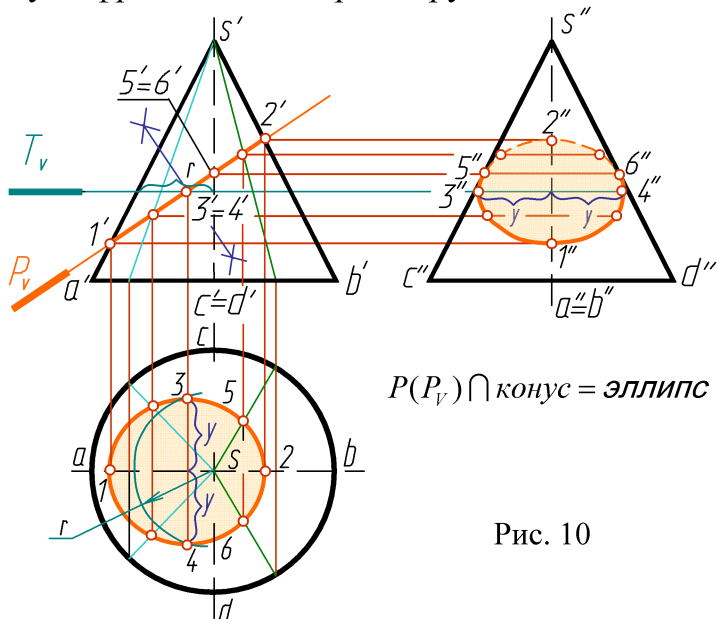


Рис. 10

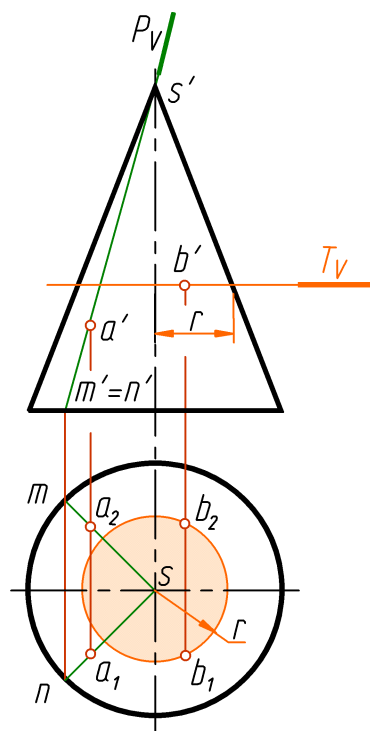


Рис. 9

Сначала определим характерные (опорные) точки.

Фронтальная проекция линии сечения совпадает с фронтальным следом плоскости P_V . Нижняя точка 1 лежит на образующей AS , верхняя – 2 на образующей BS . Эти точки определяют положение большой оси эллипса. Малая ось эллипса перпендику-

лярна большой оси. Чтобы найти малую ось, разделим отрезок 1-2 на две равные части. Точки 3 и 4 определяют малую ось эллипса. Точки 5 и 6, расположенные на образующих CS и DS , являются точками границы видимости для профильной плоскости проекций. Проекция точек 1, 2, 5 и 6 находятся на соответствующих проекциях образующих. Чтобы найти проекции точек 3 и 4, проводим дополнительную секущую плоскость $T(T_V)$. Она пересекает конус по окружности радиуса r . На этой окружности находятся проекции данных точек. Для точного построения необходимо определить дополнительные (случайные точки). Проекция этих точек находим аналогично точкам 3 и 4 или проводя через эти точки образующие. Соединяем полученные проекции точек. Определяем видимость. На горизонтальной плоскости все точки, лежащие на поверхности конуса, видимы. На профильной – точки 5, 3, 1, 4, 6 видимы, остальные – нет.

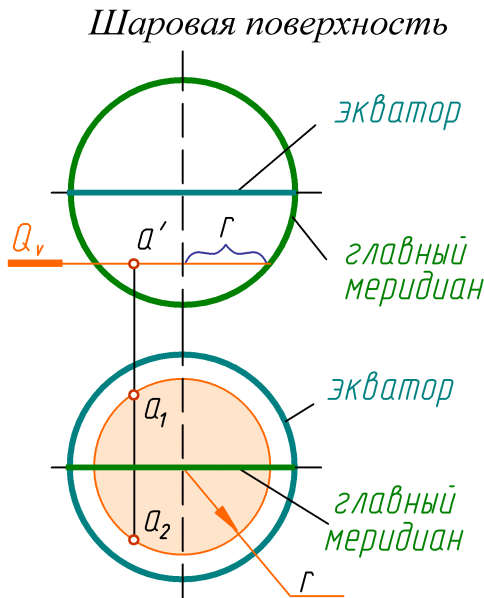


Рис. 11

Шаровой поверхностью (или сферой) называется поверхность, образованная при вращении окружности вокруг своего диаметра.

Если шаровая поверхность пересекается плоскостью, то в сечении всегда получается окружность, которая может спроецироваться:

- в прямую, если секущая плоскость перпендикулярна плоскости проекций;
 - в окружность, если секущая плоскость параллельна плоскости проекций.
- Например, окружность с радиусом r , равным расстоянию от оси вращения шара до очерка (рис. 11);

- в эллипс, если секущая плоскость не параллельна плоскости проекций.

Чтобы построить проекции точки, лежащей на поверхности шара, необходимо через нее провести секущую плоскость, параллельную плоскости проекций, затем построить окружность, на которой находится эта точка.

$$(\bullet) A \in \text{Окр. } r$$

Сечение шаровой поверхности плоскостью

Пересечем поверхность шара фронтально-проецирующей плоскостью $Q(Q_V)$ (рис. 12). Построение начинаем с определения характерных точек.

$$(\bullet) 1, 2 \in \text{гл. меридиану}$$

Точки 1 и 2 находятся на главном меридиане. Эти точки – концы малой оси эллипса, а также это самая высокая и самая низкая точки. Их

горизонтальные и профильные проекции строим по фронтальным проекциям.

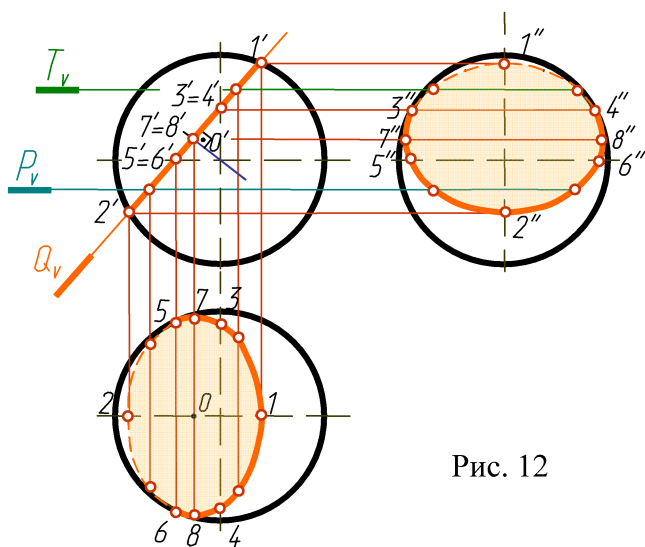


Рис. 12

(•)3,4 ∈ профильному очерку

Точки 3 и 4 находятся на профильном меридиане и определяют видимость на профильной плоскости проекций.

Горизонтальные проекции точек находим по профильным проекциям.

(•)5,6 ∈ экватору

Точки 5 и 6 принадлежат экватору и являются точками границы видимости на горизонтальной проекции. Профильные проекции точек находим по горизонтальным проекциям.

Чтобы найти положение большой оси эллипса (точки 7 и 8) разделим отрезок $1'2'$ пополам. Фронтальные проекции точек (точки $7'$ и $8'$) совпадают с серединой этого отрезка. В этой же точке находится фронтальная проекция центра окружности сечения. На горизонтальную плоскость диаметр окружности проецируется без искажения. Поэтому точки 7 и 8 будут находиться на расстоянии R от центра окружности сечения (рис. 12).

Для большей точности строим несколько дополнительных точек.

Полученные точки соединяем плавной кривой линией с учетом ее видимости.

Тор

Тор – поверхность, полученная вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр.

Если ось вращения проходит вне окружности, то поверхность называется «открытый тор» или «тор – кольцо» (рис. 13); если ось касается «тор» (рис. 15 – 16). Тор, изображенный на рис. 15, называется также «тор-яблоко», а на рис. 16 – «тор-лимон». Сфера – частный случай торовой поверхности.

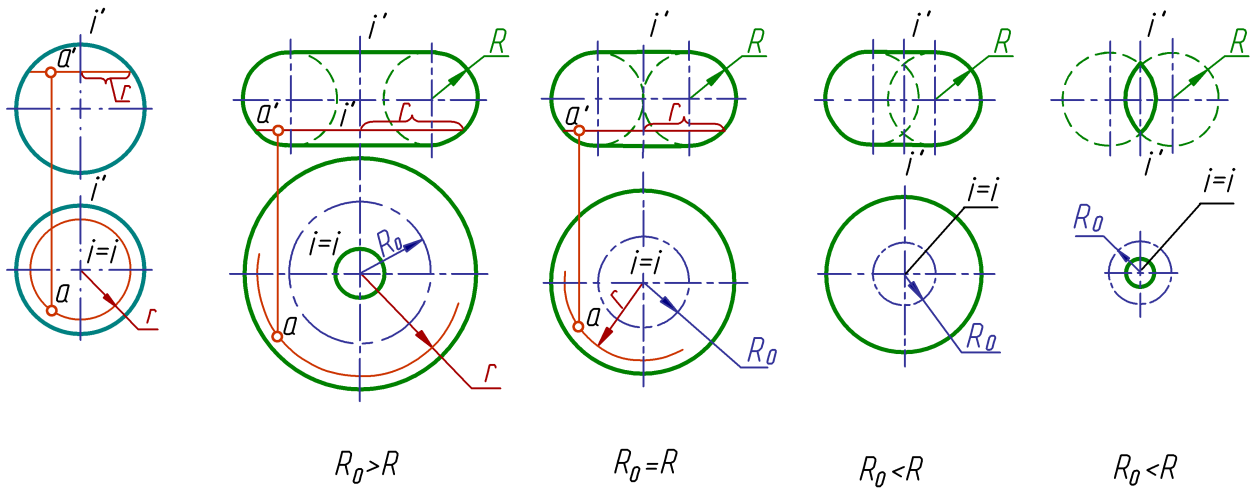


Рис. 13

Рис. 14

Рис. 15

Рис. 16

(•) $A \in \text{окр.}\mathcal{I}$

Поверхности, образованные вращением кривых второго порядка:

а) *эллипсоид вращения* – поверхность, полученная вращением эллипса вокруг оси (рис. 17). Поверхность, образованная вращением эллипса вокруг его большой оси, называется вытянутым эллипсоидом вращения (рис. 17, б), при вращении вокруг малой оси – сжатым эллипсоидом вращения (рис. 17, а, в);

б) *параболоид вращения* – поверхность, образованная вращением параболы вокруг ее оси (рис. 18);

в) *двухполостный гиперboloид вращения* – поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг ее действительной оси (рис. 19).

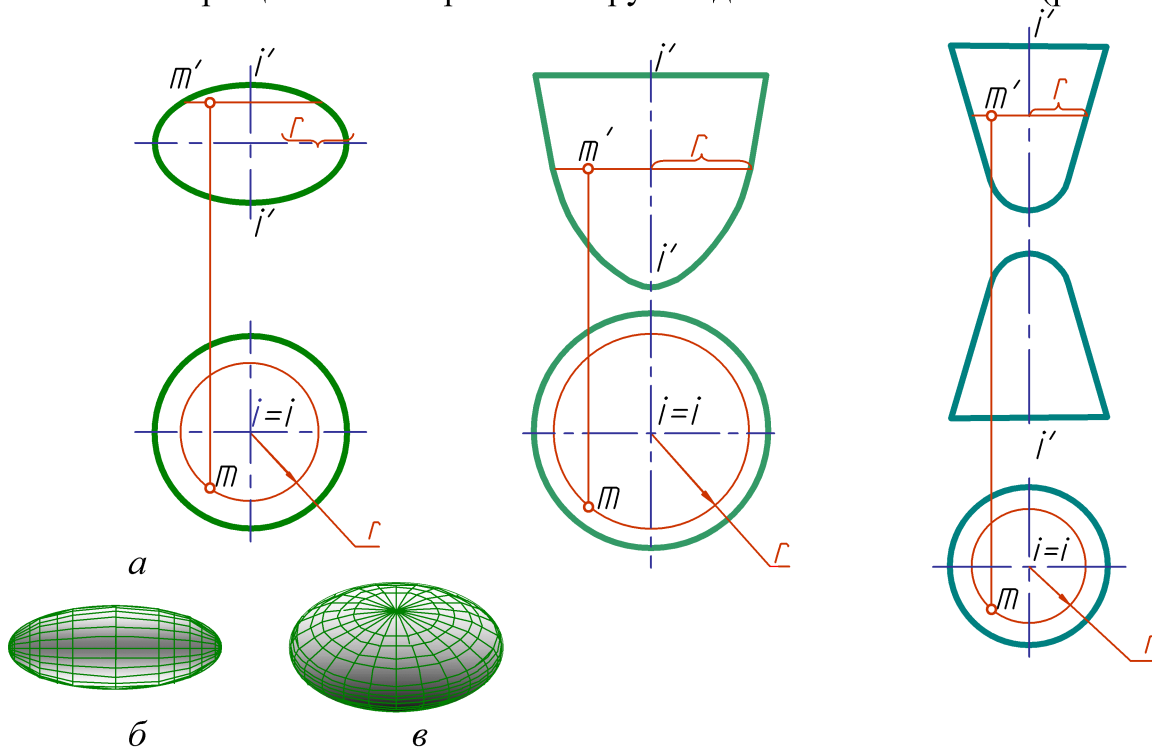


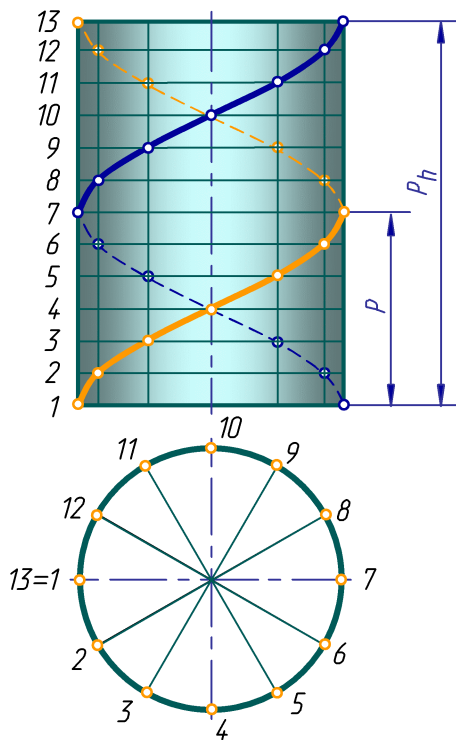
Рис. 17

Рис. 18

Рис. 19

Лекция 7. Винтовые поверхности. Пересечение поверхностей

Винтовая линия



Винтовая линия (гелиса) – это пространственная кривая, образованная движением точки, совершающей одновременно поступательное и вращательное движение.

Рассмотрим цилиндрическую винтовую линию (рис. 1) и построим две ее проекции.

Для этого используем две проекции цилиндра, каждую из которых делим на двенадцать равных частей. При перемещении точки из первого положения во второе ее горизонтальная проекция перемещается по окружности на одну двенадцатую часть, а фронтальная – вверх на одну двенадцатую.

Совершая полный оборот, точка в пространстве опишет винтовую линию. Высота, на которую поднимается точка по прямой за полный оборот, называется *шагом винтовой линии*.

Если ось винтовой линии перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция винтовой линии есть окружность, а фронтальная – синусоида.

На одной поверхности цилиндра может быть несколько винтовых линий.

Винтовые поверхности

Винтовой поверхностью называется поверхность, образованная при перемещении какой-либо линии (образующей) по винтовой линии (направляющей).

Если образующей винтовой поверхности является прямая линия, то поверхность называется *линейчатой винтовой поверхностью* или *геликоидом* (от франц. *helic* – спираль, винтовая линия). Геликоид называется прямым или наклонным в зависимости от того, перпендикулярна образующая оси геликоида или наклонна.

Рассмотрим некоторые виды линейчатых винтовых поверхностей.

1. *Прямой геликоид* образуется движением прямолинейной образующей l по двум направляющим. Одна из направляющих является цилиндрической винтовой линией m , а другая – ее осью II . Причем во всех своих положениях образующая l параллельна плоскости, которая называется

плоскостью параллелизма, перпендикулярной оси II (рис. 2). У прямого геликоида образующая l пересекает ось II под прямым углом.

2. *Наклонный геликоид* отличается от прямого геликоида тем, что его образующая l пересекает ось геликоида под постоянным углом α , не равным прямому углу. Во всех своих положениях образующая l параллельна образующим некоторого конуса вращения. У этого конуса угол между образующей и осью, параллельной оси геликоида, равен φ . Он называется *направляющим конусом наклонного геликоида* (рис. 3).

Его направляющими являются цилиндрическая винтовая линия m и ее ось II . Образующие геликоида параллельны соответствующим образующим направляющего конуса.

Если образующие геликоида пересекают его ось, то геликоид называется *закрытым*, если нет – *открытым*.

3. *Открытый геликоид* образуется при винтовом движении прямой образующей l , касающейся во всех своих положениях поверхности малого цилиндра и параллельно плоскости параллелизма, проведенной перпендикулярно оси геликоида (рис. 4).

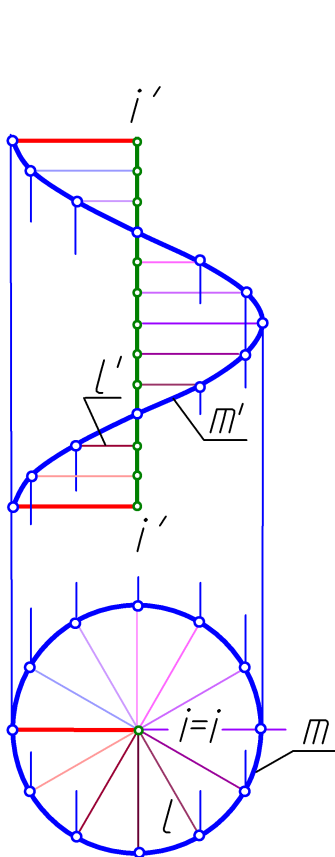


Рис. 2

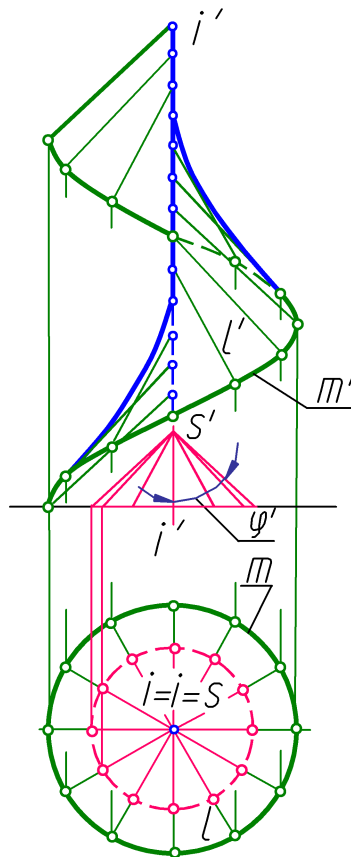


Рис. 3

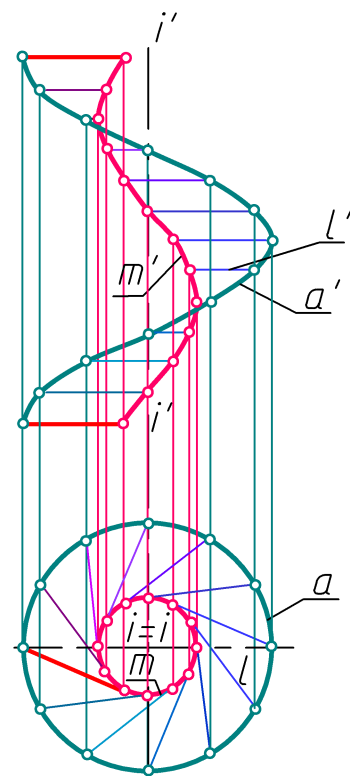


Рис. 4

Пересечение поверхностей

Линия пересечения двух поверхностей – это геометрическое место точек, принадлежащих одновременно обеим поверхностям.

Общим способом построения точек, принадлежащих кривой взаимного пересечения поверхностей, является способ вспомогательных поверхностей (плоскостей) посредников.

Принцип решения задачи

Пусть даны некоторые взаимно пересекающиеся поверхности Φ и Ω (рис. 5). Введем плоскость – посредник Q , которая пересечет поверхности по линиям M и N . Взаимное пересечение этих линий даст точки 1 и 2 , принадлежащие линии пересечения. Проводя ряд посредников, получаем семейство точек линии пересечения.

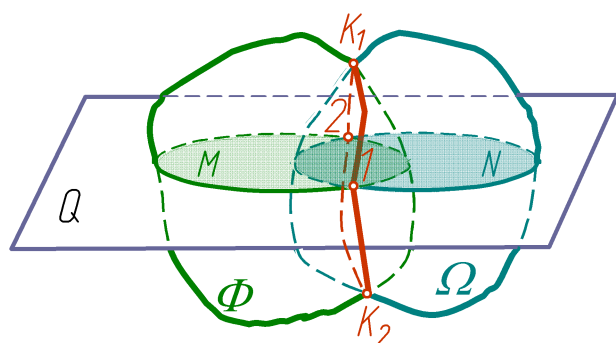


Рис. 5

Точки K_1 и K_2 находятся в точках пересечения очерков поверхностей и являются самой высокой и самой низкой точками линии пересечения.

Способы построения линий пересечения поверхностей:

В качестве посредников наиболее часто применяют *плоскости* частного положения и

шаровые поверхности – *сферы*.

В зависимости от вида поверхностей посредников можно выделить следующие способы построения линии пересечения двух поверхностей:

- способ вспомогательных секущих плоскостей;
- способ вспомогательных сфер.

При построении линии взаимного пересечения поверхностей необходимо сначала определить опорные точки кривой. Эти точки дают пределы линии пересечения. Между ними и следует определять промежуточные (случайные) точки.

Способ вспомогательных секущих плоскостей

Для построения линии пересечения заданных поверхностей конуса и шара (рис. 6) в качестве вспомогательных плоскостей необходимо использовать фронтальную плоскость P и ряд горизонтальных плоскостей (S, T, R).

Построение начинаем с определения проекций характерных точек (рис. 7). Проводим фронтальную плоскость $P(P_H)$. Эта плоскость пересекает поверхности по очеркам. Фронтальные проекции высшей и низшей точек ($1'$ и $2'$) находим как точки пересечения очерков.

$P(P_H) // V;$

$P \cap \Psi = \text{треугольник};$

$P \cap \Phi = \text{окружность};$

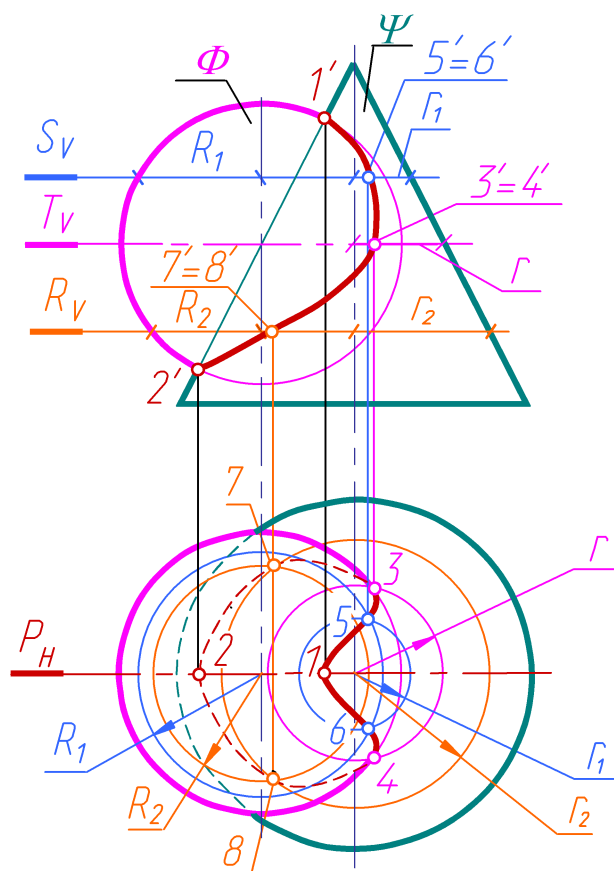


Рис. 7

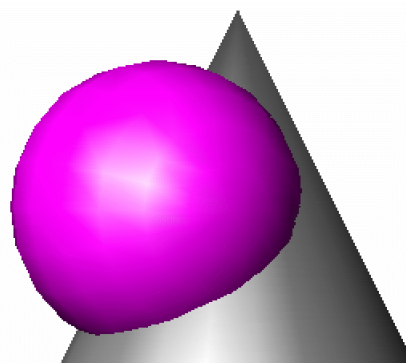


Рис. 6

(•) $1', 2'$ = треугольник \cap окружность – самая высокая и самая низкая точки линии пересечения.

Горизонтальные проекции 1 и 2 определяем, проведя линии связи до пересечения с P_H .

Вспомогательные горизонтальные плоскости пересекают сферу и конус по окружностям.

Точки 3 и 4 , лежащие на экваторе сферы, находим с помощью горизонтальной плоскости $T(T_V)$. Она проходит через центр сферы. Плоскость пересекает сферу по экватору и конус по окружности радиуса r . В пересечении горизонтальных проекций этих линий и находим горизонтальные проекции 3 и 4 .

$T(T_V) // H;$

$T \cap \Phi = \text{окр. } \text{max} \text{ радиуса (экватор)};$

$T \cap \Psi = \text{окр. радиуса } r;$

(•) $3, 4 = \text{экв. сферы} \cap \text{окр. радиуса } r$

Фронтальные проекции точек $3'$ и $4'$ находим, проведя линии связи до пересечения с T_V .

Горизонтальные проекции точек 3 и 4 являются точками границы видимости линии пересечения на этой проекции.

Промежуточные точки (точки 5, 6, 7, 8) находим с помощью вспомогательных горизонтальных плоскостей $S(S_V)$ и $R(R_V)$.

$S(S_V) \parallel H$; $S \cap \Phi = \text{окр. рад. } R_1$; $S \cap \Psi = \text{окр. рад. } r_1$;

(•) 5, 6 = окр. рад $R_2 \cap$ окр. рад. r_2 .

(•) 5', 6' находим, проведя линии связи до пересечения с S_V .

$R(R_V) \parallel H$; $R \cap \Phi = \text{окр. рад. } R_2$; $R \cap \Psi = \text{окр. рад. } r_2$;

(•) 7, 8 = окр. рад $R_2 \cap$ окр. рад. r_2 .

(•) 7', 8' находим, проведя линии связи до пересечения с R_V .

Полученные точки соединим плавной кривой линией с учетом видимости.

Пересечение соосных поверхностей

Соосными поверхностями вращения – называются поверхности, у которых совпадают оси вращения.

Линии пересечения соосных поверхностей – окружности, плоскости которых перпендикулярны оси поверхностей вращения. При этом если ось поверхностей вращения параллельна плоскости проекций, то линии пересечения на эту плоскость проецируются в отрезки прямых линий (рис. 8).

Это свойство используют для построения линии взаимного пересечения двух поверхностей вращения с помощью вспомогательных сфер.

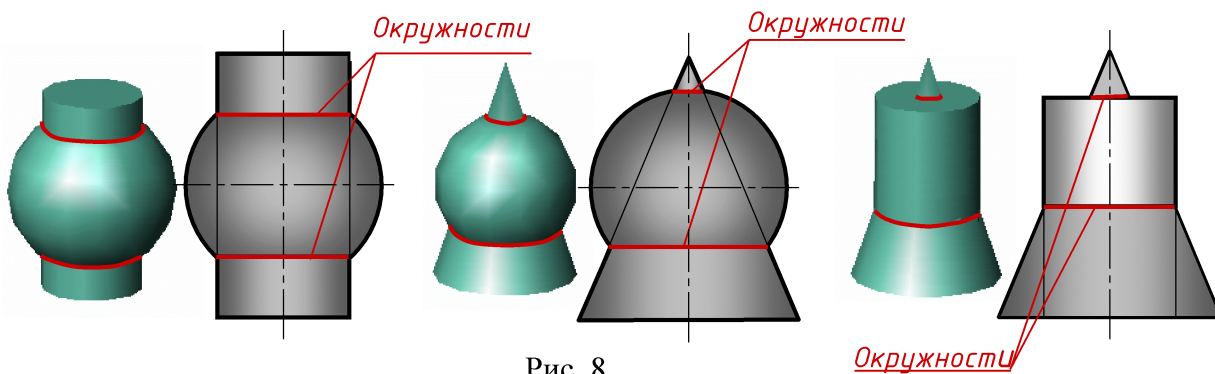


Рис. 8

Способ концентрических сфер

Способ вспомогательных сфер следует применять при следующих условиях:

- пересекающиеся поверхности должны быть поверхностями вращения;
- оси этих поверхностей должны пересекаться, точку пересечения принимают за центр вспомогательных сфер;
- плоскость, образованная осями поверхностей (плоскость симметрии), должна быть параллельна одной из плоскостей проекций.

Используя этот способ, можно построить линию пересечения поверхностей на одной проекции.

Рассмотрим пример построения линии пересечения двух цилиндров (рис. 9).

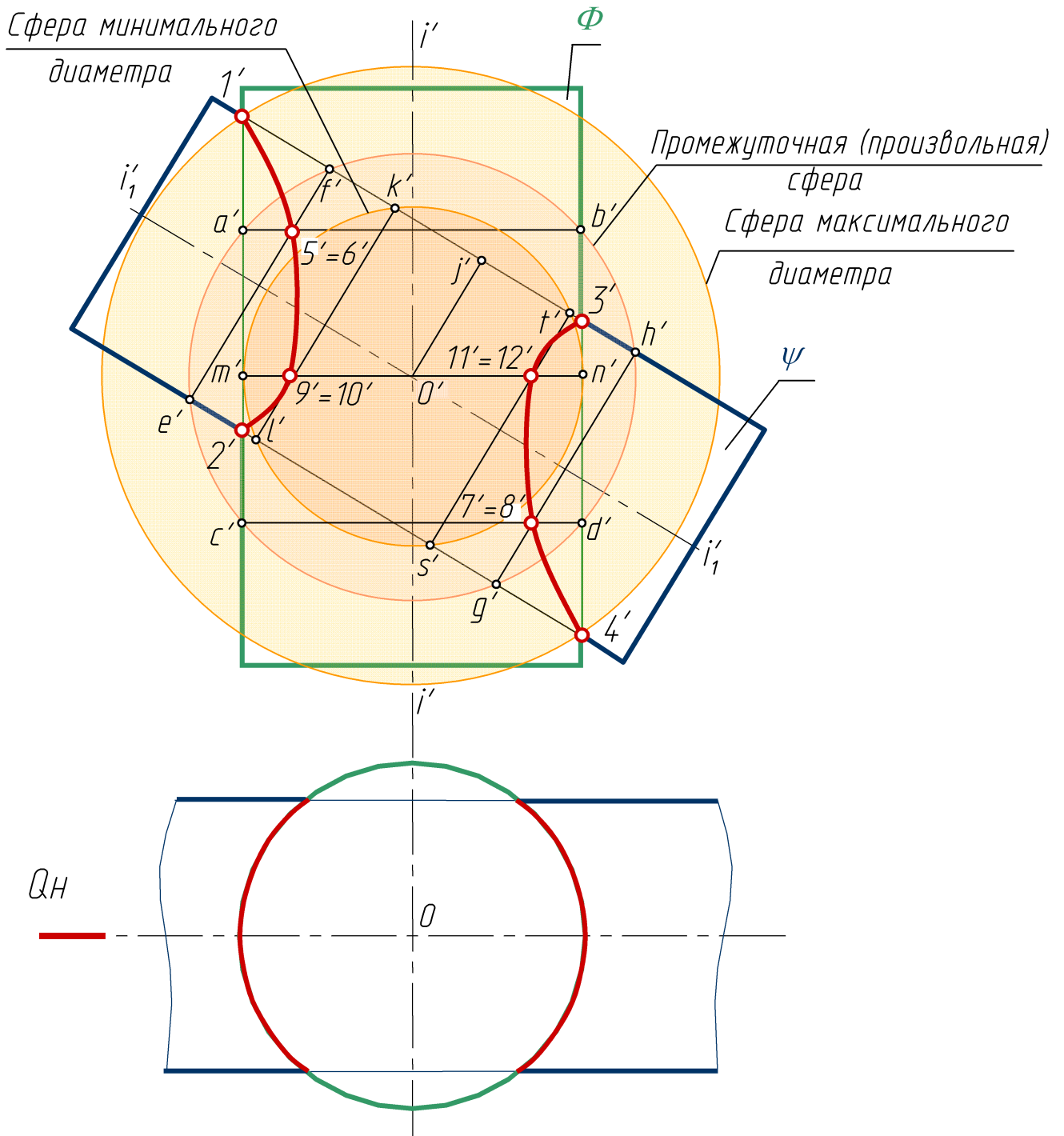


Рис. 9

Построим фронтальную проекцию линии пересечения.

Проводим фронтальную плоскость $Q(Q_H)$, которая является плоскостью симметрии поверхностей. Эта плоскость пересекает поверхности по очеркам. Точки $1', 2', 3', 4'$ определяем как точки пересечения контурных образующих поверхностей, принадлежащих плоскости Q .

$Q(Q_H) \cap \Phi =$ прямоугольник; $Q(Q_H) \cap \Psi =$ прямоугольник;

(●) $1', 2', 3', 4' =$ прямоугольник $\Phi \cap$ прямоугольник Ψ .

(●) $1'$ – самая высокая; (●) $2'$ – самая низкая.

Остальные точки находим способом вспомогательных концентрических сфер.

За центр сфер выбираем точку пересечения осей (точку o') и проводим сферу произвольного радиуса. Эта сфера будет одновременно соосна вертикальному и наклонному цилиндрам и пересечет их по окружностям. Плоскости окружностей перпендикулярны осям вращения цилиндров. Фронтальные проекции окружностей – отрезки прямых $a'b'$ и $c'd'$ на вертикальном цилиндре, $e'f'$ и $g'h'$ на наклонном цилиндре. Точки их пересечения (точки $5', 6', 7', 8'$) принадлежат обоим цилиндрам, следовательно, являются точками линии пересечения.

Сфера $R_{np} \cap \Phi = a'b'$; Сфера $R_{np} \cap \Phi = c'd'$;

Сфера $R_{np} \cap \Psi = e'f'$; Сфера $R_{np} \cap \Psi = g'h'$;

(●) $5', 6' = a'b' \cap e'f'$; (●) $7', 8' = c'd' \cap g'h'$.

Проведя несколько сфер разного радиуса можно построить достаточное количество точек линии пересечения поверхностей. Размеры вспомогательных сфер выбираются в определенных пределах. Минимальная сфера должна касаться большей поверхности и пересекать меньшую. То есть минимальная сфера вписывается в большую поверхность. С помощью такой сферы найдены точки $9', 10', 11', 12'$. Это самые глубокие точки линии пересечения.

Сфера $R_{min} \cap \Phi = k'l'$; Сфера $R_{min} \cap \Phi = s't'$;

Сфера $R_{min} \cap \Psi = m'n'$;

(●) $9', 10' = m'n' \cap k'l'$; (●) $11', 12' = m'n' \cap s't'$.

Радиус максимальной сферы будет равен расстоянию от центра o' до самой удаленной точки пересечения контурных образующих (точки $1'$ и $4'$).

Радиус промежуточных сфер находится в пределах $R_{max} > R_{пром} > R_{min}$.

Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией вертикального цилиндра (рис. 9).

Возможные случаи пересечения криволинейных поверхностей

Существуют четыре варианта пересечения поверхностей.

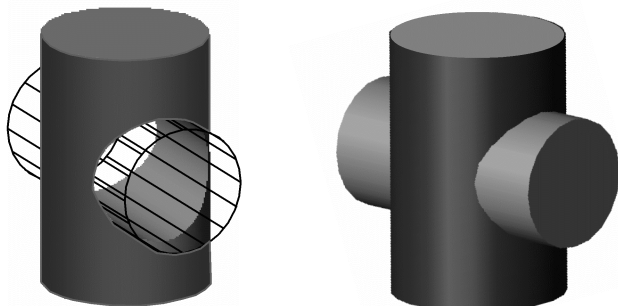


Рис. 10

Проникание

Все образующие первой поверхности пересекаются со второй поверхностью, но не все образующие второй поверхности пересекаются с первой. В этом случае линия пересечения поверхностей распадается на две замкнутые кривые линии (рис. 10).

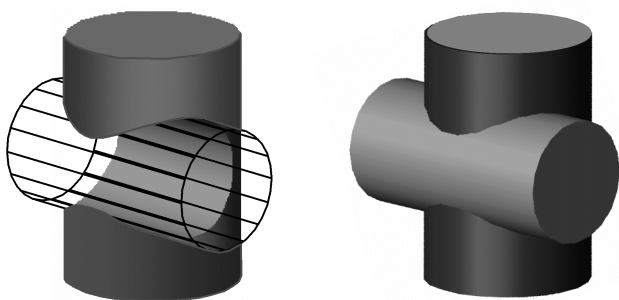


Рис. 11

Врезание

Не все образующие той и другой поверхности пересекаются между собой. В этом случае линия пересечения – одна замкнутая кривая линия (рис. 11).

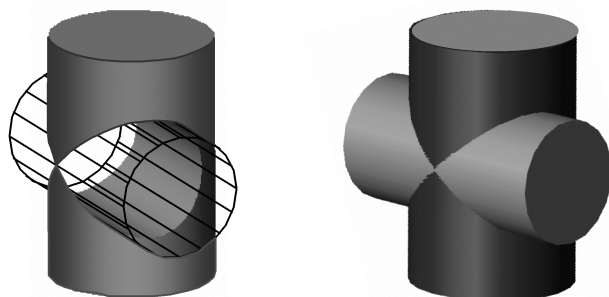


Рис. 12

Касание

Все образующие одной поверхности пересекаются со второй, но не все образующие второй поверхности пересекаются с первой. Поверхности имеют в одной точке (точка K на рис. 12) общую плоскость касания. Линия пересечения распадается на две замкнутые кривые линии, пересекающиеся в точке касания.

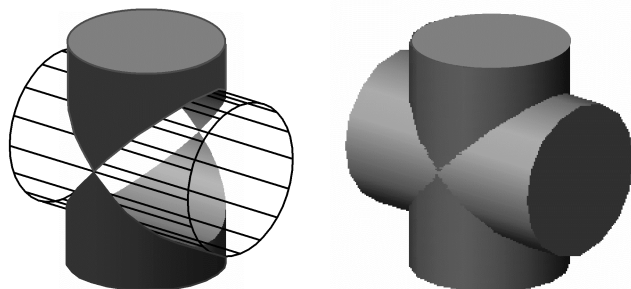


Рис. 13

Двойное касание

Все образующие обеих поверхностей пересекаются между собой. В этом случае линия пересечения распадается на две плоские кривые, которые пересекаются в точках касания (рис. 13).

Теорема Монжа

Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то линия их взаимного пересечения распадается на две плоские кривые. Плоскости этих кривых пройдут через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

Если оси пересекающихся поверхностей вращения параллельны какой – либо плоскости проекций, то на эту плоскость кривые линии проецируются в прямые.

На рис. 14-15 два цилиндра описаны вокруг сферы, а на рис. 16 два сжатых эллипсоида вращения вписаны в сферу. Во всех этих случаях поверхности пересекаются по эллипсам.

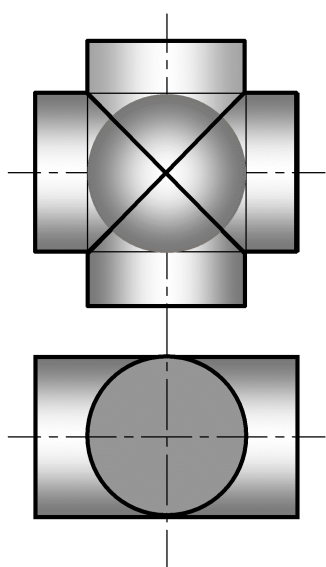


Рис. 14

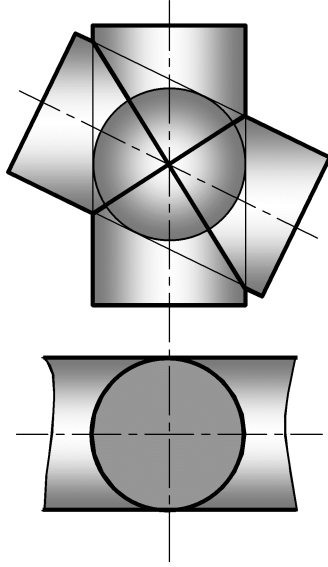


Рис. 15

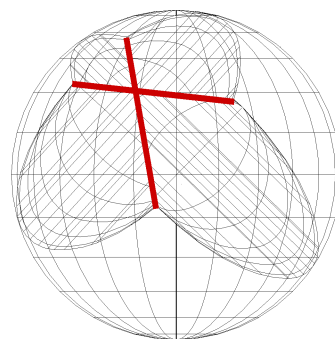


Рис. 16

Теорема о двойном касании

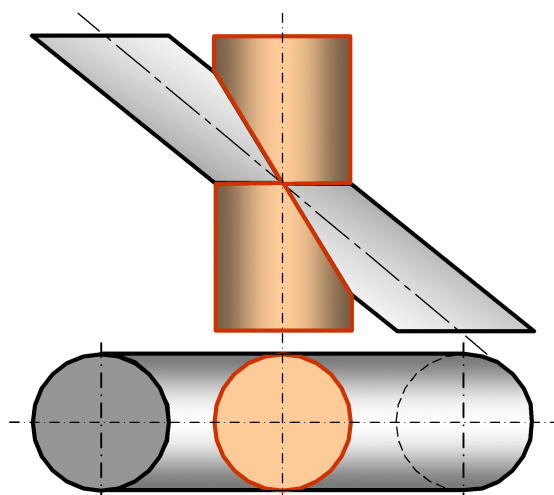


Рис. 17

Если две поверхности второго порядка имеют две общие точки (точки касания), то линия их взаимного пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Причем плоскости этих кривых пройдут через прямую, соединяющую точки касания.

На рис. 17 два цилиндра (цилиндр вращения и эллиптический цилиндр) пересекаются по двум плоским кривым (окружности и эллипсу).

Лекция 8. Аксонометрия

Аксонометрические проекции

Комплексный чертёж является графически простым и удобно измеряемым. Но по нему не всегда легко представить предмет в пространстве. Необходим чертёж, дающий и наглядное представление. Он может быть получен при проецировании предмета вместе с осями координат на одну плоскость. В этом случае на одной проекции можно получить наглядное и метрически определенное изображение. Такие виды изображений называют *аксонометрическими проекциями*.

Слово «аксонометрия» (от гр. *axo* – ось и *metreo* – измеряю) переводится как «измерение по осям».

Способ аксонометрического проецирования состоит в том, что фигура вместе с осями прямоугольных координат (к которым она отнесена в пространстве) проецируется на некоторую плоскость. Эту плоскость называют *плоскостью аксонометрических проекций*, или *картинной плоскостью*.

При проецировании фигуры проецирующие лучи могут выходить из одной точки – центральная аксонометрия или быть параллельными друг другу – параллельная аксонометрия. В дальнейшем мы будем рассматривать только параллельную аксонометрию.

Построим аксонометрическую проекцию точки A , отнесенной к трем взаимно перпендикулярным плоскостям проекций (рис. 1).

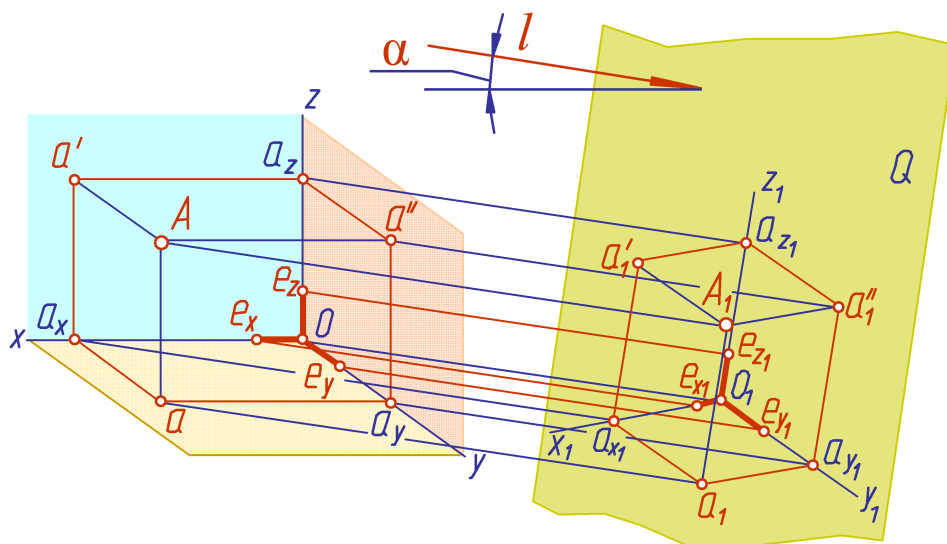


Рис. 1

Введем некоторые наименования:

Q – плоскость аксонометрических проекций (картинная плоскость);

l – направление проецирования;

α – угол наклона направления проецирования l к плоскости аксонометрических проекций Q (картинной плоскости).

Из точек o , a_x , a_y , a_z проведем проецирующие лучи до пересечения с плоскостью Q и найдем аксонометрические проекции этих точек o_1 , a_{x1} , a_{y1} , a_{z1} .

x_1 , y_1 , z_1 – аксонометрические оси координат (аксонометрические оси);

A_1 – аксонометрическая проекция точки A ;

a_1 , a_1' , a_1'' – вторичные проекции точки A ;

В зависимости от положения плоскостей проекций H , V , W , плоскости аксонометрических проекций Q и направления проецирования l координаты точки будут проецироваться с различными искажениями. Чтобы учесть эти факторы на осях координат отложим масштабные отрезки и построим их аксонометрические проекции.

e_x , e_y , e_z – масштабные отрезки;

e_{x1} , e_{y1} , e_{z1} – аксонометрические (вторичные) проекции масштабных отрезков.

При построении аксонометрии фигуры учитывают не длины масштабных отрезков, а отношение длины аксонометрической проекции масштабного отрезка к его действительной величине. Эти отношения называются *коэффициентом искажения по оси*.

Обозначим эти коэффициенты:

$$\text{по оси } x \quad m = \frac{e_{x1}}{e_x}, \quad \text{по оси } y \quad n = \frac{e_{y1}}{e_y}, \quad \text{по оси } z \quad k = \frac{e_{z1}}{e_z}.$$

В зависимости от направления проецирования по отношению к плоскости аксонометрических проекций Q аксонометрические проекции делятся на:

- прямоугольные, если угол проецирования $\alpha = 90^\circ$;
- косоугольные, если $\alpha \neq 90^\circ$.

Доказано, что сумма квадратов коэффициентов искажения удовлетворяет уравнениям:

- для косоугольной аксонометрии $-m^2 + n^2 + k^2 = 2 + \text{ctg}^2 \alpha$;
- для прямоугольной аксонометрии $-m^2 + n^2 + k^2 = 2$.

Основная теорема аксонометрии

Занимаясь теорией аксонометрии, немецкий геометр К. Польке в 1853 году предложил и доказал для частного случая теорему, названную основной теоремой аксонометрии: «Любые три отрезка, выходящие из одной точки на плоскости, могут быть приняты за параллельные проекции трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков в пространстве».

Доказательство этой теоремы в общем виде было дано в 1864 г. другим немецким геометром Г. Шварцем. С этого времени основная теорема аксонометрии стала называться теоремой Польке – Шварца.

Из рассмотренного выше можно вывести определение аксонометрии:

Аксонометрией называется изображение предмета на плоскости, отнесенное к определенной системе координат и выполненное в определенном масштабе с учетом коэффициентов искажения.

В зависимости от соотношения между коэффициентами искажения по осям различают следующие аксонометрические проекции:

1. Изометрические, если $m = n = k$.
2. Диметрические, если $m = k \neq n$ или $m = n \neq k$.
3. Триметрические, если $m \neq n \neq k$.

Наименование проекций произошло от древнегреческих слов:

«*isos*» – одинаковый (изометрическая проекция – проекция с одинаковыми коэффициентами искажения по всем трем осям);

«*di*» – двойной (диметрическая проекция – проекция с одинаковыми коэффициентами искажения по двум осям);

«*treis*» – три (триметрическая проекция – проекция с разными коэффициентами искажения по всем трем осям).

Прямоугольная параллельная изометрия

В прямоугольной изометрической проекции коэффициенты искажения по всем трем осям одинаковы ($m=n=k$) и равны 0,82, а аксонометрические оси x_1, y_1, z_1 образуют друг с другом углы в 120° (рис. 2). Но на практике изометрию для упрощения выполняют приведенной, принимая коэффициенты $m=n=k=1$. При этом изображение увеличивается в 1,22 раза.

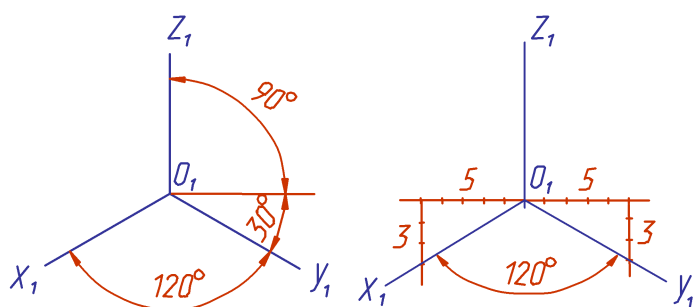


Рис. 2

Если даны ортогональные проекции точки A (рис. 3), то для построения изометрической проекции этой точки проводим аксонометрические оси (рис. 4). Далее от начала координат точки O_1 по оси x_1 откладываем отрезок $o_1a_{x_1}$, равный координате x_A точки A . Координату x_A берем с комплексного чертежа.

Из точки a_{x_1} проводим прямую, параллельную оси y_1 , и на ней откладываем отрезок, равный координате y_A точки A , получаем точку a_1 ; из

точки a_1 проводим отрезок, параллельный оси z_1 и равный координате z_A точки A . Полученная точка A_1 – изометрическая проекция точки A .

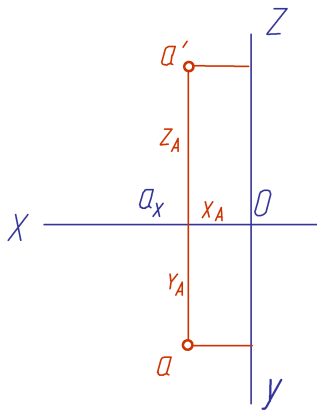


Рис. 3

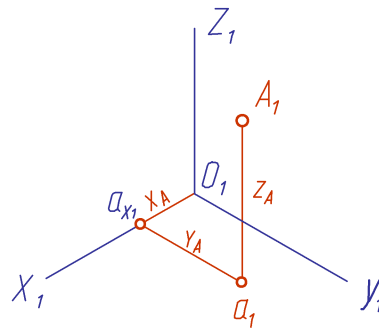


Рис. 4

Прямоугольная параллельная диметрия

В прямоугольной диметрии коэффициенты искажения по оси x_1 и z_1 принимают равными – $m=k=0,94$, а по оси y_1 – в два раза меньше – $n=1/2 m=0,47$.

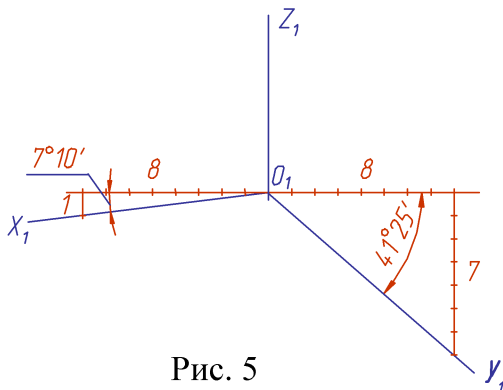


Рис. 5

Ось z_1 – вертикальная, ось x_1 расположена под углом $7^\circ 10'$. Ось y_1 расположена под углом $41^\circ 25'$ к горизонтальной прямой (рис. 5). На практике выполняют приведенную диметрию, принимая коэффициенты искажения $m=k=1$, а $n=0,5$. Изображение увеличивается в 1,06 раза.

Если дана ортогональная проекция точки A (рис. 6), то для построения диметрической проекции этой точки проводим аксонометрические оси под заданными углами.

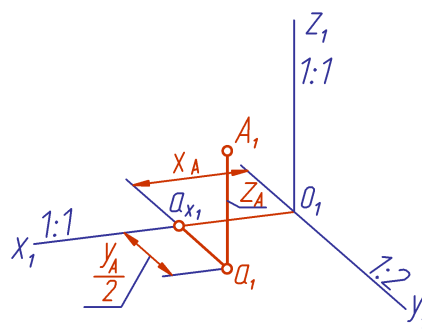
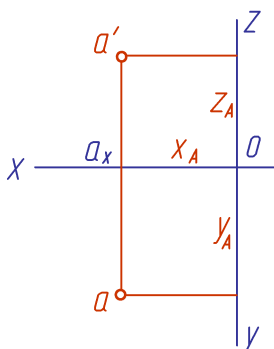


Рис. 6

Откладываем по оси x_1 от начала координат отрезок o_1a_{x1} , равный координате x_A точки A . Из точки a_{x1} проводим прямую, параллельную оси y_1 , и на ней откладываем отрезок, равный половине координаты y_A точки A , так как коэффициент искажения по оси y_1 равен 0,5. Из точки a_1 проводим отрезок a_1A_1 , равный координате z_A . Получаем точку A_1 – диметрическую проекцию точки A .

Линии штриховки сечений в аксонометрических проекциях проводят параллельно одной из диагоналей проекций квадратов, лежащих в соответствующих координатных плоскостях, стороны которых параллельны аксонометрическим осям (рис. 7 – для изометрии, рис. 8 – для диметрии).

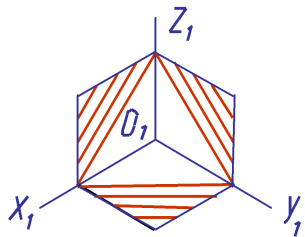


Рис. 7

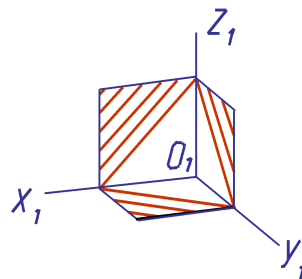


Рис. 8

Изометрическая проекция окружности

При построении приведенной аксонометрии размеры увеличиваются в 1,22 раза. Поэтому величина большой оси эллипса составляет $1,22D$, а величина малой оси – $0,71D$.

На рис. 9 показан графический способ определения размеров осей эллипса. Вычерчиваем окружность диаметра D , хорда $AB = 0,71D$ (величина малой оси эллипса). Приняв за центр точки A и B , радиусом, равным AB , проводим дуги до их взаимного пересечения. Полученные точки E и F соединяем прямой линией. $EF = 1,22D$ – величина большой оси эллипса.

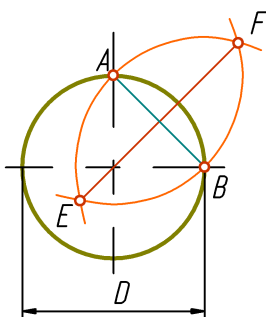


Рис. 9

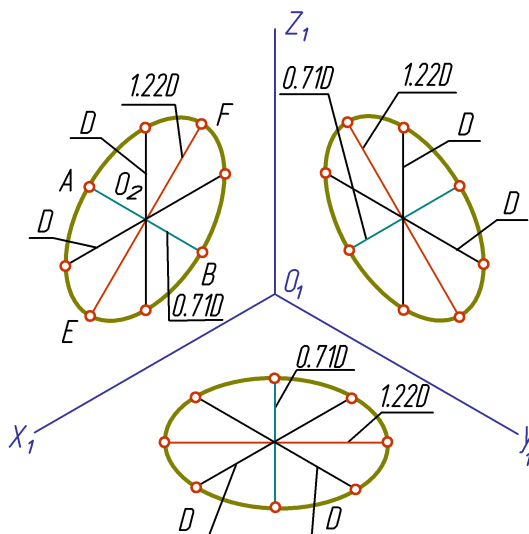


Рис. 10

Построим аксонометрические оси x_1, y_1, z_1 . В плоскости $x_1O_1z_1$ выбираем произвольную точку O_2 . Через нее проводим прямые параллельно осям x_1 и z_1 . На них откладываем отрезки, равные диаметру окружности. На линии, проведенной параллельно оси y_1 (направление малой оси эллипса), откладываем отрезок, равный AB (малую ось эллипса). Перпендикулярно малой оси строим большую ось эллипса, равную EF (рис. 10).

Соединив полученные 8 точек, получим эллипс. Для построения эллипса можно использовать и другие способы.

Диметрическая проекция окружности

В изометрии величины большой и малой осей эллипса остаются одинаковыми независимо от плоскости, в которой расположена окружность. В диметрии постоянной остается только величина большой оси, равная $1,06D$. В плоскостях горизонтальной H и профильной W малая ось эллипса составляет $0,35D$, а в плоскости фронтальной V малая ось равна $0,94D$.

Для определения величин осей эллипса графическим способом построим прямоугольный треугольник (рис. 11).

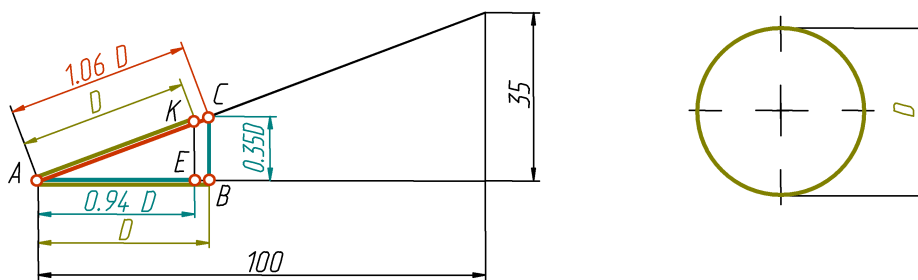


Рис. 11

Катеты треугольника равны 100 мм и 35 мм. Гипотенуза при этом равна 106 мм. Отложим по большому катету значение, равное диаметру окружности D (отрезок AB). Отрезок BC будет равен $0,35D$, то есть значению малой оси эллипса для плоскостей H и W .

Отрезок AC равен $1,06D$, то есть значению большой оси эллипса. Если мы отложим величину диаметра D по гипотенузе (отрезок AK), затем из точки K опустим перпендикуляр на большой катет треугольника, то отрезок AE будет равен значению $0,94D$, то есть величине малой оси эллипса для плоскости V .

Изображение окружности в прямоугольной диметрической проекции показано на рис. 12.

Например, для построения окружности в плоскости V через точку O_2 параллельно осям x_1 и z_1 проводим прямые и на них откладываем величины, равные диаметру окружности. На линии, проведенной параллельно оси y_1 откладываем значение, равное $0,94D$ (величину малой оси

эллипса). Перпендикулярно малой оси строим большую ось эллипса, равную $1,06D$. Полученные точки соединяем плавной линией.

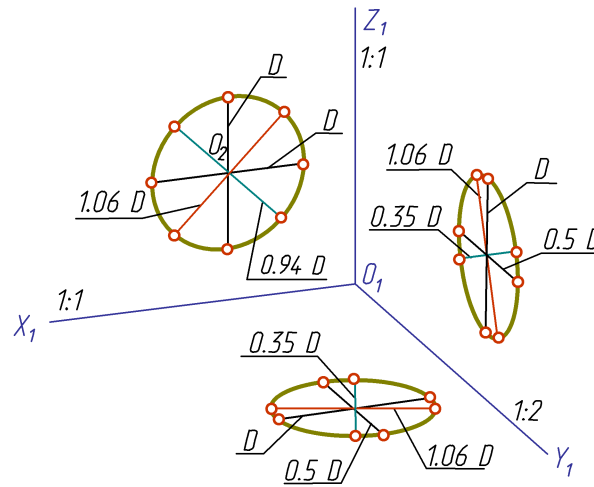


Рис. 12

Изображение шара и тора в аксонометрии

В прямоугольной параллельной аксонометрии шар изображается окружностью.

При построении шара по натуральным показателям искажения его аксонометрической проекцией будет окружность, диаметр которой равен диаметру изображаемого шара.

При построении изображения шара по приведенным показателям диаметр окружности увеличивается в соответствии с увеличением коэффициентов приведения: в изометрии – в 1,22 раза (рис. 13, а), в диметрии – в 1,06 раза (рис. 13, б).

На рис 13, в показана изометрическая проекция тора, выполненная с помощью вписанных в него вспомогательных сфер.

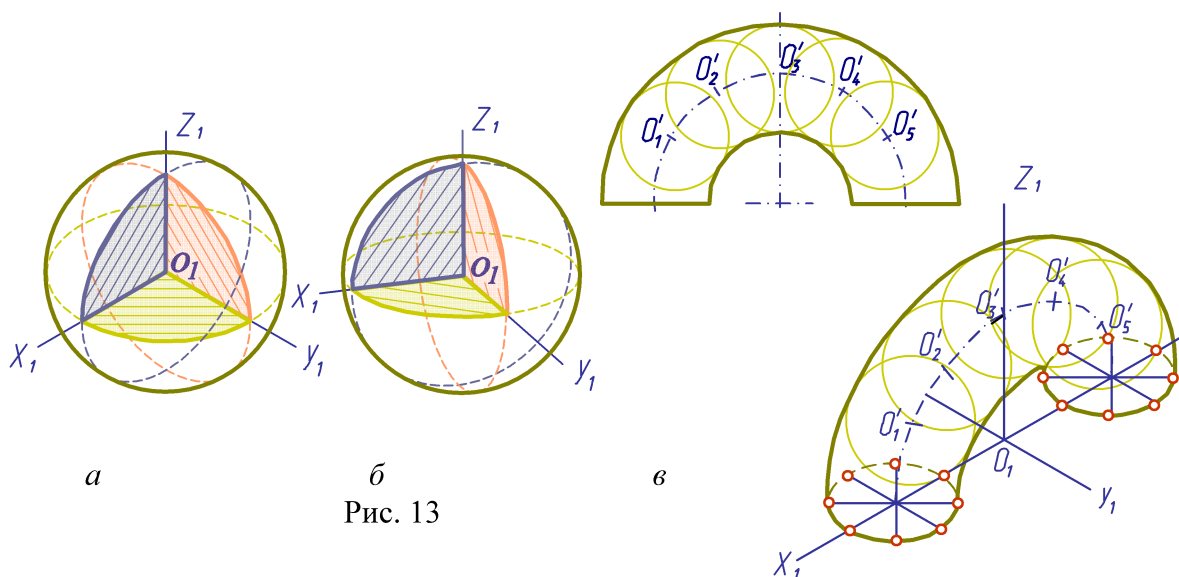


Рис. 13

Косоугольная аксонометрия

Косоугольная фронтальная изометрия и диметрия применяются в основном тогда, когда изображается большое количество окружностей, расположенных в одной плоскости.

При этой системе аксонометрическую плоскость располагают параллельно фронтальной плоскости проекций (рис. 14). Тогда коэффициенты искажения по осям o_1x_1 и o_1z_1 равны 1 ($m = k = 1$), а угол между ними равен 90° .

Углы между осью o_1y_1 и осями o_1x_1 и o_1z_1 равны 135° (рис. 15), а коэффициент искажения равен 0,5 ($n = 0,5$) для диметрии и 1 ($n = 1$) для изометрии.

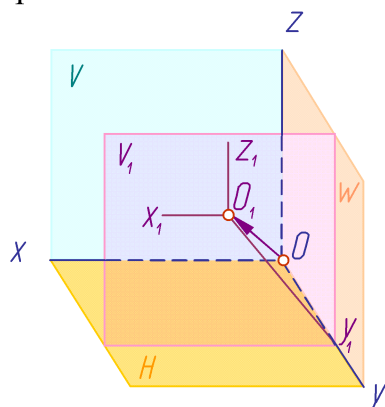


Рис. 14

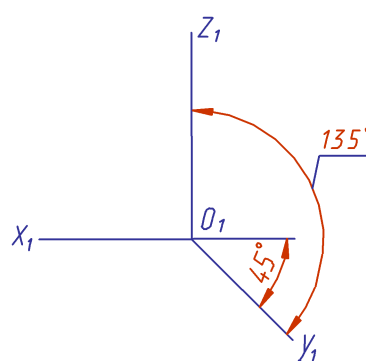


Рис. 15

Деталь располагают по отношению к осям так, чтобы сложные плоские фигуры (окружности, дуги плоских кривых) находились в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций. Тогда они изображаются без искажения. Окружности, лежащие в других плоскостях, проецируются в эллипсы.

Если при выполнении косоугольной диметрии втулки (рис. 16) плоскости ее торцов расположить параллельно плоскости V , построение аксонометрии детали значительно упрощается, так как окружности (проекции торцов втулки) проецируются в окружности (рис. 17).

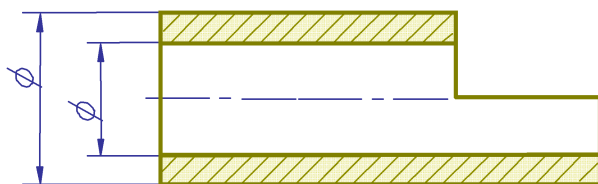


Рис. 16

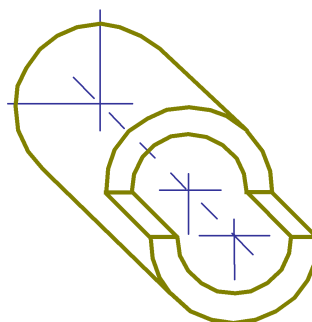


Рис. 17

Содержание

Лекция 5. Поверхности.....	32
Способы задания поверхности.....	32
Задание поверхности на чертеже.....	33
Линейчатые поверхности.....	34
Многогранники.....	35
Криволинейные поверхности.....	37
Лекция 6. Поверхности вращения.....	39
Цилиндр вращения.....	39
Прямой круговой конус.....	41
Шаровая поверхность.....	44
Тор.....	45
Гиперболоид, эллипсоид, параболоид.....	46
Лекция 7. Винтовые поверхности. Пересечение поверхностей.....	47
Винтовые поверхности.....	47
Пересечение поверхностей.....	49
Способ вспомогательных секущих плоскостей.....	49
Пересечение соосных поверхностей.....	51
Способ сфер.....	51
Возможные случаи пересечения криволинейных поверхностей.....	54
Теорема Монжа	55
Теорема о двойном касании	56
Лекция 8. Аксонометрия.....	56

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций


Составители: Галина Федоровна Винокурова
Борис Леонидович Степанов



Томский политехнический университет
Система менеджмента качества

Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.