ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций для студентов ТПУ
всех специальностей

Томск 2009

УДК 515

Начертательная геометрия. Курс лекций для студентов ТПУ всех специальностей. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009.– 65 с.

Составители: доц., канд. техн. наук Г. Ф. Винокурова
доц. Б. Л. Степанов

Рецензент доц., канд. техн. наук Б. А. Франковский

Работа рассмотрена и рекомендована к изданию методическим семинаром кафедры начертательной геометрии и графики 28 августа 2008 г.

Зав. кафедрой, доц. ______________________С. П. Буркова

Лекция 1. Введение. Методы проецирования. Точка. Прямая линия

Введение

Литература

Винокурова Г.Ф., Степанов Б.Л. Начертательная геометрия. Инженерная графика: учебное пособие. – 2-е изд. – Томск: Изд. ТПУ, 2008. – 306 с.

А.А. Чекмарев Инженерная графика М.: Высш. шк ., 2000 г.

В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский Курс начертательной геометрии М.: Наука, 1988 М.: Высш. шк., 1999 г.

В.С. Левицкий Машиностроительное черчение и автоматизация выполнения чертежей М.:Высш. шк., 2000 г.

Цели и задачи дисциплины

Целью дисциплины является изучение правил изображения на плоскости пространственных фигур и решение инженерно-геометрических задач на плоскостном чертеже; выработка знаний и навыков, необходимых для выполнения и чтения чертежей отдельных деталей.

Учебная дисциплина «Начертательная геометрия. Инженерная графика» состоит из двух разделов.

В разделе «Начертательная геометрия» изучаются методы изображения пространственных фигур на плоскости и свойства фигур по их изображениям.

В разделе «Инженерная графика» изучаются правила выполнения и чтения чертежей отдельных деталей и сборочных единиц.

Краткая историческая справка

Основоположник начертательной геометрии – Гаспар Монж. Годы жизни – 1746 – 1818. Он обобщил ранее накопленный опыт по теории и практике изображений и создал стройную научную дисциплину о прямоугольных проекциях, которую назвал «Начертательная геометрия».

Первый учебник по начертательной геометрии опубликован во Франции в 1798 г.

С открытием в 1810 г. В Петербурге Института корпуса инженеров путей сообщения наряду с другими дисциплинами там начал преподаваться курс начертательной геометрии. Первым преподавателем по этому курсу был ученик Г. Монжа Карл Потье. С 1818 г. Лекции по начертательной геометрии стал читать профессор Я. А. Севастьянов, а в 1821г. был опубликован его учебник по начертательной геометрии – первый учебник, изданный на русском языке.

В октябре 1900 г. начались занятия в Томском технологическом институте (ныне Томском политехническом университете). Первую лекцию по начертательной геометрии 28(16)октября 1900 г. прочел Валентин Николаевич Джонс.

Методы проецирования

Изображения пространственных объектов на плоскости должны полно и точно отражать геометрические свойства объекта и позволять исследовать его части, что обусловливает ряд требований.

Наиболее важные из них: 1) *обратимость*, т. е. возможность восстановить объект по его изображению; 2) *простота* построения; 3) *наглядность*.

Изображение, удовлетворяющее этим требованиям, получают на основе *метода проецирования*.

Аппарат проецирования включает в себя центр проекций, проецируемый объект, проецирующие лучи и плоскость, на которой получается изображение.

1. Центральное проецирование – это общий случай проецирования геометрических объектов. Проецирование осуществляется из точки *S* – центра проецирования на плоскость *P* – плоскость проекций. Центр проецирования не должен находиться в плоскости проекций.

Чтобы получить центральную проекцию какой-либо точки (например точки *A* на рис. 1) необходимо провести проецирующий луч через центр проецирования *S* и точку *A*. Точка пересечения луча с плоскостью проекций (точка *a*) является центральной проекцией заданной точки *A* на выбранную плоскость *P*.

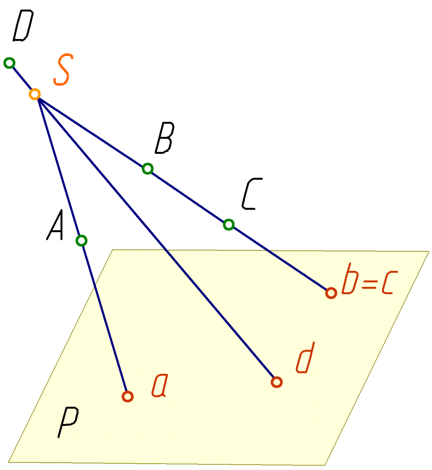


Рис. 1

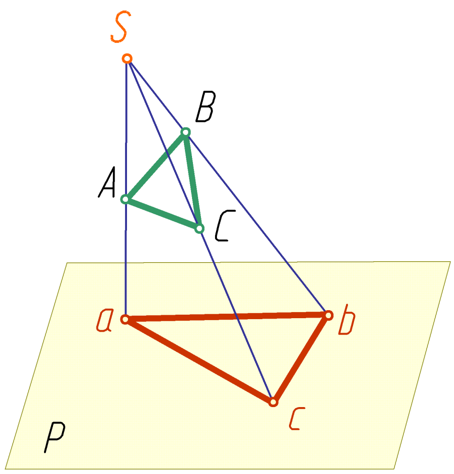


Рис. 2

Точки *a*, *b*, *c*,*d* являются центральными проекциями точек *A*, *B*, *C D* на плоскости *P*.

Свойства центрального проецирования:

1. При центральном проецировании:

- точка проецируется в точку;
- прямая, не проходящая через центр проецирования, проецируется в прямую (проецирующая прямая – в точку);

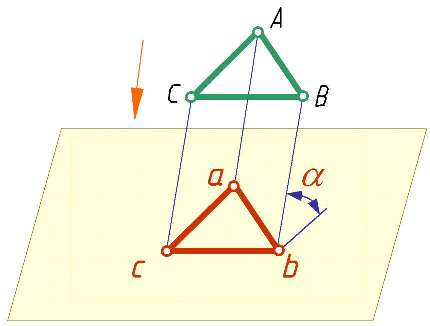
- плоская фигура, не принадлежащая проецирующей плоскости, проецируется в плоскую фигуру, рис. 2 (фигуры, принадлежащие проецирующей плоскости, проецируются в прямые линии);
- трехмерная фигура проецируется в двумерную фигуру.

2. При заданном центре проецирования фигуры на параллельных плоскостях подобны.

3. Центральное проецирование устанавливает однозначное соответствие между фигурой и ее изображением.

Центральные проекции имеют большую наглядность, но имеют и недостатки. Они заключаются, например, в сложности построения изображения предмета и определения его истинных размеров. Поэтому этот способ имеет ограниченное применение.

2. Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального проецирования.



При этом центр проецирования удален в бесконечность (S_∞). При параллельном проецировании применяют параллельные проецирующие прямые. Их проводят в заданном направлении относительно плоскости проекций. Если направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то проекции называют *прямоугольными или ортогональными* $\angle\alpha=90°$, в других случаях – *косоугольными* $\angle\alpha\neq90°$ (рис. 3).

Свойства параллельного проецирования:

При параллельном проецировании сохраняются все свойства центрального проецирования, которые дополняются новыми:

1. Параллельные проекции взаимно параллельных прямых параллельны, а отношение длин отрезков этих прямых равно отношению длин их проекций.

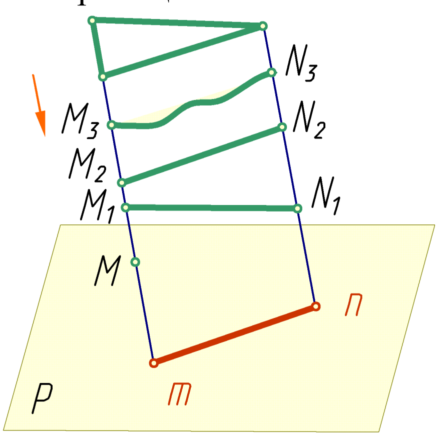


Рис. 4

2. Плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в такую же фигуру.

3. Параллельный перенос фигуры в пространстве или плоскости проекций не изменяет вида и размеров проекции фигуры.

Применяя приемы параллельного проецирования точки и линии, можно строить параллельные проекции поверхности и тела. Параллельные проекции, как и центральные, не обеспечивают обратимости чертежа.

При проецировании на одну плоскость проекций между проецируемой фигурой и ее проекцией не существует взаимооднозначного соответствия. Так, каждому проецируемому предмету при заданном его положении и выбранном направлении проецирования *l* соответствует единственная его проекция. Однако полученная фигура может быть проекцией бесконечного множества других фигур, которые отличаются друг от друга по величине и по форме. Из рис. 4 видно, что пространственной точке *M* соответствует единственная ее проекция на плоскости *P* – точка *m*. В то же время точка *m* является проекцией множества точек, лежащих на проецирующей прямой (M, M_1, M_2, M_3).

Прямолинейный отрезок *mn* может быть проекцией не только прямолинейного отрезка M_1N_1 или M_2N_2, но проекцией кривой линии M_3N_3 и любой плоской фигуры, расположенной в проецирующей плоскости.

Следовательно, изображение пространственной фигуры является не полным. Мы можем правильно понять чертеж тогда, когда он будет сопровождаться дополнительными пояснениями.

Рассмотрим некоторые способы дополнения проекционного изображения, позволяющие сделать его «обратимым», то есть однозначно определяющим проецируемый предмет.

Способ проекций с числовыми отметками

Этот способ лежит в основе построения чертежей планов местности и некоторых инженерных сооружений (плотин, дорог, дамб и т.п.). Способ заключается в том, что положение любой точки в пространстве определяется ее прямоугольной проекцией на некоторую горизонтальную плоскость, принятую за плоскость нулевого уровня (рис. 5). Рядом с проекциями точек *(a, b, c)* указывают их отметку. Она указывает расстояние от точки до плоскости проекций.

Способ векторных проекций

Академик Е.С. Федоров предложил изображать высоты точек при помощи параллельных отрезков на плоскости проекций. Начало этих отрезков находится в проекциях соответствующих точек (рис. 6). Направление всех высотных отрезков произвольно.

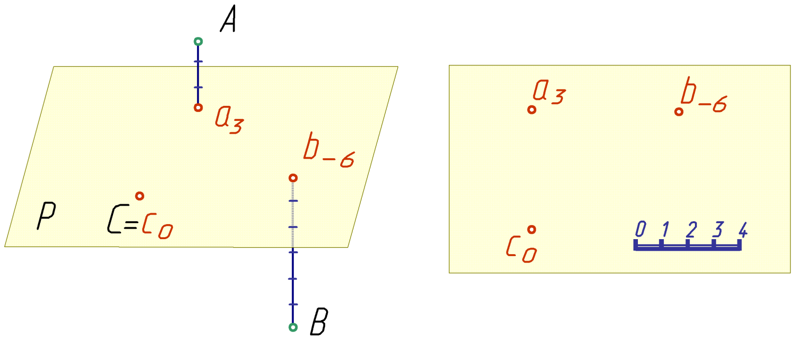


Рис. 5

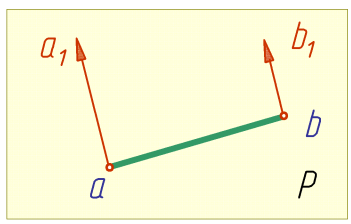


Рис. 6

Если точки расположены выше горизонтальной плоскости, высотные отрезки, а также числовые отметки считаются положительными, если ниже – отрицательными. Положительные и отрицательные высотные отрезки в «федоровских проекциях» отличаются противоположным направлением. Такие чертежи применяют в геологии, горном деле, топографии.

Метод прямоугольных проекций (метод Монжа)

Чертеж в системе прямоугольных проекций образуется при проецировании предмета не на одну, а на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Этот способ является частным случаем параллельного проецирования. Направление проецирования l перпендикулярно плоскости проекций. Из точки опускается перпендикуляр на плоскость проекций. Основание перпендикуляра является прямоугольной (ортогональной) проекцией точки.

Осуществлять проецирование на две взаимно перпендикулярные плоскости впервые предложил Гаспар Монж.

Такое проецирование обеспечивает обратимость чертежа. *Обратимость чертежа – однозначное определение положения точки в пространстве по ее проекциям.* Одну из плоскостей принято располагать горизонтально – ее называют горизонтальной плоскостью проекций *H* (от греч. *horizon* – разграничивающий), другую – ей перпендикулярно. Такую вертикальную плоскость называют фронтальной плоскостью проекций *V* (от лат. – *vertical is* – отвесный). Эти плоскости проекций пересекаются по линии, которая называется *осью проекций x* (рис. 7).

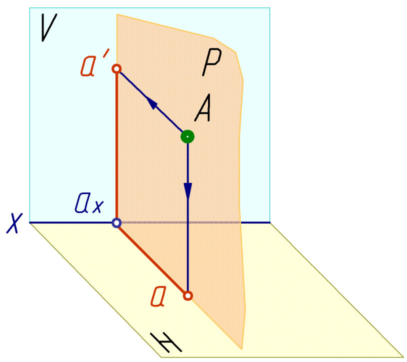


Рис. 7

Чтобы получить проекции точки на плоскости, опускаем из точки *A* в пространстве перпендикуляры (проецирующие лучи) до встречи с плоскостями *H* и *V*.

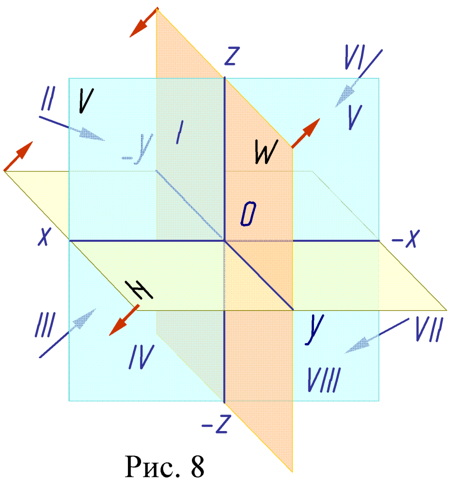


Рис. 8

Для полного выявления наружных и внутренних форм деталей и их соединений и для ряда других задач бывает необходимо три и более изображения. Введем в систему плоскостей *H* и *V* третью плоскость. Располагаем ее перпендикулярно этим плоскостям. Новая плоскость называется *профильной плоскостью проекций* и обозначается буквой *W*. Она пересекает плоскости *H* и *V* по осям *y* и *z*. Точку пересечения всех осей называют *началом координат* и обозначают буквой O (от латинского слова «*origo*» – начало). Оси x, y, z взаимно перпендикулярны.

Три взаимно-перпендикулярные плоскости делят пространство на восемь частей, восемь октантов (рис. 8) (от лат. *octo* – восемь).

В нашей стране принята европейская система расположения проекций. Ось x направлена от начала координат влево, y – вперед (к нам), z – вверх (x – ось широт, y – ось глубин, z – ось высот). Обратные направления координатных осей считаются отрицательными.

Точка

Опустим из точки A проецирующие лучи (перпендикуляры) до пересечения с плоскостями проекций H, V и W. Точки пересечения перпендикуляров с плоскостями проекций – это проекции точки на каждую из плоскостей проекций (рис. 9):

a – горизонтальная;

a' – фронтальная;

a'' – профильная.

Преобразуем его так, чтобы горизонтальная и профильная плоскости проекций совпали с фронтальной плоскостью проекций, образуя одну плоскость чертежа (рис. 10). В результате получаем чертеж, называемый *эпюр Монжа* (от франц. *epure* – чертеж, проект) или *комплексный чертеж*.

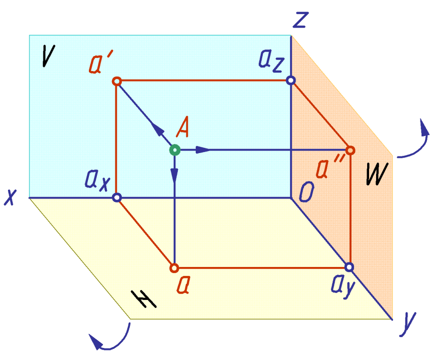


Рис. 9

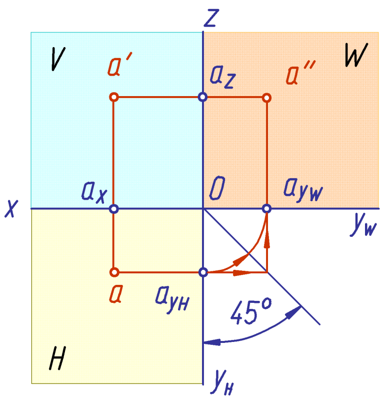


Рис. 10

Основные правила ортогонального проецирования точки

1. Положение точки в пространстве определяется тремя координатами

$$A(x, y, z).$$

2. Положение точки на плоскости определяется двумя координатами:

$$a(x, y); \qquad a'(x, z); \qquad a''(y, z).$$

3. Две проекции точки определяют положение ее третьей проекции; две проекции точки определяют ее положение в пространстве.

4. Две проекции находятся на одном перпендикуляре (линии связи) к оси проекций, их разделяющей.

Прямая линия

Линия – это множество всех последовательных положений движущейся точки.

Прямая линия – линия, образованная движением точки, не меняющей своего направления.

Прямая линия задается

- двумя точками, ей принадлежащими;
- одной точкой и направлением линии.

Прямая может занимать в пространстве различное положение.

Положение прямой в пространстве

Относительно плоскостей проекции прямая может занимать различные положения:

– не параллельное ни одной из плоскостей проекций *H, V, W;*

– параллельное одной из плоскостей проекций (прямая может и принадлежать этой плоскости);

– параллельное двум плоскостям проекций, то есть перпендикулярное третьей.

Прямая общего положения – прямая, не параллельная ни одной из плоскостей проекций (рис. 11).

Прямые частного положения – прямые, параллельные или перпендикулярные плоскости проекций.

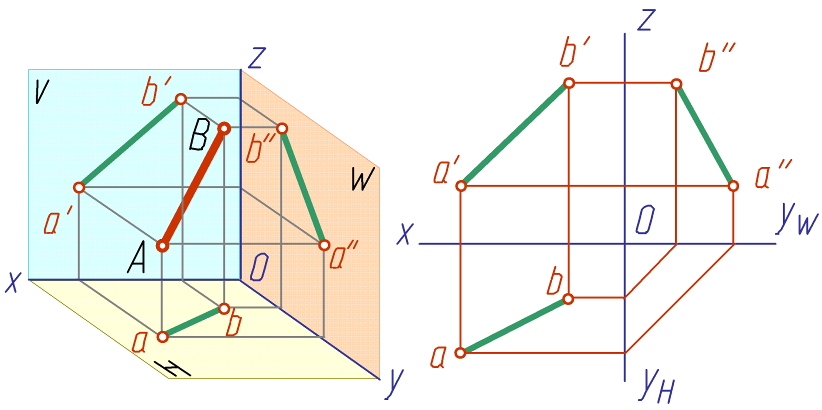


Рис. 11

Прямые частного положения можно разделить на:

- прямые, параллельные плоскости проекций – *прямые уровня*;
- прямые, перпендикулярные плоскости проекций – *проецирующие прямые.*

Прямые, параллельные плоскости проекций (прямые уровня)

Горизонтальная прямая (AB // H)

Фронтальная проекция прямой $a'b'$ параллельна оси x; профильная проекция $a''b''$ параллельна оси y_W**;** длина горизонтальной проекции отрезка равна длине самого отрезка ($ab=AB$); угол β**,** образованный горизонтальной проекцией и осью проекции x**,** равен углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций; угол γ**,** образованный горизонтальной проекцией и осью проекции y_H**,** равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций (рис. 12).

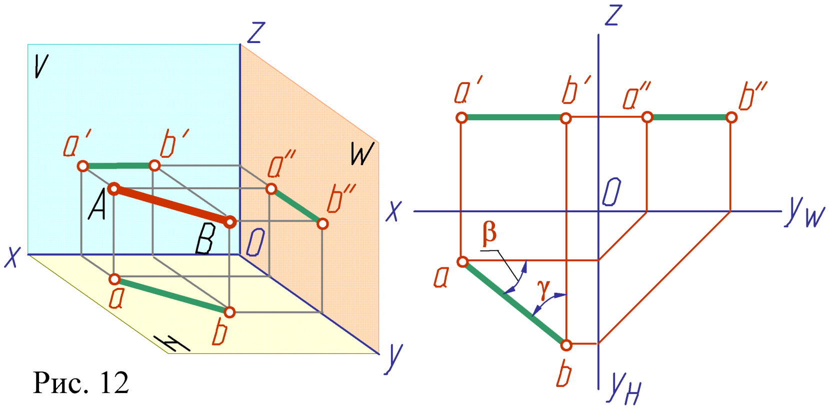


Рис. 12

Свойства проекций

$/ab/ = /AB/$;
$(a'b')\ //\ (Ox)$;
$(a''b'')\ //\ (Oy_{w})$;

$(AB\hat{\ }V)=(ab\hat{\ }Ox)=\beta$;
$(AB\hat{\ }W)=(ab\hat{\ }Oy_{н})=\gamma$.

Фронтальная прямая ($CD\ //V$)

Горизонтальная проекция прямой cd параллельна оси x; профильная проекция $c''d''$ параллельна оси z; длина фронтальной проекции отрезка равна длине самого отрезка ($c'd'=CD$); угол α**,** образованный фронтальной проекцией и осью проекций x**,** равен углу наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций; угол γ**,** образованный фронтальной проекцией и осью z, равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций (рис. 13).

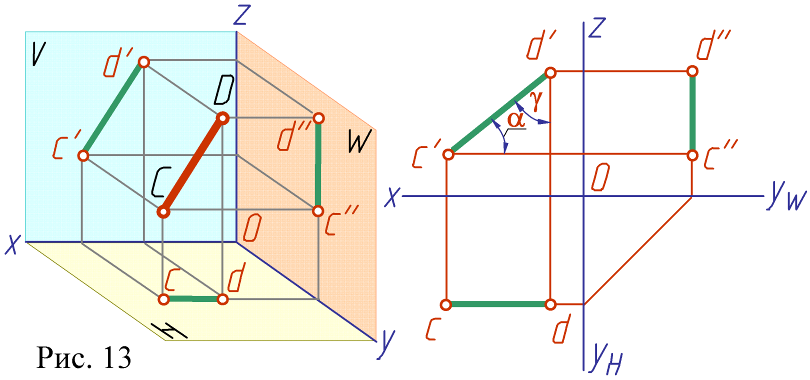


Рис. 13

Свойст-ва проекций

$|c'd'| = |CD|$;
$(cd)\ //\ (Ox)$;
$(c''d'')\ //\ (Oz)$;

$(CD\wedge H)=(c'd'\wedge Ox)=\alpha$;
$(CD\wedge W)=(c''d''\wedge Oz)=\gamma$.

Профильная прямая ($EF\ //W$)

Горизонтальная проекция прямой ef параллельна оси y_H; фронтальная проекция $e'f'$ параллельна оси z; длина профильной проекции отрезка равна длине самого отрезка ($e''f''=EF$); углы α и β, образованные профильной проекцией с осями y_W и z, равны углам наклона прямой к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций соответственно, рис. 14.

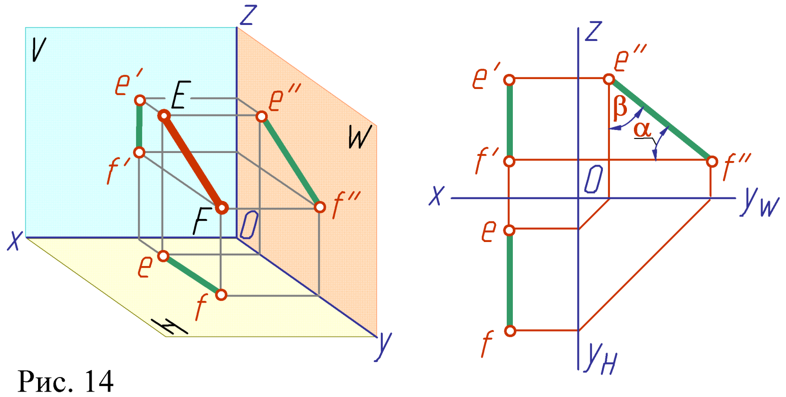


Рис. 14

Свойства проекций

$|e''f''| = |EF|$;
$(ef)\ //\ (Oy_{н})$;
$(e'f') = (Oz)$;
$(EF\wedge H)=(e''f''\wedge Oy_{w})=\alpha$;
$(EF\wedge V)=(e''f''\wedge Oz) = \beta$.

Если прямая параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость в натуральную величину проецируется сама прямая и углы наклона ее к двум другим плоскостям проекций. Проекции прямой на две другие плоскости проекций параллельны осям, определяющим данную плоскость проекций.

Прямые, перпендикулярные плоскости проекций (проецирующие)

Прямая $AB \perp H$ – горизонтально-проецирующая прямая.

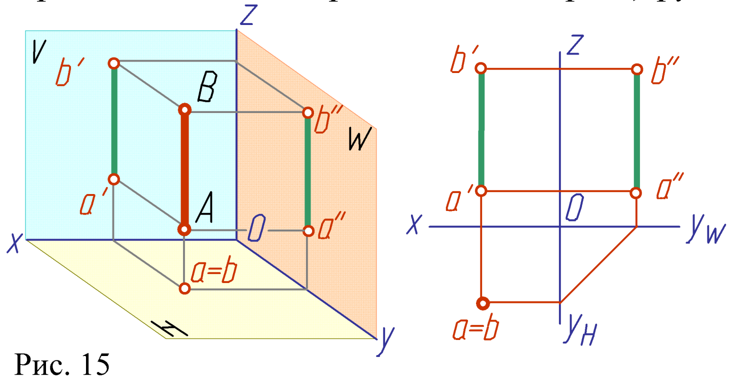


Рис. 15

Свойства проекций

Проекция $a'b'$ перпендикулярна оси x, проекция $a''b''$ перпендикулярна оси y_w, проекции a и b совпадают.

$(AB) \perp H$; (AB) // V;

(AB) // W; ab – точка;

$|a'b'| = |a''b''| = |AB|$;

$(a'b') \perp (Ox)$; $(a''b'') \perp (Oy_w)$.

Прямая $CD \perp V$ – фронтально-проецирующая прямая.

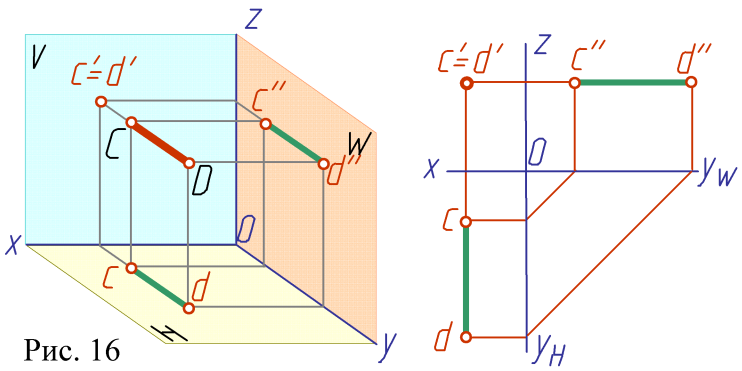


Рис. 16

Свойства проекций

Проекция cd перпендикулярна оси x, проекция $c''d''$ перпендикулярна оси z, проекции c' и d' совпадают.

$(CD) \perp V$; (CD) // H;

(CD) // W; $c'd'$ – точка;

$|cd| = |c''d''| = |CD|$;

$(cd) \perp (Ox)$; $(c''d'') \perp (Oz)$.

Прямая $EF \perp W$ – профильно-проецирующая прямая.

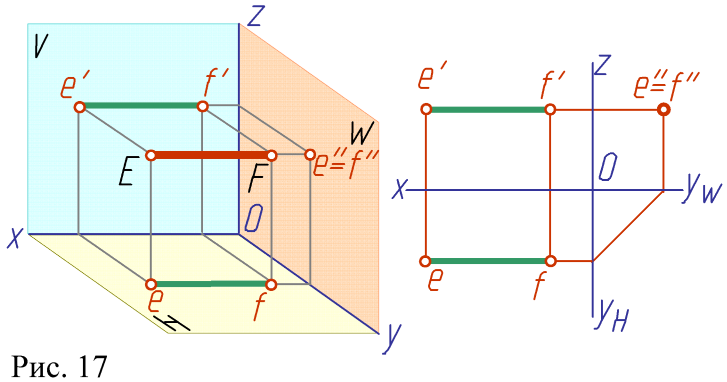


Рис. 17

Свойства проекций

Проекция ef перпендикулярна оси y_H, проекция $e'f'$ перпендикулярна оси z, проекции e'' и f'' совпадают.

$(EF) \perp W$; (EF) // H;

(EF) // V; $e''f''$ – точка;

$|ef| = |e'f'| = |EF|$;

$(ef) \perp (Oy_н)$; $(e'f') \perp (Oz)$.

Если прямая перпендикулярна плоскости проекций, то на эту плоскость она проецируется в точку. Проекции прямой на две другие плоскости проекций перпендикулярны осям, определяющим данную плоскость проекций и равны натуральной величине отрезка прямой.

Лекция 2. Прямые. Преобразование чертежа прямой. Две прямые

Взаимное положение точки и прямой

Точка и прямая в пространстве могут быть различно расположены относительно друг друга и плоскости проекций.

Если точка в пространстве принадлежит прямой, то ее проекции принадлежат соответствующим проекциям этой прямой.

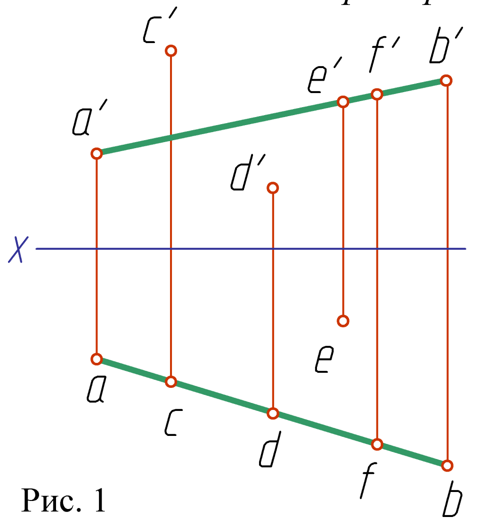


Рис. 1

Если это положение нарушается, то точка данной прямой не принадлежит.

Рассмотрим это положение на чертеже (рис. 1).

Точка F принадлежит прямой AB, так как горизонтальная проекция f точки принадлежит горизонтальной проекции ab прямой, а фронтальная проекция f' точки принадлежит фронтальной проекции $a'b'$ прямой:

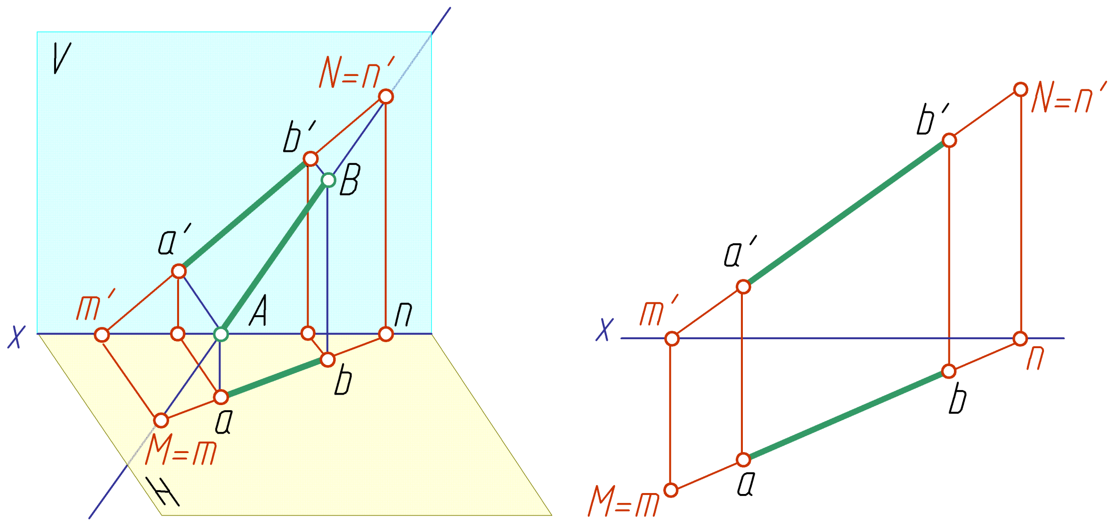
$$(\bullet)\ F \in (AB) \Rightarrow (f \in ab) \wedge (f' \in a'b').$$

Точка C лежит над прямой AB, точка D лежит под прямой AB, точка E лежит за прямой AB:

$$(\bullet)\ C \notin (AB) \Rightarrow (c \in ab) \wedge (c' \notin a'b');$$
$$(\bullet)\ D \notin (AB) \Rightarrow (d \in ab) \wedge (d' \notin a'b');$$
$$(\bullet)\ E \notin (AB) \Rightarrow (e \notin ab) \wedge (e' \in a'b').$$

Следы прямой

Точки пересечения прямой линии с плоскостями проекций называются *следами прямой*. На рис. 2, *а* точка M – горизонтальный след прямой, точка N – фронтальный.



а *б*

Рис. 2

Горизонтальная проекция m горизонтального следа прямой совпадает с самим следом – точкой M (рис. 2, *а*), а фронтальная проекция этого следа m' лежит на оси x**.** Фронтальная проекция n' фронтального следа прямой совпадает с фронтальным следом – точкой N, а горизонтальная проекция n лежит на той же оси проекций.

Чтобы построить на плоскостном чертеже горизонтальный след прямой (точки m и m'), надо продолжить фронтальную проекцию $a'b'$ прямой до пересечения с осью x (точка m')**.** Затем через нее провести перпендикуляр к оси x до пересечения с продолжением горизонтальной проекции ab. Точка m – горизонтальная проекция горизонтального следа.

Для построения проекций фронтального следа (точек n и n') необходимо продолжить горизонтальную проекцию ab прямой до пересечения с осью x (точка n). Затем через нее провести перпендикуляр к оси x до пересечения с продолжением фронтальной проекции $a'b'$. Точка n' – фронтальная проекция фронтального следа (рис. 2, *б*).

Прямая может пересекать и профильную плоскость проекций, то есть иметь профильный след. Этот след на профильной плоскости проекций совпадает со своей проекцией. Фронтальная и горизонтальная проекции его лежат соответственно на осях z и y.

Способ перемены плоскостей проекций

Для упрощения решения ряда графических задач желательно, чтобы геометрическая фигура (прямая, плоскость) занимала частное положение. Этого можно добиться разными способами, например, способом перемены плоскостей проекций.

Способ перемены плоскостей проекций состоит в том, что одну из плоскостей заменяют новой, которую располагают более рационально по отношению к заданному геометрическому объекту. При этом должны быть выдержаны следующие условия:

- новая плоскость располагается перпендикулярно оставшейся плоскости проекций;
- геометрическая фигура не меняет своего положения в пространстве;
- на новую плоскость проекций фигура проецируется с помощью перпендикулярных лучей.

Например, заменим фронтальную плоскость V на новую V_1, которую расположим перпендикулярно плоскости H и спроецируем на нее точку A. Ось x_1 – новая ось проекций (рис. 3).

При замене фронтальной плоскости проекций постоянной остается z-координата точки, так как расстояние от точки A до горизонтальной плоскости проекций H не изменилось. Следовательно, для построения новой проекции точки A точки a_1' (рис. 4) необходимо:

- провести новую ось x_1;
- через горизонтальную проекцию a перпендикулярно оси x_1 провести линию связи;
- от точки пересечения линии связи с осью x_1 отложить z-координату точки A;
- отметить новую проекцию точки A – точку a_1'.

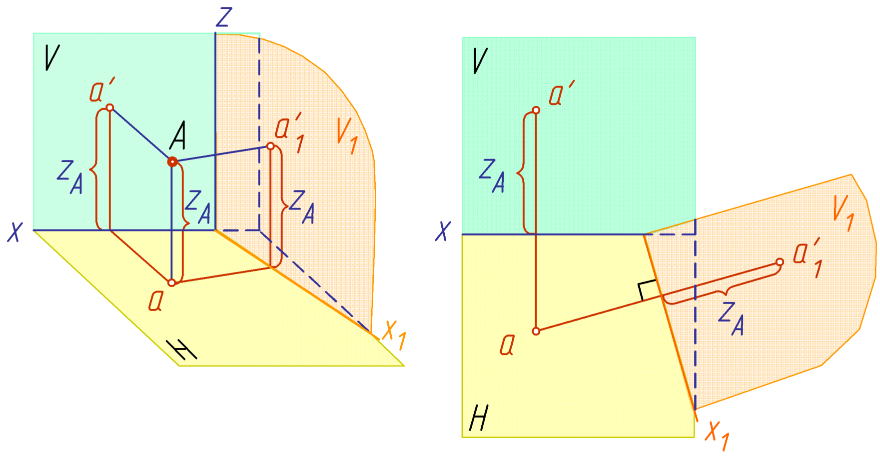


Рис. 3

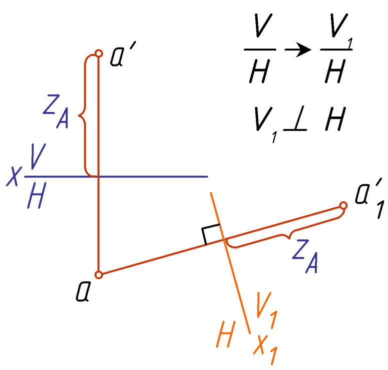


Рис. 4

Две основные задачи преобразования прямой

Прямую общего положения можно преобразовать в:
- прямую уровня;
- проецирующую прямую.

1 Преобразование прямой общего положения в прямую уровня

Такое преобразование позволяет определить натуральную величину отрезка прямой и углы наклона его к плоскостям проекций.

При решении задачи новую плоскость, например, V_1 (рис. 5), ставим в положение, параллельное отрезку. В этом случае новая ось проекций будет проходить параллельно горизонтальной проекции прямой:

$$\frac{V}{H} \to \frac{V_1}{H}; \quad V_1 \perp H; \quad V_1 \,//\, AB; \quad x_1 \,//\, ab.$$

Через горизонтальные проекции *a* и *b*, перпендикулярно новой оси x_1, проводим линии связи и на них откладываем *z* координаты точек (то есть расстояние от оси *x* до фронтальных проекций точек). Новая проекция $a'_1b'_1$ будет равна натуральной величине отрезка, а угол α равен углу наклона отрезка к плоскости *H*.

Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую

В данном случае прямую необходимо поставить в положение, перпендикулярное плоскости проекций, чтобы на эту плоскость прямая спроецировалась в точку (рис. 6).

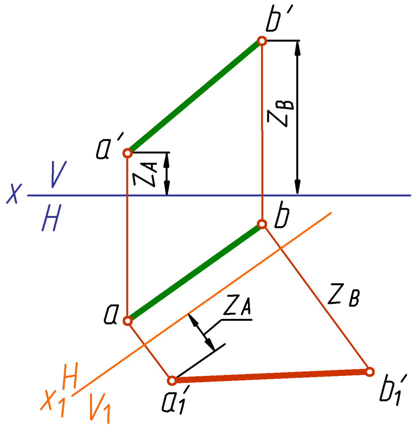


Рис. 5

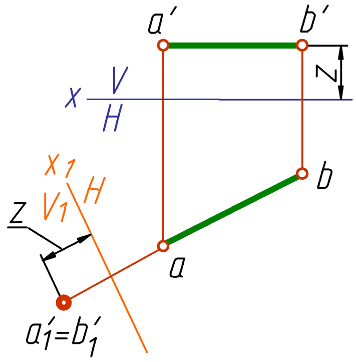


Рис. 6

Так как данная прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций, то для преобразования ее в проецирующую прямую, необходимо заменить фронтальную плоскость *V* на новую V_1. Располагаем плоскость V_1 перпендикулярно *AB*. Тогда на плоскость V_1 прямая спроецируется в точку (a'_1=b'_1).

$$\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H}; \quad V_1 \perp H; \quad V_1 \perp AB; \quad x_1 \perp ab.$$

2. Преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую

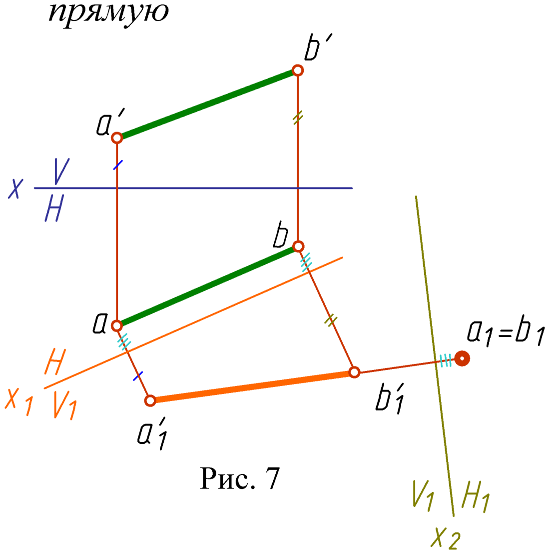


Рис. 7

Преобразовать прямую общего положения в проецирующую прямую за одну замену нельзя, так как невозможно расположить новую плоскость одновременно перпендикулярно прямой общего положения и оставшейся старой плоскости проекций.

Чтобы прямую общего положения *AB* (рис. 7) преобразовать в проецирующую, проводят две замены, то есть обе задачи, первую и вторую, решают последовательно. Сначала прямую общего положения преобразуют в прямую, параллельную плоскости проекций (прямую уровня), а затем эту прямую преобразуют в проецирующую.

$$1.\ \frac{V}{H} \to \frac{V_1}{H};\quad V_1 \perp H;\quad V_1 // AB;\ x_1 // ab;$$

$$2.\ \frac{V_1}{H} \to \frac{V_1}{H_1};\quad H_1 \perp V_1;\quad H_1 \perp AB;\ x_2 \perp a'_1 b'_1$$

Взаимное положение двух прямых

Прямые в пространстве могут занимать различные взаимные положения:

– пересекаться, то есть иметь одну общую точку;

– скрещиваться, то есть не иметь общей точки;

– быть параллельными, когда точка пересечения прямых удалена в бесконечность.

Пересекающиеся прямые. Если прямые пересекаются, то их одноименные проекции пересекаются между собой и точки пересечения проекций лежат на одной линии связи (рис. 8).

Скрещивающиеся прямые. Если прямые в пространстве не пересекаются, а скрещиваются (рис. 9), то хотя на чертеже их одноименные проекции и пересекаются, но точки пересечения проекций не лежат на одной линии связи. Эти точки не являются общими для прямых. Точки 1, 2, 3 и 4 являются *конкурирующими*. ***Конкурирующими точками*** называются точки, лежащие на одной линии связи, но на разных прямых.

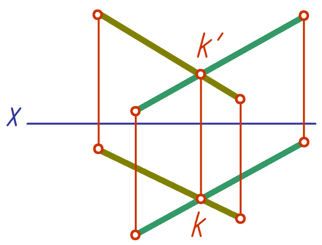


Рис. 8

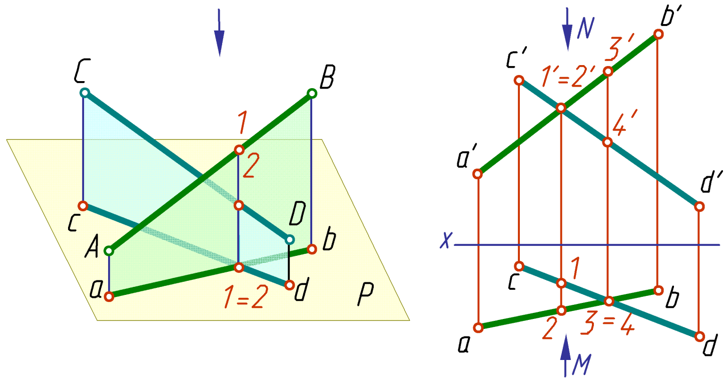


Рис. 9

Параллельные прямые. Если прямые общего положения в пространстве параллельны, то их одноименные проекции параллельны между собой (рис. 10). Прямые частного положения параллельны при условии параллельности одноименных проекций на той плоскости проекций, которой параллельны прямые (рис. 11).

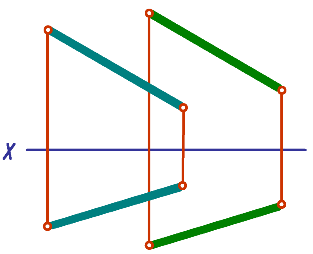


Рис. 10

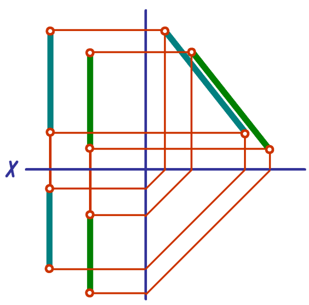


Рис. 11

Проекции плоских углов

В общем случае плоский угол проецируется на плоскость с искажением. Однако, если обе стороны угла параллельны какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость угол проецируется без искажения. Например, стороны угла *ABC* (рис. 12) параллельны горизонтальной плоскости *H*, поэтому угол спроецировался на нее без изменений.

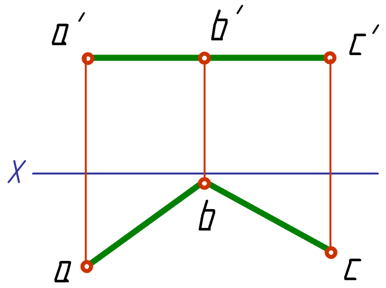


Рис. 12

Исключение составляет прямой угол. Он проецируется в истинную величину даже тогда, когда лишь одна из его сторон параллельна плоскости проекций.

Теорема о проецировании прямого угла

Прямой угол проецируется в виде прямого угла, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а вторая ей не перпендикулярна.

Пусть сторона *DE* прямого угла *KED* параллельна плоскости *P*, а сторона *EK* ей не перпендикулярна (рис. 13). Требуется доказать, что его проекция – угол *ked* – равна 90°

Доказательство. Спроецируем стороны угла *KED* на плоскость *P*. Для этого проведем проецирующие лучи из точек *K*, *E*, *D* перпендикулярно плоскости. Через прямые *EK* и *Ee* проведем дополнительную плоскость *Q*. Плоскость *Q* перпендикулярна плоскости *P*, так как она проходит через прямую *Ee*, перпендикулярную плоскости *P*.

$$(EK) \wedge (Ee) \subset Q; \ \ (Ee) \perp P \Rightarrow Q \perp P$$

Прямая *ED* перпендикулярна плоскости *Q*, так как она перпендикулярна к двум прямым этой плоскости *EK* и *Ee*.

$$(ED) \perp (EK); (ED) \perp (Ee) \Rightarrow (ED) \perp Q$$

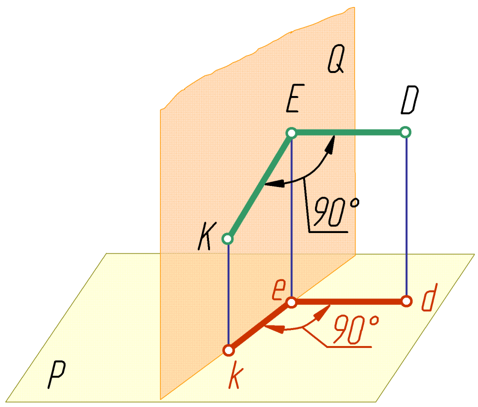


Рис. 13

Прямая *ed* также перпендикулярна к плоскости *Q*, так как прямая *ED* и ее проекция *ed* параллельны между собой.

$$(ED) \perp Q; (ed) \parallel (ED) \ \Rightarrow (ed) \perp Q$$

Прямая *ed* перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости, в том числе и прямой *ek*, то есть угол *ked* – прямой.

$$(ed) \perp (ek); \ \ \angle ked = 90°.$$

Лекция 3. Плоскость

Задание плоскости на чертеже

На чертеже плоскость может быть задана различными способами (рис. 1):

а – проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой;

б – проекциями прямой и точки, не лежащей на этой прямой;

в – проекциями двух пересекающихся прямых;

г – проекциями двух параллельных прямых;

д – проекциями любой плоской фигуры;

е – следами плоскости.

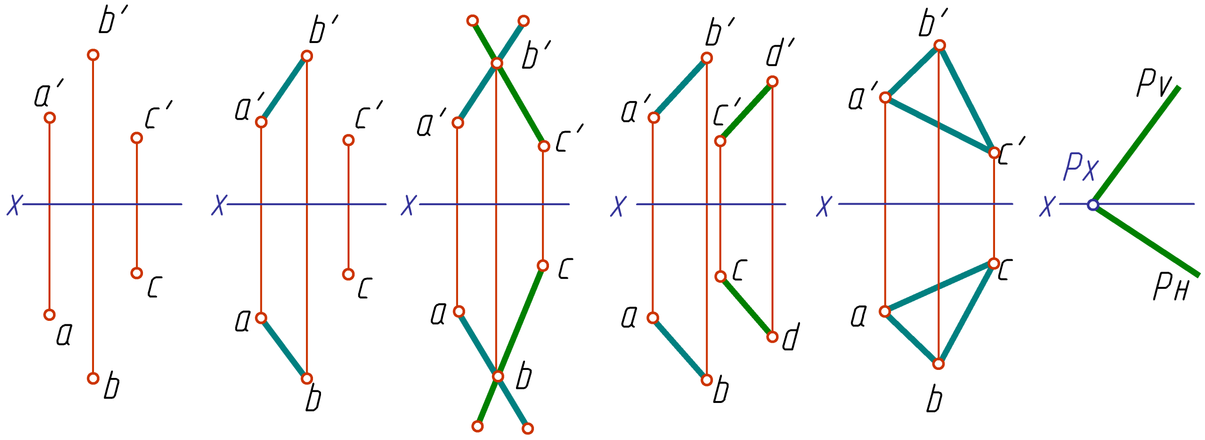


Рис 1

Следы плоскости

Следом плоскости называется линия пересечения плоскости с плоскостью проекций (рис. 2):

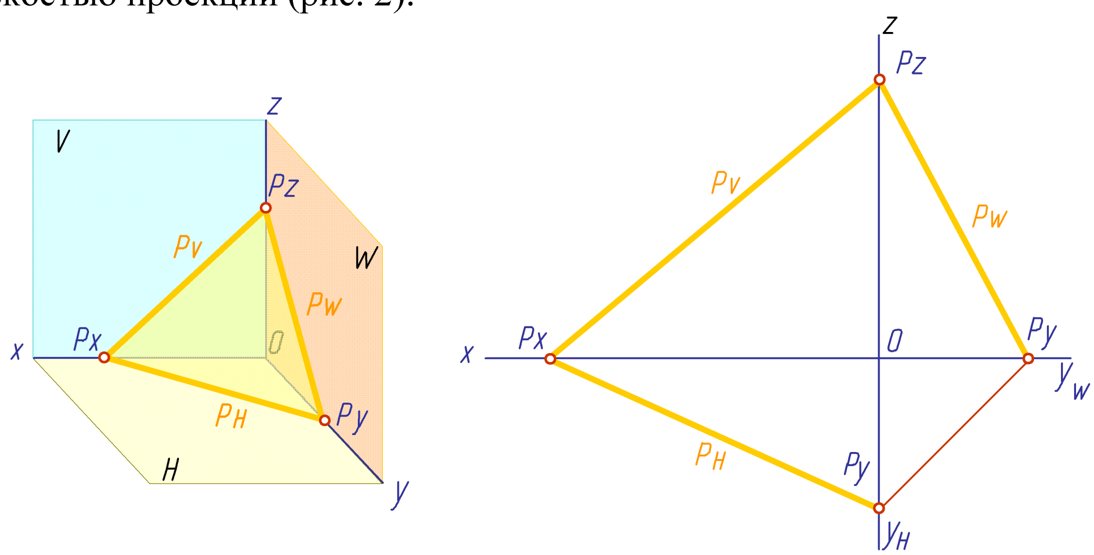


Рис. 2

P_V – фронтальный след плоскости *P*;

P_H – горизонтальный след плоскости *P*;

P_W –профильный след плоскости *P*.

Точки пересечения плоскости с осями проекций *(P_x, P_y, P_z)* называются *точками схода следов.*

Если прямая лежит в плоскости, то горизонтальный след прямой лежит на горизонтальном следе плоскости, а фронтальный след прямой – на фронтальном следе плоскости (рис. 3).

Следовательно, чтобы перейти от задания плоскости двумя пересекающимися прямыми к заданию плоскости следами, необходимо найти горизонтальные и фронтальные следы этих прямых (рис. 4). Если прямые лежат в плоскости P, то для построения горизонтального следа P_{H} необходимо найти горизонтальные проекции горизонтальных следов этих прямых (точки m_1 и m_2). Для построения следа P_{V} необходимо найти фронтальные проекции следов этих прямых (точки n_1 и n_2).

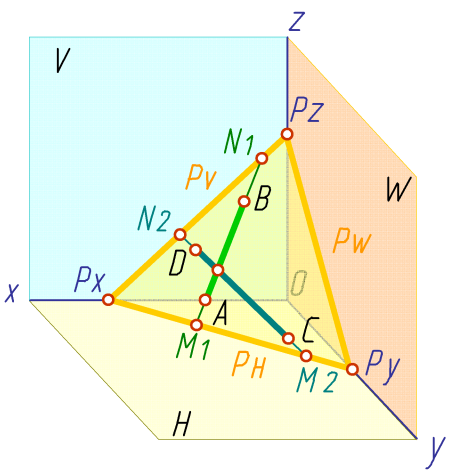


Рис. 3

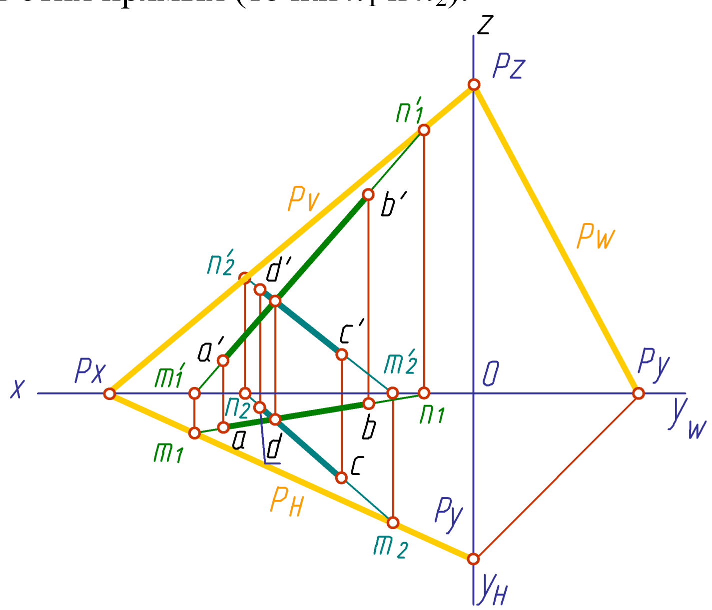


Рис. 4

Точка и прямая в плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

$$(\bullet)K \in (AB) \subset Q \Rightarrow (\bullet)K \in Q$$

Прямая принадлежит плоскости, если:

- она проходит через две точки, принадлежащие плоскости;

$$(\bullet)A \in Q \wedge (\bullet)B \in Q \Rightarrow (AB) \subset Q$$

- она проходит через одну точку этой плоскости параллельно прямой, лежащей в этой плоскости.

$$(\bullet)A \in Q \wedge (AB \parallel CD)(CD \subset Q) \Rightarrow (AB) \subset Q$$

Пример. Плоскость Q задана треугольником ABC (рис. 5).

Необходимо построить горизонтальную проекцию точки $K(k)$ и фронтальную проекцию точки $N(n')$, если они принадлежат плоскости Q.

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, принадлежащей этой плоскости. Проведем через точку *K* прямую *A1*. построим фронтальную проекцию этой прямой (*a′1′*). Проведя через точку *k′* линию связи, найдем горизонтальную проекцию точки *K* – точку *k* (рис. 6).

Фронтальная проекция точки *N*(точка *n′*) найдена с помощью прямой *B2* (рис. 6).

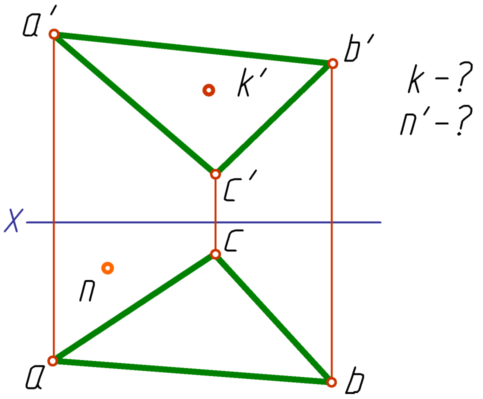


Рис. 5

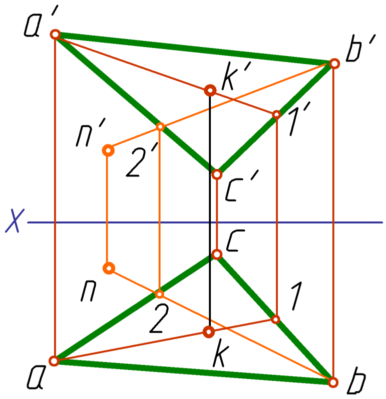


Рис. 6

Положение плоскости в пространстве

Плоскость, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется *плоскостью общего положения*.

Плоскости, параллельные или перпендикулярные плоскостям проекций, называются *плоскостями частного положения*. Они делятся на две группы.

Плоскость, перпендикулярную к плоскости проекций, называют *проецирующей* плоскостью.

Плоскость, параллельную плоскости проекций, называют *плоскостью уровня.*

Проецирующие плоскости

- Горизонтально-проецирующие (рис. 7).
- Фронтально-проецирующие (рис. 8).
- Профильно-проецирующие.

Если плоскость перпендикулярна плоскости проекций, то на эту плоскость она проецируется в линию. Эту проекцию можно рассматривать и как след плоскости. На эту же плоскость проекций в натуральную величину проецируются углы наклона данной плоскости к двум другим плоскостям проекций.

Проецирующие плоскости обладают собирательным свойством: если точка, линия или фигура расположены в плоскости, перпендикулярной плоскости проекций, то на этой плоскости их проекции совпадают со следом проецирующей плоскости.

Горизонтально-проецирующая плоскость

Фронтально-проецирующая плоскость

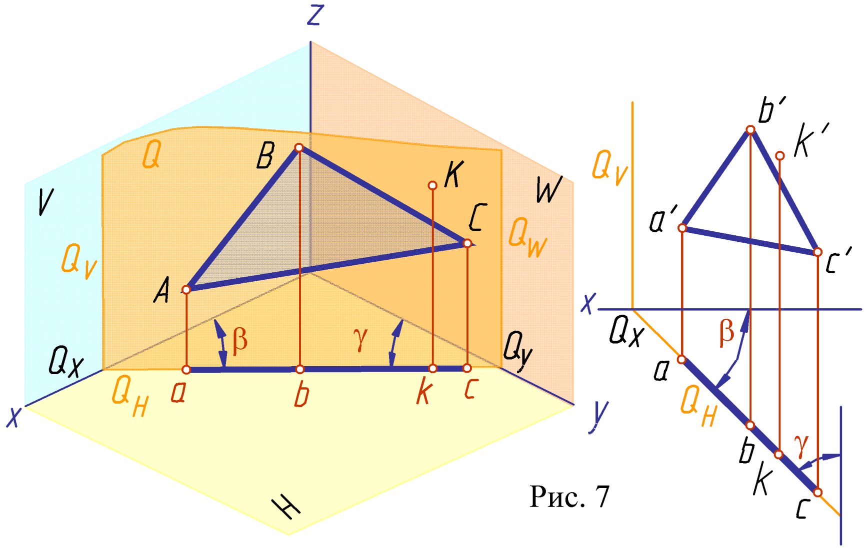


Рис. 7

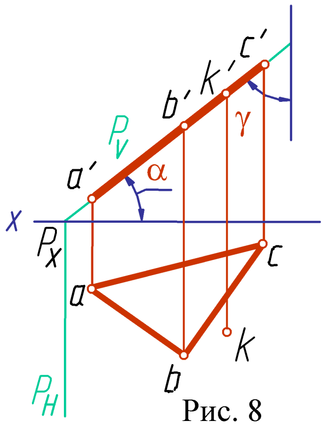


Рис. 8

Плоскости уровня

Горизонтальная (*рис. 9*) *Фронтальная* (*рис. 10*)

Если фигура параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость она проецируется в натуральную величину. Проекции фигуры на две другие плоскости проекций параллельны осям, определяющим данную плоскость проекций.

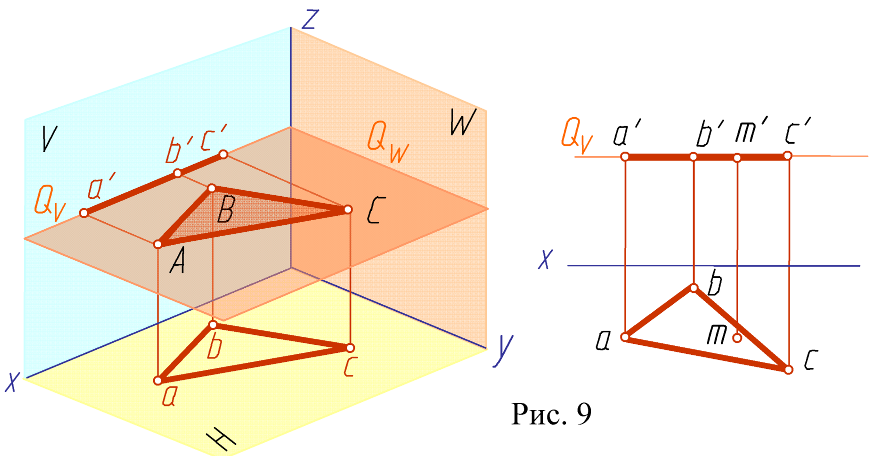


Рис. 9

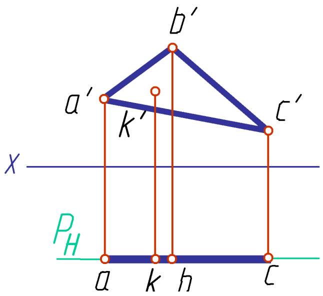


Рис. 10

Главные линии плоскости

Прямых, принадлежащих плоскости, очень много. Среди них есть прямые, занимающие особое, частное положение в плоскости. Эти линии называются *главными линиями плоскости*.

К ним относятся:

- Линии наименьшего наклона к плоскостям проекций (линии уровня) – горизонталь, фронталь и профильная прямая.
- Линии наибольшего наклона к плоскостям проекций.

Горизонталь – прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис. 11). Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси *x*, профильная – оси *y*.

Фронталь – прямая, лежащая в плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций (рис. 12). Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси *x***,** профильная – оси *z*.

Профильная прямая – прямая, лежащая в плоскости и параллельная профильной плоскости проекций. Горизонтальная проекция профильной прямой параллельна оси *y*, фронтальная – оси *z* (рис. 13).

Из трех линий наибольшего наклона к плоскостям проекций чаще всего интерес представляет линия наибольшего наклона к горизонтальной плоскости. Эту линию называют линией ската.

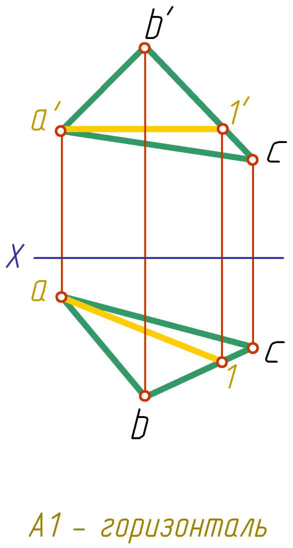


Рис. 11

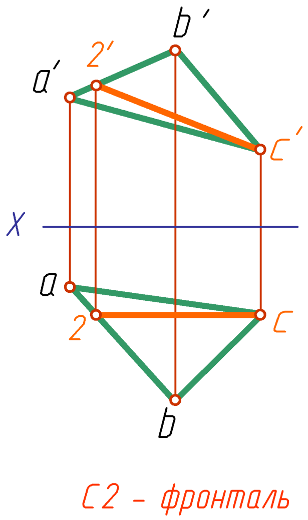


Рис. 12

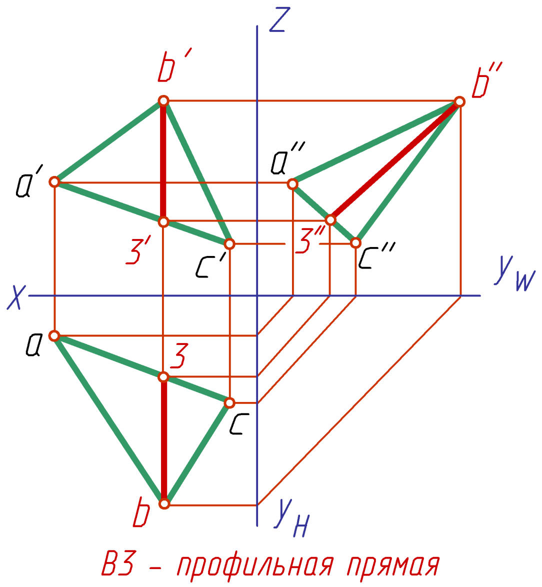


Рис. 13

Линия ската – это прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная ее горизонтальному следу или ее горизонтали.

Проведем плоскость *P* перпендикулярно плоскости *Q* и *H*. Плоскость *P* пересекает плоскость *Q* по линии ската *MN* (рис. 14).

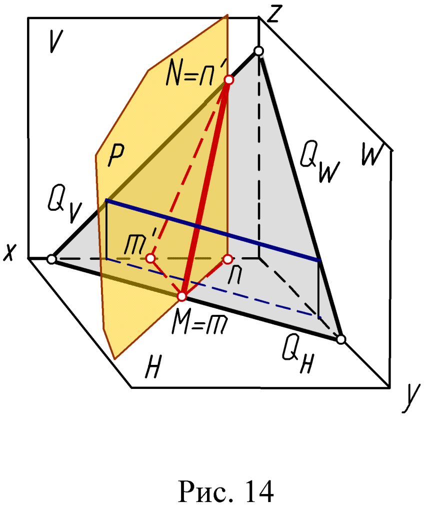


Рис. 14

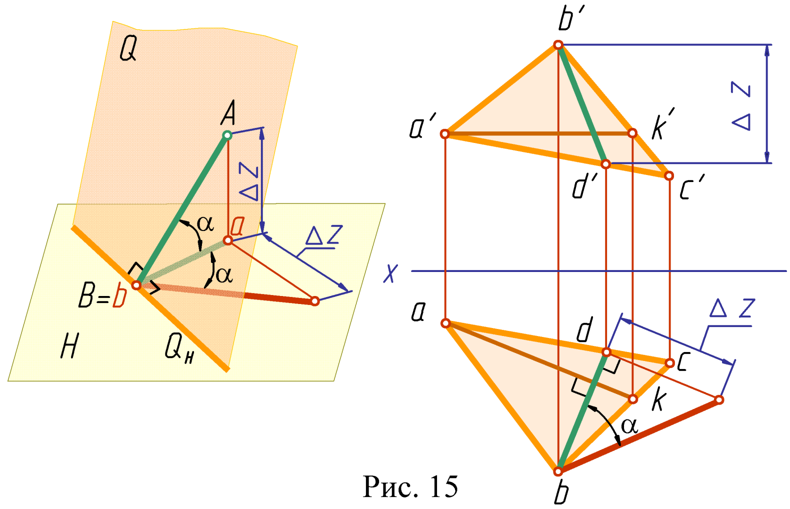


Рис. 15

Построив эту линию наибольшего наклона, можно определить величину двугранного угла между заданной плоскостью и плоскостью проекций. Этот угол будет равен линейному углу, который составляет линия наибольшего наклона со своей проекцией на эту плоскость (рис. 15).

Преобразование чертежа плоскости

Две основные задачи преобразования чертежа плоскости

Плоскость общего положения можно преобразовать:

- в проецирующую плоскость;
- плоскость уровня.

1. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость

В системе плоскостей V и H плоскость Q (ΔABC) занимает общее положение (рис. 16). Если мы заменим одну из плоскостей на новую и расположим эту плоскость перпендикулярно плоскости Q, то в новой системе плоскостей плоскость Q будет проецирующей.

Заменим, например, плоскость V на новую плоскость V_1. Расположим V_1 перпендикулярно плоскости H и плоскости Q. Плоскость V_1 будет перпендикулярна плоскости Q, если мы ее расположим перпендикулярно какой-нибудь линии плоскости. Для упрощения решения задачи в качестве этой линии возьмем горизонталь (линию, параллельную горизонтальной плоскости проекций).

Строим в плоскости Q горизонталь $A1$ и перпендикулярно ей проводим новую плоскость V_1. Ось x_1 проводим в любом месте перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали ($x_1 \perp a1$). Строим новую фронтальную проекцию плоскости Q. Горизонталь на новую плоскость спроецируется в точку ($a_1' = 1_1'$), а плоскость Q ($\Delta\ ABC$) – в линию $c'_1\, a'_1 b'_1$.

$$\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H}; \qquad V_1 \perp H; \qquad V_1 \perp Q\ (\Delta\ ABC);$$

$$V_1 \perp A1\ (A1 - \textit{горизонталь}); \qquad x_1 \perp (a1).$$

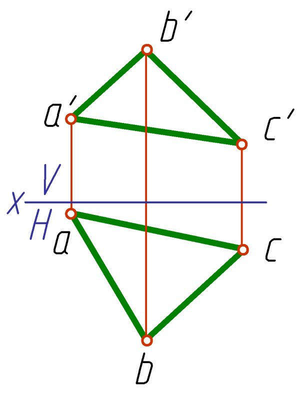


Рис. 16

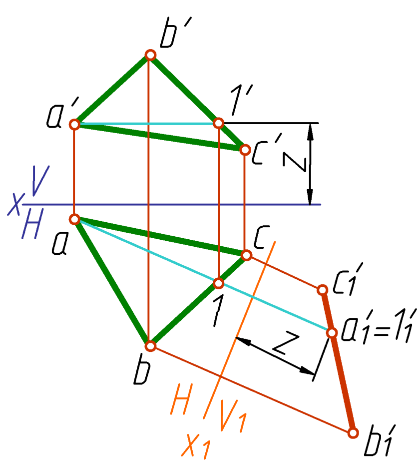


Рис. 17

Для преобразования плоскости Q в горизонтально-проецирующую плоскость, необходимо заменить плоскость H на новую, расположив ее перпендикулярно плоскости V и Q. Для этого в плоскости Q проводим фронталь и перпендикулярно ей строим новую горизонтальную плоскость.

Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня

При таком преобразовании мы определяем натуральную величину плоской фигуры (рис. 18).

В этом случае заменяется фронтальная плоскость V на новую V_1. Она проводится перпендикулярно плоскости H и параллельно плоскости $P(\Delta ABC)$. Ось x_1 строится параллельно линии abc. При такой замене координаты z не изменяются. Измеряем их на фронтальной плоскости проекций и откладываем на линиях связи от новой оси x_1.

$$\frac{V}{H} \to \frac{V_1}{H}; \quad V_1 \perp H; \quad V_1 // P(\Delta ABC); \quad x_1 // abc.$$

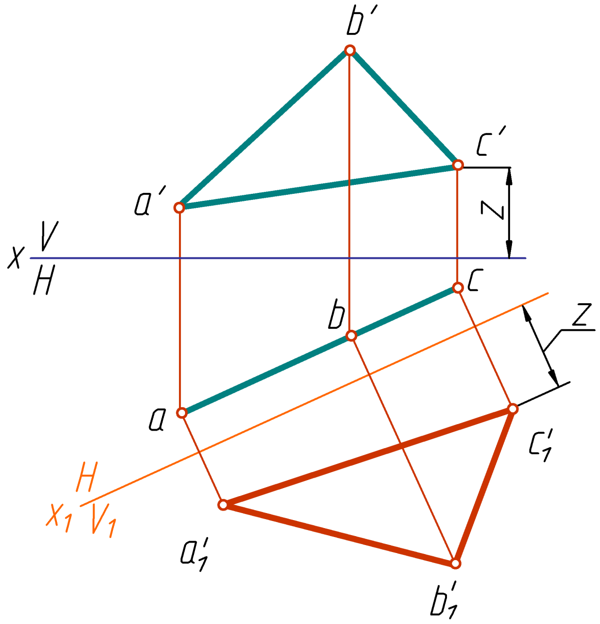


Рис. 18

2. Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня

Для того, чтобы преобразовать плоскость общего положения в плоскость, которая будет параллельна одной из плоскостей проекций, необходимо провести две замены (рис. 19). Вначале преобразуем плоскость общего положения (рис. 19, *а*) в проецирующую плоскость (рис. 19, *б*), а затем проецирующую плоскость преобразуем в плоскость уровня (рис. 19, *в*).

$\frac{V}{H} \to x\frac{V_1}{H}$; $V_1 \perp H$; $V_1 \perp P(\Delta ABC)$;

$V_1 \perp A1$ ($A1$ – *горизонталь*); $x_1 \perp (a1)$;

$\frac{V_1}{H} \to \frac{V_1}{H_1}$; $H_1 \perp V_1$; $H_1 // P(\Delta ABC)$; $x_2 // c'_1a'_1b'_1$.

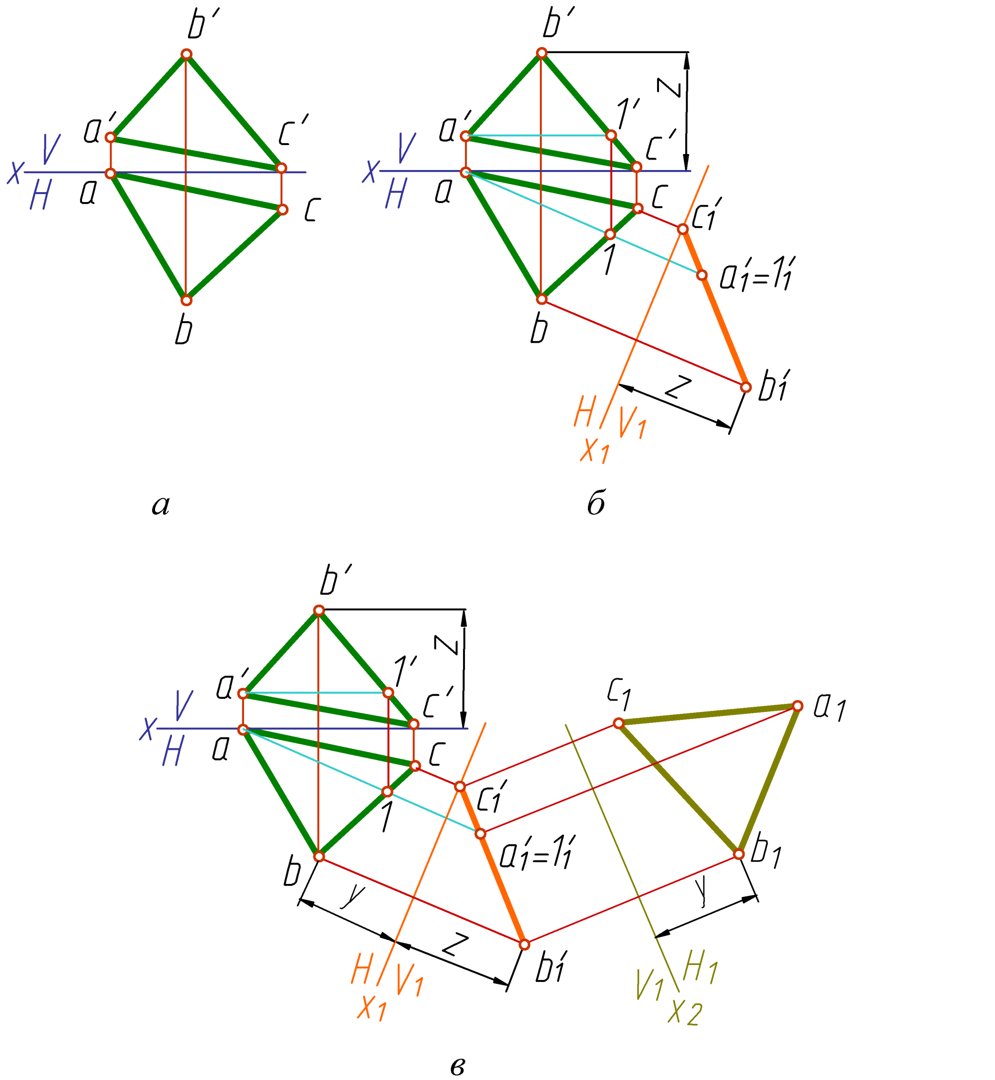


Рис. 19

Лекция 4. Взаимное положение прямой и плоскости. Взаимное положение плоскостей

Взаимное положение прямой и плоскости

Взаимное положение прямой и плоскости определяется количеством общих точек:

а) если прямая имеет две общие точки с плоскостью, то она принадлежит этой плоскости;

б) если прямая имеет одну общую точку с плоскостью, то прямая пересекает плоскость;

в) если точка пересечения прямой с плоскостью удалена в бесконечность, то прямая и плоскость параллельны.

Задачи, в которых определяется взаимное расположение различных геометрических фигур относительно друг друга. Называются *позиционными* задачами.

Прямая параллельна плоскости

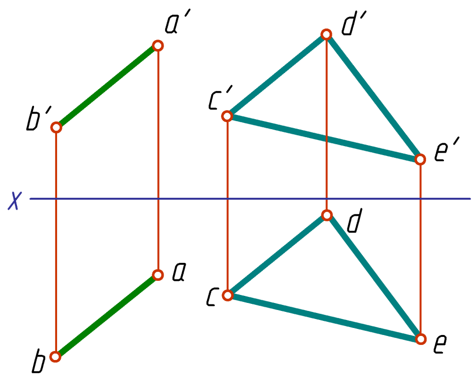


Рис. 1

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости. Чтобы построить такую прямую, надо в плоскости задать прямую и параллельно ей провести нужную прямую (рис. 1).

$$(AB)//(CD)\subset Q \Rightarrow (AB)//Q$$

Прямая будет также параллельна плоскости, если она лежит в плоскости, параллельной данной.

$$(AB)\subset P//Q \Rightarrow (AB)//Q$$

Прямая пересекает плоскость

Построить точку пересечения прямой с плоскостью – значит найти точку, принадлежащую одновременно заданной прямой и плоскости. Графически такая точка определяется как точка пересечения прямой с линией, лежащей в плоскости.

1. *Пересечение прямой общего положения с проецирующей плоскостью*

Если плоскость занимает проецирующее положение (например, она перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, рис. 2), то горизонтальная проекция точки пересечения должна одновременно принадлежать горизонтальному следу плоскости и горизонтальной проекции прямой, то есть быть в точке их пересечения. Поэтому сначала определяется горизонтальная проекция k точки K (точки пересечения прямой AB с горизонтально-проецирующей плоскостью Q (Δ CDE)), а затем ее фронтальная проекция.

2. *Пересечение проецирующей прямой с плоскостью общего положения*

На рис. 3 изображена плоскость общего положения *P* (Δ *CDE*) и горизонтально-проецирующая прямая *AB*, пересекающая плоскость в точке *K*. Горизонтальная проекция точки – точка *k* – совпадает с точками *a* и *b*. Для построения фронтальной проекции точки пересечения проведем через точку *K* в плоскости *P* прямую (например, 1–2). Сначала построим ее горизонтальную проекцию, а затем фронтальную. Точка *K* является точкой пересечения прямых *AB* и 1-2, то есть точка *K* одновременно лежит на прямой *AB* и в плоскости *P* и, следовательно, является точкой их пересечения.

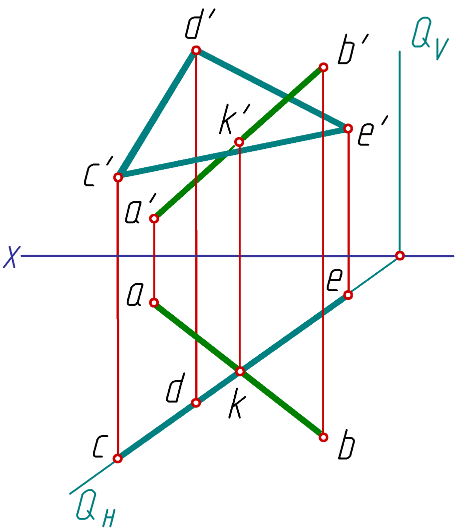


Рис. 2

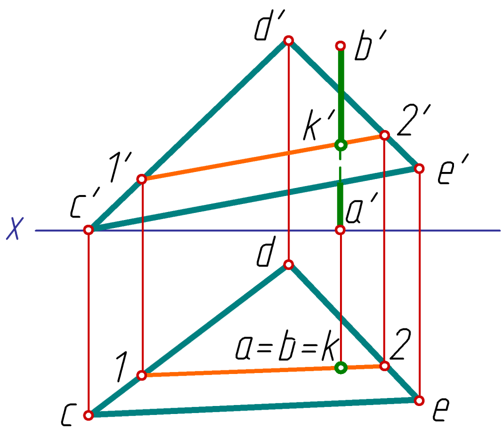


Рис. 3

3. *Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения*

В этом случае линия, лежащая в плоскости и пересекающаяся с данной прямой, может быть получена как линия пересечения вспомогательной секущей плоскости *P*, проведенной через прямую *AB*, с данной плоскостью *Q* (линия *MN*) (рис. 4).

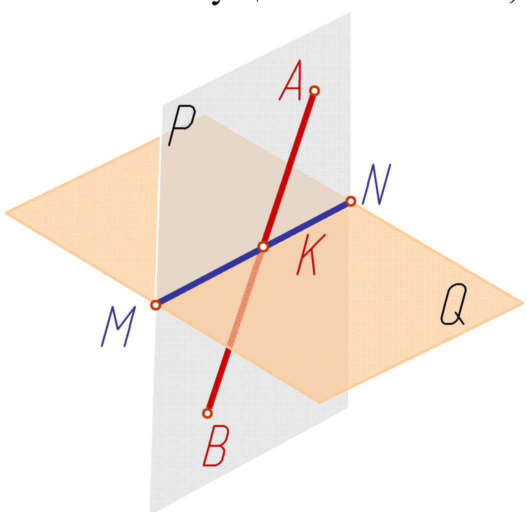


Рис. 4

Точку пересечения прямой с плоскостью строят по следующему плану.

1. Через прямую *AB* проводят вспомогательную плоскость *P*.

$$(AB) \subset P$$

2. Строят линию пересечения *MN* заданной плоскости *Q* и вспомогательной плоскости *P*.

$$(MN) = Q \cap P$$

3. Так как прямые AB и MN лежат в одной плоскости P, то определяют точку их пересечения (точку K), которая является точкой пересечения прямой AB с плоскостью Q.

$$(\bullet)K = (AB) \cap (MN)$$

4. Определяют взаимную видимость прямой AB и плоскости Q.

Задача: Определить точку пересечения прямой AB с плоскостью треугольника CDE (рис. 5). Точки задаются координатами:

$A(9,1,2)$, $B(2,7,6)$, $C(11,7,4)$, $D(2,4,2)$, $E(5,0,7)$

Задачу решаем по выше рассмотренному плану.

• Через прямую AB проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость P.

$$(AB) \subset P \perp V$$

• Строим линию пересечения MN заданной плоскости Q (ΔCDE) и вспомогательной плоскости P.

$$(12) = P \cap Q(\Delta CDE)$$

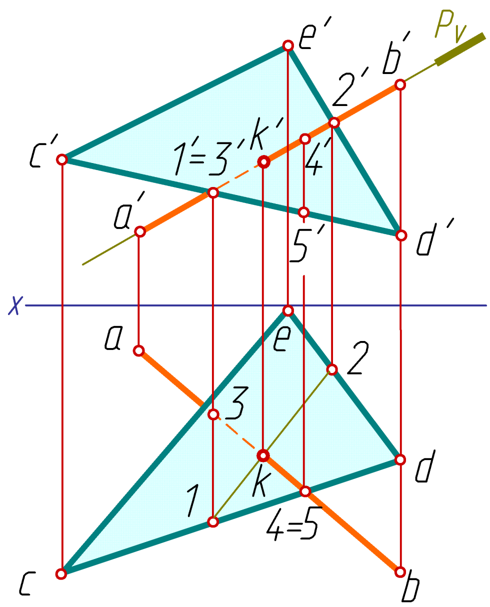


Рис. 5

• Так как прямые AB и MN лежат в одной плоскости P, то определяем точку их пересечения (точку K), которая является точкой пересечения прямой AB с плоскостью Q.

$$(\bullet)K = (12) \cap (AB)$$

• Определяем взаимную видимость прямой AB и плоскости Q.

Для определения видимых участков прямой AB анализируем положение точек на скрещивающихся прямых (конкурирующих точек).

$(\bullet)1 \in CD$	$(\bullet)4 \in AB$
$(\bullet)3 \in AB$	$(\bullet)5 \in CD$
$Y_1 > Y_3$	$Z_4 > Z_5$

Взаимное положение двух плоскостей

Параллельные плоскости.

Плоскости будут параллельными:

• если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (рис. 6);

• если плоскости параллельны, то параллельны их одноименные следы (рис. 7).

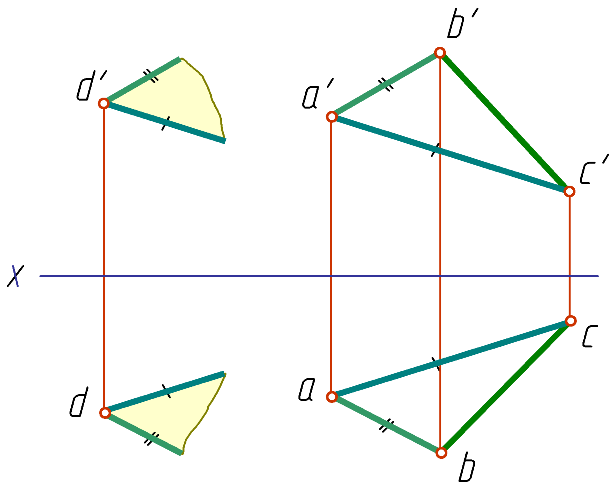


Рис. 6

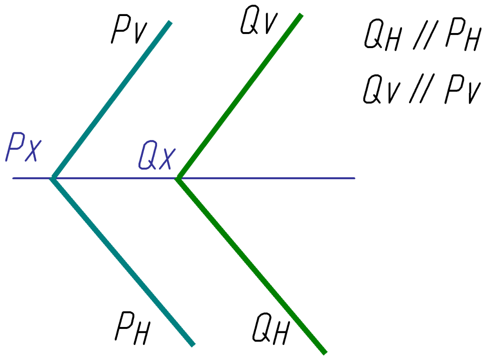


Рис. 7

Плоскости пересекаются

Для построения линии пересечения двух плоскостей необходимо

- или найти две точки, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям;
- или найти одну точку, принадлежащей двум плоскостям, и направление линии пересечения.

В обоих случаях задача заключается в нахождении точек, общих для двух плоскостей.

Плоскости в пространстве могут занимать различное положение. рассмотрим три случая построения линии их пересечения.

1. *Линия пересечения двух проецирующих плоскостей*

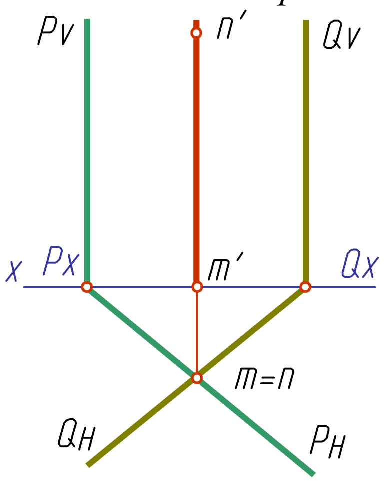


Рис. 8

Если плоскости занимают частное положение, например, как на рис. 8, являются горизонтально-проецирующими, то проекцией линии пересечения на плоскость проекций, которой данные плоскости перпендикулярны (в данном случае горизонтальной), будет точка. Фронтальная проекция линии пересечения перпендикулярна оси проекций.

2. *Линия пересечения плоскости общего положения и проецирующей плоскости*

В этом случае одна проекция линии пересечения совпадает с проекцией проецирующей плоскости на той плоскости проекций, которой

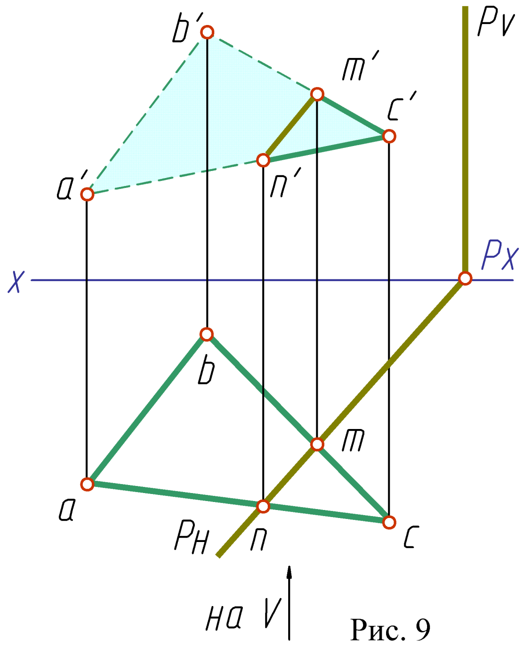


Рис. 9

она перпендикулярна. На рис. 9 показано построение проекций линии пересечения горизонтально-проецирующей плоскости, заданной следами, с плоскостью общего положения (треугольник *ABC*).

На горизонтальной проекции (рис. 9) в пересечении следа плоскости P_H и сторон *AC* и *BC* треугольника *ABC* находим горизонтальные проекции *n* и *m* линии пересечения. По линиям связи находим фронтальные проекции точек *M* и *N* линии пересечения.

При взгляде по стрелке на плоскость *V* по горизонтальной проекции видно, что часть треугольника правее линии пересечения *MN (mn)* находится перед плоскостью *P*, то есть будет видимой на фронтальной плоскости проекций. Остальная часть – за плоскостью *P*, то есть невидима.

Линия пересечения двух плоскостей общего положения

Построение линии пересечения двух плоскостей общего положения осуществляется с помощью дополнительных плоскостей-посредников.

Общий прием построения линии пересечения таких плоскостей заключается в следующем. Вводим вспомогательную плоскость (посредник) и строим линии пересечения вспомогательной плоскости с двумя заданными. В пересечении построенных линий находим общую точку двух плоскостей. Чтобы найти вторую общую точку, повторяем построение с помощью еще одной вспомогательной плоскости.

$(12) = Q \cap \Delta ABC$

$(34) = Q \cap \Delta EFK$

$(\bullet)M = (12) \cap (34)$

$(56) = P \cap \Delta ABC$

$(78) = P \cap \Delta EFK$

$(\bullet)N = (56) \cap (78)$

Соединяем полученные точки *M* и *N* и определяем взаимную видимость фигур.

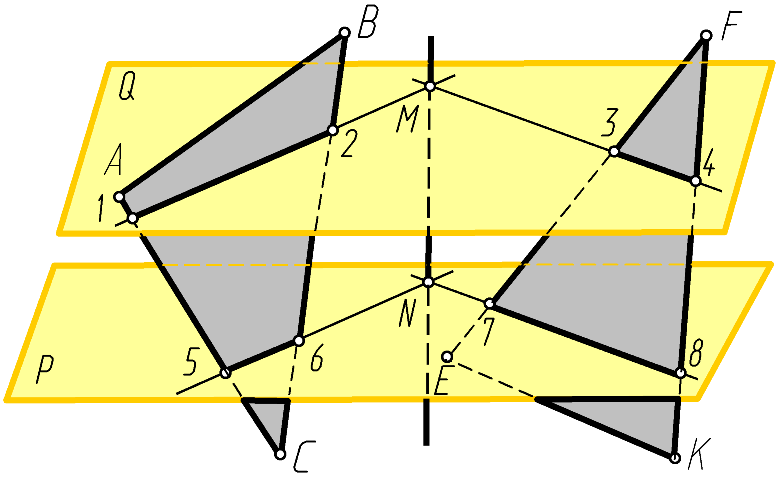


Рис. 10

При решении подобных задач удобнее в качестве посредников применять проецирующие плоскости.

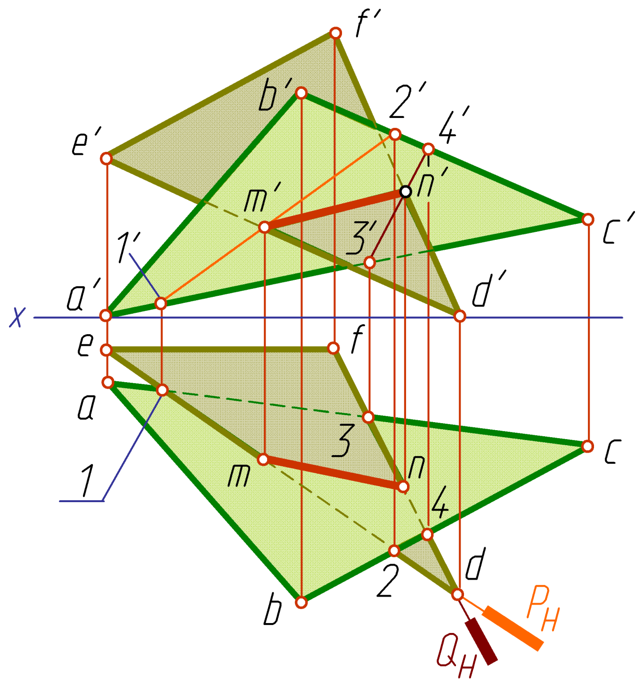
Задача. Построить линию пересечения двух плоских фигур, заданных треугольниками с координатами вершин:

$$\Delta ABC - A(16,2,0), B(10,9,7), C(1,4,3)$$

$$\Delta DEF - D(5,9,0), E(16,1,5), F(9,1,9)$$

На рис. 11 дано построение линии пересечения двух треугольников. Решение выполняем в следующей последовательности. Проводим две вспомогательные горизонтально-проецирующие плоскости – плоскость P через сторону ED и плоскость Q через сторону DF треугольника DEF. Плоскость P пересекает треугольник ABC по прямой 1-2. В пересечении фронтальных проекций $1'$-$2'$ и $d'e'$ находим фронтальную проекцию точки $M(m')$ линии пересечения. Плоскость Q пересекает треугольник ABC по прямой 3-4. В пересечении фронтальных проекций $3'$-$4'$ и $b'c'$ находим фронтальную проекцию точки $N(n')$ линии пересечения. Горизонтальные проекции этих точек, а следовательно, и линии пересечения, находим, проводя линии связи.

Соединяем точки M и N. Взаимную видимость треугольников на плоскостях проекций определяем с помощью конкурирующих точек.



1.$(ED) \subset P \perp H$

2.$(12) = P \cap \Delta ABC$

3.$(\bullet) M = (12) \cap (ED)$

4.$(FD) \subset Q \perp H$

5.$(34) = Q \cap \Delta ABC$

6.$(\bullet) N = (34) \cap (FD)$

Рис. 11

Содержание

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций

Составители: Галина Федоровна Винокурова
Борис Леонидович Степанов

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.