



Институт
кибернетики

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

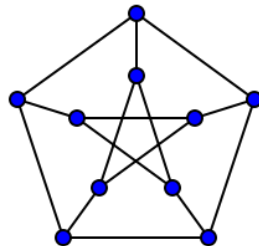
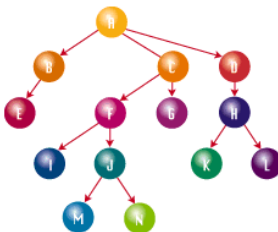
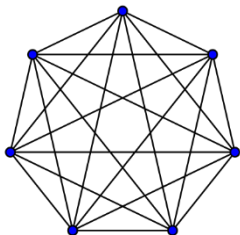


ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Екатерина Юрьевна Титаренко

старший преподаватель

Институт кибернетики



Содержание курса

- Введение.
- Определения. Основные понятия. Способы задания графов.
- Основные типы графов.
- Операции над графами.
- Маршруты, цепи, циклы.
- Задача о кратчайшем пути. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм Беллмана.
- Остовное дерево. Алгоритм Краскала построения минимального остовного дерева.
- Эйлеровы и гамильтоновы графы.
- Раскраска графов.

Введение

- На практике часто бывает полезно изобразить некоторую ситуацию в виде рисунков, составленных из точек (вершин), представляющих основные ситуации, и линий (ребер), соединяющих определенные пары этих вершин и представляющих связи между ними.
- Таким способом удобно представлять структуру системы, в которой вершины – это блоки, а ребра – связи между блоками. Такие рисунки известны под общим названием графов.
- Графы встречаются в разных областях: структуры в гражданском строительстве, сети в электротехнике, социограммы в социологии и экономике, молекулярные структуры в химии и т.д.
- Удобны графы и при исследовании систем методом пространства состояний. В этом случае вершины – состояния системы, процесса, ребра – действия, которые могут изменить состояние. При решении оптимизационных задач вершинами могут быть предполагаемые решения, ребрами – правила для их нахождения.

Появление теории графов

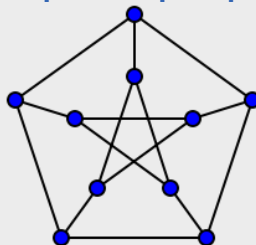
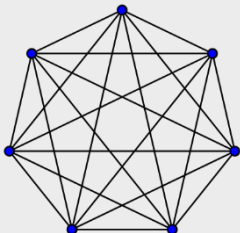
- Начало теории графов было положено Эйлером в 1736 г., когда им была написана статья о Кенигсбергских мостах. Однако она была единственной в течение почти ста лет.
- Интерес к этой науке возродился около середины XIX в связи с развитием естественных наук (исследования электрических сетей, моделей кристаллов и структур молекул), формальной логики. Кроме того, оказалось, что многие математические головоломки могут быть сформулированы в терминах теории графов.
- Последние 35-40 лет ознаменовали новый период интенсивных разработок теории графов. Появились новые области приложения: системы телекоммуникаций, биология, психология и другие.

Определение простого графа

Простым графом G называется пара множеств (V, E) , где

- V – не пустое, конечное множество элементов, называемых **вершинами**. Графически это множество изображается точками.
- E – конечное множество неупорядоченных пар различных элементов из V , называемых **ребрами**. Графически это множество изображается линией, соединяющей пару точек.

Простой граф – конечный граф без петель и кратных ребер.

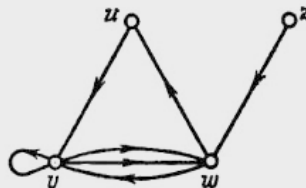
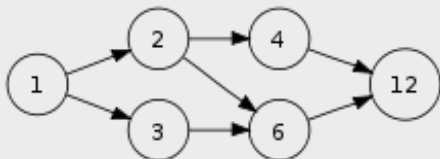


Определение орграфа

Ориентированным графом (орграфом) G называется пара (V, E) , где

- V – не пустое, конечное множество элементов (вершин).
- E – конечное семейство упорядоченных пар элементов из V , называемых дугами.

Замечание. В семействе допускаются одинаковые элементы.



Основные понятия

- Две вершины графа, соединенные ребром, называются **смежными**.
- Вершины, соединяемые ребром, называются **инцидентными** этому ребру.
- Два ребра, инцидентные одной вершине, называются **смежными**.
- **Степенью** вершины называется количество инцидентных ей ребер.
- Вершина степени 0 называется изолированной, степени 1 – висячей.
- Сумма степеней всех вершин простого графа равна удвоенному числу ребер.
- В простом графе число вершин нечетной степени четно.

Задание

Построить простой граф G_n , в котором вершины V_i и V_j смежны тогда и только тогда, когда i и j взаимно простые числа:

- а) количество вершин $n = 4$;
- б) количество вершин $n = 8$.

Способы задания графов

1. Перечисление вершин и ребер.
2. Графическое изображение.
3. С помощью матриц смежности вершин.

	V_1	V_2	...	V_n
V_1	Кол-во ребер, соединяющих эти вершины			
V_2				
...				
V_n				

4. С помощью матриц инцидентности.

	E_1	E_2	...	E_n
V_1	1, если вершина инцидентна ребру			
V_2				
...				
V_n				

Свойства матрицы смежности простого графа

- Число единиц в i -строке равно степени i -вершины
- Число единиц в j -столбце равно степени j -вершины
- Общее число единиц равно удвоенному числу ребер
- Матрица симметрична относительно главной диагонали.

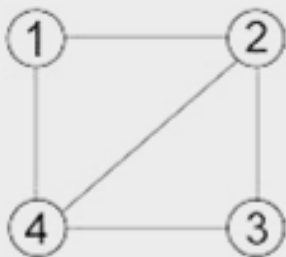
Свойства матрицы инцидентности простого графа

- Число единиц в i -строке равно степени i -вершины
- Число единиц в j -столбце равно двум
- Общее число единиц равно удвоенному числу ребер

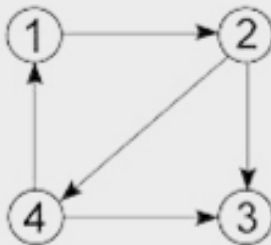


Задание

Построить матрицу смежности вершин и матрицу инцидентности для графов.



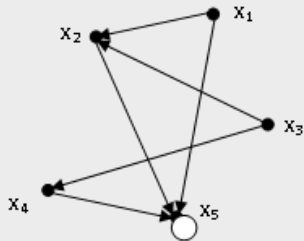
а)



б)

Задание

Проверить, является ли граф простым.



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Основные типы графов

- Граф, у которого все вершины имеют степень 0, называется **пустым, нуль-графом** или **вполне несвязным**.

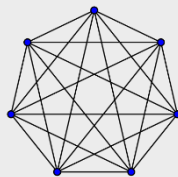
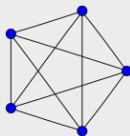
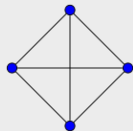


- Граф, состоящий из единственной вершины, называется **тривиальным**.

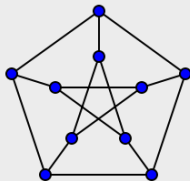
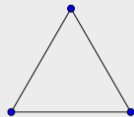


Основные типы графов

- Граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется **полным** графом.

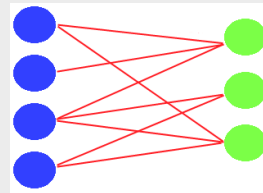


- Граф, у которого все вершины имеют одну и ту же степень r , называется **регулярным** графом степени r . Регулярный граф степени 3 называется кубическим.

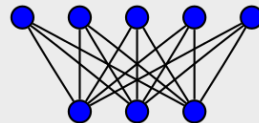


Основные типы графов

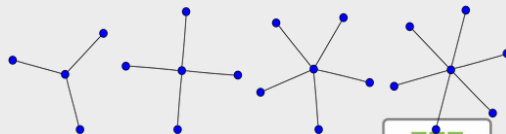
- Если множество вершин графа можно разделить на два не пустых и не пересекающихся подмножества таким образом, чтобы каждое ребро соединяло вершины из разных подмножеств, то такой граф называется **двудольным**.



- Если при этом каждая вершина одного подмножества соединена с каждой вершиной другого подмножества, то такой граф называется **полным двудольным**.

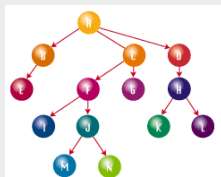


- Если в полном двудольном графе мощность одного из подмножеств равна 1, то такой граф называется **звездой**



Основные типы графов

- **Дерево** – связный граф без циклов.



- **Лес** – граф без циклов.



Задание

Построить все кубические графы с не более чем 8 вершинами.

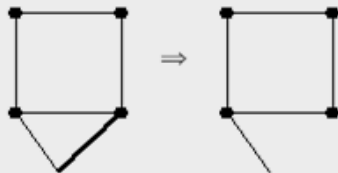


Операции над графами

Дан граф $G(V,E)$. Построим граф G_1 .

1. Удаление ребра e .

$G_1(V,E_1)$, где $E_1 = E \setminus \{e\}$

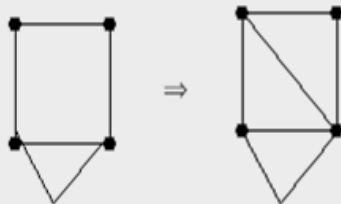


2. Добавление ребра.

$G_1(V,E_1)$,

где $E_1 = E \cup \{e\}$,

$e = (u,v) \notin E, u,v \in V$



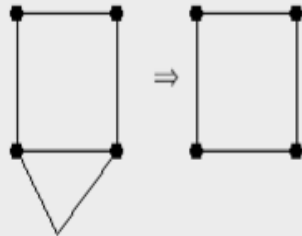
Операции над графами

3. Удаление вершины v

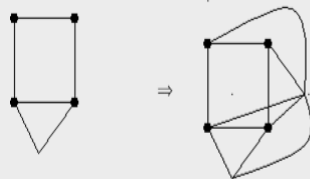
$G_1(V_1, E_1)$,

где $V_1 = V \setminus \{v\}$,

$E_1 = E \setminus \{e \mid e \text{ инцидентно } v\}$



4. Добавление вершины.



Операции над графами

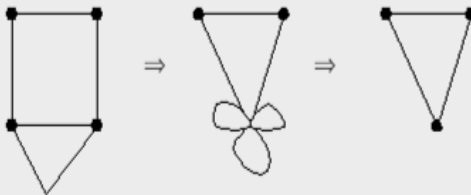
5. Отождествление (слияние) вершин
 $u, v \in V, w \notin V$

$$G_1(V_1, E_1),$$

где $V_1 = (V \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$,

w инцидентна тем и только тем вершинам, которые были инцидентны u или v .

Если u, v соединены ребром, то слияние называется **стягиванием**.

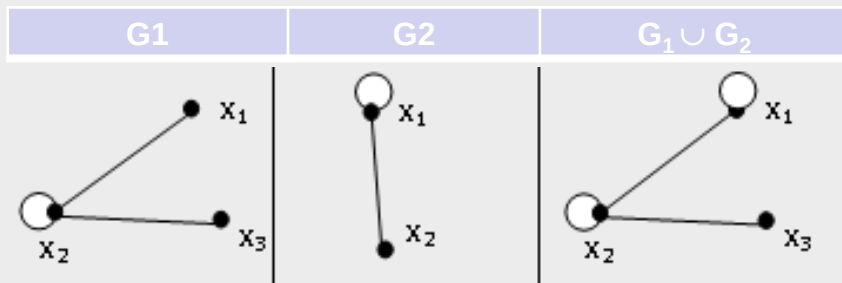


Операции над графами

Даны два графа $G_1(V_1, E_1)$, $G_2(V_2, E_2)$

6. Объединение графов

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$$



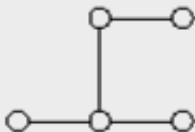
Операции над графами

7. Пересечение графов

$$G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$$



G_1



G_2



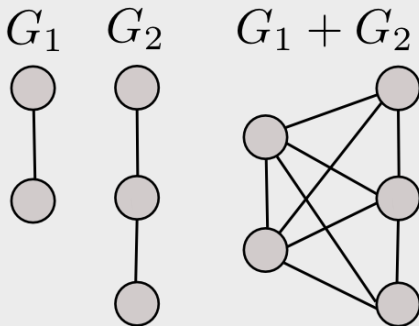
$G_1 \cap G_2$

Операции над графами

8. Соединение графов

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$

множество E_3 определяется следующим образом: каждая вершина G_1 соединяется ребром с каждой вершиной G_2 .



Операции над графами

9. Произведение графов

$$G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, E)$$

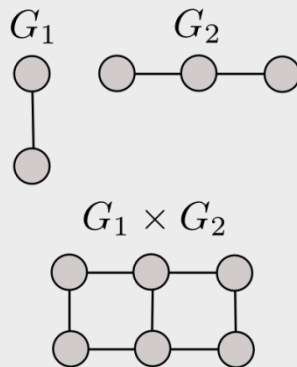
Множество ребер E определяется следующим образом:

вершины $u=(u_1,u_2)$ и $v=(v_1,v_2)$ смежны тогда и только тогда, когда

$u_1 = v_1$, u_2 и v_2 – смежны

или

u_1 и v_1 – смежны, $u_2 = v_2$.



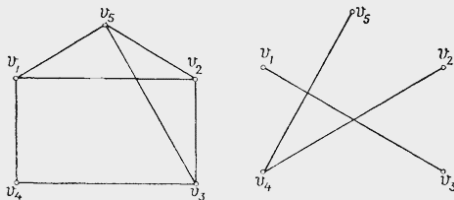
Операции над графами

Дан граф $G(V, E)$. Построим граф G_1 .

10. Дополнение графа

Дополнением графа $G(V, E)$ является граф $G_1(V, E_1)$, содержащий все вершины исходного графа и только те ребра, которых не хватает исходному графу для того, чтобы он стал полным.

E_1 : две вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в исходном графе.



Задание

Построить графы объединения и пересечения графов, заданных матрицами смежности вершин

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Маршруты, цепи, циклы

Маршрутом в графе называется последовательность вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся вершиной.

В простом графе маршрут однозначно определяется только последовательностью вершин или ребер.

Длиной маршрута называется количество ребер в нем.

Маршрут может быть **замкнутым** и **незамкнутым**. В замкнутом маршруте первая и последняя вершины совпадают.

Маршрут в котором все ребра различны, называется **цепью**.

Цепь, в которой нет одинаковых вершин, кроме, быть может, ее концов, называется **простой цепью**.

Циклом называется простая замкнутая цепь.

Цикл длины 1 называется **петлей**.

Расстояния в графе

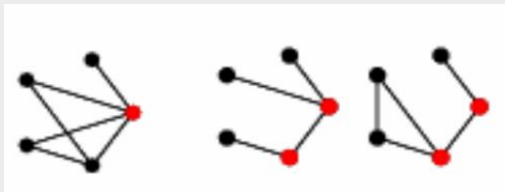
Расстоянием (r) между вершинами называют длину кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины.

Диаметром (d) называется максимальное расстояние между вершинами в графе.

Центром графа называется вершина, максимальное расстояние от которой до другой вершины графа является минимальным при другом выборе центра.

Радиус – максимальное расстояние от центра.

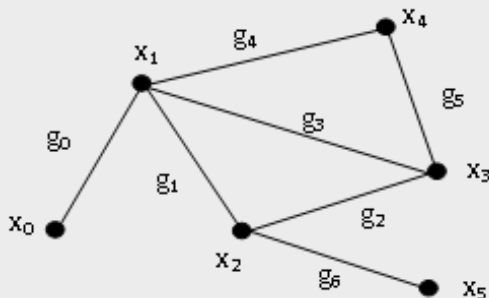
Пример. Каким образом выбрать место для строительства пожарной части, чтобы за минимальное время доехать в самый отдаленный от части район города.



Задание

Проверить, является ли $S = (g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_2, g_6)$ маршрутом, цепью, циклом. Определить длину.

1. Найти $r(x_0, x_3)$.
2. Найти диаметр.
3. Найти центр.



Задача о кратчайшем пути

Задан оргграф $G(V,E)$, каждой дуге (u,v) ставится в соответствие число $l(u,v)$ – длина дуги (расстояния, стоимости и т.п.)

В общем случае возможно $l > 0$, $l < 0$, $l = 0$.

Длина пути – сумма длин дуг, составляющих путь.

Найти длины кратчайших путей и сами пути от фиксированной вершины s до всех остальных вершин графа v_i .

Пример. Известна схема дорог. Требуется перевезти груз из одного пункта в другой по маршруту минимальной длины.

Если в графе **нет циклов с отрицательной длиной**, то кратчайшие пути существуют и любой кратчайший путь – это простая цепь. Наличие цикла отрицательной длины означает, что длину пути можно сделать равной $-\infty$.

Алгоритмы Дейкстры

- Алгоритм решает задачу в случае $l \geq 0$.
- Алгоритм основан на приписывании вершинам v_i временных меток $d(v_i)$.
- Метка вершины дает верхнюю границу длины пути от s к этой вершине.
- Величины меток постепенно уменьшаются, и на каждом шаге итерации одна из временных меток становится постоянной. Это означает, что метка дает точную длину кратчайшего пути от s к рассматриваемой вершине.

Алгоритмы Дейкстры

Шаг 1 (начальная установка).

Положить $d(s)=0$, считать метку постоянной.

$d(v_i)=\infty$, $i=1\dots n$, считать метки временными.

$p=s$.

Шаг 2 (общий шаг). Повторяется n раз, пока не будут упорядочены все вершины.

Пересчитать временную метку $d(v_i)$ всякой неупорядоченной вершины v_i , в которую входит дуга, выходящая из p :

$$d(v_i) = \min (d(v_i); d(p) + l(p, v_i)).$$

Выбрать вершину с $\min d(v_i)$. Если их несколько, то любую. Пусть это w .

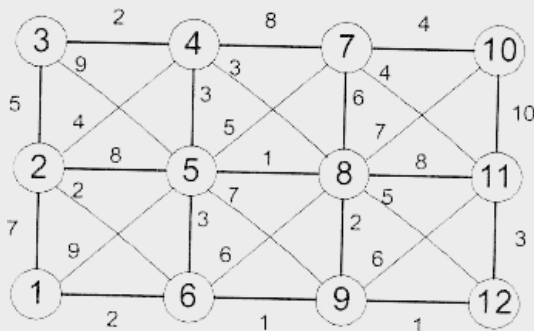
Метку $d(w)$ считать постоянной.

$p=w$.



Алгоритмы Дейкстры

Пример.



Найти кратчайшие пути от вершин $s = 1$ до всех остальных вершин графа. Ребра означают две разнонаправленные дуги одинаковой длины.

Алгоритмы Дейкстры

Решение.

Последовательность вычисления меток будем заносить в таблицу. Знаком «+» будем обозначать постоянные метки.

Выполним шаг 1 и заполним первую строку таблицы.

верш ины	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
шаг1	0+	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	p=1

Из вершины 1 выходят дуги в вершины 2, 5, 6. Вычисляем метки этих вершин.

$$d(2) = \min(\infty; 0 + 7) = 7$$

$$d(5) = \min(\infty; 0 + 9) = 9$$

$$d(6) = \min(\infty; 0 + 2) = 2$$

И заполняем вторую строку таблицы

шаг 2		7	∞	∞	9	2+	∞	∞	∞	∞	∞	∞	p=6
-------	--	---	----------	----------	---	----	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-----

Метка вершины 6 становится постоянной. Пересчитываем метки вершин, в которые можно перейти из вершины 6. И так далее заполняем остальные строки таблицы.



Алгоритмы Дейкстры

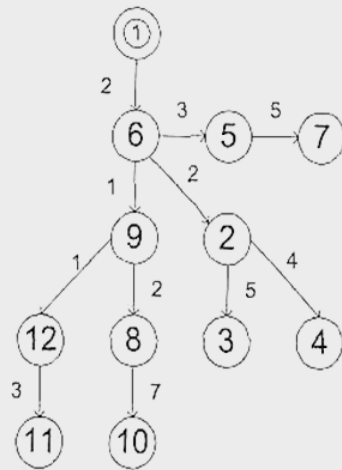
Таблица решения

вершины	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
шаг1	0+	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	p=1
шаг 2		7	∞	∞	9	2+	∞	∞	∞	∞	∞	∞	p=6
		4	∞	∞	5		∞	8	3+	∞	∞	∞	p=9
		4+	∞	∞	5		∞	5		∞	9	4	p=2
			9	8	5		∞	5		∞	9	4+	p=12
			9	8	5+		∞	5		∞	7		p=5
			9	8			10	5+		∞	7		p=8
			9	8			10			12	7+		p=11
			9	8+			10			12			p=4
			9+				10			12			p=3
							10+			12			p=7
										12+			p=10

Построение дерева кратчайших путей

Дерево кратчайших путей – это ориентированное дерево с корнем в вершине S. Все пути в этом дереве – кратчайшие для данного графа.

Строится по таблице, в него включаются вершины в том порядке, в котором они получали постоянные метки.



Построение дерева кратчайших путей

Задание

Найти кратчайшее расстояние от вершины 1 до всех остальных вершин графа, заданного матрицей.

0	1	—	—	—	—
—	0	5	2	—	7
—	—	0	—	—	1
2	—	1	0	4	—
—	—	—	3	0	—
—	—	—	—	1	0

Алгоритм Беллмана

Алгоритм решает задачу при любых весах дуг l , а также обнаруживает цикл отрицательной длины.

Обозначим через $d^{\leq k}(v_i)$ длину кратчайшего пути от s до v_i , в котором не более чем k дуг.

$$d^{\leq k+1}(v_i) = \min_j (d^{\leq k}(v_j); d^{\leq k}(v_j) + l(v_j, v_i)).$$

$d^{\leq k}(v_j) + l(v_j, v_i)$ — это длина пути до вершины v_i , предпоследняя вершина которого v_j . Причем путь до v_j — кратчайший из всех путей до этой вершины, в которых не более чем k дуг.

Алгоритм Беллмана

1. Найти $d^{\leq 1}(v_i)$, $i=1,2,\dots,n$

2. Найти $d^{\leq 2}(v_i)$, $i=1,2,\dots,n$

...

Условие окончания. Если $d^{\leq k+1}(v_i) = d^{\leq k}(v_i) \forall i$, то кратчайшие пути найдены, максимальное число дуг в кратчайших путях равно k .

Если задача имеет решение, то $d^{\leq n}(v_i)$ заведомо длины кратчайших путей от вершины s до вершин $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Если найдется вершина v_i такая, что

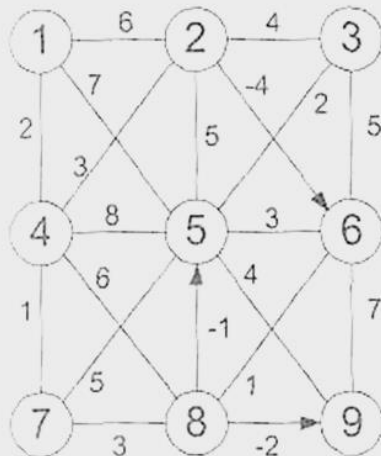
$$d^{\leq n+1}(v_i) < d^{\leq n}(v_i),$$

то в графе есть контур отрицательной длины: путь от вершины s до вершины v_i , содержащий $n + 1$ дугу, оказался короче пути, состоящего из n дуг.

Алгоритм Беллмана

Пример.

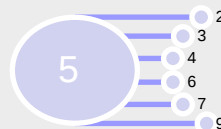
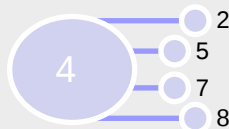
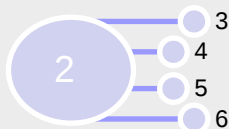
Найти кратчайшие пути от вершины 1 до всех остальных вершин.



Алгоритм Беллмана

Таблица решений.

вершины	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d^{\leq 1}$	0	6	∞	2	7	∞	∞	∞	∞



$d^{\leq 2}(v_2) = \min_j (d^{\leq 1}(v_2); d^{\leq 1}(v_i) + l(v_2, v_i)) =$
 $= \min (d^{\leq 1}(v_2); d^{\leq 1}(v_4) + l(v_2, v_4); d^{\leq 1}(v_5) + l(v_2, v_5)) = \min (6; 2+3; 7+5) = 5$
 $d^{\leq 2}(v_3) = \min_j (d^{\leq 1}(v_3); d^{\leq 1}(v_i) + l(v_3, v_i)) =$
 $= \min (d^{\leq 1}(v_3); d^{\leq 1}(v_2) + l(v_2, v_3); d^{\leq 1}(v_5) + l(v_3, v_5)) = \min (\infty; 6+4; 7+2) = 9$
 и т.д.

$d^{\leq 2}$	0	5	9	2	7	2	3	8	11
--------------	---	---	---	---	---	---	---	---	----

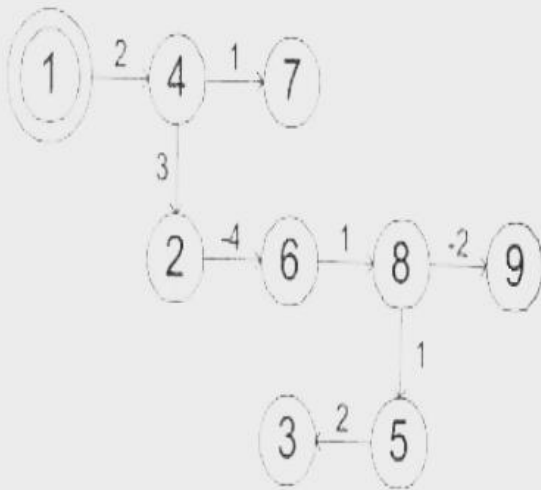
Алгоритм Беллмана

Таблица решений

верш ины	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d^{\leq 1}$	0	6	∞	2	7	∞	∞	∞	∞
$d^{\leq 2}$	0	5	9	2	7	2	3	8	11
$d^{\leq 3}$	0	5	7	2	5	1	3	3	6
$d^{\leq 4}$	0	5	6	2	2	1	3	2	1
$d^{\leq 5}$	0	5	4	2	1	1	3	2	0
$d^{\leq 6}$	0	5	3	2	1	1	3	2	0
$d^{\leq 7}$	0	5	3	2	1	1	3	2	0

Алгоритм Беллмана

Дерево кратчайших путей



Алгоритм Беллмана

Задание

Найти кратчайшее расстояние от вершины 1 до всех остальных вершин графа, заданного матрицей

0	1	—	—	3
—	0	3	3	8
—	—	0	1	—5
—	—	2	0	—
—	—	—	4	0

Остовное дерево связного графа

Пусть G связный граф, n вершин, m ребер.

Остовным деревом T графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Остовное дерево графа G должно содержать $n - 1$ ребер (ветви остова).

Таким образом, любое остовное дерево есть результат удаления ровно

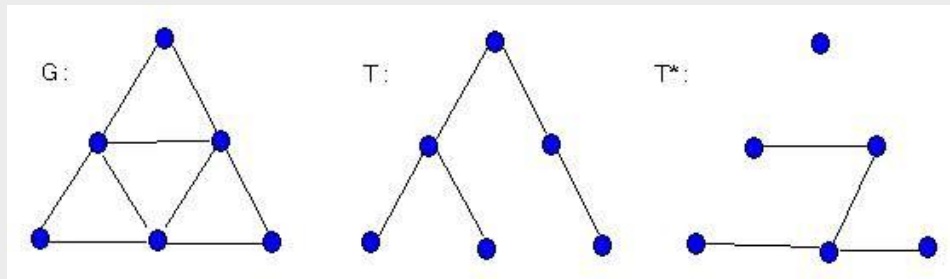
$$m - (n - 1) = m - n + 1 \text{ ребер (хорды остова).}$$

Кодеревом T^* остова T графа G называется подграф, содержащий все вершины графа G и те его ребра, которые не входят в T

Остовное дерево связного графа

Число $\nu = m - n + 1$ называется **цикломатическим числом** связного графа G .

Если граф имеет k компонент связности, то $\nu = m - n + k$.



Граф

Остов

Кодерево

Построение минимального остовного дерева

Каждому ребру e графа $G(V,E)$ поставлено в соответствие число $w(e)>0$ (вес ребра).

Вес дерева T – сумма весов ребер дерева.

Минимальное остовное дерево – дерево минимального веса.

Алгоритм Краскала

Шаг 1. Упорядочить ребра в порядке возрастания весов.

Шаг 2. Включить в дерево ребро с минимальным весом.

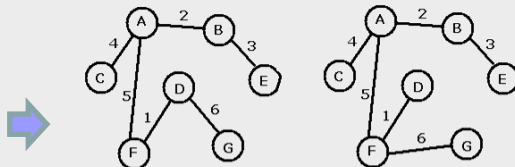
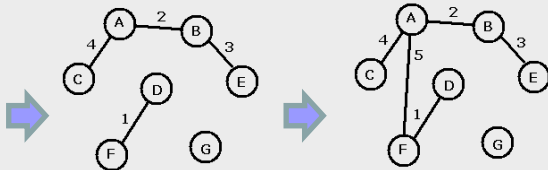
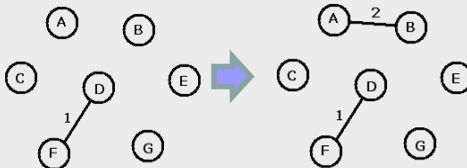
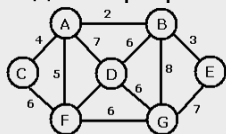
Шаг 3. Для остальных ребер: если ребро e_i не образует цикла с уже включенными ребрами, включить e_i в дерево, иначе пропустить ребро.

Закончить работу, когда будут выбраны $n - 1$ ребер.

Алгоритм Краскала

Пример построения минимального остовного дерева

Исходный граф



Два остовных дерева одинакового веса

Эйлеровы графы

Эйлеровой цепью называется замкнутая цепь, содержащая все ребра графа.

Маршрут в котором все ребра различны, называется **цепью**.

Граф, содержащий замкнутую эйлерову цепь, называется **эйлеровым**.

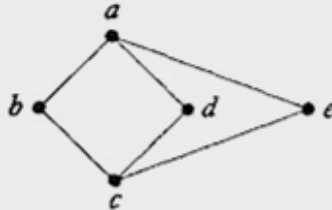
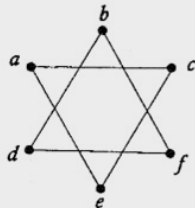
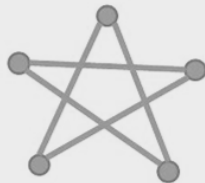
Граф называется **полуэйлеровым**, если содержит цепь, включающую каждое ребро.

- **Теорема.** Граф эйлеров $\Leftrightarrow$ степень каждой вершины четна.
Граф полуэйлеров, если в нем не более двух вершин нечетной степени.

Эйлеровы графы

Задание.

Определить, являются ли графы эйлеровыми

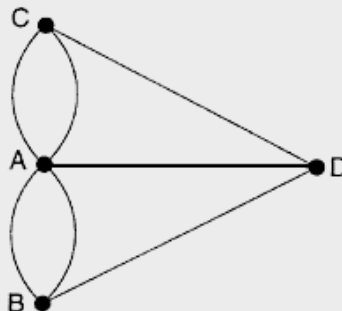
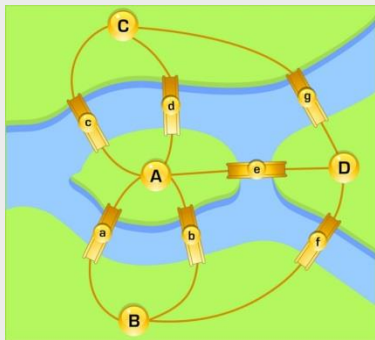


Эйлеровы графы

Задача. Кенигсбергские мосты

Как можно пройти по всем семи мостам Кёнигсберга, не проходя ни по одному из них дважды?

Впервые задача была решена в 1736 году Леонардом Эйлером



Гамильтоновы графы

Гамильтоновым циклом в графе называется цикл, содержащий все его вершины.

- **Простая цепь** – цепь, в которой нет одинаковых вершин, кроме, быть может, ее концов.
- **Цикл** – простая замкнутая цепь.

Граф называется **гамильтоновым**, если он содержит гамильтонов цикл.

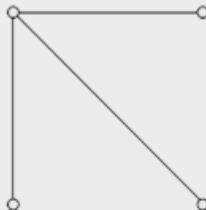
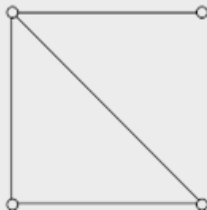
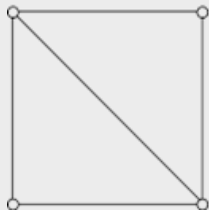
Граф называется **полугамильтоновым**, если он содержит простую цепь, включающую каждую вершину.

- Теорема Дирака. Если в простом графе с $n \geq 3$ вершинами степень каждой вершины $\geq n/2$, то граф гамильтонов.

Гамильтоновы графы

Задание.

Определить, являются ли графы гамильтоновыми.

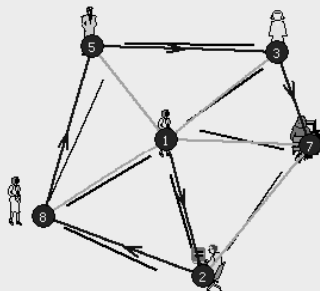


Гамильтоновы графы

Задача коммивояжера

Рассматривается n городов и матрица попарных расстояний между ними. Требуется найти такой порядок посещения городов, чтобы суммарное пройденное расстояние было минимальным, каждый город посещался ровно один раз и коммивояжер вернулся в тот город, с которого начал свой маршрут.

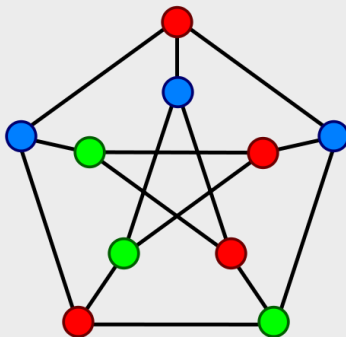
То есть во взвешенном полном графе требуется найти гамильтонов цикл минимального веса.



Раскраска графов

В приложениях теории графов нередко возникают задачи, для решения которых необходимо разбить множество всех вершин графа в объединение непустых непересекающихся подмножеств таким образом, чтобы вершины из одного и того же множества были попарно не смежными, а число таких подмножеств – минимально возможным.

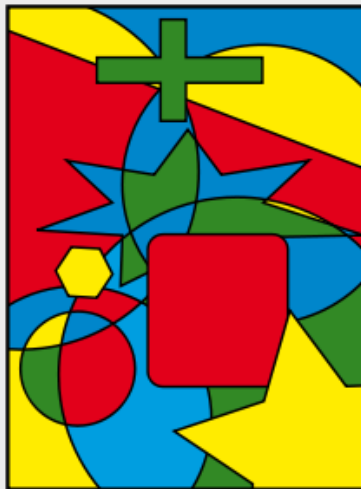
При решении таких задач можно представить себе, что мы раскрашиваем вершины графа в различные цвета, причем сделать это надо так, чтобы любые две смежные вершины были раскрашены в разные цвета, а число использованных цветов было минимально возможным.



Проблема четырех красок

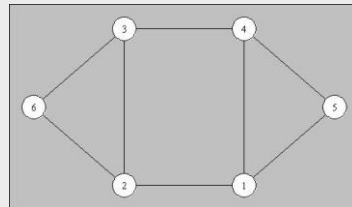
Проблема четырёх красок — математическая задача, предложенная Ф. Гутри (англ.) в 1852 году, сформулированная следующим образом:

«Выяснить, можно ли всякую расположенную на сфере карту раскрасить четырьмя красками так, чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета».

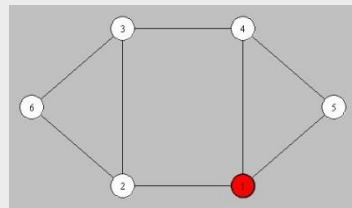


Алгоритм раскраски

Дан граф. Пронумеруем вершины в порядке убывания их степеней.



Выбираем вершину с наименьшим номером и окрашиваем ее в цвет 1.

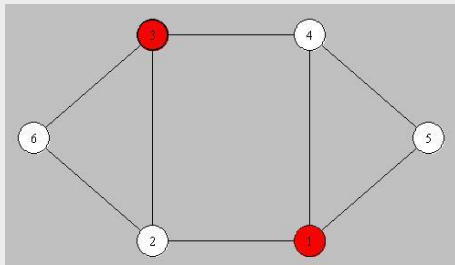


Алгоритм раскраски

Так как вершина №2 смежна с вершиной №1, мы не можем ее окрасить в этот же самый цвет.

Так как вершина №3 не смежна ни с одной вершиной, имеющей цвет №1, то окрасим ее в этот цвет.

Так как вершины №4, 5, 6 смежны с вершиной, имеющей цвет №1, мы не можем их окрасить в этот же самый цвет.

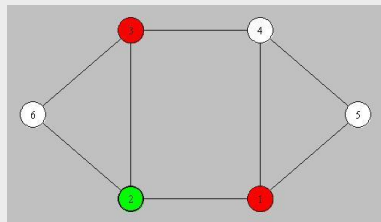
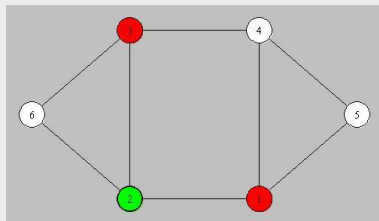


Алгоритм раскраски

Выбираем неокрашенную вершину с наименьшим номером – это вершина №2. Окрашиваем ее в цвет №2.

Так как вершина №4 не смежна ни с одной вершиной, имеющей цвет №2, то окрасим ее в этот цвет.

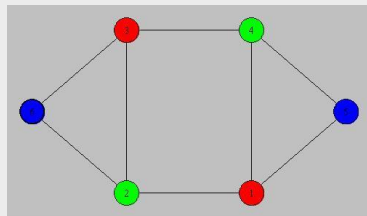
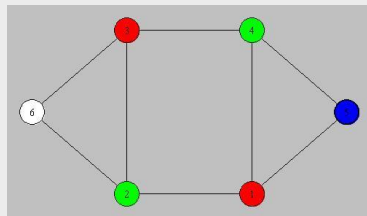
Так как вершины №5, 6 смежна с вершиной, имеющей цвет №2, мы не можем их окрасить в этот же самый цвет.



Алгоритм раскраски

Выбираем неокрашенную вершину с наименьшим номером – это вершина №5. Окрашиваем ее в цвет №3.

Так как вершина №6 не смежна ни с одной вершиной, имеющей цвет №3, то окрасим ее в этот цвет



Задачи, приводящие к графам

Задача 1

Лист бумаги Плюшкин (Н.В.Гоголь «Мертвые души») разрезает на три части. Некоторые из полученных листов он также разрезает на три части. Несколько новых листков он вновь разрезает на три более мелкие части и так далее. Сколько Плюшкин получает листиков бумаги, если разрезает k листов?

Задача 2

Утверждают, что в одной компании из пяти человек каждый знаком с двумя другими. Возможна ли такая компания?

Задача 3

Девять шахматистов проводят турнир в один круг (каждый из участников должен сыграть с каждым по одному разу). Покажите, что в любой момент найдутся двое, закончившие одинаковое число партий.



Спасибо за внимание!