МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
ЦЕНТР УПРАВЛЕНИЯ КОНТИНГЕНТОМ СТУДЕНТОВ

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для абитуриентов

Издательство
Томского политехнического университета
2015

УДК 51(075.4)
ББК 22.1.я727
М34

Авторы
О.Б. Алешина, Н.В. Долгушева, С.Г. Киреенко, Е.Н. Некряч,
Э.Н. Подскребко, В.И. Рожкова, С.В. Рожкова, В.М. Шахматов

М34 **Математика**: пособие для абитуриентов / О.Б. Алешина, Н.В. Долгушева, С.Г. Киреенко, Е.Н. Некряч, Э.Н. Подскребко, В.И. Рожкова, С.В. Рожкова, В.М. Шахматов; под ред. С.Г. Киреенко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2015. – 325 с.

УДК 51(075.4)
ББК 22.1.я727

Пособие ориентировано на самостоятельную подготовку абитуриентов.

Задачи и упражнения в пособии подобраны с учетом практики обучения в подразделениях Центра Управления контингентом студентов и ориентировано на подготовку к итоговой аттестации по математике в форме ЕГЭ, а также для вступительных испытаний в Томский политехнический университет.

Учебное пособие рассмотрено и рекомендовано
методическим советом ЦУКС

Математика позволяет единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный и количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, то есть спрогнозировать результаты наблюдений.

А.Н. Тихонов, Д.П. Костомаров

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие содержит основные понятия из школьного курса математики и состоит из 8 глав. В каждой главе приведены краткие теоретические сведения, решение типовых примеров и задач для самостоятельной работы.

Особенностями данного пособия являются: большое количество типовых примеров с подробными решениями; алгоритмизация методов решений конкретных классов задач; внимание к логически строгому обоснованию решения и его записи; разнообразие уровней сложности представленных задач.

Пособие может быть использовано как задачник для учащихся школ и подготовительных курсов к поступлению в технический вуз. При подготовке пособия был использован многолетний опыт преподавателей курсов алгебры и геометрии в лицее при ТПУ и на подготовительных курсах университета.

Глава 1
НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ДРОБИ. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

1.1. Натуральные числа

1.1.1. Понятие натурального числа

Понятие натурального числа относится к одному из первых математических понятий, связанных с потребностью давать количественную характеристику множеству предметов или характеристику их расположения, т. е. определять, какой предмет является первым, какой вторым и т. д.

Представляется множество натуральных чисел в виде

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Символы, обозначающие натуральные числа, называются цифрами.

Всякое натуральное число можно записать с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. При этом значение каждой цифры в записи числа зависит от занимаемой ею позиции в этой записи, поэтому такую запись числа называют позиционной. Для прочтения число разбивают на классы справа налево: класс единиц, класс тысяч, класс миллионов и т. д. Кроме того, каждый класс разбивается справа на 3 разряда: разряд единиц класса, десятков класса, сотен класса.

Например, число 91234567 состоит из трех классов: класс единиц (567); класс тысяч (234); класс миллионов (91). Единицей второго класса является тысяча, единицей третьего – миллион и т. д.

Читается число 91234567: девяносто один миллион двести тридцать четыре тысячи пятьсот шестьдесят семь.

Любое натуральное число в десятичной системе счисления записывается в виде:

$$m = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 ,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – цифры: 0, 1, 2, …, 9, причем a_0 – число единиц, a_1 – число десятков, a_2 – сотен и т. д., или в виде:

$$m = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} ,$$

здесь черта пишется для того, чтобы отличать запись числа от произведения.

1.1.2. Действия с натуральными числами

Во множестве натуральных чисел всегда выполнимы операции сложения, умножения и возведения в степень. Не всегда выполнимы операции вычитания, деления и извлечения корня.

Суммой двух натуральных чисел m и n называется натуральное число p, содержащее столько единиц, сколько их в m и в n вместе. Операция нахождения суммы называется сложением.

Записывается сложение следующим образом: $p = m + n$. Здесь p – сумма, а m и n – слагаемые.

Операция сложения обладает свойствами:

а) $m + n = n + m$ (переместительный закон);

б) $(m + n) + p = m + (n + p)$ (сочетательный закон).

Разностью двух натуральных чисел m и n называется натуральное число q такое, что $m = n + q$.

Записывается разность следующим образом: $q = m – n$, где числа m и n называются уменьшаемым и вычитаемым соответственно.

Вычитание является операцией обратной по отношению к операции сложения, потому что позволяет по известной сумме двух слагаемых и одному из них найти другое слагаемое.

Заметим, что операция вычитания не всегда выполнима во множестве натуральных чисел, например, $5 – 7 = –2 \notin \mathbb{N}$.

Произведением натурального числа m на натуральное число n называется натуральное число k, равное сумме n чисел, каждое из которых равно m, т. е.

$$k = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{n}.$$

Операция нахождения произведения называется умножением и записывается следующим образом: $k = m \cdot n$, здесь k – произведение, m и n – сомножители.

Умножение натуральных чисел обладает свойствами:

а) $m \cdot n = n \cdot m$ (переместительный закон);

б) $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$ (сочетательный закон).

Операции сложения и умножения чисел связаны распределительным законом:

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p.$$

Частным двух натуральных чисел m и n называют число a такое, что $m = n \cdot a$.

Операция нахождения частного двух чисел называется делением и обозначается следующим образом: $m : n = a$. При этом m называется делимым, n – делителем, a – частным.

Операция деления является обратной по отношению к операции умножения, так как позволяет по известным произведению и одному из сомножителей найти второй сомножитель.

Заметим, что операция деления не всегда выполнима во множестве натуральных чисел, например, $15 : 4 \notin \mathbb{N}$.

Если при делении натурального числа m на натуральное число n частное есть также число натуральное, то говорят, что число m делится нацело на число n, или m кратно n.

Например, число 24 кратно каждому из чисел множества $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

Все числа, кратные числу 2, называются четными, остальные – нечетными.

Если число m не делится нацело на число n, то выполняют деление с остатком.

Деление с остатком есть отыскание наибольшего натурального числа, которое при умножении на делитель дает число, не превышающее делимое.

В этом случае записывают

$$m = n \cdot p + r,$$

где r может принимать значения $1, 2, \ldots, n - 1$.

При этом m называют делимым, n – делителем, p – неполным частным, r – остатком.

Например,

$$14 = 4 \cdot 3 + 2.$$

С операцией умножения связана операция возведения в степень.

Степенью n числа m называется число $p = \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ раз}}$.

Обозначается степень следующим образом $p = m^n$. Здесь m – основание степени, n – показатель степени, p – степень, например,

$$2^{10} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{10 \text{ сомн.}} = 1024.$$

Поскольку операции умножения всегда выполняются во множестве натуральных чисел, то и операция возведения в степень также всегда выполнима в этом множестве.

Операция нахождения основания степени по известной степени и показателю степени называется извлечением корня.

Число m называется корнем n-й степени из числа p, если $p = m^n$.

Записывают операцию извлечения корня следующим образом:

$$m = \sqrt[n]{p}.$$

При этом число p называют подкоренным выражением, n – показателем корня.

Пример. $\sqrt[4]{16} = 2$, поскольку $2^4 = 16$.

Заметим, что извлечение корня не всегда выполнимо во множестве натуральных чисел. Например, $\sqrt{8} \notin \mathbb{N}$.

1.1.3. Признаки делимости

При решении многих задач требуется ответить на вопрос о делимости числа m на число n, не производя операции деления.

Для этого используют признаки делимости.

Опишем некоторые из них.

Делимость суммы. *Если каждое из двух чисел a и b делится нацело на число c, то их сумма (разность) делится нацело на число c.*

В самом деле, если a кратно c, то $a = c \cdot n$; если b кратно c, то $b = c \cdot m$. Тогда

$$a + b = cn + cm = c(n + m),$$

что означает кратность числа $a + b$ числу c.

Обратное не всегда верно. Например, числа 1 и 3 не кратны 2, а их сумма 1 + 3 = 4 кратна 2.

Делимость произведения. *Если хотя бы один из сомножителей a, b делится нацело на число c, то произведение ab делится нацело на число c.*

Пусть, например, a кратно c, то есть $a = c \cdot n$. Тогда $ab = (cn) \cdot b = c(nb)$, что означает кратность произведения ab числу c.

Обратное утверждение не всегда верно. Например, произведение $3 \cdot 4 = 12$ кратно 6, хотя ни один из этих сомножителей 3 и 4 не кратен 6.

Признак делимости на 2. *Натуральное число n делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2.*

Пусть число k делится на 2. Представим его в десятичной системе счисления в виде:

$$k = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 1$$

или в виде:

$$k = (a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \dots + a_1)10 + a_0.$$

Число $(a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \dots + a_1)10$ делится на 2. Так как число k делится на 2 по условию, тогда разность этих чисел $k - (a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \dots + a_1)10 = a_0$ также делится на 2 по признаку делимости разности.

Обратно. Если a_0 делится на 2, то $(a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_1)10 + a_0 = k$ также делится на 2 по признаку делимости суммы.

Аналогично можно доказать следующие признаки.

Признаки делимости на 3 и 9.

Натуральное число n делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится нацело на 3 (на 9).

Признак делимости на 5.

Натуральное число n делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра в его записи 0 или 5.

Признаки делимости на 10, 100, 1000.

Натуральное число n делится на 10 тогда и только тогда, когда последняя цифра в записи этого числа есть 0; на 100 – две последние цифры в записи этого числа – нули; на 1000 – три последние цифры – нули.

Признак делимости на 4.

Натуральное число n делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры – нули или образуют число, делящееся на 4.

Признак делимости на 8.

Натуральное число n делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры – нули или образуют число, делящееся на 8.

Признак делимости на 25.

Натуральное число n делится на 25 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 00, 25, 50, 75.

Свойство последовательности натуральных чисел

Из n последовательных натуральных чисел: $a, a + 1, a + 2, \ldots, a + (n - 1)$ одно и только одно делится на n.

Пусть a – кратно n, т. е. $a = nq$, тогда утверждение верно.

Пусть a не кратно n, тогда оно представлено в виде: $a = nq + r$, где $r \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$, тогда число $a + (n - r)$, находящееся среди данных чисел, делится нацело на n.

В самом деле,

$$a + (n - r) = nq + r + (n - r) = n(q + 1).$$

Пример. Произведение чисел $(n - 1)n(n + 1)$ делится на 3 и делится на 2 и, значит, делится на 6.

1.1.4. Простые и составные натуральные числа

Натуральное число называется простым, если оно имеет только два натуральных делителя: 1 и само себя.

Натуральное число, имеющее более двух натуральных делителей, называется составным.

Заметим, что число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Еще Евклид доказал, что множество простых чисел бесконечно.

Имеет место теорема.

Всякое натуральное число n может быть представлено единственным образом в виде произведения простых множителей:

$$n = p_1^{k1} \cdot p_2^{k2} \cdot \ldots \cdot p_n^{kn}.$$

При разложении натурального числа на простые множители используют признаки делимости. При этом применяется запись столбиком: делимое слева от вертикальной черты, делитель справа, частное под делимым.

Пример.

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Тогда $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Решение типовых примеров

Рассмотрим некоторые приёмы исследования делимости.

Представление числа в виде разложения по степеням десятичной системы счисления и использование достаточных признаков делимости суммы и произведения.

Пример 1. Докажите признак делимости числа на 3 и на 9.

Решение. Представим делимое m в виде:

$$m = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

Далее выполняем преобразования, выделяющие группу слагаемых, делящихся на 3 и на 9:

$$m = a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \ldots + a_2(10^2 - 1) + \\ + a_1(10 - 1) + \\ + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0) = (a_n \underbrace{999\ldots9}_{n} + \\ + a_{n-1} \underbrace{99\ldots9}_{(n-1)} + \ldots + a_2 99 + a_1 9) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 +$$

$$+a_1 + a_0) = 9(a_n \underbrace{111\ldots1}_{n} + a_{n-1}\underbrace{11\ldots1}_{(n-1)} + \ldots + a_2 11 + a_1 1) +$$
$$+(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0).$$

Очевидно, что первое слагаемое делится на 3 и на 9. Предположим, что второе слагаемое, равное сумме цифр числа m, делится на 3 и на 9, то есть $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 = 9p$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда число m делится на 3 и на 9, так как m кратно 9 и 3:

$$m = 9[(a_n \underbrace{111\ldots1}_{n} + a_{n-1}\underbrace{11\ldots1}_{(n-1)} + \ldots + a_2 11 + a_1 1) + p].$$

Обратно, пусть число m кратно 3 и 9, тогда $m = 9q$, $q \in \mathbb{N}$, тогда

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 = 9[q - (a_n \underbrace{111\ldots1}_{n} +$$
$$+ a_{n-1}\underbrace{11\ldots1}_{(n-1)} + \ldots + a_2 11 + a_1 1)].$$

Т. е. сумма цифр числа делится на 3 и на 9.

Пример 2. Докажите, что $10^{25} - 7$ делится на 3.

Решение. Попытаемся представить число $10^{25} - 7$ в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на 3. Например, так

$$10^{25} - 7 = (10^{25} - 10) + 3 = 10(10^{24} - 1) + 3 = 10 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{24} + 3.$$

Так как в составе первого слагаемого есть число 9, делящееся на 3, то оно делится на 3, второе слагаемое также делится на 3. Следовательно, сумма делится на 3.

Пример 3. Найдите достаточный признак делимости числа $\overline{abcd}$ на 13.

Решение. Представим число $\overline{abcd}$ в виде

$$a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d.$$

Постараемся разбить данное число на группы слагаемых, некоторые из которых кратны 13. Для этого выполним деление с остатком чисел 10^3 и 10^2 на 13. Получим

$$a(13 \cdot 76 + 12) + b(13 \cdot 7 + 9) + 10c + d = 13(76a + 7b) + (12a + 9b + 10c + d).$$

Первое слагаемое этой суммы кратно 13, значит для делимости данного числа на 13, достаточно потребовать, чтобы $12a + 9b + 10c + d$ было кратно 13. Это условие и является достаточным признаком делимости числа $\overline{abcd}$ на 13.

Применение метода остатков

Пример 4. Доказать, что число $(n-1)n(n+1)$ делится на 6.

Решение. Любое натуральное число можно представить в виде $n = 6p + r$, где r принимает одно из значений: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Рассмотрим все случаи представления числа n:

а) $r = 0$, $n = 6p$. Тогда n делится на 6 и, следовательно, все произведение $(n-1)n(n+1)$ делится на 6.

б) $r = 1$, $n = 6p + 1$. Тогда $(n-1)n(n+1) = 6p(6p+1)(6p+2)$, т. е. число кратно 6.

в) $r = 2$, $n = 6p + 2$. Тогда $(n-1)n(n+1) = (6p+1)(6p+2)(6p+3)$, т. е. число кратно 6.

г) $r = 3$, $n = 6p + 3$. Тогда
$(n-1)n(n+1) = (6p+2)(6p+3)(6p+4) = 12(3p+1)(2p+1)(3p+2)$, и число кратно 6.

д) $r = 4$, $n = 6p + 4$. Тогда
$(n-1)n(n+1) = (6p+3)(6p+4)(6p+5) = 6(2p+1)(3p+2)(6p+5)$, и число кратно 6.

е) $r = 5$, $n = 6p + 5$. Тогда $(n-1)n(n+1) = (6p+4)(6p+5)(6p+6)$, и число кратно 6.

Применение метода математической индукции

Пример 5. Доказать, что число $10^n + 18n - 1$ делится на 27.

Решение.

а) Убеждаемся, что при $n = 1$ получаем число, кратное 27.

б) Предполагаем, что при $n = k$ число $10^k + 18k - 1$ кратно 27.

С учетом предположения попытаемся доказать кратность данного числа 27 при $n = k + 1$. Получаем

$$10^{k+1} + 18(k+1) - 1 = 10^k \cdot 10 + 18k + 18 - 1 = (10^k + 18k - 1) + 9 \cdot 10^k + 18.$$

Число в скобках кратно 27 по условию. Анализируем число $9 \cdot 10^k + 18 = 9(10^k + 2) = 9 \cdot (1\underbrace{0 \ldots 0}_{k} + 2) = 9 \cdot 1\underbrace{00 \ldots 0}_{(k-1)}2$. Число $1\underbrace{00 \ldots 0}_{(k-1)}2$ кратно 3, поэтому произведение $9 \cdot 1\underbrace{00 \ldots 0}_{(k-1)}2$ кратно 27. Кратность данного числа 27 доказана для любых n.

Использование свойства делимости последовательно расположенных чисел

Пример 6. Докажите, что квадрат нечетного числа, уменьшенный на 1, делится на 8.

Решение.

Любое нечетное число имеет вид $2n + 1$. Найдем

$$(2n + 1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n(n + 1).$$

Поскольку $n(n + 1)$ – произведение двух последовательно расположенных чисел, то оно делится на 2, т. е. $n(n + 1) = 2k$. Но тогда число $4n(n + 1)$ кратно 8, т. е. делится на 8 нацело.

Признаки делимости применяются при отыскании чисел, обладающих заданными признаками делимости.

Пример 7. Найдите число $\overline{135XУ}$, делящееся на 45.

Решение. Заметим, что допустимыми значениями X и У являются числа: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Воспользуемся признаком делимости на 5, в соответствии с которым имеем: У = 0 или У = 5, т. е. искомыми числами могут быть $\overline{135X0}$ или $\overline{135X5}$. Воспользуемся признаком делимости на 9, по которому сумма цифр в записи каждого из этих чисел должна делиться на 9.

Для числа $\overline{135X0}$ это означает, что число 1 + 3 + 5 + X = 9 + X кратно 9. Поскольку первое слагаемое делится на 9, то второе также должно делиться на 9, и с учетом его допустимых значений получаем X = 0 или X = 9. Таким образом, имеем два числа: 13500 и 13590.

Для числа $\overline{135X5}$ требование кратности 9 приводит к условию:

$$1 + 3 + 5 + X + 5 = 14 + X \text{ – кратно 9.}$$

С учетом допустимых значений X, это возможно только в случае X = 4. Таким образом, найдено еще одно число 13545.

Ответ: 13500; 13590; 13545.

Пример 8. Шестизначное число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести с 1-го места на последнее, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найдите это число.

Решение. Используя позиционную запись числа, приходим к уравнению

$$3(\overline{1abcde}) = \overline{abcde1}.$$

В обеих частях уравнения выделим число $\overline{abcde}$ следующим образом:

$$3(100000 + \overline{\text{abcde}}) = 10 \cdot \overline{\text{abcde}} + 1.$$

Обозначив $\overline{abcde} = x$, решаем уравнение $3(100000 + x) = 10x + 1$. Получаем $x = 42857$.

Тогда ответом является число 142857.

1.1.5. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Пусть даны натуральные числа: n_1, n_2, ..., n_k. Если каждое из этих чисел делится на натуральное число a, то его называют общим делителем этих чисел.

Наибольший из общих делителей чисел n_1, n_2, ..., n_k *называется их наибольшим делителем и обозначается* НОД(n_1, n_2, …, n_k).

Если числа не имеют общих делителей кроме единицы, то они называются взаимно простыми.

Например, числа 7 и 5 – взаимно простые.

Схема отыскания НОД:

1) разложить каждое из чисел на простые множители;

2) составить произведение из всех общих простых множителей.

Пример 1. Найдите НОД чисел 190 и 360.

1) Находим разложения чисел на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 190 & 2 \\ 95 & 5 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Следовательно, $190 = 2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 1$, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1$.

2) Составляем произведение из всех общих простых множителей, получаем НОД(190, 360) = $2 \cdot 5 = 10$.

Наибольший общий делитель чисел n и m можно находить, используя алгоритм Евклида. Пусть для определенности $n > m$, тогда при делении n на m с остатком имеем

$$n = mk + r, \text{ где } 0 < r < m.$$

По свойству делимости суммы все общие делители чисел n и m являются и делителями числа r. Тогда и все общие делители чисел n и m являются общими делителями чисел m и r, в том числе и их наибольшие общие делители, т. е. НОД(n, m) = НОД(m, r), поскольку $r < m$, то находить НОД(m, r) проще, чем НОД(n, m). Если НОД(m, r) не найден, то процесс продолжается далее, т. е. выполняется деление чисел m и r с остатком и т. д.

$m = rk_1 + r_1$, $0 < r_1 < r$;

$r = r_1k_2 + r_2$, $0 < r_2 < r_1$;

$r_1 = r_2k_2 + r_3$, $0 < r_3 < r_2$;

… … … … … …

$r_{n-2} = r_{n-1}k_{n-1} + r_n$, $0 < r_n < r_{n-1}$;

$r_{n-1} = r_nk_n$.

Алгоритм заканчивается при получении нулевого остатка. Тогда НОД(n, m) = НОД(r_{n-1}, r_n) = r_n.

Пример 2. Сократите дробь $\frac{1547}{2873}$.

Решение. Для сокращения дроби потребуется найти НОД(1547, 2873). Применим алгоритм Евклида.

$2873 = 1547\cdot 1 + 1326$;

$1547 = 1326\cdot 1 + 221$;

$1326 = 221\cdot 6 + 0$.

Имеем НОД(2873, 1547) = НОД(1547, 1326) = НОД(1326, 221) = 221.

Следовательно, дробь сократима на 221, т. е.

$$\frac{1547}{2873} = \frac{7}{13}.$$

Если число b кратно числам $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то есть делится на каждое из них нацело, то оно называется общим кратным этих чисел.

Наименьшим общим кратным чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ называется наименьшее число, кратное всем из указанных чисел, обозначается: НОК($m_1, m_2, \ldots, m_k$).

Схема отыскания НОК:

1) разложить каждое из чисел на простые множители;

2) составить произведение из всех простых множителей разложения одного числа и недостающих множителей из разложений других чисел;

3) вычислить произведение.

Пример 3. Найдите НОК чисел 360 и 190.

1) Имеем $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1$, $190 = 2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 1$.

2) НОК(360, 190) $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19 = 6840$.

Для любых натуральных чисел n и m имеет место равенство

$$\text{НОК}(n, m) \cdot \text{НОД}(n, m) = n \cdot m.$$

Пример 4. Докажите, что дробь $\frac{389}{413}$ несократима.

Решение. Применим алгоритм Евклида:

$413 = 389 \cdot 1 + 24$;

$389 = 24 \cdot 16 + 5$;

$24 = 5 \cdot 4 + 4$;

$5 = 4 \cdot 1 + 1$;

$4 = 4 \cdot 1 + 0$.

Получаем:

НОД(413, 389) = НОД(389, 24) = НОД(24, 5) = НОД(5, 4) = НОД(4, 1) = 1.

Значит, дробь несократима.

Пример 5. Найдите все натуральные двухзначные числа, при которых дробь $\frac{3n+5}{5n+2}$ сократима.

Решение. Для отыскания НОД($3n + 5$, $5n + 2$) используем алгоритм Евклида:

$5n + 2 = (3n + 5)\cdot 1 + (2n - 3)$;

$3n + 5 = (2n - 3)\cdot 1 + (n + 8)$;

$2n - 3 = (n + 8)\cdot 2 - 19$.

Процесс завершится, если будет выполнено равенство $n + 8 = 19k + 0$, т. е. для $n = 19k - 8$.

Искомые числа получаются при значениях $k = 1, 2, 3, 4, 5$ и имеют соответственно вид: 11, 30, 49, 68, 87.

Пример 6. Найдите все пары натуральных чисел n и m, для которых

$$\begin{cases} m + n = 20, \\ \text{НОД}(m, n) = 5. \end{cases}$$

Решение. Поскольку НОД(m, n) = 5, то числа m и n кратны 5, т. е. $m = 5k$, $k \in \mathbb{N}$ и $n = 5t$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда получаем уравнения $5k + 5t = 20$ или $k + t = 4$. Подбором находим все решения уравнения:

$$\begin{cases} k = 1, \\ t = 3; \end{cases} \begin{cases} k = 2, \\ t = 2; \end{cases} \begin{cases} k = 3, \\ t = 1. \end{cases}$$

Далее получаем соответствующие пары чисел m и n:

$$\begin{cases} m = 5, \\ n = 15; \end{cases} \begin{cases} m = 10, \\ n = 10; \end{cases} \begin{cases} m = 15, \\ n = 5. \end{cases}$$

Проверка показывает, что $\begin{cases} m = 10, \\ n = 10 \end{cases}$ не удовлетворяет условию задачи, поэтому окончательно имеем две пары чисел: (5, 15) и (15, 5).

Пример 7. Найдите все пары натуральных чисел m и n таких, что

$$\begin{cases} m \cdot n = 20, \\ \text{НОК}(m, n) = 10. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся связью между НОД(m, n) и НОК(m, n), получим

$$\text{НОД}(m, n) = \frac{20}{10} = 2.$$

Отсюда следует, что каждое из чисел m и n кратно 2, т. е. $m = 2t$, $n = 2p$, где $p = 1, 2, 3, \ldots$.

Подставляем m и n в первое уравнение системы, находим, что $pt = 5$. Всего в двух случаях произведение двух натуральных чисел равно 5:

$$\begin{cases} p = 1, \\ t = 5 \end{cases} \text{и} \begin{cases} p = 5, \\ t = 1. \end{cases}$$

Соответствующие им значения m и n определяют пары искомых чисел:

$$\begin{cases} m = 2, \\ n = 10 \end{cases} \text{и} \begin{cases} m = 10, \\ n = 2. \end{cases}$$

Пример 8. Докажите, что квадрат простого числа $p \geq 5$ при делении на 12 дает в остатке 1.

Решение. Любое натуральное число при делении на 6 может дать в остатке числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, поэтому всякое натуральное число представлено в одном из следующих видов: $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, $6k + 5$.

Поскольку речь идет о квадрате простого числа, то исключим из рассмотрения составные числа: $6k$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$. Тогда простое число $p \geq 5$ может быть следующего вида: $6k + 1$ или $6k + 5$.

Находим квадрат каждого из них:

$$(6k + 1)^2 = 36k^2 + 12k + 1 = 12k(3k + 1) + 1;$$
$$(6k + 5)^2 = 36k^2 + 60k + 1 = 12k(3k + 5) + 1.$$

Откуда следует, что каждое из этих чисел при делении на 12 дает в остатке 1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите НОД(216, 210). Ответ: 6.

2. Найдите НОК(108, 162) Ответ: 324.

3. Докажите, что для любого простого числа $n \geq 5$ $n^2 - 1$ делится на 24.

4. Известно, что произведение двух натуральных чисел $n \cdot m$ равно 2430, а НОК(n, m) = 270. Найдите НОД(n, m). Ответ: 9.

5. Нечетное число a кратно 3. Найдите остаток от деления этого числа на 6. Ответ: 3.

6. Какие из данных чисел при любом n делятся на 2:

а) $n(n + 1)$; б) $n^2 + 3n$; в) $n(3n + 1)$; г) $n(2n^2 + 1)$. Ответ: а); б); в).

7. Найдите наибольшее число, на которое делится любое произведение трех последовательных натуральных чисел, среднее из которых – квадрат. Ответ: 60.

8. Найдите натуральные числа, для которых число $n^3 - 9n$ делится на 162. Ответ: $n = 3k,\ k \in \mathbb{N}$.

9. Являются ли числа 11377 и 18087 простыми? (Указание. Использовать алгоритм Евклида). Ответ: да.

10. Сумма двух чисел равна 463, а разность их квадратов есть простое число. Найти эти числа. Ответ: 231; 232.

11. Какое из следующих чисел при любом натуральном n делится на 3: а) $n(2n - 1)(2n + 1)$; б) $n(2n^2 + 1)$; в) $n^2 + 3n$; г) $n^3 + 11n$? Ответ: а); б); г).

12. Докажите, что число $4 \cdot 10^{400} + 1$ является числом составным.

13. Докажите, что число $2^{33} + 1$ составное.

14. На какую цифру оканчивается число 4^{502}? Ответ: 6.

15. Четным или нечетным является число $5^{501} + 4^{502} + 3^{500}$? Ответ: четное.

16. Докажите, что число $2^{2^n} + 1$ для $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 4$) оканчивается цифрой 7.

17. На какую цифру оканчивается сумма всех двузначных чисел? Ответ: 5.

18. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $x + xy = 6$. Ответ: (2; 2).

19. Решить в целых положительных числах уравнение $x^2 - xy + 2x - 3y = 11$. (Указание. Решить уравнение относительно y). Ответ: $x = 5$, $y = 3$.

20. Решить в целых положительных числах уравнение $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$. (Указание. Разложить левую часть уравнения на множители и проанализировать кратность числа 28 полученным множителям). Ответ: $x = 8$, $y = 5$.

21. Решить в целых положительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} 8\tilde{o} + 5\acute{o} + z = 100, \\ x + y + z = 20. \end{cases}$$

Ответ: (4, 13, 3); (8, 6, 6).

22. Найдите пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 5, а наименьшее общее кратное равно 105. Ответ: (15, 35) или (5, 105).

23. Найдите наибольшее трехзначное число, которое при делении на 11 дает в остатке 2, а при делении на 5 имеет остаток равный 3. Ответ: 948.

24. Решите в целых числах уравнение $\frac{1}{\mathrm{x}} + \frac{1}{\mathrm{y}} + \frac{1}{\mathrm{xy}} = 1$.

Ответ: (2, 3); (3, 2).

25. При каких значениях параметра a существуют четыре натуральных числа x, y, u, b, удовлетворяющих соответственно уравнениям

$$xy(40 + xy) = (150 - a)(a - 90),$$
$$a(8u^2 + 18b^2 - a) = (4u^2 - 9b^2)^2?$$

Ответ: 100.

1.2. Обыкновенные и десятичные дроби

1.2.1. Определение дроби

Обыкновенной (арифметической) дробью называется число вида $\frac{m}{n}$, *где* m *и* n *– натуральные числа.*

Число m называется числителем дроби, число n – знаменателем дроби.

Знаменатель дроби указывает, на сколько долей разделена единица, а числитель – на то, сколько таких долей взято.

1.2.2. Основные свойства дроби

Две дроби $\frac{m_1}{n_1}$ *и* $\frac{m_2}{n_2}$ *называются равными тогда и только тогда, когда* $m_1n_2 = n_1m_2$, *т. е.* $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \Leftrightarrow m_1n_2 = n_1m_2$.

Основное свойство дроби заключается в том, что значение дроби не изменяется, если её числитель и знаменатель умножить на одно и то же натуральное число.

В самом деле, $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k} \Leftrightarrow m(n \cdot k) = n(m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$.

При прочтении этого равенства справа налево получаем утверждение: *значение дроби не изменяется, если её числитель и знаменатель разделить на одно и то же натуральное число.* Эту операцию называют сокращением дроби.

Если две дроби имеют одинаковые знаменатели: $\frac{m_1}{n}$ *и* $\frac{m_2}{n}$*, то* $\frac{m_1}{n} > \frac{m_2}{n}$ *тогда и только тогда, когда* $m_1 > m_2$.

Если же две дроби имеют одинаковые числители: $\frac{m}{n_1}$ *и* $\frac{m}{n_2}$*, то* $\frac{m}{n_1} > \frac{m}{n_2}$ *тогда и только тогда, когда* $n_1 < n_2$.

Основное свойство дроби позволяет заменить две дроби с разными знаменателями равными им, но с одинаковыми знаменателями. Пусть даны две дроби $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$, тогда

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2} \text{ и } \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_2 \cdot n_1}{n_2 \cdot n_1}.$$

Полученные равенства указывают на то, что знаменатели полученных дробей кратны числам n_1 и n_2, но таких чисел бесчисленное множество. Очевидно, что для упрощения выкладок надо взять наименьшее число, кратное n_1 и n_2, т. е. НОК(n_1, n_2).

Правило приведения двух дробей $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ к одинаковому знаменателю:

1) найти НОК(n_1, n_2) – наименьший общий знаменатель дробей;

2) разделив НОК(n_1, n_2) на n_1, найти дополнительный множитель для первой дроби и, разделив НОК(n_1, n_2) на n_2, найти дополнительный множитель для второй дроби;

3) числитель и знаменатель каждой дроби умножить на дополнительный множитель.

После чего будут получены дроби равные исходным, но с наименьшими одинаковыми знаменателями.

Пример 1. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби: $\frac{3}{8}$ и $\frac{13}{14}$.

1) Так как $8 = 2^3$, а $14 = 2 \cdot 7$, то НОК(8, 14) $= 2^3 \cdot 7 = 56$.

2) Дополнительный множитель для первой дроби $\frac{3}{8}$ находим, разделив наименьший общий знаменатель на её знаменатель, т. е. $56 : 8 = 7$. Аналогично, для второй дроби дополнительный множитель равен $56 : 14 = 4$.

3) Числитель и знаменатель каждой дроби умножаем на соответствующие дополнительные множители, получаем:

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{21}{56}; \frac{13 \cdot 4}{14 \cdot 4} = \frac{52}{56}.$$

Пример 2. Сравнить дроби $\frac{14}{15}$ и $\frac{13}{14}$.

1) *НОК(14, 15)* = 210.

2) Дополнительные множители:

для первой дроби – 210 : 15 = 14,

для второй дроби – 210 : 14 = 15.

3) Умножаем дроби на соответствующие дополнительные множители, получаем:

$$\frac{14 \cdot 14}{15 \cdot 14} = \frac{196}{210}; \frac{13 \cdot 15}{14 \cdot 15} = \frac{195}{210}.$$

Сравниваем: $\frac{196}{210} > \frac{195}{210}$, следовательно, $\frac{14}{15} > \frac{13}{14}$.

1.2.3. Арифметические операции над обыкновенными дробями

Сложение и вычитание двух дробей определяются по правилу:

$$\frac{m_1}{n_1} \pm \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2} \pm \frac{m_2 \cdot n_1}{n_2 \cdot n_1} = \frac{m_1 \cdot n_2 \pm m_2 \cdot n_1}{n_2 \cdot n_1}.$$

Очевидно, что операции сложения и вычитания требуют приведения дробей к наименьшему общему знаменателю.

Примеры:

а) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$;

б) $\frac{7^{(5}}{24} + \frac{13^{(3}}{40} = \frac{35 + 39}{120} = \frac{74}{120} = \frac{37}{60}$;

в) $\frac{13^{(4}}{30} - \frac{7^{(5}}{24} = \frac{52-35}{120} = \frac{17}{120}$.

Заметим, что операция вычитания не всегда выполнима во множестве положительных дробей.

Умножение и деление двух дробей выполняется по правилам:

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}; \frac{m_1}{n_1} : \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2}.$$

Примеры:

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 4} = \frac{15}{32}; \frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 3} = \frac{5}{6}.$$

1.2.4. Правильные и неправильные дроби

Дробь $\frac{m}{n}$ *называется:*

а) правильной, если $m < n$*;*

б) неправильной, если $m > n$*;*

в) ни правильной, ни неправильной, если $m = n$*.*

Пусть $\frac{m}{n}$ *– неправильная дробь, где* m *не кратно* n*. Тогда можно выполнить операцию деления* m *на* n *с остатком, т. е. представить* m *в виде* $m = np + r$*, где* r *– остаток, причем* $r < n$*.*

Запишем дробь $\frac{m}{n}$ в виде

$$\frac{m}{n} = \frac{np + r}{n} = \frac{np}{n} + \frac{r}{n} = p + \frac{r}{n}.$$

Таким образом, неправильная дробь оказывается представленной в виде суммы натурального числа p и правильной дроби $\frac{r}{n}$. Проведенная операция называется *выделением целой части из неправильной дроби*. При этом число p называется целой частью неправильной дроби. Обычно число $p + \frac{r}{n}$ записывают, опуская знак « + », т. е. в виде $p\frac{r}{n}$ и называют его *смешанным числом*.

Пример. Выделите целую и дробную части числа $\frac{26}{3}$.

Имеем $\frac{26}{3} = \frac{8 \cdot 3 + 2}{3} = 8 + \frac{2}{3}$.

Обратно, от смешанного числа можно прийти к неправильной дроби. Например,

$$8\frac{2}{3} = 8 + \frac{2}{3} = \left(\frac{8}{1} + \frac{2}{3}\right) = \frac{8 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{26}{3}.$$

Примеры выполнения действий над смешанными числами:

а) ***Сложение и вычитание***.

В некоторых случаях удобно неправильную дробь представить в виде суммы ее целой и дробной части, затем выполнить указанные действия:

$$2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{7} = \left(2 + \frac{1}{3}\right) + \left(3 + \frac{2}{7}\right) = 5 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{7}\right) = 5 + \left(\frac{7 + 3 \cdot 2}{21}\right) =$$
$$= 5 + \frac{13}{21} = 5\frac{13}{21}$$

В другом случае лучше прийти к неправильным дробям:

$$3\frac{2}{7} - 2\frac{1}{3} = \left(\frac{3}{1} + \frac{2}{7}\right) - \left(\frac{2}{1} + \frac{1}{3}\right) = \frac{23^{(3}}{7} - \frac{7^{(7}}{3} = \frac{69 - 49}{21} = \frac{20}{21}.$$

б) ***Умножение и деление*** смешанных чисел, как правило, выполняют, обратив эти числа в неправильные дроби.

Например,

$$2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{2}{7} = \frac{7}{3}\cdot\frac{23}{7} = \frac{7\cdot 23}{3\cdot 7} = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}.$$

$$3\frac{2}{7} : 2\frac{1}{3} = \frac{23}{7} : \frac{7}{3} = \frac{23\cdot 3}{7\cdot 7} = \frac{69}{49} = 1\frac{20}{49}.$$

1.2.5. Десятичные дроби

Дробь $\frac{m}{n}$ *называется десятичной, если ее знаменатель является натуральной степенью числа 10.*

Любая десятичная дробь представима в виде:

$$a_m\cdot 10^m + a_{m-1}\cdot 10^{m-1} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} + \ldots + \frac{b_n}{10^n},$$

где $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ *– цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.*

Если $a_m = a_{m-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$, *то дробь называется правильной десятичной дробью. Если же не все* $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ *и не все* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *равны 0, то дробь называется смешанной.*

Записывают смешанную десятичную дробь в виде:

$$c, b_1b_2\ldots b_n, \text{ где } c = a_m\cdot 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0.$$

Две десятичные дроби $p = c, b_1b_2\ldots b_n$ *и* $q = c', b_1'b_2'\ldots b_n'$ *равны тогда и только тогда, когда* $c = c'$, $b_1 = b_1'$, $b_2 = b_2'$, …, $b_n = b_n'$. *Из двух положительных дробей* $(p > 0, q > 0)$ $p > q$, *если* $c > c'$, *если же* $c = c'$, *то* $b_1 > b_1'$, *если же* $b_1 = b_1'$, *то* $b_2 > b_2'$, …, *если же* $c = c'$, $b_1 = b_1'$, …, $b_k = b_k'$, *то* $b_{k+1} > b_{k+1}'$, …

Поскольку имеет место равенство

$$c, b_1b_2\ldots b_n = c + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} + \ldots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{0}{10^{n+1}} + \frac{0}{10^{n+2}} + \ldots + \frac{0}{10^k} =$$

$$= c, b_1b_2\ldots b_n\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ нулей}},$$

то к десятичной дроби справа можно приписать любое количество нулей, в результате получится десятичная дробь, равная данной.

Замечание. Если всякую десятичную дробь можно обратить в обыкновенную, то обратное не всегда возможно.

Знаменатель десятичной дроби представляет степень числа 10, состоящего из простых множителей 2 и 5, поэтому в *конечную десятичную* дробь можно обратить только такую несократимую дробь, знаменатель которой состоит из произведения двоек и пятерок.

Например,

$$\frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = \frac{1\cdot 2^3}{5^3\cdot 2^3} = \frac{8}{1000} = 0{,}008.$$

Обыкновенная дробь $\frac{5}{14}$ не представима в виде конечной десятичной дроби, поскольку $\frac{5}{14} = \frac{5}{2 \cdot 7}$ и в разложении её знаменателя на множители содержится число 7. Не существует такого числа, домножив на которое числитель и знаменатель дроби, получим знаменатель, представленный степенью числа 10.

1.2.6. Арифметические операции над десятичными дробями

Сложение и вычитание.

Пример. Зная правило сложения обыкновенных дробей, найти сумму двух десятичных дробей: 1,43 + 2,529.

Перейдем к обыкновенным дробям:

$$\left(1 + \frac{43}{100}\right) + \left(2 + \frac{529}{1000}\right) = \left(1 + \frac{40 + 3}{100}\right) + \left(2 + \frac{500 + 20 + 9}{1000}\right) =$$
$$= \left(1 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100} + + \frac{0}{1000}\right) + \left(2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{9}{1000}\right) =$$
$$= 3 + \frac{9}{10} + \frac{5}{100} + \frac{9}{1000} = 3{,}959.$$

Пример иллюстрирует правило сложения десятичных дробей.

Записать дроби одну под другой так, чтобы одинаковые разряды были записаны друг под другом, запятая под запятой и сложить их как натуральные числа:

$$\begin{array}{r} 1{,}430 \\ +\ 2{,}529 \\ \hline 3{,}959 \end{array}$$

Аналогично выполняется вычитание десятичных дробей.

Пример. Найти разность десятичных дробей 11,5347 – 2,38. Записываем

$$\begin{array}{r} 11{,}5347 \\ -\quad 2{,}3800 \\ \hline 9{,}1547 \end{array}$$

Умножение.

Поскольку десятичные дроби представляют частный случай обыкновенных дробей, то понять правило умножения десятичных дробей можно, рассмотрев пример.

Найдем произведение:

$$2{,}5 \cdot 1{,}14 = 2\frac{5}{10} \cdot 1\frac{14}{100} = \frac{25}{10} \cdot \frac{114}{100} = \frac{2850}{1000} = 2 + \frac{850}{1000} = 2{,}850 = 2{,}85.$$

Пример иллюстрирует правило умножения десятичных дробей.

Чтобы умножить десятичные дроби, следует перемножить их, не обращая внимания на запятые (как натуральные числа), затем в полученном натуральном числе отделить справа запятой столько цифр, сколько их в обоих множителях вместе.

Деление

Рассмотрим сначала пример, иллюстрирующий правило деления десятичной дроби на целое число.

Пример. Разделить 18,2 на 13.

Обратимся, как и в предыдущих случаях, к известному правилу деления обыкновенных дробей. Для этого обратим десятичную дробь 18,2 в обыкновенную, получим

$$18{,}2 = 18\frac{2}{10} = \frac{182}{10}.$$

Далее выполним деление обыкновенных дробей

$$\frac{182}{10} : 13 = \frac{182}{10} : \frac{13}{1} = \frac{182 \cdot 1}{10 \cdot 13} = \frac{14}{10} = 1{,}4.$$

Правило деления десятичной дроби на целое число.

Чтобы разделить десятичную дробь на целое число, надо выполнить деление так же, как и деление натуральных чисел, ставя запятую после окончания деления целой части.

Пример 1. Найдите частное от деления числа 18,2 на 13.

$$\begin{array}{r|l}
-\,18{,}2 & 13 \\ \cline{2-2}
\underline{13} & 1{,}4 \\
-\,52 & \\
\underline{52} & \\
0 &
\end{array}$$

Пример 2. Найдите частное от деления числа 0,0182 на 13.

$$\begin{array}{r|l}
-\,0{,}0182 & 13 \\ \cline{2-2}
\underline{0} & 0{,}0014 \\
-\,0\,0 & \\
\underline{0} & \\
-\,01 & \\
\underline{0} & \\
-\,18 & \\
\underline{13} & \\
-\,52 & \\
\underline{52} & \\
0 &
\end{array}$$

Пример 3. Разделите десятичную дробь 2,576 на десятичную дробь 0,23.

Поскольку делитель в данном примере не является целым числом, то умножим делимое и делитель на 100, чтобы делитель стал целым числом, тогда

$$2{,}576 : 0{,}23 = 257{,}6 : 23$$

Далее выполним деление уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\,257{,}6 & 23 \\ \cline{2-2}
\underline{23} & 11{,}2 \\
-\,27 & \\
\underline{23} & \\
-\,46 & \\
\underline{46} & \\
0 &
\end{array}$$

Замечание 1. Деление во множестве десятичных дробей не всегда выполнимо.

Пример 4. Разделите 1 на 0,3.

Сначала умножим делимое и делитель на 10, для того чтобы делитель стал целым числом, затем начнем выполнять деление:

$$1 : 0{,}3 = 10 : 3$$

$$\begin{array}{r|l}
-\,10 & 3 \\ \cline{2-2}
\underline{9} & 3{,}33\ldots \\
-\,10 & \\
\underline{9} & \\
-\,10 & \\
\underline{9} & \\
10 & \\
\ldots &
\end{array}$$

Замечаем, что процесс деления становится бесконечным. В таком случае для выполнения действия деления следует перейти к обыкновенным дробям:

$$1 : 0{,}3 = 1 : \frac{3}{10} = \frac{1 \cdot 10}{3} = \frac{9 + 1}{3} = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

Замечание 2. Если требуется вычислить значение выражения, содержащего как обыкновенные, так и десятичные дроби, то можно обратить десятичные дроби в обыкновенные и действовать по правилу деления обыкновенных дробей. В других случаях, наоборот, рационально обратить обыкновенные дроби и смешанные числа в десятичные дроби и применить правило деления десятичных дробей.

1.2.7. Бесконечные периодические десятичные дроби

Любая обыкновенная дробь допускает представление в виде бесконечной десятичной дроби. Так дробь $\frac{1}{4}$ может быть записана не только в виде конечной десятичной дроби

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100} = 0{,}25\ ,$$

но и в виде бесконечной десятичной дроби, если вместо отсутствующих десятичных знаков записать нули, т. е.

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 0{,}25000\ \ldots.$$

Возьмем другую дробь $\frac{5}{14}$, которая не допускает представления в виде конечной десятичной дроби, и будем выполнять деление, анализируя частное

$$\begin{array}{l|l}
\ \ 5 & 14 \\
\hline
-50 & 0{,}3\,\underbrace{571428}\,\underbrace{571428}\ldots \\
\ \ 42 & \\
\hline
\ \ -80 & \\
\ \ \ \ \ 70 & \\
\hline
\ \ \ -100 & \\
\ \ \ \ \ \ \ 98 & \\
\hline
\ \ \ \ \ -20 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 14 & \\
\hline
\ \ \ \ \ \ -60 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ 56 & \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ -40 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 28 & \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ -120 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 112 & \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ \ -80 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 70 & \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ \ -100 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 98 & \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ -20 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 14 & \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ -60 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 56 & \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ -40 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 28 & \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ -120 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 112 & \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 80 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ldots &
\end{array}$$

Отмечаем, что в частном возникают периодически повторяющиеся группы цифр.

Бесконечная десятичная дробь, в записи которой несколько цифр повторяются в неизменном порядке, называется периодической.

Совокупность повторяющихся цифр называется периодом.

Для краткости период записывают один раз, заключая его в круглые скобки. Например,

$$\frac{5}{14} = 0{,}3(571428).$$

Десятичная дробь называется чисто периодической, если период начинается сразу после запятой.

Например, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0,(3)$.

Если же между запятой и периодом есть десятичные знаки, то дробь называется смешанной периодической.

Например, 0,3(571428).

Таким образом, оказывается верным утверждение.

Любая обыкновенная дробь представима в виде бесконечной десятичной дроби.

Часто встречается и обратная операция – обращение периодической дроби в обыкновенную.

Идею решения такой задачи рассмотрим на примере.

Пример 1. Обратите чисто периодическую дробь 1,(17) в обыкновенную.

Решение.

а) Пусть $x = 1{,}(17)$.

б) Умножим x на 100, получим

$$100x = 117{,}(17).$$

в) Составим и решим уравнение

$$100x - x = 116;$$

$$99x = 116;$$

$$x = \frac{116}{99};$$

$$x = 1\frac{17}{99}.$$

Пример 2. Обратите смешанную периодическую дробь 0,11(7) в обыкновенную.

Решение.

а) Пусть $x = 0{,}11(7)$.

б) Преобразуем дробь в чисто периодическую. Получим

$$100x = 11{,}(7).$$

в) Пусть $y = 11{,}(7)$.

г) Умножим дробь на 10, получим $10y = 117{,}(7)$.

д) Составим и решим уравнение

$$10y - y = 116;$$
$$9y = 116;$$
$$y = \frac{116}{9}.$$

Далее находим x:

$$100x = \frac{116}{9};$$
$$x = \frac{116}{900} = \frac{29}{225}.$$

1.3. Целые числа

1.3.1. Понятие целого числа

Для геометрической интерпретации чисел используют координатную прямую, которая представляет прямую с выбранной на ней точкой 0 (начало отсчета), единичным отрезком, определяющим масштаб, и положительным направлением, указанным стрелкой (рис. 1.1).

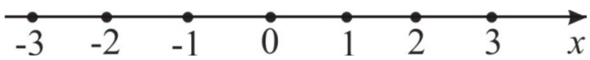


Рис. 1.1

Числа, расположенные справа от точки 0, называются положительными и записываются 1, 2, 3, …

Числа, расположенные слева от точки 0, называются отрицательными и записываются –1, –2, –3, …

Число, отделяющее положительные числа от отрицательных, называется нулём и обозначается 0. Нуль не считается ни положительным, ни отрицательным.

Число, симметричное числу a относительно точки 0, называется числом противоположным числу a и записывается –a.

Число нуль противоположно самому себе.

Целыми называются числа натуральные, противоположные им и число нуль.

Обозначают множество целых чисел символом $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Чтобы определить операции над целыми числами, вводится понятие модуля числа.

Модулем числа a называется число

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a > 0; \\ 0, \text{если } a = 0; \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например, $|3| = 3, |-3| = 3.$

Как следует из определения модуля, модуль положительного числа равен самому числу, а модуль отрицательного числа есть число ему противоположное, модуль 0 равен 0. С геометрической точки зрения модуль числа a есть расстояние от точки, соответствующей числу a на числовой прямой, до точки 0 (начало отсчета).

1.3.2. Правила действия с целыми числами

Чтобы определить операции над целыми числами, надо указать модуль и знак числа, полученного в результате выполнения операции.

Сложение

Чтобы сложить два отрицательных числа, надо сложить их модули и перед полученным числом поставить минус.

Например, $(-2) + (-3) = -(2 + 3) = -5$.

Чтобы сложить два числа с разными знаками надо из большего модуля вычесть меньший и перед полученным числом поставить знак того числа, модуль которого больше.

Например, $(-32) + 20 = -(32-20) = -12$;
$36 + (-34) = +(36 - 34) = 2$.

Заметим, что сумма двух противоположных чисел равна 0.

Вычитание

Чтобы вычесть из одного числа другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например, $-21 - 35 = -21 + (-35) = -56$;
$-9 - (-15) = -9 + (15) = 6$.

Умножение

Чтобы перемножить два числа, надо перемножить их модули, результат будет положительным числом, если знаки сомножителей одинаковы, и отрицательным числом, если знаки сомножителей разные.

Например, $(-9) \cdot (-5) = 45$; $(-8) \cdot 4 = -32$.

Заметим, что умножение числа a на (-1) дает число, противоположное числу a, т. е. $(-a)$.

Деление

Чтобы разделить два числа надо разделить их модули, результат будет положительным, если знаки чисел одинаковы, и отрицательным, если знаки чисел различны.

Например, $(-10) : (-2) = 5$; $(-7) : 3 = -2\frac{1}{3}$.

На множестве целых чисел всегда определена операция вычитания.

1.4. Множество рациональных чисел и их свойства

1.4.1. Понятие множества рациональных чисел

Множеством рациональных чисел называется множество всех целых и дробных чисел (положительных и отрицательных).

Обозначается множество рациональных чисел символом $\mathbb{Q}$. Очевидно, что имеет место цепочка включений числовых множеств

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

На множестве рациональных чисел определены операции сложения, вычитания, умножения и деления (исключая деление на нуль).

При этом операция сложения обладает свойствами:

1) $a + b = b + a$;
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3) $a + 0 = 0 + a = a$;
4) $a + (–a) = 0$, где $–a$ – число, противоположное числу a.

Операция умножения рациональных чисел обладает свойствами:

5) $ab = ba$;
6) $a\ (bc) = (ab)\ c$;
7) $a \cdot 1 = a$;
8) $a\,\frac{1}{a} = 1$ ($a \neq 0$, $\frac{1}{a}$ – число, обратное a).

Операции умножения и сложения связаны распределительным свойством

9) $a(b + c) = ab + ac$.

1.4.2. Схема решения примеров на вычисление

1) Если числовое выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действие возведение в степень (действие третьей ступени), затем умножение и деление (действия второй ступени), затем сложение и вычитание (действия первой ступени). Действия одной ступени выполняются в указанном в условии порядке.

2) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняются действия в скобках с учетом порядка, указанного выше.

3) Если в выражении содержатся бесконечные периодические дроби, то их обращают в обычные дроби.

4) При вычислении дробного выражения вычисляются числитель и знаменатель дроби, затем первый результат делят на второй.

Пример 1. Вычислите

$$\frac{45}{22}\left(0{,}4(3)\ +\ 0{,}6(2)\cdot 2\frac{1}{2}-\frac{1/2+1/3}{0{,}5(8)}:\frac{50}{53}\right).$$

Решение. Сначала будем выполнять действия в скобке. Начнем с обращения периодических дробей в обыкновенные дроби.

1) Пусть $x = 0{,}4(3)$. Преобразуем её в чистую периодическую дробь, получим $10x = 4{,}(3)$.

2) Пусть $y = 4{,}(3)$. Найдем величину $10y = 43{,}(3)$.

3) Составим и решим уравнение:

$$10y - y = 43{,}(3) - 4{,}(3) = 39$$

$$9y = 39$$

$$y = \frac{39}{9} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}.$$

Тогда $x = \frac{13}{30}$.

4) Аналогично находим, что $0{,}6(2) = \frac{28}{45}$ и $0{,}5(8) = \frac{53}{90}$.

5) Соблюдая порядок действий, выполняем операцию умножения:

$$0{,}6(2)\cdot 2\frac{1}{2} = \frac{28}{45}\cdot\frac{5}{2} = \frac{28\cdot 5}{45\cdot 2} = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}.$$

6) Чтобы вычислить дробное выражение, находим сначала числитель дроби:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}.$$

7) Далее числитель дроби делим на знаменатель, получаем

$$\frac{5}{6}:\frac{53}{90} = \frac{5\cdot 90}{6\cdot 53} = \frac{75}{53} = 1\frac{22}{53}.$$

8) Найденное частное делим на $\frac{50}{53}$, получаем

$$\frac{75}{53}:\frac{50}{53} = \frac{75\cdot 53}{53\cdot 50} = \frac{75}{50} = \frac{3}{2}.$$

9) Выполняем в указанном порядке действия сложения и вычитания:

$$\frac{13^{(3}}{30}+\frac{14^{(10}}{9}-\frac{3^{(45}}{2} = \frac{39+140-135}{90} = \frac{44}{90} = \frac{22}{45}.$$

10) Последним действием является умножение:

$$\frac{45}{22}\cdot\frac{22}{45} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 2. Вычислите

$$26:\left(\frac{3:(0{,}2-0{,}1)}{2{,}5\cdot(0{,}8+1{,}2)}+\frac{(34{,}6-33{,}81)\cdot 4}{6{,}84:(28{,}57-25{,}15)}\right)+\frac{2}{3}:\frac{4}{21}.$$

Решение.

1) $0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1$; 2) $3 : 0{,}1 = 30$;
3) $0{,}8 + 1{,}2 = 2$; 4) $2{,}5 \cdot 2 = 5$; 5) $30 : 5 = 6$;
6) $34{,}6 - 33{,}81 = 0{,}25$; 7) $0{,}25 \cdot 4 = 1$;
8) $28{,}57 - 25{,}15 = 3{,}42$; 9) $6{,}84 : 3{,}42 = 2$;
10) $1 : 2 = 0{,}5$; 11) $6 + 0{,}5 = 6{,}5$; 12) $26 : 6{,}5 = 4$;
13) $\frac{2}{3} : \frac{4}{21} = \frac{2 \cdot 21}{3 \cdot 4} = \frac{7}{2} = 3{,}5$;
14) $4 + 3{,}5 = 7{,}5$.
Ответ: 7,5.

1.5. Пропорции и проценты

1.5.1. Понятие пропорции

Пропорцией называется равенство двух отношений.

Записывают пропорцию так: $a : b = c : d$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $bd \neq 0$.

Принято a и d называть крайними членами пропорции, b и c – средними членами пропорции, $\frac{a}{b}$ – первое отношение, $\frac{c}{d}$ – второе отношение, a и c – предыдущие члены пропорции, b и d – последующие члены.

Пропорция называется верной, если значение её левой части равно значению её правой части.

1.5.2. Основное свойство пропорции

Пропорция верна тогда и только тогда, когда произведение её крайних членов равно произведению её средних членов.

В самом деле, если $\frac{a}{b} = k$ и $\frac{c}{d} = k$, то $a = bk$ и $c = dk$. Тогда произведение средних членов $bc = bdk$ и произведение крайних членов $ad = bkd$, т. е. $ad = bc$.

Обратно, пусть $ad = bc$, где ни одно из чисел не равно 0. Разделим обе части равенства на bd, получим $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

1.5.3. Производные пропорции

Производными называются пропорции, образованные из членов исходной пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Отметим некоторые из них.

Поскольку $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, то разделив последнее равенство на ab, получаем $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, что означает возможность в пропорции переставлять крайние члены, а разделив равенство $ad = bc$ на cd, получаем $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, что говорит о возможности перестановки её средних членов.

Из исходной пропорции при условии $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ можно получить пропорцию

$$\frac{\alpha a + \beta b}{\gamma a + \delta b} = \frac{\alpha c + \beta d}{\gamma c + \delta d},$$

где $\alpha a + \beta b \neq 0, \gamma a + \delta b \neq 0, \alpha c + \beta d \neq 0, \gamma c + \delta d \neq 0$, для этого достаточно самостоятельно проверить основное свойство пропорции:

$$(\alpha a + \beta b)(\gamma c + \delta d) = (\gamma a + \delta b)(\alpha c + \beta d).$$

При разных значениях чисел α, β, γ, δ получаем различные виды производных пропорций, например:

при $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 1$: $\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$;

при $\alpha = \delta = 1, \beta = -1, \gamma = 0$: $\frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d}$;

при $\alpha = \beta = 1, \gamma = 1, \delta = -1$: $\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$.

Отметим ещё свойство равных отношений:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Если обозначить общее значение отношений k, то получим

$$\frac{a_1}{b_1} = k, \frac{a_2}{b_2} = k, \dots, \frac{a_n}{b_n} = k.$$

Откуда $a_1 = b_1k$, $a_2 = b_2k$, …, $a_n = b_nk$. Складывая равенства почленно, находим

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = k(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

или

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Пример 1. Даны два сплава, состоящих из двух металлов. В первый сплав металлы входят в отношении 2 : 1, во второй те же металлы входят в отношении 3 : 2. Сколько частей каждого сплава надо взять, чтобы получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 11 : 7?

Решение. Пусть x – количество первого металла, а y – второго металла, содержащихся в новом сплаве. Тогда в новом сплаве содержится $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y$ – первого металла и $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y$ – второго металла.

По условию имеем:

$$\frac{2/3x + 3/5y}{1/3x + 2/5y} = \frac{11}{7} \Leftrightarrow \frac{10x + 9y}{5x + 6y} = \frac{11}{7} \Leftrightarrow 70x + 63y = 55x + 66y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 15x = 3y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: следует взять одну часть 1-го сплава и 5 частей 2-го сплава.

Пример 2. Найдите площадь сектора с радиусом R, опирающегося на дугу 150°.

Решение. Площади круга πR^2 соответствует угол 360°, а площади сектора – угол 150°, тогда получаем пропорцию

$$\frac{\pi R^2}{S\text{ сек.}} = \frac{2\pi}{5/6\pi}.$$

Откуда находим,

$$S\text{ сек.} = \frac{\pi R^2 \cdot 5\pi/6}{2\pi} = \frac{5\pi R^2}{12}.$$

Ответ: $\frac{5\pi R^2}{12}$.

1.5.4. Проценты

Процентом называется одна сотая часть числа.

Задачи на проценты решаются с помощью пропорций. При этом некоторая величина A берется за 100 %, а ее часть B за b %:

A соответствует 100 %,

B соответствует b %.

Составляется пропорция

$$\frac{100}{b} = \frac{A}{B},$$

из которой по двум известным величинам находят третью величину.

Пример 1. Заработная плата в 20 000 рублей сначала была уменьшена на 10 %, затем увеличена на 10 %. Уменьшилась или увеличилась заработная плата?

Решение. Первое изменение заработной платы:

старая заработная плата: 20 000 соответствует 100 %;

новая заработная плата: x соответствует 90 %.

Составляем пропорцию

$$\frac{20\,000}{x} = \frac{100}{90}.$$

Находим, что

$$x = \frac{20\,000 \cdot 90}{100} = 18\,000 \text{ (руб.)}.$$

Второе изменение заработной платы:

имеющаяся заработная плата: 18 000 – 100 %;

новая заработная плата: y – 110 %.

Составляем пропорцию

$$\frac{18\,000}{y} = \frac{100}{110}.$$

Находим

$$y = \frac{18\,000 \cdot 110}{100} = 19\,800 \text{ (руб.)}.$$

Ответ: заработная плата уменьшилась на 200 рублей.

Заметим, что решение можно записать коротко, учитывая, что для нахождения 1 % от числа A достаточно уменьшить его на 0,01. Поэтому заработная плата после понижения на 10 % равна

$$20\,000 \cdot 0{,}9 = 18\,000 \text{ (руб.)},$$

а после повышения на 10 % равна

$$18\,000 \cdot 1{,}1 = 19\,800 \text{ (руб.)}.$$

Пример 2. Вклад в банке, состоящий из серебряных монет на сумму 200 000 руб., за один год принёс вкладчику прибыль в 160 000 руб. Найдите процент прибыли.

Решение.

Вклад: 200 000 – 100 %;

прибыль: 160 000 – x %.

Составляем пропорцию и находим x:

$$\frac{200\,000}{160\,000} = \frac{100}{x},$$

$$x = \frac{160\,000 \cdot 100}{200\,000} = 80 \text{ \%}.$$

Пример 3. По вкладу под 3 % годовых по окончанию срока вклада (1 год) вкладчик получил прибыль 12 000 руб. Какова была величина первоначального вклада?

Решение.

Величина первоначального вклада: x – 100 %;

прибыль: 12 000 – 3 %.

Составляем пропорцию и решаем уравнение

$$\frac{x}{12\,000} = \frac{100}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{12\,000 \cdot 100}{3} = 400\,000 \text{ (руб.)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите

а) $0{,}25 + \frac{1}{12} : (\frac{1}{3} \cdot 1{,}25 - \frac{9}{16})$. Ответ: $-\frac{9}{28}$.

б) $(3{,}618 : 1{,}8 - 2{,}1) \cdot \frac{5}{9} : 0{,}02$. Ответ: –2,5.

в) $\left(2\frac{5}{72} \cdot 2 - 5\frac{4}{45} + 0{,}2\right) : 0{,}75 + 0{,}25$. Ответ: –0,75.

г) $\frac{\left(2\frac{1}{10} : 2 - 1{,}8\right) \cdot 0{,}4 + 0{,}3}{3{,}15 : 22{,}5}$. Ответ: 0.

д) $\dfrac{4{,}5:\left(47{,}375-\left(26\frac{1}{3}-18\cdot 0{,}75\right)\cdot 24:0{,}88\right)}{17{,}81:1{,}37-23\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}}$. Ответ: 4.

е) $\left(\dfrac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\dfrac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}+1{,}364:0{,}124$. Ответ: 12.

ж) $\dfrac{\left(0{,}(6)+\frac{1}{3}\right):0{,}25}{0{,}12(3):0{,}0925}+12{,}5\cdot 0{,}64$. Ответ: 11.

з) $3\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{49}-\left(2,(4)\cdot 2\frac{5}{11}\right):\left(-\frac{42}{5}\right)$. Ответ: 1.

и) $\left(\left(8\frac{7}{55}-6\frac{17}{110}\right)\cdot 1\frac{3}{217}\right):\left((0{,}4-0{,}15):\frac{1}{4}\right)+\left(\left(3\frac{5}{8}+1{,}375\right):0{,}5\right):\left(2\frac{3}{4}:\left(3\frac{7}{20}-\right.\right.$

$\left.\left.-2{,}8\right)\right)$. Ответ: 4.

2. Найдите число, 20 % от которого составляет значение дроби $\frac{(0{,}536)^2-(0{,}464)^2}{(3{,}6)^2-7{,}2\cdot 2{,}4+(2{,}4)^2}$. Ответ: 0,25.

3. Найдите число, составляющее 1000 % от величины дроби $\frac{(6{,}62)^2+5{,}4\cdot 3{,}38+1{,}22\cdot 3{,}38}{(20{,}1)^2-13^2+33{,}1\cdot 12{,}9}$. Ответ: 1.

4. Найдите 72 % от числа $\dfrac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230{,}04+46{,}75}{0{,}01}$. Ответ: 7200.

5. Найдите число, 26 % которого составляют $\dfrac{9\frac{1}{6}-1\frac{9}{14}-\frac{1}{30}\cdot 3\frac{1}{3}+\frac{1}{63}}{\frac{19}{96}+\left(8\frac{4}{15}-6\frac{7}{24}\right):0{,}8-1\frac{1}{2}:2{,}25}$. Ответ: $14\frac{2}{27}$.

6. Сколько свежих грибов надо взять, чтобы получить 1 кг сушеных, если при сушке они теряют 80 % своей массы? Ответ: 5 кг.

7. Число A увеличилось в 10 раз. На сколько процентов увеличилось число A? Ответ: 900 %.

8. Сколько меда, содержащего 16 % воды, будет получено в результате переработки 14 кг нектара, содержащего 70 % воды? Ответ: 5 кг.

9. Сколько воды надо добавить к 735 г 16 %-го раствора кислоты, чтобы получить 10 % раствор кислоты? Ответ: 441 г.

10. Найдите x из пропорции:

а) $\dfrac{3{,}6}{14-15\frac{1}{8}:2{,}2}=\dfrac{x}{1{,}5+2\frac{2}{3}+3{,}75}$. Ответ: 4.

б) $\dfrac{0{,}75-\frac{1}{6}}{0{,}3+\frac{8}{15}}=\dfrac{1{,}12}{x}$. Ответ: 1,6.

в) $\dfrac{\left(2+\frac{7}{30}-\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0{,}04}=\dfrac{3x-2}{3}$. Ответ: 19.

11. Два металла содержатся в каждом из двух составов. В первом металле находятся в отношении 3 : 5, а во втором – 1 : 3. Сколько частей первоначальных составов надо взять для того, чтобы получить новый сплав с отношением металлов 3 : 7? Ответ: 2 : 3.

12. Сплав, состоящий из меди и серебра, весит 330 г. Масса меди в этом сплаве составляет $\frac{5}{28}$ массы серебра. Сколько граммов серебра в сплаве? Ответ: 280 г.

13. Смешали 30%-й и 50%-й раствор серной кислоты, получили 45%-й раствор. Найти отношение масс первоначально взятых растворов. Ответ: 1 : 3.

14. При каком наименьшем целом значении x значение функции $y = \frac{2x^2 + 9x-2}{2x-1}$ является целым числом? Ответ: –1.

15. Решите в целых числах уравнение $x^2 - y^2 = 23$.

Ответ: (–12, –11); (–11, –12); (11, 12); (12, 11).

16. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.

Ответ: (1, 2); (5, 2); (–1, –2); (–5, –2).

17. При каких целых значениях параметра a уравнение

$$\cos ax = 1 + 7\cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$$

имеет решения? Ответ: $4n$, $n \in \mathbb{Z}$.

18. При каких целых отрицательных n функция $f(x) = = \cos 7x \sin\frac{25x}{n^2}$ является периодической с периодом Т = 7π?

Ответ: $n \in \{-1; -5\}$.

19. При каких целых значениях параметра $a \neq 0$ корни уравнения $ax^2 - (1 - za)x - 2 = 0$ рациональны? Ответ: $a = \frac{(2n+1)^2-1}{4}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$

20. Сколько решений в целых числах имеет система уравнений

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{17-y}}(\sqrt{x} + 1) \cdot \log_3(y + 1) + \log_{17-y} 5 = 0, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + xy + y - 8}\,? \end{cases}.$$

Ответ: 5.

21. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$ имеет только целочисленные корни? Ответ: $a \in \left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}\right\}$.

1.6. Иррациональные числа. Множество действительных чисел

1.6.1. Существование иррациональных чисел

Множество рациональных чисел не исчерпывает множество всех чисел. Так среди рациональных чисел нет числа, квадрат которого равен 2. Если имея числовую прямую $0x$ (рис. 2), построить на единичном отрезке $0E$ квадрат со стороной, равной единице, и вычислить по теореме Пифагора длину отрезка $0B = \sqrt{(0E)^2 + (BE)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, после чего провести через точку B дугу окружности с центром в точке 0 и радиусом, равным $0B = \sqrt{2}$, то на оси $0x$ отложится отрезок $0M = 0B = \sqrt{2}$ и, следовательно, точка M будет изображением числа $\sqrt{2}$.

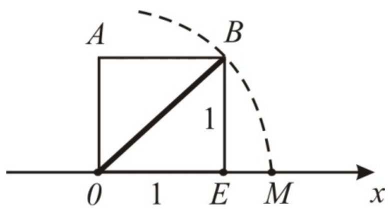


Рис. 1.2

Покажем, что $\sqrt{2}$ не является числом рациональным. Применим метод доказательства от противного.

Предположим, что $\sqrt{2}$ – рациональное число. Как всякое рациональное число его можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, здесь m и n – взаимно простые числа. Тогда

$$(\frac{m}{n})^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Откуда следует, что m^2 – четное число. Но четным числом может быть квадрат только четного числа, поэтому $m = 2p$. Подставим $m = 2p$ в равенство $m^2 = 2n^2$, получим $4p^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 2p^2 = n^2$. Последнее равенство означает, что n^2 – четное число, значит и n – четное число, т. е. $n = 2k$.

Подставляя значения m и n в числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$, находим

$$\frac{m}{n} = \frac{2p}{2k}.$$

Но тогда дробь $\frac{m}{n}$ – сократимая, что противоречит предположению о её несократимости.

Противоречие получено вследствие неверного предположения о рациональности числа $\sqrt{2}$.

Примерами иррациональных чисел являются: $\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$, π (отношение длины дуги окружности к её диаметру) и т. д.

Если отказаться от записи числа с девяткой в периоде, то всякое рациональное число однозначно представимо бесконечной периодической десятичной дробью, обратно, всякая бесконечная периодическая дробь может быть однозначно представлена в виде обыкновенной дроби.

Любое иррациональное число представляется бесконечной непериодической десятичной дробью. Для иррациональных чисел определены сравнение и арифметические операции. Обозначается множество иррациональных чисел буквой $\mathbb{J}$.

1.6.2. Действительные числа

Множеством действительных чисел называется множество, состоящее из рациональных и иррациональных чисел.

Обозначается множество действительных чисел символом $\mathbb{R}$ и представляет объединение двух множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{J}$.

Изображаются действительные числа точками числовой прямой. Между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой существует взаимно-однозначное соответствие.

1.6.3. Модуль действительного числа, его свойства

Модулем действительного числа x называется действительное число, определяемое равенством

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

Модуль действительного числа геометрически представляет расстояние от точки, изображающей число на числовой прямой, до точки 0 (начало отчета) (рис. 1.3).

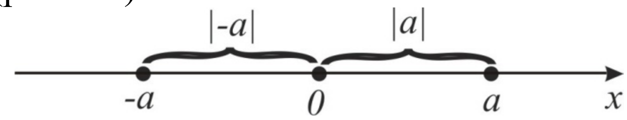


Рис. 1.3

Примеры: $|10| = 10$, $|-10| = 10$, $|0| = 0$.

Перечислим свойства модуля действительного числа:

1) $|x| \geq 0$;

2) $|-x| = |x|$;

3) $|x| \geq x$;

4) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

5) $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$;

6) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

7) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;

8) $|x|^2 = x^2$;

9) $\begin{cases} |x| = a, \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a, \\ x = -a; \end{array} \right.$

10) $\begin{cases} |x| \leq a, \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;

11) $\begin{cases} |x| \geq a, \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a, \\ x \leq -a. \end{array} \right.$

1.7. Степень числа и арифметический корень

1.7.1. Степень с натуральным показателем

Степенью действительного числа а с натуральным показателем n называется число a^n, определяемое равенством

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n},$$

где а – основание степени, n – показатель степени. ·

Например,

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8;\ 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

Свойства степени:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ (a \neq 0, m > n)$;

3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;

4) $(a \cdot b)^n = a^n b^n$;

5) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Примеры:

а) $\frac{15^3 \cdot 21^2}{35^2 \cdot 3^4} = \frac{(3 \cdot 5)^3 \cdot (3 \cdot 7)^2}{(5 \cdot 7)^2 \cdot 3^4} = \frac{3^3 \cdot 5^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 3^4} = \frac{3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 3^4} = 3 \cdot 5 = 15.$

б) $\frac{(-3)(-5)^{15} - (-5)^{14}}{5^{13} \cdot 70} = \frac{(-3)(-5)^{15} - 5^{14}}{5^{13} \cdot 70} = \frac{3 \cdot 5^{15} - 5^{14}}{5^{13} \cdot 70} = \frac{5^{14}(3 \cdot 5 - 1)}{5^{13} \cdot 70} = \frac{5^{14} \cdot 14}{5^{14} \cdot 14} = 1.$

1.7.2. Степень с целым показателем

Если а ≠ 0, то $a^0 = 1$.

Если а ≠ 0 и n – натуральное число, то степенью с отрицательным целым показателем называется число $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Степенью a^m действительного числа a с целым показателем m называется число

$$a^m = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m}, \text{если } m \in \mathbb{N}; \\ 1, \text{если } m = 0, a \neq 0; \\ \dfrac{1}{a^{-m}}, \text{если } m < 0, a \neq 0. \end{cases}$$

Свойства степени с целым показателем аналогичны свойствам степени с натуральным показателем.

Примеры.

а) $(1{,}8)^{-3} : (5{,}4)^{-3} \cdot 6^{-3} = (\frac{1{,}8 \cdot 6}{5{,}4})^{-3} = \frac{1}{8}$;

б) $\frac{3^6 \cdot 18^{-3}}{2^{-4}} = \frac{3^6 \cdot 2^4}{18^3} = \frac{3^6 \cdot 2^4}{(3^2 \cdot 2)^3} = \frac{3^6 \cdot 2^4}{3^6 \cdot 2^3} = 2.$

1.7.3. Корень n-й степени

Корнем n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) из действительного числа a называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a, т. е. $b^n = a$.

Например, числа 2 и –2 являются корнями квадратными из числа 4, т. к. $2^2 = 4$ и $(-2)^2 = 4$. Число –3 является корнем кубическим из числа –27, т. к. $(-3)^3 = -27$.

1.7.4. Арифметический корень

Арифметическим корнем n-й степени ($n \geq 2$) из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, n-я степень которого равна a.

Обозначают арифметический корень символом $b = \sqrt[n]{a}$, где a называется подкоренным выражением, n – показателем корня.

Из определения арифметического корня n-й степени из числа следует:

1) $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл только при $a \geq 0$;

2) значение корня $\sqrt[n]{a}$ всегда неотрицательно, т. е. $\sqrt[n]{a} \geq 0$;

3) равенство $(\sqrt[n]{a})^n = a$ верно при любом $a \geq 0$;

4) число $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Примеры: $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[5]{0} = 0$.

1.7.5. Свойства арифметического корня

1. Основное свойство арифметического корня.

Величина арифметического корня не изменится, если показатель корня и показатель подкоренного выражения умножить на одно и то же натуральное число, т. е.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}.$$

В самом деле,

$$\sqrt[n]{a^m} = b\ \big(b \ge 0\big) \Leftrightarrow b^n = a^m \Leftrightarrow (b^n)^k = (a^m)^k \Leftrightarrow b^{n\cdot k} = a^{m\cdot k}.$$

Откуда следует, что $b = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$ или, что то же самое, $\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$.

2. $\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; 3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$; 5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

6. $(\sqrt[n]{a})^n = a$; 7. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.

Здесь в свойствах 1–2; 4–6 $a \ge 0$, $b \ge 0$; в свойстве 3 $a \ge 0$, $b > 0$.

Если $a < 0$ и $n \in \mathbb{N}$, n – нечетное, то корень n-й степени из числа a также обозначается символом $\sqrt[n]{a}$.

Например, $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[101]{-1} = -1$.

Заметим, что корни нечетной степени извлекаются из любых чисел, причем однозначно.

1.7.6. Решение типовых примеров

Преобразование выражений, содержащих корни, основано на применении свойств, имеющих место только для арифметических корней, используя которые, надо строго следить за неотрицательностью подкоренного выражения и результата, полученного после извлечения корня.

Пример 1. Внесите множитель под знак корня в выражении $a\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{a^3}}$, где $a > 0$.

Решение. В соответствии с определением арифметического корня с учетом ($a > 0$) имеем $a = \sqrt[3]{a^3}$.

Тогда

$$a\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{a^3}} = \sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{a^3}}.$$

Используем свойство арифметических корней 2°, получаем

$$a \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{a^3}} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{a^3}} = \sqrt[3]{a^3(1 + \frac{1}{a^3})} = \sqrt[3]{a^3 + 1}.$$

Пример 2. Внесите множитель под знак корня в выражении $a\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}$, $a \neq 0$.

Решение.

1) $\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}$ – арифметический корень.

2) Пусть $a > 0$, тогда по определению арифметического корня $a = \sqrt{a^2}$ и, следовательно, по свойству 2° имеем:

$$a\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} = \sqrt{a^2}\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} = \sqrt{a^2(1 + \frac{1}{a^2})} = \sqrt{a^2 + 1}.$$

3) Пусть $a < 0$, тогда $-a > 0$ и по определению арифметического корня $-a = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2}$. С учетом свойства 2°, получаем:

$$a\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} = (-1)(-a)\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} = -\sqrt{(-a)^2}\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} =$$

$$= -\sqrt{a^2}\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} = -\sqrt{a^2(1 + \frac{1}{a^2})} = -\sqrt{a^2 + 1}.$$

Пример 3. Вынесите множитель из-под корня $\sqrt{9a^2b}$, где $a < 0$, $b > 0$.

Решение. По свойствам 2° и 7° имеем

$$\sqrt{9a^2b} = \sqrt{9}\sqrt{a^2}\sqrt{b} = 3|a|\sqrt{b} = \begin{cases} 3a\sqrt{b}, a \geq 0, \\ 3(-a)\sqrt{b}, a < 0. \end{cases}$$

Ответ: $-3a\sqrt{b}$.

Пример 4. Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt{75a^3b^6}$.

Решение. Поскольку рассматриваем только арифметические корни, то $a \geq 0$, b – любое, поэтому

$$\sqrt{3 \cdot 25 \cdot a^2 \cdot a \cdot (b^3)^2} = \sqrt{25}\sqrt{a^2}\sqrt{(b^3)^2}\sqrt{3 \cdot a} = 5a|b^3|\sqrt{3a} =$$

$$= 5a|b|^3\sqrt{3a} = \begin{cases} 5ab^3\sqrt{3a}, a \geq 0, b \geq 0, \\ -5ab^3\sqrt{3a}, a \geq 0, b < 0. \end{cases}$$

Пример 5. Внесите множитель под знак корня $x\sqrt{\frac{-2}{x}}$.

Решение. По определению арифметического корня $x < 0$. Тогда $-x > 0$.

$$x\sqrt{\frac{-2}{x}} = (-1)(-x)\sqrt{\frac{-2}{x}} = -\sqrt{(-x)^2}\sqrt{\frac{-2}{x}} = -\sqrt{\frac{-2x^2}{x}} = -\sqrt{-2x}.$$

Пример 6. Упростите выражение $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^2}$.

Решение. Воспользуемся свойством 1°, читая его справа налево, можем разделить показатель корня и подкоренного выражения на одно и то же число 2 и получить число $\sqrt{\sqrt{3}-2}$, но это будет ошибкой, поскольку под корнем содержится отрицательное число $\sqrt{3}-2$.

Правильно будет поступить так

$$(\sqrt{3}-2)^2 = (2-\sqrt{3})^2 = \left|\sqrt{3}-2\right|^2, \text{ поэтому}$$

$$\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{\left|\sqrt{3}-2\right|} = \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Пример 7. Упростите выражения:

а) $\sqrt[6]{(3-\pi)^2}$; б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$.

Решение.

а) $\sqrt[6]{(3-\pi)^2} = \sqrt[3]{|3-\pi|} = \sqrt[3]{\pi-3}$;

б)

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})}\cdot\sqrt[6]{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})}\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})} =$$
$$= \sqrt[3]{1-2} = \sqrt[3]{-1} = -1.$$

Пример 8. Определите знаки разностей:

а) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[5]{4}-\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[3]{31}-\sqrt{10}$.

Решение.

а) Для сравнения $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$ воспользуемся свойством 1°: $\sqrt{2} = \sqrt[2\cdot3]{2^3}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3\cdot2]{3^2}$, получим $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$ и $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$.

Тогда $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9} < 0$.

б) Аналогично: $\sqrt[5]{4}-\sqrt[4]{3} = \sqrt[5\cdot4]{4^4}-\sqrt[4\cdot5]{3^5} = \sqrt[20]{256}-\sqrt[20]{243} > 0$.

в) $\sqrt[3]{31}-\sqrt{10} = \sqrt[3\cdot2]{31^2}-\sqrt[2\cdot3]{10^3} = \sqrt[6]{961}-\sqrt[6]{1000} < 0$.

1.7.7. Степень с рациональным показателем

Степенью с рациональным показателем называется число $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, *где* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$.

Например, $8^{\frac{1}{3}} = 2$, т. к. $\sqrt[3]{8} = 2$; $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$.

Следует обратить внимание на то, что понятие степени с рациональным показателем определено только для неотрицательных оснований. Так $(-8)^{\frac{1}{3}}$ *не имеет смысла, тогда как* $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Поскольку степень с рациональным показателем определяется через арифметический корень, то свойства таких степеней аналогичны свойствам арифметических корней.

Если $a > 0$ и $b > 0$, а r_1 и r_2 – любые рациональные числа, то:

1. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$.
2. $a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}$.
3. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$.
4. $(ab)^{r_1} = a^{r_1} b^{r_1}$.
5. $(\frac{a}{b})^{r_1} = \frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}$.

Перечисленные свойства обобщаются и на случай любых действительных r_1 и r_2 и допустимых значений a и b.

Заметим, что в процессе применения используется различное прочтение записанных формул: как слева направо, так и справа налево.

Пример 1. Найдите область определения выражения:

а) $x^{\frac{1}{2}}$; б) $(y-4)^{\frac{1}{3}}$; в) $(a + 2)^{\frac{-3}{5}}$; г) $(c-5)^{-3}$; д) $(a-1)^0$.

Решение. Так как все перечисленные степени имеют рациональные показатели, то в соответствии с определением степени с рациональным показателем необходимо и достаточно, чтобы основание a степени r удовлетворяло следующим условиям: $a \geq 0$, если r – положительное рациональное число; $a > 0$, если r – дробное отрицательное число; $a \neq 0$, если r – целое отрицательное число или $r = 0$.

Тогда получаем:

а) $r = \frac{1}{2} > 0, x \geq 0$;

б) $r = \frac{1}{3} > 0, y - 4 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 4$;

в) $r = \frac{-3}{5} < 0, a + 2 > 0 \Leftrightarrow a > -2$;

г) $r = -3 < 0, c - 5 \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 5$;

д) $r = 0, a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$.

Пример 2. Вычислите значение выражения

$$A = \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-4}\right)^{-0,75} \cdot 0{,}09^{-0,5} \cdot (-3)^0 \cdot 0{,}1^{-4}.$$

Решение.

$$A = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\left(\frac{3}{10}\right)^2\right)^{-0,5} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-4} = \frac{3^3}{5^3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-4} = \frac{3^3}{5^3} \cdot \frac{10}{3} \cdot 10^4 =$$
$$= \frac{3^3 \cdot 10 \cdot 10^4}{5^3 \cdot 3} = 7200.$$

Пример 3. Вычислите значение выражения

$$A = \frac{2 \cdot 4^{-2} + \left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} + \left(\sqrt{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}.$$

Решение.

$$A = \frac{2 \cdot (2^2)^{-2} + \left((9^2)^{-\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot (9^{-1})^{-3}}{(5^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} + 1 \cdot 2^2} = \frac{2 \cdot 2^{-4} + (9^{-1})^3 \cdot 9^3}{5^{-1} \cdot (-5)^2 + 1 \cdot 2^2} = \frac{(2)^{-3} + 9^0}{9} = \frac{\frac{1}{8} + 1}{9} = \frac{\frac{9}{8}}{9} = \frac{1}{8}.$$

Пример 4. Упростите выражение

$$A = \sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}.$$

Решение.

$$A = \left(\frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\left(\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} =$$
$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}} \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} =$$
$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{12}}}{b^{\frac{1}{12}}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{3}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}, \forall a > 0, b > 0.$$

Пример 5. Сократите дроби:

а) $A = \frac{y-1}{1 + y^{1/2}}$; б) $B = \frac{a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}{a + b}$; в) $C = \frac{x}{x - x^{1/2}}$.

Решение.

а) Используем формулу сокращенного умножения: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Тогда

$$A = \frac{\left(y^{1/2}\right)^2 - 1^2}{y^{1/2} + 1} = \frac{\left(y^{1/2} - 1\right)\left(y^{1/2} + 1\right)}{y^{1/2} + 1} = y^{1/2} - 1,$$

здесь $y^{1/2} + 1 > 0$ для $\forall\, y \in \mathbb{R}, y \geq 0$.

б) Используем формулу сокращенного умножения: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, получаем

$$B = \frac{a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}{\left(a^{1/3}\right)^3 + \left(b^{1/3}\right)^3} = \frac{a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}{\left(a^{1/3} + b^{1/3}\right)\left(a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}\right)} = \frac{1}{a^{1/3} + b^{1/3}},$$

$\forall a \geq 0, b \geq 0, a^2 + b^2 \neq 0.$

в) $C = \frac{x}{x - x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - 1}$, $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите:

а) $(512^{-2} \cdot 128^3 \cdot 3125^4 \cdot 625^{-5}) : (256^{-8} \cdot 64^{11})$. Ответ: 2.

б) $10\sqrt{\frac{2}{5}} - 0{,}5\sqrt{160} + 3\sqrt{\frac{10}{9}}$. Ответ: $\sqrt{10}$.

в) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{512} \cdot \sqrt{729}}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[5]{\sqrt{1024}\sqrt[3]{81 \cdot 6561 \cdot 27}}\right)^{-2}$. Ответ: 1.

г) $\left(3\sqrt{125} - 2\sqrt{45}\right) : \sqrt{5}$. Ответ: 9.

2. Найдите допустимые значения x:

а) $\sqrt{x-1}$; б) $\sqrt[4]{2x-6}$; в) $\sqrt[6]{1-x}$; г) $\sqrt{x-y}$.

Ответ: а) $x \geq 1$; б) $x \geq 3$; в) $x \leq 1$; г) $x \geq y$.

3. Найдите арифметический корень:

а) $\sqrt{(5-2)^2}$; б) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; в) $\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{5}\right)^4}$.

Ответ: а) 3; б) $\sqrt{2} - 1$; в) $\sqrt{5} - 2$.

4. Найдите арифметический корень:

а) $\sqrt{(5-a)^2}$; б) $\sqrt[4]{(x-3)^4}$; в) $\sqrt{(x-y)^2}$.

Ответ: а) $|5-a| = \begin{cases} 5 - a \text{ при } a \leq 5; \\ a - 5 \text{ при } a > 5. \end{cases}$

б) $|x-3| = \begin{cases} x - 3 \text{ при } x \geq 3; \\ 3 - x \text{ при } x < 3. \end{cases}$

в) $|x-y| = \begin{cases} x - y \text{ при } x \geq y; \\ y - x \text{ при } x < y. \end{cases}$

5. Вынесите множители за знак радикала:

а) $\sqrt{(1-a)^3}$; б) $\sqrt{8(a-5)^2}$; в) $\sqrt{18(a-5)^5}$.

Ответ: а) $(1-a)\sqrt{1-a}$; б) $2|a-5|\sqrt{2}$; в) $3(a-5)^2\sqrt{2(a-5)}$.

6. Внесите множители под знак радикала:

а) $(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}}$ при $a > 2$; б) $(x-5)\sqrt{\frac{x}{25-x^2}}$ при $0 < x < 5$.

Ответы: а) $-\sqrt{2a(a-2)}$; б) $-\sqrt{\frac{x(5-x)}{5+x}}$.

7. Сократите показатель корня и подкоренного выражения:

а) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{3})^2}$; б) $\sqrt[8]{(2-\sqrt{5})^2}$; в) $\sqrt[4]{(a-2)^2}$ при $a < 2$.

Ответ: а) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{5}-2}$; в) $\sqrt{2-a}$.

8. Упростите выражения:

а) $4\sqrt[3]{-3}-\sqrt[3]{\frac{8}{9}}+\sqrt[3]{\frac{3}{8}}-\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{-0{,}375}+\sqrt[3]{46\frac{7}{8}}$;

б) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{49}}+0{,}8\sqrt{\frac{8}{3}}-\frac{1}{15}\sqrt{96}+1{,}5\sqrt{\frac{3}{2}}+3\sqrt{\frac{1}{6}}-\frac{3}{14}\sqrt[3]{14}$.

Ответ: а) $-2{,}5\sqrt[3]{3}$; б) $1\frac{31}{60}\sqrt{6}$.

9. Докажите тождества:

а) $\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right)\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}\right)=7$;

б) $\left(12\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{2}\right)\left(5\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=84$.

10. Выполните действия:

а) $\left(10\sqrt{48}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12}\right):\sqrt{3}$;

б) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right):2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Ответ: а) 30; б) $2{,}25-\sqrt[3]{9}$.

11. Выполните действия, заменяя радикалы степенями с дробными показателями:

а) $\left(8\sqrt[6]{m^5}-6\sqrt[4]{m^3}-12\sqrt[3]{m^2}\right):2\sqrt{m}$;

б) $\left(a^3\sqrt[3]{x^2y^2}+a^4\sqrt{xy}-a^5\sqrt[6]{x^4y^5}\right):a^2\sqrt{xy}$.

Ответ: а) $4\sqrt[3]{m}-3\sqrt[4]{m}-6\sqrt[6]{m}$; б) $a\sqrt[6]{xy}+a^2-a^3\sqrt[6]{xy^2}$.

12. Выполните действия:

а) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt{a}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}+1\right)^2$;

в) $\left(2x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{4}}\right)\left(2x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{4}}\right)$; г) $\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}$; д) $\left(2a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{6}}\right)^3$.

Ответ: а) $\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[6]{a^5}+a$; б) $4-2\sqrt{3}$; в) $4x-\frac{\sqrt{y}}{y}$; г) $\frac{a}{b}$;

д) $8a-12a\sqrt[6]{ax}+6a\sqrt[3]{ax}-a\sqrt{ax}$.

13. Извлеките корень:

а) $\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a}}}$; в) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}$.

Ответ: а) $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$; б) $\sqrt[8]{a^3}$; в) $\sqrt[4]{\frac{a+b}{a-b}}$.

14. Извлеките корень:

а) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{a}{x}\sqrt{\frac{1}{ax}\sqrt{\frac{a}{x^3}}}}$.

Ответ: а) $\sqrt[8]{128}$; б) $\frac{\sqrt[4]{ax}}{x}$.

15. Устраните иррациональность в знаменателе дроби:

а) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; в) $\frac{n}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$.

Ответ: а) $2-\sqrt{2}$; б) $\frac{9\sqrt{3}+5\sqrt{5}+\sqrt{7}-2\sqrt{105}}{59}$; в) $\frac{n\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}$; г) $\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{5}$.

16. Упростите выражение:

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Ответ: $\sqrt{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

1.8. Тождественные преобразования алгебраических выражений

1.8.1. Основные понятия

Алгебраическим называется выражение, составленное из чисел, которые могут быть обозначены цифрами или буквами, и алгебраических действий, которые выполняются над ними (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение арифметического корня).

Буквы, входящие в алгебраические выражения, будем называть переменными.

Обозначается алгебраическое выражение символом $\mathbb{U}$ ($x, y, \ldots, z$).

Числовым значением алгебраического выражения называется число, полученное в результате вычислений после замены букв числами.

Допустимыми значениями переменных x, y, …, z называются те и только те их значения, при которых выполнимы все указанные над ними действия.

Множество допустимых значений переменных $x, y, \ldots, z$ называется областью допустимых значений или областью определения алгебраического выражения.

Например, допустимыми значениями величин x и y в алгебраических выражениях

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2};\ \sqrt{x} + \sqrt{y};\ xy^2 + 3$$

являются соответственно значения:

$$x \neq 0 \text{ и } y \neq 0;\ x \geq 0 \text{ и } y \geq 0;\ x \in \mathbb{R} \text{ и } y \in \mathbb{R}.$$

Различают два вида алгебраических выражений.

Алгебраическое выражение называется рациональным, если над входящими в него переменными $x, y, \ldots, z$ и числами выполняются действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с целым показателем.

Алгебраическое выражением называется иррациональным, если над входящими в него величинами выполняются действия сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень с целым показателем и извлечение арифметического корня.

Два алгебраических выражения, соединенных знаком «=», образуют равенство

$$\mathrm{U}\,(x, y, \ldots, z) = \mathrm{V}\,(x, y, \ldots, z).$$

Область допустимых значений равенства является общей частью областей допустимых значений для алгебраических выражений U и V.

Тождеством (тождественным равенством) называется равенство $U\,(x, y, \ldots, z) = V\,(x, y, \ldots, z)$, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Следующие равенства являются тождественными на $\mathbb{R}$:

1) $x + y = y + x$;
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3) $xy = yx$;
4) $x(yz) = (xy)z$;
5) $x \cdot (y + z) = xy + xz$;
6) $\sqrt{x^2} = |x|$.

Тождественным преобразованием алгебраического выражения называется замена этого выражения тождественно равным ему.

Все верные числовые равенства также называются тождественными.

Например, равенство $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$ является тождеством, т. к. $\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

1.8.2. Одночлены

Рациональное алгебраическое выражение называется целым, если оно не содержит действия деления на выражение с переменными величинами.

Целые рациональные выражения, в свою очередь, делятся на одночлены и многочлены.

Одночленом называется выражение, содержащее числа и переменные, степени чисел и переменных, а также их произведения.

Например, $2a^2b^2(-3)(-c)b$ – одночлен, а выражения $\frac{xy}{z}$ и $x+y$ не являются одночленами.

Стандартным видом одночлена называется представление одночлена в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте и степеней одинаковых переменных.

Например, $6a^2b^3c$.

К тождественным преобразованиям одночленов относятся: умножение одночленов, возведение одночленов в натуральную степень, приведение подобных одночленов, приведение одночленов к стандартному виду.

Например, $2a^2b^2(-3)(-c)b = 6a^2b^3c$.

Одночлены можно умножать, в результате получится одночлен.

Например, используя свойства произведения и степеней, получаем

$$2ab^2 \cdot 2{,}5a^2b = (2 \cdot 2{,}5)(a \cdot a^2)(b^2 \cdot b) = 5a^3b^3.$$

Одночлены можно возводить в натуральную степень, результатом будет одночлен.

Например, $(3xy^2)^2 = 3^2(x)^2(y^2)^2 = 9x^2y^4$.

Два одночлена называются подобными, если они либо совпадают, либо отличаются только коэффициентами.

Сложение и вычитание одночленов называется приведением подобных членов.

Например, $9x^2y^4 - 5x^2y^4 + 2y^4x^2 = 6x^2y^4$.

1.8.3. Многочлены. Тождественные преобразования многочленов

Многочленом называется сумма одночленов. Каждый одночлен называется членом многочлена. Подобные одночлены в многочлене называются подобными членами многочлена.

Многочлен называется многочленом стандартного вида, если все его члены записаны в стандартном виде и все подобные члены приведены.

Сумма, разность, произведение, натуральная степень многочлена есть вновь многочлен.

Все соответствующие операции над многочленами являются тождественными преобразованиями, главным из которых является приведение многочлена к стандартному виду.

Примеры:

а) $(3x - 4y + 7) - (x + 2y + 1) = 3x - 4y + 7 - x - 2y - 1 = (3x - x) - (4y + 2y) + (7 - 1) = 2x - 6y + 6$;

б) $(x - y)(x + y) = x^2 + xy - yx - y^2 = x^2 - y^2$;

в) $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

К важнейшим тождественным преобразованиям многочлена относится *разложение многочлена на множители с использованием следующих приёмов: вынесение общего множителя за скобку; группировка; использование тождеств сокращенного умножения; выделение полного квадрата; замена переменных*.

Остановимся наиболее подробно на преобразовании многочлена с одной переменной.

Многочленом степени n относительно x называется выражение вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где a_0, a_1, ..., a_n – постоянные (коэффициенты многочлена); $a_0 \neq 0$, $n \geq 0$; x – переменная величина, принимающая любые числовые значения.

Число n называется степенью многочлена.

Заметим, что любое число, не равное нулю, является многочленом нулевой степени. Число нуль не является многочленом.

Два многочлена P(x) и Q(x) называются равными тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые степени и равные коэффициенты при одинаковых степенях x.

Если в результате некоторого преобразования получен многочлен с неизвестными коэффициентами, но известен вид этого многочлена, то его неизвестные коэффициенты можно найти, используя условие равенства коэффициентов при одинаковых степенях x.

Пример 1. При каком значении m выражение $64x^2 - mxy + 9y^2$ является квадратом двучлена?

Решение. Требуется, чтобы для любых x выполнялось равенство

$$64x^2 - mxy + 9y^2 = (ax + by)^2$$

или, что то же самое,

$$64x^2 - mxy + 9y^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2.$$

По определению равных многочленов требуется равенство коэффициентов при одинаковых степенях переменных:

$x^2 : a^2 = 64;$

$xy : 2ab = m;$

$y^2 : b^2 = 9.$

Решаем систему:

$$\begin{cases} a^2 = 64, \\ 2ab = m, \\ b^2 = 9. \end{cases}$$

Находим: $a_1 = -8$, $a_2 = 8$; $b_1 = -3$, $b_2 = 3$.

Тогда решения системы имеют вид:

$$\begin{cases} a = -8, \\ b = -3, \\ m = 48; \end{cases} \begin{cases} a = -8, \\ b = 3, \\ m = -48; \end{cases} \begin{cases} a = 8, \\ b = -3, \\ m = -48; \end{cases} \begin{cases} a = 8, \\ b = 3, \\ m = 48. \end{cases}$$

Следовательно, m принимает значения: $m = -48$ или $m = 48$. Подставляя, например, $m = 48$ в выражение $64x^2 - 48xy + 9y^2$, убеждаемся, что оно равно $(8x - 3y)^2$.

Пример 2. Докажите, что выражение

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$$

есть квадрат трехчлена.

Решение. Имеем

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 = (ax^2 + bx + c)^2,$$

где a, b, c – неизвестные коэффициенты.

Выполнив все действия в правой и левой частях равенства, получаем:

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) + 1 = a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2abx^3 + 2acx^2 + 2bxc$$

или

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 25 = a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x.

x^4: $a^2 = 1$,

x^3: $2ab = 10$,

x^2: $b^2 + 2ac = 35$,

x^1: $2bc = 50$,

x^0: $c^2 = 25$.

Решая полученную систему, находим:

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 5, \\ c = 5; \end{cases} \begin{cases} a = -1, \\ b = -5, \\ c = -5. \end{cases}$$

Над многочленами выполнимы следующие операции: сложение, вычитание, умножение, возведение в натуральную степень. Результатом этих действий является многочлен.

Действие деление не всегда выполнимо во множестве многочленов.

Говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, если существует такой многочлен $S(x)$, что $P(x) = Q(x)S(x)$. При этом $P(x)$ называется делимым, $Q(x)$ – делителем, $S(x)$ – частным.

Например, многочлен $x^3 - 3x + 2$ – делится нацело на $(x + 1)$. Деление можно выполнить «уголком».

а) Делим старшую степень делимого на старшую степень делителя $(x^3 : x)$, получаем x^2.

б) Умножаем делитель на x^2, подписываем результат $(x^3 + x^2)$ под делимым.

в) Находим первую разность $(-x^2 - 3x - 2)$.

г) Делим старшую степень первой разности на старшую степень делителя $(-x^2 : x)$, получаем $(-x)$.

д) Умножаем делитель на $(-x)$, получаем $(-x^2 - x)$. Подписываем результат под первой разностью.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x - 2 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^3 + x^2} & x^2 - x - 2 \\
-x^2 - 3x - 2 & \\
-\ \underline{-x^2 - x} & \\
-2x - 2 & \\
-\ \underline{-2x - 2} & \\
0 &
\end{array}
$$

е) Находим вторую разность $(-2x - 2)$.

ж) Делим старшую степень второй разности на старшую степень делителя $(-2x : x)$, получаем (-2).

з) Умножаем делитель на (-2), подписываем результат под второй разностью.

и) Находим третью разность (0).

Деление завершено, т. е.

$$(x^3 - 3x + 2) : (x + 1) = x^2 - x - 2.$$

Если же деление многочлена $P(x)$ на $Q(x)$ невозможно, то можно произвести деление с остатком, т. е. найти два многочлена $S(x)$ и $R(x)$ таких, что $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$.

Пример 3. Разделите многочлен $2x^4 - x^3 + 5$ на многочлен $x^3 - 9x$. Выполняем деление уголком.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - x^3 + 5 & x^3 - 9x \\ \cline{2-2}
-\ \underline{2x^4 - 18x^2} & 2x - 1 \\
-x^3 + 18x^2 + 5 & \\
-\ \underline{-x^3 + 9x} & \\
18x^2 - 9x + 5 &
\end{array}
$$

В этом случае

$$\underbrace{2x^4 - x^3 + 5}_{\text{делимое}} = \underbrace{(x^3 - 9x)}_{\text{делитель}}\underbrace{(2x - 1)}_{\text{частное}} + $$
$$+ \underbrace{18x^2 - 9x + 5}_{\text{остаток}}.$$

Число x_0 называется корнем многочлена $P(x)$, если $P(x_0) = 0$.

Например, многочлен $P(x) = x^3 - 2x + 1$ имеет корень $x_0 = 1$, т. к. $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$.

Имеет место теорема.

Если целое число x_0 является корнем многочлена

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами ($a_0 \neq 0$), то оно служит делителем свободного члена a_n.

В самом деле, если x_0 – корень многочлена, то

$$a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_0 + a_n \equiv 0.$$

Откуда

$$a_n = -(a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_0) = -x_0(a_0x_0^{n-1} + a_1x_0^{n-2} + \\ + \dots + a_{n-1}).$$

Поскольку x_0 – целое число и коэффициенты многочлена – целые числа, то a_n – кратно числу x_0.

Это свойство корней многочлена используется для отыскания его целых корней методом подбора.

Пример 4. Если уравнение $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ имеет целые корни, то их надо искать среди делителей свободного члена, т. е. числа (–6): ±1, ±2, ±3, ±6. Проверкой устанавливаем:

1) $x = 1$: $P(1) = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$, $x = 1$ – корень;
2) $x = -1$: $P(-1) = -1 + 4 - 1 - 6 \neq 0$, $x = -1$ – не корень;
3) $x = 2$: $P(2) = 8 + 16 + 2 - 6 \neq 0$, $x = 2$ – не корень;
4) $x = -2$: $P(-2) = -8 + 16 - 2 - 6 = 0$, $x = -2$ – корень;
5) $x = 3$: $P(3) = 27 + 36 + 3 - 6 \neq 0$, $x = 3$ – не корень;
6) $x = -3$: $P(-3) = -27 + 36 - 3 - 6 = 0$, $x = -3$ – корень.

Таким образом, найдены все три корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$.

Важнейшим тождественным преобразованием многочлена является разложение многочлена на множители.

Рассмотрим различные приемы разложения многочлена на множители.

1. Вынесение общего множителя за скобки

Пример 5. Разложите многочлен $P(x) = 6x^3 - 18x^2$ на множители.

Решение. Общий множитель, который можно вынести за скобку, $6x^2$, где 6 – это наибольший общий делитель коэффициентов 6 и –18, а x^2 – одночлен в степени равной наименьшей из степеней одночленов x^3 и x^2, поэтому

$$6x^3 - 18x^2 = 6x^2(x - 3).$$

2. Метод группировки

Пример 6. $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

Решение. Группируем слагаемые так, чтобы после этого они имели общие множители:

$$P(x) = (x^3 - x^2) + (x - 1) = x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^2 + 1).$$

3. Использование формул сокращенного умножения

Пример 7. $P(x) = 3x^3 + x^2 - x - 3$.

Решение. Сначала сгруппируем слагаемые так, чтобы они имели общие множители:

$$P(x) = (3x^3 - 3) + (x^2 - x) = 3(x^3 - 1) + (x^2 - x) = 3(x^3 - 1) + x(x - 1).$$

Далее применим к скобке $(x^3–1)$ формулу

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

получим

$$P(x) = 3(x - 1)(x^2 + x + 1) + x(x - 1) = (x - 1)(3x^2 + 3x + 3 + x) =$$
$$= (x - 1)(3x^2 + 4x + 3).$$

Разложить на множители квадратный трехчлен не удастся, т. к. его дискриминант $\mathfrak{D} = -20 < 0$.

Пример 8. $P(x) = x^6 - 1$.

Решение. Представим x^6, например, так $(x^3)^2$, тогда

$$P(x) = (x^3)^2 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Квадратные трехчлены $x^2 + x + 1$ и $x^2 - x + 1$ не имеют действительных корней, поэтому не могут быть разложены на множители в области действительных чисел.

Есть другой вариант представления $x^6 = (x^2)^3$, поэтому найти разложение на множители можно другим способом.

4. *Разложение многочлена на множители при помощи его корней.*

Пример 9. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Решение. Методом подбора проверим, имеет ли многочлен целые корни. Для этого выпишем все делители числа 6: ±1, ±2, ±3, ±6.

Находим $P(1)$

$$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

и сразу устанавливаем, что $x = 1$ – корень уравнения, но тогда $P(x)$ делится нацело на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3 - x^2 \qquad\qquad\quad} & x^2 - 5x + 6 \\
-5x^2 + 11x - 6 & \\
-\underline{-5x^2 + 5x \qquad} & \\
6x - 6 & \\
-\underline{6x - 6} & \\
0 &
\end{array}$$

Следовательно,

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Для разложения на множители квадратного трехчлена достаточно найти его корни, например, по теореме Виета и использовать формулу

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Имеем $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ и, следовательно,

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

5. *Выделение полного квадрата*.

Иногда для применения способа группировки приходится разбивать отдельные слагаемые на подобные им, добавлять к данному выражению и вычитать из него какое-либо слагаемое.

Пример 10. $P(x) = x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4$.

Решение. Прибавим к данному выражению слагаемые x^2y^2 и $(-x^2y^2)$, получим

$$P(x, y) = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2.$$

Таким образом, мы выделили полный квадрат, что позволит теперь разложить многочлен на множители:

$$P(x, y) = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy).$$

Пример 11. $P(x, y) = x^4 + y^4$.

Решение. Снова используем прием прибавления двух взаимно уничтожающихся слагаемых, получаем

$$P(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2.$$

Далее используем формулу разности квадратов и окончательно находим

$$P(x, y) = (x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 + 2\sqrt{xy}).$$

6. *Введение новых переменных*.

Пример 12. $P(x) = (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 1) - 12$.

Решение. Пусть $x^2 + 2x = y$, тогда

$$P(y) = y(y + 1) - 12 = y^2 + y - 12.$$

Находим корни, например, по теореме Виетта, получаем $y_1 = -4$, $y_2 = 3$. Тогда

$$P(y) = (y + 4)(y - 3).$$

Возвращаемся к x,

$$P(x) = (x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 3) = (x^2 + 2x + 4)(x - 1)(x + 3).$$

Дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + 2x + 4$ отрицательный, поэтому трехчлен не разлагается на множители.

7. *Применение разложения многочлена на множители к вычислению алгебраических выражений*.

Тождественные преобразования часто предшествуют вычислению значений алгебраических выражений.

Пример 13. Дано $a + b + c = 0$, $abc = 1$. Найдите $a^3 + b^3 + c^3$.

Решение. Используя условие $a + b + c = 0$, находим $c = -(a + b)$. Тогда

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + (-(a + b))^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a + b)^3 = = (a + b)(a^2 - ab + b^2 - (a + b)^2) = (a + b)(a^2 - ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2) = (a + b)(-3ab) = -3ab(a + b) = 3abc = 3.$$

Пример 14. Вычислите: $507 \cdot 493 - 505 \cdot 495$.

Решение.

$$507 \cdot 493 - 505 \cdot 495 = (505 + 2)493 - 505(493 + 2) = 505 \cdot 493 + 2 \cdot 493 - 505 \cdot 493 - 505 \cdot 2 = 2(505 - 493) = 2 \cdot 12 = 24.$$

Пример 15. Вычислите $\frac{43^2-11^2}{(36{,}5)^2-(27{,}5)^2}$.

Решение.

$$\frac{(43-11)(43+11)}{\big((36{,}5)+(27{,}5)\big)\big((36{,}5)-(27{,}5)\big)} = \frac{32 \cdot 54}{64 \cdot 9} = 3.$$

Пример 16. Вычислите $87^2 - 2 \cdot 87 \cdot 67 + 67^2$.

Решение.

$$87^2 - 2 \cdot 87 \cdot 67 + 67^2 = (87 - 67)^2 = 400.$$

1.8.4. Алгебраические дроби

Тождественные преобразования алгебраических дробей

Алгебраической дробью называется дробь вида $\frac{P(x,\ y,\ \ldots,\ z)}{Q(x,\ y,\ \ldots,\ z)}$, *числитель и знаменатель которой есть многочлены.*

Для сокращения записи дроби будем опускать переменные $x, y, \ldots, z$.

Областью допустимых значений входящих в неё переменных называются те и только те значения, для которых $Q \neq 0$.

Например, областью допустимых значений переменной x для дроби $\frac{1}{x^2-4}$ является множество значений $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

Алгебраические дроби $\frac{P_1}{Q_1}$ *и* $\frac{P_2}{Q_2}$ *называются равными тогда и только тогда, когда выполняется равенство многочленов* $P_1Q_2 = Q_1P_2$.

Отсюда следует, что алгебраическая дробь не изменится, если её числитель и знаменатель умножить на один и тот же многочлен $S \neq 0$, т. е.

$$\frac{P}{Q} = \frac{P \cdot S}{Q \cdot S}, \text{ где } Q \neq 0,\ S \neq 0.$$

Если записанное равенство читать справа налево, то это означает, что значение дроби не изменится, если её числитель и знаменатель разделить на один и тот же многочлен S $(S \neq 0)$.

На этом свойстве основано сокращение дроби.

Пример 1. Сократить дробь

$$A = \frac{y^2 - x^2}{2x^2 - 2xy}.$$

Решение. Укажем ОДЗ. Знаменатель дроби

$$2x^2 - 2xy = x(2x - 2y) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0,\ 2x - 2y \neq 0.$$

Разложим числитель и знаменатель на множители и с учетом ОДЗ проведем сокращение:

$$A = \frac{(y - x)(y + x)}{2x(x - y)} = \frac{-(x - y)(x + y)}{2x(x - y)} = -\frac{(x + y)}{2x}.$$

Общим знаменателем нескольких дробей называется многочлен, который делится на знаменатель каждой дроби.

Например, общими знаменателями дробей $\frac{x}{x-1}$ $(x \neq 1)$ и $\frac{1}{x+1}$ $(x \neq -1)$ являются многочлены $(x - 1)(x + 1)$, $2(x - 1)(x + 1)$, $x(x - 1)(x + 1)$.

Практически же за общий знаменатель дробей берут многочлен наименьшей степени, который делится без остатка на знаменатель каждой из дробей, его называют наименьшим общим знаменателем дробей.

В данном примере это будет многочлен $(x - 1)(x + 1)$.

Зная наименьший общий знаменатель и используя основное свойство дроби, получаем

$$\frac{x \cdot (x + 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \frac{x(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)}.$$

$$\frac{1 \cdot (x - 1)}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{x - 1}{(x + 1)(x - 1)}.$$

Множитель $(x + 1)$, на который умножили числитель и знаменатель первой дроби, называется дополнительным множителем для первой дроби, он находится путем деления наименьшего общего знаменателя $(x + 1)(x - 1)$ дробей на $(x - 1)$ – знаменатель первой дроби.

Аналогично, множитель $(x - 1)$, равный частному от деления наименьшего общего знаменателя дробей $(x + 1)(x - 1)$ на знаменатель $(x + 1)$ второй дроби, называется дополнительным множителем для второй дроби.

Заметим, что после приведения к общему знаменателю области определения дробей сузились:

$$\frac{x(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)},\ x \neq 1,\ x \neq -1;\ \frac{x - 1}{(x + 1)(x - 1)},\ x \neq -1,\ x \neq 1.$$

Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями производится по правилу:

$$\frac{P_1}{Q} \pm \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 \pm P_2}{Q},\ Q \neq 0.$$

Если же сложение или вычитание производится для дробей с разными знаменателями, то предварительно они приводятся к наименьшему общему знаменателю.

Пример 2. Найдите значение выражения

$$A = \frac{2}{x^2 + x - 6} - \frac{1}{x^2 - x - 2}.$$

а) Укажем область допустимых значений x. Для этого найдем значения x, при которых знаменатели дробей обращаются в 0, и исключим их из рассмотрения. Поскольку корни уравнения $x^2 + x - 6 = 0$: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ и уравнения $x^2 - x - 2 = 0$: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, то допустимыми для x являются все значения, кроме $x = -3$, $x = -1$, $x = 2$.

Зная корни квадратных трехчленов, разложим их на множители, тогда исходное выражение принимает вид:

$$A = \frac{1}{(x+3)(x-2)} - \frac{1}{(x+1)(x-2)}.$$

б) Находим наименьший общий знаменатель дробей, т. е. многочлен наименьшей степени, делящийся одновременно на каждый из знаменателей. Для этого берем, например, знаменатель первой дроби и добавляем к нему недостающие множители из знаменателя второй дроби, получим $(x + 3)(x - 2)(x + 1)$.

в) Разделив наименьший общий знаменатель на знаменатель каждой дроби, получаем дополнительные множители для каждой из них:

для первой дроби – $(x + 1)$;

для второй дроби – $(x + 3)$.

После умножения числителя и знаменателя каждой дроби на соответствующий недостающий множитель получаем дроби с одинаковыми знаменателями, т. е.

$$A = \frac{x+1}{(x+3)(x-2)(x+1)} - \frac{x+3}{(x+1)(x-2)(x+3)}.$$

г) Выполняем сложение дробей с одинаковыми знаменателями

$$A = \frac{x+1-x-3}{(x+3)(x-2)(x+1)} = -\frac{2}{(x+3)(x-2)(x+1)},$$

где $x \neq -3$, $x \neq -1$, $x \neq 2$.

Умножаются алгебраические дроби по правилу:

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2},$$

где P_1, P_2, Q_1, Q_2 – целые алгебраические выражения (многочлены).

Делятся алгебраические дроби по правилу:

$$\frac{P_1}{Q_1} : \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2}{Q_1 P_2}.$$

Операция умножения многочленов позволяет определить возведение алгебраической дроби в натуральную степень, а именно:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n = \underbrace{\frac{P}{Q}\cdot\frac{P}{Q}\cdot\ldots\cdot\frac{P}{Q}}_{n} = \frac{P\cdot P\cdot\ldots\cdot P}{Q\cdot Q\cdot\ldots\cdot Q} = \frac{P^n}{Q^n}.$$

Пример 3. Выполните действия

$$\frac{(a-b)^2}{(3-b)^2}:\frac{2a-a^2}{9-b^2}.$$

Решение.

1. Находим область допустимых значений переменных: $b \neq -3$, $b \neq 3$, $a \neq 0$, $a \neq 2$.

2. Выполняем деление

$$\frac{(a-b)^2}{(3-b)^2}:\frac{2a-a^2}{9-b^2} = \frac{(a-2)^2\cdot(9-b^2)}{(3-b)^2\cdot(2a-a^2)}.$$

С учетом этих условий проведем сокращение дроби, разложив предварительно её числитель и знаменатель на множители. Получаем

$$\frac{(a-2)^2\cdot(3-b)(3+b)}{(3-b)^2\cdot a(2-a)} = -\frac{(a-2)^2(3-b)(3+b)}{(3-b)^2 a(a-2)} = -\frac{(a-2)(3+b)}{a(3-b)} = \frac{(a-2)(3+b)}{a(b-3)},$$

где $b \neq -3$, $b \neq 3$, $a \neq 0$, $a \neq 2$.

Пример 4. Выполнить действия

$$\left(\frac{a^2+ab}{ab^2-b^3}\right)^4\cdot\left(\frac{b-a}{a^2+2ab+b^2}\right)^3.$$

Решение.

а) Находим область допустимых значений переменных из условий:

$ab^2 + b^3 = b^2(a + b) \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0, a \neq -b$;

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -b.$

б) Проверяем возможность сокращения каждой дроби в области допустимых значений переменных.

$\dfrac{a^2+ab}{ab^2-b^3} = \dfrac{a(a+b)}{b^2(a-b)}$ – несократимая дробь;

$\dfrac{b-a}{a^2+2ab+b^2} = \dfrac{b-a}{(a+b)^2}$ – несократимая дробь.

в) Выполняем действия возведения в степень и умножения, получаем

$$\frac{a^4(a+b)^4}{b^8(a-b)^4}\cdot\frac{(b-a)^3}{(a+b)^6} = \frac{a^4(a+b)^4\cdot(b-a)^3}{b^8(a-b)^4\cdot(a+b)^6} = \frac{a^4}{b^8(a+b)^2(b-a)},$$

где $b \neq 0$, $a \neq b$, $a \neq -b$.

Схема преобразований выражений, состоящих из рациональных дробей:

1. Найти область допустимых значений переменных.

2. Проверить дроби на сократимость. Если есть дроби, которые можно сократить, то сократить их.

3. Выполнить действия в следующем порядке: возведение в степень; умножение и деление; сложение и вычитание.

4. Если в выражении есть скобки, то выполнить сначала действия в скобках, соблюдая порядок действий, указанный выше.

Пример 5. Упростите выражение

$$\frac{m^2+m+6}{4m+8}-\left(\frac{m}{m-2}+\frac{m^2}{m^3+8}\cdot\frac{m^2-2m+4}{2-m}\right):\frac{8}{m^2-4m+4}.$$

Решение.

1) Находим область допустимых значений переменной: $m \neq -2$, $m \neq 2$.

2) Все имеющиеся дроби несократимы.

3) Выполняем действие умножения дробей в скобке:

$$\frac{m^2}{m^3+8}\cdot\frac{m^2-2m+4}{2-m}=\frac{m^2\cdot(m^2-2m+4)}{(m+2)(m^2-2m+4)(2-m)}=-\frac{m^2}{(m+2)(m-2)}.$$

4) Выполняем действие сложения в скобке:

$$\frac{m}{m-2}+\left(-\frac{m^2}{(m+2)(m-2)}\right)=\frac{m}{m-2}-\frac{m^2}{(m+2)(m-2)}=\frac{m(m+2)-m^2}{(m+2)(m-2)}$$

$$=\frac{m^2+2m-m^2}{(m+2)(m-2)}=\frac{2m}{(m+2)(m-2)}.$$

5) Выполняем действие деления:

$$\frac{2m}{(m+2)(m-2)}:\frac{8}{m^2-4m+4}=\frac{2m(m-2)^2}{(m+2)(m-2)\cdot 8}=\frac{m(m-2)}{4(m+2)}.$$

6) Последнее действие – вычитание:

$$\frac{m^2+m+6}{4m+8}-\frac{m(m-2)}{4(m+2)}=\frac{m^2+m+6-m^2+2m}{4(m+2)}=\frac{3(m+2)}{4(m+2)}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$, $m \neq -2$, $m \neq 2$.

8.5. Тождественные преобразования иррациональных выражений

Преобразование иррациональных выражений предполагает использование общих законов арифметических действий, понятие арифметического корня и его свойств.

Напомним понятие арифметического корня n-й степени из числа a

$\sqrt[n]{a}$ – арифметический корень n-ой степени из числа $a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ \sqrt[n]{a} \geq 0, \\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a. \end{cases}$

Так как по определению рациональной степени $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то она определена при тех же условиях, что и арифметический корень.

Перечислим свойства арифметических корней:

1. При $a \geq 0$, $b \geq 0$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.
2. При $a \geq 0$, $b > 0$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
3. При $a \geq 0$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$.
4. При $a \geq 0$ $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$.
5. При $a \geq 0$ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$.
6. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$

$$\left((a^{2n})^{\frac{1}{2n}} = |a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}\right).$$

Пример 1. Упростите выражение

$$\left(\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab} - 3b}{a - b}\right)^{-2}.$$

Решение.

1) Находим область допустимых значений переменных a и b: $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a \neq b$.

2) Упрощаем каждую дробь отдельно

$$\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a^3} - 3a\sqrt{b} + 3\sqrt{a}b - \sqrt{b^3} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} =$$

$$= \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3\sqrt{a}b}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} = \frac{3\sqrt{a}\left(a - \sqrt{ab} + b\right)}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{ab} + b\right)} = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

3) $\frac{3\sqrt{ab} - 3b}{a - b} = \frac{3\sqrt{b}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} = \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$

4) $\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{3\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 3.$

5) $(3)^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$

Ответ: $\frac{1}{9}$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a \neq b$.

Пример 2. Упростите выражение

$$A = \frac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}.$$

Решение.

1) Область допустимых значений переменной a: $a \neq 0$.

2) Исследуем возможность извлечения корня

$$\sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{a^4-2a^2+1+4a^2}{4a^2}} = \sqrt{\frac{(a^2+1)^2}{4a^2}} = \frac{a^2+1}{2|a|}.$$

3) Найдем значение A

$$A = \frac{a^2+1}{a\cdot\frac{a^2+1}{2|a|}} = 2\cdot\frac{|a|}{a}.$$

Ответ: $A = \begin{cases} 2, a > 0, \\ -2, a < 0. \end{cases}$

Пример 3. Упростите выражение

$$A = \frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} - \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}.$$

Решение.

1) Находим область допустимых значений переменной x. Имеем

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x + 2\sqrt{x-1} > 0, \\ x-2\sqrt{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x > -2\sqrt{x-1}, \\ x > 2\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x > 2\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 > 4(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Следовательно, $x \in [1, 2) \cup (2, +\infty)$.

2) Проверим, не является ли подкоренное выражение полным квадратом, т. е. проверим возможность извлечения корней. Имеем:

$$A = \frac{1}{\sqrt{(x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1}} - \frac{1}{\sqrt{(x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\left|\sqrt{x-1}+1\right|} - \frac{1}{\left|\sqrt{x-1}-1\right|} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{1}{\left|\sqrt{x-1}-1\right|}.$$

3) Уточняем значение A с учетом области определения:

а) Если $1 \le x < 2$, то $A = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}$.

б) Если $x > 2$, то $A = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{-2}{x-2}$.

Пример 4. Упростите выражение

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}}{x-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y} + \frac{x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}}{x-y}\right)\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Решение.

1) Находим область допустимых значений переменных x и y. Не забываем, что $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, где $a \ge 0$, $\sqrt[n]{a} \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому имеем $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x \ne y$.

2) Упрощаем выражение в скобке

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}}{x-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y} + \frac{x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}}{x-y} = \frac{x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)+\left(x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{x+3y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3y+x-3y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3y}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{2x+6y}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

3) Выполняем операцию умножения

$$\frac{2(x+3y)}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{2(x+3y)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot 2} = \frac{x+3y}{x-y}.$$

Ответ: $\frac{x+3y}{x-y}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x \ne y$.

Пример 5. Докажите тождество

$$x^{\frac{1}{2}} - \frac{x-x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1-x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Решение.

1) Находим допустимые значения x: $x > 0$ и $x \neq 1$.

2) Проверяем каждую дробь на возможность сокращения, получаем:

$$\frac{x - x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x^{-2}(x^3 - 1)}{x^{-\frac{1}{2}}(x - 1)} = \frac{x^{-\frac{3}{2}}(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{1 - x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x^{-2}(x^2 - 1)}{x^{-\frac{1}{2}}(x + 1)} = \frac{x^{-\frac{3}{2}}(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}.$$

3) Находим сумму:

$$x^{\frac{1}{2}} - \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}\right) + \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}\right) + 2x^{-\frac{3}{2}} = 0.$$

Ответ: при $x > 0$ и $x \neq 1$ данное равенство является тождеством.

Одним из важнейших тождественных преобразований иррациональных выражений является умножение числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное числителю или знаменателю дроби.

Выражение A ($A \not\equiv 0$) называется множителем сопряженным выражению B, если произведение AB не содержит радикалов.

Приведем примеры сопряженных множителей:

а) Для выражения $A = \sqrt[n]{x^p y^q \dots z^s}$, где p, q, ..., s – натуральные числа, меньшие n, сопряженным будет множитель $B = \sqrt[n]{x^{n-p} y^{n-q} \dots z^{n-s}}$, т. к. произведение $AB = xy \dots z$.

б) Для выражений $A = \sqrt{x} \mp \sqrt{y}$ сопряженными будут соответственно выражения $B = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, т. к. произведение $AB = x - y$.

в) Для выражений $A = \sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}$ сопряженными являются соответственно выражения $B = \sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$, т. к. произведение $AB = x \pm y$.

Пример 6. Докажите тождество

$$\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}.$$

Решение. Освободимся от иррациональности в знаменателе каждой дроби, получим

$$\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}+\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{1}$$

или

$$\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$$
$$\sqrt{5}+\sqrt{6}=\sqrt{6}+\sqrt{5}.$$

Тождество доказано.

Пример 7. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+2}.$$

Решение.

$$\frac{1}{\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1\right)+1}=\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\left(\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1\right)+1\right)\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1\right)\left(\sqrt[3]{3}-1\right)+\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}=\frac{\sqrt[3]{3}-1}{(3-1)+\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}=\frac{\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{3}+1\right)\left(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}+1\right)}=$$

$$=\frac{3-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}-1}{4}=\frac{-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}$$

Задачи для самостоятельного решения

Упростите выражения:

1. $\frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}\right).$

Ответ: 2, $x\neq-8$, $x\neq 8$.

2. $\left(\frac{1}{a^2+9a+20}-\frac{3}{a^2-a-20}\right):\frac{2a}{a^2-25}+\left(\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}}-\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt{a^3b}\right)^{-1}.$

Ответ: $-\frac{6}{a(a+4)}$, $a>0$, $b>0$, $a\neq b$, $a\neq-5$, $a\neq 5$, $a\neq-4$, $a\neq 4$.

3. $\left(\frac{\left(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{2\sqrt{2.5}(a+b)^{-1}}{10^{-0.5}}.$

Ответ: 10, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $a\neq b$.

4. $\frac{\sqrt{2+\left(\frac{x^2-2}{2x}\right)^2}}{(x^2+2)\cdot\frac{1}{x}}$. Ответ: $-\frac{1}{2}$, если $x<0$; $\frac{1}{2}$, если $x>0$.

5. $\sqrt{\frac{a+x^2}{2x}-\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{a+x^2}{2x}+\sqrt{a}}$. Ответ: $\sqrt{2x}$, если $x^2 \geq a$; $\sqrt{\frac{2a}{x}}$, если $x^2 < a$, $x \neq 0$.

6. $\frac{\left(m^2-\frac{1}{n^2}\right)^m\cdot\left(n+\frac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\frac{1}{m^2}\right)^n\cdot\left(m-\frac{1}{n}\right)^{m-n}}$. Ответ: $\left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}$.

7. $\frac{2a^2-3ab+b^2}{\sqrt{4a^2-4ab+b^2}} + \left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)$.

Ответ: $2a$, если $2a > b$; $2b$, если $2a < b$.

8. Найдите число $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|-\sqrt{40\sqrt{2}+57}}$. Ответ: 10.

9. Найдите число $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$. Ответ: 6.

10. Найдите число $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2$. Ответ: 2.

11. Устраните иррациональность в знаменателе:

а) $\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}$. Ответ: $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$.

б) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}$. Ответ: $\frac{1}{23}\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}\right)\left(2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}+9\right)$.

в) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}-1}$. Ответ: $\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+3\right)$.

12. Упростите выражение $\frac{2x\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)}$. Ответ: $x(x+1)$, $x > 0$.

13. Упростите выражение $\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-1}}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-1}}$.

Ответ: $x-1$, если $x \geq 1$; $\frac{1}{x}-1$, если $0 < x < 1$.

14. Упростите выражение $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$.

Ответ: 3, $a > 0$, $b \geq 0$, $a \neq b$.

15. Упростите выражение $\dfrac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}$ при $a > x$. Ответ: $\sqrt[6]{a}$, $a \geq 0$, $x \geq 0$.

16. Упростите выражение $\left(\dfrac{1-x}{x^2+x^3-x^4}-\dfrac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x}\right):\left(\dfrac{1+x}{x^3+x^4+x^5}-\right.$ $\left.-\dfrac{1-x+x^2}{x^3}\right)$. Ответ: $\dfrac{x-1}{x^2-x-1}$ $, x \neq 0,\ x^2-x-1 \neq 0$.

17. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$ при $a = 1{,}2$; $b = 0{,}6$. Ответ: 2,52.

18. Найдите значение выражения $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\dfrac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ при $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: 1.

19. Докажите тождество $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2$.

20. Упростите выражение $\dfrac{b^2-3b+2-(b-1)\sqrt{b^2-4}}{b^2+3b+2-(b+1)\sqrt{b^2-4}}\cdot\sqrt{\dfrac{b+2}{b-2}}$.

Ответ: $\dfrac{1-b}{1+b}$.

1.9. Примерные варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Выполните действия $\dfrac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot 1{,}7}{0{,}8(3)+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\dfrac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0{,}25$.

   Ответ: 12.

2. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}}-\left(\dfrac{m+\sqrt[4]{mn^3}}{\sqrt{m}+\sqrt[4]{mn}}-\sqrt[4]{mn}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}}$.

   Ответ: $2\sqrt[4]{n}$.

2. Упростите выражение $\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, где $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$.

3. Ответ: $a-1$, если $a \geq 1$; $\dfrac{1}{a}-1$, если $0 < a < 1$.

4. Докажите, что для любого числа n числа $(2n + 1)$ и $(9n + 4)$ – простые. (Указание. Используйте алгоритм Евклида.)

5. Докажите, что для любых целых a, b выражение $ab(a^2 - b^2)$ делится на 3. (Указание. Используйте метод остатков.)

Вариант 2

1. Выполните действия $\left(\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{2}+$ $+1{,}364:0{,}124$. Ответ: 12.

2. Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{a^3b}\sqrt[3]{a^4}+\sqrt{a^4b^3}:\sqrt[6]{a}}{(b^2-ab-2a^2)\sqrt{ab}}-a^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3a^2}{3b-6a+2ab-b^2}:\frac{a+b}{3a-ab}-\frac{ab}{a+b}\right).$$

Ответ: $\sqrt[3]{a}$, если $a>0$, $b>0$, $b\neq 2a$, $b\neq 3$.

4. Упростите выражение $\sqrt{\frac{a+x^2}{2x}-\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a+x^2}{2x}+\sqrt{a}}$.

5. Ответ: $\sqrt{2x}$ при $a\leq x^2$; $\sqrt{\frac{2a}{x}}$ при $a>x^2$, $x\neq 0$.

4. Докажите, что при любом n число $n(2n+1)(7n+1)$ делится на 6.

5. Известно, что m и n взаимно простые числа и что существует отличный от единицы НОД($3n+2m$, $2n-3m$). Найдите его. Ответ: 13.

Список литературы

1. Математика: Пособие для подготовки к экзамену и централизованному тестированию за курс средней школы / Азаров А.И., Булатов В.И., Жек А.И. и др. – Мн.: «Аверсэв», 2003. – 396 с.

2. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа: учебное пособие для подготовительных отделений вузов. – М.: Высш. школа, 1979. – 399 с.

3. Практикум по решению математических задач: учеб. пособие для пед. ин-тов / Вересова Е.Е., Денисова Н.С., Полякова Т.Н. – М.: Просвещение, 1979. – 240 с.

Глава 2
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

2.1. Алгебраические уравнения

2.1.1. Основные понятия

В алгебре изучаются общие свойства числовых систем с использованием буквенных выражений и общие методы решения задач с помощью уравнений.

Числовые системы делятся на числовые и математические выражения.

Числовое выражение состоит из чисел с указанием операций, которые следует выполнить над ними, и порядка операций.

Математическое выражение состоит из чисел, обозначенных буквами, цифр с указанием операций, которые следует выполнить над ними, и порядка операций.

Например, $\sqrt{16+9}$, $\frac{27}{3}$, $(1/2-1/3)\cdot 6+\frac{(1/2-1/3)\cdot 12}{1+1/10}$ – числовые выражения, а $\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{x-y}{x^2+y}$, ax^2+bx+c – математические выражения.

Обозначим математическое выражение символом $F(x,y,z,...,t)$ и будем считать, что все входящие в математическое выражение числа и значения переменных $x, y, z, ..., t$ являются действительными числами.

Система чисел $x_0, y_0, z_0, ..., t_0$ называется допустимой системой значений переменных (аргументов), если при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, …, $t=t_0$ выражение $F(x,y,z,...,t)$ можно вычислить.

По другому в этом случае говорят, что выражение $F(x,y,z,...,t)$ имеет смысл.

Множество всех допустимых систем аргументов $x,y,z,...,t$ называется областью определения математического выражения. Например, область определения выражения $\sqrt{1-x^2}$ находится из условия $1-x^2\geq 0$ и представляет отрезок $[-1, 1]$.

Пусть математические выражения $F_1(x,y,z,...,t)$ и $F_2(x,y,z,...,t)$ определены на множестве M_1 и M_2 соответственно, а множество M есть общая часть этих множеств ($M=M_1\bigcap M_2$).

Уравнением называется равенство двух математических выражений $F_1(x,y,z,...,t) = F_2(x,y,z,...,t)$, в котором системы значений аргументов $(x,y,z,...,t) \in M$.

При этом переменные $(x,y,z,...,t)$ называются неизвестными, а множество M – областью допустимых значений (ОДЗ) неизвестных $x,y,z,...,t$.

Система значений неизвестных $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, …, $t = t_0$ называется решением уравнения, если при подстановке её в уравнение она обращает его в верное равенство.

В зависимости от того, для какого количества допустимых значений переменных уравнение обращается в верное равенство, оно может иметь конечное число решений, бесконечное множество решений или не иметь решений вообще.

Например, уравнение $x^2 + (y-1)^2 = 0$ имеет единственное решение $x = 0$, $y = 1$.

Уравнение $x = |x|$ имеет бесконечное множество решений, описываемое неравенством $x \geq 0$.

Уравнение $|x| + |y| = -1$ не имеет решений вообще.

Кроме уравнений в алгебре рассматривается ещё одно равенство математических выражений – тождество.

Тождеством называется равенство двух математических выражений, которое выполняется при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Примерами тождеств являются следующие равенства: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

В элементарной математике изучаются только частные виды уравнений, в которых математические выражения F_1 и F_2 являются элементарными функциями.

Уравнения различаются по числу входящих в них неизвестных, например $x^2 - 5x + 6 = 0$ – уравнение с одной неизвестной; $|x| + |y| = 1$ – уравнение с двумя неизвестными.

Кроме того, уравнения различаются по виду операций, совершаемых над неизвестными. Соответствующая виду операций классификация приведена на схеме (рис. 2.1).

Уравнения называются алгебраическими, если над неизвестными выполняется конечное число операций только следующего вида: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень и извлечение корня.

Например, каждое из следующих уравнений является алгебраическим:

$$x^2-3x+4=0;\quad \frac{x+1}{x+3}+\frac{4}{x+7}=1;\quad \sqrt{x-2}(x^2-4x-5)=0.$$

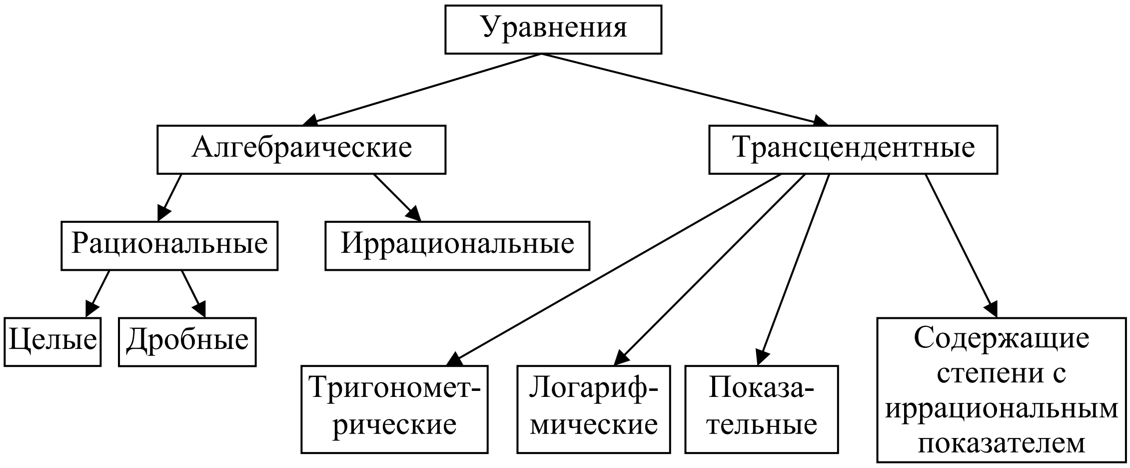


Рис. 2.1

Алгебраическое уравнение называется рациональным, если в нём отсутствует извлечение корня из выражения, содержащего неизвестные. Первые два из записанных выше уравнений – рациональные, а третье уравнение – иррациональное.

Рациональное уравнение называется целым, если в нем отсутствует деление на выражение, содержащее неизвестные величины. Например, $x^2-3x+4=0$.

2.1.2. Алгебраическое уравнение с одной переменной

Алгебраическим уравнением с одной переменной называется равенство $f(x)=g(x)$, $x\in M$, где $f(x)$ и $g(x)$ – алгебраические функции.

Областью допустимых значений переменной x уравнения $f(x)=g(x)$ называется множество значений x, при которых имеют смысл $f(x)$ и $g(x)$.

Следовательно, областью допустимых значений переменной x является пересечение областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Так, областью допустимых значений переменной x для уравнения $\sqrt{x+4}=\sqrt{-x}$ является пересечение областей определения функций $f(x)=\sqrt{x+4}$ и $g(x)=\sqrt{-x}$, т. е. множество, определяемое системой неравенств

$$\begin{cases} x+4\ge 0, \\ -x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -4, \\ x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-4,0].$$

Корнем (решением) уравнения называется значение переменной x, обращающее уравнение в верное числовое равенство.

Например, корнем уравнения $3x+12=0$ является число $x=-4$, поскольку $3\cdot(-4)+12\equiv 0$.

Уравнение $f(x) = g(x)$ на множестве M может иметь одно или несколько, или бесконечное множество решений, или не иметь их вообще. В последнем случае говорят, что множество решений пусто ($\varnothing$), или уравнение неразрешимо на этом множестве.

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать их отсутствие.

Процесс решения уравнения связан с преобразованиями, последовательно заменяющими одно уравнение другим до тех пор, пока не получится простое уравнение, алгоритм решения которого известен.

При этом используются два вида преобразований: переход к уравнению, равносильному данному, и переход к уравнению, являющемуся его следствием.

Два уравнения $f(x) = g(x)$ и $f_1(x) = g_1(x)$, определённые на множестве M, называются равносильными, или эквивалентными, на M, если их решения совпадают на этом множестве или они оба не имеют на нём решения.

Обозначается равносильность уравнений символически следующим образом:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f_1(x)=g_1(x),\quad x\in M\ .$$

К преобразованиям, сводящим уравнение к равносильному, относятся:

1) перенос члена уравнения с противоположным знаком из одной части уравнения в другую;

2) умножение (деление) обеих частей уравнения на неравное нулю число или выражение, имеющее смысл при всех допустимых значениях переменной;

3) возведение обеих частей уравнения в нечётную степень;

4) извлечение из обеих частей уравнения корня нечётной степени;

5) если $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на множестве M, то уравнение $f(x)=g(x)\Leftrightarrow[f(x)]^n=[g(x)]^n$, где $n\in\mathbb{N}$.

Уравнение $f_1(x) = g_1(x)$ называется следствием уравнения $f(x) = g(x)$, если при переходе от уравнения $f(x) = g(x)$ к уравнению $f_1(x) = g_1(x)$ не происходит потери корней, т. е. если все корни уравнения $f(x) = g(x)$ являются корнями уравнения $f_1(x) = g_1(x)$. Но уравнение $f_1(x)=g_1(x)$ может иметь решений больше, чем уравнение $f(x) = g(x)$:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow f_1(x)=g_1(x).$$

Например, уравнение $\sqrt{x-1}=x-3$ имеет корень $x=5$, а уравнение $x^2-7x+10=0$ имеет корни $x=2$, $x=5$. Поэтому второе уравнение является следствием первого, что можно коротко записать

$$\sqrt{x-1}=x-3 \Rightarrow x^2-7x+10=0.$$

Если функция строго монотонна на множестве M, а $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – функции, определённые на M со значениями в этом же множестве, тогда уравнение $f(\alpha(x))=f(\beta(x))$ равносильно уравнению $\alpha(x)=\beta(x)$, т. е. $\{f(\alpha(x))=f(\beta(x))\} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(x)=\beta(x), \\ \alpha(x)\in M, \\ \beta(x)\in M. \end{cases}$

Достаточно одного из следующих утверждений: $\alpha(x)\in M$ или $\beta(x)\in M$.

Пример. Решить уравнение

$$\arcsin(x^2-80{,}5)=\arcsin(x-8{,}5).$$

Функция $\arcsin\varphi(x)$ – возрастающая функция, определённая на множестве $-1\le\varphi(x)\le 1$. Поэтому при $\alpha(x)=x^2-80{,}5$ и $\beta(x)=x-8{,}5$ уравнение $\arcsin(x^2-80{,}5)=\arcsin(x-8{,}5)$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x^2-80{,}5=x-8{,}5, \\ -1\le x-8{,}5\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-72=0, \\ 7{,}5\le x\le 9{,}5 \end{cases} \Rightarrow x_1=-8; x_2=9; x=9\in[7{,}5;\ 9{,}5].$$

Ответ: $x=9$.

2.1.3. Простейшие алгебраические уравнения. Рациональные уравнения

Перечислим основные типы рациональных уравнений и способы их решения.

1. Линейным уравнением с одной переменной называется уравнение вида $ax+b=0$, $a\ne 0$. Данное уравнение имеет единственное решение, определяемое равенством $x=-b/a$.

2. Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c – некоторые числа и $a\ne 0$. Существование и вид корней квадратного уравнения зависят от значения дискриминанта квадратного уравнения, определяемого равенством $D=b^2-4ac$. При этом возможны следующие варианты:

а) если $D>0$, то уравнение имеет два различных действительных корня, которые находятся по формуле $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$;

б) если $D=0$, то уравнение имеет два равных действительных корня

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a};$$

в) если $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Частными видами квадратного уравнения являются следующие:

а) $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax+b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = -\dfrac{b}{a}; \end{array}\right.$

б) $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{c}{a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}, \text{если} -\dfrac{c}{a} \geq 0, \\ x_2 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}, \text{если} -\dfrac{c}{a} \geq 0, \\ \varnothing, \text{если} -\dfrac{c}{a} < 0; \end{array}\right.$

в) $ax^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 0$.

Если в квадратном уравнении коэффициент при первой степени x есть число чётное, то корни уравнения можно находить по упрощённой формуле

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D}}{a}, \text{ где } D = \frac{b^2}{4} - ac.$$

Квадратное уравнение с чётным коэффициентом при x можно решать выделением полного квадрата из квадратного трёхчлена.

Например, решить уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Сначала в левой части уравнения выделяем полный квадрат: $x^2 + 4x - 5 = (x^2 + 4x + 4) - 4 - 5 = (x+2)^2 - 9$. Далее решаем уравнение $(x+2)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = \pm 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = -5. \end{array}\right.$

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется приведённым, если $a=1$, его принято записывать в виде $x^2 + px + q = 0$. Заметим, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ в силу условия $a \neq 0$ равносильно уравнению $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$.

Следующая теорема устанавливает связь между корнями приведённого квадратного уравнения и его коэффициентами.

Теорема Виета. Если приведённое квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два действительных различных корня, то сумма его корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, т. е. $x_1 + x_2 = p$, а произведение корней равно свободному члену, т. е. $x_2 \cdot x_2 = q$.

2.1.4. Алгебраические уравнения степени n, n ≥ 2

Алгебраическим уравнением степени *n* называется уравнение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

где a_0, a_1, a_n – коэффициенты уравнения, причём $a_n \neq 0$.

Основными методами решения алгебраических уравнений степени *n* являются метод разложения многочлена на множители и метод замены переменной.

Следующие теоремы позволяют в некоторых случаях провести подбор корня уравнения и, применяя метод разложения на множители, понизить порядок уравнения, сводя его к квадратным и линейным уравнениям.

Теорема 1. Если x_0 – корень уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = a_n x^n + {}$ $+ a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, то $f(x)$ делится без остатка на $x - x_0$.

Теорема 2. Если все коэффициенты алгебраического уравнения являются целыми числами, то всякий целый корень уравнения является делителем свободного члена a_0 уравнения.

Таким образом, если известен один корень $x = x_0$ алгебраического уравнения $f(x) = 0$, то $f(x) = (x - x_0) g(x)$, где $g(x)$ – многочлен, степень которого равна $n - 1$, и нахождение остальных корней уравнения $f(x) = 0$ сводится к решению уравнения $g(x) = 0$.

Пример. Решить уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = 0.$$

Решение.

а) запишем делители числа 12: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12;

б) последовательно подставляя эти числа в уравнение, находим один из корней уравнения $x = 2$.

в) произведём деление многочлена «уголком» на разность $x-2$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^4-4x^3-13x^2+28x+12 & x-2 \\
\cline{2-2}
\underline{x^4-2x^3} \qquad\qquad\qquad\qquad & x^3-2x^2-17x-6 \\
-\,-2x^3-13x^2 \qquad\qquad & \\
\underline{-2x^3+4x^2} \qquad\qquad & \\
-\,-17x^2+28x \qquad & \\
\underline{-17x^2+34x} \qquad & \\
-\,-6x+12 & \\
\underline{-6x+12} & \\
0 &
\end{array}
$$

Получаем уравнение $(x-2)(x^3-2x^2-17x-6)=0$.

Выписывая делители числа –6 и убедившись в том, что $x=-3$ является корнем многочлена $x^3-2x^2-17x-6$, получаем равенство $(x-2)(x+3)(x^2-5x-2)=0$.

Решив и квадратное уравнение $x^2-5x-2=0$, укажем все четыре корня исходного уравнения: $\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=-3, \\ x_3=\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}, \\ x_4=\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}. \end{array}\right.$

Количество корней решённого уравнения иллюстрирует основную теорему алгебры.

Теорема. Каждое алгебраическое уравнение степени *n* имеет ровно *n* корней.

Среди этих корней могут быть не только действительные, но и комплексные числа.

При решении алгебраических уравнений степени $n > 2$ можно применять следующие приёмы:

1) вынесение общего множителя за скобки;

2) группировку членов многочлена с последующим вынесением общего множителя за скобки;

3) использование формул сокращённого умножения.

Пример 1. Решить уравнение $x^3+x^2+x+1=0$.

Решение. $x^3+x^2+x+1=0 \Leftrightarrow (x^3+x^2)+(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1)+(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ x^2+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x=-1$, $x^2+1\neq 0$ на множестве действительных чисел.

Ответ: $x=-1$.

Пример 2. Решить уравнение $x^3+4x+5=0$.

Решение. $x^3+1+4x+4=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)+4(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x^2-x+5=0, \quad \text{так как } D<0, x^2-x+5\neq 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=-1$.

Пример 3. Решить уравнение $126x^3+2x^2+3x+1=0$.

Решение. $126x^3+2x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow 125x^3+x^3+2x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow$ $125x^3+(x+1)^3=0 \Leftrightarrow (5x)^3=-(x+1)^3 \Leftrightarrow 5x=-(x+1) \Leftrightarrow 6x=-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{6}.$$

Ответ: $x=-1/6$.

Для понижения порядка уравнения также используется метод замены переменных.

Пример 4. Решить уравнение $(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+9=0$.

Решение. $(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x)+9=0$. Сделаем замену $2x^2+3x-1=t$. Тогда уравнение примет вид $t^2-5t+4=0$. Находим корни этого уравнения: $t_1=1$, $t_2=4$. Затем решаем два квадратных уравнения:

$$2x^2+3x-1=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1/2, \\ x_2=-2; \end{array}\right.$$

$$2x^2+3x-1=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=-5/2, \\ x_4=1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=-5/2$, $x=-2$, $x=1/2$, $x=1$.

2.1.5. Дробно-рациональные уравнения

Дробно-рациональным уравнением называется уравнение вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены.

Решение дробно-рационального уравнения следует начинать с нахождения области допустимых значений (ОДЗ) переменной, исключив те значения переменной, которые обращают знаменатель дроби $Q_m(x)$ в нуль.

Таким образом, решение уравнения $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$ равносильно решению системы $\begin{cases} P_n(x) = 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$ Далее решается целое алгебраическое уравнение $P_n(x) = 0$ методами, которые были рассмотрены ранее.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{x+1}{2x-2} = \frac{9}{2(x+4)} + \frac{1}{x-1}.$$

Решение. Находим область допустимых значений переменной x:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x-2 \neq 0, \\ x+4 \neq 0, \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq -4. \end{cases}$$

Приводим уравнение к виду $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_n(x) = 0, \\ Q_m(x) \neq 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} (x+4)(x+1) - 9(x-1) - 2(x+4) = 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = 1, \end{array} \right. \\ x \neq 1, \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Ответ: $x = 5$.

Как и при решении любых других уравнений, в некоторых случаях целесообразно применять метод замены переменных.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{x^2-2x}{4x-3}+5=\frac{16x-12}{2x-x^2}.$$

Решение. Находим область допустимых значений переменной x:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases}4x-3\neq 0,\\ 2x-x^2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 3/4,\\ x\neq 0, x\neq 2.\end{cases}$$

Делаем замену $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}=t$, $t\neq 0$, получаем и решаем уравнение $t+5=-\dfrac{4}{t} \Leftrightarrow \begin{cases}t^2+5t+4=0,\\ t\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1,\\ t=4.\end{array}\right.$ Переходим к переменной x и решаем два уравнения:

$$\frac{x^2-2x}{4x-3}=4 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-18x+12=0,\\ x\neq 3/4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=9+\sqrt{69},\\ x_2=9-\sqrt{69};\end{array}\right.$$

$$\frac{x^2-2x}{4x-3}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-6x+3=0,\\ x\neq 3/4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_3=3+\sqrt{6},\\ x_4=3-\sqrt{6}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=9\pm\sqrt{69}$, $x=3\pm\sqrt{6}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0.$$

Решение. Область допустимых значений переменной x есть множество $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Сделаем замену $x+\dfrac{1}{x}=t$. Возведём обе части равенства в квадрат $x+\dfrac{1}{x}=t$ и получим $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=t^2$, откуда находим $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$. Используя замену переменной, получаем уравнение $t^2+3t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t_1=-4,\\ t_2=1.\end{array}\right.$

Возвращаемся к переменной x и решаем два уравнения: $x+\dfrac{1}{x}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x+1=0,\\ x\neq 0\end{cases}$ (уравнение $x^2-x+1=0$ не имеет действительных корней, так как его дискриминант $D<0$) и $x+\dfrac{1}{x}=-4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x+1=0,\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l}x_1=-2+\sqrt{3},\\ x_2=-2-\sqrt{3}.\end{array}$$

Ответ: $x=-2\pm\sqrt{3}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$(x-3)(x+6)(x^2-2x-8)=126x^2.$$

Решение. Область допустимых значений переменной x есть множество $\mathbb{R}$.

Преобразуем уравнение таким образом, чтобы можно было сделать замену переменной. Для этого разложим трёхчлен x^2-2x-8 на множители: $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$. Тогда исходное уравнение примет вид $(x-3)(x+6)(x-4)(x+2)=126x^2$. Переставим множители в левой части уравнения: $(x-3)(x-4)(x+6)(x+2)=126x^2$. Поскольку $x=0$ не является корнем уравнения, обе части уравнения можно почленно разделить на x^2. После этого уравнение приобретает вид:

$$\left(x+\frac{12}{x}-7\right)\left(x+\frac{12}{x}+8\right)-126=0.$$

Далее делаем замену переменной $x+\dfrac{12}{x}=t,\ t\in\mathbb{R}$, и решаем полученное уравнение: $t^2+t-182=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=-14, \\ t_2=13. \end{cases}$ Возвращаясь к переменной x, получаем и решаем два уравнения:

$$x^2+14x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-7-\sqrt{37}, \\ x_2=-7+\sqrt{37} \end{array}\right. \text{ и } x^2-13x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=12. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=-7\pm\sqrt{37}$, $x=1$, $x=12$.

2.1.6. Уравнение, содержащее переменную под знаком модуля

По определению модуля, число a имеет модуль

$$|a|=\begin{cases} a, & a\ge 0; \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

Геометрически модуль числа есть расстояние от точки a на числовой прямой до начала координат.

При решении уравнения, содержащего переменную под знаком обычно одного модуля, следует на основании определения модуля разбить область допустимых значений переменной на интервалы, на каждом из которых выражение, стоящее под знаком модуля, сохраняет знак. На каждом полученном интервале следует записать уравнение без знака модуля и решить его. Объединение множеств решений, найденных на рассматриваемых интервалах области допустимых значений переменной, составляет множество всех решений уравнения.

1. Например, уравнение $f(|\varphi(x)|) = g(x)$ по определению модуля равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f(\varphi(x)) = g(x), \\ \varphi(x) \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(-\varphi(x)) = g(x), \\ \varphi(x) < 0. \end{cases}$$

Пример. $x^2 - 2|x-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2(x-1) = 2, \\ x - 1 \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + 2(x-1) = 2, \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x \ge 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + 2x - 4 = 0, \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = 2 \end{array}\right. \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x_3 = -1 - \sqrt{5}, \\ x_4 = -1 + \sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = 2, \\ x_3 = -1 - \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2$, $x = -1 - \sqrt{5}$.

2. Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$ можно решать двумя способами в зависимости от вида функций $f(x)$ и $g(x)$. По определению модуля уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases}$$

Пример. $|x-3| = x^2 - x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = x^2 - x - 2, \\ x - 3 \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x + 3 = x^2 - x - 2, \\ x - 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0, \\ x \ge 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = 5, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x \ge 3 \text{ (не имеет решения)} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = -\sqrt{5}, \\ x_3 = \sqrt{5}, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = -\sqrt{5}, \\ x_3 = \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pm\sqrt{5}$.

3. Уравнение $|f(x)| = g(x)$ имеет смысл при условии $g(x) \ge 0$, так как $|f(x)| \ge 0$, поэтому имеем $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Пример. $\left|x^2+x-3\right|=x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-3=x, \\ x\geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x^2-x+3=x, \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=3, \\ x\geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+2x-3=0, \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-\sqrt{3}, \\ x_2=\sqrt{3}, \end{array}\right. \\ x\geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_3=-3, \\ x_4=1, \end{array}\right. \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_4=1, \\ x_2=\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\sqrt{3}$, $x=1$.

4. Уравнение $|f(x)|=|g(x)|$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$

Пример. $\left|x^2-x-6\right|=\left|2x^2+x-1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-6=2x^2+x-1, \\ x^2-x-6=-2x^2-x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x+5=0, \\ 3x^2=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing, \\ x_1=-\sqrt{7/3}, \\ x_2=\sqrt{7/3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\pm\sqrt{7/3}$.

5. Если уравнение имеет вид $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\ldots+|f_n(x)|=g(x)$, т. е. содержит несколько модулей от функции одной переменной, то его удобно решать методом интервалов.

Сначала решаем уравнения $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, …, $f_n(x)=0$, т. е. находим точки, которые делят область допустимых значений переменной x на промежутки, на которых функции $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x)$ сохраняют знак. Затем, используя определение абсолютной величины, переходим от заданного уравнения к совокупности уравнений, полученных на каждом промежутке и не содержащих знак модуля, и решаем их.

Пример. Решить уравнение $|x-3|+|x+3|=8$.

Решение. Находим точки, при переходе через которые выражения, стоящие под знаком модуля, меняют знак. Имеем две такие точки: $x=3$ и $x=-3$. Таким образом, числовая прямая разбивается точками $x=3$, $x=-3$ на промежутки знакопостоянства функций $f_1(x)=x-3$ и $f_2(x)=x+3$.

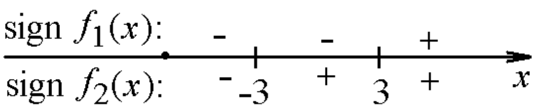


Рис. 2.2

Отметим над осью Ox знаки функции $f_1(x)$, а под осью Ox – знаки функции $f_2(x)$.

Решаем уравнение на каждом из промежутков:

$x < -3$: $\quad -x+3-x-3=8 \Leftrightarrow x=-4 \in (-\infty,-3)$;

$-3 \le x < 3$: $\quad -x+3+x+3=8 \Leftrightarrow 6 \ne 8$, при $x \in [-3,3)$ нет решений;

$x \ge 3$: $\quad x-3+x+3=8 \Leftrightarrow x=4 \in [3,\infty)$.

Объединяем найденные решения, получаем $x_{1,2}=\pm 4$.

Ответ: $x=\pm 4$.

Пример. Решить уравнение $\left|x^2-4\right|+\left|x^2-9\right|=2x+11$.

Решение. Снова применим метод интервалов. Находим нули функций $f_1(x)=x^2-4$ и $f_2(x)=x^2-9$, решая уравнения $x^2-4=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm 2$ и $x^2-9=0 \Leftrightarrow x_{3,4}=\pm 3$. Определим знаки функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

Рис. 2.3

Нанесём знаки каждой из функций $f_1(x)=x^2-4$ и $f_2(x)=x^2-9$ над и под числовой прямой:

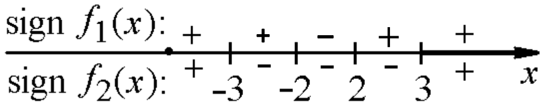


Рис. 2.4

Запишем уравнение на каждом промежутке без знака модуля и решим его. Получим

$x \in (-\infty,-3) \cup [3,\infty)$: $\quad x^2-4+x^2-9=2x-11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-3, \\ x_2=4 \end{array}\right. \Rightarrow x_1=4$, так как $x=-3 \notin (-\infty,-3)$;

$x \in [-3,-2] \cup [2,3)$: $\quad x^2-4-x^2+9=2x-11 \Leftrightarrow x_3=-3 \in [-3,-2]$;

$$x \in (-2,2): \quad -x^2+4-x^2+9=2x-11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_4=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \\ x_5=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \in (-2,2).$$

Ответ: $x=4$, $x=-3$, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

6. Уравнение вида $af^2(x)+b|f(x)|+c=0$ удобно решать заменой переменной $|f(x)|=t$. Найдя неотрицательный корень уравнения $t=t_0$, получаем два уравнения $f(x)=\pm t_0$, решая которые, находим значение x.

Пример. Решить уравнение $(x-2)^2-3|x-2|+2=0$.

Решение. Сделав замену переменной $|x-2|=t$, где $t\ge 0$, записываем и решаем уравнение $t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=1, \\ t_2=2. \end{array}\right.$ Возвращаясь к старой переменной, решаем два уравнения:

$$|x-2|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=-1, \\ x-2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=2; \end{array}\right.$$

$$|x-2|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=-2, \\ x-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=0, \\ x_4=4. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=0$, $x=1$, $x=3$, $x=4$.

2.1.7. Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную под знаком радикала.

Для решения иррациональных уравнений могут быть использованы следующие методы: метод возведения радикала в степень, метод замены переменной, метод приведения к смешанной системе, содержащей уравнения и неравенства. Приведём схемы и приемы решения некоторых видов уравнений.

1. Иррациональное уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=g^{2n}(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$

2. Уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0 \text{ (или } g(x)\ge 0). \end{cases}$

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x+5}=x-1$.

Решение. В соответствии со схемой первого пункта имеем

$$\sqrt{x+5}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=(x-1)^2, \\ x+5\ge 0, \\ x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4=0, \\ x\ge -5, \\ x\ge 1 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=4, \end{array}\right. \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: $x=4$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[3]{2x-1}=\sqrt{x}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{2x-1}=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\ge 0, \\ x\ge 0, \\ (\sqrt[3]{2x-1})^6=(\sqrt{x})^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1/2, \\ x\ge 0, \\ x^3-4x^2+4x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1/2, \\ (x-1)(x^2-3x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1/2, \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-10}=1$.

Решение. Находим область допустимых значений переменной x: ОДЗ: $\begin{cases} x\ge -2, \\ x\ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 5$. Преобразуем уравнение так, чтобы обе его части стали неотрицательными: $\sqrt{x+2}=1+\sqrt{2x-10}$. Тогда после возведения обеих частей уравнения в квадрат получим уравнение, равносильное данному на ОДЗ: $(\sqrt{x+2})^2=(1+\sqrt{2x-10})^2 \Leftrightarrow$ $x+2=1+2\sqrt{2x-10}+2x-10 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-10}=11-x$. К полученному уравнению применяем первую схему:

$$\begin{cases} x\ge 5, \\ 11-x\ge 0, \\ (2\sqrt{2x-10})^2=(11-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\le x\le 11, \\ x^2-30x+161=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=7, \quad x=23\notin[5,11].$$

Ответ: $x=7$.

Замечание. В некоторых случаях отыскание ОДЗ является процессом не менее трудоемким, чем решение уравнения. Тогда можно решить уравнение и ограничиться проверкой его корней, что особенно важно в случае возведения обеих частей уравнения в четную степень.

Пример 4. Решить уравнение $x^2+3x-10+3\sqrt{x(x+3)}=0$.

Решение. Заметив, что $x(x+3)=x^2+3x$, сделаем замену переменной $\sqrt{x^2+3x}=t$, $t\ge 0$, и решим уравнение $t^2-10+3t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-5, \\ t_2=2. \end{array}\right.$

Переходим к переменной x: $\sqrt{x^2+3x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-4, \\ x_2=1. \end{array}\right.$

Так как $t=-5<0,$ то $\sqrt{x^2+3x} \neq -5$.

Ответ: $x=-4$, $x=1$.

При решении иррациональных уравнений для упрощения решения можно использовать следующие свойства функций, входящих в уравнение.

Если функция $\varphi(x)$ строго возрастает на промежутке X и $\varphi(x_0) \in X$ для любого $x_0 \in X$, то уравнение $\varphi(x)=x$ и $\varphi(\varphi(x))=x$ равносильны на промежутке X.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{\sqrt{|x|-1}+\frac{3}{4}}+\frac{7}{4}=x.$$

Решение. $x \in \left[\frac{7}{4},\infty\right)$.

Получаем $\sqrt{\sqrt{|x|-1}+\frac{3}{4}}+\frac{7}{4}=x \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{x-1}+\frac{3}{4}}+\frac{7}{4}=x$. Представив левую часть уравнения в виде $\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+\frac{7}{4}\right)-1}+\frac{7}{4}$, убеждаемся, что она является композицией $\varphi(\varphi(x)),$ где $\varphi(x)=\sqrt{x-1}+\frac{7}{4}$.

Проверяем условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x)$. Очевидно, что $\varphi(x)=\sqrt{x-1}+\frac{7}{4}$ – строго возрастающая на области её определения $x \geq 1$.

Убедимся, что для любого $x \in \left[\frac{7}{4},\infty\right)$ значение функции $\varphi(x)$ принадлежит множеству $\left[\frac{7}{4},\infty\right)$. В самом деле, для любого значения $x \geq \frac{7}{4}$ значение $\varphi(x)=\sqrt{x-1}+\frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$. Следовательно, функция $\varphi(x)$ отображает множество $\left[\frac{7}{4},\infty\right)$ в себя.

Поэтому с учетом равносильности уравнений $\varphi(x)=x$ и $\varphi(\varphi(x))=x$ имеем

$$\sqrt{\sqrt{|x|-1}+\frac{7}{4}-1}+\frac{7}{4}=x\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=x-\frac{7}{4},\\ x\ge\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{16},\\ x\ge\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{13}{4},\\ x=\frac{5}{4},\end{array}\right.\\ x\ge\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{13}{4}.$$

Ответ: $x=\frac{13}{4}$.

Пример 6. Решить уравнение $x^3-24=\sqrt[3]{x+24}$.

Решение. ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. Выполним равносильное преобразование уравнения: $(x^3-24)^3-24=x$. Замечаем, что левая часть уравнения представляет собой композицию $\varphi(\varphi(x))$ функции $\varphi(x)=x^3-24$.

Функция $\varphi(x)=x^3-24$ является строго возрастающей на $\mathbb{R}$. Кроме того, для всех $x\in\mathbb{R}$ $\varphi(x)\in\mathbb{R}$, т. е. функция $\varphi(x)$ отображает множество $\mathbb{R}$ в себя.

Поэтому $(x^3-24)^3-24=x\Leftrightarrow x^3-24=x\Leftrightarrow x^3-x-24=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x^3-27)-(x-3)=0\Leftrightarrow(x-3)(x^2+3x+9)-(x-3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-3)(x^2+3x+8)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-3=0,\\ x^2-3x+8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,\\ \varnothing\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3$.

Ответ: $x=3$.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

Решение. ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. На области допустимых значений переменной x имеем цепочку эквивалентных уравнений

$\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+34}=1+\sqrt[3]{x-3}\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x+34})^3=(1+\sqrt[3]{x-3})^3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+34=1+3\sqrt[3]{x-3}+3\sqrt[3]{(x-3)^2}+x-3$.

Сделаем замену: $\sqrt[3]{x-3}=t$, $t\in\mathbb{R}$, тогда получим $3t^2+3t-36=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t^2+t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4,\\ t=3.\end{array}\right.$ Возвращаемся к старой переменной:

$\sqrt[3]{x-3}=-4\Leftrightarrow x-3=-64\Leftrightarrow x=-61;$

$\sqrt[3]{x-3}=3\Leftrightarrow x-3=27\Leftrightarrow x=30.$

Ответ: $x=-61$, $x=30$.

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{3x+2}$.

Решение. ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. На области допустимых значений переменной x имеем цепочку эквивалентных уравнений

$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{3x+2} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x+1})^3=(\sqrt[3]{3x+2})^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1+2x+1+3\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{(2x+1)^2}=3x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{2x+1}(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x+1})=0$. Из исходного уравнения следует, что $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{3x+2}$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{3x+2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-1/2, \\ x=-2/3. \end{array}\right.$

Ответ: $x=-1,\ x=-\dfrac{1}{2},\ x=-\dfrac{2}{3}$.

При решении уравнения подобным способом в общем случае могут получиться посторонние корни.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1.$$

Решение. ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. Возведя обе части уравнения в куб, получаем

$$2x-1+3\sqrt[3]{(2x-1)^2}\cdot\sqrt[3]{x-1}+3\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}+x-1=1;$$

$$3x-3+3\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1})=0,$$

так как по условию $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$, то

$\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1})=0 \Rightarrow x=1, x=0$.

Сделав проверку, убеждаемся, что $x=0$ – посторонний корень.

Ответ: $x=1$.

2.1.8. Системы алгебраических уравнений

Множество уравнений, для которых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющие одновременно всем уравнениям, называется системой уравнений.

При решении системы уравнений применяются различные методы: метод исключения неизвестных, метод замены переменных, метод подстановки.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x|+|y|=3, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Решение. Решаем систему методом подстановки

$$\begin{cases}|x|+|y|=3,\\ x^2+y^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|+|y|=3,\\ |x|^2+|y|^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=3-|y|,\\ (3-|y|)^2+|y|^2=5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=3-|y|,\\ |y|^2-3|y|+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=3-|y|,\\ \left[\begin{array}{l}|y|=2,\\ |y|=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|=3-|y|,\\ |y|=2;\end{cases}\\ \begin{cases}|x|=3-|y|,\\ |y|=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|=1,\\ |y|=2;\end{cases}\\ \begin{cases}|x|=2,\\ |y|=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Заметим, что если (x_0, y_0) – решение системы уравнений, то $(-x_0, y_0)$, $(x_0,-y_0)$, $(-x_0,-y_0)$ – тоже её решения. Пусть $x\ge 0, y\ge 0$. Тогда

$$\begin{cases}x+y=3,\\ x^2+y^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3-y,\\ (3-y)^2+y^2=5\end{cases}\Rightarrow y^2-3y+2=0\Rightarrow\begin{cases}y_1=1,\\ x_1=2;\end{cases}\begin{cases}y_2=2,\\ x_2=1.\end{cases}$$

Ответ: $(x,y)\in\{(-1,-2);(-1,2);(1,-2);(1,2);(-2,-1);(-2,1);(2,-1);(2,1)\}$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}y^2-2xy-3x^2=0,\\ y^2-xy-2x^2=4.\end{cases}$$

Решение. $\begin{cases}y^2-2xy-3x^2=0,\\ y^2-xy-2x^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y-x)^2-4x^2=0,\\ (y-x)^2+xy-3x^2=4.\end{cases}$

Вычтем из первого уравнения второе, получим равносильную систему

$$\begin{cases}(y-x)^2-4x^2=0,\\ -x^2-xy=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+y)=4,\\ \left[\begin{array}{l}y=-x,\\ y=3x\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x(x+y)=4,\\ y=-x;\end{cases}\\ \begin{cases}x(x+y),=4\\ y=3x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\varnothing,\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1,\end{array}\right.\\ y=3x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1,\\ y=3x;\end{cases}\\ \begin{cases}x=1,\\ y=3x\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow(x,y)\in\{(-1;-3),(1;3)\}.$$

Ответ: $(x,y)\in\{(-1;\ -3),(1;\ 3)\}$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x^2+xy}=3,\\ x+y+x^2+xy=5.\end{cases}$$

Решение. Сделаем замену переменных: $\begin{matrix} \sqrt{x+y}=u, & u\ge 0; \\ \sqrt{x^2+xy}=v, & v\ge 0. \end{matrix}$ Тогда

$$\begin{cases} u+v=3, \\ u^2+v^2=5, \\ u\ge 0, \\ v\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3-v, \\ (3-v)^2+v^2=5, \\ u\ge 0, \\ v\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3-v, \\ v^2-3v+2=0, \\ u\ge 0, \\ v\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3-v, \\ \left[\begin{array}{l} v=1, \\ v=2, \end{array}\right. \\ u\ge 0, \\ v\ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (u,v)\in\{(2,\ 1);\ (1,\ 2)\}$.

Возвращаемся к старой переменной и решаем две системы уравнений: $\begin{cases} \sqrt{x+y}=2, \\ \sqrt{x^2+xy}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4, \\ x^2+xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4, \\ 4x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3,75, \\ x=1/4; \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}=1, \\ \sqrt{x^2+xy}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4, \\ x(x+y)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3, \\ x=4. \end{cases}$$

Ответ: $(0,25;\ 3,75)$, (4, –3).

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x(x+y+z)=7, \\ y(x+y+z)=14, \\ z(x+y+z)=28. \end{cases}$$

Решение. Очевидно, что $x=0$, $y=0$, $z=0$ не являются решением системы. Следовательно, $x\ne 0$, $y\ne 0$, $z\ne 0 \Rightarrow x+y+z\ne 0$.

Сложим уравнения системы и вынесем $(x+y+z)$ за скобки. Получаем $x(x+y+z)+y(x+y+z)+z(x+y+z)=49 \Leftrightarrow (x+y+z)^2=49 \Leftrightarrow x+y+z=\pm 7.$

Подставляя значения суммы $x+y+z$ в уравнения системы, получаем $\begin{cases} \pm 7x=7, \\ \pm 7y=14, \\ \pm 7z=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1, \\ y=\pm 2, \\ z=\pm 4. \end{cases}$

Ответ: $\{(1;\ 2;\ 4),(-1;\ -2;\ -4)\}$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2-4x+7, \\ y|x-2|=4. \end{cases}$$

Решение. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 7, \\ y|x-2| = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (x-2)^2 + 3, \\ y|x-2| = 4. \end{cases}$ Так как $x - 2 \neq 0$, в силу второго уравнения $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 7, \\ y|x-2| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4}{|x-2|}, \\ \dfrac{4}{|x-2|} = |x-2|^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4}{|x-2|}, \\ |x-2|^3 + 3|x-2| - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4}{|x-2|}, \\ |x-2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 1, \end{array} \right. \\ y = 4. \end{cases}$$

Ответ: $(x,\ y) \in \{(1;\ 4),\ (3;\ 4)\}$.

Упражнения

Решить уравнения

1. $\dfrac{(2x-3)^2}{2} = \dfrac{6-4x}{5}$

Ответ: $x = 1{,}5$; $x = 1{,}1$

2. $\dfrac{3x-2}{x-3} = \dfrac{x+2}{x+3}$

Ответ: $x = 0$; $x = -4$

3. $\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{x+2}{x-2} = 3\dfrac{1}{3}$

Ответ: нет решений

4. $\left|x^2 + 2x + 3\right| = 3x + 45$

Ответ: $x = 7$; $x = -6$

5. $x^2 - 3\sqrt{x^2} - 4 = 0$

Ответ: $x = \pm 2$

6. $x|x| + 7x + 12 = 0$

Ответ: $x = \dfrac{7 - \sqrt{97}}{2}$

7. $x^3 + 8 = 3x|x+2|$

Ответ: $x = -2$; $x = 1$; $x = 4$

8. $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$

Ответ: $x = \pm 1$; $x = -2$; $x = 3$

9. $(x^2 + 4x)(x^2 + x - 6) = (x^3 - 9x)(x^2 + 2x - 8)$

Ответ: $x = -4$; $x = -3$; $x = 0$; $x = 2$; $x = 4$

10. $x^3 + \dfrac{1}{x^3} + x^2 + \dfrac{1}{x^2} + x + \dfrac{1}{x} = 6$

Ответ: $x = 1$

11. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$

Ответ: $x = -6$; $x = -4$; $x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$

12. $\dfrac{2x^2 - 5x + 4}{3x-2} + \dfrac{15x - 10}{2x^2 - 5x + 4} = 6$

Ответ: $x = 1$; $x = 3$; $x = 5 \pm 3\sqrt{2}$

13. $\sqrt{5 + |x-2|} = 1 - x$

Ответ: $x = -2$

14. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}-3=0$

Ответ: $x=1$

15. $\sqrt{x+2}=2x-5$

Ответ: $x=\dfrac{21+\sqrt{73}}{8}$

16. $\dfrac{\sqrt[4]{x^4-16}-\sqrt[6]{x^3-6}}{3x-x^2-2}=0$

Ответ: нет решений

17. $\sqrt[3]{x+44}-\sqrt[3]{x-19}=3$

Ответ: $x=-45$; $x=20$

Решить системы уравнений

1. $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13, \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1 \end{cases}$

Ответ: (5; 3)

2. $\begin{cases} x+|y|=2, \\ 3x+|y|=4 \end{cases}$

Ответ: (1; 1); $(1;-1)$

3. $\begin{cases} x+y=-2, \\ y+z=-1, \\ x+z=3 \end{cases}$

Ответ: $(1;-3;2)$

4. $\begin{cases} x+y^2=2, \\ 2y^2+x^2=3 \end{cases}$

Ответ: (1; 1); $(1;-1)$

5. $\begin{cases} x^2=xy, \\ x^2y=4y \end{cases}$

Ответ: (0; 0); (2; 2); $(-2;-2)$

6. $\begin{cases} 3x^2+xy-18x-4y+24=0, \\ 5x^2+xy-24x-4y+16 \end{cases}$

Ответ: $(-1;9)$; $(4;y)$, где $y\in\mathbb{R}$

2.2. Алгебраические неравенства

2.2.1. Основные понятия

Прежде чем перейти к решению неравенств, напомним основные определения и свойства числовых неравенств. Говорят, что число *a* больше числа *b*, если разность $a-b$ есть положительное число. Число *a* меньше числа *b*, если разность $a-b$ отрицательна. Числовые неравенства обладают следующими свойствами:

1) если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$;
2) если $a>b$ и $c\in\mathbb{R}$, то $a+c>b+c$;
3) если $a>b$ и $c>0$, то $a\cdot c>b\cdot c$;
4) если $a>b$ и $c<0$, то $a\cdot c<b\cdot c$;
5) если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$;
6) если $a>b>0$ и $c>d>0$, то $a\cdot c>b\cdot d$;
7) если $a>b>0$ и $n\in\mathbb{N}$, то $a^n>b^n \Leftrightarrow a^n>b^n$, то $a>b$ (в случае нечётного числа *n* условие $b>0$ избыточно).

Неравенством с одной переменной называют каждое из следующих выражений:

$$f(x)<g(x)\ (f(x)\le g(x)),\ f(x)>g(x)\ (f(x)\ge g(x)).$$

Областью допустимых значений переменной x называют общую часть областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства называются равносильными, если множества их решений совпадают. (Неравенства, не имеющие решений, также равносильны.)

Например, неравенства $f(x) < g(x)$ и $g(x) > f(x)$ равносильны, что записывается следующим образом:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x).$$

Неравенства $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x)$, если области определения функций $f(x), g(x), \varphi(x)$ совпадают.

Неравенства $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x)$, если $\varphi(x) > 0$ в области определения функций $f(x), g(x)$.

Неравенства $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)\varphi(x) > g(x)\varphi(x)$, если $\varphi(x) < 0$ в области определения функций $f(x), g(x)$.

2.2.2. Линейные неравенства с одной переменной, системы и совокупности неравенств

Линейным неравенством с одной переменной называют выражение вида $ax + b < cx + d$. С помощью свойств неравенств его приводят к виду

$$Ax < B \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{B}{A}, & \text{если } A > 0; \\ x > \dfrac{B}{A}, & \text{если } A < 0. \end{cases}$$

Если $A = 0$, $B < 0$, то неравенство имеет бесконечное множество решений, если же $A = 0$, $B > 0$, то неравенство не имеет решений.

Пример. Решить неравенство

$$2(x-1) + 3(2x+4) < 4(x+7) + 6.$$

Решение. Используя свойства неравенств, преобразуем данное неравенство и получим

$$2x - 2 + 6x + 12 < 4x + 28 + 6 \Leftrightarrow 4x < 24 \Leftrightarrow x < 6.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 6)$.

Говорят, что несколько неравенств образуют систему неравенств, если следует найти все числа, каждое из которых является решением каждого из указанных неравенств.

Система $\begin{cases} ax+b<0, \\ cx+d<0 \end{cases}$ является примером системы двух линейных неравенств с одной переменной.

Пример. Решить систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{4}<5-\dfrac{1-2x}{3}, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{4}>\dfrac{5x}{2}-\dfrac{7}{8}. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{4}<5-\dfrac{1-2x}{3}, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{4}>\dfrac{5x}{2}-\dfrac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x<53, \\ -2x>\dfrac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-13{,}5, \\ x<-\dfrac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left(-13{,}5;\ -\dfrac{7}{16}\right).$

Рис. 2.5

На рис. 5 приведена геометрическая иллюстрация решения системы.

Ответ: $x\in\left(-13{,}5;\ -\dfrac{7}{16}\right)$.

Говорят, что несколько неравенств образуют совокупность неравенств, если следует найти все числа, каждое из которых является решением хотя бы одного из заданных неравенств.

Совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} ax+b<0, \\ cx+d<0 \end{array}\right.$ является примером совокупности двух линейных неравенств с одной переменной.

Пример. Решить совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 1+\dfrac{3-x}{3}\le\dfrac{2x-1}{5}, \\ -1>4x-4. \end{array}\right.$

Решение. $\left[\begin{array}{l} 1+\dfrac{3-x}{3}\le\dfrac{2x-1}{5}, \\ -1>4x-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11x\ge 33, \\ 4x<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3, \\ x<\dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$

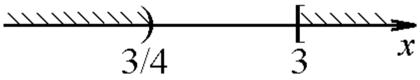


Рис. 2.6

На рис. 6 приведена геометрическая иллюстрация решения совокупности неравенств.

Ответ: $x\in\left(-\infty,\ \dfrac{3}{4}\right)\cup[3,\ +\infty)$.

2.2.3. Алгебраические неравенства второй степени с одной переменной

Неравенством второй степени с одной переменной называют одно из неравенств $ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c<0$.

При решении квадратных неравенств используют свойства квадратной функции $y=ax^2+bx+c$ и особенности расположения её графика. При этом знак квадратного трехчлена ax^2+bx+c существенно зависит от знака дискриминанта $D=b^2-4ac$ и знака первого коэффициента a. Приведём соответствующую геометрическую иллюстрацию:

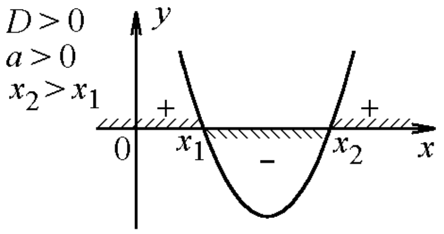


Рис. 2.7

$$y=ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$$
$$y=ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow x\in(x_1,x_2)$$

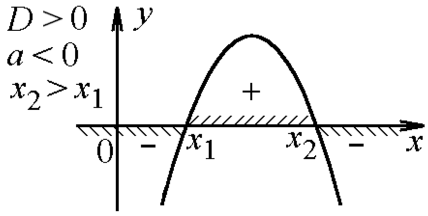


Рис. 2.8

$$y=ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x\in(x_1,x_2)$$
$$y=ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$$

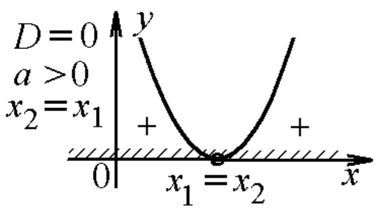


Рис. 2.9

$$y=ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$$
$$y=ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow \{x\}=\varnothing$$

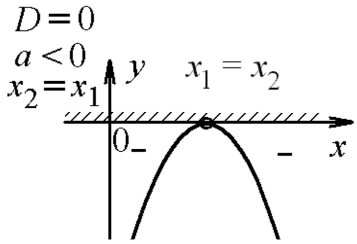


Рис. 2.10

$$y=ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow \{x\}=\varnothing$$
$$y=ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$$

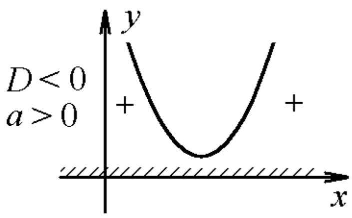


Рис. 2.11

$$y=ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,+\infty)$$
$$y=ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow \{x\}=\varnothing$$

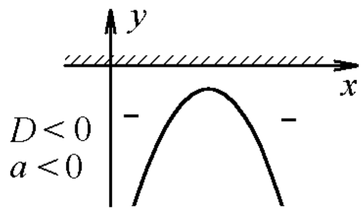


Рис. 2.12

$$y=ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow \{x\}=\varnothing$$
$$y=ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,+\infty)$$

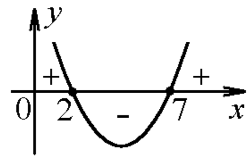


Рис. 2.13

Пример 1. Решить неравенство $x^2-9x+14>0$.

Решение. Имеем $a=1>0$, $D=25>0$, корни трехчлена $x_1=2$, $x_2=7$. Используя геометрическую интерпретацию (рис. 13), получаем $x\in(-\infty,2)\cup(7,\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty,\ 2)\cup(7,\ \infty)$.

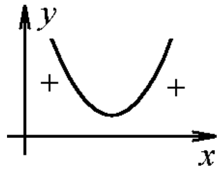


Рис. 2.14

Пример 2. Решить неравенство $2x^2-5x+7\le 0$.

Решение. Имеем $a=2>0$, $D=-31<0$, следовательно, график квадратного трехчлена (рис. 14) расположен выше оси Ox и неравенство не имеет решений.

Ответ: $\{x\}=\varnothing$.

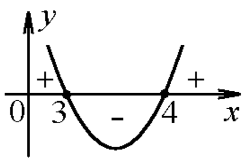


Рис. 2.15

Пример 3. Решить неравенство $x^2-7x+12<0$.

Решение. Имеем $a=1>0$, $D=1>0$, корни трехчлена $x_1=3$, $x_2=4$. В соответствии с графической иллюстрацией (рис. 15) получаем $x\in(3;\ 4)$.

Ответ: $x\in(3;\ 4)$.

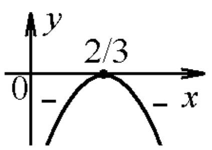


Рис. 2.16

Пример 4. Решить неравенство $12x-9x^2-4\le 0$.

Решение. Имеем $a=-9<0$, $D=0,$корни трехчлена $x_1=x_2=\dfrac{2}{3}$. Ветви параболы направлены вниз (рис. 16), следовательно, $x\in(-\infty,+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty,+\infty)$.

2.2.4. Рациональные и дробно-рациональные неравенства

Дробно-рациональным неравенством называется неравенство вида $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}>K$ $\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}<K\right)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – многочлены степени n и m; K – число.

Для решения данных неравенств удобно использовать следующую схему:

1. Указать область допустимых значений переменной x, $\varphi(x)\ne 0$. Пусть это будет $x\in(a,\ b)$.

2. $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}>K \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-K\varphi(x)}{\varphi(x)}>0 \Leftrightarrow [f(x)-K\varphi(x)]\varphi(x)>0$.

3. Разложить левую часть неравенства (если это возможно) на множители $[f(x)-K\varphi(x)]\varphi(x)>0 \Leftrightarrow (x-x_1)^{K_1}(x-x_2)^{K_2}\dots(x-x_r)^{K_r}t(x)>0$, где $t(x)$ – многочлен, не имеющий действительных корней в области определения неравенства.

4. Использовать метод интервалов:

а) на координатной прямой отметить область определения неравенства $x \in (a,b)$ и разбить ее точками, соответствующими нулям функции $[f(x) - K\varphi(x)]\varphi(x)$ на интервалы, в каждом из которых функция $[f(x) - K\varphi(x)]\varphi(x)$ сохраняет знак;

б) затем определить знак функции, например, в крайнем справа интервале $(x_r,\, b)$;

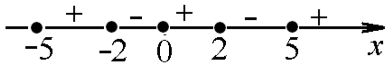
в) переходя от интервала $(x_r,\, b)$ к интервалу $(x_{r-1},\, x_r)$, изменить знак функции в интервале $(x_{r-1},\, x_r)$, если множитель входит в разложение в нечетной степени, и не менять знак, если множитель входит в разложение в четной степени. Аналогично определить знак функции в интервале $(x_{r-2},\, x_{r-1})$ и т. д.

Метод интервалов можно использовать и для решения квадратных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $(2x^2 + 3x + 4)(x + 3) \geq 0$.

Решение. Решаем уравнение $(2x^2 + 3x + 4)(x + 3) = 0$. Дискриминант уравнения $2x^2 + 3x + 4 = 0: D = -23$, следовательно, $2x^2 + 3x + 4 > 0$ при любых $x \in (-\infty, +\infty)$ и неравенство $(2x^2 + 3x + 4)(x + 3) \geq 0$ выполняется при $x + 3 \geq 0$, т. е. при $x \geq -3$.
Ответ: $x \in [-3, +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $(25x - x^3)(4 - x^2) \leq 0$.

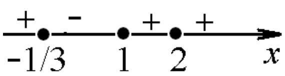
Решение. Разложим левую часть неравенства на множители: $x(5-x)(5+x)(2-x)(2+x) \leq 0$. Найдём корни многочлена: $x = 0$, $x = 5$, $x = -5$, $x = 2$, $x = -2$. Определим знаки многочлена на каждом интервале: 

.

Ответ: $x \in (-\infty,\, -5] \cup [-2,\, 0] \cup [2,\, 5]$.

Пример 3. Решить неравенство $(x^2 - 4x + 4)(3x^2 - 2x - 1) \leq 0$.

Решение. Решаем уравнение $3x^2 - 2x - 1 = 0$: $x = 1$, $x = -1/3$, и разложим левую часть неравенства на множители: $(x-2)^2(x-1)\left(x + \dfrac{1}{3}\right) \leq 0$.

Определим знак многочлена на каждом интервале: 

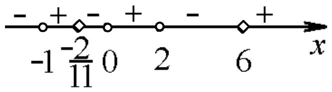
.

Ответ: $x \in \left[-\dfrac{1}{3},\, 1\right] \cup \{2\}$.

Пример 4. Решить неравенство $\frac{21}{x+1} < \frac{16}{x-2} - \frac{6}{x}$.

Решение. Находим ОДЗ: $x \neq -1$, $x \neq 2$, $x \neq 0$. Перенесём всё в левую часть и приведём к общему знаменателю. Получим неравенство

$$\frac{11x^2 - 64x - 12}{x(x+1)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{11(x-6)\left(x + \frac{2}{11}\right)}{x(x+1)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+1)(x-2)(x-6)(11x+2) < 0.$$

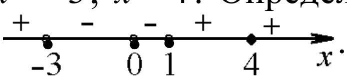
Находим корни числителя: $x_1 = 6$, $x_2 = -2/11$. Определим знаки многочлена: 

.

Ответ: $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{11}, 0\right) \cup (2, 6)$.

Пример 5. Решить неравенство $\frac{x^2(x-1)(x+3)^3(x-4)^4}{x^2+1} \geq 0$.

Решение. Находим ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

Поскольку $x^2 + 1 > 0$ при $x \in (-\infty, \infty)$, то исходное неравенство равносильно неравенству $x^2(x-1)(x+3)^3(x-4)^4 \geq 0$. Найдём нули многочлена: $x = 0$, $x = 1$, $x = -3$, $x = 4$. Определим знаки многочлена в полученных интервалах: 

.

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup [1; 4] \cup [4; \infty)$.

2.2.5. Алгебраические неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, область допустимых значений следует разбить на интервалы, в каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. Затем неравенство решается на каждом таком интервале и полученные решения объединяются в множество решений исходного неравенства.

Пример 1. Решить неравенство $x + |x+1| > 2$.

Решение. Точкой $x = -1$ числовая прямая разбивается на два промежутка $(-\infty, -1)$ и $[-1, \infty)$. С учетом разбиения заданное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x < -1, \\ x - x - 1 > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -1, \\ x + x + 1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ -1 > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -1, \\ 2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing \vee x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Первая система неравенств не имеет решения, поэтому получаем $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Рассмотрим схемы решения некоторых неравенств с модулем.

1) Решение неравенства $|f(x)| < g(x)$ на множестве определения функций $f(x)$ и $g(x)$ при $g(x) > 0$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x); \end{cases}$ при $g(x) \le 0$ неравенство не имеет решений. В частности, неравенство $|f(x)| < a$ при $a > 0$ равносильно системе $-a < f(x) < a$, а при $a \le 0$ не имеет решений.

Пример 2. Решить неравенство $|x^2 + 2x| \le x$.

Решение. Так как неравенство $|x^2 + 2x| \le x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x \le x, \\ x^2 + 2x \ge -x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \le 0, \\ x^2 + 3x \ge 0, \end{cases}$ решением первого неравенства системы является множество $x \in [-1, 0]$, а второго неравенства $x \in (-\infty, -3] \cup [0, \infty)$, поэтому решением системы является $x = 0$. Геометрическая иллюстрация приведена на рис. 17.

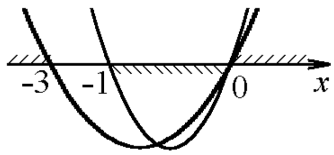


Рис. 2.17

Ответ: $x = 0$.

Пример 3. Решить неравенство $|x - 5| < 9$.

Решение. $|x - 5| < 9 \Leftrightarrow -9 < x - 5 < 9 \Rightarrow -4 < x < 14$.

Ответ: $x \in (-4, 14)$.

2) Неравенство $|f(x)| > g(x)$ в области допустимых значений равносильно совокупности неравенств $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right.$ В частности, неравенство $|f(x)| > a$ при $a \ge 0$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{array} \right.$ При $a < 0$ неравенство $|f(x)| > a$ справедливо при всех значениях *x* из области определения функции $f(x)$.

Пример 4. Решить неравенство $\left|x^2-2x\right| \geq 12-x^2$.

Решение. В соответствии с указанной схемой $\left|x^2-2x\right| \geq 12-x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x \geq 12-x^2, \\ x^2-2x \leq x^2-12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-6 \geq 0, \\ x \geq 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty,\ -2] \cup [3, +\infty), \\ x \in [6, +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty,\ -2] \cup [3,\ +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty,\ -2] \cup [3,\ +\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство $\left|2+\dfrac{1}{x}\right| > 3$.

Решение. Неравенство $\left|2+\dfrac{1}{x}\right| > 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+\dfrac{1}{x} > 3, \\ 2+\dfrac{1}{x} < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}-1 > 0, \\ \dfrac{1}{x}+5 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ -\dfrac{1}{5} < x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{5};\ 0\right) \cup (0;\ 1).$$

Ответ: $x \in \left(-\dfrac{1}{5};\ 0\right) \cup (0;\ 1)$.

3) Неравенство вида $\left|f_1(x)\right| + \left|f_2(x)\right| + \ldots + \left|f_k(x)\right| < g(x)$, содержащее несколько различных функций под знаком модуля, рационально решать методом интервалов.

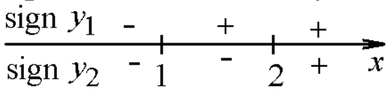
На числовой прямой отмечаем значения *x*, при которых функция, стоящая под знаком модуля, равна нулю. Эти точки разбивают прямую на интервалы, каждый из которых является интервалом знакопостоянства функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$.

Затем на каждом из интервалов неравенство решается без знака абсолютной величины. Объединяя найденные на всех интервалах решения исходного неравенства, получаем множество всех его решений.

Пример 6. Решить неравенство $|x-1| + |x-2| > 3+x$.

Решение. Находим нули функций $y_1 = x-1$ и $y_2 = x-2$ $\Leftrightarrow x=1$, $x=2$.

Точки $x=1$, $x=2$ разбивают числовую прямую на три промежутка: $x \geq 2$, $1 \leq x < 2$, $x < 1$;



.

Над каждым из промежутков числовой прямой поставлены знаки функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Исходное неравенство равносильно совокупности трех систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\ x-1+x-2>3+x;\end{cases}\Leftrightarrow\\ \begin{cases}1\le x<2,\\ x-1+2-x>3+x;\end{cases}\Leftrightarrow\\ \begin{cases}x<1,\\ 1-x+2-x>3+x\end{cases}\Leftrightarrow\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\ x>6;\end{cases}\Leftrightarrow x>6;\\ \begin{cases}1\le x<2,\\ x<-2;\end{cases}\Leftrightarrow \text{система не имеет решений;}\\ \begin{cases}x<1,\\ 3x<0\end{cases}\Leftrightarrow x<0.\end{array}\right.$$

Решением неравенства являются два промежутка: $x\in(-\infty,\ 0)\cup(6,\ +\infty)$.
Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$.

4) Решение неравенства вида $|f(x)|>|g(x)|$ можно осуществить методом интервалов. Однако неравенство подобного вида рациональнее решать переходом к неравенству вида

$$f^2(x)>g^2(x).$$

Пример 7. Решить неравенство $|x-2|<|x-4|$.

Решение. В соответствии с указанной схемой неравенство $|x-2|<|x-4|\Leftrightarrow(x-2)^2<(x-4)^2\Leftrightarrow x^2-4x+4<x^2-8x+16\Leftrightarrow 4x<12\Leftrightarrow x<3\cdot$
Ответ: $x\in(-\infty;3)$.

Пример 8. Решить неравенство $\left|x^2-3x-5\right|>\left|x^2-2x-2\right|$.

Решение. Воспользуемся той же схемой, получим $\left|x^2-3x-5\right|>\left|x^2-2x-2\right|\Leftrightarrow(x^2-3x-5)^2>(x^2-2x-2)^2\Leftrightarrow$ используем формулу разности квадратов:
$[(x^2-3x-5)-(x^2-2x-2)]\cdot[(x^2-3x-5)+(x^2-2x-2)]>0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(-x-3)(2x^2-5x-7)>0\Leftrightarrow(x+3)(x+1)(2x-7)<0$. Решаем полученное неравенство методом интервалов и находим $x\in(-\infty,\ -3)\cup(-1;\ 3{,}5)$.
Ответ: $x\in(-\infty,\ -3)\cup(-1;\ 3{,}5)$.

5) Неравенство вида $ax^2+b|x|+c<0$ или $ax^2+b|x|+c>0$ рекомендуется решать с помощью замены $|x|=t$, $t\ge 0$.

Пример 9. Решить неравенство $x^2-6|x|+5<0$.

Решение. Выполним замену $|x|=t$, $t\ge 0$. Получаем и решаем неравенство $t^2-6t+5<0\Leftrightarrow 1<t<5$. Возвращаемся к переменной *x*, записываем и решаем систему неравенств $\begin{cases}|x|>1,\\ |x|<5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<-1,\end{array}\right.\\ -5<x<5\end{cases}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in(-5;\ -1)\cup(1;\ 5)$.

Ответ: $x\in(-5,\ -1)\cup(1;\ 5)$.

2.2.6. Иррациональные неравенства

При решении иррациональных неравенств с целью рационализации применяется, как правило, возведение в соответствующую степень обеих частей неравенства.

При этом следует помнить, что при возведении обеих частей неравенства в нечётную степень всегда получается неравенство, равносильное исходному неравенству.

Если же обе части неравенства возводятся в чётную степень, то неравенство, равносильное исходному неравенству, получается лишь в том случае, когда обе части неравенства неотрицательны.

Приведём схемы решения некоторых иррациональных неравенств:

1) неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x); \end{cases}$

2) неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x); \end{cases}$

3) неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases}$

4) в неравенстве $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ о знаке его правой части ничего определённого сказать нельзя, поэтому следует рассматривать два случая: 1) $g(x) < 0$; 2) $g(x) \geq 0$. Таким образом, неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ будет равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{x+1} < \sqrt{x^2+x+3}$.

Решение. Применяем третью схему. Неравенство

$$\sqrt{x+1} < \sqrt{x^2+x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x+1 < x^2+x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \in (-\infty,\ +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow [-1,\ \infty).$$

Ответ: $x \in [-1,\ \infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{5x-x^2}<x-2$.

Решение. Применяем первую схему, получаем $\sqrt{5x-x^2}<x-2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x-x^2\ge 0,\\ x-2>0,\\ 5x-x^2<(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(5-x)\ge 0,\\ x>2,\\ -2x^2+9x-4<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 5,\\ x>2,\\ \left[\begin{array}{l}x>4,\\ x<\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x\in(4;\ 5].$$

Ответ: $x\in(4;\ 5]$.

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{x^2+5x-24}>x-1$.

Решение. Применяем четвертую схему: $\sqrt{x^2+5x-24}>x-1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\ge 0,\\ x^2+5x-24>(x-1)^2;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+5x-24\ge 0,\\ x-1<0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1,\\ x>\dfrac{25}{7};\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 3,\\ x\le -8,\end{array}\right.\\ x<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -8,\\ x>\dfrac{25}{7}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,\ -8]\cup\left(\frac{25}{7},\ +\infty\right).$$

Ответ: $x\in(-\infty,\ -8]\cup\left(\dfrac{25}{7},\ +\infty\right)$.

Пример 4. Решить неравенство $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$.

Решение. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$. Так как $\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$ в области допустимых значений переменной *x*, то неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=2,\\ \begin{cases}x^2-x-2\ge 0,\\ x-1\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 2,\\ x\le -1,\end{array}\right.\\ x\ge 1.\end{cases}$$

Ответ: $x\in\{-1\}\cup[2,+\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}>1$.

Решение. Уединяем один радикал так, чтобы обе части неравенства были неотрицательными: $\sqrt{2x-4}>1+\sqrt{x+5}$. Составляем равносильную ему систему $\sqrt{2x-4}>1+\sqrt{x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4\ge 0, \\ x+5\ge 0, \\ 2x-4>(1+\sqrt{x+5})^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ x\ge -5, \\ 2x-4>1+2\sqrt{x+5}+x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ x-10>2\sqrt{x+5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ 2\sqrt{x+5}<x-10, \\ x>10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>10, \\ 4x+20<x^2-20x+100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>10, \\ x^2-24x+80>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>10, \\ \left[\begin{array}{l} x<4, \\ x>20 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x>20..$$

Ответ: $x\in(20,+\infty)$.

Пример 6. Решить неравенство $\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+3}<x$.

Решение. $\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+3}<x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+3})^3<x^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2-5x+3<x^3 \Leftrightarrow 2x^2-5x+3<0 \Leftrightarrow 1<x<\frac{3}{2}.$$

Ответ: $x\in\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$.

При решении иррациональных неравенств также применяется метод замены переменных.

Пример 7. Решить неравенство $\frac{2x+1}{x}-2\sqrt{2+\frac{1}{x}}\ge 3$.

Решение. $\frac{2x+1}{x}-2\sqrt{2+\frac{1}{x}}\ge 3 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{x}-2\sqrt{2+\frac{1}{x}}\ge 3$. Находим ОДЗ:
$\begin{cases} 2+\frac{1}{x}\ge 0, \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]\cup(0,\ \infty)$. Сделаем замену $\sqrt{2+\frac{1}{x}}=t$, $t\ge 0$, и решаем неравенство $t^2-2t-3\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 3, \\ t\le -1. \end{array}\right.$ Возвращаемся к старой переменной: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2+\frac{1}{x}}\ge 3, \\ \sqrt{2+\frac{1}{x}}\le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2+\frac{1}{x}}\ge 3, \\ \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow 2+\frac{1}{x}\ge 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\ge 7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-7x}{x}\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left(0;\ \frac{1}{7}\right].$$

С учетом ОДЗ получаем $x \in \left(0;\ \frac{1}{7}\right]$.

Ответ: $x \in \left(0;\ \frac{1}{7}\right]$,

Пример 8. Решить неравенство $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+6}+6} < x$.

Решение. Функция $y = \sqrt[3]{x+6}$ строго возрастает на множестве $x \in \mathbb{R}$ и отображает $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Поэтому на основании свойств такой функции $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+6}+6} < x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6} < x \Leftrightarrow x+6 < x^3 \Leftrightarrow x^3 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+3) > 0$. Так как $x^2+2x+3 > 0$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, то $(x-2)(x^2+2x+3) > 0$ при $x > 2$.

Ответ: $x \in (2, +\infty)$.

Упражнения

Решить неравенства:

1. $-3x+21 > 0$
Ответ: $x < 7$

2. $18-6x \le 0$
Ответ: $x \ge 3$

3. $5(x-2)-3 \le \dfrac{9(x-2)}{2} - 3(2x-4)$
Ответ: $x \le \dfrac{32}{13}$

4. $\dfrac{3+8x}{2x-5} > 4$
Ответ: $x > \dfrac{5}{2}$

5. $(3-x)(2x-5) > 0$
Ответ: $\dfrac{5}{2} < x < 3$

6. $x^2-3x+2 \le 0$
Ответ: $1 \le x \le 2$

7. $(x^2-10x+25)(2x-4) \le 0$
Ответ: $x \le 2$

8. $(x^2+5)(2x-8) < 0$
Ответ: $x < 4$

9. $|2x-4| \ge 6$
Ответ: $x \ge 5$, $x \le -1$

10. $|3x-2| < 1$
Ответ: $\dfrac{1}{3} < x < 1$

11. $2 < |x-3| < 5$
Ответ: $x \in (-2,\ 1) \cup (5,\ 8)$

12. $\big||x-4|-2\big| < 3$
Ответ: $-1 < x < 9$

13. $|x-1| < 2x-4$
Ответ: $x > 3$

14. $|2x+5| < |x+4|$
Ответ: $x \in (-3,\ -1)$

15. $|x+2|+|x-3| < x+1$
Ответ: $x \in (-\infty,\ -2)$

16. $(x-1)^2(x^2-2) < (x-1)^2(6-2x)$
Ответ: $x \in (-4;\ 1) \cup (1;\ 2)$

17. $\dfrac{1+|4-x|-x}{3-x}<0$

Ответ: $\dfrac{5}{2}<x<3$

18. $\dfrac{x^2(6-x)^3(x+4)}{(x+7)^5}\ge 0$

Ответ: $x\in(-\infty,\ -7)\cup[-4;\ 6]$

19. $\dfrac{21}{x+1}<\dfrac{16}{x-2}-\dfrac{6}{x}$

Ответ: $x\in(-\infty,\ -1)\cup(2;\ 6)$

20. $5-2\sqrt{4x+1}>0$

Ответ: $x\in\left[-\dfrac{1}{4};\ \dfrac{25}{16}\right)$

21. $\sqrt{5-12x-11}<2$

Ответ: $x\in[-2;\ 0)\cup(1;\ 3)$

22. $\sqrt{3x-2}\le 3$

Ответ: $\dfrac{2}{3}\le x\le\dfrac{11}{13}$

23. $\sqrt{x^2+6x+8}\ge -1$

Ответ: $x\ge 4$, $x\le 2$

24. $\sqrt{3-7x}\ge\sqrt{6x-8}$

Ответ: $\varnothing$

25. $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}\le\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$

Ответ: $x\in[-4;\ 2]$

26. $x-9<3\sqrt{x+1}$

Ответ: $-1\le x<24$

27. $\dfrac{5}{\sqrt{x+2}-4}<1-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-4}$

Ответ: $x\in[-2;12)\cup(98,+\infty)$

Решить систему неравенств:

28. $\begin{cases}\dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}>1,\\ \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}\le 2\end{cases}$

Ответ: $x\in[1;\ 6]$

29. $\begin{cases}12x-31\le 1,\\ x^2-4x+3\ge 0\end{cases}$

Ответ: $x\in(-\infty;\ 1]$

30. $\begin{cases}\sqrt{x^2-4}(x-3)\ge 0,\\ |x+2|(x^2-5x+6)\le 0\end{cases}$

Ответ: $x=\pm 2$; $x=3$

31. $\begin{cases}2(x-1)-3(x-4)>x+5,\\ \dfrac{3x-4}{x^2+4x+4}\ge 0\end{cases}$

Ответ: $x\in\left[\dfrac{4}{3};\ \dfrac{5}{2}\right)$

32. $\begin{cases}x^2-x-20<0\\ x^2-2x+8>0\\ 2x^2+x-45<0\end{cases}$

Ответ: $x\in(-4,\ -2)\cup(4;\ 4{,}5)$

Решить совокупность неравенств

33. $\left[\begin{array}{l} 3x^2-7x+4<0, \\ x^2-4\le 0 \end{array}\right.$

Ответ: $-2\le x\le 2$

34. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{3-2x-x^2}\le 0, \\ 11x-x^2>28 \end{array}\right.$

Ответ: $x<-3$; $-2\le x\le 0$; $x>1$

35. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{x-1}<0, \\ \dfrac{x^2}{x+1}\le 0 \end{array}\right.$

Ответ: $x<1$

Образцы контрольных работ

Вариант № 1

1. Решить уравнения

$$\frac{16}{(x+6)(x-1)}-\frac{20}{(x+2)(x+3)}=1,$$

$$|x-2|x^2=10-5x$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13 \end{cases}$$

3. Найти число целых решений неравенства

$$\left|x^2-2x\right|\le x$$

4. Найти сумму целых решений неравенства

$$\frac{\sqrt{8-4x-x^2}}{\sqrt[3]{x+2}}<0$$

5. При каких значениях a неравенство $ax^2+2x+2a-1<0$ выполняется для $x\ge 1$?

Вариант № 2

1. Решить уравнения

$$x^4-x^3+7x^2+x+6=0,$$

$$2|x-1|-|x|=3$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=2, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

3. Найти сумму целых решений неравенства

$$\frac{6x-9}{(x-2)^2(x^2-x-12)}+\frac{1}{x^2+x-6}<0$$

4. Решить неравенство

$\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}\geq 2$

5. При каких значениях a неравенство $\dfrac{x+3a-5}{x+a}>0$ выполняется для $x\in[1;\ 4]$?

Список литературы

1. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре. – М.: Просвещение, 1994.

2. Ершова А.П., Голобородько В.В. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10–11 классов. – М.: Илекса, 2003.

3. Потапов М.К., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа. – М.: Просвещение, 2011.

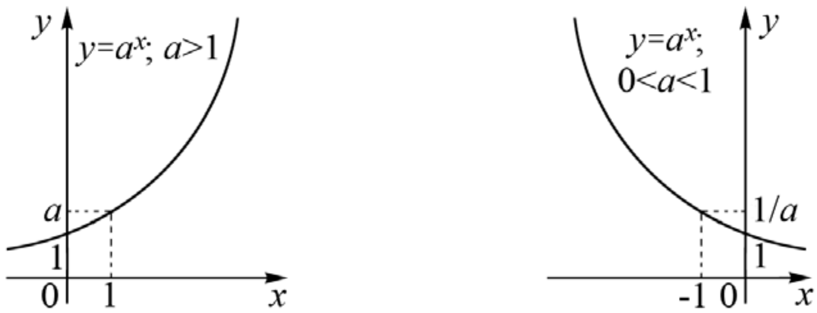
4. Гусак Г.М., Капуцкая Д.А. Математика для подготовительных отделений вузов. – Минск: Высшая школа, 1989.

Глава 3
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

3.1. Преобразование логарифмических выражений

Теоретический материал

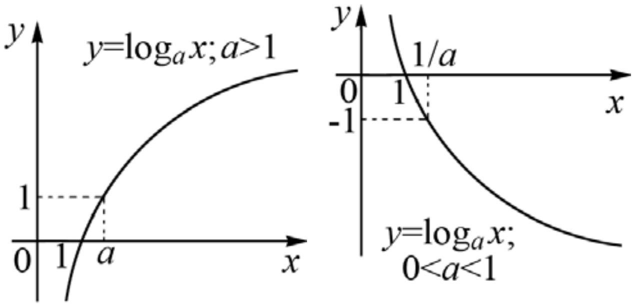
Функция $y = a^x$, где $x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$, называется показательной. Её область определения $x \in \mathbb{R}$. Область значений все $y > 0$, причём для любого $y > 0$ найдётся только одно значение x, при котором этот y достигается. Если $a > 1$, то показательная функция $y = a^x$ возрастает, если $0 < a < 1$, то $y = a^x$ убывает.



При преобразовании выражений с показательными функциями необходимо помнить свойства степеней: для любых $x, y \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
4. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
5. $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$
6. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Функция $y=\log_a x$, где $x>0,\ a>0,\ a\neq 1$, называется логарифмической. Число c называется логарифмом числа $b>0$ по основанию $a>0$, $a\neq 1$, если $a^c=b$. Обозначается $c=\log_a b$, $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$. Отсюда следует основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b}=b$.



Показательная и логарифмическая функции с одинаковыми основаниями являются взаимно обратными.

Областью значения логарифмической функции является вся числовая ось, причём $\forall y\in\mathbb{R}$ найдётся только один $x>0$, на котором y достигается. Если $a>1$, то $y=\log_a x$ возрастает, если $0<a<1$, то $y=\log_a x$ убывает.

Свойства логарифмов:

1. $a^{\log_a b}=b$ – основное логарифмическое тождество
   $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$.
2. $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$, $a>0$, $a\neq 1$.
3. $\log_a xy=\log_a|x|+\log_a|y|$, $a>0$, $a\neq 1$, $xy>0$.
4. $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a|x|-\log_a|y|$, $a>0$, $a\neq 1$, $\dfrac{x}{y}>0$.
5. $\log_a x^y=y\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$,
   $\log_a x^{2n}=2n\log_a|x|$, $a>0$, $a\neq 1$, $x\neq 0$, $n\in\mathbb{Z}$.
6. $\log_{a^y} x=\dfrac{1}{y}\log_a x=\log_a x^{\frac{1}{y}}$, $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $y\neq 0$.
   $\log_{a^{2n}} x=\dfrac{1}{2n}\log_{|a|} x$, $a\neq 0$, $a\neq \pm 1$, $x>0, n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

7. $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, $x > 0$.

$\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$ – формулы перехода к новому основанию.

8. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$.

9. $\log_a x > 0$, если $a > 1$, $x > 1$ или $0 < a < 1, 0 < x < 1$.

Другими словами, $\log_a x > 0$, если a и x лежат на числовой прямой по одну сторону от единицы.

$$\log_a x < 0, \text{ если } a > 1,\ 0 < x < 1 \text{ или } 0 < a < 1,\ x > 1.$$

Другими словами, $\log_a x < 0$, если a и x лежат на числовой прямой по разные стороны от единицы.

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислите $\sqrt{3}\log_{\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$, если $\log_b a = \sqrt{3}$.

Решение. Так как $\log_b a = \sqrt{3}$, $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, то есть b является допустимым основанием. Перейдём к основанию b:

$$\log_{\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right) = \frac{\frac{1}{3}\log_b a - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\log_b a - 1} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3(\sqrt{3}-2)} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{3(\sqrt{3}-2)} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Значит $\sqrt{3}\log_{\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right) = -1$.

Ответ: -1.

Пример 2. Вычислите $\log_{\left(b^3\sqrt[7]{a^5}\right)}\left(\dfrac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}}\right)$, если $\log_b a = \sqrt{3}$.

Решение. Так как $\log_b a = \sqrt{3}$, $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, то есть b является допустимым основанием и все корни можно заменить степенями с рациональным показателем. Перейдём к основанию b:

$$\log_{\left(b^3\sqrt[7]{a^5}\right)}\left(\frac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}}\right)=\frac{\log_b\dfrac{a^{\frac{1}{7}}}{b^{\frac{3}{2}}}}{\log_b\left(b^3a^{\frac{5}{7}}\right)}=\frac{\dfrac{1}{7}\log_b a-\dfrac{3}{2}}{3+\dfrac{5}{7}\log_b a}=\frac{2\sqrt{3}-21}{42+10\sqrt{3}}=\frac{49\sqrt{3}-157}{244}$$

Ответ: $\dfrac{49\sqrt{3}-157}{244}$.

Пример 3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{x^2-x-2}+\log_{x+3}(9-x^2).$$

Решение. $\begin{cases} x^2-x-2\geq 0, \\ 9-x^2>0, \\ x+3>0, \\ x+3\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,\ -1]\cup[2,\ +\infty), \\ -3<x<3, \\ x>-3, \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (-3,\ -2)\cup(-2,\ -1]\cup[2,\ 3).$$

Ответ: $(-3,\ -2)\cup(-2,\ -1]\cup[2,\ 3)$.

Пример 4. Какое из чисел больше: $\sqrt{11}$ или $9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_8 2}$?

Решение. Преобразуем показатель степени второго числа:

$$\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_8 2=\frac{1}{2}\log_3\frac{10}{9}+\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}\left(\log_3\frac{10}{9}+\log_3 3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\log_3\frac{10}{3}.$$

Значит второе число равно: $9^{\frac{1}{2}\log_3\frac{10}{3}}=3^{\log_3\frac{10}{3}}=\dfrac{10}{3}$. Сравним:

$$\sqrt{11}\ \vee\ \frac{10}{3}$$

$$3\sqrt{11}\ \vee\ 10$$

$$99\ \vee\ 100.$$

Так как 99 < 100, то второе число больше.

Ответ: второе число больше.

Задания 3.1

1. Найдите значение выражения $51 \cdot \log_7 \sqrt[3]{7}$
2. Найдите значение выражения $3^{\log_9 36}$
3. Найдите значение выражения $\log_3 7 \cdot \log_7 81$
4. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 \sqrt{22}}{\log_9 22}$
5. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_5 \sqrt{11}}{\log_5 11}$
6. Найдите значение выражения $\dfrac{18}{8^{\log_8 3}}$
7. Найдите значение выражения $36^{\log_6 \sqrt{7}}$
8. Найдите значение выражения $25^{\log_5 \sqrt{18}}$
9. Найдите значение выражения $\dfrac{52}{5^{\log_5 4}}$
10. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{22}} \sqrt{22}$
11. Найдите значение выражения $\dfrac{18}{3^{\log_3 2}}$
12. Найдите значение выражения $7^{\log_{49} 16}$
13. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{20}} \sqrt{20}$
14. Найдите значение выражения $30 \cdot \log_6 \sqrt[6]{6}$
15. Найдите значение выражения $\log_{16} \log_3 81$
16. Найдите значение выражения $3^{\log_9 121}$
17. Найдите значение выражения $\log_7 13 \cdot \log_{13} 49$
18. Найдите значение выражения $14 \cdot 10^{\log_{10} 7}$
19. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{17}} \sqrt{17}$
20. Найдите значение выражения $\log_{16} \log_5 25$
21. Найдите значение выражения $7^{\frac{4}{9}} \cdot 49^{\frac{5}{18}}$

22. Найдите значение выражения $4^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}}$

23. Найдите значение выражения $4^{\frac{3}{5}} \cdot 16^{\frac{1}{5}}$

24. Найдите значение выражения $2^{\frac{4}{7}} \cdot 4^{\frac{3}{14}}$

25. Найдите значение выражения $16^{\log_4 13}$

26. Найдите значение выражения $64^{\log_8 7}$

27. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 22}{\log_{81} 22}$

28. Найдите значение выражения $\log_2 3 \cdot \log_3 4$

29. Найдите значение выражения $\log_4 3 \cdot \log_3 16$

30. Найдите значение выражения $\log_6 198 - \log_6 5,5$

31. Найдите значение выражения $\log_{12} 108 - \log_{12} 0,75$

32. Найдите значение выражения $\log_{12} 216 - \log_{12} 1,5$

33. Найдите значение выражения $\log_5 6,25 + \log_5 4$

34. Найдите значение выражения $7^2 \cdot 3^7 : 21^2$

35. Найдите значение выражения $2^8 \cdot 25^8 : 50^6$

36. Найдите значение выражения $2^4 \cdot 7^3 : 14^2$

37. Найдите значение выражения $2^7 \cdot 25^3 : 50^2$

38. Найдите значение выражения $9^8 \cdot 4^{11} : 36^7$

39. Найдите значение выражения $2^9 \cdot 25^9 : 50^7$

40. Найдите значение выражения $\log_{36}\left(\log_2 25 \cdot \log_5 8\right)$

41. Найдите значение выражения $\dfrac{2\log_3^2 2 - \log_3^2 18 - (\log_3 2)\log_3 18}{2\log_3 2 + \log_3 18}$

42. Упростите $6^{-0,5+\log_6 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2^{-0,5+\log_2 0,5}$

43. Вычислите $\log_{3\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}}$, если $\log_9 6 = a$

44. Вычислите $\log_b(a^2 b)$, если $\log_a b = 7$

45. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{16 - x^2}\,\log_2(x^2 - 5x + 6)$$

46.Определите, какое из чисел больше: $2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}$ или $3\log_8 26$.

47. Определите, какое из чисел больше: $\sqrt{8}$ или $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}} 9}$.

48. Определите, какое из чисел больше: $2^{\log_3 5}-0,1$ или $5^{\log_3 2}$.

49. Вычислите $\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, если $\log_b a=\sqrt{3}$

50. Вычислите $\lg 15$, если $\lg 2=a,\ \lg 3=b$

Ответы к заданиям 3.1

1. 17	**2.** 6	**3.** 4	**4.** 0,5	**5.** 0,5	**6.** 6	**7.** 7	**8.** 18	**9.** 13	**10.** –0,5
11. 9	**12.** 4	**13.** –0,5	**14.** 5	**15.** 0,5	**16.** 11	**17.** 2	**18.** 98	**19.** –0,5	**20.** 0,25
21. 7	**22.** 4	**23.** 4	**24.** 2	**25.** 169	**26.** 49	**27.** 2	**28.** 2	**29.** 2	**30.** 2
31. 2	**32.** 2	**33.** 2	**34.** 243	**35.** 2500	**36.** 28	**37.** 800	**38.** 2304	**39.** 2500	**40.** 0,5
41. –2	**42.** 0	**43.** $\frac{5-8a}{6a+3}$		**44.** $\frac{9}{7}$	**45.** $[-4,2)\cup(3,4]$		**46.** $3\log_8 26$		**47.** $\sqrt{8}$
48. Второе		**49.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$	**50.** $b+1-a$						

3.2. Показательные уравнения и неравенства, равносильные преобразования

Теоретический материал

При решении уравнений с показательными функциями

$$a^{f(x)}=a^{g(x)},\quad a>0$$

Возможны два случая:

1) $a=1,\ f(x)$ и $g(x)$ определены;

2) $a>0,\ a\neq 1,\ f(x)=g(x)$.

При решении неравенств с показательными функциями

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad a > 0$$

возможны три случая:

1) $a > 1,\ f(x) > g(x)$;

2) $a = 1$, нет решений;

3) $0 < a < 1,\ f(x) < g(x)$.

Заметим, что в случае нестрогого неравенства между показательными функциями нестрогим становится и неравенство между функциями $f(x)$ и $g(x)$, причём случай $a = 1$ рассматривается отдельно.

Если в качестве основания степени выступает не число, а функция $a(x)$, то эта ситуация требует особого внимания и имеют место следующие равносильные переходы:

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) \ \text{и} \ g(x) \ \text{определены}; \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) \in (0,1) \cup (1,+\infty), \\ f(x) = g(x); \end{cases} \end{array}\right.$$

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \end{array}\right.$$

$$a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) \geq g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) = 1 \\ f(x) \ \text{и} \ g(x) \ \text{определены}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) \leq g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Требование $a(x) > 0$ следует из определения показательной функции.

Имеет место важная **теорема 1**: Знак разности $a(x)^{f(x)}-a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)$ в области допустимых значений функций $a(x)>0,\ f(x),\ g(x)$.

Тогда условия равносильности можно записать в виде:

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a(x)>0, \\ \big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)>0. \end{cases}$$

$$a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)} \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a(x)>0, \\ \big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)\geq 0. \end{cases}$$

Замечание. Имеют место условия равносильности:

$$\frac{a(x)^{f(x)}-a(x)^{g(x)}}{h(x)} \geq 0 \ \big(\leq 0\big) \quad \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \ \frac{\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)}{h(x)} \geq 0 \ \big(\leq 0\big)$$

Примеры решения задач

Пример 5. Решите неравенство $\dfrac{\left(3^x-1\right)\left(2^{x^2}-16\right)}{x^2+x-2} \geq 0$.

Решение. Так как, согласно приведённой теореме 1, знак разности (3^x-3^0) совпадает со знаком произведения $(3-1)(x-0)$, знак разности $(2^{x^2}-2^4)$ совпадает со знаком произведения $(2-1)(x^2-4)$, то

$$\frac{\left(3^x-1\right)\left(2^{x^2}-16\right)}{x^2+x-2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(x^2-4)}{(x+2)(x-1)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\neq -2, \\ \dfrac{x(x-2)}{x-1} \geq 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in\big[0;1\big)\cup\big[2;+\infty\big)$$

Ответ: $\big[0;1\big)\cup\big[2;+\infty\big)$

Пример 6. Решите неравенство

$$\left(2^x+0,09\cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{2x}} \ge \left(2^x+0,09\cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{1-x}}.$$

Решение.

$$\left(2^x+0,09\cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{2x}} \ge \left(2^x+0,09\cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{1-x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \left(2^x+0,09\cdot 2^{-x}-1\right)\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{1-x}\right)\ge 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{2x}-2^x+0,09\right)\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x(x-1)}\ge 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2^x-\frac{1}{10}\right)\left(2^x-\frac{9}{10}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x(x-1)}\ge 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left(x-\log_2\frac{1}{10}\right)\left(x-\log_2\frac{9}{10}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x(x-1)}\ge 0 \quad \Leftrightarrow$$

Решение методом интервалов даёт

Ответ: $\left[\log_2\frac{1}{10};\ \log_2\frac{9}{10}\right]\cup\left(0;\ \frac{1}{3}\right]\cup\left(1;\ +\infty\right)$

Пример 7. Решите уравнение $3^{|x|}=5^{x^2+3x}$

Решение.

$$3^{|x|}=5^{x^2+3x} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{|x|}=\left(3^{\log_3 5}\right)^{x^2+3x} \ \Leftrightarrow 3^{|x|}=3^{(x^2+3x)\log_3 5} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad |x|=(x^2+3x)\log_3 5.$$

Модуль раскроем по определению.

1. Значение $x=0$ является решением.

2. При $x>0$ уравнение примет вид

$$x=(x^2+3x)\log_3 5 \ \Leftrightarrow \ (x+3)\log_3 5=1 \ \Leftrightarrow \ x=\log_3 5-3.$$

Это решение отрицательное число и, следовательно, не подходит.

3. При $x<0$ получим

$$-x=(x^2+3x)\log_3 5 \ \Leftrightarrow \ (x+3)\log_5 3=-1 \ \Leftrightarrow \ x=-\log_3 5-3 < 0.$$

Ответ: 0; $-\log_3 5-3$.

Пример 8. Решите уравнение $9^{1-(x-1)^2} - 12\cdot 3^{-(x-1)^2} + 1 = 0$

Решение. Введём новую переменную $z = 3^{-(x-1)^2} > 0$, получим

$$9z^2 - 12z + 1 = 0 \iff z = \frac{2\pm\sqrt{3}}{3}.$$

Возвращаемся к старой переменной x:

$$3^{-(x-1)^2} = \frac{2\pm\sqrt{3}}{3} \iff -(x-1)^2 = \log_3(2\pm\sqrt{3}) - 1 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 = 1-\log_3(2-\sqrt{3}) = 1+\log_3(2+\sqrt{3}); \\ (x-1)^2 = 1-\log_3(2+\sqrt{3}) < 0 \ - \text{ нет решений;} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff x-1 = \pm\sqrt{1+\log_3(2+\sqrt{3})} \iff x = 1\pm\sqrt{1+\log_3(2+\sqrt{3})}.$$

Ответ: $x = 1\pm\sqrt{1+\log_3(2+\sqrt{3})}$.

Пример 9. Решите неравенство $\dfrac{11\cdot 3^{x-1} - 31}{4\cdot 9^x - 11\cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5$.

Решение. Введём новую переменную $z = 3^x > 0$, получим

$$\frac{11z - 93}{12z^2 - 11z - 15} \geq 5 \iff \frac{10z^2 - 11z + 3}{12z^2 - 11z - 5} \leq 0.$$

Отметим на числовой прямой нули числителя $z = \dfrac{1}{2}$ и $z = \dfrac{3}{5}$ (закрашенные точки) и нули знаменателя $z = -\dfrac{3}{4}$ и $z = \dfrac{5}{3}$ (пустые точки) и применим метод интервалов с учётом $z > 0$. Получим

$$\left[\begin{array}{l} z \leq \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{3}{5} \leq z < \dfrac{5}{3}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \leq \log_3 \dfrac{1}{2}; \\ \log_3 \dfrac{3}{5} \leq x < \log_3 \dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\log_3 2\right] \cup \left[\log_3 \dfrac{3}{5}; \log_3 \dfrac{5}{3}\right)$.

Пример 10. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^x\le 16 .$$

Решение. Так как $4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$ и $4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$, то данное неравенство можно записать в виде $\left(2\sqrt{3}\right)^x+2^x\le 16$. Разделим обе части неравенства на 2^x и исследуем полученное неравенство $\left(\sqrt{3}\right)^x+1\le 16\cdot 2^{-x}$. Так как $\left(\sqrt{3}\right)^x+1$ возрастает с увеличением x, а $16\cdot 2^{-x}$ убывает, и равенство выполняется при $x=2$, то при $x<2$ $\left(\sqrt{3}\right)^x+1<16\cdot 2^{-x}$. Следовательно, решением исходного неравенства является множество $x\le 2$.

Ответ: $(-\infty;\ 2]$

Пример 11. Решите неравенство $3^{2x+1}+3^{2\sqrt{x}+2}\le 28\cdot 3^{x+\sqrt{x}}$.

Решение. Разделив обе части неравенства на $3^{x+\sqrt{x}}$, получим $3^{x-\sqrt{x}+1}+3^{\sqrt{x}-x+2}\le 28$. Обозначим $3^{x-\sqrt{x}}=t>0$ и запишем неравенство через переменную t:

$3t+\dfrac{9}{t}\le 28 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{3t^2-28t+9}{t}\le 0$. Так как $t>0$, то

$3t^2-28t+9\le 0$, $\dfrac{1}{3}\le t\le 9$. Возвращаясь к переменной x, получим

$$3^{-1}\le 3^{x-\sqrt{x}}\le 3^2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x-\sqrt{x}\le 2, \\ x-\sqrt{x}\ge -1, \end{cases} \quad \sqrt{x}=u\ge 0,$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2-u-2\le 0, \\ u^2-u+1\ge 0 \;\; (\text{верно}) \end{cases} \Leftrightarrow (u+1)(u-2)\le 0,$$

$$\Leftrightarrow 0\le u\le 2,\quad 0\le x\le 4.$$

Ответ: $[0;\ 4]$

Пример 12. Решите неравенство $\dfrac{7}{9^x-2}\ge\dfrac{2}{3^x-1}$.

Решение. Запишем цепочку равносильных переходов, в которой третий переход осуществлён в силу приведённой теоремы 1:

$$\frac{7}{9^x-2}\ge\frac{2}{3^x-1}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2\cdot3^{2x}-7\cdot3^x+3}{(9^x-2)(3^x-1)}\le0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\left(3^x-3\right)\left(3^x-\frac{1}{2}\right)}{\left(3^{2x}-2\right)\left(3^x-1\right)}\le0\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{(x-1)\left(x-\log_3\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\log_3 2\right)(x-0)}\le0\quad\Leftrightarrow\quad x\in\left[-\log_3 2;0\right)\cup\left(\frac{\log_3 2}{2};1\right].$$

Ответ: $\left[-\log_3 2;0\right)\cup\left(\dfrac{\log_3 2}{2};1\right]$.

Пример 13. Решите неравенство $7\cdot49^{-\frac{x^2}{2}}\le\dfrac{7^{\left|x^2+5x\right|}}{49}$.

Решение. Прологарифмируем неравенство по основанию 7:

$$1-x^2\le\left|x^2+5x\right|-2\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x^2+5x\ge3-x^2\\x^2+5x\le-3+x^2\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}2x^2+5x-3\ge0\\5x\le-3\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x\in\left(-\infty;-3\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\\x\le-\frac{3}{5}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad x\in\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{3}{5}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Пример 14. Решите неравенство $\left(\sqrt{2}+1\right)^x+1<2\left(\sqrt{2}-1\right)^x$.

Решение. Заметим, что $\sqrt{2}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$. Поэтому

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^x+1<2\left(\sqrt{2}-1\right)^x \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\sqrt{2}+1\right)^x+2\right)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^x-1\right)<0 \Leftrightarrow x-0<0 \Leftrightarrow x<0.$$

Ответ: $\left(-\infty;0\right)$

Пример 15. Решите неравенство $3^{(x+2)^2}+\dfrac{1}{27}\le 3^{x^2-3}+9^{2x+2}$.

Решение. Преобразуем и воспользуемся теоремой 1:

$$3^{(x+2)^2}+\frac{1}{27}\le 3^{x^2-3}+9^{2x+2} \Leftrightarrow 3^{x^2}\cdot 3^{4x}\cdot 81+\frac{1}{27}-\frac{3^{x^2}}{27}-81\cdot 3^{4x}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81\cdot 3^{4x}(3^{x^2}-1)-\frac{3^{x^2}-1}{27}\le 0 \Leftrightarrow 81\left(3^{x^2}-1\right)\left(3^{4x}-3^{-7}\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(4x+7)\le 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{7}{4}\right]\cup\left\{0\right\}.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{7}{4}\right]\cup\left\{0\right\}$.

Пример 16. Решите неравенство

$$\left|4^{3x}-2^{4x+2}\cdot 3^{x+1}+20\cdot 12^x\cdot 3^x\right|\ge 8\cdot 6^x\cdot\left(8^{x-1}+6^x\right).$$

Решение.

$$\left|4^{3x}-2^{4x+2}\cdot 3^{x+1}+20\cdot 12^x\cdot 3^x\right|\ge 8\cdot 6^x\cdot\left(8^{x-1}+6^x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^x\left|4^{2x}-12\cdot 4^x\cdot 3^x+20\cdot 3^{2x}\right|\ge 4^x\left(4^x\cdot 3^x+8\cdot 3^{2x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4^{2x}-12\cdot 4^x\cdot 3^x+20\cdot 3^{2x}+4^x\cdot 3^x+8\cdot 3^{2x}\right)\times$$

$$\times\left(4^{2x}-12\cdot 4^x\cdot 3^x+20\cdot 3^{2x}-4^x\cdot 3^x-8\cdot 3^{2x}\right)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4^{2x}-11\cdot 4^x\cdot 3^x+28\cdot 3^{2x}\right)\left(4^x-13\cdot 4^x\cdot 3^x+12\cdot 3^{2x}\right)\ge 0 \Leftrightarrow$$

Разделим последнее неравенство на $3^{4x} > 0$ и сделаем замену переменной $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x > 0$. Тогда неравенство примет вид $(t^2 - 13t + 12)(t^2 - 11t + 28) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (t-12)(t-1)(t-4)(t-7) \geq 0$.

Возвратимся к старой переменной и для каждого множителя воспользуемся теоремой 1, учтя, что $\left(\frac{4}{3} - 1\right) > 0$:

$$\left(x - \log_{\frac{4}{3}} 12\right)(x - 0)\left(x - \log_{\frac{4}{3}} 7\right)\left(x - \log_{\frac{4}{3}} 4\right) \geq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (-\infty;\ 0] \cup \left[\log_{\frac{4}{3}} 4;\ \log_{\frac{4}{3}} 7\right] \cup \left[\log_{\frac{4}{3}} 12;\ +\infty\right)$$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup \left[\log_{\frac{4}{3}} 4;\ \log_{\frac{4}{3}} 7\right] \cup \left[\log_{\frac{4}{3}} 12;\ +\infty\right)$.

Задания 3.2

1. Найдите корень уравнения $32^{x-6} = \frac{1}{2}$
2. Найдите корень уравнения $3^{1-3x} = 81$
3. Найдите корень уравнения $2^{1-2x} = 8$
4. Найдите корень уравнения $2^{1-x} = 16$
5. Найдите корень уравнения $3^{1-2x} = 27$
6. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = 9$
7. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{16-x} = 64$
8. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{9-2x} = 64$
9. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{10-4x} = 4$
10. Найдите корень уравнения $2^{1-3x} = 128$
11. Найдите корень уравнения $2^{2x-14} = \frac{1}{16}$
12. Найдите корень уравнения $4^{2x-17} = \frac{1}{64}$

13. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-9} = \frac{1}{27}$

14. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-12} = \frac{1}{8}$

15. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-2x} = 9$

16. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} = 216$

17. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{3-x} = 729$

18. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 16^x$

19. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^x$

20. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 16^x$

21. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-7} = 27^x$

22. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{x+8} = 216^x$

23. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{7}\right)^{x-2} = 343^x$

24. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-5} = 729^x$

25. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{10}\right)^{x-9} = 100^x$

26. Решите неравенство $(0,3)^{2x^2-3x+6} < 0,00243$

27. Решите неравенство $8^{\sqrt{8^x}} > 4096$

28. Решите неравенство $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$

29. Решите неравенство $8\cdot\dfrac{3^{x-2}}{3^x-2^x}>1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

30. Решите неравенство $3^{72}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}>1$

31. Решите неравенство $(0,1)^{4x^2-2x-2}\ge(0,1)^{2x-3}$

32. Решите неравенство $5^x-3^{x+1}>2(5^{x-1}-3^{x-2})$

33. Решите неравенство $7^{-x}-3\cdot7^{x+1}>4$

34. Решите неравенство $2^{2x+1}-21\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+3}+2\ge0$

35. Решите неравенство $2^{x-1}>\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$

36. Решите неравенство $2^{x-3}<\dfrac{2}{8^{\frac{1}{x}}}$

37. Решите неравенство $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x^2}>2,25^{x^2-10}$

38. Решите неравенство $(1,25)^{1-x}<(0,64)^{2(1+\sqrt{x})}$

39. Решите неравенство $4^{x-0,5}+2^{x+1}-16<0$

40. Решите неравенство $98-7^{x^2+5x-48}\ge49^{x^2+5x-49}$

41. Решите неравенство $(x-2)^{x^2-1}<1$

42. Решите неравенство $(x-2)^{x^2-6x+8}>1$

43. Решите неравенство $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1$

44. Решите неравенство $|x|^{\sqrt{x^4-2x^2+1}}>|x|^{1-x}$

45. Решите неравенство $\left(\sqrt{6+x-x^2}\right)^{2x+5}\ge\left(\sqrt{6+x-x^2}\right)^{x+4}$

46. Решите неравенство $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}\le1$

47. Решите неравенство $\left|x^2-3\right|^{x^2-4x-5}\le1$

48. Решите неравенство $\left|x^2-1\right|^{\left|x^2-3x+2\right|}>1$

Ответы к заданиям 3.2

1. 5,8	**2.** –1	**3.** –1	**4.** –3	**5.** –1	**6.** 5	**7.** 22	**8.** 6
9. 3	**10.** –2	**11.** 5	**12.** 7	**13.** 3	**14.** 5	**15.** 2,5	**16.** 6
17. 6	**18.** 1,2	**19.** 0,5	**20.** –0,8	**21.** 1,75	**22.** –2	**23.** 0,5	**24.** 1,25
25. 3	**26.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$		**27.** $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$	**28.** $\left(-\infty;\log_2(\sqrt{2}-1)\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$		**29.** $\left(0;-\log_{\frac{2}{3}}3\right)$	
30. $[0;\ 64)$	**31.** 0,5	**32.** $(3;\ +\infty)$	**33.** $(-\infty;-1)$	**34.** $\left[\log_4\frac{3}{4};\ +\infty\right)$		**35.** $(0;\ +\infty)$	**36.** $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ 3)$
37. $(-\sqrt{5};\sqrt{5})$	**38.** $(25;\ +\infty)$	**39.** $(-\infty;\ 2)$	**40.** $[-10;\ 5]$	**41.** $(2;3)$	**42.** $(2;3)\cup(4;+\infty)$	**43.** $(-\infty;\ -0,5)\cup(1;\ +\infty)$	
44. $(-\infty;-2)\cup$ $\cup(-1;\ 0)\cup(1;+\infty)$	**45.** $\left[\frac{1-\sqrt{21}}{2};-1\right]\cup$ $\cup\left[\frac{1+\sqrt{21}}{2};\ 3\right]$	**46.** $\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup$ $\cup\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	**47.** $\left[-2;\ -\sqrt{3}\right)\cup$ $\cup\left(-\sqrt{3};\ -\sqrt{2}\right]\cup$ $\cup\left[-1;\ \sqrt{2}\right]\cup\left[2;\ 5\right]$	**48.** $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$			

3.3. Логарифмические уравнения и неравенства, равносильные преобразования

Теоретический материал

При решении уравнений и неравенств с логарифмами используются переходы к системам и совокупностям равносильных условий, что упрощает последовательность преобразований, а также упрощает нахождение области допустимых значений переменной.

Например, простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Равносильно условиям $f(x) = g(x) > 0$. Причём из двух требуемых условий $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ при выполнении равенства $f(x) = g(x)$ достаточно выбрать только одно (удобнее выбрать наиболее простое).

При решении простейшего логарифмического неравенства

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \; a > 0, \quad a \neq 1$$

возможны два случая

1) $a > 0, \qquad f(x) > g(x) > 0;$

2) $0 < a < 1, \quad 0 < f(x) < g(x).$

Особого внимания заслуживает ситуация, когда в качестве основания логарифма выступает не число, а функция $a(x)$:

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g(x) > 0, \\ a(x) \in (0;1) \cup (1;+\infty). \end{cases}$$

Причем из двух требуемых условий $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, при выполнении равенства $f(x) = g(x)$ достаточно выбрать только одно (наиболее простое).

Логарифмические неравенства с переменным основанием:

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x); \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) \geq g(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ 0 < f(x) \leq g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Имеет место важная **теорема** 2: знак логарифма $\log_{a(x)} f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)\big(f(x)-1\big)$ в области допустимых значений.

Тогда имеют место следующие равносильности:

$$\log_{a(x)} f(x) > 0 \ (< 0) \quad \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad (a(x)-1)(f(x)-1) > 0 \ (< 0).$$

Или полное условие равносильности, включающее ОДЗ:

$$\log_{a(x)} f(x) > 0 \ (< 0) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-1) > 0 \ (< 0). \end{cases}$$

Для нестрогих неравенств:

$$\log_{a(x)} f(x) \geq 0 \ (\leq 0) \quad \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad (a(x)-1)(f(x)-1) \geq 0 \ (\leq 0),$$

$$\log_{a(x)} f(x) \geq 0 \ (\leq 0) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-1) \geq 0 \ (\leq 0). \end{cases}$$

Имеет место важная **теорема 3**: знак разности $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения

$(a(x)-1)\big(f(x)-g(x)\big)$ в области допустимых значений. Отсюда следуют равносильные переходы в неравенствах:

$$\log_{a(x)} f(x) > (<) \log_{a(x)} g(x) \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0\ (< 0).$$

$$\log_{a(x)} f(x) > (<) \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0\ (< 0). \end{cases}$$

Для нестрогих неравенств:

$$\log_{a(x)} f(x) \geq (\leq) \log_{a(x)} g(x) \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0\ (\leq 0).$$

$$\log_{a(x)} f(x) \geq (\leq) \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0\ (\leq 0). \end{cases}$$

Следствие:

$$\frac{\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)}{h(x)} \geq 0\ (\leq 0) \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{(a(x)-1)(f(x)-g(x))}{h(x)} \geq 0\ (\leq 0).$$

Примеры решения задач

Пример 17. Решите неравенство $\dfrac{\log_3\left(x+\dfrac{4}{5}\right)}{\log_3\left(x^2-2x+\dfrac{7}{16}\right)}<0$.

Решение. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x+\dfrac{4}{5}>0, \\ x^2-2x+\dfrac{7}{16}>0, \\ x^2-2x+\dfrac{7}{16}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{4}{5}, \\ \left(x-\dfrac{7}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)>0, \\ x\neq -\dfrac{1}{4},\ x\neq \dfrac{9}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x\in\left(-\frac{4}{5};-\frac{1}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$$

Применим теорему 2 для числителя и знаменателя: знак $\log_3\left(x+\dfrac{4}{5}\right)$ совпадает со знаком произведения $(3-1)\left(x+\dfrac{4}{5}-1\right)$, а знак $\log_3\left(x^2-2x+\dfrac{7}{16}\right)$ совпадает со знаком произведения $(3-1)\left(x^2-2x+\dfrac{7}{16}-1\right)$. Поэтому на ОДЗ имеем

$$\frac{\log_3\left(x+\dfrac{4}{5}\right)}{\log_3\left(x^2-2x+\dfrac{7}{16}\right)}<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-\dfrac{1}{5}}{x^2-2x-\dfrac{9}{16}}<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-\dfrac{1}{5}}{\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{9}{4}\right)}<0.$$

Решая методом интервалов, получим $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{9}{4}\right)$.

С учётом ОДЗ получим ответ $x\in\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{9}{4}\right)$.

Ответ: $\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{9}{4}\right)$.

Пример 18. Решите неравенство $\dfrac{\log_3\left(3^x-1\right)}{x-1}\ge 1$.

Решение. Найдём ОДЗ: $\begin{cases}3^x-1>0\\ x-1\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow\ x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

$$\frac{\log_3\left(3^x-1\right)}{x-1}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{\log_3\left(3^x-1\right)-(x-1)}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3\left(3^x-1\right)-\log_3 3^{x-1}}{x-1}\ge 0 \overset{\text{Î ÄÇ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{Î ÄÇ}}{\Leftrightarrow} \frac{3^x-1-3^{x-1}}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3^x-1-\frac{1}{3}\cdot 3^x}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2\cdot 3^x-3}{3(x-1)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^x-\frac{3}{2}}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3^x-3^{\log_3\frac{3}{2}}}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x-\log_3\frac{3}{2}}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(0;\ \log_3\frac{3}{2}\right]\cup\left(1;\ +\infty\right).$$

Это решение удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $\left(0;\ \log_3\dfrac{3}{2}\right]\cup\left(1;\ +\infty\right)$.

Пример 19. Решите неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+3}}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}<1$.

Решение. Найдём ОДЗ: $\begin{cases}x+3>0\\ x+1>0\\ x+1\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(0;+\infty)$.

На основании свойства 7 логарифмов получим

$$\frac{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+3}}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}<1 \Leftrightarrow \log_{x+1}\sqrt{x+3}-1<0 \Leftrightarrow \log_{x+1}(x+3)-\log_{x+1}(x+1)^2<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1-1)(x+3-x^2-2x-1)<0 \Leftrightarrow x(x^2+x-2)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+2)>0 \Leftrightarrow x\in(-2;0)\cup(1;+\infty).$$

С учетом ОДЗ получим $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

Пример 20. Решите неравенство

$$\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)\left(5^x-3^x\right)<\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)+\log_{|3x-3|}\left(5^{x-1}+3^{x-1}\right).$$

Решение.

Найдём ОДЗ: $\begin{cases}|3x-3|\neq 0\\ |3x-3|\neq 1\\ 5^x-3^x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1,\\ x\neq 4/3,\ x\neq 2/3,\\ x>0.\end{cases}$

$$\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)\left(5^x-3^x\right)<\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)+\log_{|3x-3|}\left(5^{x-1}+3^{x-1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)+\log_{|3x-3|}\left(5^x-3^x\right)<\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)+\log_{|3x-3|}\left(5^{x-1}+3^{x-1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \log_{|3x-3|}\left(5^x-3^x\right)-\log_{|3x-3|}\left(5^{x-1}+3^{x-1}\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left(|3x-3|-1\right)\left(5^x-3^x-5^{x-1}-3^{x-1}\right)<0\ \Leftrightarrow$$

$$\left(|3x-3|-1\right)\left(\frac{4}{5}\cdot 5^x-\frac{4}{3}\cdot 3^x\right)<0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left(3x-4\right)(3x-2)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1}-\left(\frac{5}{3}\right)^{0}\right)<0\ \Leftrightarrow\left(3x-4\right)(3x-2)(x-1)<0\Leftrightarrow$$

$x\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right)$. С учётом ОДЗ получим $x\in\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right)$.

Ответ: $\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right)$.

Пример 21. Решите неравенство $5^{\log_{x+1}(3x^2+8x+4)}\geq(x^2+3x+2)^{\log_{x+1}25}$.

Решение. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases}3x^2+8x+4>0,\\ x^2+3x+2>0,\\ x+1>0,\\ x+1\neq 1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)(x+\frac{2}{3})>0\\ (x+2)(x+1)>0\\ x+1>0,\\ x\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{2}{3}>0,\\ x\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{2}{3};0\right)\cup(0;+\infty)$$

Прологарифмируем по основанию 5 и применим теорему 3:

$$5^{\log_{x+1}(3x^2+8x+4)}\geq(x^2+3x+2)^{\log_{x+1}25}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_{x+1}(3x^2+8x+4)\geq\log_{x+1}25\cdot\log_5(x^2+3x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+1}(3x^2+8x+4) \ge 2\log_{x+1}(x^2+3x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+1}(3x^2+8x+4) \ge \log_{x+1}(x^2+3x+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (x+1-1)\Big((3x^2+8x+4)-(x^2+3x+2)^2\Big) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\Big((3x+2)(x+2)-(x+2)^2(x+1)^2\Big) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x+2)\Big(3x+2-x^3-4x^2-5x-2\Big) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2(x+2)\Big(x^2+4x+2\Big) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+2)\Big(x+2+\sqrt{2})\Big)\Big(x-(-2+\sqrt{2})\Big) \le 0.$$

На ОДЗ $x^2(x+2)\Big(x+2+\sqrt{2})\Big) > 0,$ следовательно, имеем $\Big(x-(-2+\sqrt{2})\Big) \le 0 \ \Leftrightarrow\ x \le (-2+\sqrt{2})$. С учётом ОДЗ $x \in \left(-\frac{2}{3};\sqrt{2}-2\right].$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};\sqrt{2}-2\right]$

Пример 22. Решите неравенство $\log_{10-x^2}\left(\frac{16x}{5}-x^2\right) < 1$.

Решение.

Найдём ОДЗ: $\begin{cases} 10-x^2>0, \\ 10-x^2 \ne 1, \\ \frac{16x}{5}-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\sqrt{10};\sqrt{10}), \\ x \ne \pm 3, \\ x \in \left(0;\frac{16}{5}\right) \end{cases} \ \Leftrightarrow\ x \in (0;3) \cup (3;\sqrt{10})$.

$$\log_{10-x^2}\left(\frac{16x}{5}-x^2\right) < 1 \Leftrightarrow \log_{10-x^2}\left(\frac{16x}{5}-x^2\right) < \log_{10-x^2}(10-x^2) \overset{\text{Î ÄÇ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{Î ÄÇ}}{\Leftrightarrow} (9-x^2)\left(\frac{16x}{5}-x^2-10+x^2\right) < 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)\left(x-\frac{25}{8}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (-3;3) \cup \left(\frac{25}{8};+\infty\right)$. Учитывая ОДЗ, получим $x \in (0;3) \cup \left(\frac{25}{8};\sqrt{10}\right)$.

Ответ: $(0;3) \cup \left(\frac{25}{8};\sqrt{10}\right)$.

Пример 23. Решите неравенство $\log_{x+3}\left(9-x^2\right)-\frac{1}{16}\log_{x+3}^2(x-3)^2 \ge 2$.

Решение.

Найдём

ОДЗ: $\begin{cases} 9-x^2>0, \\ x+3>0, \\ x+3\ne 1, \\ x-3\ne 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(3+x)>0, \\ x>-3, \\ x\ne -2, \\ x\ne 3, \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-3;\ -2)\cup(-2;\ 3)$,

значит в ОДЗ $|x-3|=3-x$. Тогда

$$\log_{x+3}\left(9-x^2\right)-\frac{1}{16}\log_{x+3}^2(x-3)^2 \ge 2 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \log_{x+3}(3-x)(3+x)-\frac{1}{4}\log_{x+3}^2|x-3| \ge 2 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+3}(3-x)+1-\frac{1}{4}\log_{x+3}^2(3-x) \ge 2.$$

Сделаем замену переменной $y=\log_{x+3}(3-x)$, тогда неравенство примет вид: $y^2-4y+4\le 0 \ \Leftrightarrow\ (y-2)^2\le 0 \Leftrightarrow\ y=2$. Или $\log_{x+3}(3-x)=2 \Leftrightarrow (x+3)^2=3-x \Leftrightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow x=-6\notin$ ОДЗ,

и $x=-1\in$ ОДЗ.

Ответ: -1.

Пример 24. Решите неравенство $\dfrac{\log_2(2x)\cdot\log_{0,5x}2}{\log_{0,125x}8}\le 1$.

Решение. Левая часть неравенства имеет смысл при $x>0,\ 0,5x\ne 1,\ \ 0,125x\ne 1$, то есть при $x\in(0;2)\cup(2;8)\cup(8;+\infty)$.

Тогда $\dfrac{\log_2(2x)\cdot\log_{0,5x}2}{\log_{0,125x}8}\le 1 \ \Leftrightarrow \ \dfrac{\log_2(2x)\cdot\dfrac{1}{\log_2(0,5x)}}{\dfrac{3}{\log_2(0,125x)}}\le 1 \ \Leftrightarrow$

$$\frac{\left(\log_2 2+\log_2 x\right)\left(\log_2 0,125+\log_2 x\right)}{\log_2 0,5+\log_2 x}\le 3 \Leftrightarrow \frac{\left(\log_2 x+1\right)\left(\log_2 x-3\right)}{\log_2 x-1}\le 3.$$

Замена переменной $y = \log_2 x$ приводит к неравенству $\dfrac{(y+1)(y-3)}{y-1} \le 3 \Leftrightarrow \dfrac{y(y-5)}{y-1} \le 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty;\ 0] \cup (1;\ 5]$. Возвращаясь к старой переменной и учитывая ОДЗ, получим $x \in (0;\ 1] \cup (2;\ 8) \cup (8;\ 32]$.

Ответ: $(0;\ 1] \cup (2;\ 8) \cup (8;\ 32]$.

Задания 3.3

1. Решите неравенство $\log_3 \dfrac{x-7}{2x-5} < 0$
2. Решите неравенство $\log_{\sqrt{2}}(5x-4) \le 8$
3. Решите неравенство $\log_3(5x^2+6x+2) \le 0$
4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \ge 1$
5. Решите неравенство $\log_3(x+2) + \log_3(x-4) - 1 \le 0$
6. Решите неравенство $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3}) < 2$
7. Решите неравенство $\log_{x^2+4} 8 < 1$
8. Решите неравенство $1 + \log_{\frac{1}{4}}(\log_3(4-x)) > 0$
9. Решите неравенство $\log_2(x-3)(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2)(x-6) \le 2$
10. Решите неравенство $\log_3((x+2)(x+4)) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 7$
11. Решите неравенство $2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2) \ge 1$
12. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_x 2} - \log_2 \dfrac{1}{x} \le 2$
13. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+2) \le 0$
14. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-18x+91}{90}}(5x-\dfrac{3}{10}) \le 0$
15. Решите неравенство $\log_x(x^2-x^3+21x) \ge 3$
16. Решите неравенство $\log_{x+1} \dfrac{x^2+3x-4}{2x-4} \le 1$

17. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-x}{5}} \dfrac{x-1}{2} \geq 0$

18. Решите неравенство $\log_{9x^2-6x+1} \dfrac{1}{9x^2-18x+8} < -1$

19. Решите неравенство $\log_{2x-x^2} \left(x - \dfrac{3}{2} \right)^4 > 0$

20. Решите неравенство $\log_{0.5}(x^2-5x+6) > -1$

21. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{2-3x}{x} \right) \geq -1$

22. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(x-2)$

23. Решите неравенство $\left(\dfrac{x}{10} \right)^{\lg x - 2} < 100$

24. Решите неравенство $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2} - x - 1 \right) \geq 1$

25. Решите неравенство $\dfrac{\left(2^{\frac{2}{x}} - 4 \right)}{(x-2)\log_{2x}(3x-2)} > 0$

26. Решите неравенство $\dfrac{\left(2^{\frac{2}{x}} - 2 \right)\log_x(4x-1)}{x-4} \leq 0$

27. Решите неравенство $\dfrac{\left(4^{\frac{-1}{x}} - 4 \right)(x-4)}{\log_{2x}(4x-3)} \leq 0$

28. Решите неравенство $\dfrac{\left(2^x - 8\right)\log_{4x}(x-1)}{\log_{3x}(2x-1)} \geq 0$

29. Решите неравенство $\dfrac{\log_{2^{(x-1)^2-1}}\left(\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3)\right)}{\log_{2^{(x-1)^2-1}}(x^2+4x+5)} \geq 0$

30. Решите неравенство $\log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \leq 0$

Ответы к заданиям 3.3

1. $(-\infty;-2)\cup(7;+\infty)$	**2.** $\left(\frac{4}{5};4\right]$	**3.** $\left[-\frac{6}{5};-1\right)\cup\left(-\frac{1}{5};0\right]$	**4.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$	**5.** $\left(4;2\sqrt{3}+1\right]$
6. $(-3;-1)$	**7.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$	**8.** $(-77;3)$	**9.** $(-\infty;-2)\cup[7;+\infty)$	**10.** $(-2;3)$
11. $(2;5]$	**12.** $(0;1)\cup(1;2]$	**13.** $(1;2)$	**14.** $\left[\frac{13}{50};9+4\sqrt{5}\right)$	**15.** $\left(1;\frac{7}{2}\right]$
16. $(-1;0)\cup(0;1)\cup[5;+\infty)$	**17.** $(1;\frac{1+\sqrt{21}}{2})\cup[3;+\infty)$	**18.** $(-\infty;0)\cup\left(\frac{7}{12};\frac{2}{3}\right)$	**19.** $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$	**20.** $(1;2)\cup(3;4)$
21. $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$	**22.** $\left(2;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$	**23.** $(1;1000)$	**24.** $\left[-\sqrt{8};-1\right)\cup\left[\frac{-2+\sqrt{44}}{5};1\right)$	**25.** $(2/3;1)\cup(1;2)$
26. $(1/4;1/2]\cup(1;2]\cup(4;+\infty)$	**27.** $(3/4;1)\cup[3;+\infty)$	**28.** $(1;2]\cup[3;+\infty)$	**29.** $(-2;0)$	**30.** $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)\cup\left[3^{-\frac{2}{3}};1\right)\cup[3;+\infty)$

Контрольная работа

Вариант № 1

Решите уравнения

1.1. $5^{2x}-2\cdot 5^{x}-15=0$

1.2. $\lg\lg x+\lg\left(\lg x^{2}-1\right)=1$

Решите неравенства

1.3. $(x-2)^{x^{2}-1}<1$

1.4. $\left|\log_{x-1}\dfrac{4x+9}{1-x}\right|\geq 1$

1.5. $7^{\log_{7-x}\left(x^{2}+8x+15\right)}<1$

Вариант № 2

Решите уравнения

2.1. $13^{2x}-6\cdot 13^{x}+5=0$

2.2. $\sqrt{\log_{x}\sqrt{3x}}\cdot\log_{3}x=-1$

Решите неравенства

2.3. $\left(4x^{2}+2x+1\right)^{x^{2}-x}>1$

2.4. $\log_{|x|}(1-x)-\log_{|x|}(1+x)\leq 1$

2.5. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{3-x}(x^{2}+4x-5)}\geq 1$

Ответы

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
1	$10^{\frac{5}{2}}$	$(2;3)$	$\left[\dfrac{-7+\sqrt{17}}{4};0\right)\cup(0;1)$	$(-4-\sqrt{2};-5)\cup$ $\cup(-3;-4+\sqrt{2})\cup(6;7)$
2.1	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**
$0;\ \log_{13}5$	$\dfrac{1}{9}$	$(-\infty;-0,5)\cup$ $\cup(1;+\infty)$	$(-1;0)\cup\left(0;\sqrt{2}-1\right]$	$\left[-2-\sqrt{10};-5\right)\cup$ $\cup\left(1;-2+\sqrt{10}\right]\cup(2;3)$

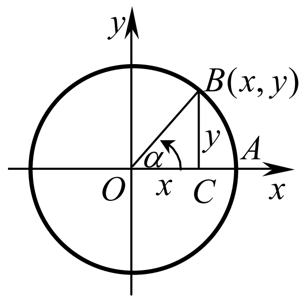
Список литературы

1. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена. – М.: Айрис пресс, 2007. – 272 с.
2. Золотарёва Н.Д., Попов Ю.А., Семендяева Н.Л., Федотов М.В. Алгебра. Базовый курс с решениями и указаниями. – М.: Фойлис, 2010. – 568 с.
3. Единый государственный экзамен. Математика. Типовые экзаменационные варианты / под редакцией А. Л. Семёнова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2010. – 240 с.
4. Белоненко Т.В., Васильев А.В., Васильева Н.И., Крымская Л.Д. Сборник конкурсных задач по математике. – СПб.: «Специальная литература», 1977. – 576 с.

Глава 4
ТРИГОНОМЕТРИЯ

4.1. Тождественные преобразования тригонометрических выражений и свойства тригонометрических функций

4.1.1. Градусная и радианная меры угла. Тригонометрический круг



Рассмотрим на координатной плоскости XOY окружность единичного радиуса с центром в начале координат $O(0,0)$. Неподвижный луч OA с центром в $O(0,0)$ и подвижный луч OB образуют угол α.

Если вращение от неподвижного луча подвижного луча происходит против часовой стрелки, то угол считается ***положительным***, а если вращение происходит по часовой стрелке, то угол считается ***отрицательным.***

Единицы измерения: ***градус, радиан***.

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.

$$1\,\text{рад.} = \frac{180^\circ}{\pi}, \text{ т. к. } \pi \approx 3{,}14, \text{ то } 1\,\text{рад.} \approx 57{,}3^\circ$$

Если угол содержит α радиан, то его градусная мера

$$\alpha\,\text{рад.} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^\circ.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\,\text{рад.},\ \alpha^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\,\alpha\,\text{рад.}$$

$$\begin{array}{l}\pi\,\text{рад.} - 180^\circ \\ \alpha\,\text{рад.} - n^\circ\end{array} \Rightarrow n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\cdot\alpha$$

– переход от радианной меры угла к градусной.

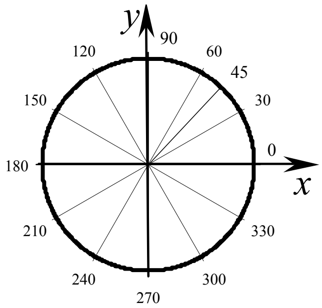
$\alpha\,\text{рад.} = \dfrac{\pi n}{180^\circ}$ – переход от градусной меры к радианной мере угла.

Составим таблицу соответствий градусной и радианной мер, которую приведем ниже:

градусная мера	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
радианная мера	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Следует избегать равенства вида $90^{o} = \frac{\pi}{2}$, потому, что они не являются числовыми равенствами, а лишь означают, что 90° и $\frac{\pi}{2}$ радиан являются различными мерами измерения одного и того же угла.

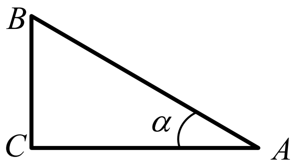


Углы можно отметить на тригонометрическом круге.

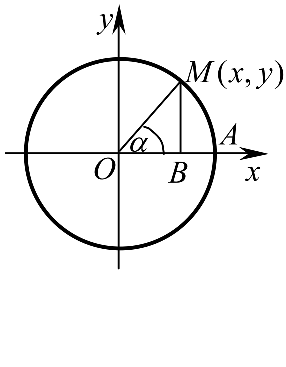
Отметим, что каждой точке единичной окружности соответствует не одно, а бесконечно много действительных чисел.

4.1.2. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла. Основные формулы тригонометрии

Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе



$$\sin\alpha = \frac{CB}{AB}.$$



Синусом угла α называют отношение ординаты точки M к радиусу $\sin\alpha = \frac{y}{R}$, если $R = 1$, то

$$\sin\alpha = y.$$

Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}.$$

Косинусом угла α называют отношение абсциссы точки M к радиусу $\cos\alpha = \frac{x}{R}$, если $R = 1$, то

$$\cos\alpha = x.$$

Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}.$$

Тангенсом угла α называют отношение ординаты точки M к ее абсциссе

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}.$$

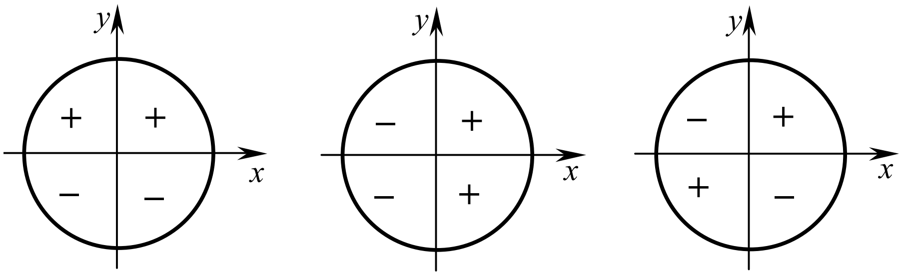
Тангенсом угла α называют отношение абсциссы точки M к ее ординате

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Таблица значений тригонометрических функций

Функция	Аргумент						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\nexists$	0

Знаки тригонометрических функций



Знаки синуса Знаки косинуса Знаки тангенса и котангенса

Основные формулы тригонометрии

1. **Основные тригонометрические тождества** (формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z;$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z;$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

2. **Формулы сложения:**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta},$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta},$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\alpha},$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

3. Формулы двойного и тройного аргумента:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\quad n,k\in Z;$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,3\alpha=\frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}^3\,\alpha}{1-3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

4. Формулы понижения степени (половинного аргумента):

$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha;$$

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha;$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\,,\ \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z\,;$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\,;$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\,;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\,,\ \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z\,;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\,,\ \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z\,;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\,,\ \alpha \neq 2\pi n, \quad n \in Z\,;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\,,\ \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z\,.$$

5. **Формулы преобразования суммы одноименных функций в произведение**:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,;$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,;$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,;$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,;$$

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\beta),\ a^2+b^2 \neq 0,$$

где $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\sin\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

<u>Например:</u> решая задачу о нахождении наибольшего значения суммы $\sin x + \cos x$, выполним следующие преобразования:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right],$$

следовательно, наибольшее значение исходного выражения равно $\sqrt{2}$.

6. **Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму**:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right],$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right],$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right].$$

7. **Формулы «универсальной замены»** (выражение тригонометрической функции через тангенс половинного аргумента):

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \text{ где } \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \text{ где } \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \text{ где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad n, k \in Z.$$

8. Формулы приведения ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$):

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

При пользовании формулами приведения можно руководствоваться следующим правилом.

Правило:

Если угол α откладывается от горизонтального диаметра (формулы для углов: $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$), то функция в обеих частях равенства имеют одно и тоже наименование; если угол α откладывается от вертикального диаметра (формулы для углов: $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$), то функции в обеих частях равенства имеют сходные наименования (синус и косинус, тангенс и котангенс).

Чтобы определить знак, с которым следует взять тригонометрическую функцию в правой части, достаточно, считать угол α острым, определить искомый знак по знаку левой части.

4.1.3. Свойства тригонометрических функций и их графики

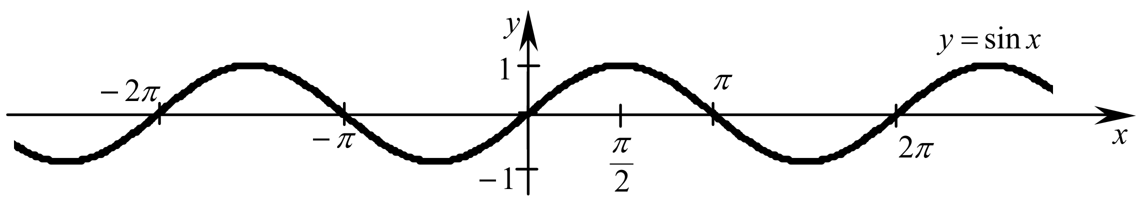
1. Таблица основных свойств функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

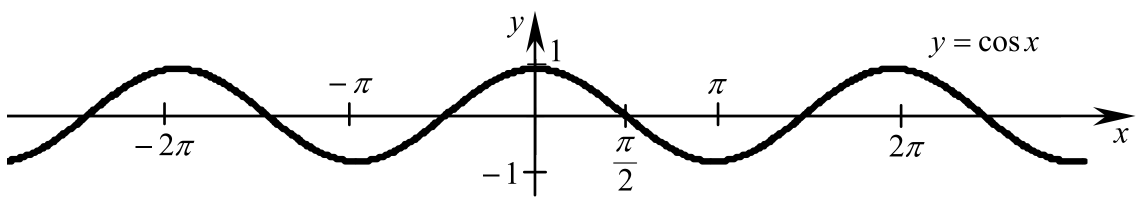
Свойства функции	Функция	
	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Область определения	$D(\sin x) = R$	$D(\cos x) = R$
Множество значений	$E(\sin x) = [-1;\ 1]$	$E(\cos x) = [-1;\ 1]$
Четность или нечетность	нечетная $\sin(-x) = -\sin x$	четная $\cos(-x) = \cos x$
Периодичность	период $T = 2\pi$ $\sin(x + 2\pi n) = \sin x, \quad n \in Z$	период $T = 2\pi$ $\cos(x + 2\pi n) = \cos x, \quad n \in Z$
Промежутки возрастания	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], \quad n \in Z$	$[\pi + 2\pi n;\ 2\pi(n+1)], \quad n \in Z$
Промежутки убывания	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], \quad n \in Z$	$[2\pi n;\ \pi + 2\pi n], \quad n \in Z$
Достижение наибольшего значения	$y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$	$y = 1$ при $x = 2\pi n, \quad n \in Z$
Достижение наименьшего значения	$y = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$	$y = -1$ при $x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$
Интервалы положительных значений	$y > 0$ при $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n), \quad n \in Z$	$y > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),$ $n \in Z$

Окончание табл. 1

Свойства функции	**Функция**	
	$y=\sin x$	$y=\cos x$
Интервалы отрицательных значений	$y<0$ при $x\in\left(\pi+2\pi n;\ 2\pi(n+1)\right)$, $n\in Z$	$y<0$ при $x\in\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$
Нули функции	$y=0$ при $x=\pi n,\quad n\in Z$	$y=0$ при $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$
Производная	$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$

Графики

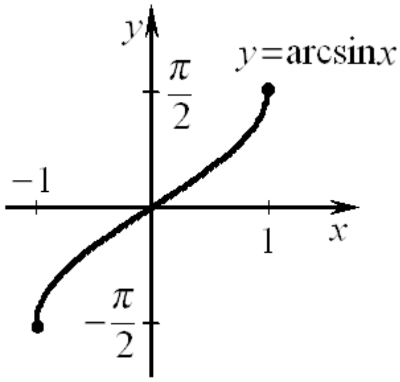


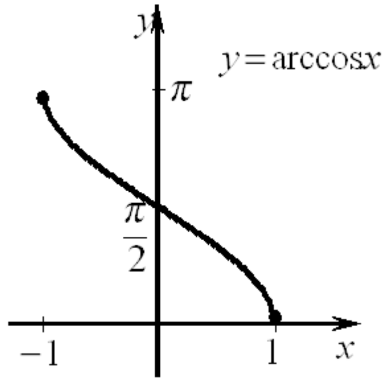


2. Таблица основных свойств функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$

Свойства функции	Функция	
	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$
Область определения	$D(\arcsin x) = [-1;\ 1]$	$D(\arccos x) = [-1;\ 1]$
Множество значений	$E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$	$E(\arccos x) = [0;\ \pi]$
Четность или нечетность	нечетная $\arcsin(-x) = -\arcsin x$	ни четная, ни нечетная $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
Монотонность	возрастает на $[-1;\ 1]$ от $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ до $\frac{\pi}{2}$	убывает на $[-1;\ 1]$ от π до 0
Достижение экстремальных зна-чений	$\max y = y(1) = \frac{\pi}{2}$, $\min y = y(-1) = -\frac{\pi}{2}$	$\max y = y(-1) = \pi$, $\min y = y(1) = 0$
Интервалы знакопостоянства	$y < 0$ на $[-1;\ 0)$, $y > 0$ на $(0;\ 1]$	$y > 0$ на $(-1;\ 1)$
Нули функции	$y = 0$ при $x = 0$	$y = 0$ при $x = 1$
Производная	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Графики





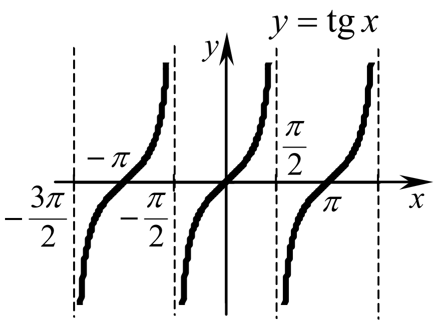
3. Таблица основных свойств функций $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$

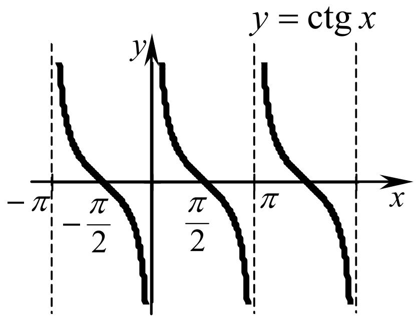
Свойства функции	Функция	
	$y=\operatorname{tg}x$	$y=\operatorname{ctg}x$
Область определения	$D(\operatorname{tg}x)$: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$	$D(\operatorname{ctg}x)$: $x\neq\pi n,\quad n\in Z$
Множество значений	$E(\operatorname{tg}x)=R$	$E(\operatorname{ctg}x)=R$
Четность или нечетность	нечетная $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$	нечетная $\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg}x$
Периодичность	период $T=\pi$ $\operatorname{tg}(x+\pi n)=\operatorname{tg}x,\quad n\in Z$	период $T=\pi$ $\operatorname{ctg}(x+\pi n)=\operatorname{ctg}x,\quad n\in Z$
Промежутки монотонности	возрастает на $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\quad n\in Z$	убывает на $x\in(\pi n;\ \pi(n+1)),\quad n\in Z$
Интервалы положительных значений	$y>0$ при $x\in\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\quad n\in Z$	$y>0$ при $x\in\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\quad n\in Z$

Окончание табл. 3

Свойства функции	**Функция**	
	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Интервалы отрицательных значений	$y < 0$ при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), \quad n \in Z$	$y < 0$ при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), \quad n \in Z$
Нули функции	$y = 0$ при $x = \pi n, \quad n \in Z$	$y = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
Производная	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n, \quad n \in Z$

Графики

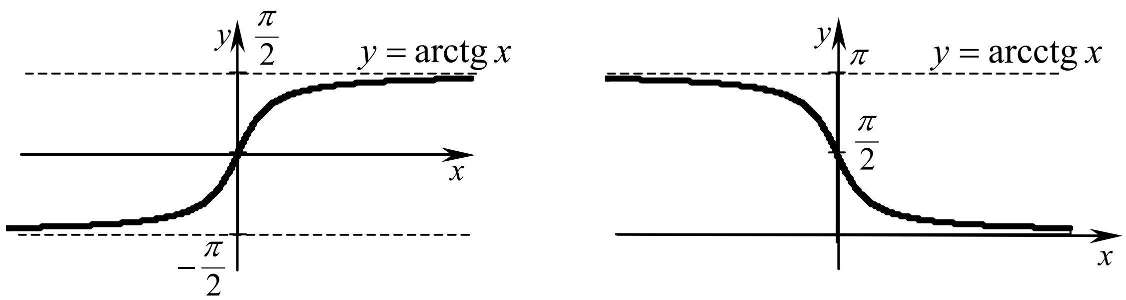




4. Таблица основных свойств функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$

Свойства функции	Функция	
	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область определения	$D(\operatorname{arctg} x) = R$	$D(\operatorname{arcctg} x) = R$
Множество значений	$E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$	$E(\operatorname{arcctg} x) = (0;\ \pi)$
Четность или нечетность	нечетная $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$	ни четная, ни нечетная $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$
Монотонность	возрастает всюду на R	убывает всюду на R
Интервалы знакопостоянства	$y < 0$ на $(-\infty;\ 0)$, $y > 0$ на $(0;\ +\infty)$	$y > 0$ на R
Нули функции	$y = 0$ при $x = 0$	нулей нет
Производная	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Графики



5. Таблица основных значений обратных тригонометрических функций

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

4.1.4. Примеры решения тестовых заданий

1. Вычислить $\sin^2\frac{13\pi}{47}+\cos^2\frac{13\pi}{47}$

Решение.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ (\alpha\in R)\ \Rightarrow\ \sin^2\frac{13\pi}{47}+\cos^2\frac{13\pi}{47}=1.$$

Ответ: 1

2. Найдите значение $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=0,8$, $\pi\le\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Решение.

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=-\sqrt{1-0,64}=-0,6.$$

Ответ: –0,6

3. Найдите значение $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{1}{5}$, $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Решение.

$$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ \Rightarrow\ \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}=-\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{6}}{12}$

4. Упростить выражение $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha$.

Решение.

$$\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$$

Ответ: $\sin^2\alpha$

5. Найти значение выражения

$$k=\left|\cos\left(\frac{8\pi}{3}+\sqrt{2}\right)\right|+\left|\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-\frac{5\pi}{6}\right|.$$

Решение.

Так как $1,4<\sqrt{2}<1,5$, $3,1<\pi<3,2$, то $\begin{cases}\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}<\frac{3,2}{3}-1,4=-\frac{1}{3}<0,\\ \sqrt{2}-\frac{5\pi}{6}<1,5-\frac{15,5}{6}=-\frac{13}{12}<0;\end{cases}$ отсюда получим $\left|\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}$, $\left|\sqrt{2}-\frac{5\pi}{6}\right|=\frac{5\pi}{6}-\sqrt{2}$.

Преобразуем выражение $\cos\left(\frac{8\pi}{3}+\sqrt{2}\right)$ по формулам приведения

$$\cos\left(\frac{8\pi}{3}+\sqrt{2}\right)=\cos\left(3\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}\right)=-\cos\left(\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}\right).$$

Так как $\left(\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}\right)\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos\left(\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}\right)>0$.

Тогда $k=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}-\sqrt{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}$

6. Упростить $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(\pi-x)}{\sin^2 x-1}$.

Решение.

Используя формулы приведения, получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x,\ \cos(\pi-x)=-\cos x,$$

$$\sin^2 x-1=-\left(1-\sin^2 x\right)=-\cos^2 x.$$

Тогда $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(\pi-x)}{\sin^2 x-1}=\frac{-\cos^2 x}{-\cos^2 x}=1.$$

Ответ: 1

7. Вычислить $\cos 14^0\cos 16^0-\sin 14^0\sin 16^0$.

Решение.

Применим формулу $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

$$\cos 14^0\cos 16^0-\sin 14^0\sin 16^0=\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Вычислить $k=\dfrac{\cos 64^0\cos 4^0-\cos 86^0\cos 26^0}{\cos 71^0\cos 41^0-\cos 49^0\cos 19^0}$.

Решение.

По формулам приведения получаем

$$\cos 64^0=\cos\left(90^0-26^0\right)=\sin 26^0,\ \cos 71^0=\cos\left(90^0-19^0\right)=\sin 19^0,$$

$$\cos 86^0=\cos\left(90^0-4^0\right)=\sin 4^0,\ \cos 49^0=\cos\left(90^0-41^0\right)=\sin 41^0.$$

$$k=\frac{\cos 64^0\cos 4^0-\cos 86^0\cos 26^0}{\cos 71^0\cos 41^0-\cos 49^0\cos 19^0}=\frac{\sin 26^0\cos 4^0-\sin 4^0\cos 26^0}{\sin 19^0\cos 41^0-\sin 41^0\cos 19^0}=$$

$$=\frac{\sin\left(26^0-46^0\right)}{\sin\left(19^0-41^0\right)}=\frac{\sin 22^0}{-\sin 22^0}=-1.$$

Ответ: -1

9. Найти $10\sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)$.

Решение.

Обозначим $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}=\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$.

$$10\sin(2\alpha)=10\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=10\cdot\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=8.$$

Ответ: 8

10. Найти значение выражения $\dfrac{5\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{4\sin(2\pi-\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{7\pi}{6}$.

Решение.

$$\frac{5\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{4\sin(2\pi-\alpha)}=\frac{5\sin\alpha}{-4\sin\alpha}=-1,25.$$

Ответ: –1,25

11. Найти область определения функции $y = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{x^2+4}$.

Решение.

Пусть $t = \dfrac{\pi x}{x^2+4} = \dfrac{\pi}{x+\frac{4}{x}}$, где $x \neq 0$. Используя соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел, получим

при $x > 0$, то $x + \dfrac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \dfrac{4}{x}} = 4$, $0 < t \leq \dfrac{\pi}{4}$;

при $x < 0$, то $(-x) + \dfrac{4}{(-x)} \geq 4$, т. е. $x + \dfrac{4}{x} \leq -4$, $-\dfrac{\pi}{4} \leq t < 0$;

при $x \neq 0$, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Учитывая, что при $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ функция $y = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{x^2+4}$ не определена лишь при $t = 0$. Тогда $t = \dfrac{\pi x}{x^2+4} \neq 0$, $x \neq 0$. $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Ответ: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

12. Найти множество значений функции

$$y = \frac{9}{\pi}\arccos\left(\frac{3\sqrt{2} + \sin x - \cos x}{4\sqrt{2}}\right).$$

Решение.

Так как

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) =$$

$$= -\sqrt{2}\left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

то множество значений этой разности – отрезок $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, а дробь $\dfrac{3\sqrt{2} + \sin x - \cos x}{4\sqrt{2}} = t$ принимает все значения из отрезка $\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}, \dfrac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right] = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

$$y = \frac{9}{\pi}\arccos t,\ \frac{y\pi}{9} = \arccos t,\ \cos\left(\frac{y\pi}{9}\right) = t,\ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$0 \leq \frac{y\pi}{9} \leq \frac{\pi}{3},\ 0 \leq y \leq 3.$$

Ответ: $[0, 3]$

13. Доказать тождество $\left(\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)=1\cdot$

Решение.

Упростим левую часть равенства

$$\left(\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{ctg}\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\left(\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\left(\cos^{-1}2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\left(\cos^{-1}2\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos 2\alpha}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1.$$

14. Найти период функции $y=\sin 2x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение.

Период функции $\sin 2x$ равен $T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$. Период функции $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ равен $T_2=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$. Периодом заданной функции будет наименьшее общее кратное периодов ее слагаемых, т. е. $T=2\pi$.

Ответ: 2π

15. Найти период функции $y=\sin\frac{3x}{4}+5\cos\frac{2x}{3}$.

Решение.

Период функции $\sin\frac{3x}{4}$ равен $T_1=\frac{2\pi}{\frac{3}{4}}=\frac{8\pi}{3}$. Период функции $5\cos\frac{2x}{3}$ равен $T_2=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$. Периодом заданной функции будет наименьшее общее кратное периодов ее слагаемых, т. е. $T=24\pi$.

Ответ: 24π

16. Найти период функции $y=\sin(x-2)+5\cos(\pi x)$.

Решение.

Период функции $\sin(x-2)$ равен $T_1=\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$. Период функции $5\cos(\pi x)$ равен $T_2=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$. Периода у функции $y=\sin(x-2)+5\cos(\pi x)$ не существует, т. к. такого числа нет, при делении которого на 2π и 2 получились бы целые числа.

Ответ: не существует

17. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=t$

Решение.

Возведем в квадрат $\sin\alpha-\cos\alpha=t$.

$$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=t^2,\ 1-\sin 2\alpha=t^2,\ \sin 2\alpha=1-t^2.$$

Ответ: $1-t^2$

18. Найти наименьшее значение функции $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

Решение.

Преобразуем выражение по формуле $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$$y=\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)=$$
$$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=$$
$$=(\sin^2 x)^2+2\sin^2 x\cos^2 x+(\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x,$$

$$0\le\sin^2 2x\le 1,\ -\frac{3}{4}\le-\frac{3}{4}\sin^2 2x\le 0,\ \frac{1}{4}\le 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\le 1.$$

Таким образом, область значений функции $y=\sin^6 x+\cos^6 x$ представляет собой отрезок $\left[\frac{1}{4},1\right]$. Наименьшим значением функции будет $\frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$

19. Найти значение суммы $S = \operatorname{arcctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arcctg}\frac{2}{3}$

Решение.

Так как $\frac{1}{5} \in (0;\ 1)$ и $\frac{2}{3} \in (0;\ 1)$, то в силу убывания арккотангенса на (0; 1) имеем $\operatorname{arcctg}\frac{1}{5} \in (\operatorname{arcctg}1; \operatorname{arcctg}0) = \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, а $\operatorname{arcctg}\frac{2}{3} \in (\operatorname{arcctg}1; \operatorname{arcctg}0) = \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит $S \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Найдем $\operatorname{ctg} S$. По формуле сложения аргументов получаем

$$\operatorname{arcctg}\frac{1}{5} = \alpha,\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{5},\ \operatorname{arcctg}\frac{2}{3} = \beta,\ \operatorname{ctg}\beta = \frac{2}{3},.\ \operatorname{ctg} S = \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}} = -1,$$

$$S = \frac{3\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить $\sin 150°$. **Отв.** 0,5
2. Вычислить $1 - 2\sin^2 15°$. **Отв.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Вычислить $\sin 17°\cos 28° + \cos 17° \sin 28°$. **Отв.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. Вычислить $\frac{1 + \operatorname{tg} 67^{o} \cdot \operatorname{tg} 7^{o}}{\operatorname{tg} 67^{o} - \operatorname{tg} 7^{o}}$. **Отв.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$
5. Упростить $\frac{1 + \sin(\pi + \alpha)}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$. **Отв.** 1
6. Упростить $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 1}{\cos(\pi - \alpha) + 1}$. **Отв.** –1
7. Вычислить в градусах значение выражения

$2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}(-1)$. **Отв.** 75^{o}

8. Исключить параметр из системы $\begin{cases} 2\sin\alpha = x, \\ 2\cos\alpha = y. \end{cases}$ Какой геометрический образ представляет система? **Отв.** $x^2 + y^2 = 4$

9. Определить наименьший положительный период функций

а) $2\sin x$; б) $\frac{1}{2}|\sin x|$; в) $|\operatorname{tg} 2x|$; г) $|\sin|x||$. **Отв.** г) π

10. Вычислить без таблиц $\frac{\sin 585^{\circ} + \cos 405^{\circ} + \sin 390^{\circ}}{\cos^2 780^{\circ}}$. **Отв.** 2

11. Вычислить $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arcctg}(-1)$.

Отв. $\frac{3\pi}{4}$

12. Найти наибольшее значение функции $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x$ для $x \in R$. **Отв.** $\sqrt{2}$

13. Если $\cos x = \frac{3}{4}$, то значение выражения $16\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$ равно?

Отв. 7

14. Укажите выражение, которое не имеет смысла

а) $\sin 5$; б) $\operatorname{arctg} 0$; в) $\arcsin\sqrt{3}$; г) $\operatorname{arctg}(2\pi)$, д) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Отв. в)

15. Если $\cos\alpha = -0.8$, а $180^0 < \alpha < 270^0$. Определить $100 \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Отв. 75

16. Упростить $(3\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - 3\cos x)^2$. **Отв.** 10

17. Найдите значение выражения $\frac{1 + 5\sin\alpha - 2\sin^2\left(45^{\circ} - \frac{\alpha}{2}\right)}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$. **Отв.** $\sqrt{3}$

18. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 12$, $\cos A = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найти высоту CH.

Отв. 8.4

4.2. Тригонометрические уравнения, неравенства, системы

4.2.1. Решение тригонометрических уравнений, неравенств и систем

Решение тригонометрических уравнений, неравенств и систем основывается на решении простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

1. Таблица решений простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Различные случаи	Ответ
$\sin x = a$	$a \in [-1; 1]$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$
	$a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$	$x \in \varnothing$
$\cos x = a$	$a \in [-1; 1]$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$
	$a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$	$x \in \varnothing$
$\operatorname{tg} x = a$	$a \in R$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = a$	$a \in R$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in Z$

2. Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$
$\sin x = 0$	$x = \pi n, \quad n \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, \quad n \in Z$

3. Таблица решений простейших тригонометрических неравенств с синусом

Неравенство	Различные случаи	Ответ
$\sin x \le a$	$a \in (-\infty; -1)$	$x \in \varnothing$
	$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$
	$a \in (-1; 1)$	$x \in [\pi(2n-1) - \arcsin a;\ \arcsin a + 2\pi n], \quad n \in Z$
	$a \in [1; +\infty]$	$x \in R$
$\sin x < a$	$a \in (-\infty; -1]$	$x \in \varnothing$
	$a \in (-1; 1)$	$x \in (\pi(2n-1) - \arcsin a;\ \arcsin a + 2\pi n), \quad n \in Z$
	$a = 1$	$x \ne \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$
	$a \in (1; +\infty]$	$x \in R$
$\sin x \ge a$	$a \in (-\infty; -1]$	$x \in R$
	$a \in (-1; 1)$	$x \in [\arcsin a + 2\pi n;\ \pi(2n+1) - \arcsin a], \quad n \in Z$
	$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$
	$a \in (1; +\infty]$	$x \in \varnothing$
$\sin x > a$	$a \in (-\infty; -1)$	$x \in R$
	$a = -1$	$x \ne -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$
	$a \in (-1; 1)$	$x \in (\arcsin a + 2\pi n;\ \pi(2n+1) - \arcsin a), \quad n \in Z$
	$a \in (1; +\infty]$	$x \in \varnothing$

4. Таблица решений простейших тригонометрических неравенств с косинусом

Неравенство	Различные случаи	Ответ
$\cos x \le a$	$a \in (-\infty; -1)$	$x \in \varnothing$
	$a = -1$	$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$
	$a \in (-1; 1)$	$x \in [2\pi n + \arccos a;\ 2\pi(n+1) - \arccos a], \quad n \in Z$
	$a \in (1; +\infty]$	$x \in R$
$\cos x < a$	$a \in (-\infty; -1]$	$x \in \varnothing$
	$a \in (-1; 1)$	$x \in (2\pi n + \arccos a;\ 2\pi(n+1) - \arccos a), \quad n \in Z$
	$a = 1$	$x \ne 2\pi n, \quad n \in Z$
	$a \in (1; +\infty]$	$x \in R$
$\cos x \ge a$	$a \in (-\infty; -1]$	$x \in R$
	$a \in (-1; 1)$	$x \in [2\pi n - \arccos a;\ 2\pi n + \arccos a], \quad n \in Z$
	$a = 1$	$x = 2\pi n, \quad n \in Z$
	$a \in (1; +\infty]$	$x \in \varnothing$
$\cos x > a$	$a \in (-\infty; -1)$	$x \in R$
	$a = -1$	$x \ne \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$
	$a \in (-1; 1)$	$x \in (2\pi n - \arccos a;\ 2\pi n + \arccos a), \quad n \in Z$
	$a \in [1; +\infty]$	$x \in \varnothing$

5. Таблица решений простейших тригонометрических неравенств с тангенсом и котангенсом

Неравенство	Ответ
$\operatorname{tg} x \le a$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \operatorname{arctg} a + \pi n\right],\quad n \in Z$
$\operatorname{tg} x < a$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \operatorname{arctg} a + \pi n\right),\quad n \in Z$
$\operatorname{tg} x \ge a$	$x \in \left[\operatorname{arctg} a + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\quad n \in Z$
$\operatorname{tg} x > a$	$x \in \left(\operatorname{arctg} a + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\quad n \in Z$
$\operatorname{ctg} x \le a$	$x \in [\operatorname{arcctg} a + \pi n;\ \pi(n+1)),\quad n \in Z$
$\operatorname{ctg} x < a$	$x \in (\operatorname{arcctg} a + \pi n;\ \pi(n+1)),\quad n \in Z$
$\operatorname{ctg} x \ge a$	$x \in (\pi n;\ \operatorname{arcctg} a + \pi n],\quad n \in Z$
$\operatorname{ctg} x > a$	$x \in (\pi n;\ \operatorname{arcctg} a + \pi n),\quad n \in Z$

4.3. Некоторые методы решения тригонометрических уравнений

4.3.1. Тригонометрические уравнения, сводящиеся заменой переменной к квадратному уравнению

Уравнения вида

$$(1)\ a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x + d = 0,$$

$$(2)\ a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\cos x + d = 0$$

с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ сводятся к следующим видам

$$(3)\ a\sin^2 x + b\left(1 - \sin^2 x\right) + c\sin x + d = 0,$$

$$(4)\ a\left(1 - \cos^2 x\right) + b\cos^2 x + c\cos x + d = 0.$$

Вводя в (3) новую переменную $\sin x = t$, $|t| \le 1$, а в (4) $\cos x = t$, $|t| \le 1$, получим квадратное уравнение.

Пример. Решить уравнение

$$4-\cos^2 x=4\sin x.$$

Решение.

Используя формулу $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, получим

$$4-\left(1-\sin^2 x\right)=4\sin x,\ \sin^2 x-4\sin x+3=0.$$

Пусть $\sin x=t$, $|t|\le 1$. Тогда $t^2-4t+3=0$. Это уравнение имеет корни $t_1=1$, $t_2=3$. Значит исходное уравнение эквивалентно совокупности $\left[\begin{array}{l}\sin x=1,\\ \sin x=3.\end{array}\right.$

$$\sin x=1 \iff x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z;$$
$$\sin x=3 \iff x\in\varnothing.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z$.

4.3.2. Тригонометрические уравнения вида $a\cos 2x+b\cos x+c=0$, $a\cos 2x+b\sin x+c=0$

Данные уравнения сводятся к квадратному уравнению с использованием формул

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,\ \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

соответственно

$$a\left(2\cos^2\alpha-1\right)+b\cos x+c=0,$$
$$a\left(1-2\sin^2\alpha\right)+b\sin x+c=0.$$

Пример. Решить уравнение

$$5-2\cos x=5\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

Решение.

Используя формулу $\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, получим

$$5-2\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=5\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} \iff 4+4\sin^2\frac{x}{2}=5\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

Пусть $\sin x = t$, $|t| \le 1$. Тогда $4t^2 - 5\sqrt{2}t + 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$.

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \iff x \in \varnothing, \text{ т. к. } \frac{3\sqrt{2}}{2} > 1;$$

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z \iff$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos 2y + 4a\cos y + 2a^2 + 1 = 0$$

не имеет решений.

Решение.

$$\cos 2y + 4a\cos y + 2a^2 + 1 = 0 \iff 2\cos^2 y - 1 + 4a\cos y + 2a^2 + 1 = 0 \iff$$

$$2(\cos y + a)^2 = 0 \iff \cos y = -a.$$

Очевидно, что уравнение не имеет решений, если $|a| > 1$.

Ответ: $(-\infty;\ -1) \cup (1; +\infty)$.

4.3.3. Группировка и разложение на множители

Самый распространенный метод решения – это разложение на множители. Под разложением на множители понимается такое разложение, когда выражение равное нулю представляется в виде произведения нескольких сомножителей.

Пример. Решить уравнение

$$\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}.$$

Решение.

Преобразуем правую часть уравнения

$$\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) = \cos x.$$

Исходное уравнение примет вид

$$\sin 2x = \cos x \iff \sin 2x = \cos x \iff 2\sin x \cos x - \cos x = 0 \iff$$

$$\cos x(2\sin x - 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ 2\sin x - 1 = 0.\end{array}\right.$$

1) $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$;

2) $\sin x = \dfrac{1}{2}$, $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$,

$x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$.

Пример. Решить уравнение

$$\sin 5x - \sin x = 0.$$

Решение.

Используя формулу

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

запишем

$$2\sin\frac{5x - x}{2}\cdot\cos\frac{5x + x}{2} = 0 \iff 2\sin 2x \cdot \cos 3x = 0,$$

отсюда

1) $\sin 2x = 0$, $2x = \pi n, \quad n \in Z$, $x = \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$;

2) $\cos 3x = 0$, $3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$, $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}, \quad k \in Z$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$, $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}, \quad k \in Z$.

Пример. Решить уравнение

$$\cos 5x - \sin x = 0.$$

Решение.

Поскольку $\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, то исходное уравнение можно записать в виде

$$\cos 5x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$$

Используя формулу

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

получим

$$2\sin\frac{5x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x-5x}{2}=0 \Leftrightarrow 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=0.$$

Тогда

1) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, $2x+\frac{\pi}{4}=\pi n,\quad n\in Z$, $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=0 \Leftrightarrow -\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, $3x-\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in Z$,

$x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\quad k\in Z$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z$,

$x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\quad k\in Z$.

4.3.4. Однородные тригонометрические уравнения и уравнения, сводящиеся к однородным

Уравнения вида

$$a_0\sin^n x + a_1\sin^{n-1}x\cos x + a_2\sin^{n-2}x\cos^2 x + \ldots$$
$$+ a_{n-1}\sin x\cos^{n-1}x + a_0\cos^n x = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа, называются *однородными* относительно $\sin x$ и $\cos x$. Например, $a\cos x + b\sin x = 0$ – *однородное уравнение I порядка*, $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ – *однородное уравнение II порядка*, и т. д.

Поскольку $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не могут быть равны нулю, то уравнение $a\cos x + b\sin x = 0$ с помощью деления на $\sin x \neq 0$ или $\cos x \neq 0$ сводится к алгебраическому уравнению. Аналогично, уравнение $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ делим на $\sin^2 x \neq 0$ или $\cos^2 x \neq 0$.

Уравнение $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ не является однородным, но его можно привести к однородному, умножив его правую часть на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Пример. Решить уравнение

$$2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 .$$

Решение.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, $\cos x \neq 0$

$$2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0 .$$

Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда

$$2t^2 - t - 1 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{1}{2}.$$

1) $\operatorname{tg} x = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$;

2) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2},\ x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, \quad k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$,

$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, \quad k \in Z$.

Замечание. Методом деления на $\sin^2 x$ $\left(\cos^2 x\right)$ решают только **полные** однородные уравнения, если уравнение **не полное**, то его решают методом разложения на множители.

Пример. Решить уравнение

$$\sin 3x + \cos 3x = 0 .$$

Решение.

Это однородное уравнение первого порядка. Разделим обе части уравнения на $\cos 3x$, $\cos 3x \neq 0$

$$\operatorname{tg} 3x = -1,\ 3x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z,\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z .$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z$.

Пример. Решить уравнение

$$12\sin^2 x + 3\sin 2x - 2\cos^2 x = 2.$$

Решение.

Число 2 запишем как $2\sin^2 x + 2\cos^2 x$, тогда

$$12\sin^2 x + 6\sin\cos x - 2\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x \iff$$

$$10\sin^2 x + 6\sin\cos x - 4\cos^2 x = 0,$$

где $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не могут быть равными нулю. Пусть $\cos x \neq 0$. Разделив последнее уравнение на $2\cos^2 x$, получим

$$5\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{2}{5} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \\ x = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{5} + \pi k, \quad k \in Z. \end{array}\right.$

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$,

$x = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{5} + \pi k, \quad k \in Z.$

4.3.5. Тригонометрические уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени

Если в уравнении есть синус или косинус в четной степени, то степень уравнения может быть понижена с помощью формул

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}.$$

Решение.

Имеем

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} - \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\cos 2x + \cos 6x - \cos 4x = 0, \ 2\cos 4x\cos 2x - \cos 4x = 0,$$

$$\cos 4x(2\cos 2x - 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0, \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

1) $\cos 4x = 0$, $x = \frac{\pi}{8}(2n+1)$, $\quad n \in Z$;

2) $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $\quad k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8}(2n+1), \quad n \in Z$,

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$.

Пример. Найти корни уравнения

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8},$$

принадлежащие главному промежутку монотонности функции $y = \cos x$.

Решение.

Имеем

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{7}{8} + 2\sin^2 x\cos^2 x,$$

$$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 = \frac{7}{8} + 2\sin^2 x\cos^2 x,$$

откуда получаем

$$2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{8},\ \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{8},\ \sin^2 2x = \frac{1}{4},\ \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{4},\ \cos 4x = \frac{1}{2},$$

$$x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z.$$

Главным промежутком монотонности функции $y = \cos x$ является промежуток $[0; \pi]$. Этому условию удовлетворяют четыре корня: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$.

Ответ: $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$.

4.3.6. Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$ $\left(a \ne 0, b \ne 0, c \ne 0\right)$

Такие уравнения могут быть решены сведением к однородному уравнению относительно $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$, или с помощью формулы

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi), \text{ где } \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Или

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \text{ и } \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \text{ кроме } x \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z\,.$$

Иногда применяют другие методы решения. Данные способы рассмотрим на следующих примерах.

Пример. Решить уравнение

$$4\sin x - 6\cos x = 1\,.$$

Решение.

Переходя к аргументу $\frac{x}{2}$, имеем

$$4\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 6\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2},$$

$$5\sin^2\frac{x}{2} + 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 7\cos^2\frac{x}{2} = 0\,.$$

Разделив на $\cos^2\frac{x}{2}$ получаем

$$5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 8\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 7 = 0\,,$$

откуда

$$tg\frac{x_{1,2}}{2} = \frac{-8\pm 2\sqrt{51}}{10} = \frac{-4\pm\sqrt{51}}{5},\ x_{1,2} = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{-4\pm\sqrt{51}}{5}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z\,.$$

Ответ: $x = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{-4\pm\sqrt{51}}{5}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z\,.$

Пример. Решить уравнение

$$5\sin x + 12\cos x = \frac{13}{2}\,.$$

Решение.

Используя формулу

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi), \text{ где } \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a},$$

получим $13\sin\left(x+\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}\right)=6.5$, $\sin(x+\operatorname{arctg}2.4)=\dfrac{1}{2}$, откуда

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k-\operatorname{arctg}2.4,\quad k\in Z.$$

Ответ: $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k-\operatorname{arctg}2.4,\quad k\in Z$.

Пример. Решить уравнение

$$\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=1.$$

Решение.

Умножим левую и правую часть уравнения на $\dfrac{1}{2}$, получим

$$\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{6}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x=\frac{1}{2},\ \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2},$$

$$2x+\frac{\pi}{6}=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z,\ 2x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k-\frac{\pi}{6},\quad k\in Z,$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{12},\quad k\in Z.$$

Ответ: $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}-\dfrac{\pi}{12},\quad k\in Z$.

Пример. Решить уравнение

$$\sin x+\cos x-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-1.$$

Решение.

Областью допустимых значений данного уравнения является множество всех действительных чисел $x\neq 2\pi n,\quad n\in Z$. Выразим все функции, входящие в уравнение, через $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ по формулам

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}},\ \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\ \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Первая из них верна при любом x, кроме $x=\pi n,\quad n\in Z$, а две другие верны при любом x, кроме $x=\pi+2\pi k,\quad k\in Z$.

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=-1,$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=-1\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1=0,\ \operatorname{tg}\frac{x_{1,2}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2},$$

$$\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{2}\right)+\pi n,\quad n\in Z.$$

Откуда получим

$$x=2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)+2\pi n,\quad n\in Z,$$

$$x=-2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)+2\pi n,\quad n\in Z.$$

Подставим в уравнение $x=(2k+1)\pi,\quad k\in Z$ в исходное уравнение, получим, что любое из них является решением. Объединяя решения, получим

$$x=(2k+1)\pi,\quad k\in Z,$$

$$x=2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)+2\pi n,\quad n\in Z,$$

$$x=-2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)+2\pi n,\quad n\in Z.$$

Ответ: $x=(2k+1)\pi,\quad k\in Z$, $x=2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)+2\pi n,\quad n\in Z$,
$x=-2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)+2\pi n,\quad n\in Z$.

4.3.7. Уравнения, решаемые преобразованием тригонометрических сумм в произведение

Пример. Решить уравнение

$$\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 4x=0.$$

Решение.

Преобразуем уравнение следующим образом

$$(\sin x+\sin 3x)-(\sin 2x+\sin 4x)=0,$$

$$2\sin 2x\cdot\cos x-2\sin 3x\cdot\cos x=0,$$

$$\cos x\cdot(\sin 2x-\sin 3x)=0,$$

$$\cos x\cdot 2\cos\frac{5x}{2}\cdot\sin\left(-\frac{x}{2}\right)=0.$$

Откуда получим

1) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$;

2) $\cos\frac{5x}{2} = 0$, $x = \frac{\pi}{5}(2m+1), \quad m \in Z$;

3) $\sin\frac{x}{2} = 0$, $x = 2\pi k, \quad k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$, $x = \frac{\pi}{5}(2m+1), \quad m \in Z$, $x = 2\pi k, \quad k \in Z$.

Пример. Найти корни уравнения

$$\cos 2x + \cos 8x - \cos 6x = 1$$

принадлежащие $\left[0, \quad \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Имеем $\cos 2x + \cos 8x = 1 + \cos 6x$, $2\cos 5x \cos 3x = 2\cos^2 3x$,

$$\cos 3x(\cos 5x - \cos 3x) = 0,\ \cos 3x \cdot 2\sin 4x \cdot \sin(-x) = 0.$$

Откуда получим

1) $\cos 3x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}(2k+1), \quad k \in Z$;

2) $\sin 4x = 0$, $x = \frac{\pi n}{4}, \quad n \in Z$;

3) $\sin x = 0$, $x = \pi m, \quad m \in Z$.

Заметим, что $\pi m = \frac{\pi}{4} \cdot 4m$, т. е. множество корней πm является подмножеством $x = \frac{\pi n}{4}, \quad n \in Z$. Отсюда $x = \frac{\pi}{6}(2k+1), \quad k \in Z$ и $x = \frac{\pi n}{4}, \quad n \in Z$. Отбирая из множеств $x = \frac{\pi}{6}(2k+1), \quad k \in Z$ и $x = \frac{\pi n}{4}, \quad n \in Z$ значения x, принадлежащие $\left[0, \quad \frac{\pi}{2}\right]$, получаем следующие значения $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.

4.3.8. Уравнения, решаемые преобразованием произведений двух тригонометрических функций в сумму

Пример. Решить уравнение

$$\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x .$$

Решение.

Имеем

$$\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}\cos 12x + \frac{1}{2}\cos 2x .$$

Откуда

$$\cos 4x - \cos 12x = 0 ,\ 2\sin 8x \cdot \sin 4x = 0 .$$

1) $\sin 8x = 0$, $x = \frac{\pi n}{8}$, $\quad n \in Z$;

2) $\sin 4x = 0$, $x = \frac{\pi k}{4}$, $\quad k \in Z$.

Все корни второй группы содержатся среди корней $x = \frac{\pi n}{8}$, $\quad n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{8}$, $\quad n \in Z$.

4.3.9. Тригонометрические уравнения, решаемые с помощью замены переменной

Если уравнение содержит одно из выражений $\sin x + \cos x$ или $\sin x - \cos x$ и функцию $\sin 2x$ или $\sin x \cdot \cos x$, то вводим новую переменную:

либо $t = \sin x + \cos x$, либо $t = \sin x - \cos x$

и решаем алгебраическое уравнение.

Пример. Решить уравнение

$$1 - \sin 2x = -(\sin x + \cos x).$$

Решение.

Обозначим $t = \sin x + \cos x$, тогда уравнение примет вид

$$1 - (t^2 - 1) = -t ,\ t^2 - t - 2 = 0 ,\ \left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 2, \\ \sin x + \cos x = -1. \end{array}\right.$$

Решим эти уравнения.

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \quad \text{(не имеет решений)} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \end{array}\right.$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z .$$

Ответ: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$.

4.3.10. Уравнения вида $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$

Корнями этого уравнения служат те и только те значения x, при которых выполняются следующие условия $f_1(x)=0$ и $f_2(x)\neq 0$.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x\cdot\cos x}{\cos 3x}=0.$$

Решение.

Область допустимых значений переменной x определяется условием $\cos 3x\neq 0$ или $x\neq\dfrac{\pi}{6}(2k+1),\quad k\in Z$. Определим корни числителя

1) $\sin 3x=0$, $x=\dfrac{\pi k}{3},\quad k\in Z$;

2) $\cos x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k=\dfrac{\pi}{2}(2k+1),\quad k\in Z$.

Изобразив на круге единичного радиуса дуги $\dfrac{\pi}{6}(2k+1)$ в границах от 0 до 2π, т. е. при $k=0,1,2,3,4,5$, замечаем, что $\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{11\pi}{6}$ не принадлежат ОДЗ. Затем изобразим на круге единичного радиуса дуги $\dfrac{\pi k}{3}$ при $k=0,1,2,3,4,5,6$, т. е. также дуги в границах от 0 до 2π $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3},\pi,\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3},2\pi\right)$. Заключаем, что множества $\dfrac{\pi}{6}(2k+1)$ и $\dfrac{\pi k}{3}$ общих дуг не содержат, а это значит, что $x=\dfrac{\pi k}{3},\quad k\in Z$ – корни данного уравнения. Корни $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k=\dfrac{\pi}{2}(2k+1),\quad k\in Z$ не принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x=\dfrac{\pi k}{3},\quad k\in Z$.

Пример. Решить уравнение

$$\left(2\sin^2 x-7\sin x-4\right)\cdot\frac{1}{\log_5(-\cos x)}=0.$$

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x<0$ и $\log_5(-\cos x)\neq 0$, т. е. $\cos x\neq -1$, откуда $x\neq\pi+2\pi k,\quad k\in Z$ и $\cos x<0$.

$2\sin^2 x-7\sin x-4=0$ откуда $\sin x=4$ не имеет корней или $\sin x==-\frac{1}{2}$, учитывая, что $\cos x<0,$ получаем $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in Z$.

Ответ: $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in Z$.

4.3.11. Нестандартные уравнения

Рассмотрим некоторые примеры решений тригонометрических уравнений, для которых общих рекомендаций дать невозможно.

Пример. Решить уравнение

$$\cos 5x+\cos 3x=2.$$

Решение.

Левая часть уравнения принимает значение 2, только если оба слагаемых равны 1 одновременно

$$\cos 5x+\cos 3x=2\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\cos 5x=1,\\ \cos 3x=1;\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=\dfrac{2\pi k}{5},\quad k\in Z,\\ \cos\left(\dfrac{3\cdot 2\pi k}{5}\right)=1,\quad k=5n;\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$x=2\pi n,\quad n\in Z$.

Ответ: $x=2\pi n,\quad n\in Z$.

Пример. Решить уравнение

$$16x^2-40x+28=\left(\sqrt{3}+\sin(0.8\pi x)\right)\left(\sqrt{3}-\sin(0.8\pi x)\right).$$

Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите сумму всех его корней.

Решение.

Преобразуем уравнение

$$16x^2-40x+28=3-\sin^2(0.8\pi x)\ \Leftrightarrow\ 16x^2-40x+25+\sin^2(0.8\pi x)=0\ \Leftrightarrow$$

$$(4x-5)^2+\sin^2(0.8\pi x)=0.$$

Сумма квадратов двух выражений равна нулю тогда и только тогда, когда каждое выражение равно нулю.

$$\left[\begin{array}{l}\sin^2(0.8\pi x)=0,\\ 4x-5,=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{5k}{4}, \quad k\in Z,\\ x=\dfrac{5}{4}=1.25.\end{array}\right.$$

Найдем, при каком k полученное число, обращает в ноль первое слагаемое $4\cdot\dfrac{5k}{4}-5=0 \Leftrightarrow 5k-5=0 \Leftrightarrow k=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$. Отсюда уравнение имеет единственный корень $x=1.25$.

Ответ: $x=1.25$.

Пример. Определите количество корней уравнения

$$\left(\mathrm{tg}^2 x-1\right)\arcsin\frac{2x}{\pi}=0.$$

Решение.

Найдем ОДЗ из условия

$$\left\{\begin{array}{l}\cos x\neq 0,\\ \left|\dfrac{2x}{\pi}\right|\le 1;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z,\\ -1\le\dfrac{2x}{\pi}\le 1;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z,\\ -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2};\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$$

Уравнение $\left(\mathrm{tg}^2 x-1\right)\arcsin\dfrac{2x}{\pi}=0$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}^2 x=1,\\ \arcsin\dfrac{2x}{\pi}=0.\end{array}\right.$$

Решим

1) $\mathrm{tg}^2 x=1$, $\mathrm{tg}\, x=\pm 1$, $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in Z$. Определим, при каких n найденные корни входят в ОДЗ $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$. Получим $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=-\dfrac{\pi}{4}$.

2) $\arcsin\dfrac{2x}{\pi}=0$, $x=0$.

Уравнение имеет три корня.

Ответ: 3.

При решении некоторых тригонометрических уравнений используем знание ограниченности значений функции.

Пример. Решить уравнение

$$\cos^2(x\cdot\sin x)=1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}.$$

Решение.

Обозначим $\begin{cases} y=\cos^2(x\cdot\sin x), \\ y=1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}. \end{cases}$

1) Выясним ограниченность значений функции $y=\cos^2(x\cdot\sin x)$.

$$x\in R,\ -1\le\sin x\le 1,\ x\sin x\in R,\ -1\le\cos(x\sin x)\le 1,$$

$$0\le\cos^2(x\sin x)\le 1.$$

2) Выясним ограниченность значений функции $y=1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}$.

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\ge\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0<\frac{\sqrt{3}}{2}<1.$$

Так как $y=\log_a x$ при $a>1$ функция возрастающая, то $\log_5\frac{\sqrt{3}}{2}<0$, тогда $y=1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}\ge 1$.

Учитывая, что $0\le\cos^2(x\sin x)\le 1$ и $1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}\ge 1$, получаем

$$\begin{cases} \cos^2(x\cdot\sin x)=1, \\ 1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}=1. \end{cases}$$

Решим второе уравнение

$$\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}=0,\ \log_5\sqrt{x^2+x+1}=0,\ \sqrt{x^2+x+1}=1,\ x^2+x+1=1,$$

$$x^2+x=0,\ x(x+1)=0,\ x=0,\ x=-1.$$

Подставим найденные значения в первое уравнение.

1) $x=0$, $\cos^2(0\cdot\sin 0)=\cos^2 0=1$;

2) $x=-1$, $\cos^2(-1\cdot\sin(-1))=\cos^2(\sin 1)\ne 1$;

То есть $x=-1$ не является решением.

Ответ: 0.

4.3.12. Отбор корней в тригонометрических уравнениях

При решении некоторых уравнений, содержащих тригонометрические функции, важно помнить, что достаточно лишь записать ОДЗ. Ведь решить тригонометрическое неравенство гораздо сложнее, чем уравнение. Лучше поступить так: решить уравнение, а затем отобрать корни.

Пример. Решить уравнение

$$\sqrt{6\sin x\cos 2x} = \sqrt{-7\sin 2x}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin 2x \le 0,\\ \sin x\cos 2x \ge 0.\end{cases}$

Нахождение ОДЗ потребует достаточно много времени, поэтому решим уравнение и сделаем отбор корней.

$$\sqrt{6\sin x\cos 2x} = \sqrt{-7\sin 2x} \Leftrightarrow \begin{cases}6\sin x\cos 2x = -7\sin 2x,\\ \left[\begin{array}{l}\sin 2x \le 0,\\ \sin x\cos 2x \ge 0.\end{array}\right.\end{cases}$$

$$6\sin x\cos 2x = -7\cdot 2\sin x\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(6\cos^2 x + 7\cos x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = \dfrac{1}{3},\\ \cos x = -\dfrac{3}{2};\end{array}\right.$$

1) $\sin x = 0$, $x = \pi k, \quad k \in Z$;

2) $\cos x = \dfrac{1}{3}$, $x = \pm\arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z$;

3) $\cos x = -\dfrac{3}{2}$, не имеет решений, т. к. $|\cos x| \le 1$.

Теперь нужно отобрать корни.

$x = \pi k, \quad k \in Z$ – решение уравнения, т. к. $\sin 2x = 0$.

$\sin 2x \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x \le 0$. Поэтому $\begin{cases}\cos x = \dfrac{1}{3},\\ \sin x < 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z$.

Ответ: $x = \pi k$, $x = -\arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z$.

Пример. Решить уравнение

$$\sqrt{-\sin x+\sqrt{\cos x}}=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}.$$

Решение.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$-\sin x+\sqrt{\cos x}=\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2},$$

$$\sqrt{\cos x}=1 \;\Leftrightarrow\; \cos x=1 \;\Leftrightarrow\; x=2\pi k,\quad k\in Z$$

Подставим $x=2\pi k,\quad k\in Z$ в левую часть уравнения

$$\sqrt{-\sin 2\pi k+\sqrt{\cos 2\pi k}}=\sqrt{0+\sqrt{1}}=1,$$

в правую часть

$$\sin\frac{2\pi k}{2}-\cos\frac{2\pi k}{2}=-\cos\pi k=(-1)^{k+1}.$$

Итак, если $k=2m$, то $x=4\pi m$ не является решением исходного уравнения. Если же $k=2m+1$ – нечетное, то $x=2\pi k=2\pi+4\pi m$ есть решение исходного уравнения.

Ответ: $x=2\pi+4\pi m,\quad m\in Z$.

Пример. Решить уравнение

$$\left(2\cos^2 x-9\cos x+4\right)\sqrt{-2\,\mathrm{tg}\, x}=0.$$

Решение.

1) $\mathrm{tg}\, x=0$, тогда $x=\pi n,\quad n\in Z$;

2) $\mathrm{tg}\, x\neq 0$, $\mathrm{tg}\, x<0$ и $2\cos^2 x-9\cos x+4=0$.

Решая квадратное уравнение, находим $\cos x=4$ и $\cos x=\frac{1}{2}$. Уравнение $\cos x=4$ не имеет решений, т. к. $|\cos x|\leq 1$, а для $\cos x=\frac{1}{2}$, учитывая, что $\mathrm{tg}\, x<0$ получаем $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z$.

Ответ: $x=\pi n,\; x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z$.

4.3.13. Применение различных формул тригонометрии

Пример. Решить уравнение

$$\log_2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\log_2(1+\cos 2x-\sin 2x)-\frac{3}{2}.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>0, \\ 1+\cos 2x-\sin 2x>0. \end{cases}$

Для таких x уравнение равносильно уравнению $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=(1+\cos 2x-\sin 2x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Используя формулы

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x,\ \sin 2x=2\sin x\cos x,$$

уравнение можно записать в виде

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=(\cos^2 x-\cos x\sin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x(\cos x-\sin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(1-\cos x)=0.$$

Так как по условию $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>0$, то $\cos x=1,\ x=2\pi k,\quad k\in Z$. Для этих решений $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\pi k+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$.

Ответ: $x=2\pi k,\quad k\in Z$.

4.4. Тригонометрические неравенства

Два тригонометрических выражения, соединенные между собой знаками « $>$ » и « $<$ », называются тригонометрическими неравенствами.

Решить тригонометрическое неравенство – это значит найти множество значений неизвестных, входящих в неравенство, при которых неравенство выполняется. При решении тригонометрических неравенств следует использовать периодичность тригонометрических функций и их монотонность на соответствующих промежутках. Для того чтобы решить неравенство, содержащее только $\sin x$ или только $\cos x$, достаточно решить неравенство на каком либо отрезке длины 2π и прибавить к каждому найденному решению $2\pi k,\ k\in Z$. Для неравенств, содержащих только $\operatorname{tg} x$ или только $\operatorname{ctg} x$, решения находятся на промежутке длиной π, а к каждому найденному решению прибавляют $\pi k,\ k\in Z$.

Решение простейших тригонометрических неравенств представлены в таблицах пункта 2 № 3, 4, 5. При решении более сложных неравенств используем методы решения тригонометрических уравнений и решения простейших тригонометрических неравенств.

Пример. Решить неравенство

$$\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \sin x - \sin^2 x > \sqrt{2}.$$

Решение.

Применяя формулы двойного аргумента, получим

$$\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + \sqrt{3}\left(2\cos x \sin x\right) > \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x > \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда, вводя дополнительный угол, получим

$$\cos 2x \cos\frac{\pi}{3} + \sin 2x \sin\frac{\pi}{3} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n < 2x - \frac{\pi}{3} < \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z \Leftrightarrow$$

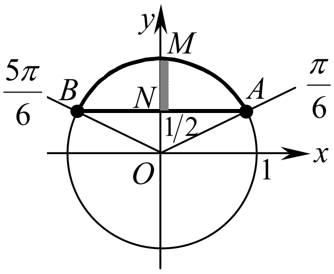
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{24} + \pi n < x < \frac{7\pi}{24} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{24} + \pi n < x < \frac{7\pi}{24} + \pi n, \quad n \in Z.$

Пример. Решить неравенство

$$\sin x > \frac{1}{2}.$$

Решение.



Построим окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Проведем прямую $y = \frac{1}{2}$. Все значения y на NM больше $\frac{1}{2}$. NM стягивает дугу AB с началом в точке A и с концом в точке B.

Следовательно, решением неравенства будут все значения на $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ с прибавлением периода $2\pi n$. Решение неравенства запишем в виде

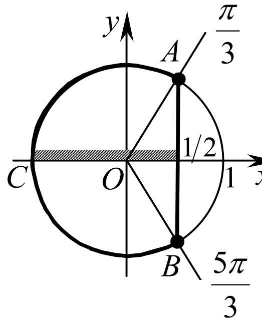
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Пример. Решить неравенство

$$\cos x \le \frac{1}{2}.$$

Решение.



Построим окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Проведем прямую $x = \frac{1}{2}$. Множество точек единичной окружности, абсциссы которых $\le \frac{1}{2}$, лежат левее прямой $x = \frac{1}{2}$. Значит, множество всех таких точек есть дуга ACB.

Итак, для всех точек этой дуги выполняется данное неравенства, т. е. решение неравенства можно записать в виде

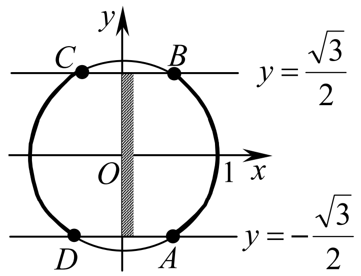
$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$.

Пример. Решить неравенство

$$|\sin 2x| \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение.



Раскрыв модуль, получим

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin 2x \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Проведем прямые $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решением неравенства будут все точки, принадлежащие дуге AB:

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z, \tag{1}$$

и точки, принадлежащие дуге CD:

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z \text{ или}$$

$$-\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi < 2x < \frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi, \quad k \in Z. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) следует

$$-\frac{\pi}{3}+\pi n<2x<\frac{\pi}{3}+\pi n, \quad n\in Z,$$

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n<x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n, \quad n\in Z.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n<x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n, \quad n\in Z$.

Пример. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)}\left(\sqrt{6}\sin x+\sqrt{2}\cos x\right)\geq 1.$$

Решение.

Данное неравенство эквивалентно совокупности двух систем

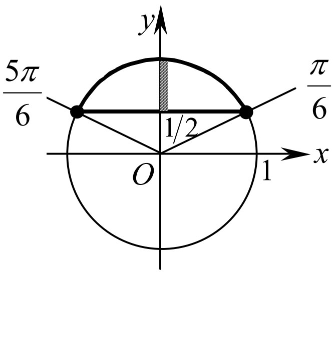
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)>1,\\ \sqrt{6}\sin x+\sqrt{2}\cos x\geq\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right),\end{cases}\\ \begin{cases}0<\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)<1,\\ 0<\sqrt{6}\sin x+\sqrt{2}\cos x\leq\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right).\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим первую систему.

Применим формулу $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ и упрощая второе неравенство, получим

$$\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2},\\ \sin x\geq 0.\end{cases}$$

Обозначим $\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=y$, тогда



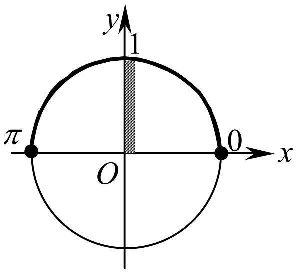
$$\sin y>\frac{1}{2}\;\Rightarrow\;\frac{\pi}{6}+2\pi n<y<\frac{5\pi}{6}+2\pi n, \quad n\in Z\;\Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{6}+2\pi n<x+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{6}+2\pi n, \quad n\in Z\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{12}+2\pi n, \quad n\in Z.$$

$$\sin x\geq 0\;\Rightarrow\;2\pi k\leq x\leq\pi+2\pi k, \quad k\in Z.$$

Решением первой системы будет пересечение этих областей, т. е.



$$2\pi n \le x < \frac{7\pi}{12} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Решим вторую систему.

$$0 < \sqrt{2}(\sin x + \cos x) < 1 \iff 0 < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2\pi n < x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z; \\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k < x + \dfrac{\pi}{4} < \pi + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n < x < -\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n, \quad n \in Z; \\ \dfrac{7\pi}{12} + 2\pi k < x < \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$

Второе двойное неравенство системы перепишем в виде

$$\begin{cases} \sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}\cos x > 0, \\ \sin x \le 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) > 0, \\ \sin x \le 0. \end{cases}$$

Решением этой системы будет пересечение двух областей

$$\begin{cases} -\pi + 2\pi n \le x \le 2\pi n, \quad n \in Z; \\ -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$

т. е. $\left(-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n;\ 2\pi n\right], \quad n \in Z$.

Пересечением областей решений первого и второго двойных неравенств второй системы является

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{12} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $2\pi n \le x < \dfrac{7\pi}{12} + 2\pi n, \quad n \in Z$,

$-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n < x < -\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n, \quad n \in Z$.

4.5. Системы тригонометрических уравнений

Решение систем тригонометрических уравнений чаще всего сводится к решению алгебраических систем относительно $\cos x$, $\operatorname{tg} y$, $\cos(x+y)$, $\sin x$, $\sin(x+y)$ и т. д.

Например, если система приведена к виду $\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \cos(x-y)=1;\end{cases}$ то она эквивалентна системе $\begin{cases}x+y=n\pi, & n\in Z,\\ x-y=2k\pi, & k\in Z.\end{cases}$ Решая эту систему, запишем

$$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}(n+2k),\\ y=\dfrac{\pi}{2}(n-2k),\end{cases} \quad n,k\in Z\,.$$

Отметим, что совершенно необходимо писать разные целочисленные параметры, т. е. в системе числа n и k должны быть обозначены разными буквами.

Рассмотрим пример решения систем.

Пример. Решить систему тригонометрических уравнений

$$\begin{cases}\sin x\cdot\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{4},\\ \cos x\cdot\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\end{cases}$$

Решение.

Методом сложения и вычитания уравнений системы получим систему эквивалентную исходной

$$\begin{cases}\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y=0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x+y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin(x-y)=0;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}, & n\in Z,\\ x-y=k\pi, & k\in Z;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}(n+k)\pi,\\ y=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}(n-k)\pi,\end{cases} \quad n,k\in Z.$$

Ответ: $\begin{cases}x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}(n+k)\pi,\\ y=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}(n-k)\pi,\end{cases} \quad n,k\in Z.$

Пример. Определить число пар $(x,\ y)$ решений системы уравнений

$$\begin{cases}\sin^2 x = \cos x \cdot \sin y,\\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y;\end{cases}$$ для которых $x \in (-\pi;\ 0],\ y \in [-\pi;\ 0)$.

Решение.

Методом сложения уравнений рассматриваемой системы, получим

$$\cos x \cdot \sin y \sin x \cdot \sin y = \sin^2 x + \cos^2 x \ \Leftrightarrow\ \cos(x-y) = 1 \ \Leftrightarrow$$

$$x - y = 2\pi k, \quad k \in Z \ \Leftrightarrow\ x = y + 2\pi k, \quad k \in Z\,.$$

Отсюда после подстановки в первое уравнение исходной системы имеем

$$\sin^2(y + 2\pi k) = \cos(y + 2\pi k)\cos y \ \Leftrightarrow\ \sin^2 y = \cos^2 y \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 y - \cos^2 y = 0 \ \Leftrightarrow\ \cos 2y = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z \ \Leftrightarrow\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z\,.$$

Из условия $y \in [-\pi;\ 0)$ следует

$$-\pi \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{5}{2} \le n < -\frac{1}{2},$$

т. е. $n \in \{-2;\ -1\}$.

Отсюда, для $n = -2$, получаем $y = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ и, значит, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

Из условия $x \in (-\pi;\ 0]$ следует

$$-\pi < -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{8} < k \le -\frac{3}{8},$$

т. е. подходит только $k = 0$, и поэтому решением будут $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3\pi}{4},\\ y_1 = -\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}$

Для случая $n=-1$ получаем $y=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$, откуда $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$. Из условия $x\in\left(-\pi;\,0\right]$ следует

$$-\pi<-\frac{\pi}{4}+2\pi k\le 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{3}{8}<k\le\frac{1}{8},$$

т. е. подходит только $k=0$, и поэтому решением будут $\begin{cases} x_2=-\dfrac{\pi}{4}, \\ y_2=-\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Ответ: 2.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y+2\cos x=0, \\ 2\sin^2 x-3\sin x-2=0. \end{cases}$$

Решение.

Решим второе уравнение относительно $\sin x$.

Пусть $\sin x=t$, $t\in\left[-1;\;1\right]$, тогда уравнение $2\sin^2 x-3\sin x-2=0$ принимает вид $2t^2-3t-2=0$. Решением этого уравнения будут $t_1=2$ и $t_2=-\frac{1}{2}$, заметим, что $t_1=2\notin\left[-1;\;1\right]$. При $t_2=-\frac{1}{2}$ получаем $\sin x=-\frac{1}{2}$. Тогда либо $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (и в этом случае первое уравнение системы не имеет решений, так как его левая часть положительна), либо $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. В этом случае первое уравнение системы приводится к виду $3^y=\sqrt{3}$ откуда $y=\frac{1}{2}$. Тогда $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in Z$.

Ответ: $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\, y=\frac{1}{2},\quad k\in Z$.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{81^{\cos x}-12\cdot 9^{\cos x}+27}{\log_7(1+2y)}=0, \\ y=\sin x. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 1+2y>0, \\ \log_7(1+2y)\ne 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>-\dfrac{1}{2}, \\ y\ne 0. \end{cases}$$

Пусть $9^{\cos x} = t$, тогда уравнение $81^{\cos x} - 12 \cdot 9^{\cos x} + 27 = 0$ принимает вид $t^2 - t + 27 = 0$. Решением этого уравнения будут $t_1 = 9$ и $t_2 = 3$, откуда $\cos x = 1$ и $\cos x = \frac{1}{2}$.

1) При $\cos x = \frac{1}{2}$, получаем либо

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z \text{ и } y = \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} > -\frac{1}{2},$$

либо $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$ и $y = \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2}$ – не является решением.

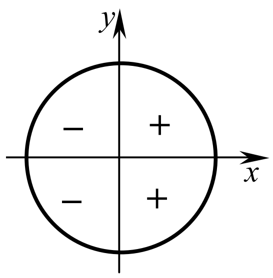
2) При $\cos x = 1$, получаем $y = \sin x = 0$. В этом случае решений нет.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$; $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y + \cos x = 0, \\ \left(3\sqrt{\cos x} - 1\right)\left(3y - 2\right) = 0. \end{cases}$$

Решение.



Знаки косинуса

ОДЗ: $\cos x \geq 0$.

Из второго уравнения получаем

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3} \quad \text{или} \quad \cos x = \frac{1}{9}, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Если $y = \frac{2}{3}$, то из первого уравнения $\cos x = -\frac{2}{3}$, это противоречит условию $\cos x \geq 0$.

Если $\cos x = \frac{1}{9}$, то $x = \pm \arccos\frac{1}{9} + 2\pi n, \quad n \in Z$ и из первого уравнения получаем $y = -\frac{1}{9}$.

Ответ: $x = \pm \arccos\frac{1}{9} + 2\pi n, \quad n \in Z$; $y = -\frac{1}{9}$.

Пример. Система уравнений

$$\begin{cases} \arcsin x + \operatorname{arcctg} y = \dfrac{7\pi}{12}, \\ \arccos x \cdot \operatorname{arctg} y = -\dfrac{\pi^2}{6}; \end{cases}$$

а) имеет единственное решение;

б) имеет два решения;

в) имеет более двух решений;

г) не имеет решений?

Решение.

Полагая $\begin{cases} a = \arccos x \in [0;\ \pi], \\ b = \operatorname{arctg} y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right); \end{cases}$

в силу формул $\begin{cases} \arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x = \dfrac{\pi}{2} - a, \\ \operatorname{arcctg} y = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y = \dfrac{\pi}{2} - b; \end{cases}$

получим $\begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) + \left(\dfrac{\pi}{2} - b\right) = \dfrac{7\pi}{12}, \\ a \cdot b = -\dfrac{\pi^2}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{5\pi}{12} - a, \\ a \cdot b = -\dfrac{\pi^2}{6}. \end{cases}$

Подставим b во второе уравнение

$$a \cdot \left(\frac{5\pi}{12} - a\right) = -\frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow 12a^2 - 5\pi a - 2\pi^2 = 0.$$

Откуда

$$D = 25\pi^2 + 4 \cdot 12 \cdot 2\pi^2 = 121\pi^2 \geq 0 \Rightarrow a_1 = \frac{5\pi - 11\pi}{24} = -\frac{\pi}{4},$$

$$a_2 = \frac{5\pi + 11\pi}{24} = \frac{2\pi}{3}.$$

Так как $-\dfrac{\pi}{4} \notin [0;\ \pi]$, то $a_1 = -\dfrac{\pi}{4}$ не является корнем уравнения. Для $a_2 = \dfrac{2\pi}{3} \in [0;\ \pi]$ следует $b = \dfrac{5\pi}{12} - \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому

$$\begin{cases} \arccos x = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{arctg} y = -\dfrac{\pi}{4}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}, \\ y = tg\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1. \end{cases}$$

Следовательно, система имеет единственное решение.

Ответ: а)

Контрольные работы

Вариант 1

1. Вычислить $\cos 58^{\circ} \cos 32^{\circ} - \sin 58^{\circ} \sin 32^{\circ}$. Ответ: 0

2. Вычислить $\dfrac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 0.5$. Ответ: 7

3. Вычислить $100 \cdot \left(\cos(2\alpha - \pi)\right)$, если $\sin \alpha = \sqrt{0,2}$. Ответ: –60

4. Найти $17 \cdot \sin\left(2 \operatorname{arcctg} \dfrac{3}{5}\right)$ Ответ: 15

5. Найти число корней уравнения $6\sin^2 x - 19\sin x + 8 = 0$, принадлежащих отрезку $[-2\pi, \pi]$. Ответ: 4

6. Решить неравенство $\sin x + \sqrt{3} \cos x > 1$.

   Ответ: $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$

7. Решить систему уравнений $\begin{cases} y + \cos x = 0, \\ \left(3\sqrt{\cos x} - 1\right)\left(3y - 2\right) = 0. \end{cases}$

   Ответ: $\left(\pm \arccos \dfrac{1}{9} + 2\pi n; -\dfrac{1}{9}\right), \quad n \in Z$

8. Решить уравнение $\dfrac{\cos 2x + \cos x + 1}{2\sin x + \sqrt{3}} = 0$.

   Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z.$

Вариант 2

1. Вычислить $\cos 12^0 \cos 33^0 - \sin 12^0 \sin 33^0$. Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. Вычислить $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Ответ: $\dfrac{4}{7}$

3. Вычислить $100 \cdot \cos\alpha$, $0^0 < \alpha < 90^0$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$.

Ответ: 25

4. Найти $\sqrt{5} \cdot \cos\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5}\right)$. Ответ: 2

5. Найти число корней уравнения $2\sin^2 x - 13\sin x + 6 = 0$, принадлежащих отрезку $[-2\pi, \pi]$. Ответ: 2

6. Решить неравенство $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x < 1$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{3} + \pi n < x < \pi + \pi n, \quad n \in Z$

7. Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos 2x + \cos x + 1 = 0, \\ \sin x \neq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z \end{array}$

8. Решить уравнение $(2\sin^2 x - 7\sin x - 4)\log_{14}(-\cos x) = 0$.

Ответ: $x = \dfrac{-5\pi}{6} + 2\pi k,\ x = (2k+1)\pi, \quad k \in Z.$

Глава 5
ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

5.1. Производная

Определение производной

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, т. е. на некотором интервале, содержащем точку x_0, и пусть точка $x_0+\Delta x$ также принадлежит этому интервалу. Рассмотрим приращение функции $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ и составим отношение $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x\to 0$, то этот предел называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Приведем пример вычисления производной функции $f(x)$ по определению.

Пусть $f(x)=3x-x^2$, тогда

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)-(x+\Delta x)^2-(3x-x^2)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x+3\Delta x-x^2-2x(\Delta x)-(\Delta x)^2-3x+x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3-2x-\Delta x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3-2x-\Delta x)=3-2x.$$

Итак, $(3x-x^2)'=3-2x.$

Таблица производных основных элементарных функций

$(c)'=0,$ где c – const

$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1},$ где α – const

$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)'=e^x$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Основные правила дифференцирования

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$

2. $(cf(x))' = cf'(x),$ где c – const.

3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$

4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$

5. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$

Примеры задач на вычисление производной

Найдите производные функций:

1. $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3x^2}{4} + 1,$

$$f'(x) = \left(2x^{-1} - \frac{3}{4}x^2 + 1\right)' = -\frac{2}{x^2} - \frac{3}{2}x;$$

2. $f(x) = \sqrt{x}(2x^3 + x),$

$$f'(x) = (\sqrt{x})'(2x^3 + x) + \sqrt{x}(2x^3 + x)' = \frac{2x^3 + x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}(6x^2 + 1) =$$

$$= 7x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} = \sqrt{x}(7x^2 + 1{,}5).$$

Предварительно преобразовав функцию, найдем ее производную другим способом:

$$f'(x) = \left(2x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right)' = 7x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}(7x^2 + 1{,}5);$$

3. $f(x) = 4^{\operatorname{tg}x},$

$$f'(x) = (\operatorname{tg}x)' \cdot 4^{\operatorname{tg}x} \cdot \ln 4 = \frac{4^{\operatorname{tg}x} \cdot \ln 4}{\cos^2 x};$$

4. $f(x) = \ln^2(1 - 5x),$

$$f'(x) = (\ln(1 - 5x))' \cdot 2\ln(1 - 5x) = (1 - 5x)' \cdot \frac{1}{1 - 5x} \cdot 2\ln(1 - 5x) =$$

$$= -10 \cdot \frac{1}{1 - 5x} \cdot \ln(1 - 5x) = \frac{10\ln(1 - 5x)}{5x - 1};$$

5. $f(x) = x^x$.

Данная функция является показательно-степенной, т.к. содержит переменную и в основании, и в показателе степени.

Для того чтобы вычислить производную, представим функцию в виде:

$$f(x) = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}.$$

$$f'(x) = (e^{x\ln x})' = (x\ln x)' e^{x\ln x} = \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) x^x = x^x(\ln x + 1).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите производную данной функции $f(x)$:

а) $f(x) = 7x^2 + \dfrac{2}{x^3}$; [Ответ: $14x - \dfrac{6}{x^4}$]

б) $f(x) = \dfrac{4x-1}{6-x}$; [Ответ: $\dfrac{23}{(6-x)^2}$]

в) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$; [Ответ: $\dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$]

г) $f(x) = \sqrt{12x^2 - 6x}$; [Ответ: $\dfrac{12x-3}{\sqrt{12x^2-6x}}$]

д) $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{\lg e}$; [Ответ: $\dfrac{1}{x\lg e} = \dfrac{\ln 10}{x}$]

е) $f(x) = x^2 \cdot 5^{1-3x}$; [Ответ: $x \cdot 5^{1-3x}(2 - 3x\ln 5)$]

ж) $f(x) = \sqrt[4]{1+3x} + \dfrac{1}{(2x-1)^4}$; [Ответ: $\dfrac{3}{4\sqrt[4]{(1+3x)^3}} - \dfrac{8}{(2x-1)^5}$]

з) $f(x) = \operatorname{ctg}(2x) - \lg(3x)$; [Ответ: $-\dfrac{2}{\sin^2(2x)} - \dfrac{1}{x\ln 10}$]

и) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$. [Ответ: $(\sin x)^{\cos x - 1}(\cos^2 x - \sin^2 x \ln(\sin x))$]

2. Найдите производную данной функции $f(x)$ и вычислите ее значение в точке x_0:

а) $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)\cos x,\ x_0 = 0$; [Ответ: –3]

б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x},\ x_0 = 4$; [Ответ: –0,03] в) $f(x)=2^x\cdot\dfrac{3}{\ln 2}+x^2-3,\ x_0=1$; [Ответ: 8]

г) $f(x)=\sin^3(2x),\ x_0=\dfrac{\pi}{6}$; [Ответ: 2,25]

д) $f(x)=8x\sqrt{x}-\dfrac{16}{\sqrt{x}},\ x_0=4$; [Ответ: 25]

е) $f(x)=\dfrac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x},\ x_0=0$; [Ответ: –2]

ж) $f(x)=e^{3-x}+\dfrac{3\lg x}{\lg e},\ x_0=3$; [Ответ: 0]

з) $f(x)=\arcsin(\mathrm{ctg}x),\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$. [Ответ: –1]

3. Найдите значения x, при которых производная функции $f(x)$ обращается в 0:

а) $f(x)=5^x+5^{-x}$; [Ответ: 0]

б) $f(x)=\sqrt{x+1}-\ln(x-2)$; [Ответ: 8]

в) $f(x)=2\sin^2 x-\sqrt{2}x$. [Ответ: $(-1)^n\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$]

4. Найдите наименьшее целое значение x, при котором производная функции $f(x)$ принимает положительное значение:

а) $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-3x$; [Ответ: 4]

б) $f(x)=2^{x^2-4x}$; [Ответ: 3]

в) $f(x)=\ln(x-1)+2\ln(x+2)$. [Ответ: –1]

5.2. Геометрический смысл производной

Существование производной функции $f(x)$ в точке x_0 равносильно существованию невертикальной касательной в точке $(x_0; f(x_0))$ графика, при этом угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$ (рис. 5.1). В этом состоит *геометрический смысл производной.*

Кроме того, угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси абсцисс.

Таким образом, справедливо равенство $f'(x_0) = k_{\text{кас}} = \mathrm{tg}\alpha$.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

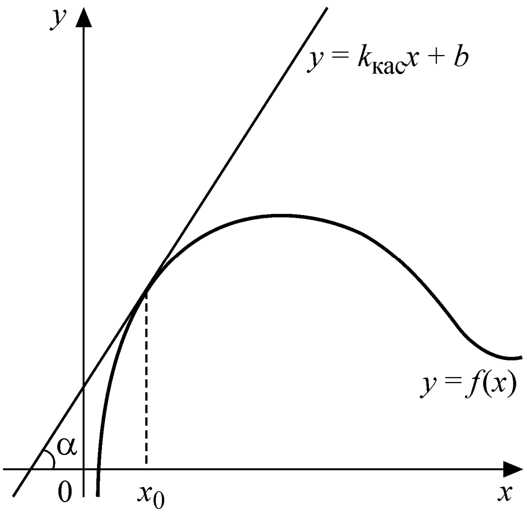


Рис. 5.1

Примеры задач на применение геометрического смысла производной

1. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2x - \dfrac{3}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Решение. Применим ранее выписанную формулу $\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$, где α – угол наклона касательной к оси абсцисс, а x_0 – абсцисса точки касания.

Так как $f'(x) = 2 + \dfrac{3}{x^2}$, то $f'(-1) = 2 + 3 = 5$. Следовательно, $\mathrm{tg}\alpha = 5$.

2. В каких точках графика функции $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ касательная к нему параллельна оси абсцисс?

Решение. Так как касательная параллельна оси абсцисс, то ее угловой коэффициент $k = 0$. Следовательно, $f'(x) = 0$ в абсциссах точек касания. Найдем производную функции:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0,\ x_1 = 1, x_2 = -1,\ f(1) = \frac{1}{2}, f(-1) = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, искомые точки графика – $M\left(1; \dfrac{1}{2}\right), N\left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$.

3. На рис. 5.2 изображена прямая, являющаяся касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$. Найдите значение производной $y = f'(x)$ в точке x_0.

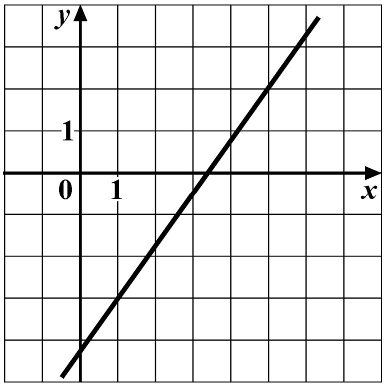


Рис. 5.2

Решение. По формуле $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной к оси абсцисс, т. е. $f'(x_0) = \mathrm{tg}\angle BAC = \mathrm{tg}\angle BKD = \dfrac{BD}{KD} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$ (рис. 5.3).

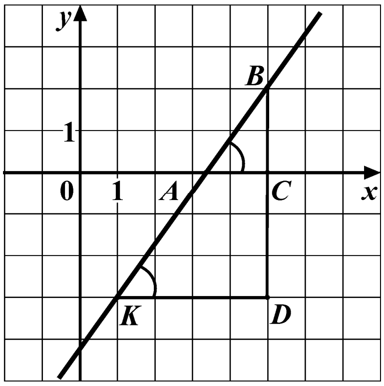


Рис. 5.3

Примечание. В решении угол *BAC* был заменен на равный ему угол *BKD*, так как длины катетов треугольника *ABC* невозможно точно найти по рисунку в отличие от катетов треугольника *KBD*.

4. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2^{x^2-4x} - 1$ в точке ее пересечения с осью *OX*.

Решение. Абсциссы точек пересечения графика данной функции с осью *OX* находим из условия $2^{x^2-4x} - 1 = 0$. Отсюда следует: $x^2 - 4x = 0$ и $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Уравнения касательных записываем по формуле

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

$f'(x) = (2x-4)\cdot 2^{x^2-4x}\cdot \ln 2$.

$y = f(0) + f'(0)(x-0) = -4\ln 2\cdot x$,

$y = f(4) + f'(4)(x-4) = 4\ln 2\cdot x - 16\ln 2$.

5. Найдите уравнения касательных к графику функции $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$, проходящих через точку (1; 7).

Решение. Запишем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 в общем виде:

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Для данной функции имеем:

$y = (-2x_0^2 + 4x_0 - 3) + (-4x_0 + 4)(x - x_0)$, или

$$y = (-4x_0 + 4)x + 2x_0^2 - 3. \qquad (1)$$

Так как касательная должна проходить через точку (1; 7), то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению касательной. Зная это, найдем x_0 из уравнения $7 = -4x_0 + 4 + 2x_0^2 - 3$. Решив уравнение, получим $\left[\begin{array}{l} x_0 = -1, \\ x_0 = 3. \end{array}\right.$ Следовательно, условию задачи будут удовлетворять две касательные. Найдем их уравнения, подставив полученные значения x_0 в формулу (1): $y = 8x - 1$ или $y = -8x + 15$.

6. К графику функции $y = f(x)$, заданной на отрезке [–8; 7], проведена касательная в точке с абсциссой x_0 (рис. 5.4). Определите значение выражения $x_0 + f(x_0)$, если на рисунке изображены эта касательная и график производной $y = f'(x)$ данной функции.

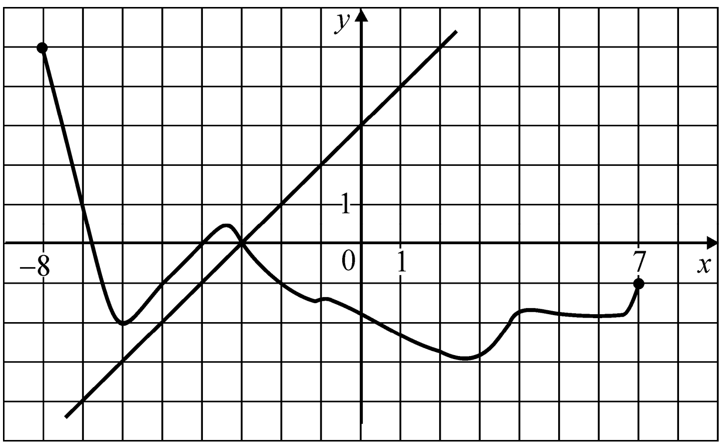


Рис. 5.4

Решение. Из геометрического смысла производной следует $f'(x_0) = k_{кас}$. По рисунку видно, что касательной является прямая с угловым коэффициентом k = 1. Таким образом, $f'(x_0) = 1$. По графику производной из условия $f'(x_0) = 1$ находим $x_0 = -7$. Учитывая, что в точке с абсциссой x_0 касательная соприкасается с графиком функции, имеем $f(x_0) = y_{кас}(x_0) = y_{кас}(-7) = -4$. Тогда $x_0 + f(x_0) = -7 - 4 = -11$.

Ответ: -11.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = 2x^2 + 3x - 8,\ x_0 = 3$; [Ответ: 15]

б) $f(x) = \cos^2 x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{12}$; [Ответ: –0,5]

в) $f(x) = \ln(4x^2 - 6),\ x_0 = 2$. [Ответ: 1,6]

2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $g(x)$ в точке с ординатой *a*:

а) $g(x) = \dfrac{1}{2 - 3x},\ a = -1$; [Ответ: 3]

б) $g(x) = e^{1+2x},\ a = 1$. [Ответ: 2]

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = \dfrac{3}{x^3} + 2x,\ x_0 = 1$; [Ответ: $y = -7x + 12$]

б) $f(x) = \mathrm{tg}(2x),\ x_0 = \dfrac{\pi}{8}$. [Ответ: $y = 4x - \dfrac{\pi}{2} + 1$]

4. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$, если ее угловой коэффициент равен $-\dfrac{2}{3}$.

[Ответ: $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$]

5. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x) = -\sqrt{3}x^2 + 18$ составляет с положительным направлением оси *OX* угол в 120°. [Ответ: –0,5]

6. Напишите уравнение касательной к кривой $y = 2x^2 - 5x + 3{,}5$, которая параллельна прямой $y = -3x + 1$. [Ответ: $y = -3x + 3$]

7. На графике функции $f(x) = -\sqrt{2x+1}$ найдите точку, касательная в которой перпендикулярна прямой $y = 2x - 7$. [Ответ: (1,5; –2)]

8. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = x^3$, если касательная проходит через точку A(0; –2). [Ответ: $y = 3x - 2$]

9. На рис. 5.5 изображена прямая, являющаяся касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$. Найдите значение производной $y = f'(x)$ в точке x_0. [Ответ: $-\frac{2}{3}$]

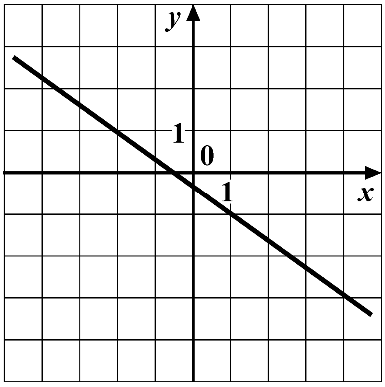


Рис. 5.5

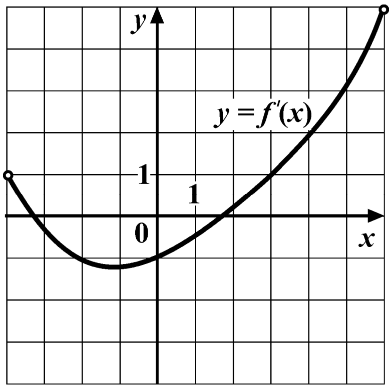


Рис. 5.6

10. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (–4; 6). На рис. 5.6 изображен график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 2$ или совпадает с ней. [Ответ: 5]

11. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (–6; 6). На рис. 5.7 изображен график производной этой функции. Найдите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 135° к положительному направлению оси абсцисс. [Ответ: 2]

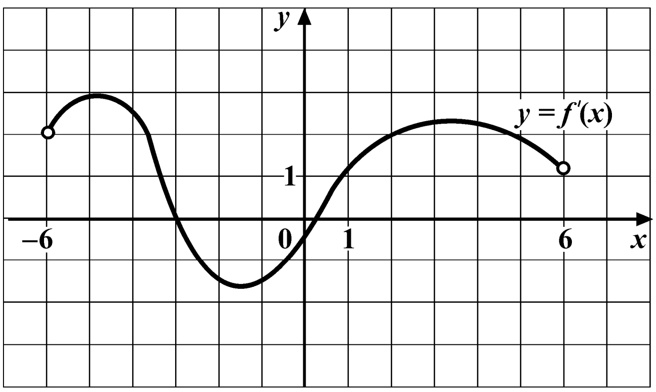


Рис. 5.7

12. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (–6; 6). На рис. 5.8 изображен график производной этой функции. Найдите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 60° к положительному направлению оси абсцисс. [Ответ: 4]

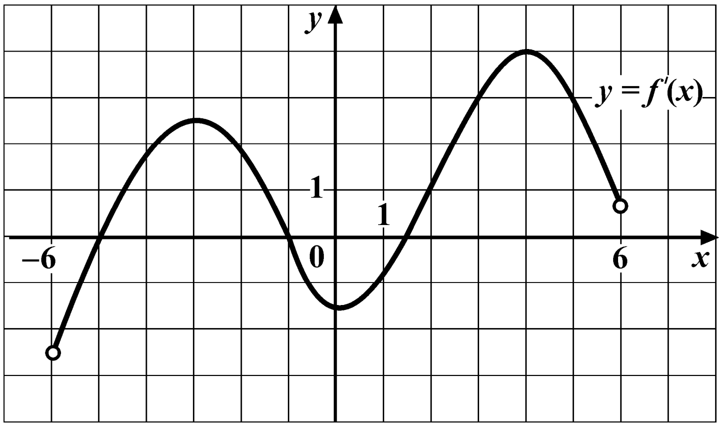


Рис. 5.8

13. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (–6; 4). На рис. 5.9 изображен график производной этой функции. Укажите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ имеет наибольший угловой коэффициент. [Ответ: –3]

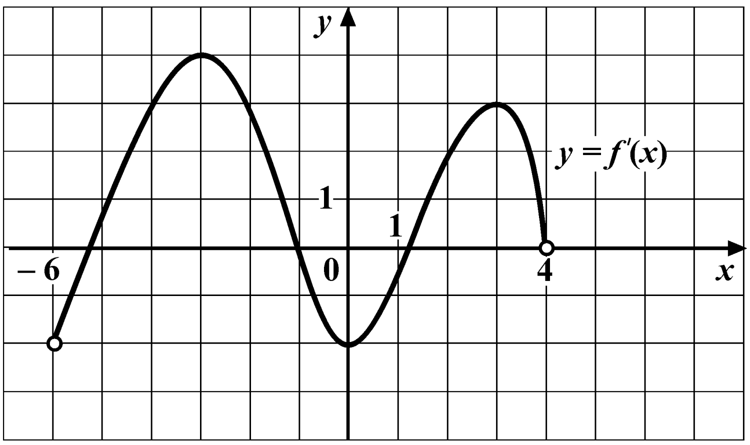


Рис. 5.9

14. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (–4; 4). На рис. 5.10 изображен график производной этой функции. Укажите абсциссу точки, в которой тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ принимает наименьшее значение. [Ответ: 2]

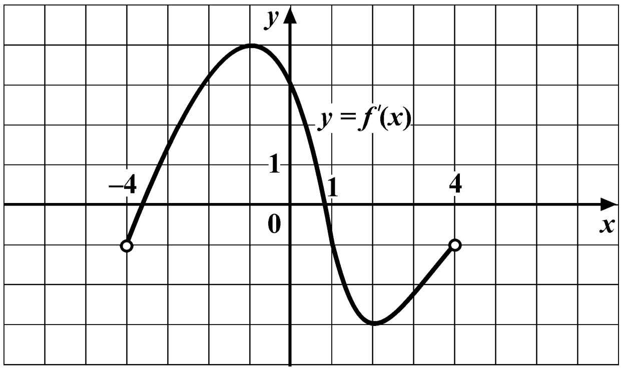


Рис. 5.10

15. При каком значении m кривая $y = x^3 + mx - 2$ касается оси абсцисс? [Ответ: –3]

16. При каких a прямая $y = ax + 8a - 1$ касается графика функции $y = \sqrt{x}$? [Ответ: $\frac{1}{4}$]

5.3. Механический смысл производной

Пусть $S(t)$ – зависимость пути от времени при движении какого-то тела. Тогда $S'(t)$ – скорость движения этого тела в данный момент времени t, т. е. $v(t) = S'(t)$, а $S''(t)$ – ускорение движущегося тела в данный момент времени t, т. е. $a(t) = v'(t) = S''(t)$.

Примеры задач

1. Два тела совершают прямолинейное движение по законам

$$S_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 4,\ \ S_2(t) = \frac{5}{2}t^2 - 12t + 3,$$

где t – время в секундах, а $S_1(t), S_2(t)$ – пути в метрах, пройденные первым и вторым телами соответственно. Через сколько секунд после начала движения скорость движения первого тела будет в четыре раза меньше скорости движения второго тела?

Решение. Выразим скорости движения каждого из тел:

$$v_1(t) = S_1'(t) = t + \frac{1}{2},\ \ v_2(t) = S_2'(t) = 5t - 12.$$

По условию $v_2(t) = 4v_1(t)$. Имеем:

$$5t - 12 = 4\left(t + \frac{1}{2}\right),\ 5t - 12 = 4t + 2,\ \ t = 14\ (\text{с}).$$

Ответ: 14.

2. Тело движется по прямой так, что его скорость v (в метрах в секунду) изменяется по закону $v(t) = 6t^2 + 8t - 5$ (t – время движения в секундах). Какую скорость приобретет тело в момент, когда его ускорение станет равным 20 м/с^2?

Решение. Выразим ускорение тела как функцию от времени:

$a(t) = v'(t) = (6t^2 + 8t - 5)' = 12t + 8.$

Определим момент времени, когда ускорение тела станет равным 20 м/с^2. Для этого решим уравнение $12t + 8 = 20$. Получим t = 1. Тогда скорость тела в этот момент времени равна $v(1) = 6 + 8 - 5 = 9$ (м/с).

Ответ: 9.

3. Точка движется по координатной прямой согласно закону: $x(t) = t^3 - 3t^2 + 15t + 9$. В какой момент времени ее скорость минимальна?

Решение. Закон изменения скорости:

$v(t) = x'(t) = 3t^2 - 6t + 15 = 3(t^2 - 2t + 5) = 3((t-1)^2 + 4).$

Скорость $v(t)$ минимальна при t = 1 с.

Ответ: 1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = t^3 - 3t^2 - 16t + 35$ (S – путь в метрах, t – время в секундах). В какой момент времени скорость тела равна 8 м/с? [Ответ: 4 с]

2. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 5t^4 + 3t^2 + 8$ (S – путь в метрах, t – время в секундах). Найдите ускорение тела через 2 с после начала движения. [Ответ: 246 м/с^2]

3. Два тела движутся прямолинейно по законам $S_1(t) = t^3 - 3t^2 + 21t + 5$ и $S_2(t) = 2t^3 - 9t^2 - 42t + 17$ (S – путь в метрах, t – время в секундах). В какой момент времени скорости тел будут одинаковы? [Ответ: 7 с]

4. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 4t^3 + 5t^2 - 7t + 9$ (S – путь в метрах, t – время в секундах). Через сколько секунд после начала движения ускорение тела станет равным 34 м/с^2? [Ответ: 1 с]

5. Тело движется прямолинейно так, что его скорость v (в м/с) изменяется по закону $v(t) = 6t^2 + 14t - 5$ (t – время движения в секундах). Какую скорость приобретет тело в момент, когда его ускорение станет равным 26 м/с^2? [Ответ: 15 м/с]

6. Точка совершает прямолинейные колебания по закону $x(t) = 10\cos(3t + \ 4) + \ 6$ (см), где t измеряется в секундах. Найдите максимальное ускорение точки. [Ответ: 90 см/с^2]

7. Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 6$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. Укажите первый момент времени, когда она меняет направление своего движения. [Ответ: 2]

8. Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = -2t^2 + 20t - 7$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. В какой точке координатной прямой произойдет мгновенная остановка? [Ответ: 43]

5.4. Применение производной к исследованию функций

Возрастание, убывание. Точки экстремума

Напомним определения возрастающей (убывающей) функции, точек экстремума.

Определение 1. Функция $f(x)$ *возрастает* на промежутке A, если для любых x_1 и x_2 из промежутка A таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ *убывает* на промежутке A, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка A таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Замечание. При исследовании функций на возрастание и убывание принято указывать промежутки возрастания и убывания максимальной длины, включая концы (если, конечно, они входят в эти промежутки).

Так, можно было сказать, что функция $f(x) = x^2$ возрастает на промежутке [1; 10]. Это верно, но такой ответ неполон. Правильно будет указать в качестве промежутка возрастания функции $f(x) = x^2$ промежуток $[0; +\ )$.

Определение 3. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$ (рис. 5.11), если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Определение 4. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$ (рис. 5.12), если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.

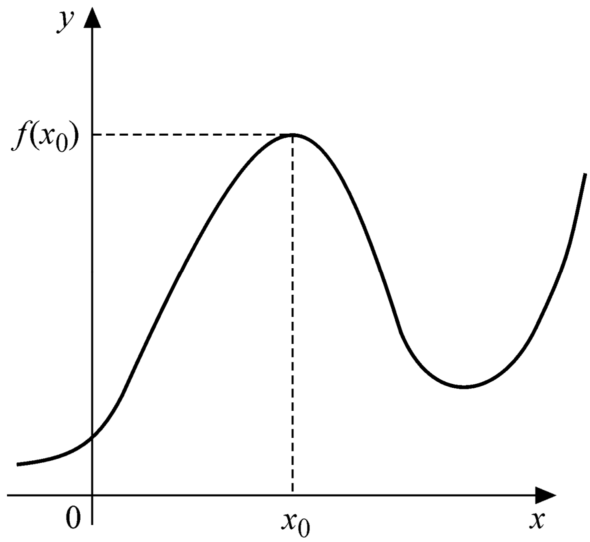


Рис. 5.11

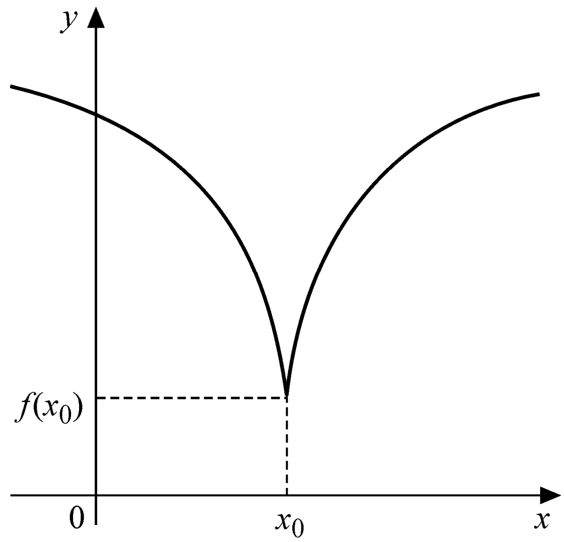


Рис. 5.12

Определение 5. Точки минимума и максимума функции называются *точками экстремума* этой функции. Их обозначают $x_{\min}$ и $x_{\max}$.

Определение 6. Значения функции в точках экстремума называют соответственно *минимумом* и *максимумом функции* (общее название – экстремум функции).

Сформулируем признаки возрастания (убывания) и экстремумов функции.

Теорема 1. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке промежутка *A*, то функция $f(x)$ *возрастает* на этом промежутке.

Теорема 2. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке промежутка *A*, то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а производная в точке x_0 меняет знак с «+» на «–», то x_0 есть *точка максимума* функции $f(x)$.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а производная в точке x_0 меняет знак с «–» на «+», то x_0 есть *точка минимума* функции $f(x)$.

Примеры задач на исследование функций

1. Исследовать функции на монотонность и экстремумы:

а) $f(x) = \dfrac{9x^2 - x + 1}{x}$.

Решение. Найдем область определения функции:
$D(f) = (-\infty;\, 0) \cup (0;\, +\infty)$.

Представим функцию в виде: $f(x) = 9x - 1 + \frac{1}{x}$.

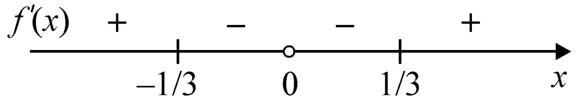
Найдем ее производную:

$f'(x) = 9 - \frac{1}{x^2} = \frac{9x^2 - 1}{x^2} = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^2}$.

Найдем критические точки функции (т. е. внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует).

В данном случае $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}, \\ x = -\frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Отметим на числовой прямой точки разрыва и критические точки функции и определим знаки производной:



Согласно приведенным ранее теоремам, функция возрастает на промежутках $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$, а убывает на промежутках $\left[-\frac{1}{3}; 0\right)$ и $\left(0; \frac{1}{3}\right]$.

Так как при переходе через точку $x = -\frac{1}{3}$ производная меняет знак с «+» на «–», то эта точка является точкой максимума функции. Пишут: $x_{\max} = -\frac{1}{3}$. При переходе через точку $x = \frac{1}{3}$ производная поменяла знак с «–» на «+», т. е. $x_{\min} = \frac{1}{3}$.

Максимум функции равен $f(x_{\max}) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -3 - 1 - 3 = -7$.

Минимум функции равен $f(x_{\min}) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 - 1 + 3 = 5$.

б) $f(x) = x \ln x$.

Решение. Найдем область определения функции: $D(f) = (0; +\infty)$.

Вычислим производную функции $f(x)$:

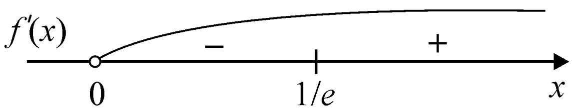
$$f'(x) = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1.$$

Найдем критические точки:

$D(f') = (0; +\infty)$. Следовательно, критические точки нужно искать среди нулей производной:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0,\ \ \ln x = -1,\ \ x = \frac{1}{e}.$$

Отметим на числовой прямой область определения функции, критическую точку $x = \frac{1}{e}$ и найдем знаки производной:



$f'(e) = \ln e + 1 = 2 > 0,$

$f'\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + 1 = -2 + 1 = -1 < 0.$

Функция убывает на промежутке $\left(0; \frac{1}{e}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right)$.

$$x_{\min} = \frac{1}{e},\ \ f(x_{\min}) = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}.$$

2. При каких значениях a функция $y = x^3 + 3(a-1)x^2 + 6x$ возрастает на R?

Решение. Найдем производную функции:

$y' = 3x^2 + 6(a-1)x + 6.$

Функция возрастает на R тогда и только тогда, когда ее производная $y' \geq 0$ на R, причем производная обращается в 0 в конечном числе точек.

Имеем $3x^2 + 6(a-1)x + 6 \geq 0$, или $x^2 + 2(a-1)x + 2 \geq 0.$

Данное неравенство выполняется для всех $x \in R$, если дискриминант квадратного трехчлена меньше или равен 0:

$D = 4(a-1)^2 - 8 \leq 0.$

Решая неравенство, получим $(a-1)^2 \leq 2$, или $1-\sqrt{2} \leq a \leq 1+\sqrt{2}.$

Ответ: $1-\sqrt{2} \leq a \leq 1+\sqrt{2}.$

3. При каких значениях b функция $y=(b+2)x^3-3bx^2+9bx-1$ убывает на R?

Решение. Найдем производную функции:

$y'=3(b+2)x^2-6bx+9b.$

Функция убывает на R тогда и только тогда, когда ее производная $y'\le 0$ на R, причем производная обращается в 0 в конечном числе точек.

Получим неравенство $3(b+2)x^2-6bx+9b\le 0$, или

$(b+2)x^2-2bx+3b\le 0.$

Последнее неравенство верно для всех $x\in R$, если

$$\begin{cases} b+2<0, \\ D\le 0. \end{cases}$$

Решим систему

$$\begin{cases} b<-2, \\ b^2-3b(b+2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<-2, \\ 2b^2+6b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<-2, \\ \left[\begin{array}{l} b\le -3, \\ b\ge 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow b\le -3.$$

Ответ: $b\le -3$.

4. На рис. 5.13 изображен график функции $f(x)=ax^2+bx+c$ и четыре прямые. Одна из этих прямых – график производной данной функции. Укажите номер этой прямой.

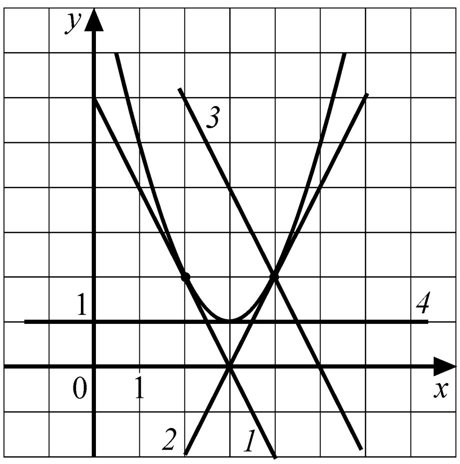


Рис. 5.13

Решение. Функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty;3]$ и возрастает на промежутке $[3;+\infty)$. Поэтому искомый график производной – это прямая под номером 2. По графику производной видно, что $f'(x)<0$ на интервале $(-\infty;3)$ и $f'(x)>0$ на интервале $(3;+\infty)$.

Ответ: 2.

5. На рис. 5.14 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (–5; 5). Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.

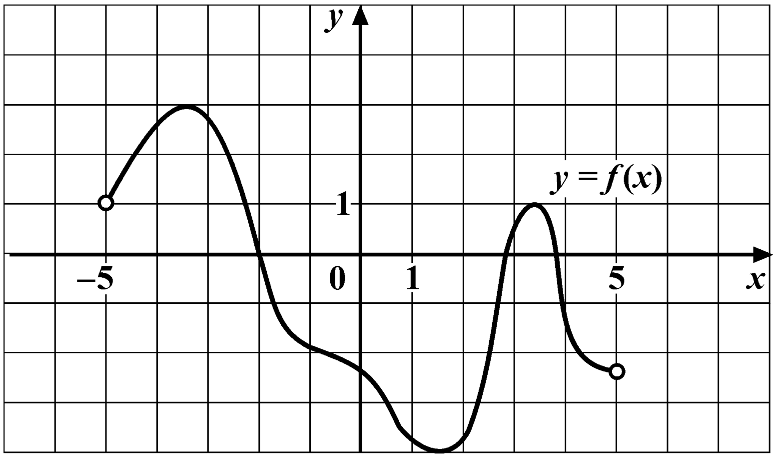


Рис. 5.14

Решение. На тех промежутках, где производная функции принимает отрицательные значения, функция $f(x)$ убывает. Следовательно, нужно по графику функции выбрать целые значения аргумента из промежутков убывания функции. Таковыми являются –3, –2, –1, 0, 1, 4.

Ответ: 6.

6. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке [– 6; 6]. График ее производной изображен на рис. 5.15. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$.

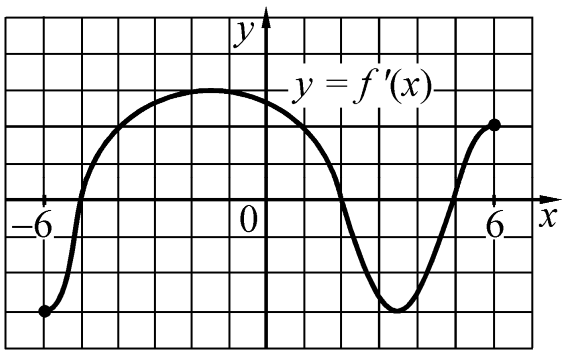


Рис. 5.15

Решение. При переходе через точку $x = 2$ производная функции меняет знак с «+» на «–», следовательно, $x = 2$ – единственная точка максимума функции $y = f(x)$.

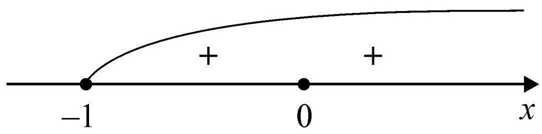
7. Исследуйте функцию $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$ и постройте ее график.

Решение. 1) $D(y) = [-1; +\infty)$.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, т.к. ее область определения не симметрична относительно нуля. Она не является также и периодической.

3) Точки пересечения с осями координат: (0; 0), (–1; 0).

4) Промежутки знакопостоянства функции:



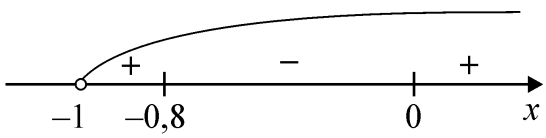
$f(x) \geq 0$ на всей $D(y)$.

5) Найдем производную:

$$f'(x) = 2x\sqrt{1+x} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x}} = \frac{4x(x+1)+x^2}{2\sqrt{1+x}} = \frac{x(5x+4)}{2\sqrt{1+x}}.$$

Критические точки: $x = -0{,}8$; $x = 0$.

Найдем знаки производной:



Следовательно, функция возрастает на промежутках [–1; –0,8] и [0; +∞), а убывает на промежутке [–0,8; 0].

В точке $x = -0{,}8$ производная меняет знак с «+» на «–».

Поэтому $x_{\max} = -0{,}8$, $f(-0{,}8) = \frac{16}{25} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{16}{25\sqrt{5}}$.

В точке $x = 0$ производная меняет знак с «–» на «+». Поэтому $x_{\min} = 0$, $f(0) = 0$.

6) Для построения графика возьмем дополнительную точку (рис. 5.16): $x = 1$; $y = \sqrt{2}$.

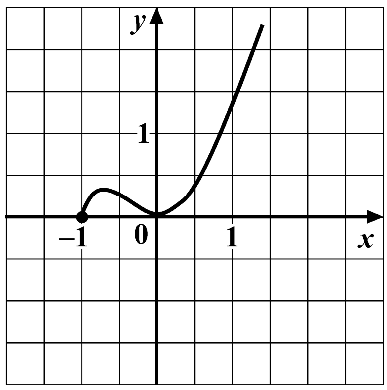


Рис. 5.16

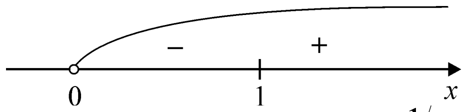
8. Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ и постройте ее график.

Решение. 1) $D(y)=(0;+\infty)$.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

3) Точка пересечения с осью абсцисс – (1; 0), с осью ординат пересечения нет.

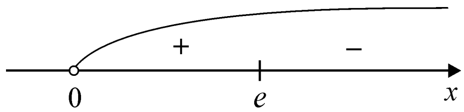
4) Промежутки знакопостоянства функции:



5) Найдем производную функции: $f'(x)=\dfrac{1/x\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Критические точки: $f'(x)=0\Rightarrow \ln x=1,\ x=e.$

Найдем знаки производной:



$$f'(1)=\frac{1-0}{1}>0,\ f'(e^2)=\frac{1-2}{e^4}<0.$$

В точке $x = e$ производная меняет знак с «+» на «–», значит $x = e$ – точка максимума.

$f(e)=\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$ – максимум функции.

6) Для построения графика возьмем несколько дополнительных точек (рис. 5.17):

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=-e,\ \ f(e^2)=\frac{2}{e^2}.$$

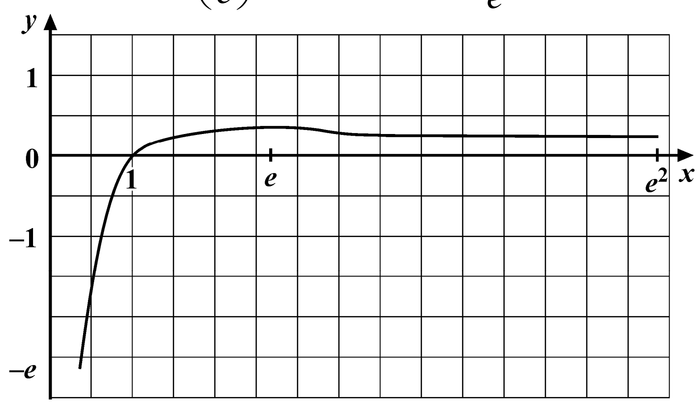


Рис. 5.17

Замечание: При достаточно больших значениях аргумента значение функции очевидно стремится к нулю, при этом оставаясь положительным (см. пункты 3 и 4 исследования). Убедиться в этом несложно, если рассмотреть значения x: $e^3, e^4, e^5, \ldots$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите промежутки убывания функции $f(x) = (3 - x)^3$.

[Ответ: R]

2. Найдите промежутки возрастания функции $f(x) = \dfrac{1}{(2 - x)^3}$.

[Ответ: $(-\infty; 2), (2; +\infty)$]

3. Найдите точки экстремума функции:

а) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$; [Ответ: $x_{\min} = -1, x_{\min} = 1$]

б) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$. [Ответ: $x_{\max} = -2, x_{\min} = 2$]

4. При каком наибольшем значении b функция $f(x) = x^3 + bx^2 + 3bx - 1$ возрастает на всей числовой прямой?

[Ответ: 9]

5. При каких значениях m функция $y = 7 - mx + \sin x$ убывает на R?

[Ответ: $m \geq 1$]

6. При каком значении a функция $y = \operatorname{arctg}(-5x^2 + 3(a+1)x - 17)$ имеет максимум в точке с абсциссой –0,6? [Ответ: –3]

7. По графику производной функции $y = f'(x)$ (рис. 5.18) воспроизведите эскиз графика функции $y = f(x)$. [Ответ: a]

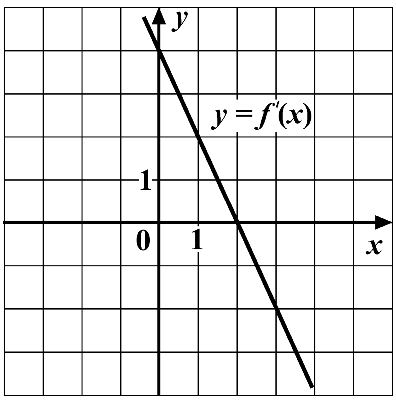
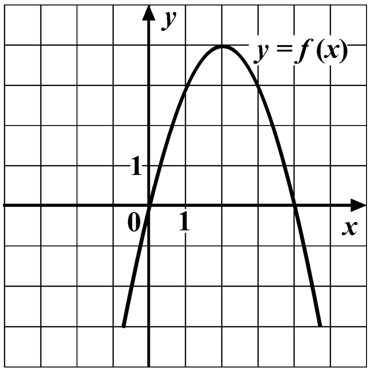
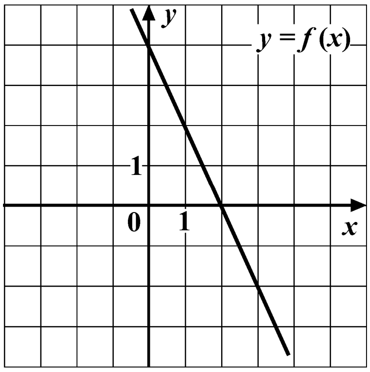
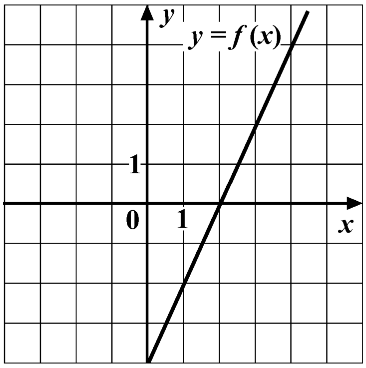


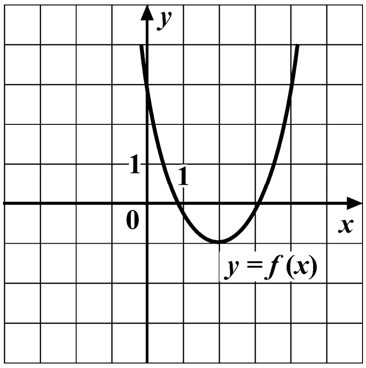
Рис. 5.18

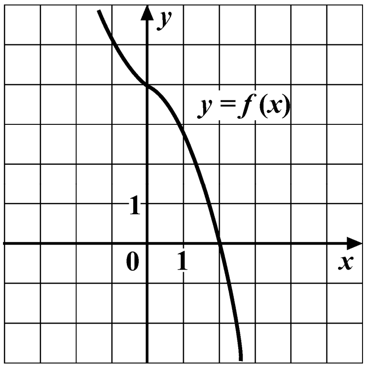






а *б* *в*





г *д*

8. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-6; 6]$. График ее производной изображен на рис. 5.19. Укажите число точек минимума функции $y = f(x)$.

[Ответ: 1]

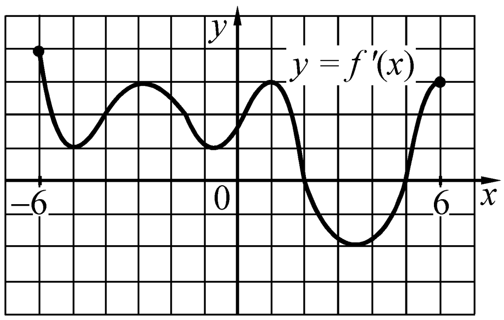


Рис. 5.19

9. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-6; 6]$. График ее производной изображен на рис. 5.20. Укажите длину промежутка возрастания функции $y = f(x)$.

[Ответ: 8]

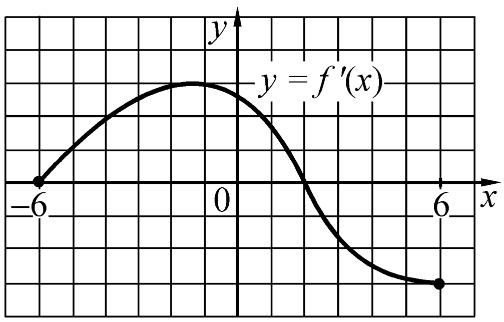


Рис. 5.20

10. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-6; 6]$. График ее производной изображен на рис. 5.21. Укажите точку минимума функции $y = f(x)$.

[Ответ: –1]

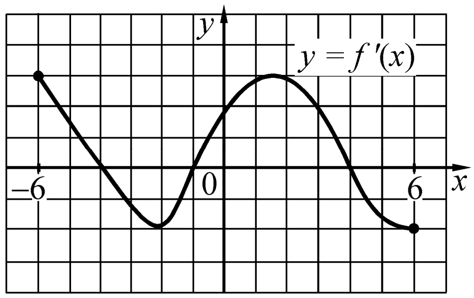


Рис. 5.21

11. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 8]$. График ее производной изображен на рис. 5.22. Укажите число промежутков возрастания функции $y = f(x)$.

[Ответ: 2]

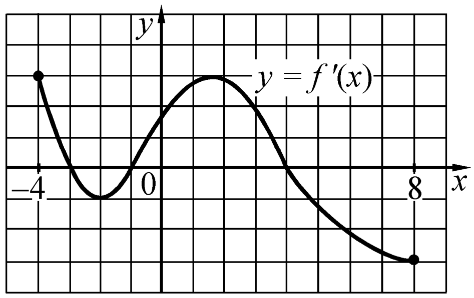


Рис. 5.22

12. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 8]$. График ее производной изображен на рис. 5.23. Укажите число промежутков убывания функции $y = f(x)$.

[Ответ: 0]

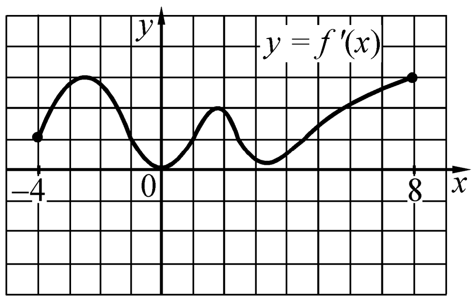


Рис. 5.23

13. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 8]$. График ее производной изображен на рис. 5.24. Укажите число точек экстремума функции $y = f(x)$.

[Ответ: 2]

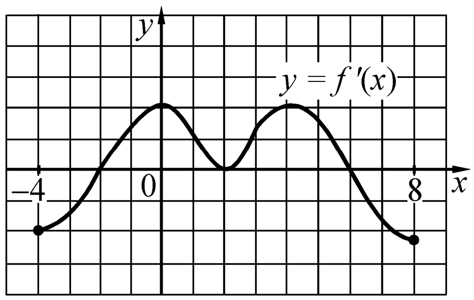


Рис. 5.24

14. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 8]$. График ее производной изображен на рис. 5.25. Укажите длину промежутка убывания функции $y = f(x)$.

[Ответ: 7]

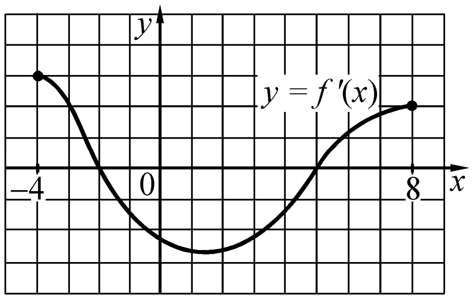


Рис. 5.25

15. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 5]$. На рис. 5.26 изображен график ее производной. Укажите число точек максимума функции $y = f(x)$.

[Ответ: 0]

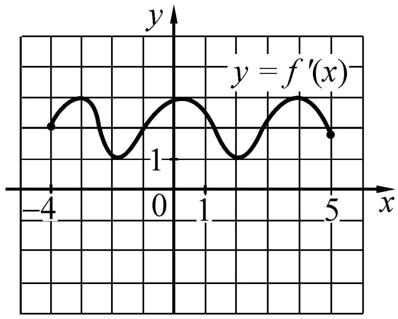


Рис. 5.26

16. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 6]$. На рис. 5.27 изображен график ее производной. Укажите сумму точек минимума функции $y = f(x)$.

[Ответ: 2]

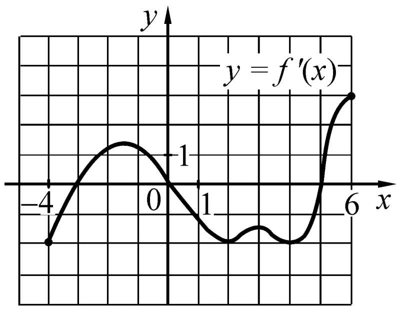


Рис. 5.27

17. На рис. 5.28 изображены четыре непрерывных линии. Одна из этих линий – график производной для убывающей на всей числовой прямой функции. Укажите номер этой линии.

[Ответ: 1]

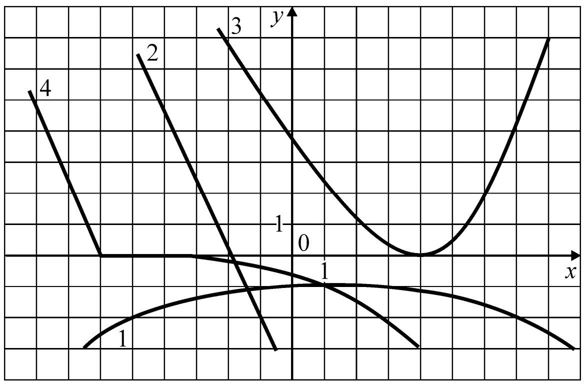


Рис. 5.28

18. Исследуйте функцию $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ и постройте ее график. При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два корня? [Ответ: ± 2]

19. Исследуйте функцию $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$ и постройте ее график. При каких значениях параметра m уравнение $f(x) = m$ имеет ровно один корень? [Ответ: $1\frac{5}{16}$]

20. Исследуйте функцию $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$ и постройте ее график. При каких значениях параметра k уравнение $f(x) = k$ имеет ровно два корня?

[Ответ: $0 < k < \dfrac{27}{e^3}$]

5.5. Наибольшее и наименьшее значения функции

Определение. Значение функции $f(x)$ в точке x_0 называется наибольшим (наименьшим) значением этой функции, если для любого x из $D(f)$ выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$).

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Дифференцируемая на $(a,\ b)$ и непрерывная на $[a,\ b]$ функция $f(x)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения либо на концах отрезка $[a,\ b]$, либо в критических точках интервала (a, b).

Напомним, что *критическими точками функции* называются внутренние точки ее области определения, в которых производная равна нулю или не существует.

В частности, если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственную критическую точку – точку максимума (минимума), то в ней достигается наибольшее (наименьшее) значение.

Примеры задач

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на данном промежутке:

а) $f(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3,\ x \in [-2;\ 0]$.

Решение. Функция непрерывна на заданном отрезке. Найдем ее производную:

$$f'(x) = 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x).$$

Критические точки:

$x = 1$ – не принадлежит отрезку [–2; 0],

$x = -1$.

Найдем значения функции в критической точке $x = -1$ и на концах рассматриваемого отрезка. Выберем среди них наибольшее и наименьшее значения:

$f(-1) = -1 + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{3}$,

$f(-2) = -2 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{2}{3}$,

$f(0) = 0$.

Таким образом, наименьшее значение функции равно $-\frac{2}{3}$, а наибольшее равно $\frac{2}{3}$.

Замечание. В математической литературе используются различные обозначения наибольшего и наименьшего значений функции. Мы остановимся на следующих: $\max\limits_{A} f(x)$ – наибольшее значение функции на промежутке A и $\min\limits_{A} f(x)$ – наименьшее значение функции на промежутке A.

Применительно к задаче получим:

$$\min_{[-2;\,0]} f(x) = -\frac{2}{3},\ \max_{[-2;\,0]} f(x) = \frac{2}{3}.$$

б) $f(x) = 2\cos x - \cos(2x),\ x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right].$

Функция непрерывна на заданном промежутке. Найдем ее производную:

$$f'(x) = -2\sin x + 2\sin(2x) = -2\sin x + 4\sin x\cos x = 2\sin x(2\cos x - 1).$$

Критические точки:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in Z.$$

Выберем критические точки, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$: $0; \frac{\pi}{3}; \pi.$

Вычислим значения функции в этих точках и на концах отрезка:

$$f(0) = 2 - 1 = 1,$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$f(\pi) = -2 - 1 = -3,$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + 1 = 1.$$

Итак, $\min\limits_{[0;\,3\pi/2]} f(x) = -3,\ \max\limits_{[0;\,3\pi/2]} f(x) = \frac{3}{2}.$

в) $f(x)=\cos^2 x-3x,\ x\in[-\pi;\ \pi]$.

Функция непрерывна на заданном промежутке. Найдем ее производную:

$$f'(x)=-2\cos x\sin x-3=-\sin(2x)-3.$$

Так как $-1\le\sin(2x)\le 1$, то $f'(x)<0$ при всех значениях x. Следовательно, функция $f(x)$ убывает на R, а значит, и на промежутке $[-\pi;\ \pi]$. Поэтому ее наименьшее значение будет достигаться на правом конце заданного отрезка, а наибольшее значение – на левом:

$$\min_{[-\pi;\ \pi]} f(x)=f(\pi)=\cos^2\pi-3\pi=1-3\pi,$$

$$\max_{[-\pi;\ \pi]} f(x)=f(-\pi)=\cos^2(-\pi)+3\pi=1+3\pi.$$

2. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке (–5; 6). На рис. 5.29 изображен график ее производной. В какой точке промежутка [–3; 3] функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

Решение. Точка x = 1 – единственная точка экстремума функции $f(x)$ на промежутке [–3; 3], причем точка максимума, так как производная при переходе через точку меняет знак с «+» на «–». Следовательно, свое наибольшее значение функция $f(x)$ принимает именно в этой точке.

Ответ: 1.

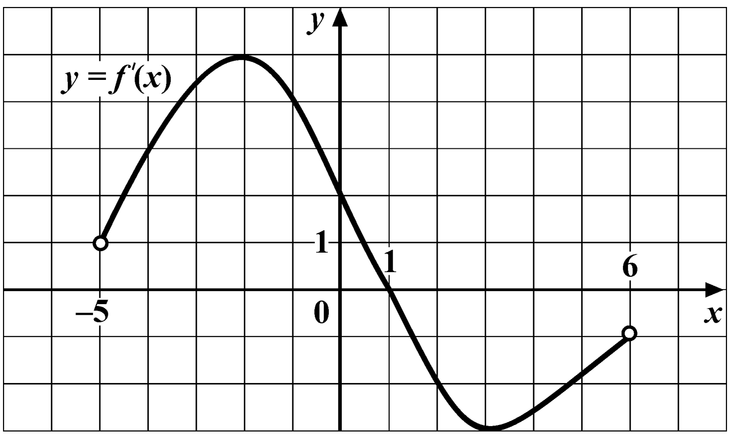


Рис. 5.29

3. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=0{,}5x\ln x-x\ln 3$ на отрезке [3; 4,5].

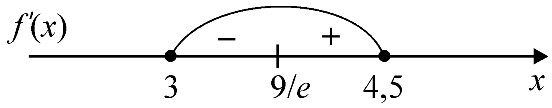
Решение. $D(f)=(0;+\infty)$.

Функция непрерывна на заданном отрезке. Найдем ее производную:

$$f'(x) = 0{,}5\ln x + 0{,}5 - \ln 3 = 0{,}5\ln\left(\frac{ex}{9}\right).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{ex}{9}\right) = 0,\ \frac{ex}{9} = 1,\ x = \frac{9}{e}.$$

Найдем знаки производной на отрезке [3; 4,5]:



$x = \dfrac{9}{e}$ – единственная критическая точка функции $f(x)$ на отрезке [3; 4,5], причем точка минимума. Следовательно, свое наименьшее значение функция принимает в этой точке:

$$\min_{[3;\,4,5]} f(x) = f\left(\frac{9}{e}\right) = \frac{1}{2}\frac{9}{e}\ln\left(\frac{9}{e}\right) - \frac{9}{e}\ln 3 = -\frac{9}{2e}.$$

4. Из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиуса R, найдите прямоугольник наибольшей площади.

Решение. Рассмотрим два способа решения задачи, в каждом из которых будем рассматривать площадь как функцию, зависящую от различных переменных.

1 способ. Пусть x и y – стороны прямоугольника, вписанного в окружность радиуса R (рис. 5.30). Тогда выполняется соотношение $x^2 + y^2 = (2R)^2$ и $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Площадь прямоугольника может быть вычислена по формуле $S = xy = x\sqrt{4R^2 - x^2}$.

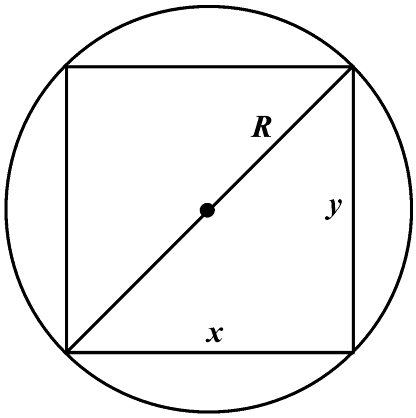


Рис. 5.30

Так как функция $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ принимает только положительные значения, то свое наибольшее значение она принимает в той же точке, что и функция $f(x) = S^2(x) = x^2(4R^2 - x^2)$.

Исследуем функцию $f(x) = 4R^2x^2 - x^4$ на наибольшее значение, где $x \in (0;\, 2R)$.

$f'(x) = 8R^2x - 4x^3 = 4x(2R^2 - x^2)$.

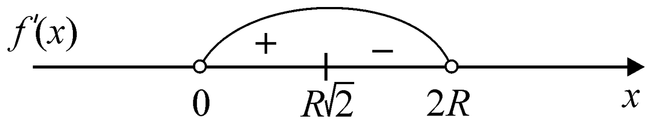
Критические точки:

$x = 0 \notin (0;\, 2R)$,

$x = -R\sqrt{2} \notin (0;\, 2R)$,

$x = R\sqrt{2}$.

Найдем знаки производной на промежутке $(0;\, 2R)$:



$x = R\sqrt{2}$ – единственная критическая точка непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(0;\, 2R)$, причем точка максимума. Следовательно, свое наибольшее значение функция $f(x)$, а значит и $S(x)$, принимает при $x = R\sqrt{2}$:

$y = \sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$.

Имеем: $x = y$, т. е. искомый прямоугольник является квадратом.

2 способ. Пусть φ – угол между диагоналями прямоугольника, вписанного в окружность радиуса R (рис. 5.31). Тогда его площадь можно вычислить по формуле $S = (2R)^2 \sin\varphi$.

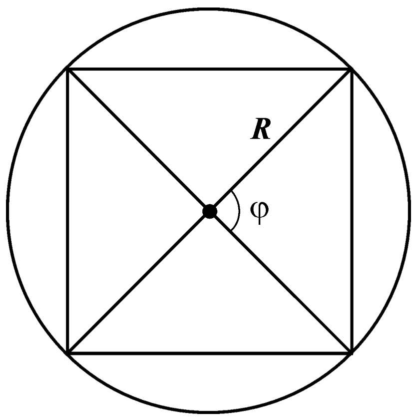


Рис. 5.31

Так как функция $S(\varphi) = 4R^2 \sin\varphi,\ \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, возрастает на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, то свое наибольшее значение она принимает при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Прямоугольник, в котором диагонали образуют прямой угол, является квадратом.

5. Найдите наименьшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю *OM*, где *O* – начало координат, а *M* – точка на графике функции $y = 1 - 3\ln(0{,}25x - 2),\ 9 \le x \le 11{,}5$ (рис. 5.32).

Решение. 1) Так как $9 \le x \le 11{,}5$, то $8 < x < 12$ и $0 < 0{,}25x - 2 < 1$. Значит, по свойствам натурального логарифма $\ln(0{,}25x - 2) < 0$. Поэтому $y = 1 - 3\ln(0{,}25x - 2) > 0.$ 2).

Пусть x и y – координаты точки *M*. Так как $x > 0$ и $y > 0$, то длины сторон прямоугольника равны x и y.

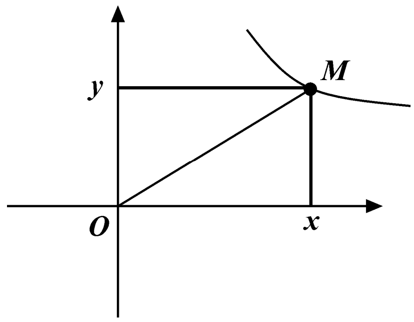


Рис. 5.32

Значит, периметр равен $P = 2(y + x)$,

$P(x) = 2(y + x) = 2(1 + x - 3\ln(0{,}25x - 2))$.

3) Найдем производную:

$$P' = 2\left(1 - \frac{3 \cdot 0{,}25}{0{,}25x - 2}\right) = \frac{2(0{,}25x - 2{,}75)}{0{,}25x - 2}.$$

Так как $0{,}25x - 2 \ne 0$, то $P' = 0$, если $0{,}25x - 2{,}75 = 0,\ x = 11$.

4) Если $x \in [9; 11)$, то $0{,}25x - 2 > 0$, $0{,}25x - 2{,}75 < 0$ и $P' < 0$.

Если $x \in [11; 11{,}5)$, то $0{,}25x - 2 > 0$, $0{,}25x - 2{,}75 > 0$ и $P' > 0$.

Значит, $x = 11$ – точка минимума. Так как $x = 11$ – единственная критическая точка на отрезке [9; 11,5], то

$P_{\text{наим}} = P(11) = 2(1 + 11 - 3\ln(11/4 - 2)) = 24 - 6\ln 0{,}75$.

Ответ: 24 – 6 ln 0,75.

6. Требуется разметить на земле участок $ABCDEFGM$ площадью 2200 м^2, состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рис. 5.33, где $FG = BC = 20$ м, $EF = 5$ м и $CD \geq 10$ м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL, KM и CD, при которых периметр является наименьшим.

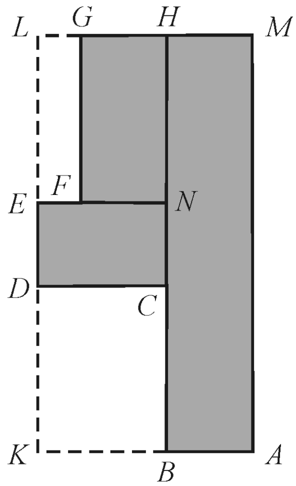


Рис. 5.33

Решение. 1) Площадь участка $ABCDEFGM$ равна $S = 2200$, а его периметр равен периметру P прямоугольника $KLMA$. Обозначим $KL = x$, $LM = y$ и $CD = z$. Тогда

$P = 2(x + y)$, $z \geq 10$ и

$xy = S + EF \cdot FG + BC \cdot z \geq 2200 + 5 \cdot 20 + 20 \cdot 10 = 2500.$

Поэтому $y \geq \dfrac{2500}{x}$ и $P \geq 2\left(x + \dfrac{2500}{x}\right)$.

2) Исследуем функцию $f(x) = x + \dfrac{2500}{x}$ при $x > 0$ с помощью производной:

$$f'(x) = 1 - \frac{2500}{x^2} = \frac{x^2 - 50^2}{x^2},$$

$f'(x) = 0$ при $x = 50$, $f'(x) < 0$ при $0 < x < 50$, $f'(x) > 0$ при $x > 50$; поэтому наименьшее значение функции принимается в точке $x_0 = 50$ и равно $f_{\text{наим}} = f(50) = 100$.

Следовательно, выполнена оценка $P \geq 2f_{\text{наим}} = 200$.

3) Если участок $ABCDEFGM$ таков, что $x = 50$ и $z = 10$, то $xy = 2500$, $y = 50$ и для такого участка выполнено равенство $P = 200$. Таким образом, $P_{\text{наим}} = 200$.

Ответ: 200 м, 50 м, 50 м, 10 м.

7. Прямоугольник вписан в полукруг так, что две вершины прямоугольника лежат на диаметре полукруга, а две другие – на полуокружности. Найдите наибольшее значение площади такого прямоугольника, если площадь полукруга равна 6π.

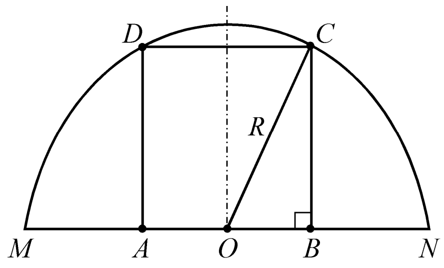


Рис. 5.34

Решение. Введем обозначения (рис. 5.34): MN – диаметр полукруга, O – середина диаметра, $ABCD$ – вписанный прямоугольник, точки A и B лежат на диаметре полукруга, точки C и D располагаются на полуокружности. Так как $AD \parallel BC$ и $AD = BC$, то прямоугольник может располагаться только так, что точки A и B симметричны относительно точки O. Пусть R – радиус полукруга. Ясно, что $ON = OC = R$. По условию площадь полукруга равна 6π, но площадь полукруга равна $\frac{1}{2}\pi R^2$, т. е. $\frac{1}{2}\pi R^2 = 6\pi \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$. Обозначим $OB = x$, очевидно, что $0 < x < R$, и найдем площадь $S = S_{ABCD} = AB \cdot BC$, как функцию от x.

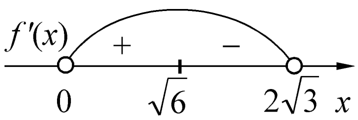
Итак, $AB = 2OB = 2x$. Из прямоугольного треугольника OBC находим $BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{12 - x^2}$. Следовательно, площадь прямоугольника $ABCD$ определяется как $S(x) = 2x\sqrt{12 - x^2}$. Так как $S(x) \geq 0$, то свое наибольшее значение функция $S(x)$ принимает в той же точке, что и функция $f(x) = \frac{1}{4}S^2(x) = x^2(12 - x^2)$. Исследуем функцию $f(x)$ на наибольшее значение, где $x \in (0; 2\sqrt{3})$.

$$f'(x) = 24x - 4x^3 = 4x(6 - x^2),$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \quad x = 0 \notin (0; 2\sqrt{3}),$$

$$x = -\sqrt{6} \notin (0; 2\sqrt{3}),$$

$$x = \sqrt{6} \in (0; 2\sqrt{3}).$$



Таким образом, $x=\sqrt{6}$ – единственная критическая точка непрерывной функции $f(x)$ на $(0;2\sqrt{3})$, причем точка максимума. Следовательно, функция $f(x)$, а значит, и $S(x)$, принимает в этой точке свое наибольшее значение:

$S(\sqrt{6})=2\sqrt{6}\sqrt{12-6}=2\cdot 6=12.$

Ответ: 12.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите наибольшее значение функции $y=x^3-3x+4$ на отрезке [–2; 0]. [Ответ: 6]

2. Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-3x+1$ на отрезке [1; 9]. [Ответ: –8]

3. Найдите отношение наибольшего и наименьшего значений функции $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$ на отрезке [0; 3]. [Ответ: 33]

4. Найдите наименьшее значение функции $y=7x-\ln(x+6)^7$ на отрезке [–5,5; 0]. [Ответ: –35]

5. Найдите наибольшее значение функции $y=6\cos x+20x-5$ на отрезке [–π; 0]. [Ответ: 1]

6. Найдите наибольшее значение функции $y=-2\mathrm{tg}x+4x-\pi-3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$. [Ответ: –5]

7. Найдите наименьшее значение функции $y=-14x+7\mathrm{tg}x+\frac{7\pi}{2}+1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$. [Ответ: 18]

8. Найдите наименьшее значение функции $y=(x+3)^2e^{-3-x}$ на отрезке [–5; –1]. [Ответ: 0]

9. Найдите наибольшее значение функции $y=(x+6)^2 e^{-4-x}$ на отрезке [–6; –1]. [Ответ: 4]

10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sin(2x)-x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. [Ответ: $-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$]

11. Найдите наименьшее значение функции $y=x\ln x-x\ln 5$ на промежутке (1; 5]. [Ответ: $-\frac{5}{e}$]

12. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке [– 4; 5]. На рис. 5.35 изображен график ее производной. Укажите точку интервала (–4; 5), в которой функция принимает наибольшее значение.

[Ответ: –2]

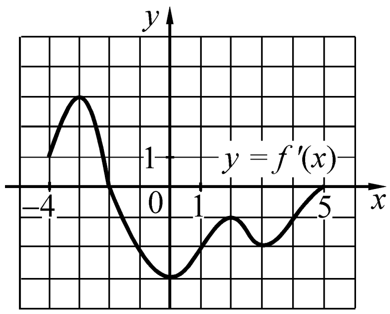


Рис. 5.35

13. На рис. 5.36 изображен график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–6; 4). В какой точке отрезка [–5; –1] $f(x)$ принимает наименьшее значение? [Ответ: –5]

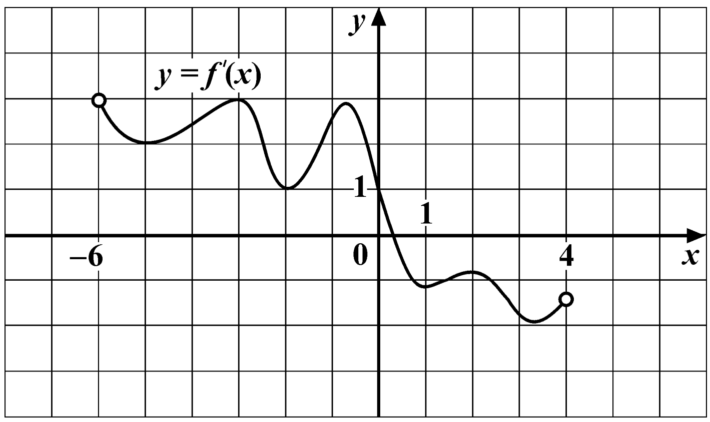


Рис. 5.36

14. На рис. 5.37 изображен график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–6; 4). В какой точке отрезка [–3; 2] $f(x)$ принимает наибольшее значение? [Ответ: –3]

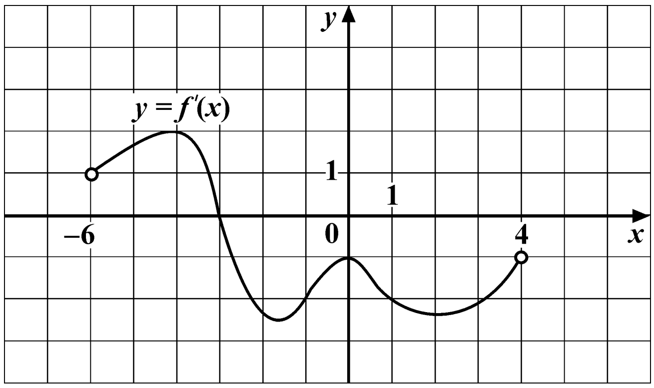


Рис. 5.37

15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{x^2+8}{x+1}$ на промежутке [0; 3]. [Ответ: 8; 4]

16. Представьте число 12 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
[Ответ: 12 = 6 + 6]

17. Представьте число 20 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение одного из них на куб другого было наибольшим. [Ответ: 20 = 15 + 5]

18. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 18, а высота – 6. В пирамиду вписан конус так, что вершина конуса лежит в центре основания пирамиды и основание конуса параллельно основанию пирамиды. Какой наибольший объем может иметь конус?
[Ответ: 8π]

19. Высота правильной треугольной пирамиды равна 15. В пирамиду вписан конус так, что вершина конуса лежит в центре основания пирамиды и основание конуса параллельно основанию пирамиды. Какую высоту имеет конус наибольшего объема?
[Ответ: 5]

20. Основанием прямой призмы является квадрат. Призма вписана в полушар так, что ее нижнее основание лежит в плоскости большого круга полушара, а вершины верхнего основания лежат на шаровой поверхности. Найдите наибольшее значение суммы длин всех ребер призмы, если объем полушара равен $\dfrac{2}{3}\pi$. [Ответ: 12]

21. Из квадратного листа со стороной 12 изготавливается коробка наибольшей вместимости вырезами по углам четырех равных квадратов и последующим загибом получившихся выступов. Найдите объем такой коробки. [Ответ: 128]

22. На графике функции $y = \dfrac{9}{x-3}$ при $x \in [4;\ 7]$ найдите точку, расстояние от которой до точки $A(3;\ 0)$ является наименьшим.

[Ответ: (6; 3)]

23. Через точку $M(1;\ 4)$ проведите такую прямую, чтобы сумма длин отрезков, отсекаемых ею на положительных координатных полуосях, была наименьшей. [Ответ: $y = 6 - 2x$]

Контрольная работа

Вариант 1

1. Решите уравнение $f'(x) = 0.$ $f(x) = \sin(2x) - x.$

2. Решите неравенство $f'(x) \geq 0.$ $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{3x - 1}.$

3. Вычислите: а) $f'(x).$ $f(x) = \log_3 x + 5^{4x};$

б) $g'(2).$ $g(x) = (3 - 4x)^3 + 2;$

в) $\varphi'(1).$ $\varphi(x) = e^x \ln\left(\dfrac{x}{2}\right).$

4. Тело движется прямолинейно по закону $x(t) = 2 - t + 3t^3.$ В какой момент времени скорость будет равна 8 м/с?

5. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = 3xe^x$ в точке $x = 0.$

6. К графику функции $y = \dfrac{3}{x+2}$ проведены две параллельные касательные, одна из которых проходит через точку графика с абсциссой $x_0 = -1.$ Найдите абсциссу точки, в которой другая касательная касается графика данной функции.

7. Исследуйте функцию $f(x)=2\ln x - x^2$ на монотонность и экстремумы.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{x}{2}$ на отрезке [0; 2,5].

9. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани равна 2. Найдите наибольшее значение площади боковой поверхности призмы.

Вариант 2

1. Решите уравнение $f'(x)=0$. $f(x)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2$.

2. Решите неравенство $f'(x)\le 0$. $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{1-x}$.

3. Вычислите: а) $f'(x)$. $f(x)=e^{-2x}+x^{0,7}$;

б) $g'(0)$. $g(x)=\sqrt{4+2x}$;

в) $\varphi'(1)$. $\varphi(x)=\ln(4-3x)+2^x$.

4. Тело движется прямолинейно по закону $x(t)=2-t+3t^3$. Найдите скорость тела в момент времени $t_0=2$ с.

5. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=x\ln x$ в точке $x=e$.

6. К графику функции $y=-\dfrac{4}{x-3}$ проведены две параллельные касательные, одна из которых проходит через точку графика с абсциссой $x_0=1$. Найдите абсциссу точки, в которой другая касательная касается графика данной функции.

7. Исследуйте функцию $f(x)=xe^{3x}$ на монотонность и экстремумы.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{x^2}{x+5}$ на отрезке [–4; 1].

9. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник, а сумма длин всех ребер равна P. Найдите наибольшее значение площади ее боковой поверхности.

Вариант 3

1. Решите уравнение $f'(x) = 0$. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}$.

2. Решите неравенство $f'(x) \geq 0$. $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x + 1}$.

3. Вычислите: а) $f'(x)$. $f(x) = x^{1/4} + 2e^{5x}$;

б) $g'(-1)$. $g(x) = (1 - 2x)^4$;

в) $\varphi'(1)$. $\varphi(x) = \log_4 x - 3^x$.

4. Тело движется прямолинейно по закону $x(t) = 2 - t + 3t^3$. В какой момент времени тело остановится?

5. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = 2x\ln x$ в точке $x = e$.

6. К графику функции $y = x^2 - 4x$ проведена касательная в точке $M(1; –3)$. Найдите абсциссу точки пересечения касательной с осью OX.

7. Исследуйте функцию $f(x) = x^2 e^{-x}$ на монотонность и экстремумы.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ на отрезке [0; 2].

9. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат, а каждая боковая грань имеет периметр 6. Найдите параллелепипед с наибольшим объемом и вычислите этот объем.

Вариант 4

1. Решите уравнение $f'(x) = 0$. $f(x) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

2. Решите неравенство $f'(x) \leq 0$. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{1 - 4x}$.

3. Вычислите: а) $f'(x)$. $f(x) = \ln(3x) - 2\sqrt{x}$;

б) $g'(2)$. $g(x) = \sqrt{7 - 3x}$;

в) $\varphi'(1)$. $\varphi(x) = 3^{-x} \cdot x^4$.

4. Тело движется прямолинейно по закону $x(t) = 2 - t + 3t^3$. Найдите ускорение тела в момент времени $t_0 = 1$ с.

5. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = xe^{2x}$ в точке $x = 0$.

6. К графику функции $f(x) = -x^2 - 5x$ проведена касательная в точке $P(-1;\ 4)$. Найдите абсциссу точки пересечения касательной с осью OX.

7. Исследуйте функцию $f(x) = 0{,}5x^2 - \ln x$ на монотонность и экстремумы.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ на отрезке [1; 3].

9. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 4. Основанием служит квадрат. Найдите параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и вычислите этот периметр.

Ответы к контрольной работе

№ задания	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1	$\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$	$\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$	$-\pi+4\pi n,\ n\in Z$	$\frac{5\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$
2	$\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right]\cup[2;+\infty)$	$(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$	$(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$	$(-\infty;0]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$
3	а) $\frac{1}{x\ln 3}+4\cdot 5^{4x}\ln 5$, б) –300; в) $e\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+1\right)$	а) $-2e^{-2x}+0,7x^{-0,3}$, б) $\frac{1}{2}$; в) $-3+2\ln 2$	а) $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}+10e^{5x}$, б) –216; в) $\frac{1}{\ln 4}-3\ln 3$	а) $\frac{1-\sqrt{x}}{x}$, б) –1,5; в) $\frac{1}{3}(-\ln 3+4)$
4	1 с	35 м/с	$\frac{1}{3}$ с	18 м/с^2
5	3	2	4	1
6	–3	5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
7	$x_{\max}=1$, $f(x_{\max})=-1$	$x_{\min}=-\frac{1}{3}$, $f(x_{\min})=-\frac{1}{3e}$	$x_{\min}=0$, $f(x_{\min})=0$; $x_{\max}=2$, $f(x_{\max})=\frac{4}{e^2}$	$x_{\min}=1$, $f(x_{\min})=0,5$
8	2 и 1,5	16 и 0	0 и $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ и 0
9	6	$\frac{P^2}{24}$	4	6

Список литературы

1. Лысенко Ф.Ф., Агафонова И.М., Авилов Н.И. и др. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2009. Вступительные испытания / под ред. Ф.Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону: Легион, 2008. – 400 с.

2. Высоцкий И.Р., Гущин Д.Д., Захаров П.И. и др. Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ 2011 / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ Астрель, 2011. – 95 с.

3. Шарыгин И.Ф. Сборник задач по математике с решениями: учеб. пособие для 11 кл. общеобразовательных учреждений. – М.: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 448 с.

4. Зальмеж В.Ф., Подскребко Э.Н., Хмылева Т. Е. и др. Готовимся к единому государственному экзамену по математике: сборник учебно-тренировочных материалов / под ред. С.Г. Киреенко. – Томск: ТОИПКРО, 2005. – 40 с.

5. Открытый банк заданий по математике. – http://www.mathege.ru.

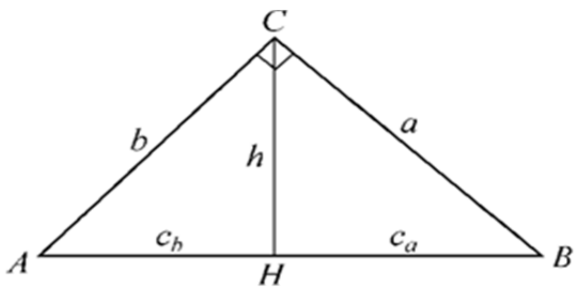
ГЛАВА 6
ПЛАНИМЕТРИЯ

6.1. Краткий теоретический справочник

6.1.1. Треугольники

Прямоугольный треугольник

Метрические соотношения



$a^2 + b^2 = c^2$;

$h^2 = c_a \cdot c_b$;

$b^2 = c \cdot c_b$;

$a^2 = c \cdot c_a$;

$h = ab/c$,

где c_a, c_b – проекции катетов a, b на гипотенузу c; h – высота; a, b – катеты; c – гипотенуза.

Соотношения между сторонами и углами

$\sin A = \dfrac{a}{c}$; $\quad \mathrm{tg}A = \dfrac{a}{b}$; $\quad \cos A = \dfrac{b}{c}$; $\quad \mathrm{ctg}A = \dfrac{b}{a}$.

Формулы для вычисления радиусов вписанной (r) и описанной (R) окружностей

$R = \dfrac{c}{2} = m$; $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, *m – медиана, проведённая из вершины прямого угла.*

Формула площади: $S = \dfrac{ab}{2}$.

Произвольный треугольник

Определение вида треугольника по его сторонам:

- *если* $c^2 < a^2 + b^2$, *то треугольник остроугольный;*
- *если* $c^2 = a^2 + b^2$, *то треугольник прямоугольный;*
- *если* $c^2 > a^2 + b^2$, *то треугольник тупоугольный, где c – наибольшая сторона.*

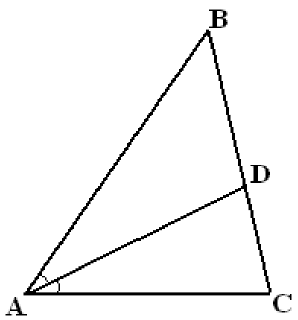
Соотношения между сторонами и углами

1. *Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.*
2. *Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны (неравенство треугольника).*
3. *Против большей стороны треугольника лежит больший угол и, наоборот, против большего угла лежит большая сторона.*
4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ *(теорема косинусов).*
5. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ *(теорема синусов).*

Свойства медиан

1. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.*
2. *Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.*
3. *Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.*
4. $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, *где m – медиана, проведённая к стороне c.*

Свойства биссектрис



1. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.*
2. *Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.*

AD – биссектриса треугольника ABC, тогда $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Свойство высот

Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Свойство серединных перпендикуляров

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Свойства средней линии треугольника

1. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.

2. Средняя линия треугольника делит пополам любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с какой-либо точкой основания.

Формулы для вычисления площади

1. $S = \frac{1}{2}ch_c$;
2. $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$;
3. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, *где p – полупериметр (формула Герона);*
4. $S = \frac{abc}{4R}$, *где R – радиус описанной окружности;*
5. $S = pr$, *где r – радиус вписанной окружности.*

Формулы для вычисления радиусов вписанной (r) и описанной (R) окружностей

$$R = \frac{a}{2\sin A}, \quad R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{S}{p}.$$

Пропорциональные площади треугольников

1. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2. Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

3. Если два треугольника имеют общее основание (или равные основания), то их площади относятся как высоты, проведённые к этому основанию.

4. Если два треугольника имеют общую высоту (или равные высоты), то отношение их площадей равно отношению оснований.

6.1.2. Четырёхугольники

Произвольный выпуклый четырёхугольник

Формулы для вычисления площади

1. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$, *где* d_1, d_2 *– диагонали,* φ *– угол между ними.*
2. *S = pr, если в четырёхугольник можно вписать окружность, где r – радиус вписанной окружности, p – полупериметр.*
3. $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, *если около четырёхугольника можно описать окружность, где a, b, c,* d *– стороны четырёхугольника, p- полупериметр.*

Вписанная окружность

В четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны. Центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис.

Описанная окружность

Около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180°. Центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам четырёхугольника.

Свойство середин сторон четырёхугольника

Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырёхугольника.

Параллелограмм

Формулы для вычисления площади

1. $S = ah_a$;
2. $S = ab \cdot \sin A$;
3. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$ *(для ромба).*

Соотношение между сторонами и диагоналями

$d_1^2 + d_2^2 = 2\,(a^2 + b^2)$.

Трапеция

Формулы для вычисления площади

1. $S = \frac{a+b}{2}h$, *где a, b – основания; h – высота;*
2. *S = pr, если в трапецию можно вписать окружность радиуса r.*

Свойства средней линии трапеции

1. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.*
2. *Делит пополам любой отрезок, заключённый между основаниями.*

6.1.3. Правильные многоугольники

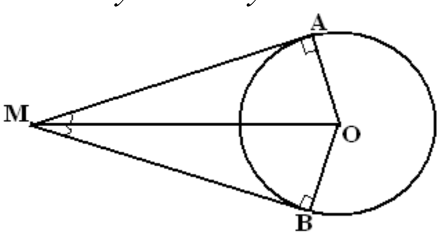
$a_n = 2R_n \cdot \sin\frac{180°}{n}$; $a_n = 2r_n \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$; $r_n = R_n \cdot \cos\frac{180°}{n}$

где a_n – сторона правильного n-угольника, а r_n и R_n – радиусы вписанной и описанной окружностей.

6.1.4. Окружность и круг

Свойства касательных к окружности

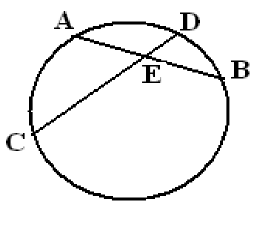
1. *Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.*



2. *Если прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B, то MA = MB и $\angle AMO = \angle BMO$, где O – центр окружности.*

3. *Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.*

Свойства хорд окружности.



Произведения длин отрезков хорд AB и CD окружности, пересекающихся в точке E, равны, то есть AE·EB = CE·ED.

Углы, связанные с окружностью

1. *Центральный угол – угол, образованный двумя радиусами OB и OC (где O – центр окружности). Центральный угол $\angle BOC$ измеряется дугой BC, на которую он опирается.*
2. *Вписанный угол – угол, образованный двумя хордами AB и AC, выходящими из точки A на окружности. Вписанный угол $\angle BAC$ измеряется половиной дуги BC, на которую он опирается.*
3. *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.*
4. *Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.*
5. *Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.*
6. *Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.*

Длина окружности, площадь круга: $l = 2\pi R$; $S = \pi R^2$.

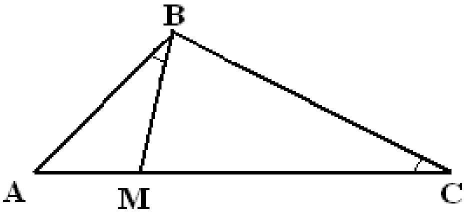
Длина дуги, площадь сектора: $l_{AB} = \frac{\pi R \alpha}{180°}$, $S_{AOB} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360°}$,

где α – центральный угол, опирающийся на дугу AB, выраженный в градусах.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА № 1

Задача 1. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка M, такая, что $\angle C = \angle ABM$. Найдите AB, если AC = 9, AM = 4.

Решение.



1. Треугольники ABC и AMB подобны по двум углам ($\angle A$ – общий, $\angle C = \angle ABM$).
2. Запишем пропорциональность сторон подобных треугольников.

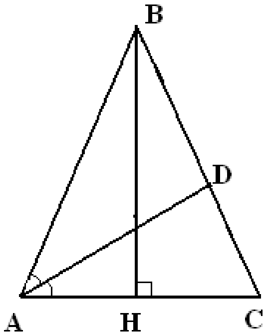
Замечание. *При записи пропорциональности сторон подобных треугольников нужно помнить, что соответствующие стороны лежат против равных углов. Если трудно сразу понять, какую пропорцию следует записать для решения задачи, то лучше выписать равные отношения всех соответствующих сторон и подставить известные стороны.*

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BM},\ \frac{AB}{4} = \frac{9}{AB} = \frac{BC}{BM},\ \Rightarrow AB^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow AB = 6.$$

Ответ: 6.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = BC) проведена биссектриса AD. Площади треугольников ABD и ADC равны соответственно $3\sqrt{35}$ и $\sqrt{35}$. Найти длину основания треугольника.

Решение.



1. Так как треугольники ABD и ADC имеют общую высоту (перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую BC), то $\frac{BD}{DC} = \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{3\sqrt{35}}{\sqrt{35}} = 3.$
2. По свойству биссектрисы $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = 3 \Rightarrow AB =$ $= 3\,AC$.

Пусть AC = x, тогда AB = BC = $3x$.

3. Пусть H – середина стороны AC, то есть BH – медиана.

Так как ΔABC – равнобедренный, то BH $\perp$ AC. Поэтому ΔABH – прямоугольный, и по теореме Пифагора BH = $\sqrt{AB^2 - AH^2}$ = $\sqrt{9x^2 - \frac{x^2}{4}}$ =

$= \frac{x\sqrt{35}}{2}$.

4. Следовательно, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot$ BH $\cdot$ AC = $\frac{x^2\sqrt{35}}{4}$.

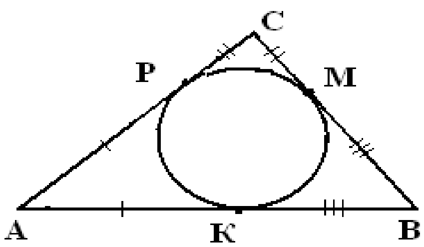
С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC} = 3\sqrt{35} + \sqrt{35} = 4\sqrt{35}$.

Таким образом, получаем равенство $\frac{x^2\sqrt{35}}{4} = 4\sqrt{35}$, $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$.

Ответ: 4.

Задача 3. Дан треугольник ABC. В него вписана окружность, касающаяся BC и AC в точках M и P. Найдите MP, если AB = 22, BC = 20, CM = 2,5.

Решение.



1) Пусть K – точка касания вписанной в ΔABC окружности со стороной AB, так как отрезки касательных к окружности равны, то AK = AP, BK = BM, CP = CM, сложим равенства и получим:

$\Rightarrow$AB + CM = AC + BM,

$\Rightarrow$AB + CM = AC + BC – CM $\Rightarrow$

AC = 2CM + AB – BC = 2 $\cdot$2,5 +22 – 20 = 7.

2) Из ΔABC по теореме косинусов имеем:

$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2\,AC \cdot BC}$, $\cos C = \frac{400+49-484}{2 \cdot 140} = -\frac{1}{8}$.

3) Из ΔPCM по теореме косинусов:

$MP^2 = CP^2 + CM^2 - 2\,CP \cdot CM \cdot \cos C$.

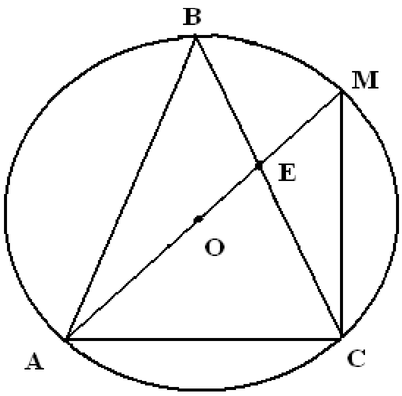
$$MP^2 = 2 \cdot CM^2\,(1 - \cos C) = 2 \cdot CM^2\,(1 + \frac{1}{8}) = \frac{9\,CM^2}{4} \Rightarrow MP =$$

$$= \frac{3\,CM}{2} = \frac{7{,}5}{2} = 3{,}75.$$

Ответ: 3,75.

Задача 4. Около равнобедренного треугольника ABC (AB = BC) с углом B, равным 30°, описана окружность радиуса $7\sqrt{2}$. Её диаметр AM пересекает сторону BC в точке E. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника AEC.

Решение.



1. ΔABC – равнобедренный, $\angle B = 30° \Rightarrow$ $\angle A = \angle C = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.

2. Вписанные углы $\angle ABC$ и $\angle AMC$ опираются на одну и ту же дугу AC, поэтому $\angle AMC = \angle ABC = 30°$.

3. $\angle ACM = 90°$, так как $\angle ACM$ – вписанный угол, опирающийся на диаметр AM $\Rightarrow$ ΔACM – прямоугольный $\Rightarrow$ $AC = \dfrac{1}{2}AM = 7\sqrt{2}$, так как AC – катет, лежащий против угла в 30°.

4. В ΔACM $\angle MAC = 180° - \angle ACM - \angle AMC = 60°$.

5. Стороны AE и EC найдём из ΔAEC по теореме синусов.

В ΔAEC $\angle EAC = 60°$, $\angle ECA = 75°$, тогда $\angle AEC = 45°$.

По теореме синусов $\dfrac{AE}{\sin\angle C} = \dfrac{AC}{\sin\angle E} = \dfrac{EC}{\sin\angle A} \Rightarrow$

$AE = \dfrac{7\sqrt{2}\,\sin 75°}{\sin 45°} = 7\sqrt{2}\,\sin 75° \cdot \sqrt{2} = 14\sin 75°$.

$EC = \dfrac{7\sqrt{2}\,\sin 60°}{\sin 45°} = \dfrac{7\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{3}$.

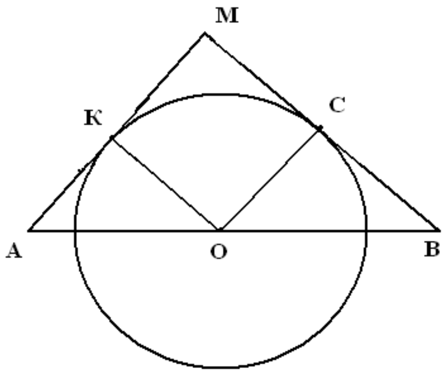
6. $S_{\Delta AEC} = \dfrac{1}{2}\cdot AE\cdot AC\cdot \sin\angle A = \dfrac{1}{2}\cdot 14\cdot\sin 75°\cdot 7\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{49\sqrt{6}}{2}\sin 75°$.

7. Для вычисления радиуса описанной окружности воспользуемся формулой $R = \dfrac{abc}{4S}$: $R = \dfrac{AE\cdot EC\cdot AC}{4S_{\Delta AEC}} = \dfrac{14\,\sin 75°\cdot 7\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{2}}{4\cdot\frac{49\sqrt{6}}{2}\sin 75°} = 7 \Rightarrow$ диаметр окружности, описанной около ΔAEC равен 14.

Ответ: 14.

Задача 5. Точка О лежит на отрезке АВ так, что АО = 13, ОВ = 15. С центром в точке О проведена окружность радиусом 12. Из А и В к ней проведены две касательные, пересекающиеся в точке М, причем точки касания лежат по одну сторону от прямой АВ. Найдите длину наибольшей стороны треугольника АМВ.

Решение.



1. Пусть точки К и С – точки касания. Тогда $OK \perp AM$, $OC \perp BM$ (радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной) $\Rightarrow$ ΔAKO и ΔBCO – прямоугольные.

2. Из ΔAKO по теореме Пифагора

$AK^2 = AO^2 - KO^2 \Rightarrow AK = \sqrt{AO^2 - KO^2} =$ $= \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

$$\sin\angle A = \frac{OK}{AO} = \frac{12}{13}$$

3. Из ΔBCO по теореме Пифагора $BC^2 = BO^2 - CO^2 \Rightarrow$

$BC = \sqrt{BO^2 - CO^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.

$$\sin\angle B = \frac{OC}{BO} = \frac{12}{15}.$$

4. МК = МС (отрезки касательных, проведённых из одной точки).

Пусть $MK = MC = x$, тогда $AM = 5 + x$, $BM = 9 + x$.

5. Из ΔAMB по теореме синусов $\frac{AM}{\sin\angle B} = \frac{BM}{\sin\angle A}$, $\frac{5+x}{\frac{12}{15}} = \frac{9+x}{\frac{12}{13}}$ $\Rightarrow$

$15(5 + x) = 13(9 + x)$, $2x = 42$, $x = 21$ $\Rightarrow$ $AM = 26$, $BM = 30$ $\Rightarrow$

Наибольшая сторона треугольника АМВ – это сторона ВМ.

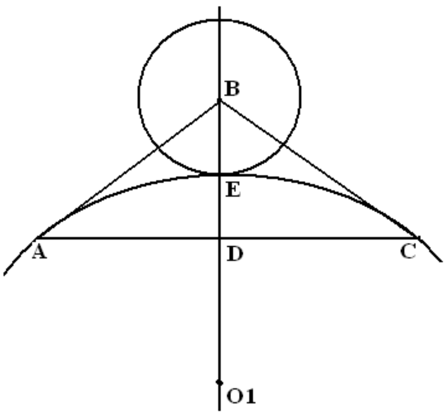
Ответ: 30.

Задача 6. Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Замечание. *Существует особый класс геометрических задач, имеющих характерную особенность. Эти задачи содержат в условии некоторую неопределенность, которая позволяет трактовать условие неоднозначно. В результате удается построить несколько чертежей, удовлетворяющих условию задачи. Поэтому подобные задачи называют многовариантными. Перебор вариантов является частью решения задач такого типа.*

Решение.

Пусть D – середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. Тогда BD – биссектриса и высота этого треугольника.



Возможны два случая расположения указанной в условии окружности в зависимости от типа касания с данной окружностью. В обоих случаях центры O_1 и O_2 этих окружностей будут лежать на прямой BD.

1. Окружности касаются внешним образом.

Пусть точка E – точка касания окружностей. Тогда искомая окружность описана около треугольника AEC. Для вычисления радиуса описанной окружности воспользуемся формулой $R = \frac{abc}{4S}$, $R_{\Delta AEC} = \frac{AE \cdot EC \cdot AC}{4S_{\Delta AEC}}$.

$AD = \frac{1}{2} AC = 4$.

Из ΔABD по теореме Пифагора $BD^2 = AB^2 – AD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

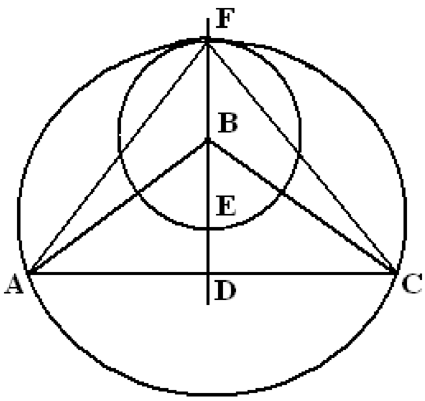
$$ED = BD – BE = 1.$$

Из ΔAED по теореме Пифагора $AE^2 = ED^2 + AD^2 \Rightarrow AE = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$.

$$S_{\Delta AEC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot ED = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 = 4.$$

$$R_{\Delta AEC} = \frac{\sqrt{17} \cdot \sqrt{17} \cdot 8}{4 \cdot 4} = \frac{17}{2} = 8{,}5.$$

2. Окружности касаются внутренним образом.



Пусть F – точка касания окружностей. Тогда искомая окружность описана вокруг треугольника AFC. Найдем ее радиус: $R_{\Delta AFC} = \dfrac{AF \cdot FC \cdot AC}{4S_{\Delta AFC}}$.

$$FD = BD + BF = 5.$$

Из ΔAFD по теореме Пифагора $AF^2 = FD^2 + AD^2 \Rightarrow AF = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.

$$S_{\Delta AFC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot FD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20.$$

$$R_{\Delta AFC} = \frac{\sqrt{41} \cdot \sqrt{41} \cdot 8}{4 \cdot 20} = \frac{41}{10} = 4{,}1.$$

Ответ: 8,5 или 4,1.

Задача 7. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Известно, что AB = 6 и BC = 4.

Найдите AC.

Решение.

Из ΔABC по теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$, а также $AC = 2R_{\Delta ABC} \sin B$ (следствие из теоремы синусов), где $R_{\Delta ABC}$ – радиус описанной около ΔABC окружности.

Отсюда получаем тригонометрическое уравнение

$$576 \sin^2 B = 36 + 16 - 48 \cos B.$$

Решая последнее уравнение, находим $\cos B = \frac{1 \pm 5\sqrt{21}}{24}$.

Положительное значение косинуса соответствует острому углу B, отрицательное – тупому. По основному тригонометрическому тождеству найдём значение $\sin B$. $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \dfrac{\sqrt{50 \pm 10\sqrt{21}}}{24} = \dfrac{\sqrt{35} \pm \sqrt{15}}{24} \Rightarrow AC = 2R_{\Delta ABC} \sin B = \sqrt{35} \pm \sqrt{15}$.

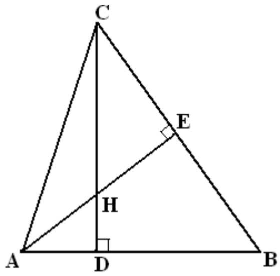
Ответ: $\sqrt{35} \pm \sqrt{15}$.

Задача 8. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.

Решение.

В данной задаче возможны 4 случая:

ΔABC – остроугольный; в ΔABC угол A – тупой; в ΔABC угол B – тупой; в ΔABC угол C – тупой.



1. Пусть ΔABC – остроугольный.

Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и AHC, равны между собой:

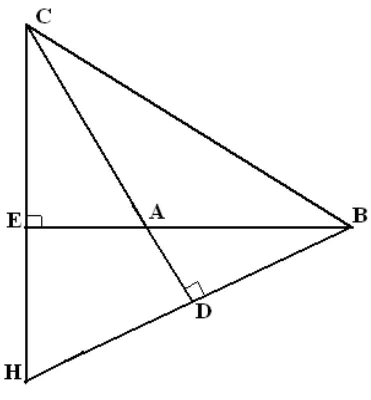
Так как в четырехугольнике BEHD углы E и D прямые, то $\angle B + \angle DHE = 180°$ ⇒ $\angle AHC = \angle DHE = 180° - \angle B$.

$R_{\text{AHC}} = \frac{\text{AC}}{2\sin\angle\text{AHC}}$, $R_{\text{ABC}} = \frac{\text{AC}}{2\sin\angle\text{B}}$, но $\sin\angle AHC = \sin(180° - \angle B) = \sin\angle B$, значит $R_{\text{AHC}} = R_{\text{ABC}}$.

Замечание. *Если H – ортоцентр треугольника ABC, то радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, ABH, BCH, ACH, равны между собой.*

Пусть R – радиус окружности, описанной около ΔABC, значит CH = R. Из ΔAHC по обобщённой теореме синусов имеем: $CH = 2R_{\Delta AHC} \cdot \sin\angle HAC$ ⇒ ⇒ $R = 2R\sin\angle HAC$ ⇒ $\sin\angle HAC = \frac{1}{2}$ ⇒ $\angle HAC = 30°$ или $\angle HAC = 150°$ (это невозможно в остроугольном треугольнике).

Из ΔAEC – прямоугольного: $\angle ACB = 90° - \angle HAC = 90° - 30° = 60°$.



2. Пусть в ΔABC угол A – тупой.

$R_{\Delta BHC} = R_{\Delta ABC} = R$ (см. вывод в 1 случае) ⇒ ⇒ CH = R (по условию).

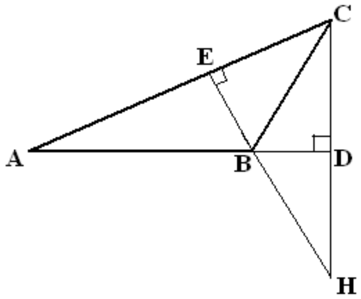
Из ΔBHC имеем: $CH = 2R_{\Delta BHC} \cdot \sin\angle HBC$ ⇒

⇒ $R = 2R\sin\angle HBC$ ⇒ $\sin\angle HBC = \frac{1}{2}$ ⇒

⇒ $\angle HBC = 30°$ или $\angle HBC = 150°$.

В ΔDBC угол D прямой, а угол DBC может быть только острым, значит и угол HBC тоже острый ⇒ $\angle HBC = 30°$.

Из ΔDBC находим $\angle ACB = 90° - \angle HBC = 90° - 30° = 60°$.

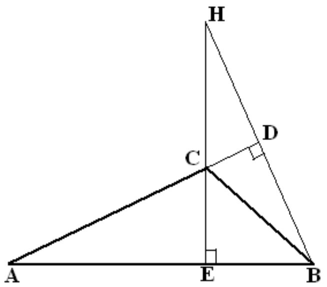


3. Пусть в ΔABC угол B – тупой.

В этом случае ∠HBC может быть только тупым, так как он смежный к ∠CBE, а ∠CBE – острый угол в прямоугольном ΔBCE. Значит ∠HBC = 150° ⇒ ∠CBE = 30º.

Из ΔBCE находим ∠ACB = 90° – ∠CBE = 90° – 30° = 60°.

4. Пусть в ΔABC угол C – тупой.



В этом случае ∠HBC – острый, так как ∠HBE – острый угол в прямоугольном треугольнике HBE. Значит ∠HBC = 30°.

Из ΔBCD находим ∠DCB = 90° – ∠HBC = 60°.

∠ACB и ∠DCB – смежные ⇒ ∠ACB = 180° – 60° = 120°.

Ответ: 60° или 120°.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите расстояние от точки пересечения медиан прямоугольного треугольника до его гипотенузы, равной 25, если один из катетов равен 20.

2. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна $2\sqrt{3}$ и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найдите больший катет.

3. В прямоугольном треугольнике длины двух медиан, проведенных к катетам, равны 12 и $4\sqrt{11}$. Найдите длину третьей медианы.

4. Треугольник ABC – прямоугольный с гипотенузой AB. Найдите длину его биссектрисы BL, если известно, что она делит медиану CM в отношении 6 : 5, считая от вершины C, а площадь треугольника ABC равна 120.

5. Точка H лежит на стороне AO треугольника AOM. Известно, что AH = 4, OH =12, $\angle$AMH = $\angle$AOM, $\angle$A = 30º. Найдите площадь треугольника AHM.

6. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла A, а длина стороны BC равна 200. Найдите биссектрису BD этого треугольника, если DC = 125.

7. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N, так что AM : MB = 3 : 4 и BN : NC = 3:5. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника MNA равна 9.

8. В равнобедренном треугольнике ABC $\angle$B = 120°. Расстояние от точки M, лежащей внутри треугольника, до основания треугольника равно $2\sqrt{3}$, а до боковых сторон равно 1. Найдите AC.

9. Высота CH треугольника ABC равна 8, где основание высоты H лежит на отрезке AB, HN – высота треугольника BCH, а HM – высота треугольника ACH. Найдите длину отрезка MN, если AM = $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, а BN = 12.

10. Найдите радиус окружности, вписанной в остроугольный треугольник ABC, если высота треугольника BH = 12 и известно, что $\sin A = \frac{12}{13}, \sin C = \frac{4}{5}$.

11. Найдите наибольшую сторону треугольника, если отношение его сторон равно 13 : 20 : 21, а высота, проведенная к меньшей стороне, равна 50,4.

12. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность. Параллельно его основанию AC проведена касательная к окружности, пересекающая боковые стороны в точках D и E. Найдите радиус окружности, если DE = 8, AC = 18.

13. В равнобедренный треугольник PMK с основанием MK вписана окружность с радиусом $2\sqrt{3}$. Высота PH делится точкой пересечения с окружностью в отношении 1:2, считая от вершины P. Найдите периметр треугольника PMK.

14. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с углом при основании 30°, если высота, проведенная к боковой стороне, равна $2\sqrt{3}$.

15. В окружность радиуса $4\sqrt{3}$ вписан треугольник ABC, в котором $\angle A = 60°$, а сторона AB в два раза больше стороны AC. В треугольнике проведена биссектриса AM. Найдите длину отрезка MC.

16. Дан ромб ABCD. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает большую диагональ ромба AC в точке E. Найдите меньшую диагональ ромба, если $AB = 8\sqrt{5}$, $CE = 12$.

17. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается катета BC в точке M. Луч BO пересекает катет AC в точке K. Найдите AK, если $CM = 4$, $BM = 8$.

18. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрали точку M. Построили описанную окружность с центром O для треугольника AMC. Известно, что $AC = 6$, а $2\angle MAO = \angle MOC$. Найдите радиус этой окружности.

19. В остроугольном треугольнике ABC провели медиану AM и описанную окружность с центром O. Известно, что $\angle MAC = \angle OCA$, $\angle BAC = 60°$, $AB = 6\sqrt{3}$. Найдите расстояние от центра окружности до AC.

20. В окружность радиуса 5 вписан равнобедренный треугольник, сумма основания и высоты которого равна 16. Найдите высоту треугольника.

21. Площадь равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равна 36. Найдите длину стороны AC, если $BC = \sqrt{97}$.

22. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O – центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 24$, $MN = 12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

23. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами равен 2. Найдите основание треугольника.

24. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB.

25. Отрезок H_1H_2, соединяющий основания H_1 и H_2 высот AH_1 и BH_2 треугольника ABC, виден из середины M стороны AB под прямым углом. Найдите угол C треугольника ABC.

26. Через середину стороны AB квадрата ABCD проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, такой что tgα = 3. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата ABCD равна 4.

27. В треугольнике ABC AB = 12, BC = 5, CA = 10. Точка D лежит на прямой BC так, что BD : DC = 4 : 9. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

28. Точка M делит среднюю линию треугольника ABC, параллельную стороне BC, на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. Точка N также делит сторону BC на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. В каком отношении прямая MN делит площадь треугольника ABC?

29. Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

30. Около треугольника ABC описана окружность с центром O. Найдите величину угла ACB, если угол OCB равен 10°, а угол AOC равен 40°.

31. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что CH = AB. Найдите угол ACB.

32. Точки A_1, B_1, C_1 – основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60° и 30°. Найдите углы треугольника ABC.

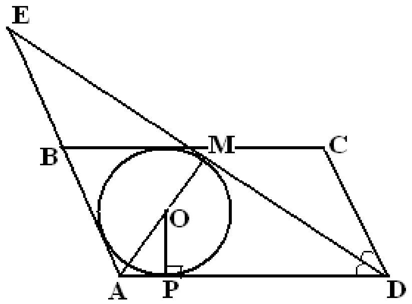
33. Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AH. Найдите угол MBC.

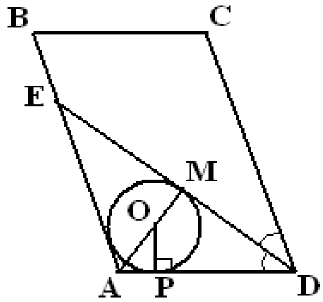
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА № 2

Задача 1. В параллелограмме ABCD угол BAD равен 120°. Биссектриса угла ADC пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность с центром в точке O. Найдите периметр треугольника ADE, если AO = $7 - 4\sqrt{3}$.

Решение.

Несмотря на то, что по данным задачи можно построить два чертежа, решение одинаково для обоих случаев.





1. $\angle$AED = $\angle$EDC, как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей DE.

$\angle$ADE = $\angle$EDC, так как DE – биссектриса угла ADC.

Значит, $\angle$ADE = $\angle$AED $\Rightarrow$ ΔADE – равнобедренный, AD = AE.

2. O – центр вписанной в ΔADE окружности лежит на биссектрисе AM, а так как ΔADE – равнобедренный, то AM – биссектриса, высота и медиана.

3. В ΔAOP: $\angle$APO = 90°, $\angle$PAO = $\frac{1}{2} \cdot \angle$BAD = 60°, значит $\angle$AOP = 30°,

PO = AO $\cdot$ cos $\angle$AOP = $(7 - 4\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. PO = OM = $r_{\Delta ADE}$, тогда AM = AO + OM = $7 - 4\sqrt{3} + \frac{7\sqrt{3}}{2} - 6 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

5. Из ΔAMD имеем: AD = 2AM, так как $\angle$ADM = 30°, AD = $2 - \sqrt{3}$.

DM = AM $\cdot$ tg$\angle$MAD = AM $\cdot$ tg60° = $\frac{2-\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$.

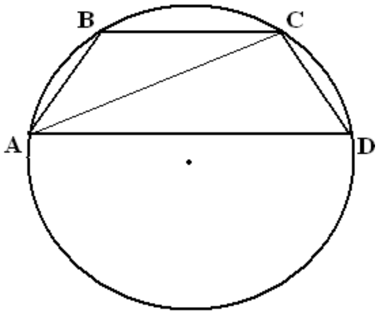
6. DE = 2 DM = $2\sqrt{3} - 3$.

$P_{\Delta ADE}$ = 2AD + DE = $4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 = 1$.

Ответ: 1.

Задача 2. В равнобедренной трапеции с острым углом 60° боковая сторона равна $\sqrt{21}$, а меньшее основание равно $2\sqrt{21}$. Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

Решение.



1. Окружность, описанная около данной трапеции, также является описанной окружностью для треугольника ABC $R = \dfrac{AC}{2\sin\angle ABC}$

2. $\angle BAD = 60°$, $\angle ABC = 120°$ (внутренние односторонние углы при параллельных AD и BC и секущей AB).

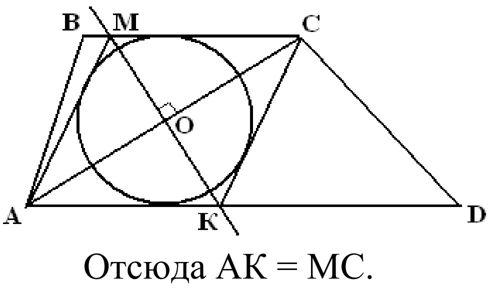
3. Из ΔABC по теореме косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$, $AC^2 = 21 + 84 + 2\sqrt{21} \cdot 2\sqrt{21} \cdot \frac{1}{2}$, $AC^2 = 147$, $AC = \sqrt{147}$.

4. $R = \dfrac{\sqrt{147}}{2\sin 120°} = \sqrt{\dfrac{147}{3}} = \sqrt{49} = 7$.

Ответ: 7.

Задача 3. Через середину диагонали AC трапеции ABCD проведена прямая, перпендикулярная AC. Эта прямая пересекает основания AD и BC в точках K и M соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник AMCK, если AM = 10, AC = 16.

Решение.



1. Пусть O – середина диагонали AC. $\Delta MOC = \Delta KOA$ по катету и острому углу ($AO = OC$, $\angle OAK = \angle OCM$, как накрест лежащие при параллельных BC и AD и секущей AC).

Отсюда $AK = MC$.

2. $MC \parallel AK$, $MC = AK \Rightarrow AMCK$ – параллелограмм, значит $AM = CK$.

3. Окружность вписана в четырехугольник, поэтому $MC + AK = AM + CK$, отсюда $AM = MC$, AMCK – ромб.

4. Из ΔAOM – прямоугольного, по теореме Пифагора $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$, тогда $MK = 12$.

5. $S_{AMCK} = \frac{1}{2} AC \cdot MK = 96$.

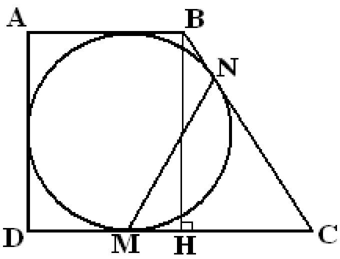
С другой стороны, так как в четырехугольник АМСК вписана окружность, то $S_{\text{АМСК}}$ = pr, где p – полупериметр; p = 2AM = 20.

$r = \frac{S_{\text{АМСК}}}{p} = \frac{96}{20} = 4{,}8.$

Ответ: 4,8.

Задача 4. В трапеции ABCD боковая сторона AD перпендикулярна основаниям. Окружность, вписанная в эту трапецию, касается сторон CD и BC в точках M и N соответственно, причем MN = MC. Найдите среднюю линию трапеции, если радиус окружности равен $8\sqrt{3} - 12$.

Решение.



1. Пусть m – средняя линия трапеции, $m = \frac{1}{2}$ (AB + CD).
2. Так как трапеция описана, то AD + BC = = AB + DC.

Значит, $m = \frac{1}{2}$ (AD + BC).

3. По свойству касательных, проведённых из одной точки, CN = CM, но по условию CM = MN, значит ΔMNC – равносторонний, ∠C = 60°.
4. Построим высоту трапеции BH.

Из прямоугольного ΔBCH имеем $BC = \frac{BH}{\sin 60°}$, где BH = AD = 2r = = $16\sqrt{3} - 24$.

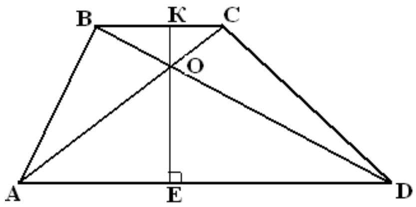
$$BC = \frac{(16\sqrt{3}-24)\cdot 2}{\sqrt{3}} = 32 - 16\sqrt{3}.$$

$$m = \frac{1}{2}(16\sqrt{3}-24 + 32 - 16\sqrt{3}) = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 5. В трапеции ABCD с большим основанием AD диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника BOC равна 4, а площадь треугольника AOD равна 9.

Решение.



1. $\Delta BOC \sim \Delta DOA$ по двум углам, (так как $\angle BOC = \angle AOD$, как вертикальные, $\angle OCB = \angle OAD$, как накрест лежащие при параллельных AD и BC и секущей AC).

Значит, $\frac{S_{\text{BOC}}}{S_{\text{AOD}}} = k^2 = \frac{4}{9}$, то есть $k = \frac{2}{3}$.

2. Проведем высоту трапеции KE, тогда KO – высота ΔBOC, OE – высота ΔAOD.

$$\frac{\text{KO}}{\text{OE}} = k = \frac{2}{3}.$$

Обозначим одну пятую часть высоты через x, тогда OK = $2x$, OE = $3x$, KE = $5x$.

3. $S_{\text{ABCD}} = \frac{\text{BC+AD}}{2} \cdot \text{KE}$.

$S_{BOC} = \frac{1}{2}$ BC · OK, $\frac{1}{2}$ BC · $2x = 4$, BC = $\frac{4}{x}$;

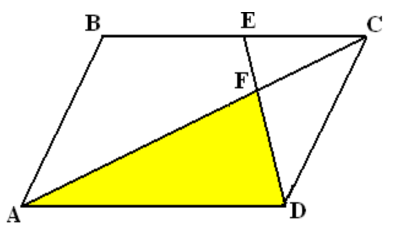
$S_{AOD} = \frac{1}{2}$ AD · OE, $\frac{1}{2}$ AD · $3x = 9$, AD = $\frac{6}{x}$.

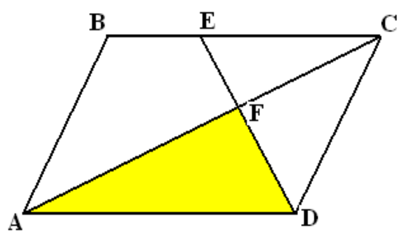
$S_{\text{ABCD}} = \frac{\frac{4}{x} + \frac{6}{x}}{2} \cdot 5x = \frac{10 \cdot 5x}{2x} = 25.$

Ответ: 25.

Задача 6. На стороне BC параллелограмма ABCD выбрана точка E, делящая эту сторону в отношении 2 : 3. Отрезок DE пересекает диагональ AC в точке F. Какую часть площади параллелограмма ABCD составляет площадь треугольника AFD?

Решение.





Поскольку в условии задачи не указано, относительно какого из концов отрезка BC он делится точкой E в отношении 2 : 3, то возможны два случая.

1. Если BE : EC = 2 : 3, то BE = $\frac{2}{3}$ EC и BC = EC + $\frac{2}{3}$ EC = $\frac{5}{3}$ EC.

$\Delta EFC \sim \Delta DFA$ по двум углам (так как $\angle EFC = \angle AFD$ как вертикальные, $\angle ECF = \angle FAD$ как накрест лежащие при параллельных BC и AD и секущей AC).

Значит, $\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{EC} = \frac{BC}{EC} = \frac{5}{3}$. Тогда $FC = \frac{3}{5}AF$ и $AC = \frac{8}{5}AF$.

Диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника, тогда $S_{ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Треугольники AFD и ACD имеют общую вершину D и их основания лежат на одной прямой $\Rightarrow$ их площади относятся как основания, то есть $\frac{S_{AFD}}{S_{ACD}} = \frac{AF}{AC} = \frac{5}{8}$.

Отсюда $S_{AFD} = \frac{5}{8} S_{ACD} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{5}{16} S_{ABCD}$.

2. В случае если $EC : BE = 2 : 3$, решая аналогичным образом, получим

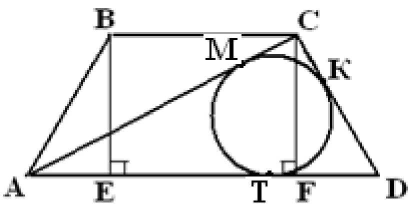
$$S_{AFD} = \frac{5}{14} S_{ABCD}.$$

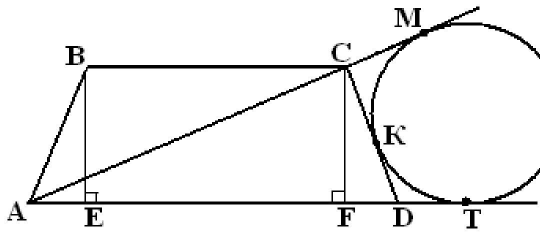
Ответ: $\frac{5}{16}$ или $\frac{5}{14}$.

Задача 7. Дана равнобедренная трапеция ABCD с основаниями BC и AD. Известно, что BC = 44, AD = 100 и AB = CD = 35. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

Решение.

Возможны два случая расположения окружности, заданной в условии.





Пусть точки M и T – точки касания с окружностью прямых AC и AD, тогда CK = CM, AM = AT, DT = DK, как отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки.

Опустим из вершин B и C трапеции на сторону AD перпендикуляры BE и CF соответственно.

Тогда $AE = FD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{100 - 44}{2} = 28$, $AF = AD - FD = 100 - 28 = 72$.

Из ΔABE по теореме Пифагора: BE = $\sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{35^2 - 28^2}$ = 21, CF = BE.

Из ΔACF по теореме Пифагора: AC = $\sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{72^2 + 21^2}$ = 75.

1. Окружность вписана в треугольник ACD.

Пусть CM = CK = x, тогда DK = DT = CD – CK = 35 – x,

AM = AT =AC – MC = 75 – x.

По условию AD = 100, но AD = AT + TD, 35 – x + 75 – x = 100, x = 5, CK = 5.

2. Окружность является вневписанной для треугольника ACD.

Пусть CM = CK = x, тогда DK = DT = CD – CK = 35 – x,

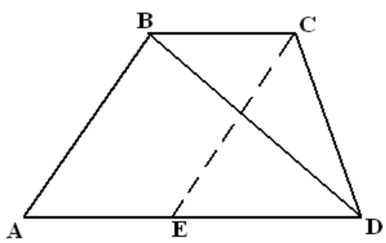
AM = AC + CM = 75 + x, AT = AD + DT = 100 + 35 – x.

Но AM = AT, 75 + x = 100 + 35 – x, 2x = 60, x = 30, CK = 30.

Ответ: 5 или 30.

Задача 8. Дана трапеция ABCD с боковыми сторонами AB = 36, CD = 34 и верхним основанием BC = 10. Известно, что $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD.

Решение.



Проведем CE параллельно AB. Тогда ABCE – параллелограмм, $\angle AEC = \angle ABC$, $\angle DEC = 180^\circ - \angle AEC$.

$\angle DEC = \angle DAB$, как соответственные углы при параллельных прямых AB и CE и секущей AE, $\cos\angle DEC = \cos\angle DAB = \frac{1}{3}$.

Обозначим ED через x.

Из ΔDEC по теореме косинусов:

$$CD^2 = EC^2 + ED^2 - 2EC \cdot ED \cdot \cos\angle DEC,$$

$34^2 = 36^2 + x^2 - 2 \cdot 36 \cdot x \cdot \frac{1}{3}$, $x^2 - 24x + 140 = 0$. Отсюда x = 14 или x = 10.

Получившиеся два значения x означают, что условию задачи соответствуют два чертежа. В одном случае $\angle CDE$ острый, а в другом – тупой.

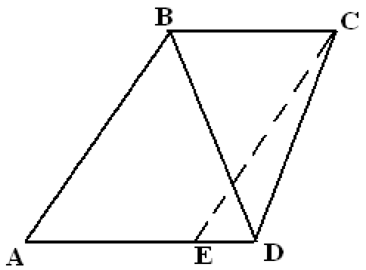
Из ΔABD по теореме косинусов: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle DBA$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x = 14$, тогда $AD = 24$, так как $AD = AE + ED$ и $AE = BC$.

Имеем, $BD^2 = 36^2 + 24^2 - 2 \cdot 36 \cdot 24 \frac{1}{3}$, $BD^2 = 1296$, $BD = 36$.

В этом случае угол D – острый (см. рисунок выше), так как для ΔECD справедливо неравенство $EC^2 < ED^2 + CD^2$, $36^2 < 14^2 + 34^2$, $1296 < 196 + 1156$.



2. Пусть $x = 10$, тогда $AD = 20$.

$BD^2 = 36^2 + 20^2 - 2 \cdot 36 \cdot 20 \frac{1}{3}$, $BD^2 = 1216$, $BD = 8\sqrt{19}$.

В этом случае угол D – тупой, потому что для ΔECD справедливо неравенство $EC^2 > ED^2 + CD^2$, $36^2 > 10^2 + 34^2$, $1296 > 100 + 1156$.

Ответ: 36 или $8\sqrt{19}$.

Задачи для самостоятельного решения

34. В ромбе против острого угла, равного 30°, лежит диагональ равная $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$. Найдите площадь ромба.

35. Радиус окружности, вписанной в ромб, в четыре раза меньше одной из его диагоналей и равен $4\sqrt{3}$. Найдите периметр этого ромба.

36. В параллелограмме TMKP сторона KP равна 10, а сторона MK, равная $6\sqrt{2}$, составляет с диагональю MP угол, равный 45°. Найдите высоту, проведенную к большей стороне параллелограмма.

37. Дан параллелограмм ABCD с тупым углом при вершине B. Синус угла BAD равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, а длина стороны AB равна 6. Найдите периметр треугольника ABC, если площадь параллелограмма равна $20\sqrt{2}$.

38. Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. Радиус окружности, описанной около треугольника BCD, равен $5\sqrt{6}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC, если $\angle BDC = 60°$, а $\angle BAC = 75°$.

39. Сторона AB параллелограмма ABCD равна $2\sqrt{22}$, а его диагонали равны 20 и 24. Найдите сторону BC.

40. Дан параллелограмм ABCD. Точка K лежит на диагонали AC и делит ее в отношении 2 : 1, а точка M – середина стороны AB. Найдите отношение площади треугольника AMK к площади параллелограмма ABCD.

41. В квадрат со стороной $\sqrt{2}$ вписана окружность, а в неё другой квадрат. Найдите площадь второго квадрата.

42. Средняя линия трапеции равна 15, сумма углов при одном из оснований равна 90°. Найдите площадь трапеции, если одна боковая сторона равна $\sqrt{10}$, а разность оснований равна 10.

43. В прямоугольной трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна большему основанию AD. Площадь трапеции равна $150\sqrt{3}$, $\angle D = \angle BCA = 60°$. Найти диагональ AC.

44. Найдите площадь трапеции, если она вписана в окружность с радиусом 17, причем длины отрезков, соединяющих центр окружности с серединами оснований, равны 15 и 8.

45. В равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 36, вписана окружность радиуса 12. Найдите наименьшее основание трапеции.

46. Около окружности описана равнобедренная трапеция, средняя линия которой равна 5, а синус острого угла при основании равен 0,8. Найдите площадь трапеции.

47. Основание AB трапеции ABCD вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна 12, длина боковой стороны BC равна 5. Найдите площадь трапеции.

48. В трапеции большее основание равно 25, одна из боковых сторон равна 15. Известно, что одна из диагоналей перпендикулярна заданной боковой стороне, а другая делит угол между заданной боковой стороной и нижним основанием пополам. Найдите площадь трапеции.

49. В трапеции ABCE основание равно 16, $CE = 8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A, B и C, вторично пересекает прямую AE в точке H. Найдите AC, если $\angle AHB = 60°$.

50. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции пересекаются в точке E. Найдите периметр треугольника AED, если AB = 3, BC = 10, CD = 4, AD = 12.

51. В трапеции ABCD диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD. Окружность, описанная около треугольника ABC, касается прямой CD, пересекает основание AD в точке M и делит его на отрезки AM = 8 и MD = 2. Найдите площадь трапеции ABCD.

52. Дана трапеция ABCD с основаниями AD и BC. Известно, что AC = 4, BD = 5, $\angle CAD = 2\angle BDA$. Найдите длину средней линии трапеции.

53. Через точку пересечения диагоналей квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, составляющие с пересекаемыми сторонами квадрата угол в 60°. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения проведенных прямых со сторонами квадрата, если сторона квадрата равна 3.

54. Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке H. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AHD равна 9, а точка H лежит на диагонали AC так, что AH : HC = 3 : 1.

55. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

56. На окружности радиуса 5 расположены две смежные вершины квадрата. Расстояние между центрами квадрата и окружности равно 7. Вычислите сторону квадрата.

57. Диагональ равнобедренной трапеции равна 5, а площадь равна 12. Найдите высоту трапеции.

58. В трапеции ABCD диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD. Окружность, описанная около треугольника ABC, касается прямой CD, пересекает основание AD в точке M и делит его на отрезки AM = 8 и MD = 2. Найдите площадь трапеции ABCD.

59. В прямоугольнике ABCD AB = 2, BC = $\sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE.

60. Дан параллелограмм ABCD. Биссектрисы его углов A и D делят сторону BC на три равные части. Вычислите стороны параллелограмма, если его периметр равен 40.

61. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2 : 3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

62. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = 0{,}6$.

63. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.

64. Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом 60°. На двух его противоположных сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами 120° при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами.

65. Дан квадрат ABCD. В плоскости квадрата взята точка M, такая, что BM = CM и $\angle AMB = 75°$. Найдите величину угла BMC.

66. Из вершины тупого угла ромба проведены две высоты. Расстояние между их концами равно половине диагонали ромба. Найдите углы ромба.

67. В параллелограмме ABCD угол ACD равен 30°. Известно, что центры окружностей, описанных около треугольников ABD и BCD, расположены на диагонали AC. Найдите угол ABD.

68. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD – в точке O. Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD. Найдите отношение площадей треугольника AOD и четырехугольника ABCD, если OA = 12, OD = 8, CD = 2.

69. Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке C. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите BC.

70. Окружности радиусов 20 и 3 касаются внутренним образом. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке M. Найдите длины отрезков AM и MB, если AB = 32.

71. В окружности, радиус которой равен 15, проведена хорда AB = 24. Точка C лежит на хорде AB так, что AC : BC = 1 : 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

72. Точка O – центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что $\angle OAK = 60°$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.

Контрольная работа

Вариант 1

1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

2. Найдите площадь треугольника ABC, если его стороны AB и AC равны соответственно 12 и 18, а биссектриса AM отсекает от него треугольник ABM, площадь которого равна 20.

3. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, касается его боковых сторон в точках K и A. Точка K делит сторону этого треугольника на отрезки 15 и 10, считая от основания. Найдите длину отрезка KA.

4. Медиана, проведенная из вершины A треугольника ABC, продлена до пересечения в точке K с описанной окружностью. Найдите сторону AC, если AK = 26, BK = 10, медиана равна 18.

5. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60°. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

6. Дан параллелограмм ABCD. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке K, причем AM = 10, BK = 6. Найдите площадь четырехугольника ABMK.

7. Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. Радиус окружности, описанной около треугольника ABD, равен $3\sqrt{6}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AOD, если $\angle ABD = 45°$, а $\angle ACD = 75°$.

8. В равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 36, вписана окружность радиуса 12. Найдите меньшее основание трапеции.

9. Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E лежит на диагонали AC так, что AE : EC = 1 : 3.

10. Дан параллелограмм ABCD, AB = 2, BC = 3, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника ABOD.

Вариант 2

1. Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 20, а проекция другого катета на гипотенузу равна 9.

2. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle MAC = 45°$.

3. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность с центром O. Луч CO пересекает сторону AB в точке K, причем $AK = 6$, $BK = 12$. Найдите периметр треугольника.

4. Около треугольника ABC описана окружность радиуса $4\sqrt{3}$, и в него же вписана окружность. Хорда описанной окружности, проходящая через центр вписанной окружности и вершину A, пересекает сторону BC в точке M. Найдите MC, если $\angle A = 60°$ и $AB = 2AC$.

5. В треугольнике ABC с углом $\angle ABC = 60°$, биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M. На стороне AC взята точка K так, что $\angle AMK = 30°$. Найдите $\angle OKC$, где O – центр окружности, описанной около треугольника AMC.

6. Две стороны параллелограмма равны 13 и 14, а одна из диагоналей равна 15. Найдите площадь треугольника, отсекаемого от параллелограмма биссектрисой его угла.

7. Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. Радиус окружности, описанной около треугольника ABD, равен $7\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника COD, если $\angle BAC = 30°$, а $\angle BCA = 15°$.

8. Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности с радиусом 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10.

9. Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке O. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AOD равна 27, а точка O лежит на диагонали BD так, что $BO : OD = 2 : 3$.

10. Окружность радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и данной окружности.

ОТВЕТЫ

Задачи для самостоятельного решения

1. 4. **2.** 6. **3.** 8. **4.** 15. **5.** $4\sqrt{3}$. **6.** 195. **7.** 56. **8.** 16. **9.** 8. **10.** 4. **11.** 54,6. **12.** 6. **13.** 36. **14.** 4. **15.** 4. **16.** 16. **17.** 10. **18.** 3. **19.** 3. **20.** 6,4 или 8. **21.** 8 или 18. **22.** $8\sqrt{3}$ или 24. **23.** 3 или 6. **24.** 45° или 135°. **25.** 45° или 135°. **26.** 2 или 10. **27.** $\frac{7}{2}$ или $\frac{51}{26}$. **28.** $\frac{1}{3}$ или $\frac{9}{11}$. **29.** 1 или 6. **30.** 60° или 80°. **31.** 45° или 135°. **32.** 45°, 75°, 60° или 135°, 15°, 30° или 120°, 15°, 45° или 105°, 30°, 45°. **33.** 30° или 150°. **34.** 2. **35.** 64. **36.** 8,4. **37.** 20. **38.** 15. **39.** 20. **40.** $\frac{1}{6}$ или $\frac{1}{12}$. **41.** 1. **42.** 45. **43.** 20. **44.** 529 или 161. **45.** 16. **46.** 20. **47.** 45. **48.** 240. **49.** 8. **50.** 54. **51.** 36. **52.** 1,125. **53.** 6. **54.** 48 или 16. **55.** 39 или 9. **56.** 6 или 8. **57.** 3 или 4. **58.** 36. **59.** 1 или 3. **60.** 5; 15 или 8; 12. **61.** $\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\frac{3a^2+2b^2}{5}}$. **62.** 9 или 1. **63.** 40° или 80°. **64.** $\sqrt{\frac{13}{3}}$ или $\sqrt{\frac{19}{3}}$. **65.** 60° или 150°. **66.** 60°; 120° или 30°; 150°. **67.** 30° или 60°. **68.** 2 или $\frac{14}{11}$. **69.** $2\sqrt{2}$. **70.** 24 и 8 или $16 + 4\sqrt{13}$ и $16 - 4\sqrt{13}$. **71.** $\frac{8}{3}$ или $\frac{32}{3}$. **72.** $2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$ или $2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Контрольная работа

Вариант 1

1. 25. **2.** 50. **3.** 12. **4.** 15. **5.** 165° или 105°. **6.** 30. **7.** 6. **8.** 16. **9.** 48 или 144. **10.** $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{13\sqrt{3}}{6}$.

Вариант 2

1. 25. **2.** 21. **3.** 45. **4.** 4. **5.** 30° или 150°. **6.** 78. **7.** 7. **8.** 80. **9.** 75 или 112,5. **10.** 3 или $\frac{4}{3}$.

Глава 7
СТЕРЕОМЕТРИЯ

7.1. Геометрические построения и основные методы решения задач

Стереометрия – это, как известно, геометрия в пространстве. Практически все стереометрические задачи так или иначе редуцируются к планиметрическим задачам: требуемые элементы находятся из решения нескольких планиметрических задач, для этого нужно «побывать» в нескольких плоскостях: сечениях исходной задачи. Таким образом, успех решения задачи во многом зависит от умения выполнять сечения различных пространственных тел.

В планиметрии для решения задачи подходит в качестве изображения любая подобная «оригиналу» фигура. Дело с изображением фигур в стереометрии обстоит гораздо сложнее. Вообще говоря, для детального построения изображений нужно пользоваться методами начертательной геометрии, но это не оправдано – строить изображение в какой-либо проекции, поэтому построения выполняются в произвольной параллельной проекции (направление проекции не определено), которая выбирается тем, кто решает конкретную задачу. При параллельном проецировании сохраняются некоторые свойства фигур. Напомним эти свойства:

1. Точка остается точкой; прямая остается прямой; плоскость остается плоскостью; треугольник остается треугольником; параллелограмм остается параллелограммом; трапеция остается трапецией.

2. Параллельные прямые остаются параллельными; параллельные плоскости остаются параллельными; параллельные прямая и плоскость остаются параллельными.

3. Если фигуры пересекаются, то они остаются пересекающимися.

4. Сохраняется отношение длин параллельных отрезков и отрезков, лежащих на одной прямой.

5. Сохраняется отношение площадей фигур.

Изображение пространственной фигуры должно верно представлять фигуру, должно быть наглядным. Для верности нужно строить в соответствии с законами параллельного проектирования. Наглядность – это субъективное понятие, поэтому здесь нет определенных требований построения фигур.

Очень хорошо изображение пространственных фигур изложено в Приложении 1 учебника Геометрия для 10–11 классов авторов: Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Л.С. Киселевой, Э.Г. Позняка.

Важно также внимательно прочитать и Приложение 2 учебника тех же авторов «Об аксиомах геометрии». Возьмем, например, аксиому: если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую. Эта аксиома очень важна при построении сечений многогранников плоскостями.

При решении стереометрических задач очень важно доказывать все свойства рассматриваемых элементов фигур. Доказывать свойства фигур в пространстве труднее, чем на плоскости. Вот такой пример: если прямые не пересекаются, то на плоскости эти прямые параллельны, а в пространстве такие прямые могут быть еще и скрещивающимися. Для доказательства параллельности нужно еще показать, что эти прямые лежат в одной плоскости.

При решении задач по стереометрии часто невозможно подробно изобразить все данные условия на чертеже. В таких случаях нужно изображать все данные на двух, трех или большем числе рисунков – делать так называемые «выносные» рисунки. Для успешного решения задач стереометрии дополнительно к теоремам и формулам планиметрии важно знать основные теоремы и формулы стереометрии.

Кроме того, следует обратить внимание на необходимость знания всех определений и понимания их сути. Например, такое понятие, как двугранный угол. Почему его измеряют линейным углом двугранного угла? Ответ здесь такой: для однозначности. У круглых тел много общего с окружностью, но и есть свои специфические свойства.

Важное замечание: для успешного решения стереометрических задач (да и задач планиметрических) нужно знать доказательства геометрических теорем, так как любое доказательство теоремы – это, вообще говоря, метод решения подобных задач.

Основные формулы стереометрии:

1. Поверхности.

а) ***призма***: $S_{\text{бок}} = Pl$ (P – периметр перпендикулярного сечения; l – боковое ребро);

б) ***правильная пирамида***: $S_{\text{бок}} = \frac{Pa}{2}$ (P – периметр основания, a – апофема);

в) ***правильная усеченная пирамида***: $S_{\text{бок}} = \frac{P_1+P_2}{2} \cdot a$ (P_1 и P_2 – периметры оснований, a – апофема);

г) ***цилиндр***: $S_{бок} = 2\pi RH$ (R – радиус основания; H – высота цилиндра);

д) ***конус:*** $S_{бок} = \pi Rl$ (l – образующая);

е) ***усеченный конус***: $S_{бок} = \pi(R_1 + R_2)l$ (R_1, R_2 – радиусы оснований; l – образующая);

ж) ***шар***: $S = 4\pi R^2$.

2. Объемы

а) ***призма***: $V = SH$ (S – площадь основания, H – высота);

б) ***пирамида***: $V = \frac{SH}{3}$;

в) ***усеченная пирамида***: $V = \frac{H}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$;

г) ***цилиндр***: $V = \pi R^2H$;

д) ***конус***: $V = \frac{\pi R^2H}{3}$;

е) ***усеченный конус***: $V = \frac{\pi H}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)$;

ж) ***шар***: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Так как все расстояния измеряются по «перпендикуляру», двугранный угол измеряют линейным углом, то следует обратить внимание на «***теорему о трех перпендикулярах***», которой нужно умело пользоваться при решении геометрических задач.

Основные задачи требуют найти или расстояние, или угол, или площадь, либо объем. Рассмотрим примеры решения основных задач.

Задача 7.1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре A_1D_1 взята точка E – середина ребра, а на ребре AB точка P так, что $AP = 2PB$. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой, проходящей через точки E и P, если $AD = AA_1 = 1$ и $AB = 3$.

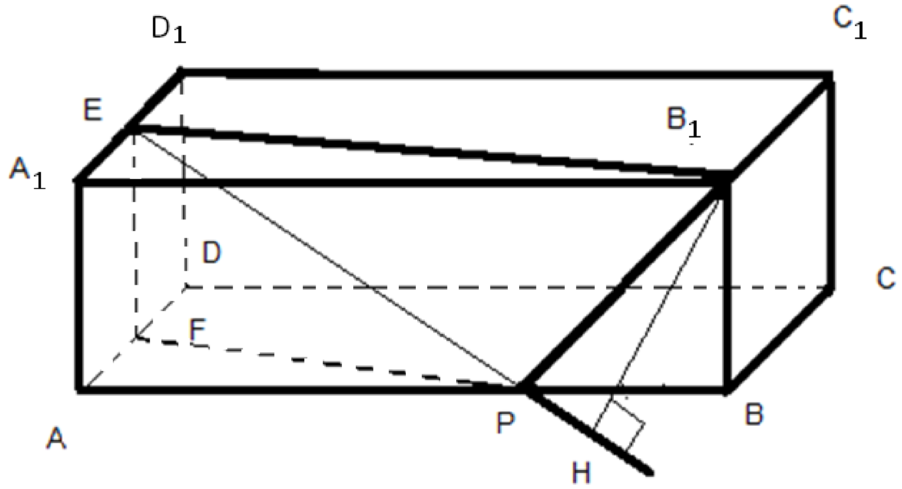


Рис. 7.1

Решение. Опустим перпендикуляр из точки B_1 на прямую EP. Основание этого перпендикуляра обозначим H. Проекцию точки E на ребро AD обозначим F. Имеем: $B_1E=\sqrt{\frac{1}{4}+9}=\frac{\sqrt{37}}{2}$; $PB_1=\sqrt{2}$; $FP=\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$; $EP=\sqrt{1+\frac{17}{4}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$. Так как $B_1E^2=\frac{37}{4}$; $EP^2=\frac{21}{4}$; ${PB_1}^2=2$ и $B_1E^2>$ $>EP^2+{PB_1}^2$ $\Rightarrow$ угол B_1PE – тупой, поэтому точка H расположена так, как изображено на рисунке – вне отрезка EP. Обозначим $PH=x$, тогда можем записать: $B_1H^2={PB_1}^2-x^2$ и $B_1H^2=B_1E^2-(EP+x)^2$, приравнивая правые части двух последних равенств, получим: $2-x^2=\frac{37}{4}-\frac{21}{4}-$ $-x\sqrt{21}-x^2$. Из этого равенства получим $x=\frac{2\sqrt{21}}{21}$, что позволяет найти искомое расстояние $B_1H=\sqrt{{PB_1}^2-PH^2}=\sqrt{2-\frac{84}{441}}=\frac{\sqrt{798}}{21}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{798}}{21}$.

Замечание: при решении задачи был использован прием «опорного» элемента и «алгебраический» метод. Здесь опорным элементом был сам искомый отрезок: его выразили дважды из различных треугольников, что позволило составить уравнение для определения вспомогательного отрезка, зная который, уже легко определить искомый элемент – расстояние от точки B_1 до прямой EP.

Задача 7.2. В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 3 единицы и высотой $2\sqrt{2}$ точка E лежит на ребре AD так, что CE является биссектрисой треугольника ACD. Найдите расстояние от точки E до плоскости CB_1D_1.

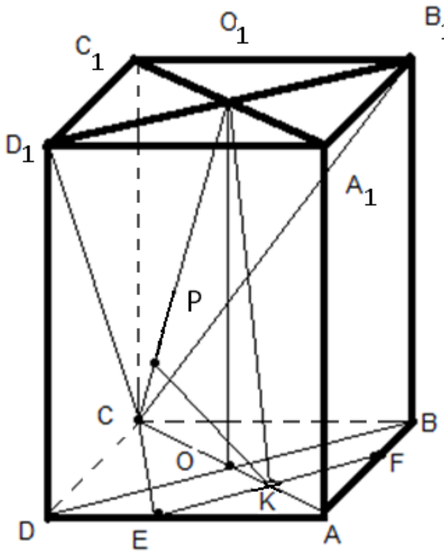


Рис. 7.2

Решение. Проведем через точку E прямую в плоскости основания призмы параллельно плоскости CB_1D_1. Эта прямая пересечет ребро AB в точке F, а диагональ основания AC в точке K. Расстояние от любой точки прямой EF до плоскости CB_1D_1 будет равно искомому расстоянию. Диагональные плоскости ACC_1 и BDB_1взаимно перпендикулярны, поэтому опустим из точки K перпендикуляр на плоскость CB_1D_1. На рисунке это отрезок KP. Этот отрезок можно найти из треугольника KCO_1. Имеем: $CO_1 = \sqrt{CC_1{}^2 + C_1O_1{}^2} = \sqrt{8 + \frac{9}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Как известно, биссектриса внутреннего угла треугольника делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам, поэтому можем записать:

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{3}{3 - AE} = \frac{3\sqrt{2}}{AE} \Rightarrow AE = \frac{3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow AK = \frac{3}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow C =$$

$$= AC - AK = 3\sqrt{2} - \frac{3}{1+\sqrt{2}} = 3.$$

Возьмем в качестве опорного элемента площадь треугольника KCO_1.

$$CK \cdot OO_1 = CO_1 \cdot KP \text{ или } KP = \frac{CK \cdot OO_1}{CO_1} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{5} = \frac{12}{5}.$$

Ответ: $\frac{12}{5}$.

Задача 7.3. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро основания AB = 6, высота AA_1= 8. Найдите расстояние от BC до DB_1.

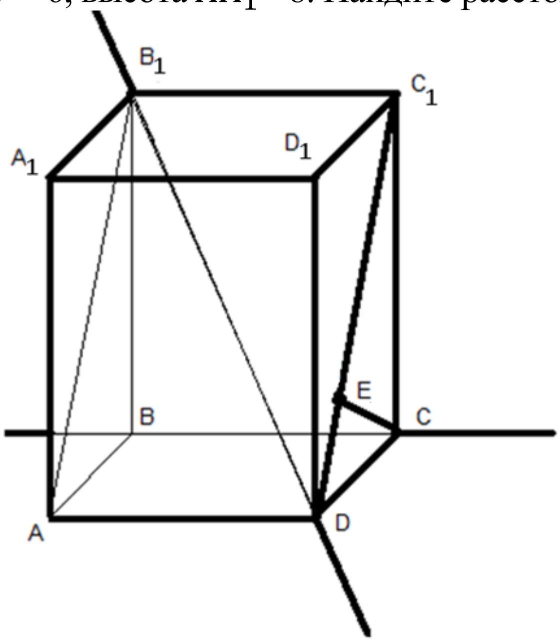


Рис. 7.3

Решение. Выделим на рисунке плоскость ADB_1C_1. Для этого проведем диагонали AB_1 и DC_1. Прямая BC параллельна плоскости ADB_1C_1, а прямая линия DB_1 принадлежит плоскости ADB_1C_1, поэтому расстояние между BC и DB_1 равно высоте CE прямоугольного треугольника DCC_1. Имеем: $DC_1 = \sqrt{DC^2 + {CC_1}^2} = 10.$ В качестве опорного элемента возьмем треугольник DCC_1. Подсчитаем удвоенную площадь треугольника двумя способами и приравняем результаты: $DC_1 \cdot CE = DC \cdot CC_1$. Отсюда $CE = \frac{DC \cdot CC_1}{DC_1} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$.

Ответ: 4,8.

Замечание. Расстояние между скрещивающимися прямыми BC и DB_1 равно длине их общего перпендикуляра, который можно построить на рисунке. Для этого через точку E в плоскости AB_1C_1D нужно провести прямую параллельно BC, которая пересечет DB_1 в некоторой точке P, затем из этой точки P нужно опустить перпендикуляр на прямую BC (параллельно CE). Этот перпендикуляр пересечет BC в некоторой точке Q. Отрезок PQ и будет общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым BC и DB_1.

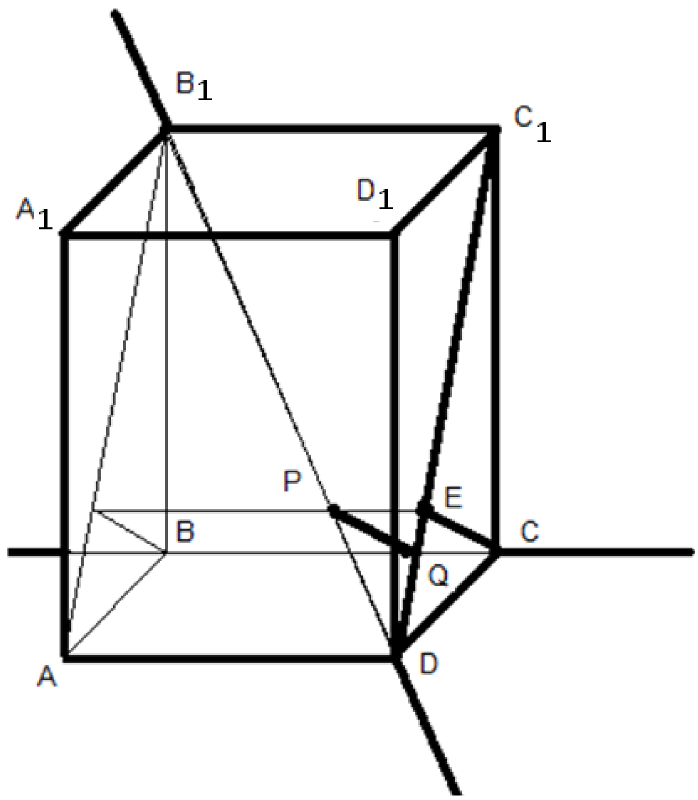


Рис. 7.3(1) Общий перпендикуляр PQ

Задача 7.4. Основанием пирамиды $FABC$ является правильный треугольник ABC со стороной основания 12. Боковое ребро FA длиной $15\sqrt{6}$ перпендикулярно основанию. Найдите расстояние между прямыми FB и AC.

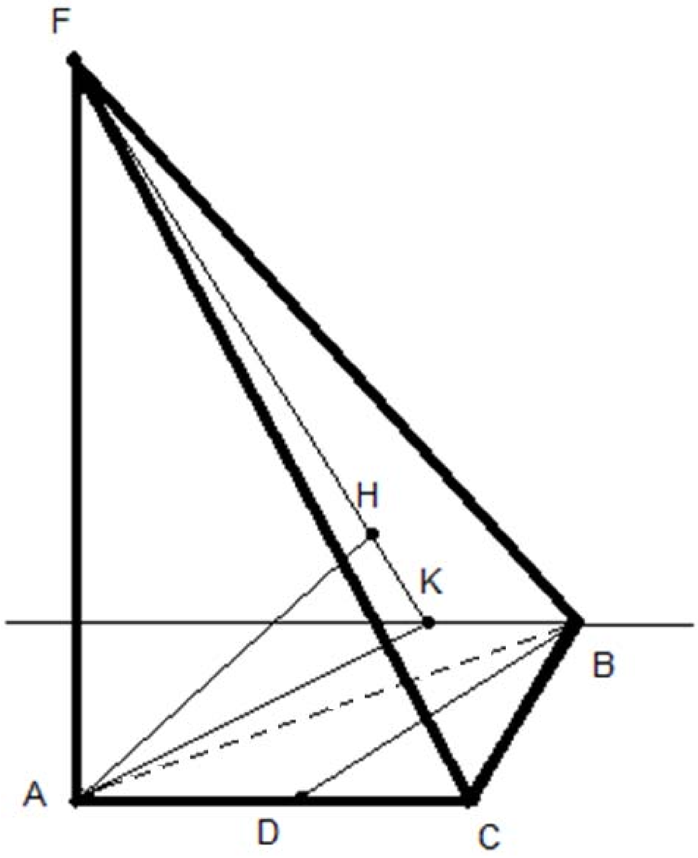


Рис. 7.4

Решение. Через точку B проведем прямую BK параллельно прямой AC. Из той же точки B опустим перпендикуляр BD на прямую AC. Из точки A проведем прямую AK параллельно BD. Плоскость FBK параллельна прямой AC, и эта плоскость содержит прямую FB, поэтому расстояние между FB и AC равно расстоянию между прямой AC и плоскостью FBK. Имеем: $AK \perp AC$; $AC \perp FA \Rightarrow$ плоскость $AFK \perp AC$. Проведем в треугольнике AFK высоту AH из точки A – это и будет искомое расстояние. $AK = BD = 6\sqrt{3}$; $FK = \sqrt{AF^2 + AK^2} = \sqrt{108 + 1350}=27\sqrt{2}$. Приравняем удвоенную площадь треугольника AFK, посчитанную через разные элементы этого треугольника: $AH \cdot FK = FA \cdot AK$. Из этого равенства получаем: $AH = \frac{FA \cdot AK}{FK} = \frac{15\sqrt{6} \cdot 6\sqrt{3}}{27\sqrt{2}} = 10.$

Ответ: 10.

Задача 7.5. В конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объем конуса, если объем шара равен 8.

Решение.

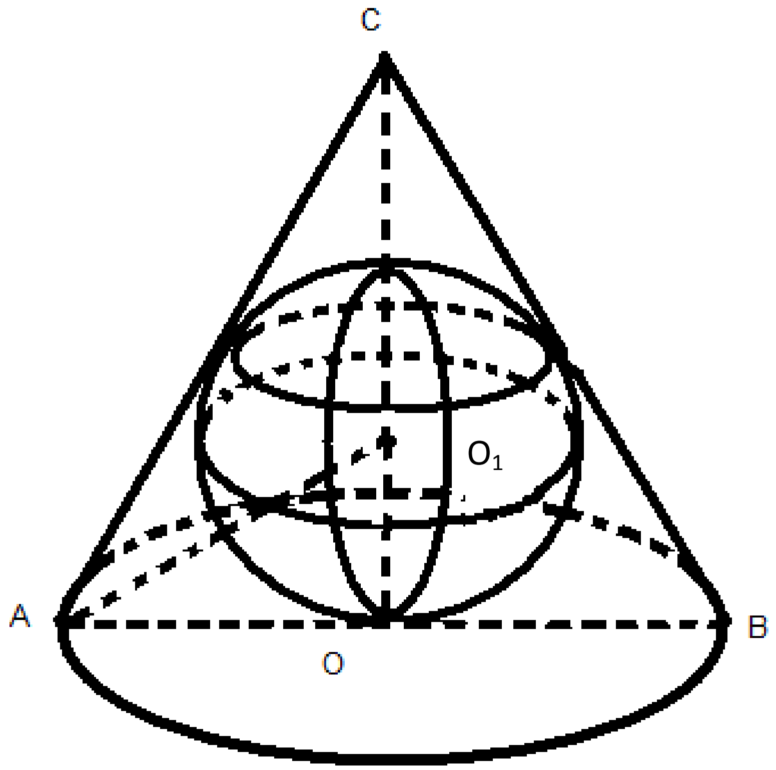


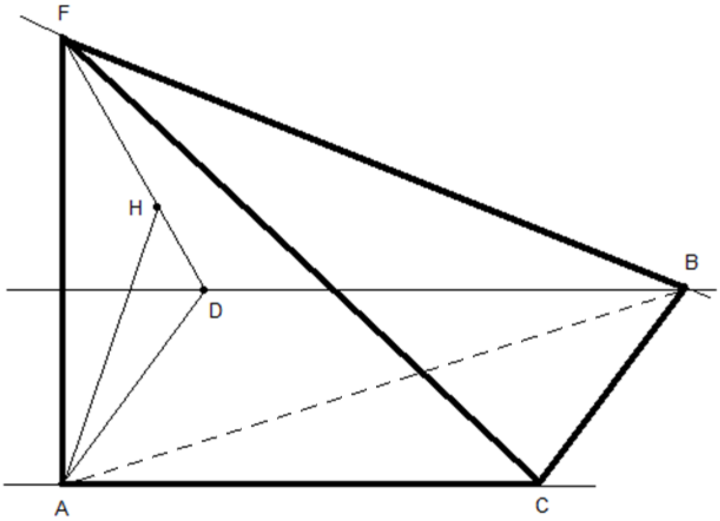
Рис. 7.5

Обозначим радиусы шара и конуса соответственно r и R. Из прямоугольного треугольника AOO_1 найдем зависимость между $r = OO_1$ и $R = AO$ и высотой конуса $H = CO$. Имеем: $R = r\sqrt{3}$; $H = R\sqrt{3} \Rightarrow H = 3r$. По условию задачи $\frac{4}{3}\pi r^3 = 8$, откуда $r^3 = \frac{6}{\pi}$. Объем конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Подставим в эту формулу вместо $R - r\sqrt{3}$, а вместо $H - 3r$, тогда получим: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3r^2 \cdot 3r = 3\pi r^3$. Заменим в последнем соотношении r^3 на $\frac{6}{\pi}$, тогда получим $V = 3\pi r^3 = 3\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 18$.

Ответ: 18.

Задача 7.6. Основанием пирамиды $FABC$ является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = 15$. Тангенс угла BAC равен $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, а высота пирамиды $FA = \frac{15}{2}$. Найдите расстояние между прямыми FB и AC.

Решение.



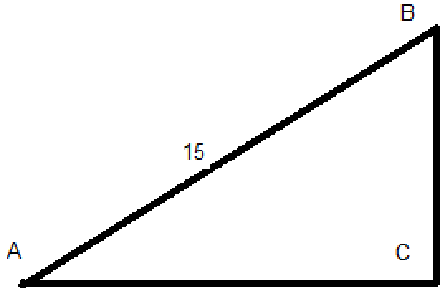


Рис. 7.6

Выполним сначала дополнительные построения. Для этого через точку B проведем прямую параллельно ребру AC, через ребро FA проведем плоскость перпендикулярно прямой AC. Точку пересечения этой плоскости с прямой, проведенной через точку B, обозначим D. Плоскость FDB содержит прямую FB и параллельна прямой AC, поэтому искомое расстояние равно расстоянию от прямой FB до прямой AC, а это расстояние найти легко, так как оно равно высоте треугольника AFD, которая опущена из точки A. Опустим из вершины A перпендикуляр на плоскость FDB. Основание перпендикуляра обозначим H. Имеем: $\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ или $225 = AC^2 + \frac{4}{5}AC^2$, откуда $AC = 5\sqrt{5}$; $BC = 10$. Из треугольника AFD находим $FD = \sqrt{FA^2 + AD^2} = $ $= \sqrt{\frac{225}{4}+100} = \frac{25}{2}$. Далее, возьмем в качестве опорного элемента площадь треугольника AFD: $AF \cdot AD = FD \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{AF \cdot FD}{FD} = \frac{15 \cdot 10}{25} = 6.$

Ответ: 6.

Задача 7.7. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, высота которого $AA_1 = 5$, прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = 2$. На ребре взята точка P так, что $B_1P = 1$. Найдите расстояние между прямыми BD и PC.

Решение.

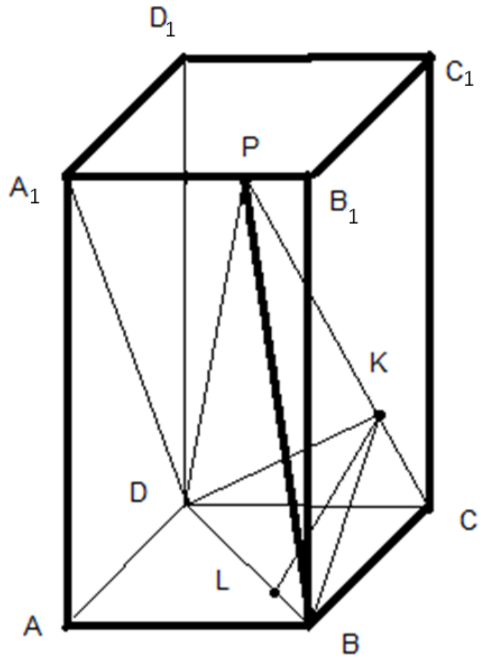


Рис. 7.7

Проведем $BK \perp PC$ и $DK \perp PC$, $KL \perp BD$. Так как $KL \perp PC$ и $KL \perp BD$, то KL – искомое расстояние. Имеем: $BP = \sqrt{BB_1^2 + B_1P^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$; $A_1D = \sqrt{AA_1^2 + AD^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$; $DP = \sqrt{A_1D^2 + A_1P^2} = \sqrt{29+4} = \sqrt{33}$; $PC = \sqrt{BP^2 + BC^2} = \sqrt{26+4} = \sqrt{30}$. Отрезок BK – высоту треугольника BPC – вычислим через опорный элемент – площадь треугольника BPC. Имеем: $BP \cdot BC = PC \cdot BK \Rightarrow BK = \dfrac{BP \cdot BC}{PC} = \dfrac{2\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = 2\sqrt{\dfrac{13}{15}}$. Высоту DK треугольника DPC вычислим точно также, только площадь придется считать довольно громоздко – по формуле Герона:

$$S = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{1}{2}\sqrt{30} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{30} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{30}\right)} \times$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{30} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(1 + \sqrt{30}\right)\frac{3}{2}\left(\sqrt{30} - 1\right)} = \frac{3}{2}\sqrt{30-1} = \frac{3\sqrt{29}}{2}.$$

Имеем далее: $PC \cdot DK = 2S$, откуда $DK = \dfrac{3\sqrt{29}}{\sqrt{30}}$. Расстояние между скрещивающимися прямыми BD и PC вычислим через площадь треугольника KBD, которую придется вычислять по формуле Герона:

$$S_{BDK}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{13}{15}}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{29}{30}}+\frac{1}{2}\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{\frac{13}{15}}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{29}{30}}-\frac{1}{2}\sqrt{13}\right)\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{29}{30}}+\frac{1}{2}\sqrt{13}-\sqrt{\frac{13}{15}}\right)}\times$$

$$\times\sqrt{\left(\sqrt{\frac{13}{15}}+\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{29}{30}}\right)}=\sqrt{\left(3\sqrt{\frac{29\cdot 13}{30\cdot 15}}-\frac{5}{24}\right)\left(3\sqrt{\frac{29\cdot 13}{30\cdot 15}}+\frac{5}{24}\right)}=\sqrt{\frac{377}{50}-\frac{25}{576}}=$$

$$=\frac{\sqrt{107951}}{120}.$$

Далее: $KL\cdot BD=\frac{\sqrt{107951}}{60}$, $KL=\frac{\sqrt{107951}}{60\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{1403363}}{780}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{1403363}}{780}$.

Задача 7.8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания $AB=a$, а высота $AA_1=H+h$, $H>h$. На боковом ребре CC_1 взята точка E так, что $CE=H$. На боковом ребре BB_1 взята точка D так, что $DB=h$. Найдите расстояние между прямыми AB и DE.

Решение.

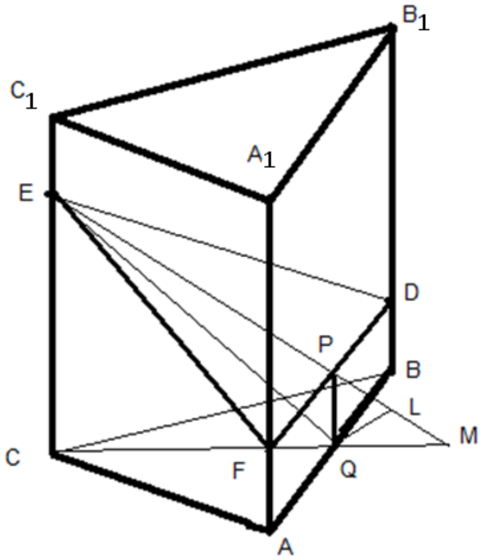


Рис. 7.8

Выполним некоторые построения. Для этого проведем через точку D прямую параллельно прямой AB, которая пересекает ребро AA_1 в точке F. Плоскость FED параллельна прямой AB, поэтому расстояние от прямой AB до прямой ED равно расстоянию от прямой AB до плоскости FED. Треугольник FED равнобедренный, так как $FE=ED$. Через точку – середину FD и точку E проведем прямую до пересечения с плоскостью основания в точке M. Из точки P опустим перпендикуляр на плоскость основания (в точку Q). Точки C,Q,M соединим прямой. Из точки Q опустим перпендикуляр на прямую EPM. Длина этого перпендикуляра и будет искомым расстоянием, так как плоскость CEM перпендикулярна плоскости FED и прямой AB.

Имеем: $\dfrac{EC}{PQ}=\dfrac{CM}{QM}$, $\dfrac{H}{h}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}+QM}{QM}$, $QM=\dfrac{ah\sqrt{3}}{2(H-h)}$, $PM=\sqrt{h^2+\dfrac{3a^2h^2}{4(H-h)^2}}=$

$=\dfrac{h}{2H-h}\sqrt{4(H-h)^2+3a^2}$. $PM\cdot QL=PQ\cdot QM\Rightarrow QL=\dfrac{PQ\cdot QM}{PM}=\dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4(H-h)^2+3a^2}}$.

Ответ: $\dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4(H-h)^2+3a^2}}$.

Задача 7.9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре BB_1 взята точка K так, что $BK=h$. Через точки A, K и C_1 проведена секущая плоскость. Найдите тангенс угла наклона секущей плоскости AKC_1 к плоскости основания $ABCD$, если $AB=a, BC=b, AA_1=H$.

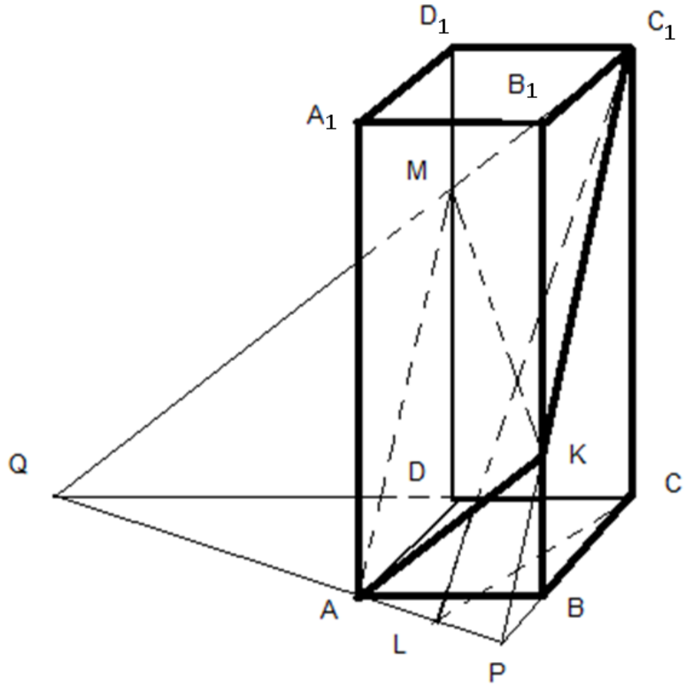


Рис. 7.9

Решение. Сначала выполним некоторые построения: соединим точки A и K. Через точки K и C_1 проведем прямую до пересечения с продолжением прямой, проходящей через точки B и C в точке P. Через точки P и A проведем прямую PA до пересечения с продолжением прямой, проходящей через точки C и D в точке Q. Соединим точки Q и C_1. Прямая QC_1 пересекает ребро DD_1 в точке M. Четырехугольник AKC_1M – это сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью AKC_1.

Из подобия треугольников PBK и PCC_1 имеем: $\frac{PB}{PB+b} = \frac{h}{H}$, откуда $PB = \frac{bh}{H-h}, PC = \frac{bH}{H-h}$.

Из подобия треугольников QDA и QCP имеем: $\frac{QD}{b} = \frac{QD+a}{PC}$, откуда $QD = \frac{a(H-h)}{h}, QC = \frac{aH}{h}$.

Далее, $QP = \sqrt{QC^2 + CP^2} = \frac{H\sqrt{b^2h^2 + a^2(H-h)^2}}{h(H-h)}$. Возьмем в качестве опорного элемента площадь треугольника QCP: $QP \cdot LC = QC \cdot CP$. Здесь L – основание перпендикуляра, опущенного из точки C на QP, то есть высота треугольника QCP. Угол LCC_1 – искомый. Имеем: $LC = \frac{abH}{\sqrt{b^2h^2 + a^2(H-h)^2}}$.

Из треугольника LCC_1 находим искомую величину: $\operatorname{tg}\angle CLC_1 = \frac{ab}{\sqrt{b^2h^2 + a^2(H-h)^2}}$.

Ответ: $\operatorname{tg}\angle CLC_1 = \frac{ab}{\sqrt{b^2h^2 + a^2(H-h)^2}}$.

Задача 7.10.

Ребро основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) $AB = a$. Найдите расстояние между непересекающимися диагоналями A_1B и AC_1 смежных граней ABA_1B_1 и ACA_1C_1, если эти диагонали перпендикулярны между собой.

Решение.

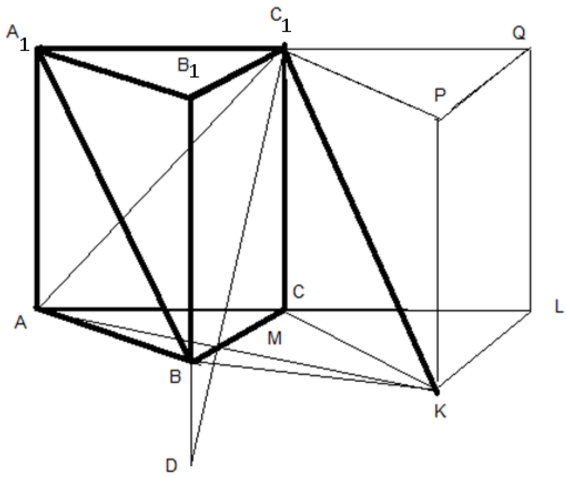


Рис. 7.10

Пририсуем к данной призме точно такую же призму $CKLC_1PQ$ (см. рисунок). В пририсованной призме проведем диагональ грани C_1K. Эта диагональ параллельна диагонали A_1B, поэтому плоскость AKC_1 параллельна диагонали A_1B, тогда искомое расстояние можно найти как расстояние от плоскости до прямой. Фигура $ABKC$ – ромб, поэтому AK и BC перпендикулярны как диагонали ромба и в точке пересечения делятся пополам. Треугольник AKC_1 – прямоугольный равнобедренный, поэтому $MC_1 = AM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ребро CC_1 найдем по теореме Пифагора: $CC_1 = $ $= \sqrt{MC_1{}^2 - MC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Далее, $BD = CC_1, DM = MC_1$. Плоскость DB_1C_1 перпендикулярна AKC_1, поэтому если из точки B опустить перпендикуляр на плоскость AKC_1, то этот перпендикуляр и будет искомой величиной. Обозначим длину этого перпендикуляра d. Найдем это расстояние через площадь треугольника BDM. Можем записать: $BM \cdot BD = DM \cdot d \Rightarrow d = \frac{BM \cdot BD}{DM} = \frac{a \cdot a\sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Задача 7.11. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) равны a. На середине ребра CC_1 взята точка Q. Найдите расстояние между прямой BQ и диагональю AB_1 грани ABB_1A_1.

Решение.

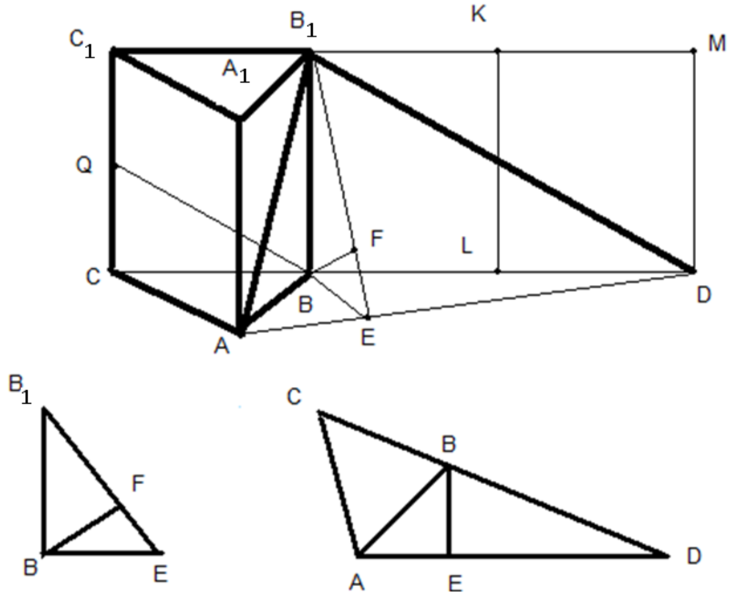


Рис. 7.11

В плоскости CC_1B_1B через точку B_1 проведем прямую B_1D параллельно прямой BQ. Плоскость AB_1D параллельна прямой BQ, поэтому искомое расстояние можно найти из треугольника BB_1E, который перпендикулярен плоскости AB_1D (BE перпендикулярна AD и B_1E перпендикулярна AD). Имеем: $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot cos\angle ABD} = a\sqrt{7}$;
$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD \cdot \sin 120^{\circ} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BE \Rightarrow BE = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$;

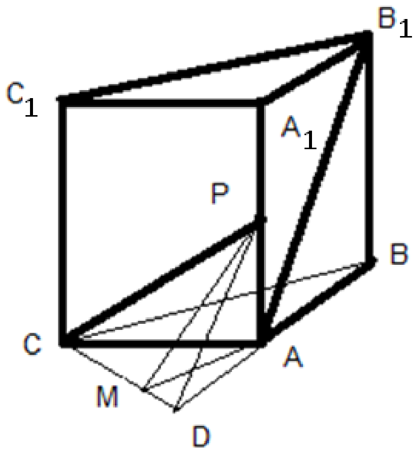
$B_1E = \sqrt{BB_1^2 + BE^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{\sqrt{7}}$; $S_{BB_1E} = \dfrac{1}{2}BB_1 \cdot BE = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$; $S_{BB_1E} = \dfrac{1}{2}B_1E \cdot BF \Rightarrow$

$\Rightarrow BF = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$

Задача 7.12. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1)$ равны a. На середине бокового ребра AA_1 взята точка P. Найдите расстояние от прямой, проходящей через точки A и B_1 до прямой, проходящей через точки C и P.

Решение.



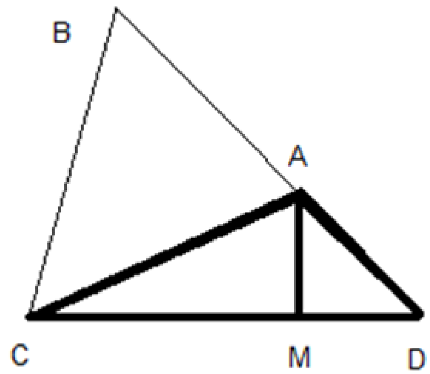


Рис. 7.12

Продолжим прямую AB за точку A. Через точку P проведем в плоскости ABA_1B_1 прямую параллельно прямой AB_1. Точку пересечения обозначим буквой D. Плоскость CPD параллельна прямой AB_1, поэтому искомое расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и CP равно расстоянию между плоскостью CPD, содержащей прямую CP и параллельной этой плоскости прямой AB_1. Имеем:

$$CD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} - 2a \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.\ S_{ACD} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Опустим из точки P на прямую CD перпендикуляр PM и из точки A на прямую CD перпендикуляр AM. Можем записать: $S_{ACD} = \frac{1}{2}CD \cdot AM$. Приравняем площадь треугольника, посчитанную двумя способами, получим: $\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot AM = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$, откуда $AM = \frac{a\sqrt{21}}{14}$. Далее, $PM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{21a^2}{196}} =$ $= a\sqrt{\frac{5}{14}}$. Приравняем двойные площади треугольника AMP, посчитанные независимо: $PM \cdot d = AM \cdot AP$, откуда получим требуемое расстояние между скрещивающимися прямыми: $d = \frac{AM \cdot AP}{PM} = \frac{a\sqrt{30}}{20}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{30}}{20}$.

Задача 7.13. Четыре сферы радиуса *r* расположены так, что каждая из них касается трех других. Найдите радиус сферы, которая касается каждой из данных сфер и содержит их внутри себя.

Решение.

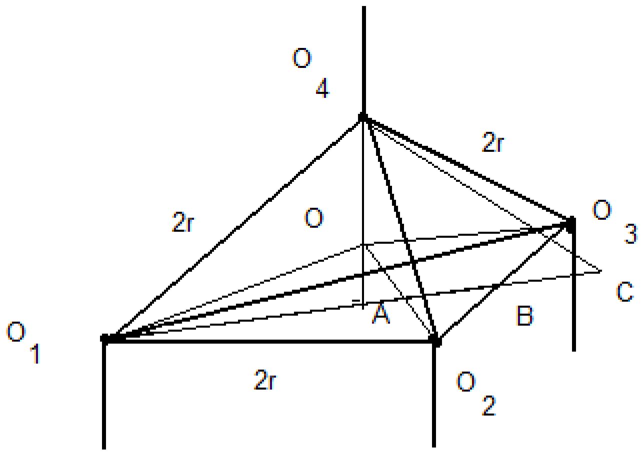


Рис. 7.13

Обозначим центры четырех сфер буквами O_1, O_2, O_3, O_4, а центр сферы, которая касается всех четырех сфер буквой O. Точка O находится на одинаковом расстоянии от центров всех сфер, поэтому эта точка будет центром описанной окружности около треугольника O_1O_4C. Имеем:

$$O_1B = \frac{2r\sqrt{3}}{2};\ O_1A = \frac{2}{3}O_1B = \frac{2r\sqrt{3}}{3};\ O_1C = \frac{4r\sqrt{3}}{3};$$

$$AO_4 = \sqrt{4r^2 - \frac{4r^2}{3}} = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{3}};\ S_{O_1O_4C} = \frac{1}{2}O_1C \cdot AO_4 = \frac{4r^2\sqrt{2}}{3};$$

$$O_1O = \frac{2r \cdot 2r \cdot \frac{4r\sqrt{3}}{3}}{4 \cdot \frac{4r^2\sqrt{2}}{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{6}}{2}.$$

Радиус сферы, которая касается каждой из четырех сфер и содержит их внутри себя, больше, чем O_1O на радиус «малых» сфер, поэтому

$$R = \frac{r\sqrt{6}}{2} + r = r\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right).$$

Ответ: $r\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right)$.

Задача 7.14. Конус, объем которого равен V, вписан в шар. Найдите объем шара, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α.

Решение.

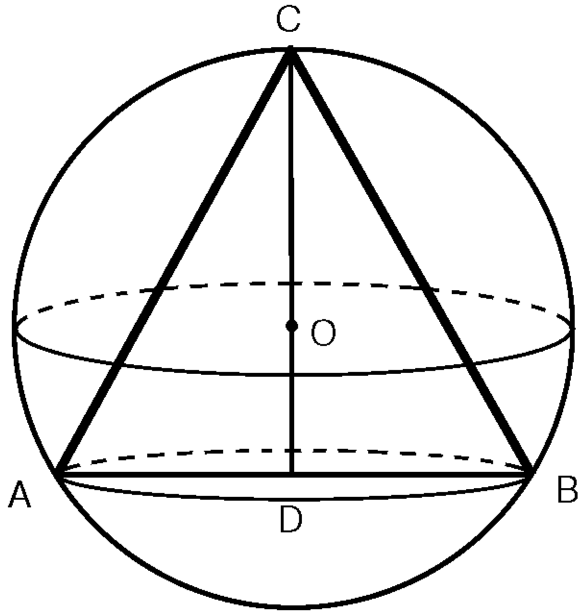


Рис. 7.14

Обозначим радиус основания конуса R, а высоту H. Радиус шара найдем как радиус описанной окружности вокруг треугольника ABC. Для этого выразим стороны треугольника через радиус основания конуса:

$$AC = \frac{R}{\cos\alpha}\ ;\ BC = \frac{R}{\cos\alpha};\ AB = 2R.$$

Радиус шара получим: $R_{\text{ш}} = \dfrac{\frac{R}{\cos\alpha}\cdot\frac{R}{\cos\alpha}\cdot 2R}{4\cdot R\cdot R\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{R}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

Объем шара равен: $\frac{4}{3}\pi R_{\text{ш}}^3 = \frac{4}{3}\pi\,\dfrac{R^3}{8\sin^3\alpha\cdot\cos^3\alpha}$.

Так как $\frac{1}{3}\pi R^2 H = V$ или $\pi\cdot R^3\cdot\operatorname{tg}\alpha = 3V$.

Заменим в объеме шара πR^3 на $3V\operatorname{ctg}\alpha$, получим ответ $\dfrac{V}{2\sin^4\alpha\cos^2\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{V}{2\sin^4\alpha\cos^2\alpha}$.

Задача 7.15. Шар вписан в конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем шара, если объем конуса равен V.

Решение.

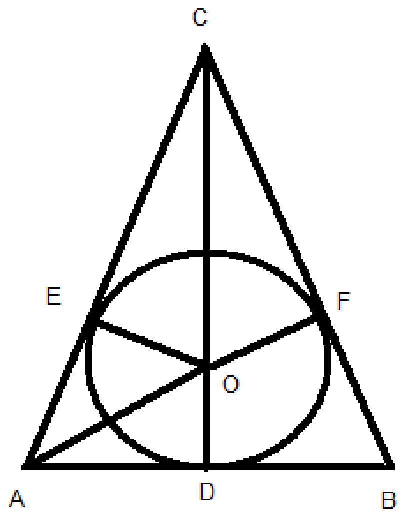


Рис. 7.15

Рассмотрим осевое сечение конуса. Обозначим радиус основания конуса буквой R, высоту конуса буквой H, радиус шара буквой r, тогда можем записать:

$$H = R\text{tg}\alpha;\ r = R\text{tg}\frac{\alpha}{2};\ V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\text{tg}\alpha;\ \pi R^3 = \frac{3V}{\text{tg}\alpha};$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{tg}^3\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3V}{\text{tg}\alpha}\cdot\text{tg}^3\frac{\alpha}{2} = 4V\text{ctg}\alpha\cdot\text{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $4Vctg\alpha \cdot tg^3\frac{\alpha}{2}$.

Задача 7.16. Даны три плоских угла трехгранного угла $SABC$: $\angle BSC = \alpha$; $\angle CSA = \beta$; $\angle ASB = \gamma$. Найдите двугранные углы этого трехгранного угла.

Решение.

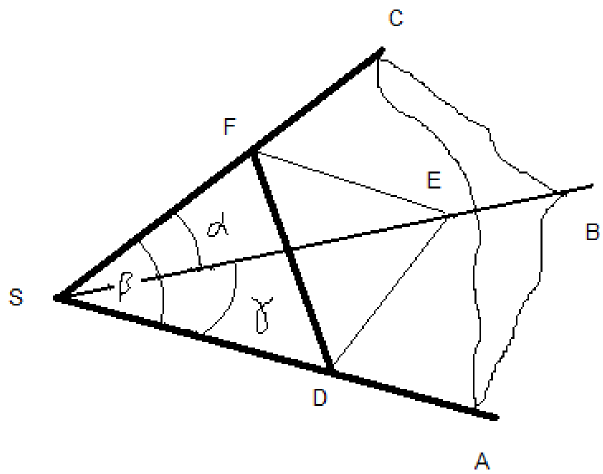


Рис. 7.16

Обозначим двугранные углы при ребрах SA, SB, SC соответственно через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Проведем через произвольную точку F ребра SC плоскость DFE, перпендикулярную к SC. Угол $\angle DFE = \varphi_3$. Воспользуемся теоремой косинусов и определим ED^2 из треугольников EFD и ESD, а затем приравняем полученные выражения, получим: $FE^2 + FD^2 - 2 \cdot FE \cdot FD \cdot \cos\varphi_3 = SE^2 + SD^2 - 2 \cdot SE \cdot SD \cdot \cos\gamma$.

Отсюда получаем:

$2 \cdot FE \cdot FD \cdot \cos\varphi_3 = 2 \cdot SE \cdot SD \cdot \cos\gamma - (SE^2 - FE^2) - (SD^2 - FD^2)$ или $2 \cdot FE \cdot FD \cdot \cos\varphi_3 = 2 \cdot SE \cdot SD \cdot \cos\gamma - 2 \cdot SF^2$.

Имеем очевидные равенства:

$$FE = SF \cdot \mathrm{tg}\alpha;\ FD = SF \cdot \mathrm{tg}\beta;\ SE = \frac{SF}{\cos\alpha};\ SD = \frac{SF}{\cos\beta}.$$

После подстановки получаем:

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \cos\varphi_3 = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - 1.$$

Отсюда получим:

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

Совершенно аналогично получим:

Ответ: $\cos\varphi_1 = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}$, $\cos\varphi_2 = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}$,

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

Задача 7.17. На ребре двугранного угла взят отрезок AB. В одной из граней взята точка M, в которой прямая, проведенная из точки A под углом α к AB, пересекает прямую, проведенную из B под прямым углом к AB. Определите величину двугранного угла, если прямая AM наклонена ко второй грани двугранного угла под углом β.

Решение.

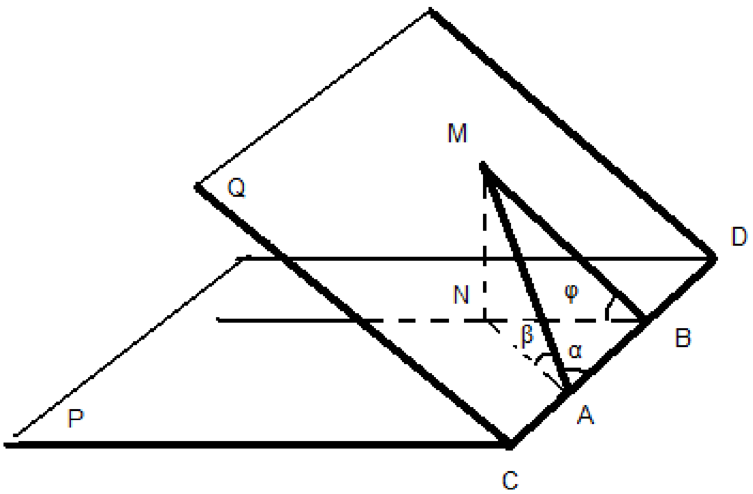


Рис. 7.17

Пусть точка M принадлежит грани Q. По условию прямая AM образует с AB угол α, а прямая MB перпендикулярна к AB. Проведем через прямую MB плоскость MBN перпендикулярно к ребру двугранного угла и опустим из точки M перпендикуляр MN на BN. Прямая MN перпендикулярна и к NA и $\angle MAN = \beta$. Угол $\varphi = \angle MBN$ найдем из треугольника MBN:

$$MN = AM \cdot \sin\beta\ ;\ BM = AM \cdot \sin\alpha\ ;$$

$$\sin\varphi = \frac{MN}{BM} = \frac{AM \cdot \sin\beta}{AM \cdot \sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha};\ \ \varphi = \arcsin\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right).$$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$.

Задача 7.18. В шаре радиуса R из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Определите длины этих хорд.

Решение.

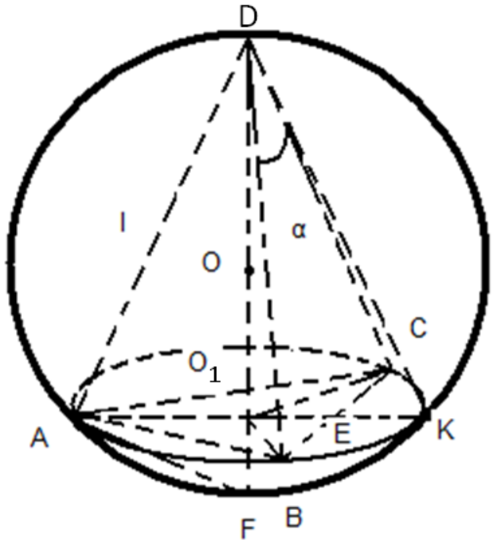


Рис. 7.18

Обозначим длину равных хорд DA, DB, DC через l. Из равнобедренных треугольников DAB, DAC и DBC получим: $AB = BC = AC = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$. Это значит, что треугольник ABC – равносторонний. Опустим перпендикуляр из точки D на плоскость ABC. Так как DA, DB и DC – равные наклонные к плоскости ABC, то они имеют и равные наклонные $O_1A = O_1B = O_1C$, поэтому точка O_1 является как центром вписанного, так и описанного круга треугольника ABC. Точки A, B и C лежат на поверхности шара, а это означает, что $OA = OB = OC$, где O – центр шара. Если опустить из точки O перпендикуляр на плоскость ABC, то основание этого перпендикуляра совпадет с точкой O_1, следовательно, O_1O и DO_1 лежат на диаметре шара DF. Из прямоугольного треугольника DAF находим: $DA^2 = l^2 = 2R \cdot DO_1$, отрезок DO_1 можно найти и из треугольника ADO_1: $DO_1 = \sqrt{AD^2 - AO_1{}^2}$. Отрезок AO_1 легко найти из треугольника ABC: $AO_1 = 2l\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2l}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}$. Тогда $DO_1 = l\cdot\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. Подставим это выражение в равенство $l^2 = 2R\cdot DO_1$, получим:

$$l = 2R\cdot\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $2R\cdot\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Замечание: задачу можно решить через треугольник DAK, связав l и R по формуле: $R = \frac{abc}{4S}$, выразив a, b, c и S через l.

Задача 7.19. Найдите двугранный угол α между основанием и боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды, если радиус описанного около пирамиды шара в три раза больше радиуса вписанного в нее шара.

Решение.

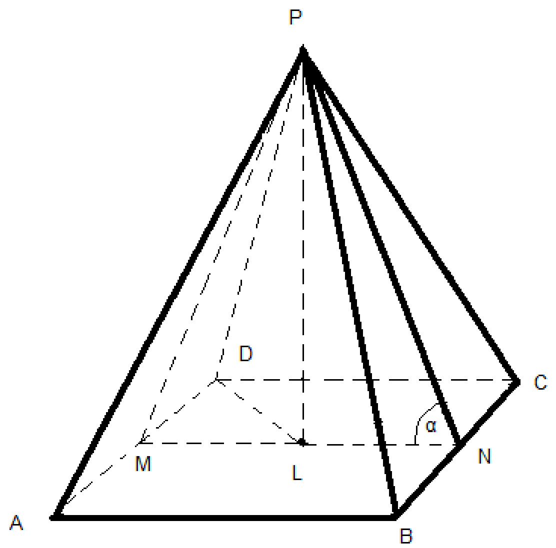


Рис. 7.19(1)

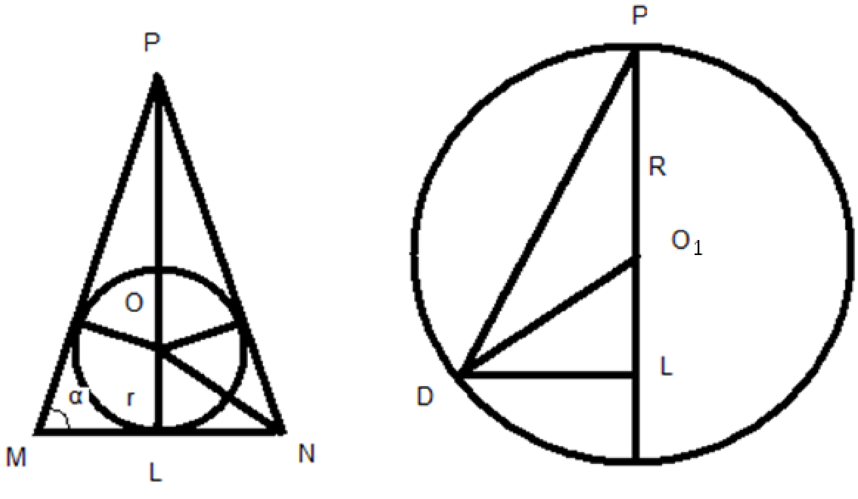


Рис. 7.19(2)

Пирамида приведена на рисунке 7.19(1), а на рисунке 7.19(2) показаны сечения пирамиды и вписанного и описанного шаров (только нужные фрагменты, а не все полные сечения). Из прямоугольных треугольников PLN и LON можем найти:

$$LN = r \cdot \text{ctg}\frac{\alpha}{2}, PL = KN \cdot \text{tg}\alpha = r \cdot \text{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \text{tg}\alpha.$$

Из треугольника PDL имеем: $DL = LN \cdot \sqrt{2} = r\sqrt{2}\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$. По теореме Пифагора можно записать: $DO_1^2 = O_1L^2 + DL^2$ или $R^2 = (PL - R)^2 + {} + DL^2$, но $O_1L = PL - R$, тогда

$$R^2 = (PL - R)^2 + DL^2.$$

Раскроем скобки в последнем равенстве, приведем подобные и выразим R:

$$R = \frac{PL^2 + DL^2}{2PL}.$$

По условию задачи можем записать: $3\,r = \frac{PL^2+DL^2}{2PL}$, или

$$3r = \frac{r^2 \cdot \text{ctg}^2\frac{\alpha}{2} \cdot \text{tg}^2\alpha + 2r^2 \cdot \text{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{2r \cdot \text{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \text{tg}\alpha}.$$

Перейдем в последнем равенстве к $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$ и, упростив, получим уравнение для определения угла α: $7\text{tg}^4\frac{\alpha}{2} - 6\text{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1 = 0$, откуда получаем два корня, которые подходят для решения задачи:

$$\text{tg}\frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{7}} \text{ и } \text{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{7}}.$$

Ответ: $\alpha_1 = 2\text{arctg}\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{7}}$; $\alpha_2 = 2\text{arctg}\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{7}}$.

Задача 7.20. Все плоские углы трехгранного угла равны между собой и равны 90º. Этот трехгранный угол пересечен плоскостью γ так, что в сечении получился равносторонний треугольник, сторона которого равна a. Найдите объем полученной пирамиды.

Решение.

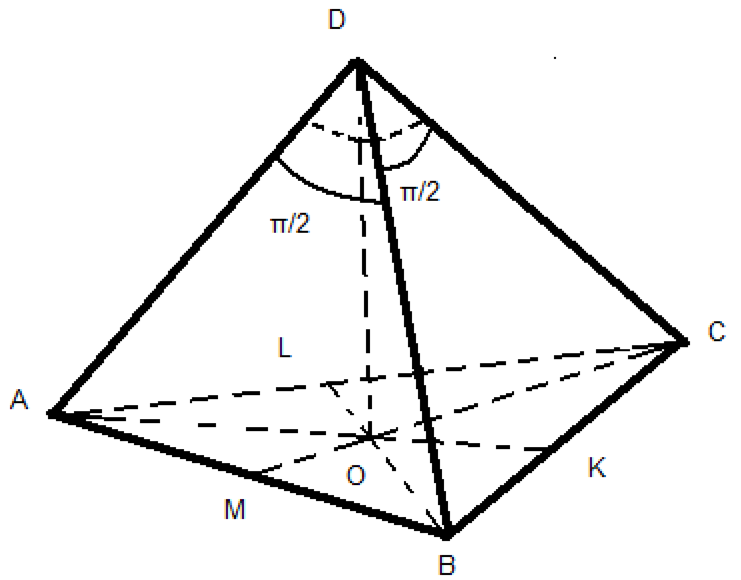


Рис. 7.20(1)

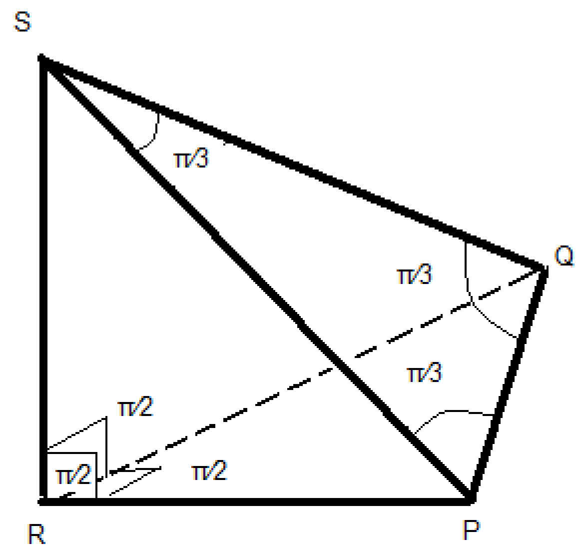


Рис. 7.20(2)

Для решения задачи обратимся сначала к «традиционному» рисунку, когда вершиной пирамиды служит трехгранный угол с плоскими углами по 90º (рис. 7.20(1)). Для решения задачи пришлось бы найти высоту правильной пирамиды, а для этого сначала нужно найти боковое ребро, апофему, высоту основания, радиус вписанной окружности в основание и, наконец, по теореме Пифагора высоту пирамиды. Все эти задачи не трудные, но их много, поэтому такой подход требует для решения значительных усилий. Для достижения результата в этой задаче лучше за основание принять не равносторонний треугольник, а любой из прямоугольных треугольников и задачу решать, обратившись к рис. 7.20(2): в этом случае задача становится устной, так как в основании лежит прямоугольный треугольник, катеты которого находятся сразу: $RP = RQ = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Высота пирамиды тоже равна $RS = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Можно записать ответ: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$.

Задача 7.21. Прямая, которая касается боковой поверхности конуса, составляет с образующей конуса, проходящей через точку касания, угол θ. Какой угол β образует эта прямая с плоскостью основания конуса, если образующая конуса наклонена к плоскости основания конуса под углом α?

Решение.

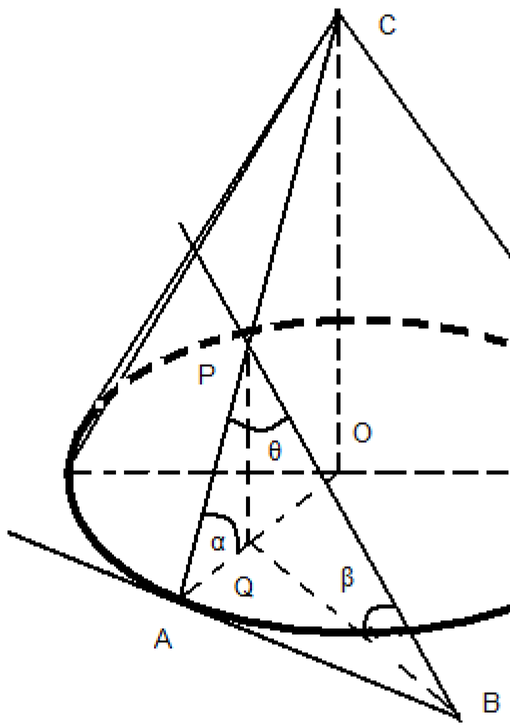


Рис. 7.21

Проведем через точку касания P перпендикуляр к основанию. Основание перпендикуляра обозначим Q. Образующая конуса CA, касательная к конусу PB. Треугольник PAB – прямоугольный (по теореме о трех перпендикулярах), имеем: $AP = \frac{PQ}{\sin\alpha}$. $PB = \frac{AP}{\cos\theta}$, $PB = \frac{PQ}{\sin\alpha \cdot \cos\theta}$, $\sin\beta = \frac{PQ}{PB}$, $\sin\beta = PQ : \frac{PQ}{\sin\alpha \cdot \cos\theta} = \sin\alpha \cdot \cos\beta$.

Ответ: $\beta = \arcsin(\sin\alpha \cdot \cos\beta)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1 ($AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1$). На ребре BB_1 взята точка E, а на ребре AA_1точка F так, что длины отрезков равны $BE=\frac{1}{3}$, $A_1F=\frac{1}{4}$. Через точки E, F и центр куба проведена плоскость α. Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости α.

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{170}}$.

2. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1 ($AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1$). На ребре BB_1 взята точка E, а на ребре AA_1точка F так, что длины отрезков равны $BE=\frac{1}{3}$, $A_1F=\frac{1}{4}$. Через точки E, F и центр куба проведена плоскость α. Найдите расстояние от точки D до плоскости α.

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{170}}$.

3. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1 ($AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1$). На ребре BC взята точка E, а на ребре C_1D_1точка F так, что длины отрезков равны $BE=\frac{1}{8}$, $D_1F=\frac{1}{5}$. Через точки E, F и центр куба проведена плоскость α, которая пересекает прямые, лежащие на ребрах AD, CD, DD_1 соответственно в точках P, Q, R. Найдите объем пирамиды $DPQR$.

Ответ: $\frac{36}{55}$.

4. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $3\sqrt{2}$, плоский угол при вершине равен $arccos\,\frac{1}{3}$. Шар касается всех боковых ребер пирамиды и плоскости основания. Найдите площадь сечения шара плоскостью боковой грани пирамиды.

Ответ: π.

5. В правильной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна a, боковое ребро – $2a$. Точки S, B и C лежат на боковой поверхности конуса, имеющего вершину в точке A. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

Ответ: $2\arcsin\left(\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$.

6. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB=a, AA_1=b$. Найдите расстояние от вершины B_1 до плоскости, проходящей через точки A, C и D_1.

Ответ: $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$.

7. Радиус основания цилиндра равен r, а высота его $5r$. Около цилиндра описан параллелепипед, отношение объема которого к объему цилиндра равно $5:\pi$. Найдите длину отрезка его большей диагонали, лежащего внутри цилиндра.

Ответ: $3r$.

8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. O – точка пересечения диагоналей AB_1 и BA_1 грани AA_1B_1B. Найдите длину стороны сечения, проходящей через точку O, и площадь этого сечения, если известно, что плоскость сечения α параллельна диагонали куба DB_1, параллельна диагонали верхнего основания куба A_1C_1.

Ответ: $\frac{a\sqrt{5}}{2}$; $\frac{7a^2\sqrt{6}}{16}$.

9. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна a и боковое ребро равно b. Вычислите площадь сечения, проходящего через середины ребер AB и BC параллельно ребру SB.

Ответ: $\frac{ab}{4}$.

10. Грани двугранного угла, имеющего величину α, касаются боковой поверхности конуса. Угол между ребром двугранного угла и осью конуса равен β. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

Ответ: $2\arcsin\left(\sin\beta \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

11. В пирамиде $KABC$ ребро KA перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите объем шара, проходящего через вершины K, A, B и середину ребра BC, если известно, что $KB = KC, BC = \frac{2}{\sqrt[6]{6}}$ и ребро KC делится этим шаром в отношении 2:1, считая от вершины K.

Ответ: π.

12. Шар радиуса 2 касается всех боковых ребер правильной треугольной пирамиды и плоскости ее основания. Найдите объем пирамиды, если известно, что расстояние от центра шара до ее вершины равно 3.

Ответ: $25\sqrt{3}$.

13. Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно a. Найдите площадь сечения, проходящего через середины двух смежных сторон основания и середину высоты пирамиды.

Ответ: $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

14. Правильный тетраэдр вписан в цилиндр так, что одно из его ребер совпадает с образующей цилиндра, а вершины лежат на его поверхности. Найдите объем цилиндра, если длина ребра тетраэдра равна a.

Ответ: $\frac{9}{32}\pi a^3$.

15. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, а угол между прямыми, на которых лежат непересекающиеся диагонали двух смежных граней, равен 90^0. Найдите расстояние между этими прямыми.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

16. В прямой правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1$) ребро основания равно 3 и высота равна 7. На боковом ребре BB_1 взята точка E, на ребре CC_1 взята точка D так, что длина отрезка BE равна 2, а длина отрезка C_1D равна 1. Через точки D, E и вершину A проведена плоскость α. Найдите расстояние от вершины призмы A_1 до плоскости α.

Ответ: $\frac{21\sqrt{417}}{139}$.

17. Радиус земного шара приблизительно равен 6370 километров. Томск находится на 56^0 северной широты. Найдите радиус круга широты для Томска.

Ответ: 3561.

18. Радиус земного шара 6370 км. Найдите длину тропика (широта 27º27') и полярного круга (широта 66º33').

Ответ: 36710 км; 15930 км.

19. Радиус основания конуса равен R, образующая его наклонена к плоскости основания под углом α. В этот конус вписан ряд шаров так, что первый шар касается боковой поверхности конуса и его основания, а каждый следующий шар касается боковой поверхности конуса и предыдущего шара. Найдите предел, к которому стремится сумма объемов этих шаров, если число их бесконечно увеличивается.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^6\frac{\alpha}{2}}$.

20. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найдите угол между этими диагоналями.

Ответ: $\arccos(\sin\alpha \cdot \sin\beta)$

Список литературы

1. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010. – 80 с.
2. Ткачук В.В. Математика абитуриенту. – 7-е изд., исправленное и дополненное. – М.: МЦНМО, 2000. – 892 с.
3. Антонов Н.П., Выгодский М.Я., Никитин В.В., Санкин А.И. Сборник задач по элементарной математике. Издание девятое, стереотипное. – М.: Физматгиз, 1963. – 528 с.
4. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Геометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей. – 3-е изд., переработанное и доп. – М.: ABF, 1995. – 352 с.: ил. – ISBN 5-87484-024-9.
5. Давыденко И.О. Пособие по математике для поступающих в высшие учебные заведения. – Томск: Изд-во ТГУ, 1973. – 172 с.

Глава 8
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

8.1. Понятие параметра

Многие процессы и явления описываются уравнениями с параметрами. Рассмотрим в качестве примеров такие уравнения: $s = 20t + 5t^2, t \geq 0$; $y = 3x + 5$. Первое их этих уравнений задаёт путь равноускоренного движения с начальной скоростью 20 м/с и ускорением 10 м/с^2. Причём в начальный момент времени пройденное расстояние равно нулю. Второе уравнение задаёт прямую линию, проходящую через точку $M(0; 5)$ под углом $\mathrm{arctg}3$ к положительному направлению оси OX, которую можно рассматривать в качестве траектории некоторого движения материальной точки.

Рассмотрим теперь два таких уравнения:

1) $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$;

2) $y = kx + b$.

Эти два уравнения содержат предыдущие два уравнения как частные случаи соответственно при $v_0 = 20$ м/с, $a = 10$ м/с^2 и $k = 3, b = 5$. При других значениях величин v_0 и a получим другое равноускоренное движение, при других k и b получим другую траекторию движения. Первое уравнение описывает совокупность всех равноускоренных движений, а каждая пара v_0 и a выделяет из всего множества движений конкретное движение. Аналогично, каждая пара k и b определяет конкретную прямую – траекторию движения.

Величины v_0 и a в механике называют параметрами равноускоренного движения; величины k и b в геометрии называют параметрами семейства прямых линий. Естественно было назвать эти величины параметрами соответствующих уравнений.

Пусть имеется функция $f(a, x)$, зависящая от неизвестного x и параметра a.

Выражение $f(a, x) = 0$ будем называть уравнением с параметром.

Выражение $f(a, x) > 0$ или $f(a, x) < 0$ будем называть строгим неравенством с параметром.

Выражение $f(a, x) \geq 0$ или $f(a, x) \leq 0$ будем называть нестрогим неравенством с параметром.

Уравнения и неравенства с параметрами являются наиболее трудными задачами. Решение таких задач представляет, вообще говоря, исследование функций, из которых составлено уравнение или неравенство. При решении задач с параметрами приходится всё время производить различные последовательные рассуждения, составляя логическую схему решения задачи. Наиболее распространёнными методами решения таких задач служат метод интервалов и метод областей. В силу того, что в школьном курсе довольно подробно изучаются линейная и квадратичная функции, очень много задач сводится к исследованию этих функций. Напомним некоторые факты из школьного курса математики.

8.2. Примеры известных исследований из школьного курса математики

Исследование линейного уравнения

Линейное уравнение: $ax + b = 0$. Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много решений $x \in R$; если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение решений не имеет, $x \in \emptyset$; если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = -\frac{b}{a}$.

Исследование линейного неравенства

Линейное неравенство: $ax + b > 0$. Если $a = 0$ и $b > 0$, то $x \in R$; если $a = 0$ и $b \leq 0$,то решений нет, $x \in \emptyset$; если $a > 0$,то $x > -\frac{b}{a}$; если $a < 0$,то $x < -\frac{b}{a}$.

Исследование квадратного уравнения

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Здесь три параметра. В зависимости от соотношений на эти три параметра возможны различные случаи:

1) решения нет среди действительных чисел, если $D = b^2 - 4ac < 0$;

2) существует единственное решение $x = -\frac{b}{2a}$, когда $D = b^2 - - 4ac = 0$;

3) существует два корня уравнения $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ при $D = b^2 - 4ac > 0$.

Не нужно забывать тот факт, что при $a = 0$ уравнение из квадратного превращается в линейное и для него справедливо всё, что выше сказано о линейном уравнении.

Исследование квадратного неравенства

Для квадратного неравенства существует шесть вариантов его решения в зависимости от соотношений на его коэффициенты.

Рассмотрим квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$. Пусть $a > 0$ и $b^2 - 4ac > 0$. Решением неравенства в этом случае будут два интервала: $\left(-\infty;\ \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)$ и $\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\ ;\ +\infty\right)$.

При $a > 0$ и $b^2 - 4ac = 0$ решением будут два интервала: $\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right)$ и $\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ +\infty\right)$.

При $a > 0$ и $b^2 - 4ac < 0$ решением будут все действительные числа: $x \in R$.

При $a < 0$ и $b^2 - 4ac > 0$ решением будет интервал $\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\ ;\ \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)$.

При $a < 0$ и $b^2 - 4ac = 0$ решений у неравенства не будет.

При $a < 0$ и $b^2 - 4ac < 0$ решений у неравенства не будет.

8.3. Простейшие примеры исследований

С параметром нужно обращаться очень осторожно. Это можно проследить при решении совсем простых задач. Самой простой задачей может быть, например, задача сравнения двух чисел.

Задача 8.3.1. Сравнить два числа $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{2a}$.

Решение.

Так как на параметр a здесь нет никаких ограничений, то $a \in R$, поэтому рассмотрим три случая:

1) если $a < 0$, то $a > 2a$;

2) если $a = 0$, то $a = 2a$;

3) если $a > 0$, то $a < 2a$.

Задача 8.3.2. Рассмотрим линейное уравнение $ax = 1$ и решим его. Если записать $x = \frac{1}{a}$, то это будет неправильный результат, так как делить на нуль нельзя и при $a = 0$ уравнение вообще не имеет решений. Правильный ответ будет выглядеть так:

если $a = 0$, то решений нет;

если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$.

Задача 8.3.3. Теперь решим линейное неравенство $ax < 1$.

Для решения неравенства придётся делить на параметр. Мы знаем, что делить на нуль нельзя, поэтому посмотрим, что же будет с неравенством при $a = 0$. Оно превращается в верное числовое неравенство $0 < 1$, и часть ответа мы можем записать так: при $a = 0$ $x \in R$. Осталось рассмотреть случай $a \neq 0$, и теперь мы можем делить на $a \neq 0$, но при делении на отрицательное число знак неравенства нужно поменять на противоположный, а при делении на положительное число знак неравенства не изменяется (это следует из свойств неравенств). Теперь мы можем записать ответ полностью:

Ответ: при $a < 0$ $x > \frac{1}{a}$;

при $a = 0$ $x \in R$;

при $a > 0$ $x < \frac{1}{a}$.

Задача 8.3.4. Решим линейное неравенство, поменяв в предыдущем неравенстве только знак на противоположный:

$$ax > 1.$$

Решение.

Рассмотрим три случая и запишем сразу ответ:

при $a < 0$ $x < \frac{1}{a}$;

при $a = 0$ решений нет;

при $a > 0$ $x > \frac{1}{a}$.

На этих двух примерах видно, как нужно аккуратно обращаться с параметром.

Задача 8.3.5. Решим уравнение $(a^2 - 4)x = a + 2$.

Решение.

Это уравнение линейное, поэтому нужно рассмотреть случай равенства нулю коэффициента при неизвестном и противоположный случай. Имеем такие случаи:

1) $a = -2$ и тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, а это тождество, т.е. $x \in R$;

2) $a = 2$ и тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x = 4$, чего не может быть, т.е. $x \in \emptyset$;

3) $a \neq \pm 2$. В этом случае $x = \frac{1}{a-2}$.

Задача 8.3.6.

При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - 2x + 5 = 0$ имеет единственное решение?

При решении подобных примеров часто допускается ошибка: считают это уравнение квадратным. Это уравнение квадратное, только когда $a \neq 0$. При $a = 0$ данное уравнение линейное и имеет единственное решение. При $a \neq 0$ это уравнение квадратное и единственное решение будет, когда $D = 4 - 20a = 0$ или при $a = \frac{1}{5}$.

Ответ. $a = 0$; $a = \frac{1}{5}$.

Задача 8.3.7. Параметр может влиять на равносильность уравнений и неравенств; действительно, выясним, например, при каких значениях параметра a уравнение $ax = a^2$ и неравенство $|x - 3| \geq a$ равносильны. При $a \neq 0$ уравнение имеет единственное решение $x = a$, неравенство имеет бесконечно много решений. Если же $a = 0$, то решением как уравнения, так и неравенства является всё множество действительных чисел. Следовательно, условию равносильности удовлетворяет только $a = 0$. При других значениях параметра уравнение и неравенство не являются равносильными.

8.4. Метод интервалов

Рассмотрим применение метода интервалов для решения неравенства с параметром.

Задача 8.4.1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \geq 0, \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \leq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение.

Разложим на множители оба неравенства системы, получим эквивалентную исходной системе систему:

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-a) \geq 0, \\ x(x-3)(x-a) \leq 0. \end{cases}$$

Возможны пять случаев:

1) $a \geq 3$;
2) $a \in [2; 3)$;
3) $a \in [1; 2)$;
4) $a \in (0;1)$;
5) $a \in (-\infty; 0]$.

Метод интервалов для первого неравенства системы в первом случае $a \geq 3$ даёт решения $[1; 2] \cup [a; +\infty)$. Для второго неравенства множество $(-\infty; 0] \cup [3; a]$. Таким образом, у системы будет единственное решение $x = a$.

Для второго случая $a \in [2; 3)$ решения первого неравенства совпадают с решениями для первого случая: $[1; 2] \cup [a; +\infty)$. Решения же второго неравенства будут $(-\infty; 0] \cup [a; 3]$. Решением системы в этом случае будут множество $x \in [a; 3]$. Таким образом, единственности в этом случае нет.

В третьем случае $a \in\ [1; 2)$ решения первого неравенства составят множество$[1; a] \cup [2; +\infty)$, а решения второго – множество $(-\infty; 0] \cup$ $\cup\ [a; 3]$, поэтому у системы решением будет отрезок $[2; 3]$ и единственности в третьем случае не будет.

В четвёртом случае, когда $a \in (0;1)$, решениями первого неравенства будет множество $[a; 1] \cup [2; +\infty)$, а решениями второго неравенства будет множество $(-\infty; 0] \cup [a; 3]$. Решением системы будет отрезок $[2; 3]$, следовательно, единственности нет.

Для пятого случая $a \in(-\infty; 0]$ решениями первого неравенства будет множество $[a; 1] \cup [2; +\infty)$, а решениями второго неравенства системы будет множество $(-\infty; a] \cup [0; 3]$. Решениями системы в этом случае будет объединение отрезка с изолированной точкой $x \in \{a\} \cup$ $\cup\ [2; 3]$. Единственности в данном случае нет.

Ответ: $a \geq 3$.

Задача 8.4.2. Решите в качестве упражнения.

Для каждого значения параметра a решите неравенство $\frac{(x-a)(2x-a-1)}{1-x} \leq 0$.

Ответ: Если $a > 1$, то $x \in (1; (a + 1)/2] \cup [a; \infty)$, если $a = 1$, то $x \in (1; +\infty)$, если $a < 1$, то $x \in [a; (a + 1)/2] \cup (1; +\infty)$.

8.5. Метод областей

Рассмотрим так называемый метод областей решения неравенств с параметром.

Пусть имеется неравенство $f(a,x) > 0$. У функции $f(a,x)$ имеется естественная область определения – множество тех значений переменного и значений параметра, при которых функция $f(a,x)$ имеет числовые значения. Обозначим это множество буквой D. Разобьём множество D на три множества: D^0, D^+и D^-. На множестве D^0 функция $f(a,x)$ принимает нулевые значения, на множестве D^+ функция $f(a,x)$ принимает положительные значения, на множестве D^-функция $f(a,x)$ принимает отрицательные значения. Очевидно, что имеет место равенство: $D = D^0 \cup D^+ \cup\ D^-$. Так как в области D функция $f(a,x)$ является непрерывной функцией, то для разбиения области D на D^0, D^+и D^- достаточно найти множество D^0, то есть решить уравнение $f(a,x) = 0$. При решении уравнения $f(a,x) = 0$ получим: $x = \varphi_i(a), i = 0, 1, 2\ , 3, \dots k$, то есть мы получим уравнения линий, которые и разобьют всю область на интересующие нас части. Далее нужно в каждой из частей, на которые линии $x = \varphi_i(a)$ разбили область D, выбрать пробные точки и определить знак функции в каждой из частичных подобластей. В качестве ответа на задачу $f(a,x) > 0$ записать D^+. На задачу $f(a,x) \geq 0$ следует записать в ответ $D^0 \cup D^+$. Ответом на решение задачи $f(a,x) < 0$ естественно будет D^- и на задачу $f(a,x) \leq 0$ будет множество $D^0 \cup D^-$.

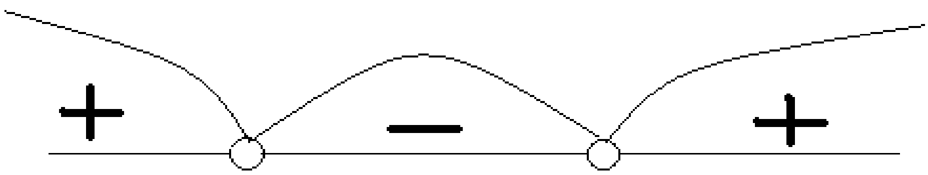
К сожалению найти явную зависимость $x = \varphi_i(a)$ не всегда просто. Часто бывает так, что тип уравнения меняется в зависимости от параметра.

Задача 8.5.1. Для всех a решите неравенство $\dfrac{x-1}{x-a} > 0$.

Решение методом интервалов примера 8.5.1.

Нам придётся рассмотреть три случая.

Случай первый: $a < 1$ (рис. 8.1).



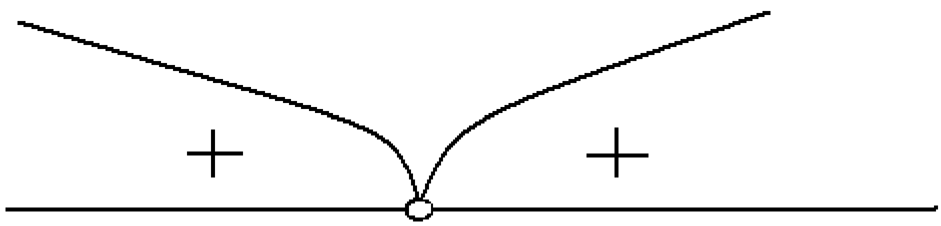
a 1

Рис. 8.1. Первый случай

Можем записать первую часть ответа: при $a < 1$ $x \in (-\infty; a) \cup$ $\cup\, (1; +\infty)$.

Случай второй: $a = 1$ (рис. 8.2).

Неравенство имеет вид $\dfrac{x-1}{x-1} > 0$ или $1 > 0$, если $x \neq 1$. Это же следует и из рисунка.



$x = 1$

$a = 1$

Рис. 8.2. Второй случай

Можем теперь записать вторую часть ответа: при $a = 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup$ $\cup\, (1; +\infty)$.

Случай третий: $a > 1$ (рис. 8.3).

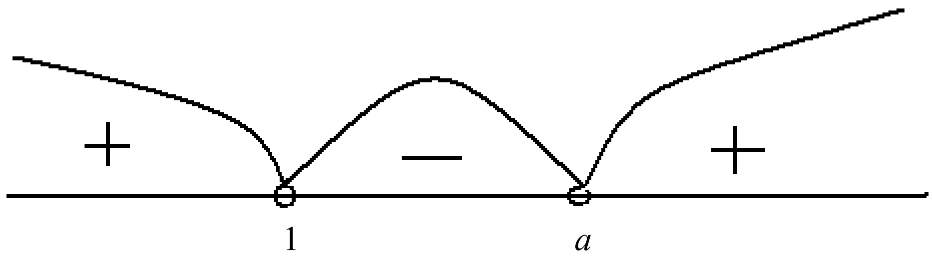


Рис. 8.3. Третий случай

Рисунок позволяет записать последнюю третью часть ответа:
при $a > 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$.

Ответ: при $a < 1$ $x \in (-\infty; a) \cup (1; +\infty)$,
при $a = 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$,
при $a > 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$.

Решение примера 8.5.1 методом областей.

Для этого построим область допустимых значений функции

$$f(a, x) = \frac{x - 1}{x - a}$$

в системе координат (a, x), и в этой области построим линии, на которых функция равна нулю и не существует (рис. 8.4). Нулю равна функция на линии $x = 1$ и не существует на линии $x = a$. Нули числителя и знаменателя функции разбили плоскость на четыре части. Для определения знаков функции в соответствующих частях возьмём пробную точку в «первой» части A(2;0).

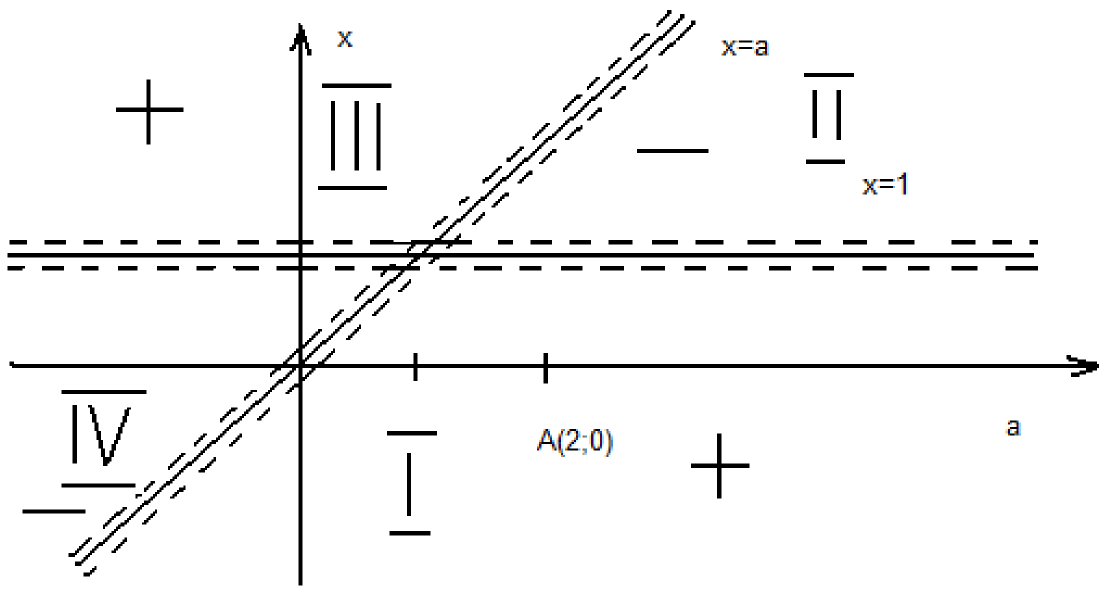


Рис. 8.4. Область допустимых значений и нули числителя и знаменателя функции

В первой части функция принимает положительные значения. Чтобы попасть из первой части во вторую часть, нужно «перейти» через прямую $x = 1$, а это поменяет знак у отношения. Переход из второй части в третью можно осуществить переходом через прямую $x = a$, что изменит знак отношения. Из третьей части в четвёртую переход осуществляется переходом через прямую $x = 1$. Таким образом, решение неравенства – это первая и третья части.

Ответ: при $a < 1$ $x \in (-\infty; a) \cup (1; +\infty)$,
при $a = 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$,
при $a > 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$.

8.6. Графический метод

Очень часто применяют графические методы решения уравнений и неравенств с параметрами. Графический метод рассмотрим на примере.

Задача 8.6.1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\left|x^2 - 5|x|\right| = a(x + 4)$ имеет ровно три различных решения.

Применим графический способ решения данного уравнения. График функции $f(x) = \left|x^2 - 5|x|\right|$ приведён на рис. 8.5. Этот график довольно просто получается из графика параболы $y = x^2 - 5x$ при $x \geq 0$ отражением относительно оси абсцисс и последующим продолжением на отрицательную часть оси абсцисс как графика чётной функции.

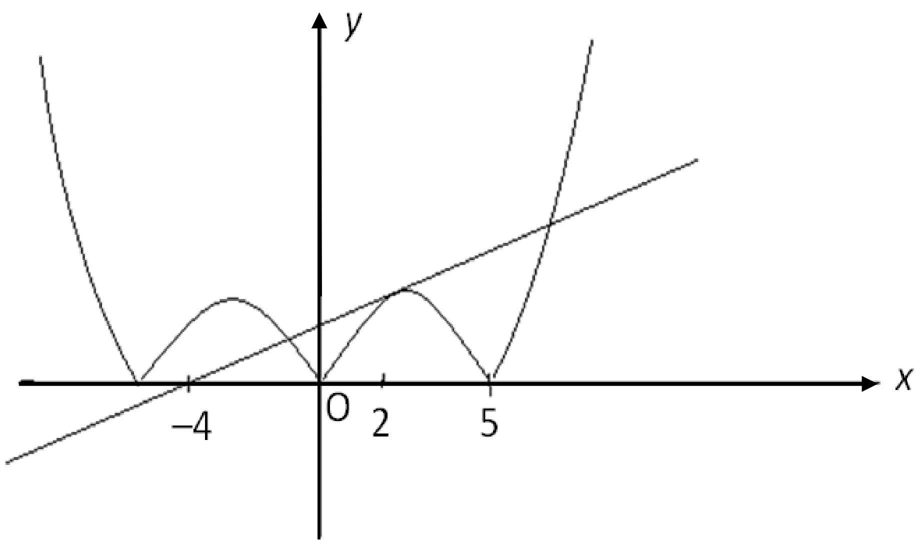


Рис. 8.5. Эскиз графика функции $f(x) = \left|x^2 - 5|x|\right|$

Нам нужно найти такие прямые $y = a(x+4)$, которые имели бы с графиком функции $f(x) = \left|x^2 - 5|x|\right|$ три общие точки. Совершенно очевидно, что горизонтальная прямая $y = 0$ и прямая, которая касается графика функции $f(x) = \left|x^2 - 5|x|\right|$ в некоторой точке на промежутке, когда $0 < x < 5$, имеют по три общие точки с кривой $f(x) = \left|x^2 - 5|x|\right|$. Горизонтальной прямой отвечает значение параметра $a = 0$. Найдём значение параметра a, при котором прямая касается графика функции $f(x) = \left|x^2 - 5|x|\right|$. Обозначим абсциссу точки касания через x_0 и ординату точки касания через y_0, тогда для определения x_0, y_0 и a будем иметь систему трёх уравнений:

$$\begin{cases} a = f'(x_0) = 5 - 2x_0, \\ y_0 = a(x_0 + 4), \\ y_0 = 5x_0 - x_0^2. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $x_0 = 2, y_0 = 6, a = 1$.

Ответ: $a = 0$; $a = 1$.

Задача 8.6.2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{ax} = x + 1$ имеет решение.

Первое решение задачи 8.6.2: данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ ax = x^2 + 2x + 1. \end{cases}$$

Перепишем эту систему так:

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + (2 - a)x + 1 = 0. \end{cases}$$

Последняя система позволяет сформулировать следующее: при каких a существует хотя бы один корень уравнения, который не меньше, чем число (–1)?

График левой части уравнения системы $x^2 + (2 - a)x + 1 = 0$ представляет параболу, а неравенство $x \geq -1$ означает, что парабола должна пересекать ось абсцисс правее точки $x = -1$ или в этой точке. Представим графическую иллюстрацию этих случаев.

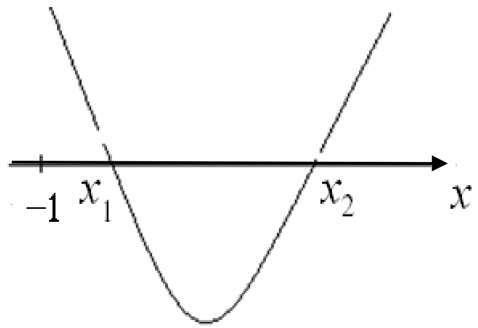


Рис. 8.6

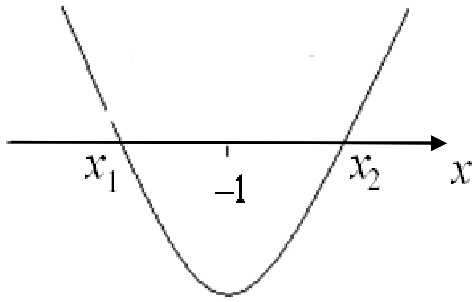


Рис. 8.7

Рис. 8.6 соответствует следующая система:

$$\begin{cases} D=(a-2)^2-4\ge 0, \\ 2\cdot(-1)+(2-a)\le 0, \\ (-1)^2+(2-a)(-1)+1\ge 0. \end{cases}$$

Рис. 8.7 соответствует система:

$$\begin{cases} D=(a-2)^2-4\ge 0, \\ (-1)^2+(2-a)(-1)+1\le 0. \end{cases}$$

Первое неравенство обеих систем означает наличие хотя бы одного корня; второе неравенство первой системы требует, чтобы при $x \geq -1$ квадратичная функция была невозрастающей, и третье неравенство первой системы говорит, что при $x = -1$ значение квадратичной функции неотрицательны. Второе неравенство второй системы требует, чтобы корни были разных знаков или совпадали ($x = -1$).

Решением исходной задачи будет объединение решений систем. Первая система имеет решение $a \geq 4$. Вторая система выполняется, если $a \leq 0$.

Ответ: $a \leq 0$; $a \geq 4$.

Второе решение задачи 8.6.2. Решим этот пример графически. Для этого построим в одной и той же системе координат графики функций, выражающие левую и правую части уравнения.

Построим в одной системе координат XOY графики функций $y = x + 1$ и $y = \sqrt{ax}$ при различных значениях параметра a (рис. 8.8). Анализ графиков позволяет сделать вывод о том, что при $a < 0$ и при $a = 0$ графики всегда пересекаются, то есть решение существует. При $a > 0$ решения существуют только при значениях параметра не меньше некоторого значения, которое соответствует касанию параболы и прямой. Очевидно, что в точке касания прямой с параболой ординаты точек, лежащих на прямой и на параболе, совпадают:

$$(x+1)^2 = a_0 x \;\text{ или } x^2 - (a_0 - 2)x + 1 = 0.$$

Потребуем единственность решения этого уравнения при $a_0 > 0$:

$$\begin{cases} D = (a_0 - 2)^2 - 4 = 0, \\ a_0 > 0. \end{cases}$$

Единственность решения этой системы обеспечивает касание прямой и параболы.

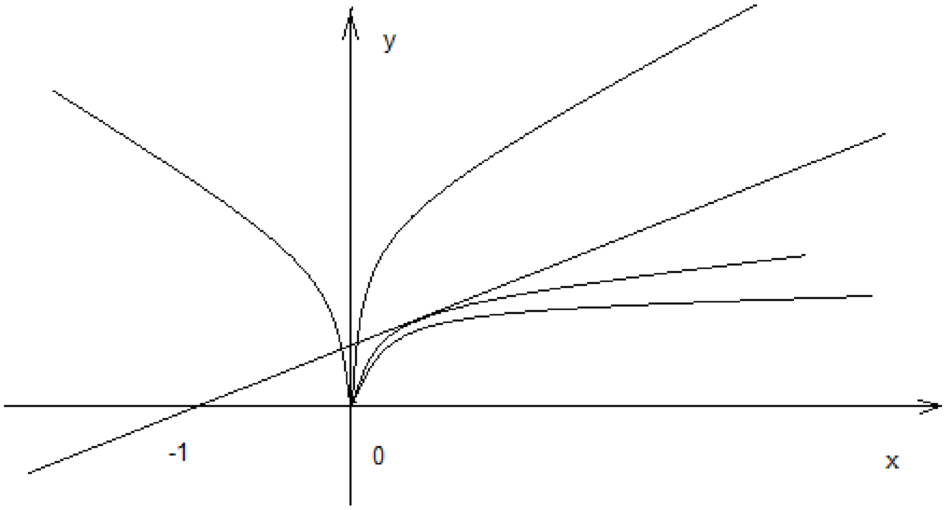


Рис. 8.8. Графики прямой линии и параболы при различных значениях параметра

Решая систему, находим $a_0 = 4$.

Ответ: $a \le 0$; $a \ge 4$.

Замечание: значение параметра a_0 можно найти при помощи производной, действительно, угловой коэффициент касательной равен 1:

$$\frac{\sqrt{a_0}}{2\sqrt{x}} = 1 \text{ и } x + 1 = \sqrt{a_0 x}.$$

Выразим из первого уравнения $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{a_0}}{2}$ и подставим во второе уравнение:

$\frac{a_0}{4} + 1 = \sqrt{a_0} \cdot \frac{\sqrt{a_0}}{2}$. Отсюда $a_0 = 4$.

Решите самостоятельно

Задача 8.6.3. Найти все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при которых уравнение $\sqrt{\boldsymbol{6x - x^2}} = \boldsymbol{x + a}$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $-6 \le a \le -3 + \sqrt{18}$.

8.7. Использование свойств квадратного трёхчлена

Часто при решении задач используются свойства квадратного трёхчлена и расположение корней квадратного трёхчлена в зависимости от коэффициентов квадратного трёхчлена.

В ниже приведённой таблице в систематизированной форме приведена зависимость расположения корней.

Зависимость расположения корней x_1 и x_2 квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ на действительной оси $\left(D = b^2 - 4ac, a \neq 0,\ m = -\frac{b}{2a}, n = -\frac{D}{4a}\right)$

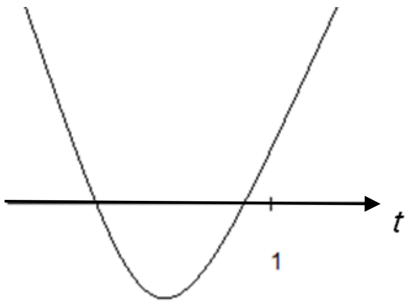
Условия на корни	$a > 0, D > 0$	$a < 0, D > 0$
$x_1 < x_2 < A$	$m < A,$ $f(A) > 0$	$m < A,$ $f(A) < 0$
$x_1 < A < x_2$	$f(A) < 0$	$f(A) > 0$
$A < x_1 < x_2$	$m > A,$ $f(A) > 0$	$m > A,$ $f(A) < 0$
$A < x_1 < x_2 < B$	$A < m < B,$ $f(A) > 0,$ $f(B) > 0$	$A < m < B,$ $f(A) < 0,$ $f(B) < 0$
$x_1 < A < x_2 < B$	$f(A) < 0,$ $f(B) > 0$	$f(A) > 0,$ $f(B) < 0$
$A < x_1 < B < x_2$	$f(A) > 0,$ $f(B) < 0$	$f(A) < 0,$ $f(B) > 0$
$x_1 < A < B < x_2$	$f(A) < 0,$ $f(B) < 0$	$f(A) > 0,$ $f(B) > 0$

Задача 8.7.1. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $4^{x^2} + (4a + 2) \cdot 2^{x^2} + 4a^2 - 3 > 0$ выполняется для $x \in R$.

Решение. Обозначим $t = 2^{x^2}$. Так как $x^2 \geq 0$, то $t \geq 1$. Имеем систему:

$$\begin{cases} t^2 + (4a+2)t + 4a^2 - 3 > 0, \\ t \geq 1. \end{cases}$$

График левой части первого неравенства системы – парабола. Условия задачи будут выполнены, если график параболы расположен выше оси абсцисс при значении переменной $t \geq 1$. Имеем два рисунка:



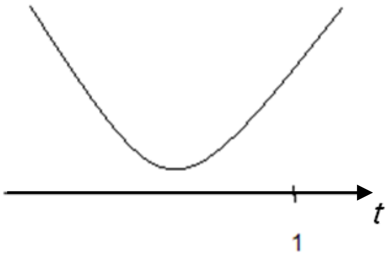


Рис. 8.9. Оба корня меньше 1 *Рис. 8.10. Действительных корней нет*

Аналитические условия, соответствующие рис. 8.9, будут такие:

$$\begin{cases} D=(4a+2)^2-16a^2+12\geq 0, \\ 2\cdot 1+(4a+2)>0, \\ 1^2+\left(4a+2\right)\cdot 1+4a^2-3>0. \end{cases}$$

Решением этой системы будет множество $a>0$.

Аналитические условия, соответствующие рис. 10, выглядят так:

$$(4a+2)^2-16a^2+12<0.$$

Решением этого неравенства является множество $a<-1$.

Решением задачи будет объединение множеств.

Ответ: $a>0,\ a<-1$.

Задача 8.7.2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $4^x+(a^2+5)\cdot 2^x+9-a^2=0$ не имеет решений.

Решение. Обозначим $2^x=t, t>0$. Уравнение принимает вид:

$t^2+(a^2+5)\cdot t+9-a^2=0$ при условии, что $t>0$.

Для того чтобы уравнение не имело бы решений, необходимо и достаточно, чтобы преобразованное уравнение вообще не имело бы решений, либо у уравнения не было бы положительных корней. Изобразим на рисунках два соответствующих случая расположения параболы (рис. 8.11, 8.12). Аналитически этому соответствует совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} D=\left(a^2+5\right)^2-4\left(9-a^2\right)<0, \\ \begin{cases} D=\left(a^2+5\right)^2-4\left(9-a^2\right)\geq 0, \\ 2\cdot 0+\left(a^2+5\right)\geq 0, \\ 0^2+\left(a^2+5\right)\cdot 0+9-a^2\geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Проанализируем совокупность. Так как $(a^2+5)>0$, то вершина параболы всегда имеет отрицательную абсциссу, а это означает, что квадратный трёхчлен может иметь один положительный корень, другой же всегда будет отрицательным, то есть положительный корень может быть, когда значение квадратного трёхчлена в точке $x = 0$ отрицательное. Отсутствие положительного корня будет при выполнении последнего неравенства совокупности.

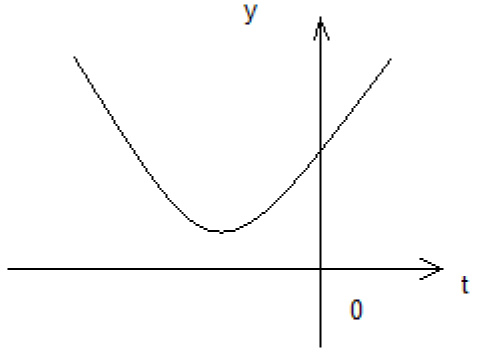


Рис. 8.11. Нет корней

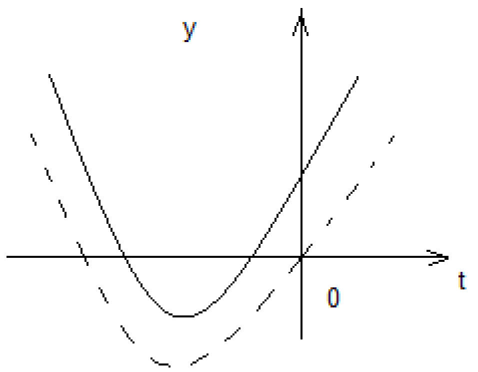


Рис. 8.12. Корни не положительные

Решим это неравенство. Это и будет ответом на задачу.

$$9 - a^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -3 \leq a \leq 3.$$

Ответ: $-3 \leq a \leq 3$.

8.8. Необходимые и достаточные условия

Часто при решении задач удаётся воспользоваться необходимыми и достаточными условиями.

Задача 8.8.1. Найти все пары значений (a, b), для каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} (a+b)x + 26y = 2, \\ 8x + (a^2 - ab + b^2)y = 4 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Для того, чтобы система имела бесконечно много решений, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\frac{a+b}{8} = \frac{26}{a^2 - ab + b^2} = \frac{2}{4}$$

Двойное равенство перепишем в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 208, \\ a + b = 4. \end{cases}$$

Решая систему, получаем две пары значений параметров, при которых система имеет бесконечно много решений. Разделим первое уравнение системы на второе, получим: $a^2 - ab + b^2 = 52$. Из второго уравнения выразим $a = 4 - b$ и подставим в $a^2 - ab + b^2 = 52$. Мы получим квадратное уравнение для определения двух значений параметра b: $b^2 - 4b - 12 = 0$. Решая уравнение, находим: $b_1 = -2$; $b_2 = 6$. Соответственно, $a_1 = 6$; $a_2 = -2$.

Ответ: $a_1 = 6$; $b_1 = -2$; $a_2 = -2$; $b_2 = 6$.

Задача 8.8.2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\dfrac{x^2+9}{a+\cos x} - a$ имеет единственное решение.

Решение. Перенесём все члены неравенства в левую часть и приведём к общему знаменателю, получим:

$$\frac{(a+\cos x)^2 - 2(a+\cos x)\sqrt{x^2+9} + x^2+9}{a+\cos x} \le 0 \text{ или } \frac{(a+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x} \le 0.$$

Функция $f(x) = \dfrac{(a+\cos x-\sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x}$ – чётная, поэтому, если какое-либо x_0 – решение неравенства, то и $-x_0$ – тоже решение неравенства. Единственным решение может быть, если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Мы пришли к выводу: для единственности решения необходимо, чтобы $x_0 = 0$ было решением неравенства. Имеем: $\frac{(a+1-3)^2}{a+1} \le 0$. Решениями этого неравенства являются $a = 2$ и $a < -1$.

Теперь проверим, достаточны ли эти значения для единственности решения. При $a = 2$ неравенство принимает вид: $(2 + \cos x -$ $- \sqrt{x^2+9})^2 \le 0 \Leftrightarrow 2 + \cos x - \sqrt{x^2+9} = 0 \Leftrightarrow 2 + \cos x = \sqrt{x^2+9}$.

Левая часть последнего уравнения не больше, чем 3, а правая часть не меньше, чем 3. Знак равенства между ними может стоять только тогда, когда они равны 3:

$$\begin{cases} 2+\cos x = 3, \\ \sqrt{x^2+9} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

При $a = 2$ неравенство имеет единственное решение $x = 0$.

Проверим, достаточно ли для единственности $a < -1$.

Рассмотрим неравенство $\dfrac{(a+\cos x-\sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x} \le 0 \Leftrightarrow (a+\cos x-\sqrt{x^2+9})^2 \ge 0$ (так как $a + \cos x < 0$). Неравенство выполняется для всех $x \in R$. Единственности нет.

Ответ: $a = 2$.

Задача 8.8.3. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases}(x^2+1)^a+(b^2+1)^y=2,\\ a+bxy+x^2y=1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b.

Решение. Система очень сложная, поэтому подберём такие значения переменной b, при которых система значительно упростится. Так как b – любое, то можно подставить $b=0$. Система примет вид:

$$\begin{cases}(x^2+1)^a=1,\\ a+x^2y=1.\end{cases}$$

Эта система эквивалентна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\ a=1,\end{cases}\\ \begin{cases}a=0,\\ x^2y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Совокупность двух систем показывает, что для выполнения условий задачи подходят всего лишь два значения: это $a=0$ и $a=1$, потому что для других значений $b=0$ не будет удовлетворять условиям задачи. Проверим, достаточно ли равенства $a=0$ для выполнения условий задачи.

При $a=0$ система принимает вид:

$$\begin{cases}(b^2+1)^y=1,\\ bxy+x^2y=1.\end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=0,\\ y\in R,\\ yx^2=1,\end{cases}\\ \begin{cases}y=0,\\ b\in R,\\ 0=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

В этом случае система разрешима только при $b=0$, а не для любого b, что не удовлетворяет условиям задачи.

Проверим, является ли достаточным для выполнения условий задачи $a=1$. При $a=1$ система принимает вид:

$$\begin{cases}x^2+1+(b^2+1)^y=2,\\ 1+bxy+x^2y=1,\end{cases}$$

которая равносильна системе: $\begin{cases} x^2 + (b^2+1)^y = 1, \\ xy\left(b+x\right) = 0. \end{cases}$

Последняя система имеет очевидное решение $x = 0, y = 0$ для любого значения b.

Ответ: $a = 1$.

Решите самостоятельно

Задача 8.8.4. Найдите все значения параметра a, при которых для любого b уравнение $\cos(b + ab + bx) + 2\cos b^2 x = 3a^2$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $a = -1$.

Задача 8.8.5. Найдите множество пар чисел (a, b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство $a(cosx - 1) + b^2 =$ $= \cos(ax + b^2) - 1$.

Ответ: $a = 0, b = 0;\ a = 1, b = 0$

Задача 8.8.6. (ЕГЭ, 2003).

При каком наибольшем отрицательном значении a функция $y = \sin(24x + \frac{a\pi}{100})$ имеет максимум в точке $x_0 = \pi$?

Решение. Максимумы у функции $y = \sin t$ находятся в точках вида $t_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Имеем: $24\pi + \frac{a\pi}{100} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \ \Leftrightarrow a = 200n -$ $- 2350$. По условию задачи должно быть отрицательным. Решаем неравенство $a < 0$.

$$200n - 2350 < 0 \ \Leftrightarrow n \leq 11.$$

Наибольшее отрицательное $a = -150$.

Ответ: $a = -150$.

Задача 8.8.7. (ЕГЭ (демовариант), 2005).

При каких значениях a функция $y\left(x\right) = \frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$ имеет максимум при $x_0 = 4$?

Ответ: $a = 8$.

Задача 8.8.8. (ЕГЭ (демовариант), 2005).

При каких значениях a функция $y\left(x\right) = \frac{3^{x^2}}{3^{ax-11}}$ имеет минимум при $x_0 = 6$?

Ответ: $a = 12$.

8.9. Использование свойств функции

Задача 8.9.1. Найдите все такие значения переменной x, при которых неравенство $(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$ выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1<a<3$.

Решение.

Левая часть неравенства относительно x – квадратичная функция, а относительно переменной a – линейная функция, поэтому выполним следующие преобразования:

$$(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2ax^2+13ax-13a+4x^2-27x+33>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(-2x^2+13x-13\right)\cdot a+4x^2-27x+33>0.$$

Неравенство приняло линейный относительно a вид:

$$f(a)=k(x)\cdot a+b(x).$$

Линейная функция на интервале принимает положительные значения тогда и только тогда, когда на концах интервала она принимает положительные значения:

$$\begin{cases} f(1)\ge 0, \\ f(3)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(-2x^2+13x-13\right)\cdot 1+4x^2-27x+33\ge 0, \\ \left(-2x^2+13x-13\right)\cdot 3+4x^2-27x+33\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-14x+20\ge 0, \\ -2x^2+12x-6\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-5)\ge 0, \\ \left(x-3-\sqrt{6}\right)(x-3+\sqrt{6})\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;2]\cup[5;+\infty), \\ x\in\left[3-\sqrt{6};3+\sqrt{6}\right]. \end{cases}$$

Ответ: $\left[3-\sqrt{6};2\right]\cup\left[5\,;\ 3+\sqrt{6}\right]$.

8.10. Использование специальных преобразований

Задача 8.10.1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x^2-6|x|+a)^2+10(x^2-6|x|+a)+26=\cos\left(\frac{16\pi}{a}\right)$ имеет ровно два корня.

Решение. Выделим полный квадрат в левой части уравнения:

$(x^2-6|x|+a)^2+2\cdot 5(x^2-6|x|+a)+25+1=(x^2-6|x|+a+$ $+5)^2+1$. С учётом этого исходное уравнение перепишем следующим образом:

$$(x^2-6|x|+a+5)^2+\left(1-\cos\left(\frac{16\pi}{a}\right)\right)=0.$$

Так как обе скобки последнего уравнения неотрицательны, это уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} x^2-6|x|+a+5=0, \\ 1-\cos\left(\dfrac{16\pi}{a}\right)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|=3\pm\sqrt{4-a}, \\ a=\dfrac{8}{n},\ n\in Z. \end{cases}$$

Выясним, когда уравнение $|x| = 3 \pm \sqrt{4-a}$ имеет ровно два корня. Очевидно, это будет только в том случае, если у правой части одно значение. Это может быть в двух случаях: либо $\sqrt{4-a} = 0$, либо $3 - \sqrt{4-a} < 0$. Следовательно, $a = 4$ или $3 < \sqrt{4-a}$, то есть $a < -5$. Выпишем все возможные значения $a = \frac{8}{n}$, $n \in Z$, $a = \pm 8,\ \pm 4,\ \pm\frac{8}{3},\ \pm 2,\ \pm\frac{8}{5}, \ldots$

В это множество попадают только $a = 4$ и $a = -8$.

Ответ. $a = 4$; $a = -8$.

Задача 8.10.2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$ имеет решения.

Ответ. $-2 \le a \le 2$.

Задача 8.10.3. Для каждого значения a решите уравнение

$$4\cos x \cdot \sin a + 2\sin x \cdot \cos a - 3\cos a = 2\sqrt{7}.$$

Решение.

Применим формулу дополнительного угла, получим:

$$4\cos x\cdot\sin a+2\sin x\cdot\cos a=\sqrt{(4\sin a)^2+(2\cos a)^2}=\sqrt{12\sin^2 a+4}.$$

Тогда уравнение примет вид: $\sqrt{12\sin^2 a+4}\sin\big(x+\varphi(a)\big)=2\sqrt{7}+3\cos a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\big(x+\varphi(a)\big) = \dfrac{2\sqrt{7}+3\cos a}{\sqrt{12\sin^2 a+4}}$, так как $\sqrt{12\sin^2 a+4} \ne 0$.

Условия, при которых полученное уравнение имеет решения, можно записать так:

$$\left|\frac{2\sqrt{7}+3\cos a}{\sqrt{12\sin^2 a+4}}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{7}+3\cos a\right)^2 \le 12\sin^2 a+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 28+12\sqrt{7}\cos a+9\cos^2 a \le 12(1-\cos^2 a)+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12+12\sqrt{7}\cos a+21\cos^2 a \le 0 \Leftrightarrow 4+4\sqrt{7}\cos a+7\cos^2 a \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2+\sqrt{7}\cos a)^2 \le 0 \Leftrightarrow \cos a = -\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Для $\sin a$ возможны два значения: $\sin a = \sqrt{\frac{3}{7}}$; $\sin a = -\sqrt{\frac{3}{7}}$.

По этой причине возможны два варианта:

$$1)\begin{cases}\cos a = -\dfrac{2}{\sqrt{7}},\\ \sin a = \sqrt{\dfrac{3}{7}}.\end{cases} \quad 2)\begin{cases}\cos a = -\dfrac{2}{\sqrt{7}},\\ \sin a = -\sqrt{\dfrac{3}{7}}.\end{cases}$$

В первом варианте получаем:

$$4\cos x\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}+2\sin x\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)+\frac{6}{\sqrt{7}}=2\sqrt{7}\Leftrightarrow 4\sqrt{3}\cos x-4\sin x+6=14\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+$$

$$+\,2\pi m,\ m\in Z.$$

Второй вариант даёт: $4\cos x\cdot\left(-\sqrt{\dfrac{3}{7}}\right)+2\sin x\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)+\dfrac{6}{\sqrt{7}}=2\sqrt{7}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -4\sqrt{3}\cos x-4\sin x+6=14\Leftrightarrow-\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1\Leftrightarrow x=-\frac{5}{6}\pi+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: если $a = \arccos(-\frac{2}{\sqrt{7}}) + 2\pi p,\ p \in Z$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z$;
если $a = -\arccos(-\frac{2}{\sqrt{7}}) + 2\pi l,\ l \in Z$, то $x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi n,\ n \in Z$;
при других значениях параметра решений нет.

Задача 8.10.4. (ЕГЭ (демовариант), 2002).

Найдите наибольшее значение a, при котором уравнение $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен –2.

Решение. Так как число –2 является корнем, то можем записать:

$$\begin{cases}2a-b=12,\\ x^3+5x^2+ax+b=(x+2)(x^2+3x+a-6).\end{cases}$$

Для того чтобы уравнение имело три корня, необходимо выполнения условия: $D = 9 - 4(a-6) > 0$, откуда получаем $a \le 8$. Проверим, достаточно ли для выполнения условия задачи, чтобы $a = 8$.

Имеем: $x^2 + 3x + 2 = 0.$ Это уравнение имеет два корня: –1 и –2. Корней получилось три, но два одинаковые. Условия задачи не выполняются. Посмотрим, удовлетворяет ли условиям задачи $a = 7$. При $a = 7$ имеем уравнение: $x^2 + 3x + 1 = 0$, которое имеет корни, которые не равны –2.

Ответ: $a = 7$.

Задача 8.10.5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2a \cdot \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

Ответ. $a = 0; a = 2\sin 1$.

Задача 8.10.6. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\cos 2x + a \le 2\sqrt{x^2+16} - \dfrac{x^2+16}{a+\cos 2x}$ имеет единственное решение.

Ответ. $a = 3$.

Список литературы

1. Задачи с параметром и другие сложные задачи / А.И. Козко, В.Г. Чирский. – М.: МЦНМО, 2007. – 296 с.

2. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных / С.В. Кравцев, Ю.Н. Макаров, М.И. Максимов, М.И. Нараленков, В.Г. Чирский. – М.: Изд-во «Экзамен», 2003. – 544 с.

3. Алгебраический тренажёр: пособие для школьников и абитуриентов / под ред. А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонского, М.С. Якир. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998. – 320 с.

4. Методическое пособие по математике для поступающих в вузы / под ред. проф. М.И. Шабунина. – М.: Физматкнига, 2008. – 318 с.

5. Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы / А.Г. Цыпкин, А.И. Пинский. – 3-е изд., испр. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2007. – 640 с.: ил.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

АЛЕШИНА Ольга Борисовна
ДОЛГУШЕВА Надежда Васильевна
КИРЕЕНКО Светлана Григорьевна
НЕКРЯЧ Евгений Николаевич
ПОДСКРЕБКО Эльвира Николаевна
РОЖКОВА Валентина Ивановна
РОЖКОВА Светлана Владимировна
ШАХМАТОВ Валерий Михайлович

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для абитуриентов

Выпускающий редактор *Д.В. Заремба*
Компьютерная верстка *В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *А.И. Сидоренко*

Подписано к печати 07.07.2015. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 18,96. Уч.-изд. л. 17,15.
Тираж 500 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru