

Олимпиада-2013
Образец по математике

БИЛЕТ № 000

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{\frac{1}{x^2 + \sqrt{y}} - \frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+y}}}{\sqrt{x+y} - \frac{1}{\sqrt{x+y^2}}} \right)^{-2} - \frac{x+y}{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{(x+y)^4}}{4xy}. \text{ Ответ: } 0.$$

2. Вычислите для всех допустимых значений a

$$\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}} - \frac{1}{a}. \text{ Ответ: } 0, a \neq -1, a \neq 0, a \neq 1$$

3. В какой четверти расположена область, ограниченная линиями $y = \sqrt{|x-1|}$ и $y = \ln(x+1)$?

Ответ: 1.

4. Решить уравнение $[\log_{\sin x}(\cos x)]^2 = 1$. Ответ: $\pi/4 + 2k\pi$.

5. Через какое время после того, как часы показывали 4 часа, минутная стрелка

догонит часовую стрелку? Ответ: $21\frac{9}{11}$ мин.

6. Боковая сторона равнобокой трапеции равна 20 см. Её диагональ делит среднюю линию на отрезки 20 см и 36 см. Найдите площадь трапеции. Ответ: 672

7. При каких значениях параметра k уравнение

$$25^x + 5|k| \cdot 5^x + 81 - k^2 = 0 \text{ не имеет корней? Ответ: } |k| \leq 9.$$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + \log_y x + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{y}}(x+y) = \log_y 10 + \log_y \cdot \log_{10} 18, \\ 1 = \log_{y-x}(29 - 2x - xy). \end{cases}$$

Ответ: $(10 - \sqrt{91}; 10 + \sqrt{91})$

9. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и $2a$ лежит в основании пирамиды, все боковые ребра которой равны $a\sqrt{3}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания BD параллельно боковому ребру AS .

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{51}}{8}$.

10. Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции $y = \cos^2((a^2 - 4a)x)$ равен $\frac{\pi}{2}$. ответ: -4

Все задачи оцениваются по 10 баллов.