

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.А. Архипов, А.П. Березиков

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКОГО
ЭКСПЕРИМЕНТА**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2008

УДК 53.05(075.8)

ББК 22.3.я.73

А87

Архипов В.А.

А87 Основы теории инженерно-физического эксперимента: учебное пособие / В.А. Архипов, А.П. Березиков. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 206 с.

ISBN 5-98298-296-2

Рассмотрены основные положения теории инженерно-физического эксперимента, принципы физического и математического моделирования, элементы теории погрешностей и математической обработки результатов измерений, основы теории подобия и анализа размерностей, вопросы планирования эксперимента, аппроксимация результатов эксперимента математическими зависимостями, особенности динамических измерений и постановка эксперимента на базе обратных задач математической физики.

Пособие разработано в рамках реализации Инновационной образовательной программы ТПУ по направлению «Атомная энергетика, ядерный топливный цикл, безопасное обращение с радиоактивными отходами и отработанным ядерным топливом, обеспечение безопасности и противодействие терроризму» и предназначено для научных и инженерно-технических работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области экспериментальной физики.

УДК 53.05(075.8)

ББК 22.3.я.73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры АТЭС ТПУ

Г.В. Кузнецов

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математической физики ТГУ

Р.С. Буркина

ISBN 5-98298-296-2

© Архипов В.А., Березиков А.П., 2008

© Томский политехнический университет, 2008

© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| Список основных обозначений | 5 |
| Введение | 6 |
| 1. Основные принципы физического и математического моделирования | 8 |
| 1.1. Физическое моделирование | 9 |
| 1.2. Математическое моделирование | 11 |
| 1.3. Модели течения сплошных сред | 16 |
| 2. Элементы теории погрешностей и математической обработки результатов измерений | 23 |
| 2.1. Задача измерений | 23 |
| 2.2. Типы погрешностей | 25 |
| 2.3. Математическая обработка результатов измерений | 25 |
| 2.4. Запись результатов измерений | 33 |
| 2.5. Алгоритм обработки результатов измерений | 35 |
| 3. Основы теории подобия и анализа размерностей | 39 |
| 3.1. Основное правило моделирования | 39 |
| 3.2. Подобие явлений | 42 |
| 3.3. Метод анализа размерностей | 44 |
| 3.4. П-теорема | 47 |
| 3.5. Алгоритмы получения критериев подобия | 54 |
| 3.6. Основные критерии подобия | 59 |
| 4. Элементы теории планирования эксперимента | 65 |
| 4.1. Определение интервала между экспериментальными данными | 65 |
| 4.2. Порядок проведения эксперимента | 70 |
| 4.3. Однофакторные эксперименты | 73 |
| 4.4. Многофакторные эксперименты | 75 |
| 5. Аппроксимация опытных данных | 81 |
| 5.1. Графический анализ данных | 81 |
| 5.2. Линейная зависимость | 83 |
| 5.3. Метод выравнивания | 85 |
| 5.4. Определение параметров эмпирических формул | 89 |
| 5.5. Графики элементарных функций | 91 |

| | |
|---|-----|
| 6. Оценка степени адекватности экспериментальных зависимостей | 96 |
| 6.1. Линейный регрессионный анализ | 96 |
| 6.2. Корреляционный анализ | 100 |
| 7. Динамические измерения | 105 |
| 7.1. Вводные замечания..... | 105 |
| 7.2. Классификация и характеристики сигналов..... | 108 |
| 7.3. Передаточные характеристики измерительной системы | 111 |
| 7.4. Динамические свойства основных измерительных систем | 121 |
| 7.5. Динамические погрешности измерений | 126 |
| 8. Обратные задачи в теории эксперимента..... | 138 |
| 8.1. Прямые и обратные задачи математической физики..... | 138 |
| 8.2. Общая характеристика обратных задач..... | 144 |
| 8.3. Численные методы решения обратных задач | 147 |
| 9. Обратные задачи теплообмена | 151 |
| 9.1. Обратные задачи теплопроводности | 151 |
| 9.2. Обратные задачи теплообмена | 154 |
| 9.3. Обратные задачи химической кинетики | 155 |
| 9.4. Алгоритм идентификации тепло- и массообменных процессов..... | 167 |
| 10. Обратные задачи оптики аэрозолей | 170 |
| 10.1. Основные понятия оптики аэрозолей..... | 170 |
| 10.2. Дисперсные характеристики аэрозольных частиц..... | 175 |
| 10.3. Методы измерения функции распределения | 177 |
| 10.4. Метод измерения среднего размера и концентрации частиц..... | 186 |
| Список литературы | 194 |
| Приложения | 197 |

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

C – концентрация;
 c – удельная теплоемкость, скорость звука;
 D – коэффициент диффузии, диаметр капли;
 E – энергия активации;
 F – сила;
 f – частота;
 g – ускорение свободного падения;
 l_0 – характерный размер;
 m – масса;
 Q – тепловой эффект химической реакции;
 q – поверхностная плотность потока излучения;
 R – универсальная газовая постоянная, радиус канала;
 T – абсолютная температура;
 t_0 – характерное время;
 u – скорость потока, скорость протекания химической реакции;
 α – коэффициент теплоотдачи;
 α_D – коэффициент массоотдачи;
 α – коэффициент температуропроводности;
 λ – коэффициент теплопроводности, длина волны излучения;
 μ – коэффициент динамической вязкости;
 ν – коэффициент кинематической вязкости;
 ρ – плотность;
 σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Критерии подобия

| | | | |
|-----|--------------------------|-----|-------------------------|
| Ar | – число Архимеда; | M | – число Маха; |
| Arn | – критерий Аррениуса; | Ne | – критерий Ньютона; |
| Bi | – число Био; | Nu | – число Нуссельта; |
| Bo | – число Бонда; | Pe | – число Пекле; |
| Da | – число Дамкелера; | Pr | – число Прандтля; |
| Eu | – число Эйлера; | Re | – число Рейнольдса; |
| Fo | – число Фурье; | Sc | – число Шмидта; |
| Fr | – число Фруда; | Sh | – число Шервуда; |
| Ga | – критерий Галилея; | St | – число Стентона; |
| Gr | – число Грасгофа; | Str | – число Струхаля; |
| Kn | – число Кнудсена; | We | – число Вебера; |
| Le | – число Льюиса–Семенова; | Ф | – критерий Хигира–Бэра. |

ВВЕДЕНИЕ

Многолетний опыт авторов в экспериментальном исследовании физических проблем в области гидрогазодинамики, тепломассообмена, теории горения и внутренней баллистики, а также преподавательская работа со студентами и аспирантами ТГУ и ТПУ и участие одного из авторов в работе специализированных Советов по защите кандидатских и докторских диссертаций (наряду с оппонированием диссертаций) показали, что, несмотря на большое количество специальной литературы по отдельным вопросам теории эксперимента, зачастую физики-экспериментаторы допускают грубые ошибки (иногда вопиющие) при постановке, обработке и анализе результатов экспериментов. В частности, при исследовании нестационарных процессов используются датчики и измерительная аппаратура, не позволяющие в принципе получить адекватные результаты из-за элементарного несогласования динамических характеристик процесса и датчика. В некоторых диссертациях и статьях, опубликованных в периодических изданиях, встречается неграмотная запись результатов измерений и расчетных формул. Так, например, в авторитетном американском журнале (*Journal of Applied Physics*. 1966. – Vol. 73. – No. 4. – pp. 1798–1808) в статье Olive A. Engel «Crater Depth in Fluid Impacts» приведена следующая формула для определения радиуса каверны R , образующейся при столкновении капли радиусом r и скоростью v с поверхностью жидкости:

$$R = \left[\left(0,00122436496 \cdot r^3 \cdot v^2 + 1,68101952 \right)^{0,5} - 1,2965 \right]^{0,5}.$$

При записи этой формулы необходимо было провести округление входящих в нее коэффициентов с учетом реальной погрешности измерения R, r, v , которая в проведенных автором статьи экспериментах была не менее 5 %. Кроме того, в этой формуле не приведены единицы измерений входящих величин и размерности коэффициентов, что делает невозможным ее использование для практических расчетов.

Следует отметить, что существующие монографии по отдельным вопросам теории эксперимента не ориентированы на практическое использование. Особенно это характерно в области планирования экспе-

римента, математической статистики, динамических измерений и обратных задач математической физики в теории эксперимента. Специальные монографии (за редким исключением), безусловно, фундаментально и исчерпывающе освещающие предмет исследования, просто отпугивают практических работников и тем более студентов обилием теорем, выкладок, обоснований, сложностью изложения. В результате многие физики-экспериментаторы полагаются на свою интуицию или пользуются адаптированными пособиями, в которых выхолащивается суть достаточно строгой теории эксперимента.

При написании настоящего пособия ставилась цель восполнить дефицит учебной литературы в рассматриваемой области и дать строгое лаконичное изложение основ современной теории инженерно-физического эксперимента, ориентированное на практическое ее использование как в исследовательских лабораториях, так и в учебных работах студентов, а также при подготовке диссертаций.

В книге, за редким исключением, не рассматриваются методы и средства измерений конкретных физических параметров (температуры, скорости, давления, концентрации частиц, методы визуализации потоков и т. д.). Основное внимание уделено общим вопросам при постановке и проведении любого инженерно-физического эксперимента. К ним относятся основные принципы физического и математического моделирования, теория погрешностей и математическая обработка результатов измерений, теория подобия и анализ размерностей, планирование эксперимента, погрешности динамических измерений, постановка и методы решения обратных задач в теории эксперимента.

В книге приведены таблицы, графики, алгоритмы и примеры, которые позволят приобрести практические навыки в использовании всех необходимых элементов теории инженерно-физического эксперимента при выполнении учебных и исследовательских работ. В приложении даны таблицы важнейших критериев подобия и размерности, наиболее распространенных в инженерной практике физических величин.

Авторы благодарны рецензентам – профессорам Розе Семеновне Буркиной и Гению Владимировичу Кузнецову, сделавшим ряд полезных критических замечаний. Авторы надеются, что настоящее пособие будет использоваться не только в учебных целях, но и в практической работе физиков-экспериментаторов и инженерно-технических работников.

1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ФИЗИЧЕСКОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Физические явления и процессы, с которыми мы сталкиваемся в природе, а также в инженерной практике в различных отраслях техники и технологии, чрезвычайно разнообразны и характеризуются для каждого конкретного процесса своим набором физических параметров. Исследование физических явлений, собственно, и представляет предмет обширной области науки – физики, которая подразделяется на ряд более специализированных дисциплин – механику, атомную и ядерную физику, теплофизику, акустику, молекулярную физику, физику твердого тела, физику атмосферы и океана и т. д.

Исследование природных явлений связано с возможностью прогнозирования их последствий, с одной стороны, и с использованием их с пользой для человека – с другой. В качестве примеров можно привести изучение условий возникновения и вероятных последствий таких явлений, как ураганы, штормы, тайфуны, смерчи, землетрясения, грозы. Одной из актуальных проблем является долгосрочный и краткосрочный прогноз погоды. Примерами полезного использования природных явлений могут служить гидроэлектростанции, ветряные, геотермальные и приливные источники энергии и т. д.

Изучение же физики рабочих процессов в технических устройствах просто необходимо для их грамотного конструирования и оптимизации основных параметров. При сооружении крупных объектов (мостов, плотин, небоскребов, телевизионных башен и др.) необходимо знать законы технической механики, сопротивления материалов и ряда других дисциплин. Создание современной авиации и ракетной техники немыслимо без знания законов аэродинамики, газовой динамики, физики горения. При конструировании атомных реакторов используются законы ядерной физики, теории тепломассообмена, гидродинамики и т. д.

Любой метод научного познания окружающего мира, в том числе и физических процессов, основывается на моделировании – исследовании объектов, процессов и явлений путем построения и изучения их моделей, то есть таких материально или мысленно представляемых объектов, которые в процессе исследования заменяют реальные объекты (явления,

процессы) и изучение которых уточняет или дает новое знание об объекте-оригинале.

Модель представляет собой объект, систему или понятие (идею) в некоторой форме, отличной от формы их реального существования. Она служит средством, помогающим в объяснении, понимании или оптимизации объекта. Модель какого-либо объекта может быть точной его копией (выполненной из другого материала и в другом масштабе) или отображать некоторые характерные свойства объекта в абстрактной форме.

При исследовании физических процессов с давних пор существует два подхода – два метода: теоретическое исследование (математическое моделирование) и экспериментальное исследование (физическое моделирование). Соответственно, физики делятся на теоретиков и экспериментаторов, среди которых известны выдающиеся ученые 20-го века – академики Я.Б. Зельдович, П.Л. Капица, И.В. Курчатов, Л.Д. Ландау, Н.Н. Семенов, Ю.Б. Харитон и др. Многие из них прекрасно владели как экспериментальным, так и теоретическим методами исследования.

Рассмотрим основные принципы, преимущества, недостатки и ограничения каждого из этих подходов.

1.1. ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Физическое моделирование – это экспериментальный метод исследования. При этом реальному объекту ставится в соответствие его материальная копия – физическая модель (увеличенная или уменьшенная), допускающая исследование в лабораторных условиях. Глубоким заблуждением было бы считать, что модель – это тот объект, который можно построить, глядя, например, в микроскоп или телескоп на реальный объект (объект – оригинал). При создании физической модели процесса или объекта для выбора геометрических и режимных (давление, скорость, температура) параметров модели необходимо строго соблюдать правила моделирования, основанные на теории подобия.

Несмотря на значительный прогресс в развитии методов математического моделирования, они не заменят физический или натурный (на реальном объекте) эксперимент, так как опыт всегда является основой исследования. Если физик-теоретик выбрал принципиально неверную математическую модель процесса, то никакие самые совершенные методы расчета и суперкомпьютеры не позволят получить достоверную информацию об исследуемом процессе. Отметим, в частности, что ни один ракетно-космический комплекс, как в России, так и в США, не был принят в эксплуатацию только на основании теоретических расчетов. Для отработки отдельных элементов потребовалось проведение многочисленных лабораторных исследований и дорогостоящих стендовых испытаний.

Поэтому при изучении физических процессов и явлений очень важны экспериментальные методы исследования (физический эксперимент). Эти методы, собственно, и дают толчок развитию теоретической физики и физики в целом (показательный пример – легенда о знаменитом яблоке Ньютона).

Измеренные в условиях модельного эксперимента или в процессе натуральных испытаний реального объекта опытные данные необходимы для решения следующих задач.

- Понимание сути физических явлений и построение на основе экспериментальных данных адекватных физико-математических моделей рассматриваемого процесса.
- Получение базы данных (исходной информации), необходимой для проведения расчетов по заданной математической модели процесса (значения физических констант, зависимости их от внешних параметров и т. д.).
- Подтверждение адекватности математического моделирования сравнением расчетных и опытных данных и уточнение физико-математической модели.

Для исследования физических процессов, как в условиях модельного физического эксперимента, так и при проведении испытаний реального объекта, необходимо измерение целого ряда параметров – давления, температуры, тепловых потоков, концентрации и дисперсности конденсированных частиц в многофазных средах и т. д. В большинстве случаев эти параметры являются динамическими, то есть изменяются во времени. При этом необходимо использовать разнообразные измерительные технологии, включающие как апробированные классические методы и датчики, так и новые принципы и методы измерений, адаптированные к решению конкретных задач.

Важную роль при экспериментальном исследовании физических процессов играет корректный выбор датчиков, измерительных преобразователей и алгоритмов обработки полученных данных, особенно при изучении нестационарных процессов.

Несмотря на решающую роль эксперимента в развитии физических теорий, данный метод исследования имеет целый ряд ограничений, которые можно во многом снять при математическом моделировании исследуемого процесса или явления.

Широкое использование математического моделирования в физике и инженерной практике обусловлено следующими факторами.

- Усложнение класса исследуемых задач, для изучения которых необходимо создание дорогостоящих экспериментальных установок или

модельных объектов. В ряде случаев математическое моделирование этих задач экономически целесообразно.

- Натурный эксперимент связан с энергетическими и финансовыми затратами на обслуживание экспериментальных установок, особенно при изучении крупногабаритных объектов. В качестве примера можно привести стенд, смонтированный в Государственном ракетном центре им. академика В.П. Макеева (г. Миасс), на котором моделируются процессы подводного старта ракет. Это громадное сооружение высотой более 100 м, требующее для обслуживания отдельный коллектив высококвалифицированных специалистов.
- Необходимость решения экологических, социальных и ряда других проблем при проведении крупномасштабных экспериментов.
- В эксперименте получается, как правило, лишь ограниченный объем информации из-за технических трудностей (например, размещение большого количества датчиков для измерения пространственных характеристик потока).
- Невозможность проведения физического моделирования или натурального эксперимента в ряде областей исследования (например, проведение детальных измерений в тайфунах, грозовых облаках и т. п. из-за случайности времени и места их появления). В этих случаях математическое моделирование является единственно возможным.

1.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

При математическом моделировании объектом изучения являются уравнения, от простейших алгебраических до сложных систем нелинейных дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений.

В ходе математического моделирования первоначально выбирается *физическая модель* объекта, процесса или явления. При этом реальный объект заменяется его идеализированной схемой, которую условно можно назвать «карикатурой» объекта. Выбор такой модели – большое искусство, требующее от физика глубокого понимания сути рассматриваемого объекта или явления. С одной стороны, физико-математическая модель должна адекватно отражать основные свойства объекта, а с другой – включать тщательно обоснованные допущения (упрощающие предположения), позволяющие получить решение задачи доступными методами и средствами.

Далее записывается система уравнений, как правило, дифференциальных, с соответствующими краевыми условиями, описывающая поведение модельной системы (математическая модель), и выбирается метод

ее решения – как правило, численный, с использованием ЭВМ (в отдельных случаях удается получить аналитическое или асимптотическое решение задачи). Физическая и математическая модели в совокупности составляют *физико-математическую модель* исследуемого объекта, процесса или явления.

Специалисты по математической физике делятся на вычислителей и аналитиков. Отметим, что отставание в развитии средств вычислительной техники поневоле заставило российских физиков более глубоко вникать в сущность решаемых задач и грамотно применять (где это возможно) сочетание аналитических и численных методов при математическом моделировании сложных процессов и явлений. Вероятно, это явилось одной из причин приглашения и успешной работы российских специалистов в ведущих исследовательских центрах Западной Европы и США.

Следующим этапом математического моделирования является проведение серии расчетов (*математический эксперимент*) для заданных диапазонов изменения определяющих параметров и анализ полученных результатов. В газовой динамике, например, это пространственно-временные распределения основных характеристик потока – вектора скорости \vec{v} , давления p , плотности ρ и температуры T

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}(x, y, z, t), \\ p &= p(x, y, z, t), \\ \rho &= \rho(x, y, z, t), \\ T &= T(x, y, z, t),\end{aligned}$$

или некоторые интегральные характеристики – расход газа через заданное сечение канала, тяга сопла, аэродинамическое сопротивление тела в потоке и т. п.).

Достоверность разработанной физико-математической модели проверяется проведением контрольных экспериментов в нескольких характерных точках поля исследуемого течения.

В современном понимании математическое моделирование как новый способ исследования и получения новых знаний сформировалось в 70-х гг. 20-го века с появлением ЭВМ, способных производить вычисления со скоростью, недоступной для человека. Процесс моделирования может быть представлен в виде следующей последовательности: исследуемое явление – физико-математическая модель – численный алгоритм – программирование – ЭВМ – вычислительный эксперимент – анализ, обработка и хранение результатов. Все элементы этой технологической цепочки взаимосвязаны, и эта связь нелинейна, а изменение одного из ее

элементов может привести к изменению не только последующих, но и предыдущих элементов.

Эффективность математического моделирования можно оценить при анализе всей технологической цепочки. Рассмотрим основные элементы этой цепочки (выбор физико-математической модели и численных алгоритмов) на примере задач механики сплошной среды. Для этих задач в наиболее полной постановке физико-математические модели могут быть описаны интегральными законами сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_o} W_o dV + \int_{S_o} W dS = \int_{V_o} F dV, \quad (1.1)$$

выражающими связь между изменением во времени в замкнутом объеме V_o некоторых величин (потоков) W_o, W и их изменением при переходе через границы S_o , а также взаимодействием потоков с внешними источниками или стоками F . Интегральные законы сохранения (например, массы, импульса и энергии для моделей сплошной среды) являются наиболее общей формой описания движения сред и справедливы как для непрерывных, так и для разрывных решений. Наряду с интегральной используется их дифференциальная форма

$$\frac{\partial W_o}{\partial t} + \text{div } W = F, \quad (1.2)$$

справедливая лишь для непрерывных решений.

Например, закон сохранения вещества в гидрогазодинамике выражается уравнением непрерывности, для которого интегральная форма (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_o} \rho dV + \int_{S_o} \rho \vec{v} dS = 0,$$

где ρ, \vec{v} – плотность и вектор скорости жидкости или газа.

Дифференциальная форма (1.2) уравнения непрерывности запишется в виде уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0.$$

До начала моделирования необходимо определить, какова конечная цель исследования и какие данные предполагается получить в результате решения задачи, какова точность модели и с какой точностью требуется получить ее решение, какие ресурсы необходимо привлечь для решения задачи и какие имеются возможности (математические и технологические). После анализа всей технологической цепочки

моделирования делается вывод о возможности решения проблемы на основе существующих моделей, численных алгоритмов и технических средств (ЭВМ) или формулируются условия, необходимые для ее решения (например требования к уточнению моделей, созданию новых алгоритмов, ЭВМ и т. д.).

Все классы моделей для задач механики можно разделить на четыре уровня.

1. Аналитические приближения и линеаризованные уравнения.
2. Нелинейные уравнения без учета диссипативных процессов.
3. Нелинейные уравнения с учетом диссипативных процессов.
4. Полные нестационарные модели, описываемые уравнениями с учетом реальных эффектов – уравнение Навье–Стокса с учетом сжимаемости и теплопроводности, турбулентности и т. д., уравнения многокомпонентных и многофазных сред, магнитогидродинамические модели и т. д.

Многопараметричность исследуемых задач и разномасштабность процессов, их нелинейность и многомерность не позволяют сформулировать общие подходы при постановке задач и получении решений. Основные тенденции развития математического моделирования включают следующие направления.

- Использование моделей различного уровня в зависимости от целей исследования.
- Применение все более сложных моделей, учитывающих большее число реальных физических эффектов исследуемого объекта.
- Анализ моделей, их систематизация и выявление некоторых классов общих моделей, пригодных для описания широкого комплекса проблем.
- Дальнейшее математическое обоснование физико-математических моделей и корректности постановки краевых задач.

Упрощенные модели получают, как правило, из моделей более высокого уровня при различных упрощающих предположениях о характере исследуемого процесса. Таким образом, взяв за основу более полную (накрывающую) модель, можно получить цепочку упрощенных моделей. В механике сплошных сред, например, такой полной моделью четвертого уровня являются уравнения Навье–Стокса для сжимаемого теплопроводного газа. В пренебрежении эффектами вязкости и теплопроводности получаем модель газовой динамики (уравнения Эйлера); для сильновязких течений может быть использовано приближение пограничного слоя (уравнения Прандтля) и так далее, вплоть до уравнений гидравлики (модель первого уровня, допускающая в ряде случаев полу-

чение аналитических решений). Использование такого подхода позволяет сократить число рассматриваемых моделей и сосредоточиться на изучении базовых моделей, описывающих целые классы задач.

Качественный скачок в быстродействии ЭВМ до 10^{12} – 10^{14} флоп (флоп – количество операций в секунду над числами с плавающей запятой) позволяет перейти к моделированию задач четвертого уровня.

К таким задачам относится, например, моделирование реальных процессов в металлургии и химической технологии, в ракетных двигателях и атомных реакторах. К одной из сложнейших задач, в частности, относится моделирование процессов перехода течения от ламинарного к турбулентному и обратно (А.М. Липанов, Ю.Ф. Кисаров, И.Г. Ключников, 2001 г.).

Нелинейность большинства исследуемых задач не позволяет получить их точные решения. Более того, такие решения не всегда существуют, поэтому основными методами их нахождения являются приближенные и численные. Первые основаны на некотором представлении решения исходя из известных предположений о его характере. Например, в асимптотических методах в аэродинамике и теории горения используется представление решения в виде его разложения по малому параметру (Р.С. Буркина, В.Н. Вилунов, 1982 г.). Эти подходы применимы лишь для сравнительно простых задач, в которых преобладает один тип течений, например. Асимптотические методы широко используются на начальном этапе моделирования; в каждом конкретном случае они требуют обоснования и анализа условий применимости.

Переход к более сложным моделям потребовал разработки численных алгоритмов решения многомерных задач в рамках различных физико-математических моделей. На современном этапе развития математического моделирования широкое распространение получили метод конечных разностей, метод конечных объемов, метод граничных элементов, а также ряд специальных методов – метод частиц в ячейках, метод статистических испытаний и др. (В.М. Ковеня, 2002 г.).

Рассмотрим основные понятия численных методов решения задач математической физики. Пусть в области $\Omega = \Omega(x)$ с границей γ требуется найти решение краевой задачи

$$Lu = f, \quad lu_\gamma = \varphi, \quad (1.3)$$

где L, l – дифференциальные, интегральные или алгебраические операторы;

$u = u(x)$ – вектор искомых функций;

f, φ – векторы правых частей;

$x = (t, x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Предположим, что задача (1.3) поставлена корректно. Переход от математической постановки задачи к ее численному решению включает следующие этапы.

- Замена области Ω непрерывного аргумента x ее дискретным аналогом Ω_h .
- Замена (аппроксимация) функций u, f, φ непрерывного аргумента x дискретными функциями u_h, f_h, φ_h .
- Аппроксимация исходных операторов L, l их дискретными аналогами L_h, l_h .

После этого переходим к системе дискретных уравнений

$$L_h u_h = f_h, \quad l_h u_h|_{\gamma_h} = \varphi_h, \quad (1.4)$$

которая называется *разностной схемой*.

Так как каждый этап постановки дискретной задачи может проводиться различными способами, то в результате для решения задачи (1.3) могут быть получены семейства дискретных постановок (1.4).

К численным алгоритмам предъявляются следующие требования.

- Сходимость решения дискретной задачи (1.4) к решению исходной задачи (1.3).
- Достаточная точность расчета.
- Экономичность алгоритма.
- Универсальность алгоритма, то есть возможность его адаптации к различным физико-математическим моделям.
- Адаптация алгоритма к различным типам и архитектурам ЭВМ.
- Адекватность или близость свойств разностной схемы к свойствам исходной задачи, консервативность схемы, однородность алгоритма.

Математическое моделирование наряду с физическим и натурным экспериментами является основным способом исследования и получения новых знаний в различных областях физики. Можно ожидать, что его роль в дальнейшем возрастет, но оно не заменит физический или натуральный эксперимент, так как опыт всегда является основой познания. Следует ожидать сближения различных форм исследования, дополняющих друг друга.

1.3. МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ СПЛОШНЫХ СРЕД

Гидрогазодинамические процессы являются одними из ключевых в целом ряде технических устройств и технологий. Достаточно перечислить лишь такие важнейшие отрасли, как ракетно-космическая и авиационная техника, атомная промышленность, теплоэнергетика, химическая технология, экология, метеорология, в которых необходимо решать

разнообразные задачи механики сплошных сред. Рассмотрим основные модели течения жидкостей и газов, используемые при математическом моделировании соответствующих процессов.

В зависимости от уровня скоростей в потоке, режимных и геометрических характеристик исследуемого процесса, а также от требуемой точности расчета, при математическом моделировании используются различные модели течения сплошных сред разного уровня сложности.

Гидравлический подход

Во многих случаях течения жидкостей и газов их плотность ρ можно считать постоянной по всему объему жидкости в течение всего времени движения. Для облегчения решения гидродинамических задач введено понятие *идеальной жидкости*, которая считается совершенно несжимаемой и нерасширяющейся ($\rho = \text{const}$), обладает абсолютной подвижностью частиц, и в которой отсутствуют силы внутреннего трения (коэффициент динамической вязкости $\mu = 0$). Такой подход к моделированию называется *гидравлическим*; он применим для описания течения капельных жидкостей, а также газов при малых скоростях движения \vec{v} (малых значениях числа Маха $M = |\vec{v}|/c$, где c – скорость звука). В рамках гидравлического подхода общие уравнения гидрогазодинамики существенно упрощаются и в ряде случаев позволяют получить их аналитическое решение.

Течения сжимаемого идеального газа

В рамках данного подхода газ считается невязким ($\mu = 0$), нетеплопроводным (коэффициент теплопроводности $\lambda = 0$) и имеющим постоянные значения удельных теплоемкостей c_p и c_v .

Кроме того, предполагается, что в рассматриваемом потоке отсутствует объемное выделение тепла. Течение *идеального сжимаемого газа* описывается *уравнениями Эйлера*, являющимися одними из основных уравнений теоретической гидродинамики. Уравнения Эйлера используются при расчете до- и сверхзвуковых потоков (например, в соплах Лаваля), когда необходимо учитывать сжимаемость газа. Как показывают проведенные теоретические и экспериментальные исследования, при числах Маха $M \leq 0,5$ газы можно рассматривать как несжимаемую жидкость. При значениях $M \geq 0,5$ при изучении газовых потоков необходимо учитывать сжимаемость газа. Рассмотрение газа как идеального возможно при расчетах распределения давления на поверхности обтекаемых тел и при расчетах скоростей и температур газа на достаточно большом расстоянии от твердой поверхности или от переходных областей.

Ламинарные вязкие течения

Вязкой жидкостью называют жидкость, при изучении движения которой необходимо учитывать силы внутреннего трения и теплопроводность, обусловленные молекулярным движением. Движение вязкой жидкости или газа может быть ламинарным или турбулентным. *Ламинарным* называют такое течение, при котором частицы жидкости следуют по траекториям, представляющим собой плавные кривые, определяемые конфигурацией твердых границ, ограничивающих движение жидкости.

Критерием, определяющим влияние вязкости на характер движения жидкости, служит *число Рейнольдса*, характеризующее собой отношение сил инерции к силам вязкого трения

$$\text{Re} = \frac{|\bar{v}|D}{\nu} = \frac{\rho|\bar{v}|D}{\mu},$$

где \bar{v} – характерная скорость;

D – характерный размер;

$\nu = \mu/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости.

При $\text{Re} \rightarrow \infty$ жидкость можно рассматривать как идеальную. Для описания вязких течений используются *уравнения Навье–Стокса*. Между поверхностью твердого тела и вязкой жидкостью всегда существуют силы молекулярного сцепления, приводящие к тому, что прилегающий к твердой стенке слой жидкости полностью задерживается («прилипает» к ней). Соответственно этому граничные условия к уравнениям Навье–Стокса состоят в требовании $\bar{v} = 0$ на неподвижных твердых поверхностях. Отметим, что здесь требуется обращение в нуль как нормальной, так и тангенциальной компонент скорости, между тем как граничные условия к уравнениям Эйлера требуют обращения в нуль только нормальной компоненты $v_n = 0$ (условие непротекания).

Турбулентные течения

Движение жидкости, при котором траектории частиц быстро изменяются во времени, при этом изменение этих траекторий имеет случайный характер, называется турбулентным. При *турбулентном движении* имеет место нерегулярное, беспорядочное изменение скорости и других параметров потока как по величине, так и по направлению (пульсации гидродинамических величин и частиц жидкости).

Критерием перехода от ламинарного к турбулентному течению является критическое значение числа Рейнольдса $\text{Re}_{кр}$, величина которого зависит от геометрии и структуры потока.

При изучении турбулентных течений проводится статистическое осреднение во времени и по отношению к группе частиц жидкости. Составляющие вектора действительной мгновенной (истинной) скорости потока u, v, w в данной точке пространства представляются в виде сумм:

$$u = \langle u \rangle + u', \quad v = \langle v \rangle + v', \quad w = \langle w \rangle + w', \quad (1.5)$$

причем $u' \ll \langle u \rangle, \quad v' \ll \langle v \rangle, \quad w' \ll \langle w \rangle$.

Здесь $\langle u \rangle, \langle v \rangle, \langle w \rangle$ – составляющие вектора средней (местной) скорости потока;

u', v', w' – пульсационные составляющие вектора скорости.

Средняя местная скорость – это средняя скорость, получающаяся в результате осреднения истинной скорости в каждой точке пространства по такому времени, чтобы нерегулярность истинной скорости сглаживалась и сама средняя скорость представляла собой плавно меняющуюся функцию.

Подставляя (1.5) в уравнения Навье–Стокса и отбрасывая члены второго порядка малости относительно пульсационных составляющих, можно получить уравнения, описывающие турбулентное течение жидкости (*уравнения Рейнольдса*).

При изучении турбулентных течений предполагается, что осредненное, в указанном выше смысле, движение можно рассматривать как движение сплошной среды, которая характеризуется средним местным давлением $\langle p \rangle$, средней местной скоростью $\langle \vec{v} \rangle$, средней местной плотностью $\langle \rho \rangle$ и средней температурой $\langle T \rangle$.

Пульсационное движение сказывается на основном подобно молекулярному движению. Оно приводит к тому, что появляются дополнительно силы турбулентного трения, турбулентная теплопроводность и турбулентная диффузия.

Приближение пограничного слоя

Как было отмечено выше, большие значения чисел Рейнольдса эквивалентны малой вязкости, то есть при больших Re жидкость можно представить как идеальную. Однако такое приближение для реальной (вязкой) жидкости непригодно вблизи обтекаемых стенок. Граничные условия для уравнений Эйлера требуют лишь исчезновения нормальной к поверхности компоненты вектора скорости $v_n = 0$, касательная же составляющая остается, вообще говоря, конечной. Между тем, у реальной вязкой жидкости скорость на обтекаемых стенках должна быть равна нулю: $\vec{v} = 0$.

Отсюда следует, что при больших числах Рейнольдса падение скорости до нуля будет происходить почти полностью в тонком пристеночном слое (*пограничном слое*) толщиной δ , который характеризуется на-

личием в нем значительных градиентов скорости. Течение в пограничном слое может быть как ламинарным, так и турбулентным.

Рассмотрим обтекание жидкостью плоского участка поверхности тела. Оси координат x, y выберем так, что ось x направлена по направлению обтекания, а ось y – перпендикулярно к оси x по направлению внешней нормали, проведенной в данной точке поверхности тела (рис. 1.1).

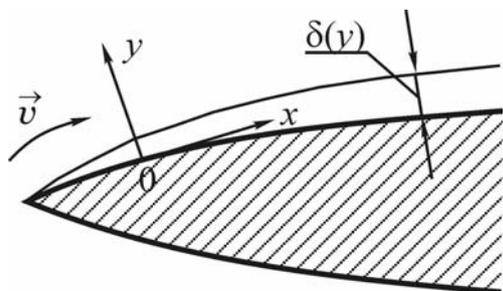


Рис. 1.1. Схема течения в пограничном слое:
 x, y – координаты;
 $\delta(y)$ – толщина слоя

Вдоль оси x скорость меняется медленно, а вдоль оси y происходит резкое изменение скорости от нуля на стенке до конечного значения на расстояниях порядка толщины δ пограничного слоя. В силу тонкости пограничного слоя при описании в нем течения жидкости можно принять следующие допущения.

- Изменение гидродинамических параметров вдоль продольной координаты x много меньше, чем вдоль оси y :

$$\frac{\partial a}{\partial x} \ll \frac{\partial a}{\partial y},$$

где a – некоторая гидродинамическая величина.

- В пограничном слое при отсутствии электрических и магнитных полей нет поперечного градиента давления, то есть

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

- Течение в пограничном слое происходит, в основном, параллельно обтекаемой поверхности, то есть

$$v_y \ll v_x.$$

С учетом этих допущений уравнения Навье–Стокса существенно упрощаются, и полученная при этом система уравнений (для ламинарного течения – уравнения Прандтля) в ряде случаев допускает аналитическое решение.

Двухфазные течения

При математическом моделировании рабочих процессов в целом ряде технических устройств необходимо учитывать двухфазность рабочего тела. Гидрогазодинамика многофазных сред отличается от классической механики «чистого» газа наличием в газовом потоке жидких или твердых (конденсированных) частиц различных размеров, которые мо-

гут обмениваться с газом кинетической и тепловой энергией. Массовый расход конденсированных частиц может в несколько раз превосходить расход газа и существенно меняться по тракту течения за счет перехода их из одного агрегатного состояния в другое (испарение, конденсация, горение частиц). Поскольку механизм движения многофазных сред заключается в увлечении вязкими силами газа инертных частиц и сопровождается теплообменом между газом и частицами, образованием новых частиц, их ростом, коагуляцией, дроблением, то решение задачи о движении двухфазных течений является весьма сложной проблемой.

При теоретическом исследовании двухфазных потоков в зависимости от массовой концентрации и дисперсности частиц конденсированной фазы используются, в основном, два подхода.

- Первый (упрощенный) подход состоит в том, что не учитывается влияние динамического и теплового запаздывания частиц на параметры газового потока. При этом по заранее рассчитанным параметрам газового потока в исследуемом поле течения рассчитываются траектории частиц с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений движения последних (*траекторный подход*). Данный подход применим для невысоких значений объемной концентрации частиц в потоке $C_V < 0,02 \div 0,05$.
- Вторая группа методов основана на введении понятия многоскоростной многотемпературной взаимопроникающей среды, то есть среды, в каждой точке которой имеется столько скоростей и температур, из какого количества фаз состоит среда. Двухфазная среда при этом рассматривается как совокупность двух взаимопроникающих континуумов – «чистого» газа и «газа» частиц, имеющих собственные значения скорости, температуры, «плотности» (концентрации частиц), но не имеющего давления. Такая схематизация в настоящее время является основой большинства современных моделей расчета многофазных потоков.

Реагирующие потоки

Наиболее сложным является математическое моделирование реагирующих неадиабатических потоков. Достижение замкнутости и полноты соответствующей системы уравнений осуществляется с помощью привлечения набора моделей физических процессов, протекающих в потоке с химическими реакциями. Степень подробности описания этих процессов, как правило, ограничена либо их недостаточной изученностью, либо вычислительными возможностями используемых компьютеров. При этом необходимо построение адекватных моделей для следующих основных процессов.

- *Турбулентность* – с использованием моделей с уравнениями для коэффициентов турбулентного обмена либо непосредственно для турбулентных напряжений.
- *Радиационный теплоперенос* – с использованием интегродифференциальных уравнений теории переноса излучения.
- *Химические реакции* – включая моделирование предварительно перемешанных и диффузионных пламен, образования загрязняющих веществ, химической кинетики, а также учет влияния структуры турбулентности на средние по времени скорости химических реакций.

Отметим, что наиболее сложной задачей является правильное описание сложных химических реакций в турбулентных реагирующих потоках применительно к конкретным устройствам. Особенно усложняются задачи математического моделирования в случае двухфазных реагирующих потоков, при решении которых наряду с проблемами инертных двухфазных потоков накладываются требования адекватного описания скорости испарения и горения капель и аэрозвесей в исследуемом потоке.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Результат любого измерения имеет малую ценность, если не указана погрешность, с которой оно выполнено. Хотя правила численной оценки погрешностей давно и детально разработаны на основе теории вероятностей и математической статистики, ими не всегда пользуются даже опытные экспериментаторы. Это связано, по-видимому, с тем, что теория погрешностей в ряде пособий излагается слишком наукообразно, что отпугивает практиков, либо совершенно искажена в некоторых методических пособиях. Наиболее удачное изложение, сочетающее строгость подхода и практическую направленность, содержится, по нашему мнению, в монографиях О.К. Кассандровой, В.В. Лебедева (1970) и А.Н. Зайделя (1985).

2.1. ЗАДАЧА ИЗМЕРЕНИЙ

Каждому физическому объекту присущ ряд свойств, большинство из которых можно выразить числами. Без их знания практически невозможно описать объект так, чтобы по описанию можно было достаточно точно воспроизвести этот объект (например, длина и диаметр стержня).

Для определения числовых характеристик свойства объекта необходимо определить, во сколько раз данная его характеристика больше (или меньше) соответствующей характеристики другого объекта, принятой за единицу.

Измерением называется операция сравнения величины исследуемого объекта с величиной единичного объекта (эталона). Разумеется, на практике никогда не пользуются сравнением измеряемых величин с основными эталонами (килограмм, метр, например). Вместо этого пользуются *измерительными приборами*, тем или иным способом сверенными с эталоном (линейки, микрометры, измерительные микроскопы, весы, электроизмерительные приборы и т. п.).

Отметим, что никакое измерение не может быть выполнено абсолютно точно; его результат всегда содержит некоторую погрешность. Измерения, которые были проведены при сравнении измерительных прибо-

ров с эталонами, также имели погрешность. Очевидно, что при измерении этими приборами невозможно, как правило, сделать погрешность меньшей, чем та, которая определяется погрешностью самого прибора. Нельзя, например, линейкой с относительной погрешностью 0,1 % (1 мм шкалы на линейке длиной 1 м) измерить длину с погрешностью 0,01 %.

В задачу измерений входит не только нахождение самой величины, но также и оценка допущенной при измерении погрешности.

Измерения делятся на *прямые и косвенные*. В прямых измерениях искомая величина непосредственно определяется по показаниям прибора (линейки – при измерении расстояния, манометра – при измерении давления, амперметра – при измерении силы тока и т. д.).

Однако гораздо чаще проводятся косвенные измерения, когда искомое значение измеряемой величины получают расчетным путем по результатам нескольких прямых измерений. При этом расчет измеряемой величины может проводиться с использованием любых математических операций – от простейших алгебраических формул до решения соответствующих обратных задач математической физики. В качестве примера простейшего косвенного измерения можно привести определение площади прямоугольника S по измеренным сторонам a и b :

$$S = a \cdot b.$$

К сложнейшим косвенным измерениям относятся, например, задачи томографии, связанные с определением конфигурации внутреннего объекта или органа по данным многоракурсного просвечивания зондирующим излучением.

Как для прямых, так и для косвенных измерений необходимо найти их погрешность, то есть расхождение измеренной величины с ее истинным значением. Подчеркнем, что величину погрешности узнать точно невозможно. Если бы мы могли определить разность между измеряемым и истинным значениями, то, учитывая ее в виде поправки, сразу же получили бы точное истинное значение.

В действительности дело обстоит сложнее. Мы в лучшем случае можем лишь указать (да и то приближенно) интервал возможных значений измеренной величины $x_{изм}$, внутри которого расположено ее истинное значение $x_{ист}$:

$$(x_{изм} - \Delta x) < x_{ист} < (x_{изм} + \Delta x). \quad (2.1)$$

Величина Δx называется *абсолютной погрешностью* измерений; чем меньше Δx , тем точнее выполнено измерение.

2.2. ТИПЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Погрешности измерений делятся на систематические, случайные и грубые (промахи).

Систематические погрешности вызываются факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. Например, взвешивание тела без учета закона Архимеда. Зная плотности гири и вещества, из которого состоит взвешиваемое тело, эту погрешность легко учесть.

Случайные погрешности – это погрешности, которые отличаются друг от друга в отдельных измерениях, и эти различия имеют случайную, неизвестную нам величину.

Для снижения случайной абсолютной погрешности Δx (отклонение измеренной величины от ее истинного значения) проводится серия из n дублирующих измерений и определяется *среднее арифметическое* результатов серии измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (2.2)$$

Грубые погрешности – это погрешности, существенно превышающие ожидаемые при данных условиях измерения (ошибка в записи показаний или в прочтении отсчета прибора и т. д.).

При математической обработке результатов измерений систематические погрешности учитывают (по возможности) в виде поправок, грубые погрешности исключают, а правила определения случайных погрешностей, основанные на теории вероятностей, рассмотрим ниже.

Качество результатов измерений удобно рассматривать не в виде абсолютной погрешности Δx , а в виде ее отношения к найденному значению измеряемой величины

$$\delta x = \left(\frac{\Delta x}{x_{\text{изм}}} \right) \cdot 100\% , \quad (2.3)$$

которое выражается в процентах и называется *относительной погрешностью*.

2.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим важнейшие определения и правила математической обработки результатов измерений. Для практического использования этого зачастую бывает вполне достаточно.

Погрешности отдельных измерений

Появление того или иного значения измеряемой величины x_i в процессе измерения, а значит и абсолютной погрешности $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$, является случайным событием. Следовательно, существует некоторая вероятность появления этой погрешности в интервале $d\Delta x_i$.

За вероятность $y(\Delta x_i)d\Delta x_i$ появления абсолютной погрешности Δx_i в интервале $d\Delta x_i$ принимают отношение числа всех значений Δx_i , попадающих в интервал $d\Delta x_i$, к числу всех значений Δx_i (при $n \rightarrow \infty$).

В теории вероятностей показывается, что случайные погрешности Δx_i подчиняются *нормальному закону распределения*, который описывается формулой Гаусса

$$y(\Delta x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta x_i^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.4)$$

где $y(\Delta x_i)$ – плотность распределения вероятностей;

σ^2 – постоянная величина, называемая дисперсией распределения.

Эта формула получена при следующих разумных допущениях.

- Погрешности Δx_i могут принимать непрерывный ряд значений.
- При большом количестве измерений n погрешности одинаковой величины, но разных знаков ($\pm\Delta x_i$) встречаются одинаково часто, то есть распределение симметрично.
- Частота появлений погрешностей уменьшается с увеличением Δx_i , то есть большие значения погрешности наблюдаются реже, чем малые.

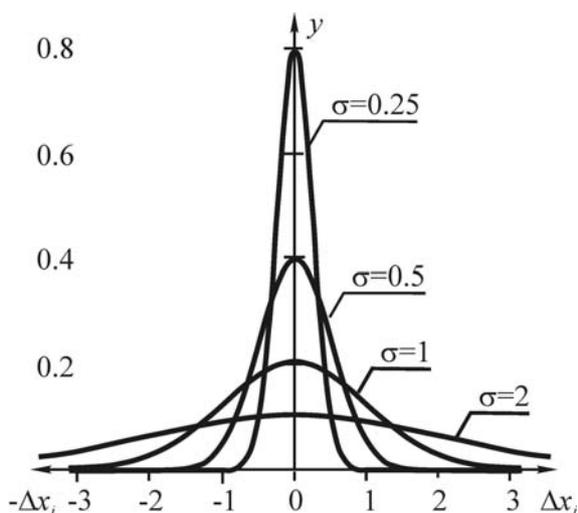


Рис. 2.1. Закон распределения Гаусса

Графики зависимости (2.4) приведены на рис. 2.1. для некоторых значений σ . Из графиков видно, что чем больше значение σ , тем шире распределение. При этом площади под кривыми $y(\Delta x_i)$ с различными значениями σ одинаковы. Дисперсия σ^2 характеризует быстроту уменьшения вероятности появления погрешности Δx_i с ростом величины этой погрешности.

В теории погрешностей вводится понятие «*доверительный интервал*»

$$(\bar{x} - \Delta x_i, \bar{x} + \Delta x_i), \quad (2.5)$$

в который по определению попадает истинное значение измеряемой величины $x_{ист}$ с заданной вероятностью α .

Доверительной вероятностью (надежностью) результата измерений называется вероятность α того, что истинное значение $x_{ист}$ измеряемой величины попадает в данный доверительный интервал (2.5).

$$\alpha = P(\bar{x} - \Delta x_i < x_{ист} < \bar{x} + \Delta x_i),$$

где P – вероятность события.

Для оценки значения случайной абсолютной погрешности Δx_i отдельного измерения существует несколько способов. Наиболее распространена оценка с помощью *средней квадратической погрешности* ${}^n S$, которую иногда называют *стандартной погрешностью*, или *стандартом измерений*:

$$\Delta x_i = {}^n S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}. \quad (2.6)$$

При увеличении числа измерений величина средней квадратической погрешности отдельного измерения ${}^n S$ стремится не к нулю, а к некоторому статистическому пределу, который находится при раскрытии неопределенности ∞/∞ в выражении (2.6) при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}^n S = \sigma, \quad (2.7)$$

квадрат которого σ^2 является дисперсией распределения (2.4) или *дисперсией измерений*. При этом σ^2 является *генеральной дисперсией* (при $n \rightarrow \infty$), а $({}^n S)^2$ – *выборочной дисперсией* (при ограниченном числе измерений n). Величину σ или ${}^n S$ можно трактовать как погрешность метода измерений.

Разумеется, чем большей надежности α мы требуем, тем больше получается соответствующий доверительный интервал, и наоборот, чем больший доверительный интервал мы задаем, тем вероятнее, что результаты измерений не выйдут за его пределы.

Таким образом, для характеристики величины погрешности необходимо задать два числа – доверительный интервал Δx_i и доверительную вероятность α . Указание только Δx_i (без соответствующего α) лишено смысла, так как неизвестно, насколько надежны полученные данные. Знание α позволяет оценить степень достоверности полученного

результата. Необходимая степень надежности определяется характером производимых измерений. Величина α выбирается тем больше, чем ответственнее производимые измерения. Например, при измерении диаметра поршня авиационного двигателя требуется значительно большая надежность, чем при измерении диаметра колеса тачки.

Более высокая степень надежности, требуемая при ответственных измерениях, означает, что при их проведении нужно выбирать больший (в долях σ) доверительный интервал. При обычных измерениях обычно принимают $\alpha = 0,9$ или $\alpha = 0,95$, для чрезвычайно ответственных $\alpha = 0,999$.

Удобство применения средней квадратической погрешности в качестве основного численного выражения степени точности (вернее, воспроизводимости) измерений заключается в том, что этой величине соответствует вполне определенное значение доверительной вероятности. При любом значении дисперсии σ^2 величина доверительной вероятности α однозначно связана со значением доверительного интервала Δx_i , выраженного в долях σ , и может быть рассчитана с помощью интеграла вероятности:

$$\alpha \left(\frac{\Delta x_i}{\sigma} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta x_i/\sigma} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt,$$

где $t = \Delta x/\sigma$.

Таблицы интеграла вероятности приведены в большинстве справочников по математике. Приведем некоторые значения α :

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \Delta x_i = \sigma, \quad \alpha = 0,6827, \\ \text{при } \Delta x_i = 2\sigma, \quad \alpha = 0,9545, \\ \text{при } \Delta x_i = 3\sigma, \quad \alpha = 0,9973. \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

Приведенные значения σ полезно запомнить, так как если в публикациях приведено значение средней квадратической погрешности (σ , 2σ или 3σ), то соответствующие значения доверительной вероятности α обычно не указываются.

Погрешности серии измерений

Выше мы определили доверительную вероятность α для отдельного измерения x_i , то есть определили вероятность того, что измеренное значение x_i не будет отклоняться от истинного значения более чем на $\pm \Delta x_i$.

Очевидно, более важно знать, на какую величину может уклониться от истинного значения среднее арифметическое значение (2.2) серии измерений \bar{x} . В соответствии с центральной предельной теоремой Ляпу-

нова, распределение случайной величины $\Delta\bar{x}$ – абсолютной погрешности серии измерений (погрешности среднего арифметического значения \bar{x}) – описывается нормальным законом (2.4) с иным значением дисперсии $\sigma_{\bar{x}}^2$:

$$y(\Delta\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta\bar{x}^2}{2\sigma_{\bar{x}}^2}\right). \quad (2.9)$$

В теории погрешностей показано, что дисперсия $\sigma_{\bar{x}}^2$ серии из n измерений в n раз меньше дисперсии σ^2 отдельного измерения:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (2.10)$$

При ограниченном числе измерений приближенным выражением генеральной дисперсии $\sigma_{\bar{x}}^2$ будет выборочная дисперсия ${}^nS_{\bar{x}}^2$:

$${}^nS_{\bar{x}}^2 = \frac{{}^nS^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}{n(n-1)}. \quad (2.11)$$

При этом средняя квадратическая погрешность результата серии измерений равна

$${}^nS_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{{}^nS^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}{n(n-1)}}. \quad (2.12)$$

Поскольку дисперсия отдельного измерения ${}^nS^2$ – величина конечная (погрешность метода), то из (2.12) следует, что чем больше количество измерений n , тем меньше погрешность определения среднего арифметического ${}^nS_{\bar{x}}$. В принципе, при $n \rightarrow \infty$ можно полностью устранить влияние случайных погрешностей на результат измерения \bar{x} .

В реальных измерениях многократно увеличить n сложно, то есть фактически определяется ${}^nS_{\bar{x}}$, а не $\sigma_{\bar{x}}$. Поэтому при небольшом количестве измерений n необоснованно завышается точность измерений. В ряде работ зачастую не делают различий между генеральной $\sigma_{\bar{x}}^2$ и выборочной ${}^nS_{\bar{x}}^2$ дисперсиями.

Для учета ограниченности количества измерений n доверительный интервал для результата серии измерений ($\bar{x} - \Delta x$, $\bar{x} + \Delta x$) представляется в виде

$$\Delta x = t(\alpha, n) \frac{{}^n S}{\sqrt{n}} = t(\alpha, n) {}^n S_{\bar{x}}, \quad (2.13)$$

где $t(\alpha, n)$ – коэффициент Стьюдента, зависящий от числа проведенных измерений n и от выбранной величины доверительной вероятности α .

Коэффициенты Стьюдента для некоторых значений α , рассчитанные по соответствующим формулам теории вероятностей, приведены в Приложении 1. При увеличении числа измерений (фактически при $n > 60 \div 100$) коэффициент Стьюдента стремится к предельной величине, зависящей от выбранного значения α .

При выборе доверительной вероятности необходимо учитывать конечную цель проводимых измерений. Чем больше задаваемая погрешность измерений Δx , тем с большей надежностью α ее истинное значение попадает в доверительный интервал $(\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x)$. Для ответственных измерений необходимо увеличивать как α , так и n .

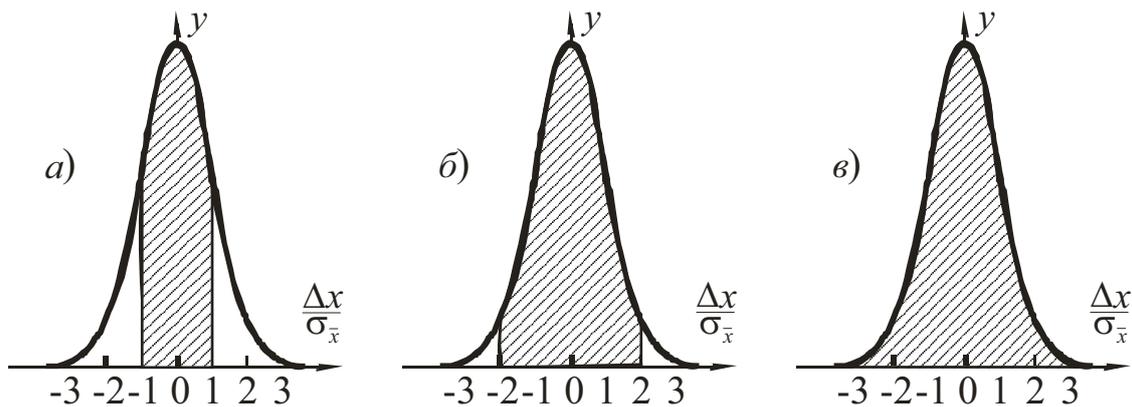


Рис. 2.2. Значения надежности α (заштрихованная площадь) при разных значениях $k = \Delta x / \sigma_{\bar{x}}$

$$a - k = 1, \alpha = 0,68; \quad б - k = 2, \alpha = 0,95; \quad в - k = 3, \alpha = 0,997$$

На рис. 2.2. величина надежности выделена заштрихованной площадью под кривой распределения Гаусса (вся площадь под кривой равна единице). При выборе $\Delta x = \sigma_{\bar{x}}$ ($\alpha = 0,68$) за пределы доверительного интервала $(\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + \sigma_{\bar{x}})$ при повторении серий из n измерений попадает $(1-\alpha)$ доля от числа всех серий, то есть в 32 % всех серий реальная абсолютная погрешность будет выходить за рамки доверительного интервала (рис. 2.2, а).

Аналогично, задавая $\Delta x = 2\sigma_{\bar{x}}$ ($\alpha = 0,95$), получим, что за пределы доверительного интервала $(\bar{x} - 2\sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 2\sigma_{\bar{x}})$ выпадает 5% всех серий (рис. 2.2, б).

Наконец, при выборе $\Delta x = 3\sigma_{\bar{x}}$ ($\alpha = 0,997$), за пределы доверительного интервала $(\bar{x} - 3\sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 3\sigma_{\bar{x}})$ выпадает 0,3 % всех серий (рис. 2.2, в).

Выбор числа измерений

Проведенный анализ случайных погрешностей результата серии из n измерений показывает, что для уменьшения случайной погрешности

$${}^n S_{\bar{x}} = \frac{{}^n S}{\sqrt{n}}$$

можно использовать два способа – улучшение точности используемого метода измерений (уменьшение ${}^n S$) или увеличение числа измерений n .

При выборе числа измерений необходимо учитывать *систематическую погрешность измерений* Δx_{np} , определяемую классом точности используемого прибора или другими аналогичными обстоятельствами. Например, при измерении диаметра провода с помощью микрометра систематическая ошибка $\Delta x_{np} = 1$ мкм.

Уменьшать случайную погрешность за счет увеличения числа измерений целесообразно только до тех пор, пока общая погрешность измерений Δx_{Σ} не будет полностью определяться ее систематической составляющей. Для этого необходимо, чтобы доверительный интервал, определенный с выбранной надежностью α , был существенно меньше величины систематической погрешности Δx_{np} :

$$\Delta x \ll \Delta x_{np}.$$

Практически обычно можно удовлетвориться гораздо менее жестким требованием:

$$\Delta x \leq \frac{\Delta x_{np}}{3} \text{ или } \Delta x \leq \frac{\Delta x_{np}}{2}.$$

Когда случайная погрешность, полученная из разброса отдельных измерений относительно среднего значения, оказывается сравнимой с погрешностью прибора Δx_{np} , то границы доверительного интервала определяются соотношением

$$\Delta x_{\Sigma} = \sqrt{t^2(\alpha, n) {}^n S_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{t(\alpha, \infty)}{3}\right)^2 \Delta x_{np}^2}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим алгоритм выбора числа измерений на следующем примере.

Измеряется диаметр провода с помощью микрометра, имеющего погрешность $\Delta x_{np} = 1$ мкм. Пусть средняя квадратическая погрешность

отдельного измерения ${}^n S = 2$ мкм. Определим, сколько измерений нужно сделать, чтобы получить $\Delta x = \frac{\Delta x_{np}}{2}$ с надежностью $\alpha = 0,95$.

Запишем выражение для Δx в виде

$$\Delta x = t(\alpha, \infty) \frac{{}^n S}{\sqrt{n}}. \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что число измерений равно

$$n = \left[\frac{t(\alpha, \infty) {}^n S}{\Delta x} \right]^2.$$

Подставляя $t(0,95, \infty) = 2$, ${}^n S = 2$ мкм и $\Delta x = 0,5$ мкм, получим $n = 64$. Таким образом, необходимо сделать более 60 измерений, чтобы случайная погрешность изменила общую погрешность результата измерений не более чем в полтора раза ($\Delta x_{np} = 1$ мкм, $\Delta x = 0,5$ мкм).

Следует отметить, что увеличением числа измерений можно устранить влияние случайной погрешности на конечный результат только в том случае, если средняя квадратическая погрешность отдельного измерения не более чем в несколько раз превосходит систематическую погрешность. При больших значениях ${}^n S$ для существенного уменьшения роли случайной погрешности требуются сотни и тысячи измерений.

При такой ситуации для уменьшения общей погрешности результатов измерений необходимо радикально менять методику, с тем чтобы существенно уменьшить случайную погрешность измерений.

Погрешности косвенных измерений

Рассмотрим случай *косвенных измерений*, когда искомая величина z является функцией нескольких переменных a, b, c, \dots , значения которых определяются из серии прямых измерений:

$$z = f(a, b, c, \dots, A, B, C, \dots) \quad (2.16)$$

где a, b, c, \dots – результаты прямых измерений;

A, B, C, \dots – числовые константы.

Для каждой серии прямых измерений величин (a, b, c, \dots) , входящих в определение искомой величины z , проводится математическая обработка результатов измерений, то есть определяются их средние арифметические значения и доверительные интервалы по рассмотренным выше зависимостям:

$$\left. \begin{aligned} a &= \bar{a} \pm \Delta a, \\ b &= \bar{b} \pm \Delta b, \\ c &= \bar{c} \pm \Delta c, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

При этом для всех измеряемых величин (a, b, c, \dots) задается одно и то же значение доверительной вероятности α .

В предположении $\Delta a \ll \bar{a}$, $\Delta b \ll \bar{b}$, $\Delta c \ll \bar{c}$, ... можно показать, что абсолютная погрешность результата косвенных измерений равна

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \Delta c^2 + \dots}, \quad (2.18)$$

где производные $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial f}{\partial c}$, ... вычисляются при значениях

$$a = \bar{a}, b = \bar{b}, c = \bar{c}, \dots$$

Относительная погрешность результата серии косвенных измерений определяется по формуле

$$\delta z = \frac{\Delta z}{z} \cdot 100 \%, \quad (2.19)$$

где $z = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots)$ – значение функции при подстановке в нее средних значений результатов прямых измерений.

Окончательный результат записывается в виде

$$z = f(a, b, c, \dots, A, B, C, \dots) = \bar{z} \pm \Delta z \quad (2.20)$$

Формулы для расчета абсолютных и относительных погрешностей для некоторых функций приведены в Приложении 2.

2.4. ЗАПИСЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

При обработке результатов измерений на микрокалькуляторе или ЭВМ всегда автоматически получается больше значащих цифр, чем это соответствует точности измерений. При этом в окончательных результатах необходимо делать соответствующие округления, так как большое число приводимых знаков создает ложное впечатление о необоснованно большой точности измерений.

До сих пор результаты некоторых экспериментальных исследований, опубликованные в научной периодике, вызывают удивление излишним числом значащих цифр. Используя округление, можно сделать эти результаты более убедительными и легко читаемыми.

Рассмотрим основные правила записи окончательных результатов проведенной серии экспериментов.

- Все результаты измерений, а также вычисленный по ним окончательный результат обязательно приводятся вместе с погрешностью. Абсолютную погрешность всегда указывают вместе с найденным значением измеряемой величины, например:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x = (7,62 \pm 0,03) \text{ мм}.$$

- Для окончательного результата приводят также и относительную погрешность, которую записывают отдельно:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{0,03}{7,62} \cdot 100\% = 0,39\%.$$

- Абсолютную погрешность всегда выражают в тех же единицах, что и саму измеряемую величину.

| Верно | Неверно |
|-----------------------------------|--|
| $x = (1,572 \pm 0,005) \text{ м}$ | $x = 1,572 \text{ м} \pm 5 \text{ мм}$ |

- Результат измерений и его абсолютную погрешность записывают так, чтобы их последние цифры принадлежали к одному и тому же разряду.

| Верно | Неверно |
|--|--|
| $x = (16,2 \pm 0,3) \text{ м}$ | $x = (16 \pm 0,3) \text{ м}$ |
| $v = (2,67 \pm 0,06) \cdot 10^3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ | $v = (2,67 \cdot 10^3 \pm 60) \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ |

Последняя запись не позволяет сразу увидеть, какая цифра результата является ненадежной.

- При записи результата измерений нуль писать так же обязательно, как и любую другую цифру.

| Верно | Неверно |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| $x = (25,70 \pm 0,02) \text{ кг}$ | $x = (25,7 \pm 0,02) \text{ кг}$ |

Вторая запись $x = 25,7 \text{ кг}$ означает, что число сотых долей неизвестно, а первая запись $x = 25,70 \text{ кг}$ показывает, что число сотых долей известно и равно нулю.

- При округлении необходимо соблюдать следующие правила.

Величина случайной погрешности Δx , как и сам результат измерения, определяется с погрешностью, которая достаточно велика и составляет $(15 \div 30)\%$ в зависимости от количества измерений. Поэтому указывать Δx с большой точностью бессмысленно, поскольку она всегда определяется достаточно грубо.

При количестве измерений $n = 5 \div 10$ величина Δx определяется с погрешностью более 30%. Поэтому значение Δx следует округлить, оставляя одну значащую цифру. Только если эта цифра равна единице, точность указаний погрешности одной цифрой недостаточна (разница между 1 и 2 составляет 100%) – в этом случае следует привести и вторую цифру, округлив ее до 0 или 5. Другие двузначные числа, например: 1,7; 2,5; 2,7; 3,5 и т. п., в записи погрешности не допускаются, так как такая запись претендует на неоправданную точность. При использовании более строгих методов обработки иногда оставляют и вторую цифру. Округлять погрешности следует в сторону завышения. В сторону занижения округляются только числа, вторая цифра которых не превышает $1/3$ интервала округления (вторая цифра меньше 4 – при округлении до одной значащей цифры; вторая цифра меньше 2 – при округлении до двух значащих цифр).

| Верно | Неверно |
|-----------------------------|------------------------------|
| $\Delta t = 0,5 \text{ с}$ | $\Delta t = 0,523 \text{ с}$ |
| $\Delta x = 0,15 \text{ м}$ | $\Delta x = 0,12 \text{ м}$ |
| $\Delta T = 1,0 \text{ К}$ | $\Delta T = 1,1 \text{ К}$ |

- Следует привести результаты измерений к легко читаемому виду, используя множитель 10 в соответствующей степени или приставки «милли», «микро» и т. д., приведенные в Приложении 3.

| Верно | Неверно |
|--|---------------------------------|
| $t = (14,85 \pm 0,05) \cdot 10^3 \text{ мс}$ $t = (14,85 \pm 0,05) \text{ с}$ | $t = (14850 \pm 50) \text{ мс}$ |
| $T = (1,25 \pm 0,02) \cdot 10^3 \text{ К}$ | $T = (1250 \pm 20) \text{ К}$ |

2.5. АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Прямые измерения

1. Составить таблицу измерений:

| Порядковый № измерения | 1 | 2 | 3 | ... | i | ... | n |
|------------------------|-------|-------|-------|-----|-------|-----|-------|
| Результат измерения | x_1 | x_2 | x_3 | ... | x_i | ... | x_n |

2. Найти среднее арифметическое значение величин x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

3. Найти среднюю квадратическую погрешность отдельного результата при n измерениях (погрешность метода измерений)

$${}^nS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}.$$

4. Отбраковать результаты (исключить промахи).

4.1. Найти относительное уклонение «подозрительного» (x_k) измерения, выраженное в долях nS :

$$v_k = \left| \frac{\bar{x} - x_k}{{}^nS} \right|.$$

4.2. Найти значения v_{\min} , v_{\max} по известному количеству измерений в таблице, приведенной в Приложении 4.

4.3. Сравнить v с v_{\max} и v_{\min} :

если $v > v_{\max}$ – измерение x_k отбраковать (промах);

если $v < v_{\min}$ – измерение x_k оставить;

если $v_{\min} < v < v_{\max}$ – измерение x_k можно и оставить и отбраковать.

5. Найти уточненные значения \bar{x} и nS для оставшихся после отбраковки результатов (в соответствии с п.п. 2–3).

6. Найти среднее квадратичное отклонение среднего арифметического (погрешность результата серии измерений):

$${}^nS_{\bar{x}} = \frac{{}^nS}{\sqrt{n}}.$$

7. Найти доверительный интервал Δx для \bar{x} (абсолютную погрешность результата серии измерений).

7.1. Задать доверительную вероятность α (для большинства инженерно-физических экспериментов выбирают $\alpha = 0,95$).

7.2. Найти табличное значение коэффициента Стьюдента $t(\alpha, n)$ по известному числу измерений n и заданной доверительной вероятности α .

Приведем таблицу значений $t(\alpha, n)$ для значения доверительной вероятности $\alpha = 0,95$:

| | | | | | | |
|----------------|-------|------|------|------|------|------|
| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $t(\alpha, n)$ | 12,71 | 4,30 | 3,18 | 2,78 | 2,57 | 2,45 |

| | | | | | | |
|----------------|------|------|------|-------|-------|--------------|
| n | 8 | 9 | 10 | 11–14 | 15–28 | 29– ∞ |
| $t(\alpha, n)$ | 2,36 | 2,31 | 2,26 | 2,2 | 2,1 | 2,0 |

Более подробная таблица коэффициентов Стьюдента приведена в Приложении 1.

7.3. Определить Δx :

$$\Delta x = {}^n S_{\bar{x}} \cdot t(\alpha, n).$$

8. Если величина погрешности результата серии измерений Δx окажется сравнимой с величиной систематической погрешности Δx_{np} , то есть погрешности прибора, то в качестве доверительного интервала следует взять величину

$$\Delta x_{\Sigma} = \sqrt{t^2(\alpha, n) {}^n S_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{t(\alpha, \infty)}{3}\right)^2 \Delta x_{np}^2},$$

где $t(\alpha, \infty)$ – табличное значение коэффициента Стьюдента для большого числа измерений ($n \rightarrow \infty$).

9. Найти относительную погрешность результата серии измерений:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}}.$$

10. Привести в соответствие с полученной погрешностью запись результата измерений. В качестве примера приведем запись результата измерений времени задержки воспламенения горючей смеси.

- 10.1. Записать результат измерений в виде

$$x = (1,4386 \pm 0,381) \text{ с}.$$

- 10.2. Округлить Δx :

$$\Delta x = 0,381 \text{ с} \approx 0,4 \text{ с} \quad (\text{для } n = 5 \div 10);$$

$$\Delta x = 0,381 \text{ с} \approx 0,38 \text{ с} \quad (\text{для } n = 25 \text{ и более}).$$

- 10.3. Округлить \bar{x} :

$$x = (1,4 \pm 0,4) \text{ с} \quad (\text{для } n = 5 \div 10);$$

$$x = (1,44 \pm 0,38) \text{ с} \quad (\text{для } n = 25 \text{ и более}).$$

Косвенные измерения

Пусть $z = f(a, b, c, \dots, A, B, C, \dots)$ – результат косвенных измерений, где a, b, c, \dots – результаты прямых измерений;

A, B, C, \dots – числовые константы.

1. Для каждой серии измерений величин (a, b, c, \dots) , входящих в определение искомой величины z , провести обработку, как описано в

предыдущем разделе (прямые измерения). При этом для измеряемых величин (a, b, c, \dots) задают одно и то же значение доверительной вероятности α .

2. Оценить границы доверительного интервала для результата косвенных измерений:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \Delta c^2 + \dots},$$

где производные $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}, \dots$ вычисляются при

$$a = \bar{a}, b = \bar{b}, c = \bar{c}, \dots$$

3. Определить относительную погрешность результата серии косвенных измерений:

$$\delta z = \frac{\Delta z}{\bar{z}} \cdot 100 \%,$$

где $z = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots, A, B, C, \dots)$.

Значения Δz и δz для некоторых функций приведены в Приложении 2.

4. Окончательный результат записать в виде

$$z = \bar{z} \pm \Delta z.$$

5. Привести в соответствие с полученной погрешностью запись результата измерений.

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ

Если изучение того или иного сложного физического процесса связано с большими трудностями, то часто имеет смысл провести эксперимент в увеличенном или уменьшенном масштабе на модельной системе, свойства и размеры которой можно легко изменять. Замена реальной физической системы моделью основана на так называемых законах подобия, которые позволяют перенести данные, полученные на модели, на исходную физическую систему.

Было бы большой ошибкой думать, что на модели видно то же самое, что и с вертолета, находящегося на большой высоте над изучаемым крупным объектом, или в микроскоп – при наблюдении мелкого объекта. Модельный объект существенно отличен от реального. Например, через модель участка реки вода протекает значительно быстрее, чем через соответствующий участок реальной реки. Для того чтобы корректно переносить результаты модельных опытов на процессы в реальных системах, необходимо посредством выполнения определенных правил моделирования добиться, чтобы параметры модельного процесса находились в определенных масштабных соотношениях, определяемых из теории подобия.

3.1. ОСНОВНОЕ ПРАВИЛО МОДЕЛИРОВАНИЯ

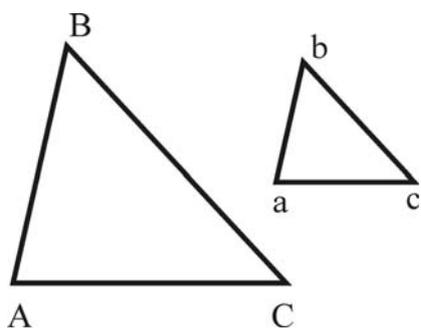


Рис. 3.1.
Подобие треугольников

При моделировании физических процессов одноименные характеристики реального объекта и модели должны отличаться друг от друга постоянным множителем – быть подобными. Простейшим аналогом такого условия является геометрическое подобие, например подобие треугольников, при котором стороны треугольников отличаются одна от другой по длине соответственно в n раз (рис. 3.1):

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc} = n.$$

Основное правило моделирования сформулировано впервые М.В. Кирпичевым и А.А. Гухманом в виде теоремы (ее называют *третьей теоремой подобия или теоремой Кирпичева–Гухмана*).

Теорема:

Подобны те явления, процессы или системы, которые описываются одинаковыми уравнениями связи и условия однозначности которых подобны.

Подобие условий однозначности (начальные и граничные условия) обеспечивается равенством определяющих критериев подобия в случае, если явления или процессы качественно одинаковы (аналогичны). Качественно одинаковыми будут процессы, математическое описание которых одинаково. Эта теорема формулирует необходимые и достаточные условия для подобия явлений, процессов или систем.

Исходя из этой теоремы, полное подобие модели реальному объекту определяется выполнением пяти условий.

1. Процессы в модели и образце относятся к одному классу явлений.
2. Эти процессы описываются одними и теми же уравнениями.
3. Соблюдается геометрическое подобие.
4. Безразмерные краевые условия численно равны.
5. Определяющие критерии подобия численно равны.

Точное воспроизведение в модели численных значений всех определяющих критериев при большом их числе и при условии геометрического подобия практически невозможно.

На практике, как правило, условия полного подобия не выполняются, что вынуждает переходить на приближенное моделирование, при котором в модели воспроизводится тот же физический процесс, что и в реальном объекте, при частичном нарушении некоторых из пяти условий полного моделирования.

Как правило, прямое моделирование гидродинамических процессов можно проводить с учетом одного определяющего критерия. Так, например, для задачи определения коэффициента гидравлического сопротивления пучка труб в воздушном потоке таким критерием является число Рейнольдса. В этом случае моделирование можно проводить как на воздухе, так и на жидкости. Если же необходимо определить и теплообменные характеристики данной системы, то вторым определяющим критерием будет число Прандтля, значения которого для воздуха и жидкости сильно отличаются, и применение жидкости в качестве моделирующей среды для данной задачи неприемлемо. Так обстоит дело в слу-

чае двух определяющих критериев. При увеличении их числа задача еще больше усложняется.

Возможна также ситуация, когда воспроизводится только часть физического процесса (локальное тепловое или локальное аэродинамическое моделирование). Применяют также моделирование по аналогии, когда в модели воспроизводится процесс другой физической природы, чем в образце, но описываемый одинаковыми безразмерными уравнениями (например моделирование процесса теплопроводности и потенциального обтекания идеальной жидкостью процессом электропроводности).

Дадим некоторые определения, которые используются в теории подобия.

Симплекс – это отношение одноименных (однородных величин), которые могут быть геометрическими, физическими или другими. Очевидно, симплекс является безразмерной величиной, то есть отвлеченным числом. Например, отношение длины L к диаметру D реактора:

$$\frac{L}{D} = K.$$

Комплекс – это безразмерная величина, составленная из разнородных величин с разной размерностью, описывающих процесс или систему.

Например, число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{\rho u D}{\mu},$$

где ρ (кг/м³), μ (Па·с) – плотность и коэффициент динамической вязкости обтекающего потока; u (м/с) – характерная скорость; D (м) – характерный размер обтекаемого тела.

Для внутренних течений в качестве D обычно выбирается диаметр канала, для задач внешнего обтекания характерным размером является диаметр миделева сечения (для сферических тел – их диаметр).

Критерий подобия (число подобия) – это симплекс или безразмерный комплекс (иногда его называют инвариант подобия), численное значение которого одинаково для модели и натурального объекта.

Например, для модельного и натурального реакторов отношения их длины к диаметру должны быть одинаковыми:

$$\frac{L}{D} = \frac{l}{d} = K = \text{idem},$$

где L, l – длина натурального и модельного реакторов соответственно;

D, d – диаметр натурального и модельного реакторов соответственно.

Критерии подобия на практике определяются или в результате анализа размерностей параметров, или в результате анализа дифференциальных уравнений, описывающих процесс.

3.2. ПОДОБИЕ ЯВЛЕНИЙ

В большинстве случаев перед изготовлением дорогостоящего крупного объекта (самолет, корабль, ракетный двигатель, химический или атомный реактор, плотина и т. д.) для получения наилучших его характеристик проводятся испытания на моделях – физическое моделирование. При этом надо знать, как пересчитать результаты моделирования на натурное изделие. Если этого не знать – моделирование бесполезно. Для целей рационального моделирования основным является понятие *подобных явлений*.

Определение:

Явления называются подобными, если они отличаются только численными значениями определяющих размерных параметров и притом так, что для них соответствующие безразмерные критерии подобия $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ совпадают.

Рассмотрим два подобных явления – *натурное* и *модельное*. Пусть для этих явлений имеется некоторая зависимость определяемой a и n определяющих a_1, a_2, \dots, a_n размерных величин:

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (3.1)$$

Зависимость (3.1) выполняется как для натурального, так и для модельного явлений, но численные значения определяющих параметров a_1, a_2, \dots, a_n у них разные.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} a^{(n)} &= f(a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}), \\ a^{(m)} &= f(a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}), \end{aligned} \right\}$$

где индексы (n) относятся к натурному явлению, а индексы (m) – к модельному.

Поскольку зависимость (3.1) выражает определенную физическую закономерность, то функция f не должна зависеть от произвола выбора единиц измерения. Разобьем параметры a_1, a_2, \dots, a_n на две группы. В первую группу a_1, a_2, \dots, a_k ($k \leq n$) включаются величины с независимыми раз-

мерностями. Во вторую группу $a, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ входят остальные величины с размерностями, выражаемыми через размерности величин первой группы. При этом зависимость (3.1) можно представить в виде

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

В соответствии со сформулированной ниже *П-теоремой* количество безразмерных критериев подобия равно

$$m = n - k,$$

то есть меньше числа размерных определяющих параметров на число параметров с независимой размерностью.

Используя П-теорему, находим для обоих явлений

$$\left. \begin{aligned} \Pi^{(H)} &= \Phi(\Pi_1^{(H)}, \dots, \Pi_m^{(H)}), \\ \Pi^{(M)} &= \Phi(\Pi_1^{(M)}, \dots, \Pi_m^{(M)}), \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где безразмерная функция Φ для модельного и натурального явлений должна быть одна и та же. Поскольку по определению подобных явлений

$$\Pi_1^{(M)} = \Pi_1^{(H)}, \quad \Pi_2^{(M)} = \Pi_2^{(H)}, \quad \dots, \quad \Pi_m^{(M)} = \Pi_m^{(H)},$$

то из (3.2) следует:

$$\Pi^{(M)} = \Pi^{(H)}. \quad (3.3)$$

Соответствующая физической закономерности (3.1) зависимость между безразмерными параметрами может быть представлена в виде

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m) = \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}). \quad (3.4)$$

Возвращаясь снова к размерным переменным, получим из соотношения (3.3)

$$a^{(H)} = a^{(M)} \left[\frac{a_1^{(H)}}{a_1^{(M)}} \right]^\alpha \cdot \left[\frac{a_2^{(H)}}{a_2^{(M)}} \right]^\beta \cdot \dots \cdot \left[\frac{a_k^{(H)}}{a_k^{(M)}} \right]^\gamma. \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) представляет собой правило пересчета результатов измерений с подобного модельного явления на натурное, для которого непосредственные измерения могут быть затруднены. Алгоритм определения значений показателей степеней $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ приведен ниже.

Условия подобия модельного явления натурному (равенство соответствующих критериев подобия $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$ для обоих явлений) указывает, как надо выбирать определяющие размерные параметры модели $a_{k+1}^{(M)}, \dots, a_n^{(M)}$, чтобы обеспечить ее подобие натурному явлению:

$$\left. \begin{aligned}
 a_{k+1}^{(M)} &= a_{k+1}^{(H)} \left[\frac{a_1^{(M)}}{a_1^{(H)}} \right]^{\alpha_{k+1}} \cdot \left[\frac{a_2^{(M)}}{a_2^{(H)}} \right]^{\beta_{k+1}} \cdot \dots \cdot \left[\frac{a_k^{(M)}}{a_k^{(H)}} \right]^{\gamma_{k+1}}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_n^{(M)} &= a_n^{(H)} \left[\frac{a_1^{(M)}}{a_1^{(H)}} \right]^{\alpha_n} \cdot \left[\frac{a_2^{(M)}}{a_2^{(H)}} \right]^{\beta_n} \cdot \dots \cdot \left[\frac{a_k^{(M)}}{a_k^{(H)}} \right]^{\gamma_n}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Параметры модели $a_1^{(M)}, a_2^{(M)}, \dots, a_k^{(M)}$, имеющие независимую размерность, могут быть выбраны произвольно.

3.3. МЕТОД АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ

В ряде случаев из-за сложности процесса невозможно составить его полное математическое описание в виде системы дифференциальных уравнений, а возможно лишь в самом общем виде представить зависимость между физическими величинами и геометрическими параметрами, характеризующими процесс.

Вид такой зависимости можно найти на основе анализа размерностей физических величин, входящих в уравнения. Этот метод основан на том факте, что решение физических задач не должно зависеть от выбора системы единиц, которая отражается только на численных значениях коэффициентов уравнений (но не на их структуре).

Единицы измерений

Физические величины всегда выражаются некоторыми числами, которые получаются путем измерения – прямого или косвенного. Измерение – это сравнение физической величины с соответствующей единицей измерения. Единицы измерения разделяют на *основные и производные*. Основные единицы измерения задаются произвольно в виде тех или иных эталонов (искусственных или природных). Производные единицы измерения получаются из основных в соответствии с определением физической величины, которое всегда является указанием способа (алгоритма) ее измерения.

Например, скорость u , по определению, есть отношение расстояния L , пройденного за определенный промежуток времени t , к величине этого промежутка: $u = L/t$. Поэтому за единицу скорости можно выбрать отношение единицы длины к единице времени в данной системе.

Плотность, по определению, есть отношение массы m к заключающему ее объему $V \sim L^3$. Поэтому за единицу плотности можно выбрать отношение единицы массы к единице объема $\rho = m/L^3$.

Совокупность основных единиц измерения, достаточных для измерения характеристик рассматриваемого класса явлений, называется *системой единиц измерений*. Например, в механике применяется система единиц измерения СГС, в которой за единицу массы принят 1 г (1/1000 массы тщательно сохраняемого эталона из специального сплава), за единицу длины принят 1 см (1/100 длины другого эталона), за единицу времени принята 1 с (1/86400 длительности средних солнечных суток). Единицей скорости в этой системе является (см/с), единицей ускорения – (см/с²), единицей силы – (г·см/с²) или дина и т. д.

Отметим, что в определении системы единиц измерения не содержится требования ее минимальности (то есть минимальной совокупности основных единиц измерения) – требуется только достаточность. Поэтому можно рассматривать экзотические системы, например, систему единиц измерения, в которой основные единицы –

$$[m] = \text{г}, \quad [L] = \text{дм}, \quad [t] = \text{мин}, \quad [u] = \text{км/час}.$$

В принципе допускается для всех возможных величин ввести свои основные единицы измерений (энергия, сила, давление, импульс и т. д.). Определим понятие: *класс систем единиц измерения* как совокупность систем единиц измерения, отличающихся между собой только величиной основных единиц измерения (но не их набором).

Система СГС, например, входит в класс систем единиц измерения, в котором основными единицами измерения являются

$$\frac{\text{г}}{M}, \quad \frac{\text{см}}{L}, \quad \frac{\text{с}}{T},$$

где M, L, T – отвлеченные числа, показывающие, во сколько раз уменьшаются основные единицы массы, длины, времени при переходе от исходной системе СГС к другой системе данного класса. Этот класс систем единиц измерения обозначается MLT. Обозначение класса систем единиц измерения получается последовательной записью символов величин, единицы измерения которых приняты за основные. Одновременно эти символы обозначают кратность – во сколько раз уменьшается соответствующая единица измерения при переходе от исходной системы к другой системе данного класса.

С 1960 года введена Международная система единиц СИ (SI) – System International d’Unites, в которой основными единицами измерения являются 1 кг = 1000 г (полная масса эталона); единицей длины – 1 м = 100 см (полная длина эталона), единицей времени – 1 с.

Таким образом, при переходе от системы СИ к системе СГС

$$M = 1000; L = 100; T = 1.$$

Ввиду широкого распространения системы СИ рекомендуется при проведении измерений и расчетов использовать ее для записи всех размерных физических величин.

В технике также используется система *FLT*, в которой основные единицы измерения имеют вид

$$\frac{\text{кгс}}{F}, \frac{\text{м}}{L}, \frac{\text{с}}{T},$$

где кгс или кГ – килограмм-сила (единица силы или веса).

Размерность физической величины

Размерностью физической величины называется функция, определяющая, во сколько раз изменится численное значение этой величины при переходе от исходной системы единиц измерения к другой системе (внутри данного класса). Размерность физической величины *a* обозначается квадратными скобками: $[a]$. Отметим, что размерность зависит от класса систем единиц измерения.

Безразмерная величина – это величина, численное значение которой одинаково для всех систем единиц измерения (внутри данного класса).

Например, рассмотрим цилиндрический стержень длиной *L* и диаметром *D*. Отношение $L/D = K$ есть безразмерная величина, размерность которой равна единице: $[K] = 1$.

Если единицу массы уменьшить в *M* раз, единицу длины – в *L* раз, единицу времени – в *T* раз, то численное значение силы возрастет в MLT^{-2} раз. Таким образом, размерность силы в классе *MLT*-систем:

$$[F] = MLT^{-2}.$$

Размерность массы в классе *FLT*-систем имеет вид

$$[M] = FL^{-1}T^2.$$

Отметим, что во всех приведенных примерах размерность физической величины представляется степенным одночленом. И это не случайно. Размерность любой физической величины *a* всегда представляет степенной одночлен

$$[a] = P^\alpha \cdot Q^\beta \cdot R^\gamma \cdot S^\delta \dots, \quad (3.7)$$

где *PQRS...* – система единиц измерения.

Соотношение (3.7) строго доказывается в теории размерностей. Оно следует из естественно формулируемого утверждения: *внутри данного класса все системы равноправны*, то есть среди них нет избранных,

чем-то выбранных систем. Таким образом, выбор исходной системы для характеристики данного класса не имеет значения.

Это утверждение глубоко по сути и является следствием фундаментального общезначимого *принципа ковариантности*. Естественно возникает вопрос: имеются ли физические величины, для которых размерность не удовлетворяет формуле (3.7), то есть их размерность, например, в классе MLT выражается в виде $L \sin M$, $M \ln T$, $\exp(L/M)$ и т. д.? В действительности таких величин нет и размерность любой физической величины всегда представляет собой степенной одночлен.

Размерности наиболее часто используемых физических величин (в системе СИ) приведены в Приложении 5.

3.4. П-ТЕОРЕМА

Говорят, что величины a_1, a_2, \dots, a_k имеют независимую размерность, если размерность ни одной из этих величин нельзя представить в виде произведения степеней размерностей остальных величин (3.7).

Закономерности, определяемые в физической теории или в эксперименте, всегда можно представить в виде

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad (3.8)$$

где a – определяемый параметр; a_1, \dots, a_n – определяющие параметры.

Любое исследование, в конце концов, сводится к нахождению одной или нескольких зависимостей вида (3.8).

Практическое применение теории подобия и анализа размерностей к экспериментальному и теоретическому исследованию физических процессов основано на сформулированной выше теореме Кирпичева–Гухмана, теореме Бэкингема–Федермана (вторая теорема подобия) и теореме Бэкингема (П-теорема).

Теорема Бэкингема–Федермана формулируется следующим образом.

Теорема:

Любая зависимость между физическими величинами, характеризующими процесс, может быть представлена в виде взаимной зависимости между критериями подобия, то есть в виде обобщенного критериального уравнения типа

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n) = 0. \quad (3.9)$$

Эта теорема показывает, как обрабатывать полученные экспериментальные данные, или в какой форме можно получить решение системы

дифференциальных уравнений, описывающих процесс, с помощью методов теории подобия.

Следует отметить, что критерии подобия, входящие в (3.9), неравноценны. Критерии подобия, составленные из физических величин, входящих в краевые условия (в условия однозначности), называются *определяющими*. Критерии, составленные из физических величин, не являющихся необходимыми для однозначной характеристики данного процесса и, в свою очередь, зависящие от этих условий, называются *определяемыми*.

Функциональную зависимость (3.9) удобнее представить в таком виде, чтобы после нахождения значений определяющих критериев можно было бы найти значение определяемого критерия и затем из него – значение искомой физической величины. Таким образом, если определяемый критерий обозначим через Π_1 , то

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n), \quad (3.10)$$

где $\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n$ – определяющие критерии подобия.

Частным случаем второй теоремы подобия является Π -теорема – центральное (и по существу, единственное содержательное) утверждение анализа размерностей.

Теорема:

Пусть существует физическая закономерность, выраженная в виде зависимости некоторой размерной, вообще говоря, величины от размерных же определяющих параметров. Эта зависимость может быть представлена в виде зависимости безразмерной величины от безразмерных комбинаций определяющих параметров. Количество этих безразмерных комбинаций меньше общего числа размерных определяющих параметров на количество определяющих параметров с независимой размерностью.

Таким образом, зависимость (3.8) можно представить в виде уравнений (3.9) или (3.10), которые можно привести к виду

$$\Pi = \Phi(\Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \dots, \Pi_n), \quad (3.11)$$

где Π – определяемый критерий подобия;

$\Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \dots, \Pi_n$ – определяющие критерий подобия.

Замена параметров с зависимыми размерностями a, a_{k+1}, \dots, a_n в уравнении (3.8) на безразмерные критерии $\Pi, \Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \dots, \Pi_n$ производится в соответствии с формулой размерности (3.7), которая для физической закономерности (3.8) имеет вид

$$[a] = [a_1]^\alpha \cdot [a_2]^\beta \cdot \dots \cdot [a_k]^\gamma.$$

При этом критерии подобия рассматриваемого процесса определяются следующими выражениями:

$$\Pi = \frac{a}{a_1^\alpha \cdot a_2^\beta \cdot \dots \cdot a_k^\gamma}, \quad \Pi_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha_{k+1}} \cdot a_2^{\beta_{k+1}} \cdot \dots \cdot a_k^{\gamma_{k+1}}},$$

$$\Pi_{k+i} = \frac{a_{k+i}}{a_1^{\alpha_{k+i}} \cdot a_2^{\beta_{k+i}} \cdot \dots \cdot a_k^{\gamma_{k+i}}}, \dots, \Pi_n = \frac{a_n}{a_1^{\alpha_n} \cdot a_2^{\beta_n} \cdot \dots \cdot a_k^{\gamma_n}}.$$

Таким образом, в соответствии с П-теоремой число аргументов в искомой зависимости (3.8), записанной в безразмерном виде (3.11), сокращается на число, равное числу определяющих размерных параметров с независимой размерностью.

На практике число параметров с независимой размерностью обычно совпадает с числом основных единиц используемой системы. Для систем класса *MLT* это число равно трем. Для тепловых задач добавляется еще один параметр – градус Кельвина (К).

П-теорема имеет большое значение при проведении экспериментальных исследований. При этом число переменных уменьшается на число использованных единиц измерения (1, 2, 3, 4 и более), что существенно упрощает условия проведения эксперимента.

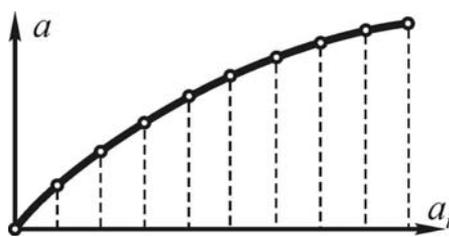


Рис. 3.2. Экспериментальное определение зависимости $a = f(a_i)$

Например, для нахождения зависимости некоторой величины a от одного определяющего параметра $f(a_i)$ необходимо провести измерения функции $f(a_i)$ для нескольких значений аргумента в заданном диапазоне его изменения (рис. 3.2). Если количество необходимых значений a_i равно 10, то необходимо провести 10 измерений.

Если величина a зависит от n параметров, то для полного исследования функции $a = f(a_1, \dots, a_n)$ необходимо провести 10^n измерений. Согласно П-теореме решение задачи сводится к нахождению функции $m = n - k$ безразмерных аргументов,

для решения которой достаточно провести 10^{n-k} измерений (в 10^k раз меньше).

Трудоемкость определения искомой функции сокращается на столько порядков, сколько среди определяющих параметров имеется величин с независимыми размерностями.

Приведем некоторые примеры использования метода анализа размерностей (П-теоремы).

Колебания математического маятника

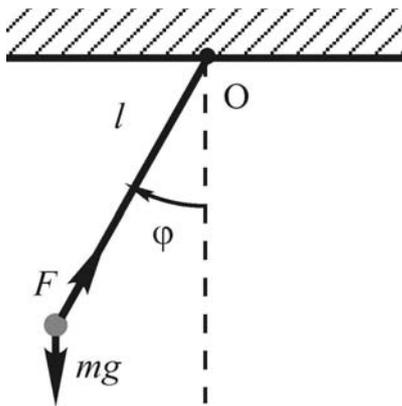


Рис. 3.3. Схема математического маятника

Рассмотрим математический маятник (рис. 3.3), представляющий собой материальную точку массой m , подвешенную на невесомой нерастяжимой нити длиной l , которая закреплена неподвижно в точке O . Определим закон движения и период малых колебаний маятника, отклоненного в начальный момент времени на угол φ_0 и отпущенного из этого положения с нулевой угловой скоростью.

Угловая координата φ и натяжение нити F зависят от пяти величин:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_1(t, l, g, m, \varphi_0), \\ F &= mg\varphi_2(t, l, g, m, \varphi_0), \end{aligned} \right\}$$

где φ_1, φ_2 – некоторые безразмерные функции;

g – ускорение силы тяжести;

t – время.

Из анализа размерностей этих величин ($[t] = \text{с}$, $[l] = \text{м}$, $[g] = \text{м/с}^2$, $[m] = \text{кг}$, $[\varphi_0] = 1$) следует, что среди них имеются три величины с независимыми размерностями. Согласно П-теореме $m = n - k = 5 - 3 = 2$, то есть процесс колебаний маятника зависит от двух безразмерных комбинаций (критериев подобия). В качестве этих критериев можно взять, например,

$$\Pi_1 = \varphi_0, \quad \Pi_2 = t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Все другие безразмерные комбинации будут функциями Π_1, Π_2 . Таким образом, искомые зависимости можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \Phi_1 \left(\varphi_o, t \sqrt{\frac{g}{l}} \right), \\ F &= mg \Phi_2 \left(\varphi_o, t \sqrt{\frac{g}{l}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

где Φ_1, Φ_2 – безразмерные функции от безразмерных аргументов Π_1, Π_2 .

Из (3.12) следуют важные выводы о поведении маятника: закон движения $\varphi(t)$ не зависит от массы груза, а натяжение нити прямо пропорционально массе груза.

Конкретный вид функций $\Phi_1(\Pi_1, \Pi_2), \Phi_2(\Pi_1, \Pi_2)$ анализ размерностей найти, конечно же, не позволяет. Однако для случая малых колебаний из полученного уравнения движения можно определить период колебаний T . В этом случае период колебаний T находится из условия

$$\varphi_o = \Phi_1 \left(\varphi_o, T \sqrt{\frac{g}{l}} \right), \quad (3.13)$$

то есть за время T маятник возвращается в начальное положение φ_o . Разрешая (3.13) относительно второго аргумента, получим

$$T = \Psi(\varphi_o) \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где $\Psi(\varphi_o)$ – неизвестная функция.

Из условия симметрии следует, что $\Psi(\varphi_o) = \Psi(-\varphi_o)$, то есть функция Ψ – четная. Разлагая $\Psi(\varphi_o)$ в ряд при малых φ_o , получим

$$\Psi(\varphi_o) = C_1 + C_2 \varphi_o + C_3 \varphi_o^2 + \dots = C_1 + C_3 \varphi_o^2 + \dots$$

Здесь принято $C_2 = 0$ в силу четности функции $\Psi(\varphi_o)$. Для малых колебаний нелинейными членами можно пренебречь, и тогда для периода малых колебаний получим формулу

$$T = C_1 \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Таким образом, анализ размерностей позволил получить формулу для периода колебаний с точностью до постоянного множителя C_1 .

Константа C_1 определяется из экспериментальных измерений. Для рассматриваемой задачи более строгое математическое решение дает

значение $C_1 = 2\pi$. Следовательно, период малых колебаний маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Задача об атомном взрыве

При атомном взрыве в малой области (можно считать в точке) мгновенно выделяется значительная энергия E . В области взрыва возникает сильная сферическая ударная волна, отделяющая невозмущенную атмосферу от движущегося за ударной волной раскаленного газа (рис. 3.4).

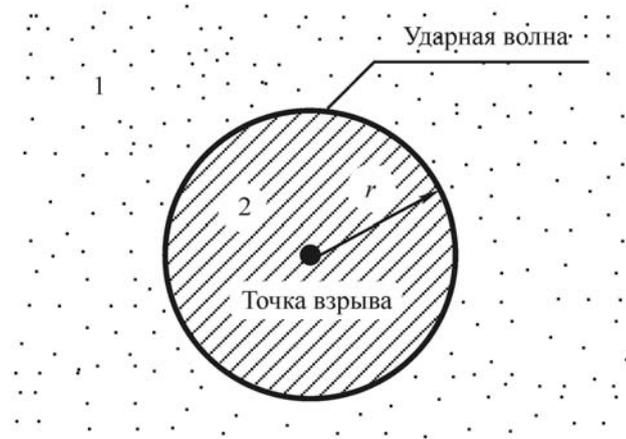


Рис. 3.4. Распространение сферической ударной волны от точки взрыва:
 1 – невозмущенная атмосфера; 2 – движущийся раскаленный газ;
 r – радиус ударной волны

Найдем закон распространения ударной волны $r(t)$. Расстояние r фронта ударной волны от центра взрыва будет зависеть от времени t , энергии взрыва E и начальной плотности невозмущенного воздуха ρ :

$$r = \varphi(t, E, \rho).$$

Давление за фронтом ударной волны на начальной стадии взрыва на несколько порядков выше атмосферного давления, влиянием которого на процесс распространения волны можно пренебречь.

Размерности определяющих параметров:

$$[t] = c, \quad [E] = \text{Дж} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}, \quad [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Очевидно, что $m = n - k = 3 - 3 = 0$, так что функция Φ в выражении (3.11) в данном случае не будет зависеть ни от одного размерного аргумента – она вырождается в константу $\Phi = C = \text{const}$.

Можно получить (далее будут рассмотрены соответствующие методы)

$$\Pi = r \left(\frac{E \cdot t^2}{\rho} \right)^{-1/5} = C, \text{ откуда } r = C \left(\frac{E \cdot t^2}{\rho} \right)^{1/5}.$$

Решение газодинамической задачи о сильном взрыве (Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1977.– 446 с.) показало, что значение константы $C \approx 1$. При этом закон распространения ударной волны будет:

$$r(t) = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/5} \cdot t^{2/5}.$$

Эта формула показывает, что если измерить радиус ударной волны в разные моменты времени, то в логарифмических координатах $\lg t$, $(5/2)\lg r$ экспериментальные точки должны лечь на прямую, имеющую наклон 45° к оси $\lg t$ (рис. 3.5):

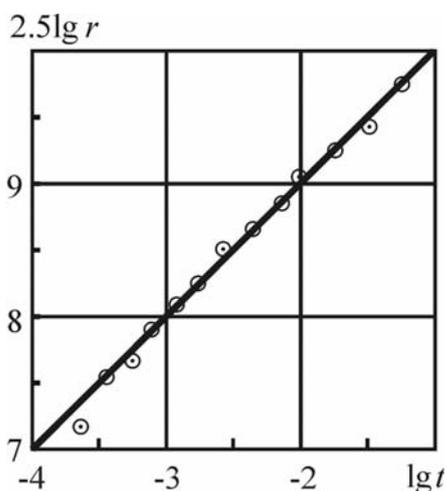


Рис. 3.5. Закон распространения сферической ударной волны от точечного взрыва ($[t]=с$; $[r]=м$)

$$\frac{5}{2} \lg r = \frac{1}{2} \lg \frac{E}{\rho} + \lg t.$$

Английский ученый Дж. Тейлор обработал кинофильм о распространении огненного шара, снятый Дж. Маком во время первого американского взрыва атомной бомбы в Нью-Мехико в 1945 г. Из обработки экспериментальной зависимости, приведенной на рис. 3.5, было получено, что

$$\frac{1}{2} \lg (E/\rho) \approx 7.$$

Полагая $\rho \approx 1 \text{ кг/м}^3$, определим энергию взрыва:

$$E = 10^{13} \text{ Дж} = 10 \text{ ТДж}$$

(тераджоулей), то есть десять миллионов мегаджоулей. Публикация Дж. Тейлором этой величины (Proc. Royal Soc. 1950. – Vol. 201, No. 1065. – P. 159–168) вызвала в свое время немалое смущение в правительственных кругах США, так как эта цифра считалась строго секретной, хотя фильм Дж. Мака не был засекречен.

3.5. АЛГОРИТМЫ ПОЛУЧЕНИЯ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Основные критерии подобия, описывающие исследуемый процесс, можно получить двумя способами – с помощью метода анализа размерностей и путем анализа дифференциальных уравнений.

Метод анализа размерностей (алгебраический метод Рэлея)

Рассмотрим практическое применение метода анализа размерностей на примере задачи о теплообмене при стационарном турбулентном течении теплоносителя (газа или жидкости) в трубе. Эта задача формулируется как определение коэффициента теплоотдачи α в зависимости от размеров трубы и характеристик потока. Физический анализ рассматриваемой задачи показывает, что характеристики теплообмена зависят от скорости u , плотности ρ , удельной теплоемкости c , коэффициента теплопроводности λ и коэффициента динамической вязкости μ теплоносителя, а также от диаметра трубы D . Длина трубы и время исключены из числа определяющих параметров, так как рассматривается стационарный процесс.

Размерности этих величин в системе СИ следующие:

$$[\alpha] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}}; \quad u = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad [c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$
$$[\lambda] = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{К} \cdot \text{с}}; \quad [\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}}; \quad [D] = \text{м}.$$

Согласно П-теореме, процесс теплообмена зависит от трех безразмерных комплексов (поскольку число размерных параметров $n = 7$, а количество единиц с независимой размерностью $k = 4$: кг, м, с, К).

Искомую величину коэффициента теплоотдачи можно представить в виде:

$$\alpha = C w^{x_1} c^{x_2} \lambda^{x_3} \mu^{x_4} D^{x_5}, \quad (3.14)$$

где C – безразмерный коэффициент; $w = \rho u$ – массовая скорость $\left([w] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \right)$, введенная для упрощения расчетов.

Подставим размерности соответствующих величин в (3.14):

$$\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}} \right] = C \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \right]^{x_1} \cdot \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right]^{x_2} \cdot \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{К} \cdot \text{с}} \right]^{x_3} \left[\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \right]^{x_4} \cdot [\text{м}]^{x_5}. \quad (3.15)$$

Отметим, что в уравнении (3.15) размерность тепловой энергии можно представить через размерности основных единиц

($[\text{Дж}] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$) и получить уравнение, аналогичное (3.15), но не содержащее Дж. Однако на результат решения задачи это не повлияет.

Поскольку размерности левой и правой частей уравнения (3.15) должны быть одинаковы, суммируя показатели степеней при одинаковых единицах измерений, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} [\text{Дж}]: \quad 1 = x_2 + x_3, \\ [\text{кг}]: \quad 0 = x_1 - x_2 + x_4, \\ [\text{м}]: \quad -2 = -2x_1 - x_3 - x_4 + x_5, \\ [\text{с}]: \quad -1 = -x_1 - x_3 - x_4, \\ [\text{К}]: \quad -1 = -x_2 - x_3. \end{array} \right\}$$

Решение полученной системы алгебраических уравнений дает следующие зависимости между показателями степеней x_i :

$$x_3 = 1 - x_2; \quad x_4 = x_2 - x_1; \quad x_5 = x_1 - 1. \quad (3.16)$$

Подставляя полученные зависимости (3.16) в исходное уравнение (3.14), получим

$$\alpha = C w^{x_1} c^{x_2} \lambda^{1-x_2} \mu^{x_2-x_1} D^{x_1-1}.$$

Преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$\left(\frac{\alpha D}{\lambda} \right)^1 = C \left(\frac{w \cdot D}{\mu} \right)^{x_1} \cdot \left(\frac{c \cdot \mu}{\lambda} \right)^{x_2}. \quad (3.17)$$

Входящие в уравнение (3.17) безразмерные комплексы представляют собой искомые критерии подобия:

$$\frac{\alpha D}{\lambda} = \text{Nu} \text{ – число Нуссельта,}$$

$$\frac{w D}{\mu} = \frac{\rho u D}{\mu} = \text{Re} \text{ – число Рейнольдса,}$$

$$\frac{c \mu}{\lambda} = \text{Pr} \text{ – число Прандтля.}$$

Таким образом, (3.17) представляет собой *критериальное уравнение* вида

$$\text{Nu} = C \text{Re}^a \text{Pr}^b,$$

где константы C , a , b находятся при проведении соответствующих экспериментов.

В частности, при турбулентном течении в длинной ($L/D > 50$) цилиндрической трубе для расчета числа Нуссельта используется формула

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,33},$$

справедливая в диапазоне $Re = 10^4 \div 10^5$, $Pr < 200$ (Лыков А.В. Теплообмен: Справочник.– М.: Энергия, 1978. – 480 с.).

При использовании метода анализа размерностей основным и первоначальным этапом в постановке задачи является выбор модели и схематизация свойств искомого решения. Опыт показывает, что постановка задачи и выбор существенных определяющих размерных параметров представляют собой наибольшую трудность.

Успешное решение задачи зависит от правильного выбора физических величин, влияющих на процесс, что полностью определяется физической интуицией и опытом инженера-исследователя. Не пропустить важные определяющие параметры и не включить в их число малосущественные параметры – вот главная цель анализа задачи.

Неучет какой-либо существенной величины (ориентация трубы при течении тяжелой жидкости, например) может привести к неверным критериальным уравнениям. То же самое будет и при выборе несущественных величин (учет силы тяжести при течении легкого газа в трубе, например). Отметим, что при большом числе размерных параметров задачи трудно выбрать безразмерные комплексы, имеющие ясный физический смысл.

Для оценки значимости некоторой размерной величины при описании конкретного физического процесса можно рекомендовать следующий прием. Как правило, удачно составленные критерии подобия представляют собой отношения конкурирующих сил. Если величины критерия подобия стремятся к нулю (или к бесконечности), то соответствующими силами можно пренебречь.

Например, число Рейнольдса определяет соотношение между силами инерции и силами трения в движущейся жидкости. При $Re \rightarrow 0$ силами инерции можно пренебречь (ползущее течение), а при $Re \rightarrow \infty$ можно не учитывать силы трения, то есть коэффициент динамической вязкости (течение идеальной жидкости).

Метод анализа дифференциальных уравнений

Использование метода анализа дифференциальных уравнений для получения критериев подобия возможно, если известен рассматриваемый физический процесс (который, собственно, и описывается соответствующими уравнениями). Если же процесс *a priori* неизвестен, то для нахождения критериев подобия целесообразно использовать алгебраический метод Рэлея.

Рассмотрим этот подход на примере уравнения стационарного конвективного теплообмена:

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{cm},$$

где q – тепловой поток в стенку, λ – коэффициент теплопроводности,

$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{cm}$ – градиент температуры у поверхности стенки.

Рассмотрим две подобные в тепловом отношении системы (подобны тепловые потоки). При этом соблюдается также геометрическое и гидродинамическое подобие.

В соответствии с законом теплообмена Ньютона

$$q = \alpha \cdot \Delta T,$$

где α – коэффициент теплоотдачи;

ΔT – разность температур теплоносителя и стенки.

Подставляя q в уравнение теплообмена, получим

$$\alpha \cdot \Delta T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Для двух подобных систем соответствующие уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \cdot (\Delta T)_1 &= -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y_1}, \\ \alpha_2 \cdot (\Delta T)_2 &= -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Обозначим через C_i отношения соответствующих параметров систем:

$$C_\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}; \quad C_T = \frac{T_2}{T_1} = \frac{(\Delta T)_2}{(\Delta T)_1}; \quad C_y = \frac{y_2}{y_1}; \quad C_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (3.19)$$

Выражая переменные второй системы через переменные первой, получим для второй системы

$$C_\alpha C_T \alpha_1 (\Delta T)_1 = -\frac{C_\lambda C_T}{C_y} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y_1}.$$

Из условия тождественности рассматриваемых систем имеем

$$C_\alpha C_T = \frac{C_\lambda C_T}{C_y},$$

или связь между C_i :

$$\frac{C_\alpha \cdot C_y}{C_\lambda} = 1. \quad (3.20)$$

Из (3.19) и (3.20) следует

$$\frac{\alpha_1 \cdot y_1}{\lambda_1} = \frac{\alpha_2 \cdot y_2}{\lambda_2} = \text{idem} = \text{Nu}.$$

Таким образом, получили критерий подобия рассматриваемого процесса – число Нуссельта.

Выведем критерий механического подобия методом анализа дифференциальных уравнений. Рассмотрим две подобные механические системы – движущиеся тела. Их движение подчиняется второму закону Ньютона, выраженному в форме дифференциального уравнения

$$F = m \frac{du}{dt}, \quad (3.21)$$

где m – масса тела; F – движущая сила; u – скорость тела.

Запишем это уравнение для двух подобных систем:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= m_1 \frac{du_1}{dt_1}, \\ F_2 &= m_2 \frac{du_2}{dt_2}. \end{aligned} \right\}$$

По условию подобия физические величины одной системы можно выразить через величины другой (для соответствующих точек) с помощью констант подобия:

$$C_F = \frac{F_2}{F_1}; \quad C_m = \frac{m_2}{m_1}; \quad C_u = \frac{u_2}{u_1}; \quad C_t = \frac{t_2}{t_1}.$$

Выражая переменные второй системы через соответствующие переменные первой системы и подставляя в исходное уравнение, получим:

$$C_F F_1 = C_m \frac{C_u}{C_t} m_1 \frac{du_1}{dt_1}.$$

Уравнение будет тождественно исходному только при условии равенства коэффициентов:

$$C_F = C_m \frac{C_u}{C_t}, \quad \frac{C_F C_t}{C_m C_u} = 1.$$

Аналогично предыдущей задаче получим:

$$\frac{F_1 t_1}{m_1 u_1} = \frac{F_2 t_2}{m_2 u_2} = \frac{F t}{m u} = \text{idem} = \text{Ne},$$

где Ne – критерий механического подобия (критерий Ньютона).

Формально метод анализа дифференциальных уравнений сводится к обезразмериванию системы уравнений.

Приведем уравнение движения (3.21) к безразмерному виду.

Для этого введем масштабы силы F_* , массы m_* , скорости u_* и времени t_* . Уравнение (3.21) в безразмерных переменных $\bar{F} = F/F_*$, $\bar{m} = m/m_*$, $\bar{u} = u/u_*$, $\bar{t} = t/t_*$ имеет вид

$$F_*\bar{F} = m_*\bar{m} \frac{u_*}{t_*} \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}}, \quad \bar{F} = A\bar{m} \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}},$$

где $A = \frac{m_*u_*}{t_*F_*}$ – безразмерный коэффициент при производной.

Таким образом, $Ne = A^{-1} = \frac{F_*t_*}{u_*m_*}$ – искомый критерий подобия (критерий Ньютона).

3.6. ОСНОВНЫЕ КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Критерии подобия обычно называют именами ученых, их определивших либо имеющих большие заслуги в соответствующей области физики. Критерии подобия имеют, как правило, явный физический смысл (очень часто – отношение некоторых двух сил, действующих на рассматриваемую систему).

По мере развития отдельных разделов физики количество критериев подобия постоянно увеличивается, и этот процесс продолжается и будет продолжаться. Некоторые критерии подобия относятся к узкому классу физических явлений, например, критерий эрозионного горения твердых ракетных топлив Vi , введенный профессором Томского государственного университета В.Н. Вилюновым.

К числу универсальных критериев подобия, играющих важную роль во многих инженерно-физических задачах, относятся геометрические, механические, гидродинамические, теплодиффузионные и кинетические критерии подобия.

1. *Геометрические критерии* выражаются симплексами (отношениями однородных величин, характеризующих размеры системы)

$$l/d, l^2/d^2, l^3/d^3$$

и определяют отношение линейных размеров, площадей и объемов различных элементов рассматриваемых систем. Кроме того, размеры могут относиться к рабочим средам и процессам (диаметр частиц дисперсной фазы в потоке, площадь миделева сечения обтекаемого тела, размеры исследуемых образцов и т. д.).

2. Основным критерием *механического подобия* систем является критерий Ньютона

$$Ne = \frac{Ft}{mu} = \frac{Fl}{mu^2}.$$

3. В случае механического подобия двух систем произведение силы F на длину l , деленное на массу m и квадрат скорости u^2 для любой пары сходственных точек реального объекта и модели, имеет одно и то же численное значение.

Гидродинамические критерии характеризуют особенности течения жидкости или газа, а также условия обтекания тел внешним потоком. Для оценки подобия гидродинамических процессов можно применить критерий Ньютона. При этом в качестве действующей на систему силы F необходимо рассматривать силу трения, силу давления, силу тяжести, силу сопротивления среды и т. п.

Число Рейнольдса

При движении вязкой жидкости в потоке возникает сила трения

$$F_{тр} = \mu S \frac{du}{dy},$$

где μ – коэффициент динамической вязкости;

$S = y^2$ – площадь трения;

du/dy – поперечный градиент скорости.

Подставляя в критерий Ньютона $F_{тр}$ и $m = \rho l^3$ (ρ – плотность жидкости), получим

$$Ne = \frac{\mu}{\rho u^2} \frac{du}{dy}.$$

После интегрирования уравнения

$$Ne \int dy = \frac{\mu}{\rho} \int \frac{du}{u^2}$$

получим критерий подобия в виде

$$Ne = \frac{\mu}{\rho u y}.$$

Комплекс

$$Re = Ne^{-1} = \frac{\rho u y}{\mu}$$

называется числом Рейнольдса.

В качестве характерного размера u обычно принимается диаметр канала или диаметр обтекаемого тела.

Критерий (число) Рейнольдса определяет соотношение между силами инерции и силами трения в потоке. Число Рейнольдса является одним из важнейших гидродинамических критериев подобия. В частности, оно характеризует условия ламинарно-турбулентного перехода режима течения при достижении некоторого критического значения числа Рейнольдса ($Re > Re_{кр}$).

Число Эйлера

При описании движения потока под действием перепада давления между некоторыми точками силу F в критерии Ньютона заменим силой гидростатического давления Δp , действующей на площадку $S = l^2$. Подставляя в критерий Ньютона $F = \Delta p \cdot l^2$, $m = \rho l^3$, получим

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho u^2},$$

где Δp – перепад давления (гидродинамическое сопротивление).

Число Эйлера характеризует соотношение сил давления и сил инерции в подобных потоках.

Число Фруда

Подставляя в критерий Ньютона силу тяжести $F = mg$, получим

$$Ne = \frac{gl}{u^2}.$$

Комплекс

$$Fr = Ne^{-1} = \frac{u^2}{gl}$$

называется числом Фруда.

Число Фруда характеризует подобие процессов, идущих при действии силы тяжести, и выражает соотношение сил тяжести и сил инерции.

Число Маха

Для движения сжимаемой жидкости (газа) при больших скоростях u в качестве критерия подобия используют число Маха

$$M = \frac{u}{c},$$

где c – скорость звука в рассматриваемой жидкости.

Число Маха учитывает влияние сжимаемости жидкости на характер ее движения.

Число Кнудсена

$$\text{Kn} = \frac{l}{l_0},$$

где l – длина свободного пробега молекул; l_0 – характерный размер в поле течения.

Этот критерий характеризует влияние разреженности газа на характер течения.

Число Струхалия (критерий гомохронности)

При описании нестационарного движения жидкости используется число Струхалия, характеризующее соотношение между силой инерции $\rho u^2/l$ и величиной $\rho u/\tau$, учитывающей влияние нестационарности движения на скорость жидкости:

$$\text{Str} = \frac{u\tau}{l},$$

где l – характерный размер;

τ – характерный интервал времени.

Более подробная сводка гидродинамических критериев подобия приведена в Приложении 6.

4. Тепловые критерии подобия

Число Нуссельта (безразмерный коэффициент теплоотдачи)

$$\text{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

характеризует соотношение между конвективным переносом теплоты от жидкости к поверхности тела и переносом теплоты теплопроводностью через пограничный слой жидкости (α – коэффициент теплоотдачи, l – характерный размер, λ – коэффициент теплопроводности жидкости).

В задачах конвективного теплообмена число Нуссельта обычно является искомой величиной.

Число Пекле

$$\text{Pe} = \frac{ul}{\alpha}$$

характеризует соотношение между конвективным и молекулярным переносом теплоты в потоке (u – скорость потока; $\alpha = \lambda/\rho c$ – коэффициент температуропроводности; ρ, c – плотность, удельная теплоемкость жидкости).

Число Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c}{\lambda}$$

является критерием подобия температурного и скоростного полей, а также характеризует свойства теплоносителя (μ , $\nu = \mu/\rho$ – коэффициенты динамической и кинематической вязкости).

Число Прандтля представляет собой комбинацию чисел Рейнольдса и Пекле:

$$\text{Pr} = \frac{\text{Pe}}{\text{Re}}.$$

Число Стентона

$$\text{St} = \frac{\alpha}{\rho u c}$$

характеризует соотношение между интенсивностью конвективной теплоотдачи и удельным теплосодержанием потока.

Число Стентона используется иногда вместо числа Нуссельта и представляет собой комбинацию чисел Нуссельта, Рейнольдса и Прандтля:

$$\text{St} = \frac{\text{Nu}}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}.$$

Число Био (критерий теплового подобия)

$$\text{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda_{cm}}$$

является мерой отношения внутреннего термического сопротивления (l/λ_{cm}) к внешнему термическому сопротивлению ($1/\alpha$).

λ_{cm} – коэффициент теплопроводности твердого тела.

По структуре число Био напоминает число Нуссельта, но имеет иной физический смысл.

Число Фурье

$$\text{Fo} = \frac{\alpha \tau}{l^2}$$

является критерием тепловой гомохронности и характеризует связь между темпом изменения условий в окружающей среде и темпом перестройки температурного поля внутри тела (τ – характерное время).

Число Фурье применяется при изучении нестационарного теплообмена.

5. Диффузионные критерии подобия

Число Шервуда (диффузионное число Нуссельта)

$$\text{Sh} = \text{Nu}_D = \frac{\alpha_D l}{D}$$

характеризует соотношение между интенсивностью конвективного массообмена и молекулярной диффузией в пограничном слое потока (α_D – коэффициент массоотдачи; D – коэффициент диффузии).

Этот критерий используется при изучении диффузии в вынужденном потоке и является безразмерным коэффициентом массоотдачи.

Число Шмидта (диффузионное число Прандтля)

$$Sc = Pr_D = \frac{\nu}{D}$$

характеризуется отношением коэффициентов кинематической вязкости и диффузии.

Число Льюиса–Семенова

$$Le = \frac{D}{\alpha}$$

характеризует соотношение диффузионных и тепловых молекулярных переносов.

6. Кинетические критерии подобия

Первое число Дамкелера

$$Da_1 = \frac{k \cdot l_0}{u},$$

где u – гидродинамическая скорость потока; k – константа скорости химической реакции; l_0 – характерный размер.

Этот критерий характеризует соотношение между скоростью протекания химической реакции и гидродинамической скоростью потока.

Второе число Дамкелера

$$Da_2 = \frac{Q}{c_p \cdot T},$$

где Q – тепловой эффект химической реакции; c_p – удельная изобарическая теплоемкость; T – температура.

Этот критерий характеризует соотношение между тепловым эффектом химической реакции и энтальпией компонентов.

Критерий Аррениуса

$$Arn = \frac{E}{RT}$$

является соотношением энергии активации E и температуры (R – универсальная газовая постоянная) и характеризует чувствительность скорости протекания химической реакции к изменению температуры.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

После того как установка для исследования рассматриваемого физического процесса собрана и отлажена, проведена оценка погрешностей измерений, выбраны критерии подобия, можно приступить непосредственно к проведению серии экспериментов. Однако перед этим необходимо составить рациональный план эксперимента. Без наличия такого плана результативность эксперимента будет значительно снижена. Может быть перекрытие или дублирование измерений некоторых параметров, в то время как другие параметры будут оценены недостаточно точно, может быть недостаточный контроль за условиями эксперимента, либо может вообще отсутствовать контроль за изменением внешних условий.

Рассмотрим способы рационального *планирования эксперимента*, позволяющие сократить время его проведения, свести к минимуму погрешности, получить максимально полезные данные и осуществлять максимальный контроль за внешними и посторонними воздействиями.

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛА МЕЖДУ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

При исследовании физических процессов очень важно оценить точный объем экспериментальной работы. При слишком малом объеме опытных данных может оказаться невозможным найти закон или функцию, описывающую данный процесс, можно не обнаружить какой-либо слабый эффект, имеющий важное теоретическое значение. При измерении некоторой физической константы можно получить низкую точность.

С другой стороны, при слишком большом объеме получаемых данных эксперимент длится очень долго, обработка данных затягивается, а также затрудняется обобщение полученных результатов. В некоторых экспериментах чрезмерное количество данных, по существу, препятствует обнаружению важных физических эффектов.

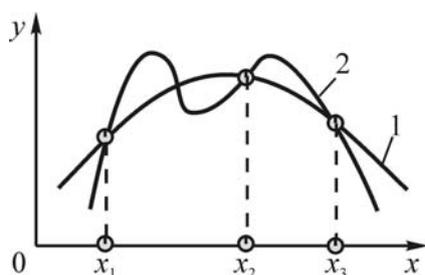


Рис. 4.1.

Недостаток опытных данных:
1 — измеренная зависимость (x) ;
2 — реальная зависимость $y(x)$

Пример проведения экспериментов с недостатком опытных данных приведен на рис. 4.1. При изучении некоторой физической закономерности $y = f(x)$ по трем измеренным точкам можно получить плавную кривую 1. Однако при этом возможна потеря информации о поведении $f(x)$ в промежуточных точках, и измеренная зависимость 1 может существенно отличаться от реальной (кривая 2).

Пример проведения экспериментов с избытком опытных данных приведен на рис. 4.2.

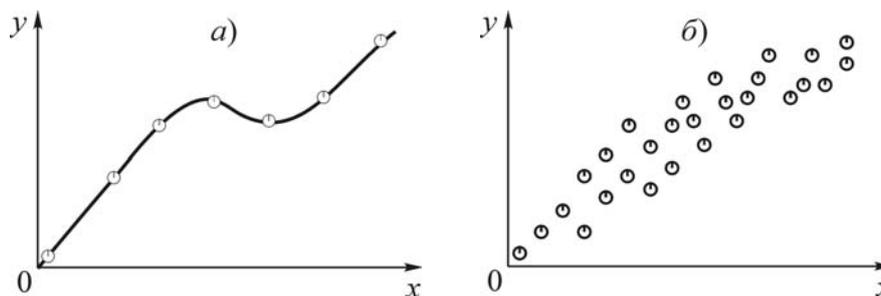


Рис. 4.2. Избыток опытных данных:
а – отдельный образец; б – группа образцов

При проверке зависимости деформации x от напряжения y в отдельном образце, находящемся под действием растягивающей нагрузки, для некоторых сортов стали обнаруживается небольшое уменьшение напряжения в конце области упругих деформаций (рис. 4.2, а). Допустим теперь, что испытывается несколько образцов, для каждого из которых этот спад может быть несколько смещен относительно оси x или оси y по сравнению с другими образцами. Если все точки нанести на график, не делая различий между образцами, то этот спад может полностью исчезнуть (рис. 4.2, б).

План эксперимента будет компактным и эффективным, если заранее установить интервалы между значениями переменных. Если мы ищем функциональное соотношение между независимой переменной x и зависимой переменной y , то функцию $y(x)$ можно изобразить в виде некоторой кривой (или прямой) в системе координат (x, y) . Такая кривая состоит из бесконечного числа отдельных точек, из которых необходимо выбрать некоторое конечное практически приемлемое число точек, представляющих данную функцию (однофакторный эксперимент). Если рассматривается функция двух и более независимых переменных, например $z(x, y)$, то полной совокупности данных соответствует некоторая плоскость и т. д. (многофакторный эксперимент).

Таким образом, выбор конечной совокупности опытных точек является необходимым этапом планирования, который проводится до начала

эксперимента. Очевидно, что выбор опытных точек следует начинать с определения экстремальных показаний измерительной аппаратуры, так как это позволит получить область исследуемых значений, охватывающую всю совокупность данных (минимальное и максимальное значения теплового потока при зажигании твердых ракетных топлив, минимальное и максимальное значения скорости капель в установке для изучения их деформации и т. д.). То есть определяются границы возможности данной установки: предельное давление, создаваемое компрессором, температура плавления металла, предельный расход жидкости, обусловленный диаметром трубы, и другие параметры.

В случае простой функции $y(x)$ между двумя точками кривой находятся все остальные. Область задания функции $z(x, y)$ представляет собой некоторый участок плоскости (x, y) или карту, и для определения границ этой области может потребоваться большее количество точек. Функции, содержащие большее количество переменных, разбиваются на несколько таких карт.

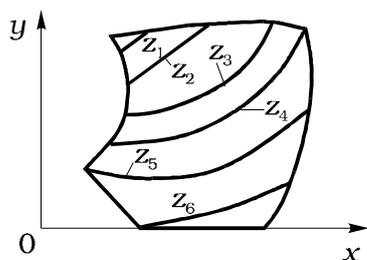


Рис. 4.3. Возможная область значений переменных x и y при различных значениях параметра z

Рассмотрим критерии выбора интервалов между точками функции $y(x)$. Отметим, что функцию $z(x, y)$ можно представить как множество функций $y(x)$, как показано на рис. 4.3. Величина z выступает здесь как параметр. Такие графики называют номограммами.

Существует два основных критерия выбора экспериментальных точек.

Относительная погрешность данных на различных участках области исследуемых значений

Во многих случаях получаемые данные имеют разную погрешность на различных участках исследуемого диапазона (x_{\min} , x_{\max}). Если анализ погрешностей показывает, что на каком-то участке данные вызывают наибольшее сомнение, то этот участок заполняется большим числом точек. Например, измерение зависимости угловой скорости вращения турбинки расходомера от расхода газа проводится с большими погрешностями в области малых расходов. Для оценок можно использовать следующее правило: четыре точки дают вдвое большую, а девять точек – втрое большую точность, чем одна точка. Если точность на одном участке оказалась в десять раз выше, чем на другом, то теоретически на

участке худшей точности следовало бы взять в сто раз больше отсчетов. Однако это неразумно с практической точки зрения, и в таких случаях необходимо руководствоваться здравым смыслом.

Характер экспериментальной функции

Если характер исследуемой экспериментальной зависимости заранее неизвестен, то целесообразно выбрать план эксперимента с одинаковыми интервалами между точками. В большинстве инженерных экспериментов характер измеряемой функции частично или полностью известен. Рассмотрим, например, измерение потерь давления в гидравлической магистрали за счет утечки через прокладку. Из гидравлики известно, что измеряемая функция должна иметь следующий вид:

$$\Delta p = k \frac{\rho u^2}{2}, \quad (4.1)$$

где Δp – потери давления; u – скорость жидкости; k – коэффициент, который может либо оставаться постоянным при изменении u либо слабо зависеть от скорости жидкости.

Если общая функция известна точно или предположительно, то равномерное изменение одной из переменных вряд ли является оптимальным планом эксперимента. Если мы будем изменять регулируемый параметр u через равные промежутки Δu , то получим график, приведенный на рис. 4.4. Очевидно, что такой выбор интервалов неоптимален. На участке больших значений скорости точек недостаточно, а на участке малых скоростей они в избытке.

Вместо этого можно выбрать точки таким образом, чтобы получить одинаковые приращения Δp (рис. 4.5). Здесь концентрация точек выше в области больших скоростей. Во многих случаях измерения малых давлений характеризуются большой погрешностью, поэтому план эксперимента, в котором берутся одинаковые интервалы между значениями скорости (см. рис. 4.4), может оказаться более удачным.

Допустим теперь, что погрешность измерений одинакова для всех значений u и Δp . В этом случае необходимо, чтобы между точками были заключены одинаковые отрезки экспериментальной кривой ΔS . Для любой непрерывной дифференцируемой кривой $y(x)$ общее выражение для ΔS имеет вид

$$\Delta S = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \Delta x. \quad (4.2)$$

Для рассматриваемой функции (4.1)

$$\Delta S = \Delta u \sqrt{1 + (kru)^2}.$$

Если между двумя заданными точками при u_1 берется интервал Δu_1 , то следующий интервал Δu_2 находится (при $\Delta S_1 = \Delta S_2$) из соотношения

$$\Delta u_2 = \Delta u_1 \sqrt{\frac{1 + (kru_1)^2}{1 + (kru_2)^2}},$$

где u_2 – скорость в начале следующего интервала.

Определяя таким путем интервал за интервалом, получим компактный и логически обоснованный график (рис. 4.6).

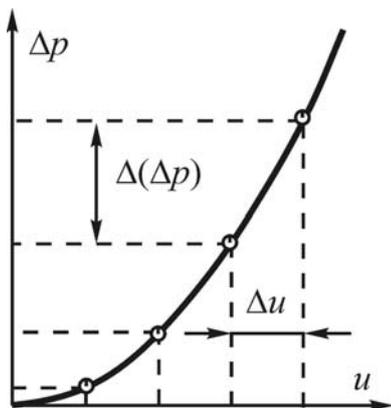


Рис. 4.4.
График зависимости $\Delta p(u)$ с равными приращениями Δu

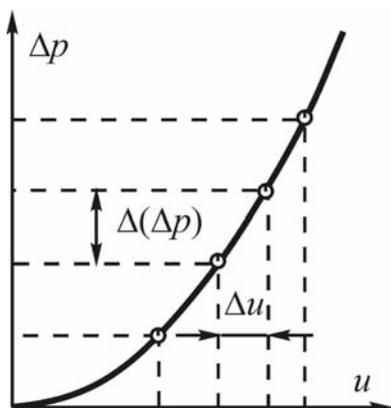


Рис. 4.5.
График зависимости $\Delta p(u)$ с равными приращениями Δp

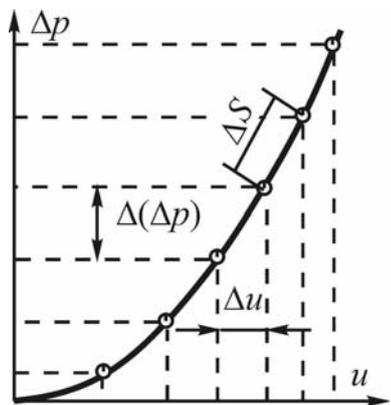


Рис. 4.6.
График зависимости $\Delta p(u)$ с одинаковым интервалом ΔS вдоль кривой

К сожалению, для многих экспериментов рассмотренный выше метод неприемлем. Основной целью эксперимента по измерению $\Delta p(u)$ является нахождение коэффициента k . При определении интервалов между значениями переменных по формуле (4.2) необходимо знать k . Таким образом, необходимо использовать другие методы, не требующие полного знания исследуемой функции.

Если ожидается, что функция будет простой, то с помощью алгебраических преобразований ее можно привести к линейному виду. В частности, зависимость (4.1) можно представить в виде

$$\ln \Delta p = \ln \frac{k\rho}{2} + 2 \ln u .$$

Построив график $\ln \Delta p = f(\ln u)$, можно получить кривую с равномерным распределением точек, взяв одинаковые приращения $\ln u$, а не u .

Рассмотрим другие примеры аналогичных преобразований. На графике величины

$$y = \frac{a + b}{x^2},$$

где a, b – некоторые константы, равномерное расположение точек получится, если взять одинаковые приращения для $1/x^2$.

Для функции $y = a \exp(-bx)$ или $\ln y = \ln a - bx$ следует построить график для $\ln y$ как функции x , взяв одинаковые приращения x . Для функции $y = a \ln bx$ или $y = a(\ln b + \ln x)$ следует построить график для y как функции $\ln x$, взяв одинаковые приращения $\ln x$.

Отметим, что выбор интервалов между точками производится не для того, чтобы получить симметричную или «удобную» кривую. Единственной причиной выбора интервалов между точками является стремление к тому, чтобы в любой части экспериментальной кривой или карты иметь такую же точность, как и в любой другой.

4.2. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

После выбора интервалов между точками (уровней независимых переменных) необходимо установить последовательность проведения измерений (план эксперимента). В ряде случаев возможность выбора последовательности работы мала или вообще отсутствует, например, при проведении астрономических наблюдений.

В технике и инженерно-физическом эксперименте обычно используют последовательный или рандомизированный планы. При использовании *последовательного плана* изменение независимых переменных

происходит регулярно в возрастающей или убывающей последовательности. Вначале можно взять верхнее или нижнее предельное значение независимой переменной и изменять его скачкообразно до тех пор, пока не будет достигнуто другое предельное значение.

При использовании *рандомизированного (случайного) плана* выбранные значения независимой переменной чередуются чисто случайным образом (может быть выбрано то большее, то меньшее значение) по какому-либо нерегулярному правилу (бросание игральной кости, вытаскивание карт из колоды, использование случайных чисел и т. д.).

Выбор плана (последовательный или рандомизированный) зависит от того, является эксперимент невозпроизводимым или воспроизводимым. Невозпроизводимый эксперимент протекает во времени без возможности его изменения или повторения. Например, испытание материала на действие растягивающей нагрузки. Допустим, мы решили прикладывать заранее выбранные значения нагрузки случайным образом в следующей последовательности: 3; 0,5; 0,45; 0,75 кН и т. д.

Такой план, безусловно, будет неправильным. Первоначальная нагрузка превышает предел упругих деформаций, поэтому образец приобретает остаточную деформацию, и все последующие измерения будут проводиться на деформированном образце.

Другими примерами невозпроизводимых экспериментов являются такие, в которых высокие температуры, радиационные поля или большие давления изменяют кристаллическую структуру исследуемого образца. Строго говоря, все эксперименты невозпроизводимы (ни один образец или прибор после использования не возвращается к исходному состоянию). Если изменения, вносимые в ходе эксперимента, настолько малы, что их невозможно обнаружить, то такие эксперименты считаются воспроизводимыми. Очевидно, что для невозпроизводимых экспериментов, в частности, при проведении испытаний материалов, необходим последовательный план. Для воспроизводимых экспериментов допустим как последовательный, так и рандомизированный план.

Последовательный план необходим также в случаях, когда последовательность получения данных, в свою очередь, является параметром эксперимента. Например, классический эксперимент, связанный с исследованием трения жидкости в трубе. Если при ламинарном режиме плавно увеличивать число Рейнольдса, то поток сохраняет ламинарность в области ламинарно-турбулентного перехода при достижении некоторого критического значения $Re_{кр}$, а при плавном уменьшении числа Рейнольдса наблюдается обратная картина (сохранение турбулентности потока). При случайном выборе числа Рейнольдса (то в области ламинарного, то в

области турбулентного потока) маловероятно, чтобы такой тонкий эффект был обнаружен вообще. Здесь сама последовательность условий является определенным параметром. Аналогичная картина наблюдается при испытании катушки индуктивности с железным сердечником, когда форма петли гистерезиса может зависеть от предыдущей рабочей точки.

Для большинства воспроизводимых экспериментов подходит частично или полностью рандомизированный план, который позволяет исключить любые регулярные изменения, обусловленные окружающими условиями, обслуживающим персоналом и дефектами измерительной аппаратуры.

Если независимая переменная x варьируется монотонно, то зависимая переменная y может изменяться как вследствие изменения x , так и вследствие изменения внешних условий (атмосферное давление, температура окружающей среды, влажность воздуха и т. д.), которые могут постепенно изменяться в процессе эксперимента. Если же переменная x изменяется случайным образом, то исключается возможность ошибочно принять влияние внешних условий за влияние переменной x .

Наиболее важной причиной применения рандомизированных планов является возможное изменение переменной x за счет механических воздействий, вызванных дефектами испытательной аппаратуры. Допустим, что в измерительном приборе, регуляторе, манометре и т. п. наблюдается «заедание». Если предыдущий отсчет находился в верхней части диапазона, то прибор покажет завышенное значение, если же предыдущий отсчет находился в нижней части диапазона, то «заедание» прибора приведет к заниженному показанию.

В итоге общий результат эксперимента будет иметь систематическую постоянную погрешность (положительную или отрицательную), которую трудно обнаружить. При случайном же выборе точек количество отсчетов, полученных при переходе от больших значений к меньшим, будет примерно равно количеству отсчетов, полученных при переходе от меньших к большим значениям. Полученные данные могут иметь разброс, но они будут группироваться вокруг точных значений.

Приведем некоторые примеры таких измерений с «заеданием» прибора. В экспериментах, связанных с теплопередачей и испытанием двигателей, возникают ошибки, обусловленные тем, что не достигается установившееся состояние. При использовании последовательного плана мы всегда будем находиться по одну и ту же сторону относительно стационарных условий (слишком высокая или слишком низкая температура) и получим систематическую ошибку. Манометры с засорившимися трубками, трубопроводы под давлением с небольшими утечками ведут себя как приборы с «заеданием».

Для рандомизации многих экспериментов можно использовать какой-либо простой «игровой» метод. Например, выбранные комбинации

условий можно пронумеровать, а номера вытаскивать как при жеребьевке. Кроме того, можно использовать метод бросания одной или нескольких игральных костей или таблицы случайных чисел для выбора последовательности изменения условий эксперимента (для составления рандомизированного плана эксперимента).

4.3. ОДНОФАКТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Рассмотрим однофакторные эксперименты, имеющие одну независимую (регулируемую) переменную x и зависимую переменную (результат) y . Даже для таких простейших экспериментов, в которых рассматривается только одна независимая переменная (фактор), необходимо учитывать влияние различных других, нерегулируемых, или внешних факторов (изменение температуры, давления, влажности, колебания работоспособности операторов и т. п.). Если внешние факторы изменяются непрерывно с течением времени, то их влияние компенсируют путем простой рандомизации, как показано выше.

В ряде однофакторных экспериментов внешние переменные могут быть дискретными (группы людей, различные станки или приборы, различные производственные периоды или партии материалов, различные дни недели или времена года и т. д.). Исключить влияние многих внешних факторов или ввести поправку на их воздействие невозможно. Для минимизации их влияния используется рандомизация, позволяющая распределить воздействие внешних факторов более или менее равномерно по всем условиям эксперимента. Если дискретные внешние факторы могут быть идентифицированы, то используется метод *рандомизирования блоков или квадратов* (латинских, греко-латинских, решетчатых, квадратов Юдена и т. д.).

Метод латинских квадратов

Рассмотрим суть метода на следующем примере. Пусть требуется определить оптимальную скорость обработки для резца, обеспечивающую максимальную производительность при заданном проценте брака в производственных условиях. Это однофакторный эксперимент, в котором независимая переменная x – скорость обработки, а зависимая переменная y – выход продукции. В таком эксперименте имеются внешние переменные. Одна из них – токарь, обслуживающий станок. Каждый из 20 токарей, например, может отличаться по мастерству, темпераменту, физической силе и т. п. Поэтому выберем случайным образом четырех токарей (A, B, C, D), каждый из которых будет работать полную смену при заданной x . Чтобы сбалансировать эксперимент, выберем четыре различные скорости обработки (x_1, x_2, x_3, x_4), с тем чтобы каждый токарь за четыре дня отработал каждую из четырех скоростей. При этом результаты, полученные для каждой скорости, можно усреднить. Этим достигается рандомизация экспери-

мента по такой внешней переменной, как токарь. План эксперимента можно представить в виде квадрата (табл. 4.1).

Таблица 4.1

| Токарь | Дни недели | | | |
|--------|------------|-------|-------|-------|
| | Пн | Вт | Ср | Чт |
| А | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
| В | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
| С | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
| Д | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |

Такой план не является оптимальным, поскольку он не учитывает влияние последовательности изменения условий эксперимента. Энтузиазм и интерес, которые вызывает у токаря новый резец в понедельник, к четвергу может ослабнуть, что может привести к снижению производительности. И наоборот, может появиться натренированность, и производительность увеличится.

В плане (табл. 4.1) не проведена рандомизация по такой внешней переменной, как рабочий день. Допустим теперь, что для каждого токаря выбор x производится случайно (по жребию, например) и таким образом рандомизируется последовательность появления x_i (табл. 4.2).

Таблица 4.2

| Токарь | Дни недели | | | |
|--------|------------|-------|-------|-------|
| | Пн | Вт | Ср | Чт |
| А | x_4 | x_2 | x_1 | x_3 |
| В | x_2 | x_3 | x_1 | x_4 |
| С | x_3 | x_2 | x_1 | x_4 |
| Д | x_1 | x_3 | x_4 | x_2 |

Таблица 4.3

| Токарь | Дни недели | | | |
|--------|------------|-------|-------|-------|
| | Пн | Вт | Ср | Чт |
| А | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
| В | x_3 | x_4 | x_1 | x_2 |
| С | x_2 | x_1 | x_4 | x_3 |
| Д | x_4 | x_3 | x_2 | x_1 |

Это более совершенный план, но его можно улучшить. Произведем полную рандомизацию эксперимента таким образом, чтобы в данный день каждая скорость обработки x_i встречалась только один раз и чтобы ни один токарь не использовал одно и то же x_i больше одного дня (табл. 4.3).

Такой план называется *латинским квадратом* и представляет собой частный план в общем семействе так называемых *факторных экспериментов*.

Метод греко-латинских квадратов

Рассмотрим метод на том же примере. Если каждого токаря (А, В, С, Д) закрепить за данным станком (а станки могут значительно отличаться друг от друга), то вследствие различий между станками может появиться систематическая ошибка. Обозначив станки символами z_1, z_2, z_3, z_4 , распределим условия эксперимента между станками таким образом, чтобы каждый токарь обслуживал каждый станок только один день и чтобы на каждой скорости x_i каждый станок работал только один день. В этом случае план эксперимента строится в виде *греко-латинского квадрата* (табл. 4.4), который позволяет усреднить влияние трех внешних факторов – рабочий день, станок и токарь.

Таблица 4.4

| Токарь | Дни недели | | | |
|--------|------------|----------|----------|----------|
| | Пн | Вт | Ср | Чт |
| А | x_1z_1 | x_2z_2 | x_3z_4 | x_4z_3 |
| В | x_3z_2 | x_4z_1 | x_1z_3 | x_2z_4 |
| С | x_2z_3 | x_1z_4 | x_4z_2 | x_3z_1 |
| Д | x_4z_4 | x_3z_3 | x_2z_1 | x_1z_2 |

Можно рассматривать еще одну внешнюю переменную – марку стали, например. Такие квадраты «высокого порядка» редко используются на практике из-за трудности получения требуемых комбинаций пяти и большего числа переменных, когда все они берутся при одинаковом количестве уровней (в данном случае при четырех уровнях). Отметим, что квадрат 6×6 возможен только в случае трех переменных, то есть как и латинский квадрат.

После проведения всех 16 комбинаций условий строится зависимость средних значений производительности от скорости обработки: $\bar{y} = f(x)$.

Для многих экспериментов квадрат не всегда является наиболее удобным планом. Например, скорость x можно изменять шесть раз, а также взять меньшее количество токарей и станков. На практике используется целый ряд частично сбалансированных и несбалансированных планов эксперимента (квадраты Юдена, решетчатые квадраты и т. д.). Для обычных инженерных экспериментов достаточно построить план по методу греко-латинского квадрата типа 3×3 , и его применение не вызывает затруднений. Например, при скоростях резания x_1, x_2, \dots, x_6 , рабочих А, В, С и станках z_1, z_2, z_3 можно построить два квадрата 3×3 (табл. 4.5).

Здесь шесть скоростей распределены равномерно между первым и вторым блоками с целью обеспечения как можно большего перекрытия. Этот план не является таким же рандомизированным, как один квадрат с 36 ячейками (6 рабочих дней, 6 станков, 6 токарей), но является вполне удовлетворительным.

Таблица 4.5

| Токарь | День | | | День | | |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | Пн | Вт | Ср | Чт | Пт | Сб |
| А | x_1z_1 | x_3z_3 | x_5z_2 | x_2z_1 | x_4z_3 | x_6z_2 |
| В | x_3z_2 | x_5z_1 | x_1z_3 | x_4z_2 | x_6z_1 | x_2z_3 |
| С | x_5z_3 | x_1z_2 | x_3z_1 | x_6z_3 | x_2z_2 | x_4z_1 |

4.4. МНОГОФАКТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Во многих экспериментах рассматриваются два или большее число регулируемых переменных факторов. Такие эксперименты называются двухфакторными, трехфакторными и т. д. В этих экспериментах могут присутствовать одна или более внешних переменных. В многофактор-

ных экспериментах возможен выбор одного из двух типов планов – классического или факторного.

Классические планы

Классический план можно применять абсолютно во всех областях. Факторный план часто бывает короче, он всегда точнее (при данной продолжительности эксперимента), но находит менее широкое применение.

Если задана зависимая переменная F , которая является функцией нескольких независимых переменных $x, y, z \dots$, то основной классический план состоит в том, что все независимые переменные, кроме одной, полагаются постоянными, а эта одна переменная изменяется во всем интервале значений. При этом выбор интервалов между x_i производится по одному из рассмотренных выше правил, а учет влияния внешних факторов производится, как показано выше. Если между независимыми переменными существует простое математическое соотношение, то можно определить зависимость F от изменяемой переменной (например, x). Затем все переменные, кроме следующей (например, y), полагаются постоянными, а изменяя y , находят зависимость F от y .

Таблица 4.6

| | y_1 | y_2 | y_3 | y_4 | y_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | | | * | | |
| x_2 | | | * | | |
| x_3 | * | * | * | * | * |
| x_4 | | | * | | |
| x_5 | | | * | | |

По сути классический многофакторный эксперимент представляет собой последовательность однофакторных экспериментов. Этот ограниченный классический подход позволяет найти такие простые функции, как

$$F = ay^n + bx^m, \quad F = ay^n x^m, \quad F = ayb^{cx}$$

и т. д. (a, b, c, m, n – некоторые константы).

План двухфакторного эксперимента, в котором каждый фактор берется на пяти уровнях, схематически можно представить в следующем виде (табл. 4.6). Звездочка обозначает комбинации условий, при которых должен проводиться эксперимент. В случае более сложных функций, например вида

$$F = ax \sin(by/x); \quad F = a + bx^n y^m + cx; \quad F = ax^{by},$$

Таблица 4.7

| | y_1 | y_2 | y_3 | y_4 | y_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | * | * | * | * | * |
| x_2 | * | | * | | * |
| x_3 | * | * | * | * | * |
| x_4 | * | | * | | * |
| x_5 | * | * | * | * | * |

маловероятно, что с помощью ограниченного плана, когда обе переменные x и y поочередно берутся на одном уровне, удастся определить эти зависимости. Возможно, при этом необходимо рассмотреть несколько уровней переменных x и y , например (табл. 4.7) или, возможно, заполнить весь квадрат и провести эксперимент для всех 25 комбинаций условий.

Если планируется классический эксперимент (частичный или полный), то он не обязательно должен быть сбалансированным. Это означает, что можно выбрать десять уровней x_i и только три уровня y_i , если известно, что зависимость $F(x)$ является более важной или более сложной.

Например, при исследовании конвективного теплообмена определяется зависимость числа Нуссельта от чисел Рейнольдса и Прандтля:

$$\text{Nu} = C \text{Re}^a \text{Pr}^b,$$

где число Нуссельта Nu – зависимая переменная; числа Рейнольдса Re и Прандтля Pr – независимые переменные; C, a, b – эмпирические константы. В большинстве практически возможных случаев в широком интервале температур число Прандтля изменяется очень медленно, а число Рейнольдса, которое зависит от скорости потока теплоносителя, может изменяться в широких пределах. При этом следует варьировать число Прандтля на значительно меньшем числе уровней, чем число Рейнольдса.

Факторные планы

Факторные планы в виде греко-латинского квадрата можно применять, как показано выше, в случае однофакторного эксперимента с несколькими внешними переменными. Эти планы можно использовать и для многофакторных инженерно-физических экспериментов с учетом некоторых ограничений.

Наиболее серьезное ограничение – возможность применения факторных планов только в случае рабочих формул двух типов. Кроме того, необходимо знать до начала обработки данных, к какому классу относится рассматриваемая формула. К первому классу относятся формулы, в которых зависимая переменная является суммой функций от независимых переменных:

$$F = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z), \quad (4.3)$$

где $f_1(x), f_2(y), f_3(z)$ – функции любой сложности.

Отметим, что в технике и физике примеры такого класса невзаимодействующих соотношений встречаются редко. Второй класс функций, допускающий применение факторного плана, встречается чаще и представляет собой произведение отдельных функций независимых переменных

$$F = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z). \quad (4.4)$$

Зависимость (4.4) является частным случаем (4.3), так как при логарифмировании (4.4) получим зависимость, подобную (4.3):

$$\ln F = \ln f_1(x) + \ln f_2(y) + \ln f_3(z). \quad (4.5)$$

Выражение (4.4) является одним из наиболее важных общих соотношений в инженерно-физических исследованиях. Оно включает множество различных сложных формул, например таких, как

$$F = kx^a y^b z^c; \quad F = kx^a y^b \exp(cz); \quad F = \frac{k}{x} a^y \sin bz,$$

где k, a, b, c – некоторые константы.

Однако существуют функции, не относящиеся к данному классу, например

$$F = kx^a + y^b z^c, \quad F = kx^a \exp\left(\frac{by}{z}\right),$$

и множество других функций более высокого уровня сложности.

Рассмотрим порядок проведения факторного эксперимента, когда известно, что функция относится к классу (4.4). Рассмотрим такой сбалансированный эксперимент, в котором x, y, z берутся на трех уровнях, и латинский квадрат имеет вид, приведенный в табл. 4.8.

Таблица 4.8

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| | y_1 | y_2 | y_3 |
| x_3 | z_1 | z_2 | z_3 |
| x_2 | z_2 | z_3 | z_1 |
| x_1 | z_3 | z_1 | z_2 |

Допустим, что нам известно (из теории или прошлого опыта, например) что (4.4) является общим соотношением, описывающим влияние x, y, z на F . Запишем три логарифмических уравнения для строки, содержащей x_1 :

$$\left. \begin{aligned} (\ln F)_{x_1} &= \ln f_1(x_1) + \ln f_2(y_1) + \ln f_3(z_3), \\ (\ln F)_{x_1} &= \ln f_1(x_1) + \ln f_2(y_2) + \ln f_3(z_1), \\ (\ln F)_{x_1} &= \ln f_1(x_1) + \ln f_2(y_3) + \ln f_3(z_2). \end{aligned} \right\}$$

Суммируя эти уравнения, получаем

$$\sum_{i=1}^3 (\ln F)_{x_1} = 3 \ln f_1(x_1) + \ln [f_2(y_1) \cdot f_2(y_2) \cdot f_2(y_3)] + \ln [f_3(z_3) \cdot f_3(z_2) \cdot f_3(z_1)]. \quad (4.6)$$

Аналогичную процедуру проводим для строк, содержащих x_2 и x_3 , и получаем систему трех уравнений типа (4.6), которую можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \ln f_1(x_1) &= \frac{\sum_{i=1}^n (\ln F)_{x_1}}{n} - C, \\ \ln f_1(x_2) &= \frac{\sum_{i=1}^n (\ln F)_{x_2}}{n} - C, \\ \ln f_1(x_3) &= \frac{\sum_{i=1}^n (\ln F)_{x_3}}{n} - C, \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

где C – константа.

Для квадрата 3×3 величина $n = 3$, а для квадратов более высокого порядка n равно числу уровней. Таким образом, мы показали, что если логарифмы результатов усредняются по какому-либо одному уровню переменных x , y или z , то влияние изменяемых факторов (y и z в рассматриваемом случае) остается неизменным при переходе от одного уровня x к другому. При этом все изменения усредненного логарифма результата полностью обусловлены влиянием лишь одной переменной x .

Такой же результат будет получен, когда усреднение производится по всем уровням переменной y , а затем по всем уровням переменной z . Если добавить еще одну переменную, например w , то получится греко-латинский квадрат, и это же правило следует применять для нахождения влияния переменной w на результат F .

Если заранее известно, что исследуемая зависимость имеет вид суммы (4.3), то влияние x , y , z на результат F находится путем усреднения соответствующих значений F , а не $\ln F$. Если неизвестно, к какому классу относится функция и подходит ли она вообще, то рекомендуется вместо факторного эксперимента применять стандартный классический метод.

Анализ различных функций можно проводить с помощью графиков $(\ln F)_x$ от $\ln x$ либо беря антилогарифмы и исследуя зависимость $(F)_x$ от x численными методами. Допустим, что мы получили таблицы или кривые для F как функции переменных x , y , z в отдельности. Из формул вида (4.7) следует, что с помощью таких кривых или таблиц получим следующие функции:

$$(F)_x = C_1 f_1(x); \quad (F)_y = C_2 f_2(y); \quad (F)_z = C_3 f_3(z), \quad (4.8)$$

где $(F)_x$ – антилогарифм $\sum_{i=1}^n (\ln F)_x / n$; C_1 – константа, входящая в формулы (4.7), составленная из значений y или z , исключаемых при использовании латинского квадрата.

Если решить уравнения (4.8) относительно $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$ и подставить их в (4.4), то получим

$$F = K (F)_x \cdot (F)_y \cdot (F)_z,$$

где $K = (C_1 \cdot C_2 \cdot C_3)^{-1}$.

Если известен окончательный результат F и с помощью кривых или таблиц для переменных x , y , z можно определить отдельные значения F , то можно вычислить и величину K .

Основным преимуществом факторного планирования при проведении многофакторных экспериментов является более высокая точность при таком же или несколько большем объеме эксперимента, обусловленная тем, что для получения каждой кривой используется вся совокупность данных. Основным недостатком является то, что выбор большого числа комбинаций условий эксперимента осуществляется при отсутствии данных о рабочей области, а также невозможность применения получаемых графиков без перехода к общим функциональным соотношениям.

В настоящее время большинство инженерно-физических экспериментов осуществляется по классическому плану. Однако в тех случаях, когда известно, что будет получена функция типа произведения, в которое входят несколько переменных, и когда предполагается, что точность будет недостаточно высокой, необходимо проводить факторный эксперимент.

5. АППРОКСИМАЦИЯ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

5.1. ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Пусть, изучая функциональную зависимость

$$y = f(x),$$

мы провели ряд измерений величин x и y , в результате которых получили следующую таблицу:

Таблица 5.1

| | | | | |
|-----|-------|-------|---------|-------|
| x | x_1 | x_2 | \dots | x_n |
| y | y_1 | y_2 | \dots | y_n |

Если *a priori* аналитическое выражение искомой функции неизвестно или весьма сложно, то возникает практически важная задача: найти эмпирическую формулу

$$\tilde{y} = \tilde{f}(x),$$

значения которой при $x = x_i$ возможно мало бы отличались от опытных данных y_i ($i = 1, 2, \dots, n$). В такой постановке задача весьма неопределенна, поэтому обычно, по ряду соображений, указывают достаточно узкий класс функций K (например, множество функций линейных, степенных, показательных и т. п.), к которому должна принадлежать $\tilde{f}(x)$.

Таким образом, задача сводится к нахождению лишь наилучших параметров этой функции. Класс функций K определяется из требования простоты эмпирической формулы, в ряде случаев он определяется самой природой явления (из физических соображений).

Геометрически задача аппроксимации сводится к определению кривой Γ из некоторого класса K , возможно ближе примыкающей к системе точек (рис. 5.1) $M_i(x_i, y_i)$. При этом необходимо выяснить математический смысл понятия близости кривой Γ к системе точек $M_i(x_i, y_i)$. Отметим, что график функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, вообще говоря, не проходит точно через точки $M_i(x_i, y_i)$. Кроме того, сами исходные эмпирические данные x_i и y_i , как правило, приближенные и содержат погрешности экспери-

мента. Поэтому аппроксимационная формула, повторяющая эти ошибки (например Γ_1), кроме своей сложности, не является идеальным решением. Такая кривая может быть получена, в частности, с помощью сплайнов. Возможно, простая эмпирическая формула, сглаживающая погрешности измерений, лучше отобразит реальный процесс.

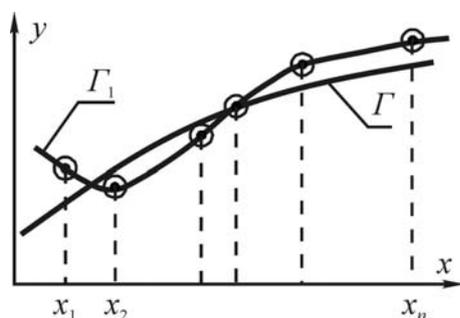


Рис. 5.1.

Аппроксимирующие кривые:
 Γ – сглаженная кривая;
 Γ_1 – кривая, проходящая
 через все точки

Построение аппроксимации включает два этапа – выяснение общего вида аппроксимирующей формулы и определение ее наилучших параметров.

Если неизвестен характер зависимости $y(x)$, то вид эмпирической функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ выбирается произвольно, причем предпочтение отдается простым формулам. Обычно предполагается, что $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ – аналитическая функция без точек разрыва, а график ее представляет плавную кривую.

Помощь физика в выборе вида аппроксимации может оказать изображение опытных точек на графике в декартовых, полулогарифмических, логарифмических и других системах координат. Полезно пользоваться при выборе аппроксимации альбомами кривых, приведенных в справочной литературе.

Во многих случаях при выборе аппроксимирующей функции можно ограничиться полиномом

$$\tilde{y} = \sum_{k=1}^n a_k \tilde{x}^k,$$

где a_k – константы, подлежащие определению.

Кроме того, применяются другие элементарные функции (дробно-линейная, степенная, показательная, логарифмическая и т. д.). Эмпирические формулы не являются законами природы, а представляют собой лишь некоторые гипотезы, более или менее согласующиеся с опытными данными. Практическое значение аппроксимирующих функций связано с компактностью описания полученных результатов измерений, особенно для функций нескольких переменных и большого числа опытных точек. Кроме того, аппроксимирующие зависимости удобны при проведении математического моделирования сложных физических процессов и при анализе соответствующих физических закономерностей.

В дальнейшем будем рассматривать опытные данные (таблицы результатов экспериментов) только с положительными x_i, y_i . В ряде случаев значения x_i, y_i могут быть знакопеременными. Поскольку таблица значений x_i, y_i конечна, то всегда можно подобрать положительные числа m и n такие, что, вводя новые переменные

$$\xi_i = m + x_i > 0,$$

$$\eta_i = n + y_i > 0,$$

задачу можно свести к нахождению эмпирической формулы для системы положительных переменных ξ_i, η_i .

5.2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Пусть для переменных x и y известны их значения x_i и y_i ($i = 1, 2, \dots, n$), расположенные в порядке возрастания x_i :

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

На координатной плоскости Oxy строится система точек $M_i(x_i, y_i)$. При этом для наглядности масштабы на осях Ox и Oy могут быть выбраны разными. Если эти точки группируются вблизи некоторой прямой линии Γ , то естественно предположить линейную зависимость y от x :

$$y = ax + b,$$

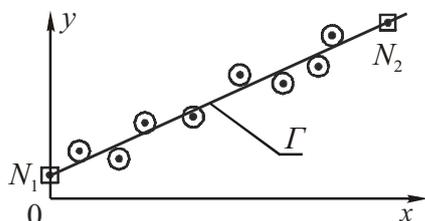


Рис. 5.2.

Линейная аппроксимация

где a, b – константы.

Прикладывая прозрачную линейку, или натягивая нить, можно найти наилучшее положение прямой Γ , возможно близкое к каждой из точек (рис. 5.2). Обычно построение производят на бумаге с миллиметровой сеткой («миллиметровке»).

Для нахождения параметров a и b измеряют координаты двух точек (не обязательно из заданных) $N_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ и $N_2(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$, лежащих на прямой Γ и по возможности удаленных друг от друга (удобны точки пересечения Γ с осями координат). Тогда значения a и b можно найти способом выбранных точек, то есть решением системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}_1 &= a\tilde{x}_1 + b, \\ \tilde{y}_2 &= a\tilde{x}_2 + b. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Метод выбранных точек весьма нагляден, но обладает низкой точностью. Однако для оценочных экспериментов он полезен и широко используется на практике.

Рассмотрим применение этого метода на следующем примере. Пусть задана таблица экспериментальных данных (табл. 5.2).

Таблица 5.2

| | | | | |
|-------|------|------|------|------|
| x_i | 2 | 4 | 6 | 8 |
| y_i | 0,35 | 0,57 | 0,72 | 0,94 |

Из графика находим отрезок, отсекаемый этой прямой на оси ординат: при $\tilde{x}_1 = 0$, $\tilde{y}_1 = 0,15$ (точка N_1). Аналогично находим ординату точки N_2 , взятой при значении $\tilde{x}_2 = 10$. Соответствующее значение $\tilde{y}_2 = 1,14$. Подставляя координаты точек N_1 и N_2 в систему уравнений (5.1), получим следующую аппроксимационную формулу:

Таблица 5.3

| | | | | |
|---------------|-------|-------|--------|--------|
| x_i | 2 | 4 | 6 | 8 |
| y_i | 0,35 | 0,57 | 0,72 | 0,94 |
| \tilde{y}_i | 0,348 | 0,546 | 0,744 | 0,942 |
| Δ_i | 0,002 | 0,024 | -0,024 | -0,002 |

ности ряда точек $M_i(x_i, y_i)$

$$k_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$; $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $(i = 1, 2, \dots, n-1)$.

Если $k_i = \text{const} = k$, то точки $M_i(x_i, y_i)$, точно лежат на одной прямой. Если выполняется соотношение

$$k_1 \approx k_2 \approx \dots \approx k_{n-1}, \quad (5.2)$$

то точки $M_i(x_i, y_i)$ приблизительно лежат на этой прямой. В частности, если значения x_i – равноотстоящие, то есть $\Delta x_i = \text{const}$, то достаточно убедиться, что соответствующие значения Δy_i близки друг к другу.

В зависимости от точности выполнения соотношения (5.2) делается вывод о корректности выбора линейной аппроксимации для исследуемой зависимости.

Построив точки $M_i(x_i, y_i)$ для $i = 1, 2, 3, 4$ в декартовой системе координат, убеждаемся, что они расположены приблизительно на одной прямой Γ (рис. 5.3).

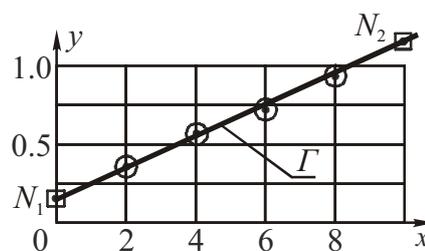


Рис. 5.3. Пример линейной аппроксимации

$$\tilde{y} = 0,099\tilde{x} + 0,15.$$

Для оценки качества аппроксимации приведем значения y_i , \tilde{y}_i и их разностей $\Delta_i = y_i - \tilde{y}_i$ (табл. 5.3).

Введем критерий прямолинейности ряда точек

5.3. МЕТОД ВЫРАВНИВАНИЯ

Пусть для переменных x и y их соответствующие значения x_i и y_i таковы, что точки $M_i(x_i, y_i)$ не лежат на прямой. При этом во многих случаях, вводя новые переменные

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

можно добиться того, что преобразованные точки $N_i(X_i, Y_i)$, где $X_i = \varphi(x_i, y_i)$ и $Y_i = \psi(x_i, y_i)$ будут лежать на некоторой прямой в плоскости OXY . Метод выравнивания состоит в указанном преобразовании переменных. Рассмотрим, например, нелинейную зависимость вида

$$\psi(y) = a\varphi(x) + b, \quad (5.3)$$

где a, b – некоторые константы; $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ – строго монотонные функции. На плоскости Oxy зависимость (5.3) изображается некоторой кривой. Вводя новые переменные $X = \varphi(x)$, $Y = \psi(y)$, получим линейную зависимость

$$Y = aX + b,$$

для которой точки $N_i[\varphi(x_i), \psi(y_i)]$ будут лежать на прямой в новых координатах OXY .

Обратно, если в плоскости OXY точки N_i практически лежат на прямой, то между переменными x и y имеет место зависимость (5.3). На практике функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ ищут методом проб на основании сходства графика функции (5.3) в плоскости Oxy с графиками известных функций.

Степенная зависимость

Предположим, что искомая зависимость выражается в виде степенной функции

$$y = Cx^a, \quad (5.4)$$

где a и C – некоторые константы, $x > 0$, $y > 0$.

Логарифмируя функцию (5.4) и обозначая $X = \lg x$, $Y = \lg y$, $b = \lg C$, получим линейную зависимость

$$Y = aX + b. \quad (5.5)$$

Таким образом, степенная зависимость (5.4) между x и y обнаруживается, если точки $N_i(\lg x_i, \lg y_i)$ лежат на прямой в плоскости OXY . Для построения графика линейной функции (5.5) удобно использовать специальную логарифмическую бумагу с неравномерной сеткой, так как при этом не надо вычислять значения логарифмов.

В качестве примера использования степенной аппроксимации рассмотрим результаты измерения зависимости скорости горения твердого ракетного топлива от давления в камере сгорания, приведенные в табл. 5.4.

Таблица 5.4

| \bar{p}_i | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| u_i , см/с | 1,06 | 1,30 | 1,50 | 1,70 | 1,80 | 1,95 | 2,05 | 2,11 |

Из теории горения твердых ракетных топлив известно, что искомая зависимость подчиняется степенному закону скорости горения

$$u = u_1 \left(\frac{p}{p_a} \right)^v = u_1 \bar{p}^v, \quad (5.6)$$

где $u_1 = \text{const}$ – скорость горения при атмосферном давлении p_a ; $\bar{p} = p/p_a$ – безразмерное давление в камере сгорания.

Наносим экспериментальные точки на график в логарифмических координатах и убеждаемся, что они с достаточной точностью располагаются на прямой Γ (рис. 5.4, а). Логарифмируя (5.6), получим

$$\lg u = \lg u_1 + v \lg \bar{p}.$$

Подставляя координаты двух точек (возьмем крайние точки N_1 и N_2), получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \lg 1,06 &= \lg u_1 + v \lg 10, \\ \lg 2,11 &= \lg u_1 + v \lg 80. \end{aligned} \right\}$$

Из решения этой системы определим значения: $u_1 = 0,495$; $v = 0,331$.

Таким образом, искомая зависимость имеет вид

$$u = 0,495 \bar{p}^{0,331}.$$

Данная зависимость в декартовых координатах приведена на рис. 5.4, б.

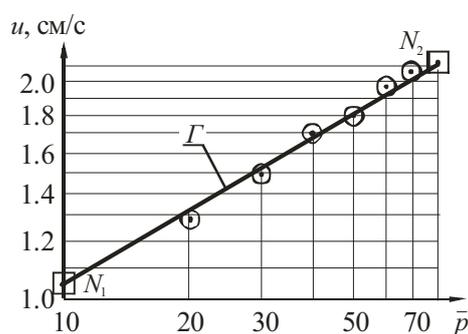


Рис. 5.4, а. Закон скорости горения в логарифмических координатах

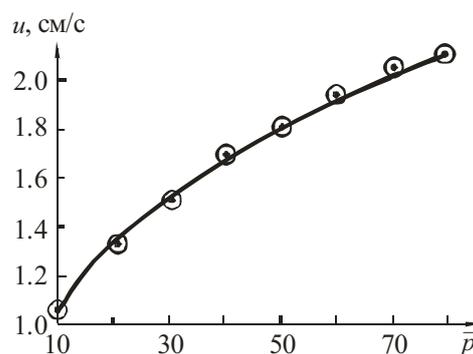


Рис. 5.4, б. Закон скорости горения в декартовых координатах

Аналогично предыдущему примеру, приведем таблицу погрешности аппроксимации (табл. 5.5).

Таблица 5.5

| | | | | | | | | |
|---------------|-------|--------|--------|-------|--------|-------|-------|-------|
| \bar{p}_i | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
| u_i | 1,06 | 1,30 | 1,50 | 1,70 | 1,80 | 1,95 | 2,05 | 2,11 |
| \tilde{u}_i | 1,060 | 1,333 | 1,525 | 1,677 | 1,806 | 1,918 | 2,019 | 2,110 |
| Δu_i | 0 | -0,033 | -0,025 | 0,023 | -0,006 | 0,032 | 0,031 | 0 |

Показательная зависимость

Предположим, что искомая зависимость $y(x)$ подчиняется следующей формуле:

$$y = C \exp(ax), \quad (5.7)$$

где C, a – константы ($C > 0$).

Логарифмируя эту формулу и вводя обозначения $X = x, Y = \ln y, b = \ln C$, получим линейную зависимость вида

$$Y = aX + b.$$

Для построения графика в плоскости OXY удобно использовать полулогарифмическую шкалу с равномерной сеткой по оси OX и логарифмической сеткой по оси OY . Начало координат в полулогарифмической шкале соответствует точке $x = 0, y = 1$ (так как $\ln 1 = 0$), поэтому исходные данные удобно умножить на подходящие положительные множители, чтобы обеспечить соотношение $y_i \geq 1$. Для прямой в плоскости OXY , соответствующей формуле (5.7), константа C находится из ординаты точки пересечения прямой с осью OY в точке $X = 0, Y = \ln C$.

Гиперболическая зависимость

Рассмотрим результаты измерений некоторой физической закономерности, приведенные в табл. 5.6.

Таблица 5.6

| | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x_i | 0 | 0,2 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
| y_i | 1 | 0,85 | 0,68 | 0,53 | 0,36 | 0,33 | 0,31 | 0,26 | 0,21 | 0,20 | 0,18 | 0,17 |

В координатах Oxy нанесенные экспериментальные точки $M_i(x_i, y_i)$ расположены вблизи кривой Γ , представляющей собой ветвь гиперболы, асимптотически приближающейся к оси Ox (рис. 5.5, а). Поэтому исследуемую закономерность можно представить в виде

$$\tilde{y} = \frac{1}{a\tilde{x} + b}, \quad (5.8)$$

где a, b – константы.

Введением новых переменных $X=x$, $Y=y^{-1}$ зависимость (5.8) можно преобразовать к линейному виду в координатах OXY :

$$Y = aX + b.$$

Построив в плоскости OXY точки $N_i(X_i, Y_i)$, получим прямую линию Γ (рис. 5.5, б). Из графика видно, что при $X=0$ значение $Y=1$ или $y=Y^{-1}=1$. Из (5.8) следует, что $b=1$ и искомая зависимость имеет вид

$$\tilde{y} = \frac{1}{\tilde{x} + 1}.$$

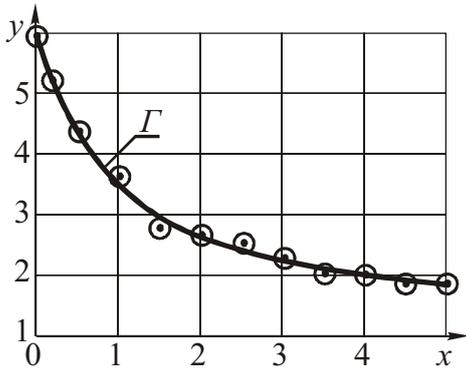


Рис. 5.5а. Гиперболическая зависимость в декартовых координатах

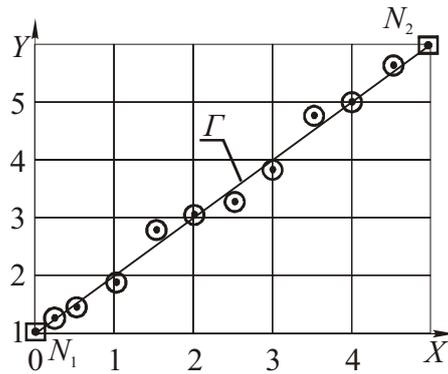


Рис. 5.5б. Гиперболическая зависимость в преобразованных координатах

Квадратичная (параболическая) зависимость

Если для заданных значений x_i , y_i не подходит линейная аппроксимация, то можно использовать более общую *квадратичную зависимость*

$$\tilde{y} = a\tilde{x}^2 + b\tilde{x} + c, \quad a \neq 0. \quad (5.9)$$

Эту формулу можно использовать для аппроксимации, если точки $M_i(x_i, y_i)$ располагаются на отрезке параболы с вертикальной осью (рис. 5.6, а). Для проверки того, что зависимость квадратичная, проводим плавную кривую Γ , вокруг которой группируются опытные точки $M_i(x_i, y_i)$, и выбираем на ней внутреннюю точку $M_o(x_o, y_o)$, по возможности совпадающую с одной из опытных точек ($x \leq x_o \leq x_n$). Предполагая, что исследуемая кривая Γ является параболой, получим:

$$y_o = ax_o^2 + bx_o + c.$$

Вычитая из уравнения (5.9) это равенство, находим

$$\tilde{y} - y_o = a(\tilde{x} - x_o)^2 + b_1(\tilde{x} - x_o),$$

где $b_1 = b + 2ax_o$.

Вводя новые переменные

$$X = \tilde{x} - x_0; \quad Y = \frac{\tilde{y} - y_0}{\tilde{x} - x_0},$$

из последнего уравнения получим линейную зависимость

$$Y = aX + b_1.$$

Таким образом, параболе (5.9) на плоскости $Ox\tilde{y}$ соответствует прямая на плоскости OXY (рис. 5.6, б). Обратное, если будет обнаружено, что точки $N_i(X_i, Y_i)$, где

$$X_i = x_i - x_0, \quad Y_i = \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}$$

лежат на прямой, то точки $M_i(x_i, y_i)$ в декартовых координатах расположены на параболе.

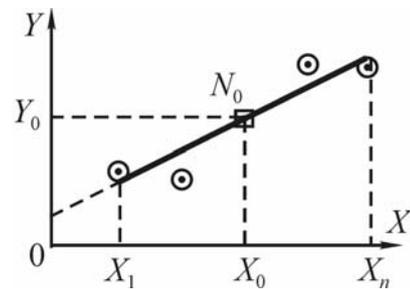
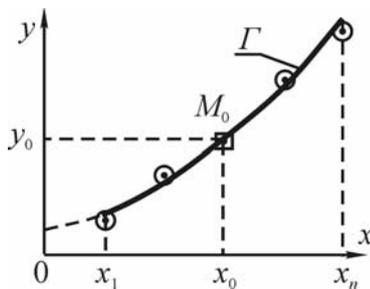


Рис. 5.6а. Параболическая зависимость в декартовых координатах

Рис. 5.6б. Параболическая зависимость в преобразованных координатах

5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Итак, вид эмпирической формулы выбран. После этого возникает задача определения наилучших коэффициентов (параметров), входящих в эту формулу. В общем виде задача ставится так. Пусть данная совокупность опытных данных $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ приближенно описывается формулой вида

$$\tilde{y} = \tilde{f}(x, a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (5.10)$$

где \tilde{f} – выбранная функциональная зависимость; a_1, a_2, \dots, a_m – неизвестные параметры, число которых обычно меньше числа точек M_i , то есть $m < n$. Требуется определить эти параметры.

Если значения x_i, y_i точно связаны зависимостью (5.10), то параметры a_1, a_2, \dots, a_m можно найти из решения системы уравнений

$$y_i = \tilde{f}(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.11)$$

На практике значения x_i, y_i содержат погрешности экспериментов, и число уравнений системы (5.11) значительно больше числа неизвестных, то есть эта система является несовместной. Поэтому приходится

искать наилучшие значения коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_m , приближенно удовлетворяющие (5.11), такие, что невязки (уклонения)

$$\tilde{f}(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

являются возможно малыми по модулю. Геометрически задача сводится к проведению кривой вида (5.10), наиболее тесно примыкающей к системе точек. Для определения параметров эмпирической формулы используется целый ряд методов. Наиболее распространен метод наименьших квадратов (МНК).

Метод наименьших квадратов

Пусть известен вид эмпирической формулы (5.10) и уклонения этой формулы от исходных данных y_i :

$$\varepsilon_i = \tilde{f}(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i.$$

Согласно методу наименьших квадратов, наилучшими значениями a_1, a_2, \dots, a_m считаются те, для которых сумма квадратов уклонений

$$S(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n [\tilde{f}(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

будет минимальной.

Если применить для функции нескольких переменных $S(a_1, a_2, \dots, a_m)$ теорию условных экстремумов, то при соответствующих предположениях о дифференцируемости функции \tilde{f} получаются необходимые условия для определения параметров a_1, a_2, \dots, a_m :

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0.$$

Эти уравнения называются нормальными уравнениями. Если система нормальных уравнений имеет единственное решение, то оно и будет искомым. Очевидно, что в общем виде решить эту систему уравнений нельзя. Нормальная система упрощается, если эмпирическая функция $\tilde{f}(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$ линейна относительно параметров a_j ($j = 1, 2, \dots, m$). На практике обычно это условие выполняется. В частности, если выбрать в качестве аппроксимирующей функции многочлен относительно x :

$$\tilde{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{m-1}x^{m-1} = \sum_{j=0}^{m-1} a_jx^j,$$

то нормальные уравнения принимают вид

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k x_i^k - y_i \right) x_i^j = 0.$$

Это условие приводит к системе уравнений

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(a_k \sum_{i=1}^n x_i^{k+j} \right) = \sum_{i=1}^n y_i x_i^j,$$

или

$$\left. \begin{aligned} a_0 n + a_1 [x] + \dots + a_{m-2} [x]^{m-2} + a_{m-1} [x]^{m-1} &= [y], \\ a_0 [x] + a_1 [x]^2 + \dots + a_{m-2} [x]^{m-1} + a_{m-1} [x]^m &= [yx], \\ \dots, \\ a_0 [x]^{m-1} + a_1 [x]^m + \dots + a_{m-2} [x]^{2m} + a_{m-1} [x]^{2m-1} &= [yx^{m-1}], \end{aligned} \right\}$$

где $j = 0, 1, \dots, m-1$; $I = 1, 2, \dots, n$ (n – количество опытных точек; m – количество коэффициентов a_j и, соответственно, число нормальных уравнений).

Здесь для краткости использованы символы Гаусса

$$[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i).$$

Решение этой системы, содержащей m линейных уравнений, позволяет однозначно определить коэффициенты a_j разложения $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$. На практике используют минимальное, насколько возможно, число параметров полинома. Для этого сначала визуально проверяют, лежат ли опытные точки, например, вблизи функции – константы, прямой, параболы и т. д., и в соответствии с этим используют то или иное разложение.

Основное преимущество метода наименьших квадратов состоит в том, что если сумма квадратов отклонений ε_i мала, то сами отклонения малы по модулю. Отметим, что алгоритмы аппроксимации данных с помощью метода наименьших квадратов входят в математическое обеспечение ПЭВМ, поэтому мы рассмотрели лишь основную идею метода.

5.5. ГРАФИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Элементарными функциями называются функции, определяемые формулами, содержащими конечное число операций сложения, вычитания, умножения, возведения в степень, взятия логарифма, вычисления тригонометрических функций. Как отмечалось выше, при выборе вида аппроксимационной зависимости удобно пользоваться графиками известных

элементарных функций. Приведем ряд таких графиков для наиболее распространенных случаев аппроксимации опытных данных. Будем рассматривать ветви графиков, расположенные в первом квадранте ($x > 0, y > 0$).

Линейная функция

Уравнение *линейной функции* имеет вид

$$y = kx + b,$$

где коэффициенты k, b – некоторые действительные числа.

Графиком линейной функции является прямая. Эта функция монотонна: при $k > 0$ она возрастает, при $k < 0$ – убывает, при $k = 0$ прямая параллельна оси абсцисс.

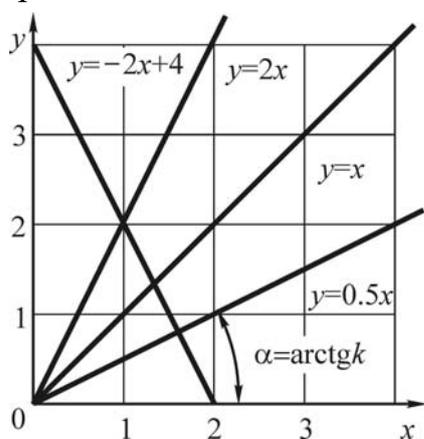


Рис. 5.7. Линейные функции

Коэффициенты k и b в уравнении прямой имеют наглядный геометрический смысл. Значение коэффициента b определяет отрезок, отсекаемый графиком линейной функции на оси ординат. Коэффициент k (угловой коэффициент) является тангенсом угла α , образованного осью абсцисс и прямой (угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки). Примеры графиков линейных функций приведены на рис. 5.7.

Квадратичная функция

Уравнение квадратичной функции имеет вид

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c – действительные числа ($a \neq 0$). Графиком квадратичной функции является парабола с осью симметрии, параллельной оси ординат, и вершиной в точке C с координатами

$$x_C = -\frac{b}{2a}; \quad y_C = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

С помощью преобразования координат (параллельным смещением графика по осям Ox и Oy) уравнение параболы можно привести к виду

$$y = ax^2.$$

На рис. 5.8, *a* приведены графики этой функции для разных значений коэффициента a . При этом для любого $a > 0$ график функции $y = ax^2$ получается из графика функции $y = x^2$ сжатием к оси абсцисс в отношении a^{-1} .

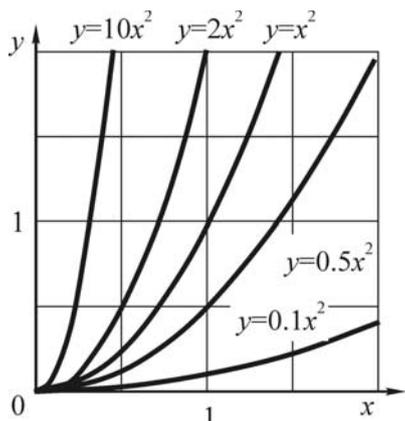


Рис. 5.8а. Квадратичная зависимость для $a > 0$

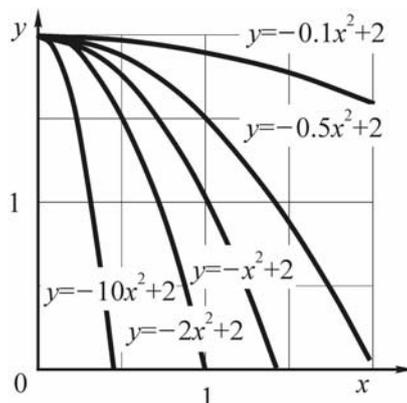


Рис. 5.8б. Квадратичная зависимость для $a < 0$

График функции с $a < 0$ получается зеркальным отражением функции $y = |a|x^2$ относительно оси Ox (рис. 5.8, б). Аналогично, поменяв координаты переменных x и y , можно получить «горизонтальные» параболы, ось симметрии которых параллельна оси абсцисс Ox .

Обратная пропорциональность

Если функциональная зависимость $y(x)$ обратно пропорциональна, то есть

$$y = \frac{C}{x - a} + b,$$

где a, b, C – некоторые константы, то график этой зависимости представляет собой гиперболу. Используя соответствующие преобразования координат, уравнение гиперболы можно привести к виду

$$y = C \cdot x^{-1}.$$

Асимптотами графика этой функции являются оси координат Ox и Oy . Характерный вид графиков гиперболы приведен на рис. 5.9.

Степенная функция

Общее уравнение степенной функции имеет вид

$$y = ax^b,$$

где a, b – действительные числа.

Рассмотрим случай, когда $a = 1$, так как остальные графики получаются простым изменением масштаба. В зависимости от показателя степени b графики степенной функции имеют разный вид.

- $b = n$ ($n \geq 2$ – целое положительное число)

При этом все графики проходят через точки $(x = 0, y = 0)$ и $(x = 1, y = 1)$ и касаются оси абсцисс в начале координат (рис. 5.10, а). При $n = 2$ по-

лучаем параболическую зависимость, по аналогии с которой все графики $y = ax^n$ называются параболоми n -го порядка (при $n = 3$, например кубическая парабола).

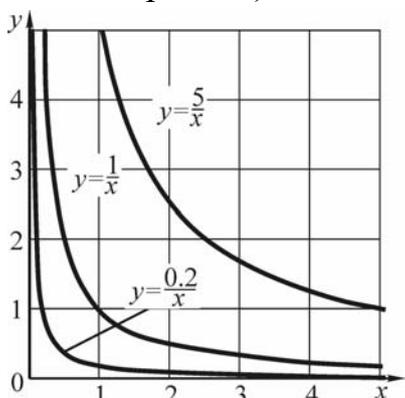


Рис. 5.9,а. Гипербола при $C > 0$

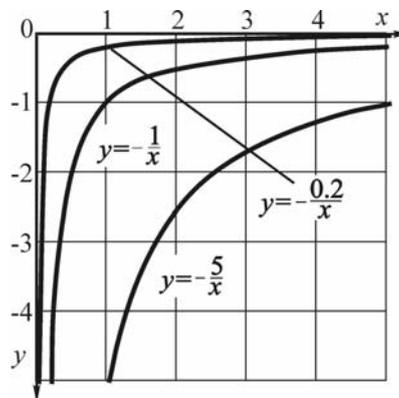


Рис. 5.9,б. Гипербола при $C < 0$

- $b = -n$ (n – целое положительное число)
Все графики проходят через точку $(x = 1, y = 1)$ и не имеют экстремумов, координатные оси являются асимптотами кривых (рис. 5.10, б). При $n = 1$ получаем график обратной пропорциональной зависимости (гиперболу).
- $b = m/n > 0$ (m и n – взаимно простые целые положительные числа)
Все эти функции имеют нуль в начале координат, а их графики проходят через точку $(x = 1, y = 1)$. Если $m/n < 1$, то график касается оси Oy в начале координат, если $m/n > 1$, то график в начале координат касается оси Ox (рис. 5.10, в).
- $b = m/n < 0$ (m и n – взаимно простые целые положительные числа, $n \neq -1$)
Графики этих функций проходят через точку $(x = 1, y = 1)$ и имеют в качестве асимптот оси координат. На рис. 5.10, г приведены графики степенных функций для некоторых значений $m/n < 0$.

Показательная функция

Уравнение показательной функции имеет вид

$$y = a^x,$$

где $a > 0, a \neq 1$.

При $a > 1$ функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ – монотонно убывает, при этом асимптотой является ось абсцисс (рис. 5.11).

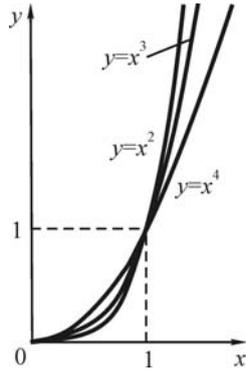


Рис. 5.10,а. Степенная функция
($b = n$)

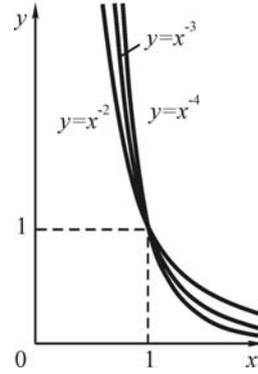


Рис. 5.10,б. Степенная функция
($b = -n$)

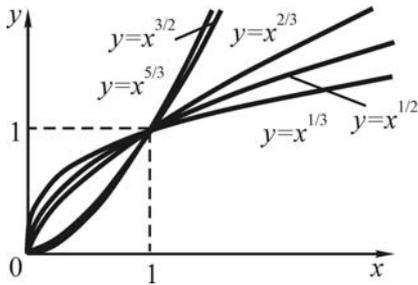


Рис. 5.10,в. Степенная функция
($b = m/n > 0$)

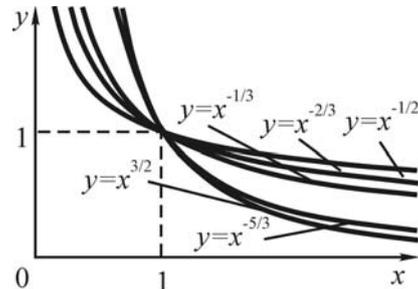


Рис. 5.10,г. Степенная функция
($b = m/n < 0$)

Логарифмическая функция

Уравнение логарифмической функции имеет вид

$$y = \log_a x,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмическая функция определена только для положительных x ($x > 0$). Она является обратной функцией для показательной. График ее получается из графика показательной функции (при том же основании) перегибом по биссектрисе угла Oxy . При $a > 1$ функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ – монотонно убывает (рис. 5.12).

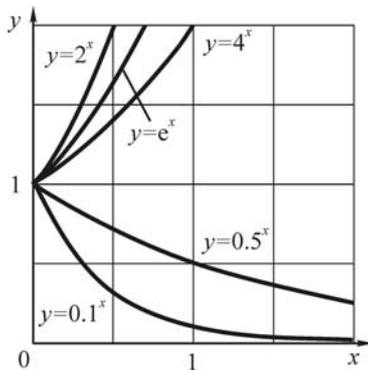


Рис. 5.11. Показательная функция

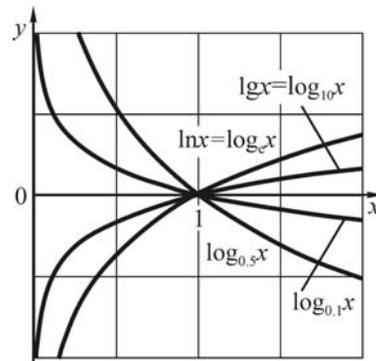


Рис. 5.12. Логарифмическая функция

6. ОЦЕНКА СТЕПЕНИ АДЕКВАТНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Конечной целью инженерно-физического эксперимента во многих случаях является получение некоторой экспериментальной зависимости между физическими величинами и представление ее в виде аппроксимационной формулы. Приближенная оценка степени адекватности этой формулы может быть проведена по критерию прямолинейности ряда экспериментальных точек (5.2), рассмотренному в предыдущем разделе. Более точная оценка возможна лишь с помощью статистических методов, включающих проведение *регрессионного* и *корреляционного* анализов.

6.1. ЛИНЕЙНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

В результате эксперимента определяется *математическая модель* исследуемого процесса (*модель эксперимента, уравнение регрессии*), которая является аналогом физической формулы. Однако не всегда экспериментальный материал позволяет найти удобный и точный вид модели. В общем случае математическая модель строится на основании статистического метода – регрессионного анализа.

Уравнение регрессии представляет математическую форму зависимости измеряемой физической величины от влияющих на нее факторов. Выбор того или иного вида уравнения определяет точность (адекватность), с которой модель описывает реальный процесс. Выбор вида уравнения определяется на основании априорных сведений о процессе, изучения влияющих факторов, от которых зависит измеряемая величина, а также удобства использования математической модели данного конкретного вида.

Регрессионный анализ сводится к определению на основании экспериментальных данных коэффициентов модели (коэффициентов регрессии), оценки значимости значений этих коэффициентов и степени адекватности модели.

Линейная регрессия относительно одной переменной

Как было показано выше, с помощью метода выравнивания многие физические закономерности можно привести к линейному виду, то есть

к уравнению линейной зависимости величины y от одной независимой переменной (фактора) x :

$$y = a + bx, \quad (6.1)$$

где a, b – коэффициенты регрессии.

При статистической оценке степени адекватности модели экспериментальным результатам наиболее часто используется критерий значения квадрата отклонения этих результатов от расчетных значений, полученных на основании данной модели (6.1). Процедура оценки значений коэффициентов регрессии и адекватности, при которой квадрат отклонения является минимальным, проводится методом наименьших квадратов. При этом коэффициенты регрессии рассчитываются по следующим формулам:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - b \sum_{i=1}^n x_i}{n};$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

Коэффициенты регрессии определяются на основании измерений, проведенных в n экспериментальных точках ($n > 2$), то есть по n уравнениям (6.1).

Дисперсия адекватности модели S^2 характеризует меру отклонения данных \bar{y}_i , полученных расчетом по уравнению регрессии (6.1), от реальных экспериментальных результатов y_i для i -й точки. Значение дисперсии адекватности модели находится по формуле

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}{n - 2}$$

при числе степеней свободы $f_1 = n - 2$.

Дисперсии, связанные с определением коэффициентов регрессии, рассчитываются по формулам

$$S_a^2 = \frac{S_b^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n}; \quad S_b^2 = \frac{nS^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

при числе степеней свободы $f_1 = n - 2$.

После расчета дисперсий проводится проверка статистической значимости значений коэффициентов регрессии a и b . Наиболее простым критерием значимости для такой проверки является критерий Стьюдента. Доверительные интервалы Δa и Δb для этих коэффициентов рассчитываются по формулам

$$\Delta a = \pm t(\alpha, f_1) S_a; \quad \Delta b = \pm t(\alpha, f_1) S_b,$$

где $t(\alpha, f_1)$ – значения коэффициентов Стьюдента для заданной доверительной вероятности α .

Коэффициенты регрессии будут значимыми, если выполняются условия

$$\bar{a} > \Delta a; \quad \bar{b} > \Delta b.$$

После определения коэффициентов регрессии и оценки их значимости проводится проверка адекватности самого уравнения регрессии. Отклонение расчетного значения \bar{y}_i от экспериментального y_i может быть обусловлено либо несовершенством выбранной модели, либо случайными погрешностями. Поэтому статистическая оценка адекватности основана на проверке нулевой гипотезы H_0 :

$$S^2 = S_y^2, \quad (6.2)$$

где S_y^2 – дисперсия воспроизводимости результатов при измерении величины y . Эта оценка проводится по критерию Фишера (F -критерию)

$$F = \frac{S^2}{S_y^2} > 1$$

при числе степеней свободы числителя $f_1 = n - 2$, а знаменателя – $f_2 = n(m - 1)$. Выборочная дисперсия S_y^2 определяется по формуле

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_{ij} - y_i)^2}{n(m - 1)},$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ – число точек на линии регрессии;

$j = 1, 2, \dots, m$ – число параллельных измерений в каждой точке.

Если в каждой из точек число измерений m_i разное, то для расчета значения S_y^2 можно использовать формулу

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - 1) S_{y_i}^2}{\sum_{i=1}^n m_i - n}.$$

Для расчетов по этой формуле предварительно находятся значения дисперсий $S_{y_i}^2$ в каждой из i точек.

Если значение критерия Фишера, полученное по формуле (6.2), меньше табличного (Приложение 7) при выбранном уровне значимости $\beta = 1 - \alpha$, то уравнение регрессии (6.1) адекватно описывает экспериментальные результаты. Если же это значение больше табличного, то следует выбрать другой вид уравнения и исследовать новое уравнение регрессии.

Статистический анализ коэффициентов регрессии позволяет найти пределы изменения углового коэффициента и отрезка на оси ординат для линии регрессии, а исследование адекватности позволяет оценить степень отклонения экспериментальных точек от этой прямой линии.

Значимость таких отклонений можно оценить, построив доверительные границы Δy рассеяния величины y . При этом области допустимых значений (*коридоры ошибок*) строятся по методу наименьших квадратов с использованием следующей формулы:

$$\Delta y_k = \pm t(\alpha, f_1) S^2 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{n(x_k - \bar{x})^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}}. \quad (6.3)$$

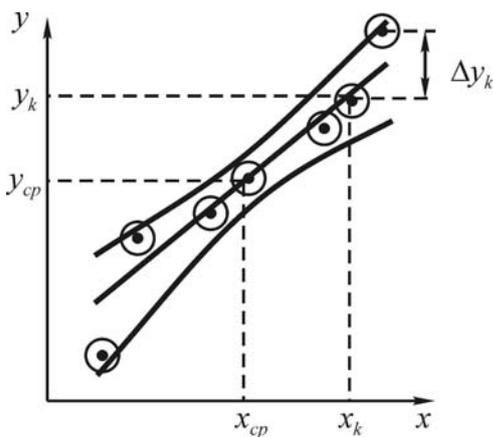


Рис. 6.1. Доверительные границы (коридор ошибок) для линии регрессии

Формула (6.3) представляет уравнения двух гипербол, внутри которых находится область допустимых значений y (рис. 6.1). Размер этой области определяется не только числом экспериментальных точек n , значением дисперсии адекватности S^2 и доверительной вероятности (через коэффициенты Стьюдента), но зависит и от того, насколько исследуемое значение аргумента x_k удалено от среднего значения x_{cp} . Вблизи значения $x_k = x_{cp}$ мы имеем наиболее узкие доверительные границы рассеяния точек:

$$\Delta y = \pm \frac{t(\alpha, f_1) S}{\sqrt{n}}.$$

Наоборот, крайние точки на прямой регрессии при одном и том же уровне значимости α будут иметь в эксперименте наибольшее случайное рассеяние. Этот вывод из формулы (6.3) имеет важное практическое значение. Для градуировки методов измерения, удовлетворяющих условиям линейности (6.1), экспериментальным точкам, расположенным на концах рабочего диапазона, следует придавать больший статистический вес, то есть число параллельных измерений в крайних точках должно быть больше, чем в точках, лежащих вблизи абсциссы x_{cp} .

Множественная линейная регрессия

Если измеряемая случайная величина y зависит от нескольких независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_k , то расчет коэффициентов такой модели и ее статистический анализ проводится методами *множественной регрессии*. Наибольший практический интерес представляет множественная линейная регрессия, уравнение которой имеет вид

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k.$$

Как и для случая одной независимой переменной, вычисление коэффициентов регрессии производится методом наименьших квадратов, но несколько усложняется. Решение этой задачи с помощью матричной алгебры и стандартных программ ПЭВМ не представляет затруднений. Исследование адекватности множественной модели проводится методами, аналогичными рассмотренным для регрессии с одной независимой переменной.

В принципе по методу наименьших квадратов можно оценить коэффициенты регрессии и нелинейных моделей, то есть уравнений, в которых независимые переменные x_i имеют степени, отличающиеся от единицы. При этом вычисление значений коэффициентов регрессии возможно, если число уравнений равно или больше числа определяемых коэффициентов.

6.2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Под *корреляцией* понимается всякая связь между двумя или несколькими исследуемыми явлениями. Эта связь может быть детерминированной или случайной (вероятностной). Первый тип связи определяется строгими закономерностями, обычно описываемыми некоторыми физическими формулами. Так, например, закон Ома определяет жесткую связь между разностью потенциалов, силой тока и электрическим сопротивлением.

Рассмотрим более подробно второй тип связи, когда эта связь между явлениями только предполагается, и отсутствуют теоретические предпосылки, свидетельствующие о наличии такой связи. В отличие от регрессионного анализа, корреляционный анализ применяется для исследования случайной связи между переменными. Задавая то или иное уравнение регрессии, мы тем самым определяем как само существование зависимости между независимыми переменными, так и математический вид этой зависимости. При корреляционном же анализе проверяется лишь сам факт, то есть статистическая гипотеза о наличии или отсутствии связи. Сама природа величин, между которыми такая случайная связь предполагается, позволяет судить о ней как о вероятностной. Результат корреляционного анализа также носит статистический характер, так как заключение о наличии или отсутствии связи принимается с некоторой заранее заданной доверительной вероятностью.

В качестве примера задачи корреляционного анализа можно привести исследование влияния температурного режима на выход некоторого химического продукта в сложном технологическом процессе. При этом с ростом температуры возможно не только повышение скорости основной реакции, но и протекание побочных реакций, а также и обратная реакция разложения продукта. Поэтому связь между температурой и выходом продукта можно характеризовать только как случайную.

Обычно при корреляционном анализе исследуются только линейные связи между величинами, поэтому отрицательный ответ при проверке гипотезы о корреляции может означать не только отсутствие связи, но и возможное наличие нелинейной зависимости между исследуемыми величинами.

Коэффициент линейной корреляции двух величин

Связь между двумя величинами x и y наиболее просто можно представить в виде таблицы, в которую занесены пары значений (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) , соответствующие разным условиям эксперимента. Более наглядной формой является *диаграмма рассеивания* – график в координатах x, y , на котором нанесены точки (x_i, y_i) . Возможные типы таких диаграмм приведены на рис. 6.2.

Если корреляционная связь идеальна в том смысле, что между x и y с высокой степенью вероятности существует линейная зависимость, а случайное рассеяние обеих величин пренебрежимо мало, то на диаграмме связь изобразится в виде прямой линии.

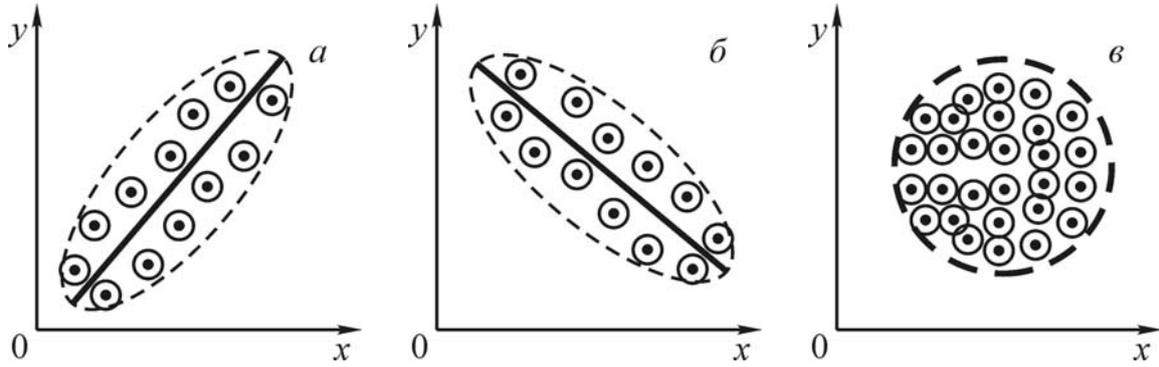


Рис. 6.2. Корреляционная зависимость между случайными величинами x и y :
 a – положительная связь; b – отрицательная связь; $в$ – отсутствие связи

Однако поскольку всегда существует случайное рассеяние, точки будут располагаться на графике в некоторой конечной области, имеющей форму эллипса (рис. 6.2, a ; 6.2, b). Наоборот, если связь отсутствует (или не является линейной), разброс точек на диаграмме рассеивания будет иметь вид хаотической области, близкой к кругу (рис. 6.2, $в$).

Для качественной оценки степени случайной связи проводятся соответствующие статистические расчеты. В первую очередь проводится расчет *ковариации* для n пар точек:

$$\text{cov}(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \left(y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right).$$

Ковариация имеет смысл смешанной дисперсии, связанной с наличием корреляционной связи между x и y . Связь называется *положительной*, если при росте одной величины возрастает и другая (рис. 6.2, a). *Отрицательной* называют связь, когда при увеличении значений одной из величин значения другой уменьшаются (рис. 6.2, b). Соответственно, ковариация положительна, если связь положительна, и наоборот. Для качественной оценки линейной корреляции используется выборочный коэффициент парной корреляции r_{xy} – безразмерная величина, нормированная к значениям средних квадратических отклонений исследуемых величин S_x и S_y :

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (6.4)$$

Коэффициент корреляции r_{xy} может принимать следующие значения.

- $r_{xy} = 0$. Этот случай соответствует отсутствию связи между x и y (рис. 6.2, в).
- $r_{xy} = +1$. Между x и y существует строгая положительная линейная связь (рис. 6.2, а).
- $r_{xy} = -1$. Между x и y существует строгая отрицательная линейная связь (рис. 6.2, б).
- $-1 < r_{xy} < +1$. Это наиболее часто встречающийся на практике случай. При этом о корреляции судят уже лишь с точки зрения большей или меньшей вероятности.

Сила связи оценивается методом статистической проверки гипотез. При этом предполагается, что нулевой гипотезой H_0 является условие $\rho_{xy} = 0$, то есть отсутствие связи. Здесь ρ_{xy} – истинный коэффициент корреляции для генеральной совокупности величин x и y . Альтернативой является гипотеза \bar{H} : $\rho_{xy} \neq 0$, то есть наличие связи. Статистическая проверка гипотезы об отсутствии корреляционной связи проводится с использованием таблиц значений распределения коэффициента корреляции, приведенных в списке литературы к данной главе. Это распределение зависит от избранного уровня значимости β и от числа степеней свободы $f_1 = n - 2$, где n – общее число сравниваемых пар значений x и y .

Отметим, что каково бы ни было значение коэффициента корреляции, заключение о наличии связи можно сделать только после проверки гипотезы. Например, значение $r_{xy} = 0,8$ достаточно близко к единице и, казалось бы, в этом случае связь должна обязательно существовать. Однако если обратиться к таблицам распределения коэффициента корреляции, оказывается, что значениям $\beta = 0,05$ и $f_1 = 4$ (при $n = 6$) соответствует $r_{табл} = 0,811$. Следовательно, если мы имеем только шесть пар исследуемых величин, то с вероятностью 95% мы бы приняли гипотезу об отсутствии связи, так как $r_{xy} < r_{табл}$.

Множественная линейная корреляция

Исследование взаимных вероятностных связей трех и большего числа переменных намного сложнее исследования парной корреляции. Объясняется это тем, что основное условие корреляционного анализа – нормальное распределение всех коррелирующих величин – обычно не соблюдается. Поэтому при решении задач множественной корреляции речь идет, как правило, либо о трех переменных, либо о значительных приближениях при исследовании большего их числа.

Рассмотрим корреляцию трех случайных величин x , y , z , которые следуют нормальному распределению и между которыми возможна линейная связь. В этом случае парные выборочные коэффициенты корреляции r_{xy} , r_{xz} , r_{yz} характеризуют силу связи только для той пары величин, которая показана индексами. Эти коэффициенты рассчитываются аналогично парному коэффициенту r_{xy} по формуле (6.4).

Однако между x и y может наблюдаться связь и в том случае, если имеет место одновременное воздействие на эти величины третьей переменной z . Тогда значение полного коэффициента, определенного по (6.4), характеризует уже не корреляционную связь между x и y , а включает также и часть корреляции, определяемой действием переменной z . Обозначая коэффициент корреляции между x и y за вычетом корреляции с третьей величиной z через r_{xy-z} , выразим его через соответствующие парные коэффициенты корреляции r_{xy} , r_{xz} , r_{yz} :

$$r_{xy-z} = \frac{r_{xy} - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}}. \quad (6.5)$$

Например, если $r_{xy} = 0.9$; $r_{xz} = 0.8$; $r_{yz} = 0.6$, то из (6.5) следует, что $r_{xy-z} = 0.87$. Таким образом, на долю корреляции между фактором z и переменными x и y приходится $0.90 - 0.87 = 0.03$ от общего значения коэффициента корреляции, вычисленного без учета третьего фактора.

Коэффициент r_{xy-z} называется *частным коэффициентом корреляции*. Аналогично выражению (6.5) можно записать формулы для частных коэффициентов корреляции r_{xz-y} и r_{yz-x} . Эти формулы получаются простой заменой букв при индексации.

Увеличение числа исследуемых переменных при корреляционном анализе позволяет решать сложные задачи исследования связей. Так, например, можно выявить, имеется ли линейная связь между какой-либо из пар переменных xu , xz , uz и третьей переменной z , y или x . Мерой такой связи служат множественные коэффициенты корреляции r_{z-xy} , r_{y-xz} и r_{x-yz} , которые рассчитываются по формуле

$$r_{x-yz} = \frac{r_{xy}^2 + r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz}}{1 - r_{yz}^2}. \quad (6.6)$$

Формулы для расчета остальных множественных коэффициентов корреляции получаются из (6.6) аналогично, путем перестановки букв соответствующих индексов.

7. ДИНАМИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

7.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При проведении экспериментальных исследований и в инженерной практике постоянство измеряемой величины в течение всего времени эксперимента – весьма редкий случай. Большинство измерительных систем предназначено для определения параметров процессов или веществ, изменяющихся во времени по некоторому закону, то есть для проведения *динамических измерений*.

Например, при измерении температуры в турбулентном потоке газа ее величина может изменяться, причем изменения носят случайный и кратковременный характер. Чтобы уловить эти изменения, инерционные характеристики измерительной системы должны удовлетворять определенным требованиям. Так, массивный спай термопары может не успевать отреагировать на кратковременное изменение температуры. Более того, даже при наличии реакции на ее изменение показания регистрирующего прибора могут отставать от времени изменения измеряемого параметра. Для полного анализа необходимо знать временные (инерционные) характеристики не только измерительного преобразователя (датчика), но и всей системы в целом, включая ее усилительные, регистрирующие и передающие элементы.

Успехи развития таких отраслей техники, как энергетическая, авиационно-космическая, атомная и других в значительной степени определяются квалифицированным решением динамических задач. В связи с этим разработка методов и корректное проведение измерений быстропротекающих процессов имеют весьма важное значение.

В частности, в теории ракетных двигателей одним из сложных вопросов является динамика переходных процессов. Переходные процессы связаны с плавным или ступенчатым регулированием тяги, отсечкой тяги ракетного двигателя на твердом топливе (РДТТ), отсечкой тяги вскрытием дополнительных сопел и (или) вводом хладагента, повторным запуском и гашением РДТТ многократного включения. При этом происходит изменение по определенным законам давления и температуры газов, скорости горения твердого ракетного топлива и других внутрикамерных параметров.

Для изучения быстропротекающих процессов необходимы датчики и аппаратура, динамические свойства которых позволяли бы регистрировать измеряемые параметры с минимальными искажениями. Однако такая аппаратура может быть правильно сконструирована только в том случае, когда динамические характеристики самого изучаемого процесса уже известны. Данное противоречие решается на практике рядом последовательных приближений при разработке датчиков или посредством их выбора по заведомо завышенным требованиям с использованием априорной информации о частотных характеристиках исследуемых процессов.

При измерении физических величин, изменяющихся во времени, результаты измерений могут быть искажены не только *статическими погрешностями* (рассмотренными выше), но и погрешностями еще одного вида, возникающими только в динамическом режиме, – *динамическими погрешностями*.

Аккумуляция механической, тепловой или электрической энергии в элементах измерительной системы делает ее инерционной. Инерционность проявляется в том, что показания прибора недостаточно быстро следуют за действительным изменением во времени физической величины. Оценка динамических погрешностей и их минимизация являются необходимыми элементами динамических измерений.

Рассмотрим типовую схему измерений при экспериментальном исследовании некоторого объекта или процесса (рис. 7.1). Объект исследования 1 описывается совокупностью физических величин x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – измеряемых параметров. Каждый параметр x_i , в общем случае, изменяется во времени, то есть $x_i = x_i(t)$. Характер и интенсивность этого изменения определяются физической природой параметра и могут быть различными на различных отрезках времени.

Задачей измерительного устройства 2 является получение с заданной погрешностью оценок измеряемых параметров в виде функции времени $y_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$). При последующем анализе каждый измеряемый параметр x_k в отдельности или в совокупности с другими используется для вычисления различного рода функций

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_k); f_2(x_k), \dots, \\ f(x_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \dots \end{array} \right\}$$

или функционалов

$$\left. \begin{array}{l} F_1(x_k); F_2(x_k), \dots, \\ F(x_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \dots \end{array} \right\},$$

характеризующих исследуемый объект.

При этом один и тот же параметр может быть использован при вычислении нескольких характеристик.

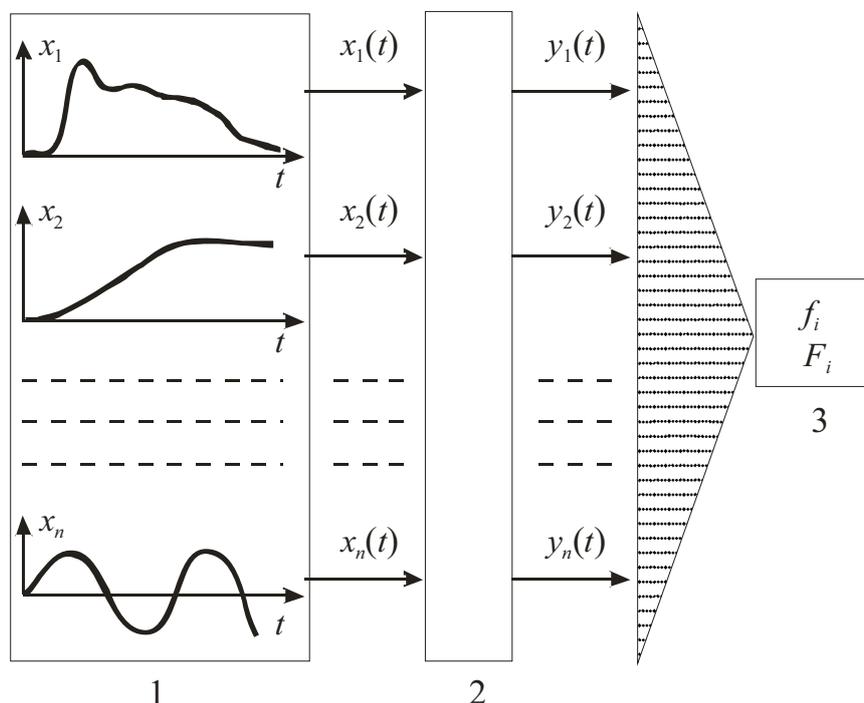


Рис. 7.1. Типовая схема измерений:
 1 – исследуемый объект; 2 – измерительное устройство;
 3 – блок обработки результатов измерений

Получение экспериментальных данных при измерении начинается подачей измеряемого параметра на вход измерительного устройства и заканчивается регистрацией полученного на выходе сигнала.

Измерительное устройство можно условно представить в виде блок-схемы (рис. 7.2), хотя каждый из составляющих ее элементов может, в свою очередь, представлять отдельное измерительное устройство.

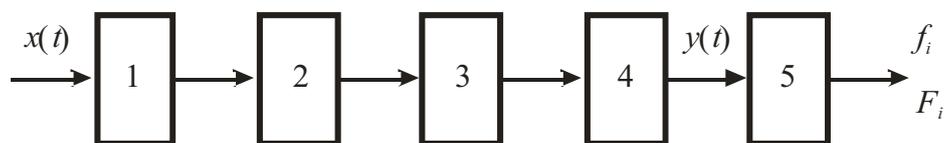


Рис. 7.2. Блок-схема измерительного устройства:
 1 – датчик; 2 – усилитель или преобразователь;
 3 – передаточный элемент; 4 – устройство вывода; 5 – ЭВМ

На вход датчика (чувствительный элемент, первичный преобразователь) поступает измеряемая величина $x(t)$. Затем слабые сигналы могут усиливаться специальным усилителем или с помощью преобразователя преобразовываться к более удобному виду. Передаточный элемент

(электрический проводник, беспроводная система) передает сигнал на *устройство вывода*. Это устройство либо непосредственно выдает информацию, либо хранит ее для дальнейшей обработки с помощью компьютера. Если к измерительному устройству подключена ЭВМ, то обработка данных (получение заданных функций f_i или функционалов F_i) происходит непосредственно в процессе измерений.

С точки зрения системного анализа вся экспериментальная установка, как и ее отдельные блоки, функционально одинакова: в систему подается входной сигнал $x(t)$, а после переработки на ее выходе появляется выходной сигнал $y(t)$.

7.2. КЛАССИФИКАЦИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛОВ

Таким образом, характерной чертой измерения является передача сигналов. Под сигналом понимается физическая величина, несущая информацию. В процессе преобразования в измерительном устройстве параметры и вид сигнала могут изменяться (аналоговый переходит в частотный, например). При этом, однако, передаваемая им измерительная информация (изменение во времени размера физической величины) должна претерпевать минимальные искажения.

Выходной и входной сигналы связаны друг с другом определенными соотношениями, которые характеризуют измерительную систему. Эти соотношения называют *передаточными характеристиками* измерительной системы и ее отдельных звеньев. Динамическое измерение возможно, если свойства звеньев и системы в целом соответствуют свойствам измерительного сигнала.

Рассмотрим классификацию и основные характеристики сигналов. Классификацию сигналов можно осуществлять с различных точек зрения. Дадим определение наиболее распространенных типов сигналов.

Детерминированный сигнал в любой момент времени определен однозначно и является воспроизводимым. Изменение сигнала во времени можно заранее предсказать, используя его математическое описание.

Стохастический сигнал в каждый момент времени изменяется случайным образом и может быть описан только статистическими законами. Математическое описание не дает возможности предсказать конкретные изменения сигнала.

Периодический сигнал характеризуется равенством

$$x(t) = x(t + T),$$

где T – период сигнала; время t может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Апериодический сигнал – это в общем случае непериодический сигнал, который не подчиняется этому условию. Этот сигнал не содержит колебательной составляющей.

Стационарный сигнал – это стохастический сигнал, статистические характеристики которого (среднее значение и амплитудная плотность сигнала) не изменяются во времени. Этому условию удовлетворяет, в частности, детерминированный периодический сигнал, который *a priori* является стационарным.

Установившийся сигнал – это неизменяемая во времени величина

$$x(t) = \text{const} = \bar{x}.$$

Для этого сигнала первая и все высшие производные по времени равны нулю.

На рис. 7.3 приведены примеры рассмотренных типов сигналов. Из этих графиков видно, что каждый сигнал может одновременно относиться к нескольким типам.

При анализе динамических характеристик измерительных систем рассматривают их реакцию на типовые изменения входного сигнала. В качестве типовых используют четыре основных идеализированных типа входных сигналов:

- единичная импульсная функция;
- единичная функция;
- линейно нарастающая функция;
- гармонические колебания.

Все эти сигналы относятся к классу детерминированных. Рассмотрим временные характеристики этих сигналов (рис. 7.4.)

Единичная импульсная функция (функция Хевисайда) определяется как предельный случай прямоугольного импульса, площадь которого $F_x = f(t) \cdot \Delta t$ равна единице (рис. 7.4, а).

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 1/\Delta t & \text{при } 0 \leq t < \Delta t; \\ 0 & \text{при } t \geq \Delta t. \end{cases}$$

Единичная функция (скачок, скачкообразная функция), приведенная на рис. 7.4, б, определяется следующим образом:

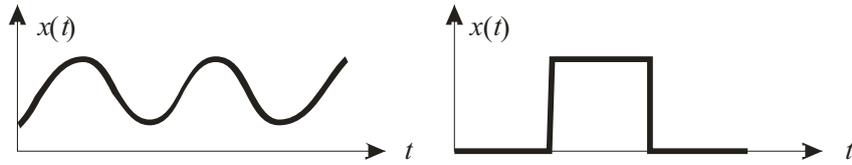
$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0; \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Единичная функция представляет собой интеграл от единичной импульсной функции.

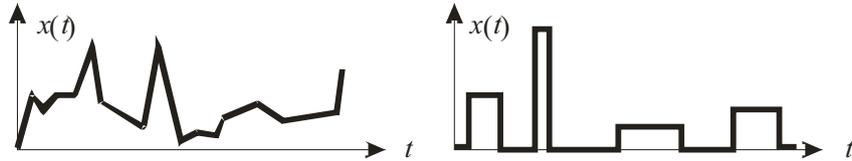
Линейно нарастающая функция получается в результате интегрирования единичной функции и определяется следующим образом (рис. 7.4, в):

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0; \\ t & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

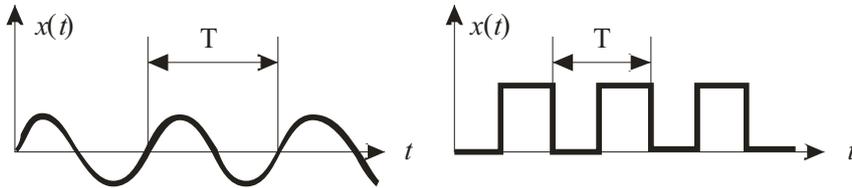
Детерминированный сигнал



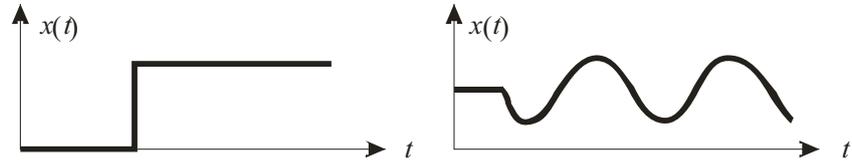
Стохастический сигнал



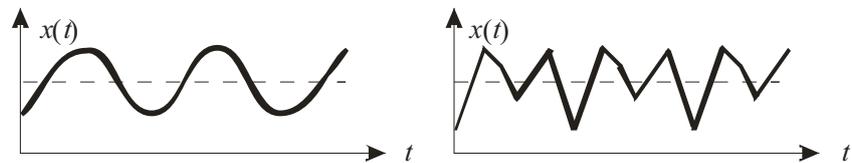
Периодический сигнал



Аперриодический сигнал



Стационарный сигнал



Установившийся сигнал

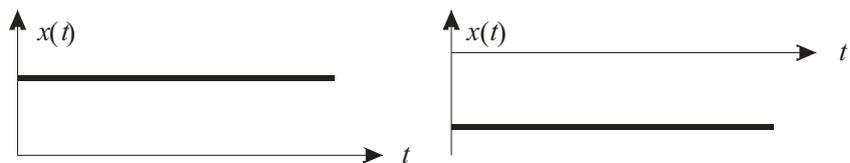


Рис. 7.3. Основные типы сигналов

Гармонические колебания (рис. 7.4,з) определяются формулой

$$x(t) = f(t) = \bar{x} \cos(\omega t + \varphi),$$

где \bar{x} , φ , ω – амплитуда, начальная фаза и угловая частота колебаний.

В общем случае колебания по закону косинуса можно представить в виде суммы колебаний

$$x(t) = f(t) = (\bar{x} \cdot \cos \varphi) \cos \omega t - (\bar{x} \cdot \sin \varphi) \sin \omega t.$$

Описание гармонических колебаний можно представить также в комплексной форме, используя уравнение Эйлера:

$$x(t) = \bar{x} [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)] = \bar{x} \exp[i(\omega t + \varphi)],$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

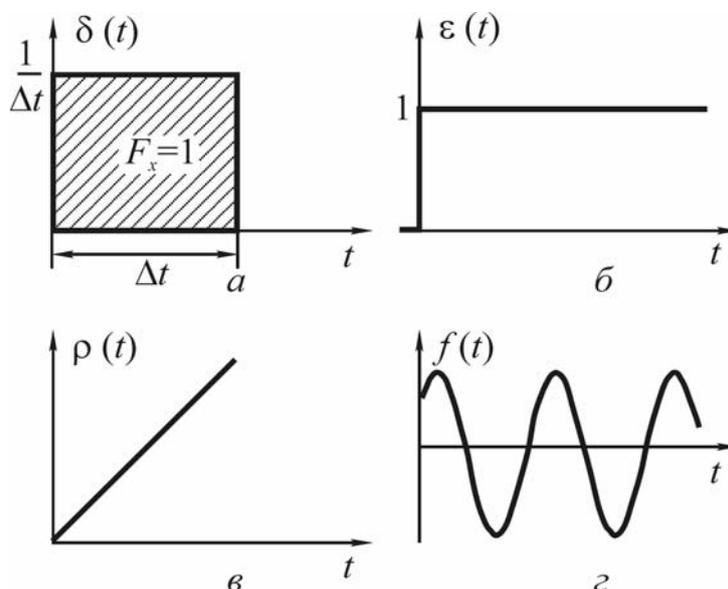


Рис. 7.4. Типовые детерминированные сигналы:
 а – единичная импульсная функция; б – единичная функция;
 в – линейно нарастающая функция; г – гармонические колебания

7.3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим математическое описание измерительной системы как преобразователя измеряемой величины в показание. В первую очередь нас будут интересовать передаточные свойства измерительных систем, которые позволяют оценить пригодность их для измерения сигналов, изменяющихся во времени.

Далее будем рассматривать только *линейные измерительные системы*, подчиняющиеся принципу суперпозиции (наложения). Согласно этому принципу эффект нескольких приложенных к системе воздействий равен сумме эффектов каждого из этих воздействий в отдельности.

На практике используются три основных способа описания процесса передачи сигналов. Все эти способы теоретически равноправны, но различаются по своей наглядности и удобству при проведении расчетов.

Описание передаточных характеристик дифференциальными уравнениями

Во многих случаях измерительные системы являются физическими устройствами, содержащими нелинейные элементы. В инженерной практике обычно идут на разумное упрощение, которое сводится к *линеаризации* характеристик измерительной системы. Это позволяет использовать для описания динамического преобразования измеряемой величины линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t), \end{aligned} \quad (7.1)$$

где a_i и b_j – постоянные коэффициенты ($i = 0, 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, m$).

При линеаризации уравнений необходимо указать исходный режим $x(t)$ и границы допустимого изменения $x(t)$, в которых можно использовать линеаризованные уравнения.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий этот способ описания передаточных характеристик. Пусть необходимо измерить изменение температуры в потоке газа $\theta(t)$ с помощью термопары. Предполагаем, что теплопроводность спая термопары достаточно велика, то есть температуру спая θ_c можно считать одинаковой по его объему. Кроме того, пренебрегаем потерями тепла, связанными с теплопроводностью и излучением. В рамках этих допущений уравнение теплового баланса имеет вид

$$\alpha S (\theta - \theta_c) = cm \frac{d\theta_c}{dt}, \quad (7.2)$$

где α – коэффициент теплоотдачи; m , c – масса и удельная теплоемкость спая термопары; S – площадь контактирующей с газом поверхности.

Это дифференциальное уравнение представляет собой искомую зависимость между входным θ и выходным θ_c сигналами. Из (7.2) получаем уравнение, описывающее работу термопары:

$$\theta = \theta_c + \frac{cm}{\alpha S} \frac{d\theta_c}{dt}.$$

Величина $ct/(\alpha S)$ характеризует инерционные свойства термопары и называется *постоянной времени прибора* (термопары):

$$T = \frac{c\rho V}{\alpha S}, \quad (7.3)$$

где ρ – плотность материала спая термопары; V – его объем.

Из (7.3) следует, в частности, что инерционность термопары линейно возрастает с увеличением ее диаметра D , так как $V \sim D^3$, а $S \sim D^2$. Обозначив входное воздействие $\theta = x(t)$, а выходной сигнал $\theta_c = y(t)$, уравнение (7.3) можно представить в форме

$$x(t) = y(t) + T \frac{dy(t)}{dt}.$$

Это уравнение описывает динамические характеристики термопары. Отметим, что наглядная интерпретация дифференциального уравнения весьма ограничена. Только решение этого уравнения для частных видов входных функций $x(t)$ позволяет сравнить входной и выходной сигналы.

Описание передаточных характеристик переходными функциями

Передаточные свойства линейной системы можно охарактеризовать описанием ее выходного сигнала $y(t)$ как реакции на типовой входной сигнал $x(t)$. Сигнал $y(t)$ можно определить из решения линеаризованного уравнения или экспериментально. При экспериментальном определении переходных функций необходимо, чтобы измерительная система перед началом опыта находилась в установившемся состоянии. Как входной, так и выходной сигналы должны быть неизменны во времени, то есть

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dots = \frac{d^m x}{dt^m} = \frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \dots = \frac{d^n y}{dt^n} = 0.$$

В зависимости от типового входного сигнала при анализе динамических свойств системы используются следующие переходные функции.

Импульсная переходная функция $g(t)$

Если в момент времени $t = 0$ на вход системы подано воздействие в виде единичной импульсной функции $\delta(t)$, то изменение ее выходного сигнала называется импульсной переходной функцией (рис. 7.5). В общем случае выходной сигнал $g(t)$ нормируется по величине площади импульса $F_x = \delta(t) \cdot \Delta t = F_y$.

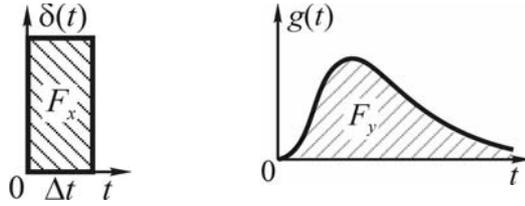


Рис. 7.5. Реакция системы на единичную импульсную функцию

Переходная функция $\gamma(t)$

Изменение выходного сигнала системы после единичного скачкообразного изменения ее входного сигнала $\varepsilon(t)$ называется переходной функцией (рис. 7.6). В общем случае выходной сигнал $\gamma(t)$ нормируется высотой скачка входного сигнала $\varepsilon(t)$. Установившееся значение переходной функции определяется коэффициентом передачи

$$K = \left. \frac{\gamma(t)}{\varepsilon(t)} \right|_{t \rightarrow \infty} = \text{const}.$$

Этот коэффициент характеризует крутизну статической характеристики системы и соответствует чувствительности линейной (или линеаризованной вблизи рабочей точки) системы.

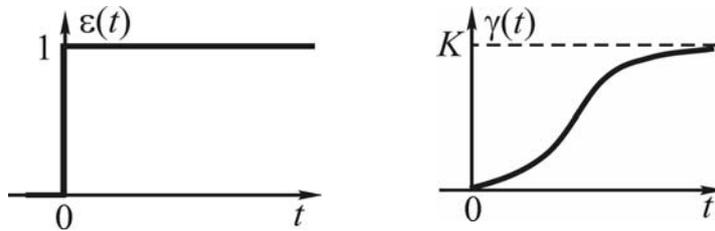


Рис. 7.6. Реакция системы на единичную функцию

Реакция на линейно нарастающее воздействие $h(t)$

Если на входе измерительной системы сигнал $\rho(t)$ линейно возрастает от некоторого установившегося значения, то соответствующее изменение выходного сигнала называется реакцией на линейное возрастание (рис. 7.7).

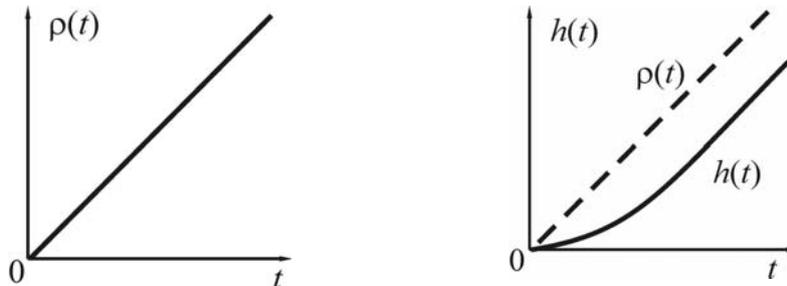


Рис. 7.7. Реакция системы на линейно нарастающее воздействие

Указанные функции $g(t)$, $\gamma(t)$, $h(t)$ каждая по своему полностью описывают линейную систему. Преимущество их состоит в наглядности, а недостаток – в сложности определения по этим функциям выходного сигнала $y(t)$ при произвольном входном сигнале $x(t)$. В этом случае $y(t)$ связана с $x(t)$ и переходными функциями так называемым интегралом свертки, решение которого для экспериментально определенных переходных функций может быть получено только численными методами.

Передаточные функции и частотные характеристики

Использование передаточных функций и частотных характеристик для описания динамических свойств измерительных систем возможно только для линейных систем. Несмотря на то что данный способ не обеспечивает наглядной интерпретации результатов, он прост и удобен для оценки динамических погрешностей измерений.

Передаточная функция

При нулевых граничных условиях уравнение (7.1), описывающее динамическое преобразование входного сигнала $x(t)$ в выходной сигнал $y(t)$, с помощью преобразования Лапласа можно представить в виде

$$A(p) \cdot Y(p) = B(p) \cdot X(p), \quad (7.4)$$

где $X(p)$ – изображение функции $x(t)$;

$Y(p)$ – изображение функции $y(t)$;

$p = i\omega$ (ω – угловая частота, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица).

Коэффициенты уравнения (7.4) рассчитываются по следующим формулам:

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0;$$

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0.$$

Передаточной функцией называется отношение (при нулевых граничных условиях)

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

Согласно (7.4), передаточная функция равна отношению полиномов $B(p)$ и $A(p)$:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (7.5)$$

В большинстве практических случаев измерительная система имеет несколько последовательных элементов (см. рис. 7.2): датчик, усилитель, соединительную линию, регистрирующий прибор. При этом передаточная функция системы равна произведению передаточных функций каждого из составляющих измерительную систему k элементов:

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \dots \cdot W_k(p).$$

Частотные характеристики

Частотными характеристиками измерительной системы называются динамические характеристики, определяющие реакцию системы на входные воздействия в виде гармонических колебаний в широком диапазоне частот. Они включают два типа характеристик – амплитудно-частотную (АЧХ) и фазо-частотную (ФЧХ). Эти характеристики имеют наглядный физический смысл и могут быть получены экспериментальным или расчетным путем.

При экспериментальном определении частных характеристик на измерительную систему подаются гармонические колебания (например, от генератора электрических колебаний) вида

$$x(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi_x).$$

Если измерительная система линейна, то на ее выходе в установившемся режиме колебания также будут гармоническими:

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi_y).$$

Здесь A_x , A_y – амплитуды входных и выходных колебаний; φ_x , φ_y – начальные фазы этих колебаний. Значения A_y , φ_y зависят от частоты входного сигнала ω и от динамических свойств измерительной системы. Характер входных и выходных колебаний линейной динамической системы приведен на рис. 7.8. Дадим определение амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик.

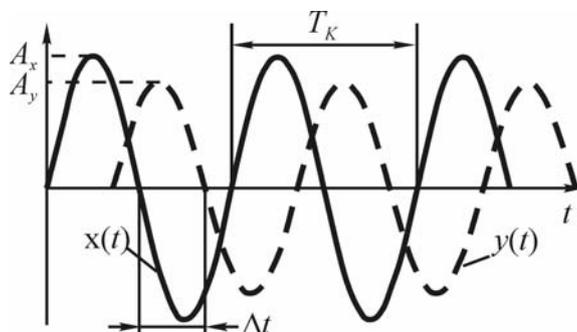


Рис. 7.8. Входные и выходные колебания линейной динамической системы

Амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)$ – это зависимость, показывающая, как изменяется с частотой отношение амплитуды выходного сигнала $A_y(\omega)$ линейной динамической системы к амплитуде входных колебаний $A_x(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{A_y(\omega)}{A_x(\omega)}.$$

Для фиксированной частоты $\omega_k = \text{const}$ значение АЧХ представляет собой вполне определенное число $A(\omega_k) = A_y(\omega_k)/A_x(\omega_k) = \text{const}$.

Фазо-частотная характеристика $\varphi(\omega)$ – это зависимость сдвига по фазе между выходным и входным сигналами измерительной системы от их частоты:

$$\varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega).$$

Для фиксированного значения частоты $\omega_k = \text{const}$ величина сдвига по фазе между $y(t)$ и $x(t)$ определяется формулой

$$\varphi(\omega_k) = -\omega_k \cdot \Delta t = -\frac{2\pi \cdot \Delta t}{T_k},$$

где Δt – промежуток времени, соответствующий сдвигу (отставанию) по фазе между выходными и входными колебаниями (см. рис. 7.8); $T_k = 2\pi/\omega_k$ – период колебаний.

При экспериментальном определении АЧХ и ФЧХ проводят серию измерений для ряда значений угловой частоты ω с фиксированным значением амплитуды A_x входного сигнала. У реальных систем с ростом частоты ω амплитуда выходного сигнала A_y уменьшается, а сдвиг по фазе $\varphi(\omega)$ – увеличивается. Вследствие этого динамические погрешности измерений с ростом частоты сигнала увеличиваются.

Измерение частотных характеристик необходимо проводить во всем рабочем диапазоне частот от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{ep}$ (ω_{ep} – верхняя граница рабочего диапазона частот). Величина ω_{ep} выбирается из условия

$$\frac{A(\omega_{ep})}{A(0)} \sim 0,05 \div 0,1,$$

то есть до тех значений частоты, при которых амплитуда колебаний выходного сигнала уменьшается в $20 \div 10$ раз. Типичный вид частотных характеристик для линейных динамических систем приведен на рис. 7.9.

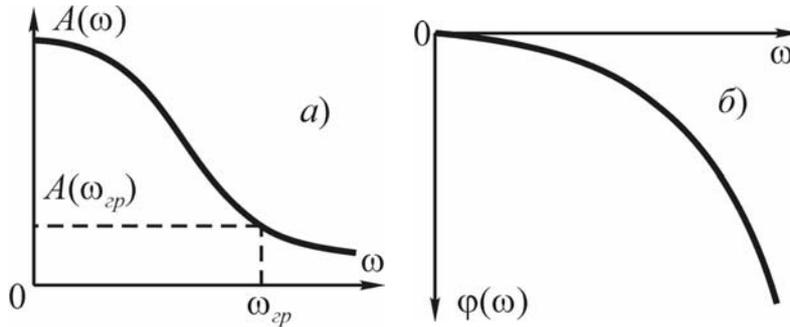


Рис. 7.9. Частотные характеристики линейных динамических систем: а – амплитудно-частотная характеристика; б – фазо-частотная характеристика

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики полностью описывают динамические свойства измерительной системы и позволяют, в частности, определить полосу пропускания частот (область частот нормальной работы системы).

Рабочая полоса пропускания частот измерительной системы – это область частот, в которой отклонения $A(\omega)$ от соответствующего значения $A(\omega)$ при $\omega = 0$ не превышают заданной величины (обычно принимают отклонения $\pm 5\%$ или $\pm 10\%$), а сдвиг по фазе $\varphi(\omega)$ не превышает 30° или $\pi/6$ радиан. Верхнее значение рабочей полосы называется граничной частотой ω_{sp} .

Динамические свойства измерительной системы зависят от ее внутренней структуры и характеристик входящих в нее элементов. Отметим, например, что в реальных условиях датчики давления работают при наличии соединительных линий – трубопроводов, штуцеров и т. п. В этом случае необходимо учитывать влияние этих линий на динамические свойства всей системы. При измерении температуры термопарами или термометрами сопротивления необходимо учитывать, что их динамические свойства зависят от размеров, положения чувствительного элемента в системе датчика температуры, теплофизических свойств материалов датчика, а также от условий теплообмена датчика с измеряемой средой.

Взаимосвязь способов описания динамических свойств измерительных систем

Рассмотренные выше способы описания динамических свойств измерительных систем являются взаимосвязанными, и в принципе любую из динамических характеристик можно определить, зная другую характеристику этой системы.

Дифференциальное уравнение – передаточная функция

Переход от дифференциального уравнения к передаточной функции и наоборот можно осуществить путем сравнения выражений (7.1) и (7.5).

Дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t). \end{aligned}$$

Передаточная функция:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0},$$

где $A(p)$, $B(p)$ – коэффициенты уравнения (7.4).

Передаточная функция – переходные функции

Взаимосвязь переходных функций друг с другом и с передаточной функцией приведена в табл. 7.1, в которой $p = i\omega$; L, L^{-1} – прямое и обратное преобразования Лапласа, а штрихи означают соответствующие производные. Для переходных функций, полученных экспериментально, преобразование Лапласа осуществляется численно.

Таблица 7.1

| | $W(p)$ | $g(t)$ | $\gamma(t)$ | $h(t)$ |
|-------------|---|--------------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| $W(p)$ | – | $W(p) = L\{g(t)\}$ | $W(p) = L\{\gamma'(t)\}$ | $W(p) = L\{h''(t)\}$ |
| $g(t)$ | $g(t) = L^{-1}\{W(p)\}$ | – | $g(t) = \gamma'(t)$ | $g(t) = h''(t)$ |
| $\gamma(t)$ | $\gamma(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}$ | $\gamma(t) = \int_0^t g(t) dt$ | – | $\gamma(t) = h'(t)$ |
| $h(t)$ | $h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p^2}\right\}$ | $h(t) = \int_0^t \int_0^t g(t) dt^2$ | $h(t) = \int_0^t \gamma(t) dt$ | – |

Отметим взаимосвязь между предельными значениями передаточной функции $W(p)$ и переходной функции $\gamma(t)$. На основании теоремы о предельных значениях преобразования Лапласа в предположении, что предельные значения существуют, можно записать:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} W(\omega),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} W(\omega).$$

Выше было показано, что коэффициент передачи системы K является пределом функции $\gamma(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому значение передаточной

функции при $\omega = 0$ также соответствует коэффициенту передачи K , то есть крутизне статической характеристики.

Передачная функция – частотные характеристики

Связь передачной функции $W(p)$ и частотных характеристик $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ может быть установлена, если на вход линейной измерительной системы подаются гармонические колебания вида

$$\bar{x}(t) = A_x \exp[i(\omega t + \varphi_x)].$$

Из теории линейных вынужденных колебаний известно, что после завершения переходного процесса вынужденные гармонические колебания на выходе системы имеют ту же частоту, но другие значения амплитуды и фазы:

$$\bar{y}(t) = A_y \exp[i(\omega t + \varphi_y)].$$

Для колебаний $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ имеет место следующая зависимость:

$$\bar{y}(t) = \bar{x}(t) \cdot W(p).$$

Разрешая это выражение относительно $W(p)$, получим

$$W(p) = \frac{\bar{y}(t)}{\bar{x}(t)} = \frac{A_y}{A_x} \exp[i(\varphi_y - \varphi_x)].$$

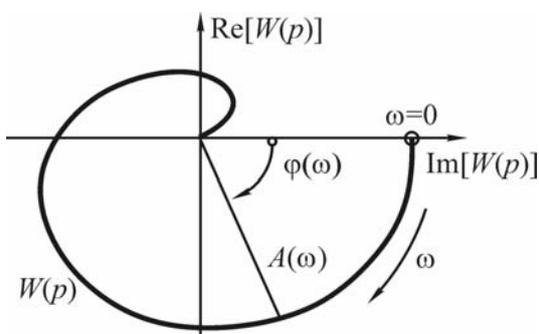


Рис. 7.10. Изображение частотных характеристик и передачной функции в комплексной плоскости

Таким образом, передачная функция представляет собой векторное изображение амплитудно-частотной $A(\omega) = A_y(\omega)/A_x(\omega)$ и фазо-частотной $\varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega)$ характеристик. Система полностью описана, если для всех ω известны $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. Графики АЧХ и ФЧХ (рис. 7.10) можно объединить, если изобразить их в комплексной плоскости с координатами $\text{Im}[W(p)]$, $\text{Re}[W(p)]$, соответствующими мнимой и действительной частям $W(p)$.

7.4. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОСНОВНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим динамические свойства измерительных систем первого и второго порядка. Эти системы наиболее распространены в практике инженерно-физических экспериментов.

Система первого порядка

Типичной системой первого порядка является рассмотренная выше схема измерения температуры в потоке газа с помощью термопары. Данная динамическая система описывается дифференциальным уравнением первого порядка (7.1), в которое введен коэффициент K :

$$K \cdot x(t) = y(t) + T \frac{dy(t)}{dt}. \quad (7.6)$$

Переходная характеристика представляет собой решение уравнения (7.6) для типового сигнала – единичной функции $\varepsilon(t)$:

$$x(t) = K \cdot \varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ K, & t > 0. \end{cases}$$

Решение этого уравнения для $t > 0$ имеет вид

$$y(t) = K \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right].$$

Система с такой переходной характеристикой называется *инерционным звеном первого порядка*. Коэффициент K является коэффициентом передачи (чувствительностью системы), а T – постоянной времени измерительной системы. Характерным для данной системы является конечное значение тангенса угла наклона переходной характеристики при $t = 0$:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \frac{K}{T}.$$

Проекция отрезка касательной на асимптоту $y(t) = K$ является постоянной величиной, равной T . Значение функции $y(t)$ при $t = T$ равно:

$$y(T) = K(1 - \exp(-1)) = K \left(1 - \frac{1}{e} \right) \approx 0,63 \cdot K,$$

где $e \approx 2,718$ – основание натуральных логарифмов.

Таким образом, величину постоянной времени T можно определить по снятой экспериментально кривой переходной функции как отрезок времени, за который $y(t)$ достигнет 63 % от своего установившегося значения K (рис. 7.11). Значения переходной характеристики для некоторых промежутков времени (в долях от постоянной времени T) приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

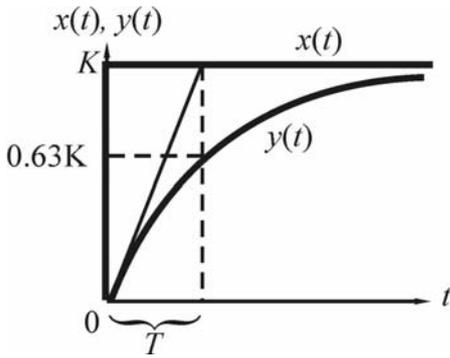


Рис. 7.11. Переходные характеристики инерционного звена первого порядка

| | | | | | |
|--------|----------|----------|----------|---------|---------|
| t | $0.5T$ | T | $2.303T$ | $3T$ | $4.61T$ |
| $y(t)$ | $0,393K$ | $0,632K$ | $0,9K$ | $0,95K$ | $0,99K$ |

Передаточная функция инерционного звена первого порядка, полученная с помощью дифференциального уравнения (7.6), имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{1 + i\omega T}. \quad (7.7)$$

Умножая числитель и знаменатель (7.7) на величину, комплексно сопряженную знаменателю, получим действительную и мнимую части передаточной функции:

Результатом умножения числителя и знаменателя на сопряженную величину знаменателя является:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}[W(p)] &= \frac{K}{1 + (\omega T)^2}, \\ \operatorname{Im}[W(p)] &= -\frac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Из уравнений (7.8) можно найти значения модуля вектора $|W(p)|$ и его фазы $\langle W(p) \rangle$:

$$\begin{aligned} |W(p)| &= \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \\ \langle W(p) \rangle &= \operatorname{arctg}(-\omega T). \end{aligned}$$

Соответствующие графики АЧХ и ФЧХ в логарифмических координатах приведены на рис. 7.12.

Из анализа графиков, приведенных на рис. 7.12, следует, что для измерительной системы первого порядка характерным является падение логарифмической амплитудно-частотной характеристики на декаду (рис. 7.12, а). Точка пересечения асимптоты с горизонтальной осью $|W(p)| = 1$ соответствует частоте $\omega_0 = 1/T$. При этой частоте отношение амплитуд составляет $A(0)/A(\omega_0) = \sqrt{2}/2 \approx 0,707$, а сдвиг по фазе $\varphi(\omega_0) = \langle W(p) \rangle = -45^\circ$ или $\pi/8$ радиан.

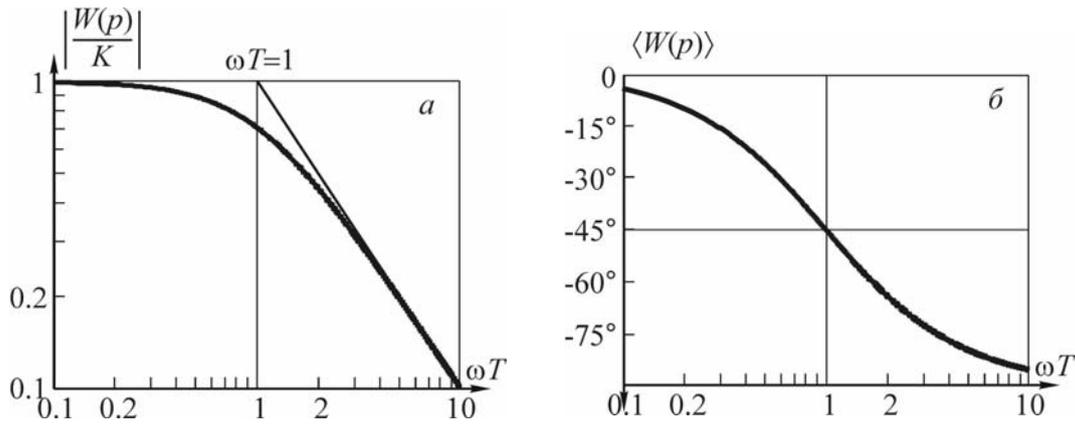


Рис. 7.12. частотные характеристики инерционного звена первого порядка:
 а – амплитудно-частотная характеристика;
 б – фазо-частотная характеристика

Система второго порядка

Рассмотрим обобщенную измерительную систему, содержащую пружину 1, подвижную часть 2, демпфер 3 и прибор для измерения перемещения 4 (рис. 7.13).

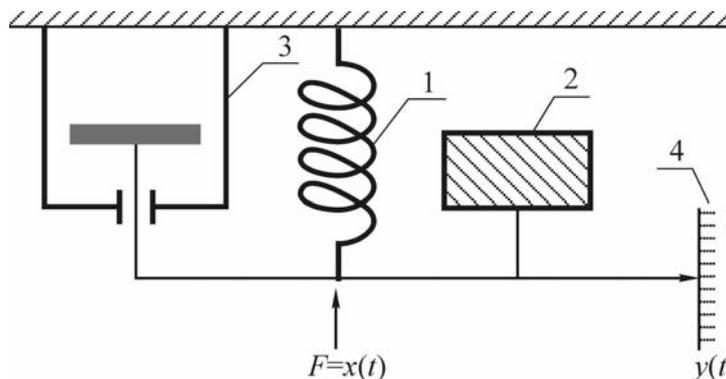


Рис. 7.13. Обобщенная система второго порядка:
 1 – пружина; 2 – подвижная часть; 3 – демпфер;
 4 – прибор для измерения перемещения

На систему действует входное воздействие – сила $F(t) = x(t)$. В качестве выходного сигнала примем линейное перемещение системы $y(t)$, регистрируемое прибором 4. На измерительную систему, кроме силы F , действуют следующие силы:

$$F_{np} = -\lambda y \text{ – сила упругости;}$$

$$F_m = m \frac{d^2 y}{dt^2} \text{ – сила инерции;}$$

$$F_\delta = -k \frac{dy}{dt} \text{ – демпфирующая сила,}$$

где λ – коэффициент упругости;
 m – масса подвижной части;
 k – коэффициент демпфирования.

Из условия равновесия всех действующих на систему сил получим дифференциальное уравнение данной системы:

$$x(t) = \lambda y(t) + k \frac{dy(t)}{dt} + m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}. \quad (7.9)$$

Общее уравнение для системы второго порядка, как это следует из (7.1), имеет вид

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t).$$

Для измерительного преобразователя, массой подвижной части которого нельзя пренебречь, это уравнение сводится к уравнению вида (7.9):

$$x(t) = a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2}. \quad (7.10)$$

Параметры a_0, a_1, a_2 можно свести к одному параметру, если уравнение (7.10) обезразмерить. В установившемся состоянии (7.10) переходит в уравнение

$$x_0 = a_0 y_0,$$

где x_0, y_0 – установившиеся значения $x(t), y(t)$ (при $t \rightarrow \infty$).

Выражая входную и выходную величины в виде

$$\Phi = \frac{x(t)}{x_0}, \quad \xi = \frac{y(t)}{y_0},$$

получим

$$\Phi(t) = \xi(t) + \frac{a_1}{a_0} \frac{d\xi(t)}{dt} + \frac{a_2}{a_0} \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2}. \quad (7.11)$$

Введем безразмерное время $\tau = \omega_0 t$, где $\omega_0 = \sqrt{a_0/a_2}$ – резонансная частота, и безразмерный коэффициент демпфирования $D = a_1/\sqrt{4a_0a_2}$. При этом уравнение (7.11) примет вид

$$\Phi(\tau) = \xi(\tau) + 2D \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} + \frac{d^2 \xi(\tau)}{d\tau^2}. \quad (7.12)$$

Решение дифференциального уравнения (7.12) для единичной функции $x(t) = \varepsilon(t)$ имеют следующий вид:

$$\xi(\tau) = \begin{cases} 1 - \left(\cos(\tau \cdot \sqrt{1-D^2}) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\tau \cdot \sqrt{1-D^2}) \right) \cdot \exp(-D\tau), & \text{при } 0 \leq D < 1; \\ 1 - (1 + \tau) \cdot \exp(-\tau), & \text{при } D = 1; \\ 1 - \tau \cdot \left(\operatorname{ch}(\tau \cdot \sqrt{D^2-1}) + \frac{D}{\sqrt{D^2-1}} \operatorname{sh}(\tau \cdot \sqrt{D^2-1}) \right) \cdot \exp(-D\tau), & \text{при } D > 1. \end{cases}$$

Семейство переходных функций $\gamma(\tau)$, представляющих собой решение дифференциального уравнения (7.12), при разных значениях безразмерного коэффициента демпфирования приведено на рис. 7.14.

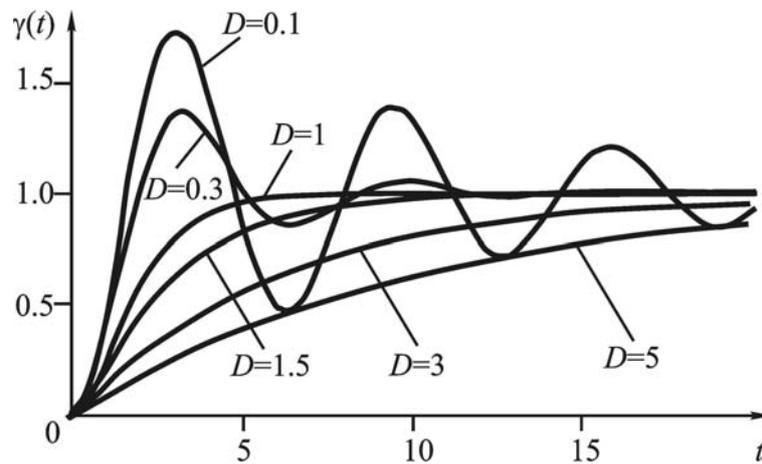


Рис. 7.14. Переходные функции системы второго порядка

Как видно из рис. 7.14, решения для $D < 1$ отличаются от решений для $D \geq 1$ наличием колебательной составляющей. Сопоставляя уравнение (7.9) с уравнением (7.10), получим

$$a_0 = \lambda; \quad a_1 = k; \quad a_2 = m.$$

При этом резонансная частота недеформированной системы равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = \sqrt{\frac{\lambda}{m}},$$

а безразмерный коэффициент демпфирования определяют по формуле

$$D = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} = \frac{k}{2\sqrt{\lambda m}}.$$

Таким образом, безразмерные параметры рассматриваемой системы выражаются через соответствующие физические величины λ , k , m . С

помощью уравнения (7.9) можно найти выражение для передаточной функции системы второго порядка:

$$W(i\Omega) = \frac{\bar{\xi}(\tau)}{\bar{\Phi}(\tau)} = \frac{1}{1 + 2Di\Omega + (i\Omega)^2},$$

где $\Omega = \omega/\omega_0 = \omega\sqrt{a_2/a_0}$ – безразмерная частота.

На рис. 7.15 приведено семейство амплитудно-частотных характеристик, представляющих собой модуль вектора $|W(i\Omega)|$, в логарифмических координатах для измерительной системы второго порядка. Как видно из рис. 7.15, при $\Omega = 1$ наблюдается резонанс незадемпфированной системы, то есть системы со значениями $D < 1$. При этом $\omega_0 = \sqrt{a_0/a_2} = \sqrt{\lambda/m}$ соответствует собственной (или резонансной) частоте незадемпфированной системы.

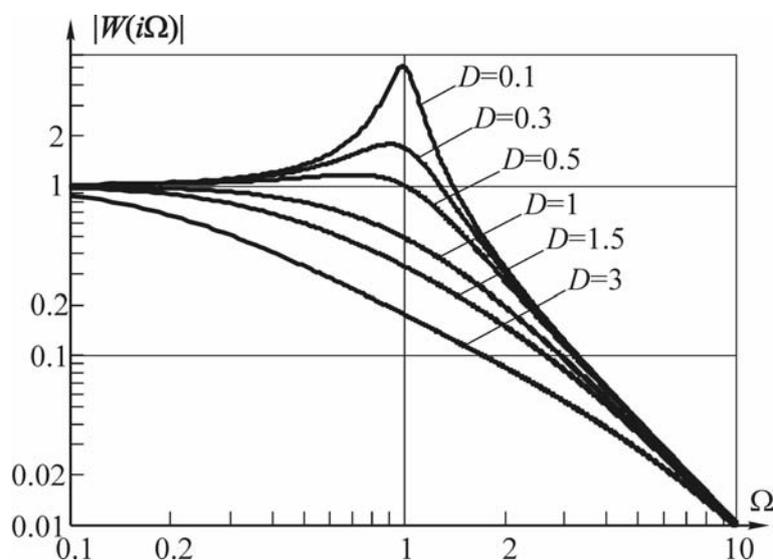


Рис. 7.15. Логарифмические АЧХ системы второго порядка

7.5. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Как было отмечено выше, при измерении физических величин, изменяющихся во времени, результаты измерений могут быть искажены не только за счет статических погрешностей, но и погрешностью еще одного вида, возникающей только в динамическом режиме, – *динамической погрешностью измерений*. Эта погрешность возникает вследствие того, что показание измерительной системы $y(t)$ не может точно отслеживать изменение измеряемой величины $x(t)$. При медленном (по отношению к динамическим характеристикам измерительной системы) изменении измеряемой величины этой погрешностью можно пренеб-

речь. Однако при быстрых изменениях $x(t)$ погрешность становится значительной и в ряде случаев настолько большой, что результат измерения является совершенно неприемлемым.

Определение динамической погрешности измерений

Будем рассматривать линейную измерительную систему, у которой статические погрешности $\Delta y_{ст}$ не зависят от динамических $\Delta y_{дин}$ и поэтому могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения. Этому соответствует принятие статически исправленных значений показаний прибора

$$y^*(t) = y(t) - \Delta y_{ст}.$$

Тогда мгновенная динамическая погрешность $\Delta y_{дин}(t)$ может быть определена по формуле

$$\Delta y_{дин}(t) = y^*(t) - x(t) = y(t) - x(t) - \Delta y_{ст}. \quad (7.13)$$

Таким образом, динамическая погрешность – это разность между погрешностью измерительной системы в динамическом режиме и ее статической погрешностью, соответствующая значению величины в данный момент времени (рис. 7.16).

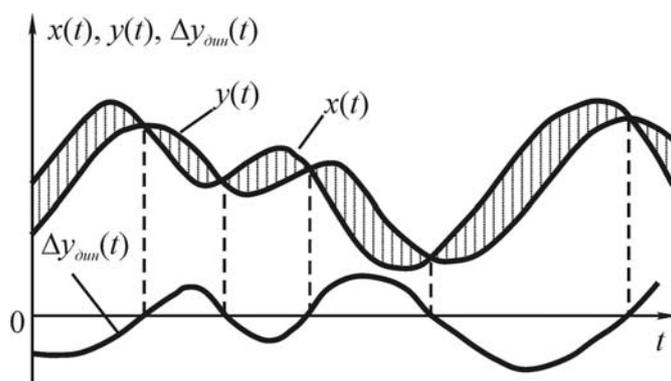


Рис. 7.16. Мгновенная динамическая погрешность

В установившемся состоянии $y^*(t) = x(t)$ и динамическая погрешность $\Delta y_{дин} = 0$. Согласно этому определению, мгновенная динамическая погрешность является функцией времени, так как процессы $x(t)$ и $y^*(t)$ также являются функциями времени.

Для описания динамической погрешности в частотной области уравнение (7.13) подвергается преобразованию Лапласа:

$$\Delta y_{дин}(p) = y^*(p) - x(p). \quad (7.14)$$

Величина $\Delta y_{\text{дин}}$ является функцией времени (или переменной изображения $p = i\omega$) и, следовательно, является процессом. Поэтому такой способ описания динамической погрешности не обладает наглядностью и применяется редко. На практике обычно используются некоторые осредненные значения динамической погрешности. Во временной области при нестационарном изменении измеряемой величины $x(t)$ по аналогии с теорией автоматического регулирования в качестве меры погрешности используют принятые критерии качества, в частности

$$\Delta y_{\text{дин}} = K \int_0^{\infty} [y^*(t) - x(t)]^2 dt = K \int_0^{\infty} (\Delta y_{\text{дин}})^2 dt.$$

Для стационарных процессов изменения измеряемой величины $x(t)$ (периодических или стационарных стохастических процессов) наиболее часто используется среднеквадратичная динамическая погрешность:

$$\overline{(\Delta y_{\text{дин}})^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} \cdot \int_0^t [y^*(t) - x(t)]^2 dt \right\}.$$

Расчет динамических погрешностей измерения

Так как процессы $x(t)$ и $y^*(t)$ связаны друг с другом посредством передаточной функции измерительной системы $W(p)$, динамические погрешности измерения можно рассчитать, зная $x(t)$ и $W(p)$. Для линейных систем и детерминированных сигналов в частотной области выполняется общее соотношение между $x(p)$ и $y^*(p)$:

$$x(p) \cdot W(p) = y^*(p). \quad (7.15)$$

Из уравнений (7.14) и (7.15) найдем выражение для динамической погрешности измерения детерминированных сигналов:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_{\text{дин}}(p) &= x(p) \left[\frac{y^*(p)}{x(p)} - 1 \right] = x(p) [W(p) - 1], \\ \Delta y_{\text{дин}}(p) &= y^*(p) \left[1 - \frac{x(p)}{y^*(p)} \right] = y^*(p) \left[1 - \frac{1}{W(p)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

При известной передаточной функции $W(p)$ измерительной системы величину $\Delta y_{\text{дин}}(p)$ можно определить по процессу $x(p)$ или по

процессу $y(p)$, используя эти выражения. С помощью обратного преобразования Лапласа из (7.16) можно получить формулы для расчета динамической погрешности измерений во временной области:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_{\text{дин}}(t) &= L^{-1} \left\{ x(p) [W(p) - 1] \right\}, \\ \Delta y_{\text{дин}}(t) &= L^{-1} \left\{ y^*(p) \left[1 - \frac{1}{W(p)} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Рассмотрим этот способ определения динамических погрешностей линейной измерительной системы для некоторых наиболее важных сигналов.

Единичная функция

Пусть входное воздействие представляет собой единичную функцию

$$x(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0; \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Тогда и в частотной области $x(p) = 1/p$, а динамическая погрешность измерений определяется формулой

$$\Delta y_{\text{дин}}(p) = \frac{1}{p} [W(p) - 1].$$

Для временной области из уравнения (7.17) следует:

$$\Delta y_{\text{дин}}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} [W(p) - 1] \right\} = L^{-1} \left\{ \left[\frac{W(p)}{p} - \frac{1}{p} \right] \right\}.$$

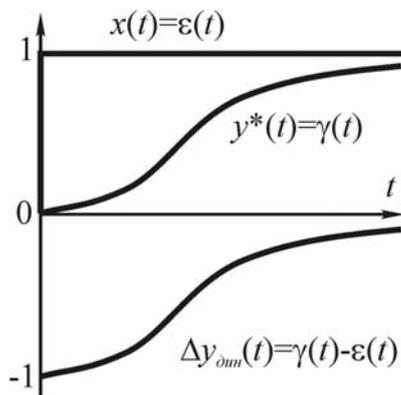


Рис. 7.17. Процесс изменения динамической погрешности для единичной функции

Осуществляя почленно обратное преобразование Лапласа, получим

$$\Delta y_{\text{дин}}(t) = \gamma(t) - \varepsilon(t),$$

где $\gamma(t)$ — переходная функция измерительной системы.

Зависимость динамической погрешности от времени, соответствующая этому уравнению, приведена на рис. 7.17.

Гармонические колебания

Если на вход линейной измерительной системы подаются гармонические колебания вида

$$x(t) = \cos(\omega t + \varphi),$$

то входной $x(t)$ и выходной $y^*(t)$ сигналы могут быть разложены в ряды Фурье:

$$x(t) = \cos(n\omega_0 t + \varphi_n),$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер гармонической составляющей процесса;

ω_0 – угловая частота основной гармонической составляющей;

φ_n – соответствующий сдвиг по фазе.

В комплексной форме эти колебания запишутся в следующем виде:

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[i(n\omega_0 t + \varphi_n) \right] \right\}. \quad (7.18)$$

С помощью формулы (7.18) можно получить спектральное распределение погрешности динамических измерений для гармонического входного сигнала:

$$\Delta y_{\text{дин}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{xn} \left[W(in\omega_0) - 1 \right] \exp \left[i(n\omega_0 t + \varphi_{xn}) \right]$$

или

$$\Delta y_{\text{дин}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{yn} \left[1 - \frac{1}{W(in\omega_0)} \right] \exp \left[i(n\omega_0 t + \varphi_{yn}) \right],$$

где A_{xn} и A_{yn} – амплитуды n -й гармонической составляющей входного и выходного сигналов, а φ_{xn} , φ_{yn} – соответствующие сдвиги по фазе.

По спектральному распределению погрешности можно в соответствии с (7.17) рассчитать среднеквадратичную динамическую погрешность измерений по формулам

$$\overline{(\Delta y_{\text{дин}})^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{xn}^2 \left| W(in\omega_0) - 1 \right|^2,$$

$$\overline{(\Delta y_{\text{дин}})^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{yn}^2 \left| 1 - \frac{1}{W(in\omega_0)} \right|^2.$$

Приближенная оценка динамических погрешностей

Выше было показано, что динамические погрешности зависят как от измерительной системы, так и от процесса изменения измеряемой величины от времени $x(t)$. Окончательное решение о пригодности выбран-

ной измерительной системы для исследования конкретного физического процесса можно вынести, только зная эти два фактора. Таким образом, необходимо проводить выбор датчика с учетом того, что его динамические характеристики должны быть согласованы со свойствами исследуемого нестационарного процесса. Для сравнения различных измерительных систем часто бывает достаточно сопоставить динамические свойства самих измерительных систем или датчиков. Рассмотрим некоторые приближенные оценки и практические рекомендации по выбору системы измерений и определению ее динамических погрешностей.

Динамические характеристики исследуемого процесса

При выборе системы измерений прежде всего необходима оценка степени нестационарности процесса, то есть необходимо оценить, насколько этот процесс «быстропротекающий». Для этого можно использовать два параметра – *характерное время процесса* T_{np} и его *характерную частоту* $f_{np} = (1/T_{np})$. Конечно же, при изучении сложных физических процессов, особенно новых явлений, точно определить значения T_{np} и f_{np} *a priori* невозможно. Однако их можно оценить из общих физических соображений, из теоретического решения задачи (хотя бы приближенного), а также из литературных данных для близких по физике процессов.

Например, при исследовании переходных процессов в ракетном двигателе (запуск двигателя, его останов, переход с режима малой тяги на режим максимальной тяги и наоборот) характерное время переходного процесса оценивается по величине *времени релаксации свободного объема камеры сгорания*

$$t_k = \frac{V_k}{F_{kp} \Gamma(k) \sqrt{RT}},$$

где V_k – свободный объем камеры сгорания; F_{kp} – площадь критического сечения сопла; R , T – газовая постоянная и температура продуктов сгорания;

$$\Gamma(k) = \sqrt{k} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2}}$$

– функция показателя адиабаты $k = c_p / c_v$ продуктов сгорания.

Величина t_k возрастает с увеличением габаритов ракетного двигателя и составляет $t_k = (0.002 \div 0.05) \text{ с}$. Обычно за время переходного процесса в камере сгорания принимается величина $T_{np} = 3t_k$. Время релаксации свободного объема t_k используется также при анализе пере-

ходных процессов в любых полузамкнутых объемах – ресиверах, паровых котлах, трубопроводах и т. д.

Динамические характеристические величины измерительных систем

Для описания динамических свойств измерительных систем могут быть использованы методы, изложенные в подразд. 7.3. Наибольшее практическое значение имеет передаточная характеристика $W(p)$. Однако во многих случаях можно использовать более простые характеристические величины. Рассмотрим переходную функцию $\gamma(t)$ для системы первого порядка (которая описывается дифференциальным уравнением первого порядка). Функция отклика $y(t)$ на скачкообразный сигнал $x(t) = K \cdot \varepsilon(t)$, которая описывает сигнал на выходе измерительной системы, для $t > t_0$ экспоненциально стремится к постоянному значению $y(t) = \text{const} = K$:

$$y(t) = K\gamma(t) = K \left[1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{T}\right) \right],$$

где T – постоянная времени измерительной системы.

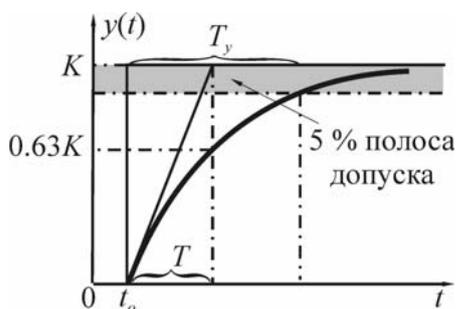


Рис. 7.18. Характеристические величины измерительной системы первого порядка

График функции $y(t)$ приведен на рис. 7.18. Для данного процесса можно ввести две характеристические величины – *постоянную времени T* и *время установления T_y* .

- *Постоянная времени T* – это проекция касательной функции $y(t)$ при $t = t_0$ на асимптоту $y(t) = K$. В момент $t_0 + T$ выходной сигнал составляет 63 % от стационарного значения.

- *Время установления (время затухания) T_y* – это промежуток времени с момента скачкообразного изменения величины $x(t)$ до момента, когда значение $y(t)$ достигает полосы допуска и остается в ней (см. рис. 7.18). Полоса допуска обычно принимается равной $\pm 5\%$ от амплитуды скачка K . Преимущество времени установления состоит в наглядности, однако оно определяется весьма приближенно.

Для динамических измерительных систем второго порядка, которые описываются дифференциальным уравнением второго порядка, переходная функция $\gamma(t)$ имеет колебательный характер (рис. 7.19).

- *Собственная частота системы измерений f_0* .

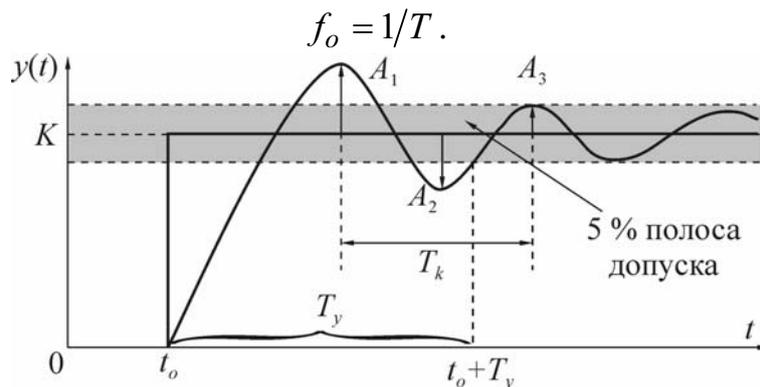


Рис. 7.19. Характеристические величины измерительной системы второго порядка

Для данного процесса вводятся следующие характеристические величины, отражающие динамические свойства системы измерений (см. рис. 7.19):

- *Время установления* T_y – это время от начала воздействия $t = t_o$, по истечении которого выходная величина $y(t)$ не выходит из заданной полосы допуска ($\pm 5\%$ от величины K).
- *Длительность периода колебаний* T_k .
- *Первый выброс* выходной величины – отношение первой амплитуды выходных колебаний к некоторому нормируемому значению (обычно к стационарному значению K)

$$\bar{A}_1 = A_1 / A_K .$$

- *Степень затухания колебаний*

$$\psi = 1 - A_3 / A_1 .$$

- *Собственная частота* системы измерений f_o

$$f_o = 1 / T_k .$$

Обычно величина f_o (Гц) указывается в паспорте на конкретный измерительный прибор или датчик. Чем выше значение собственной частоты f_o , тем лучше динамические свойства измерительной системы.

Согласование характеристик измерительной системы и процесса

В большинстве инженерно-физических и технических задач можно считать, что форма одиночного прямоугольного импульса регистрируется идеально, если измерительная система пропускает те гармоники, амплитуда которых превышает величину, составляющую 10% от наибольшей амплитуды в спектральном разложении сигнала. При этом для

передачи без искажений формы импульса высшая частота f_{zp} , пропускаемая системой измерений, должна удовлетворять неравенству

$$f_{zp} \geq 3 \frac{2\pi}{t_{умп}}, \quad (7.19)$$

где $t_{умп}$ – длительность прямоугольного импульса, площадь которого S_2 соответствует площади S_1 , ограничиваемой кривой заданного нестационарного процесса (рис. 7.20).

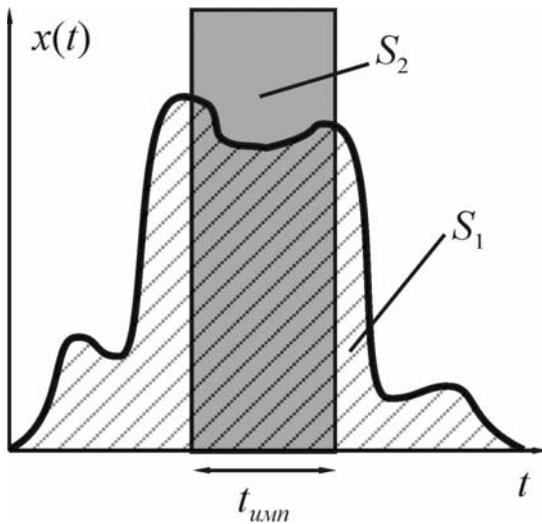


Рис. 7.20. Замена экспериментальной кривой $x(t)$ эквивалентным прямоугольным импульсом

Для плавно меняющихся сигналов (в частности, экспоненциального) величина f_{zp} оказывается более низкой, чем для одиночного прямоугольного импульса той же длительности. Физический смысл условия (7.19) состоит в том, что собственная частота системы измерений f_o всегда должна быть в несколько раз выше частоты высшей гармоники сигнала для исключения резонансных явлений, искажающих запись. Для ориентировочного выбора требуемых характеристик измерительных систем можно использовать следующие рекомендации.

• Колебания прямоугольной формы с частотой f_{np} :

$$f_o = 20 f_{np}.$$

• Колебания треугольной формы с частотой f_{np} :

$$f_o = 4 f_{np}.$$

• Синусоидальные колебания с частотой f_{np} :

$$f_o = 2 f_{np}.$$

Погрешность измерения переменной составляющей сигнала при этом пропорциональна величине

$$\Delta y_{дин} \sim \left(f_{np} / f_o \right)^2,$$

где f_o – наименьшее значение собственной частоты элементов измерительной цепи.

В настоящее время широко используются дискретные измерительные системы – аналогово-цифровые преобразователи (АЦП). Непрерывный выходной сигнал при этом может быть восстановлен без искажений, если выполняются условия теоремы Котельникова

$$\Delta t \leq \frac{1}{2f_{\max}},$$

где Δt – шаг квантования по времени;

f_{\max} – верхняя граничная частота спектра выходного сигнала.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ

Системы измерения давления

Для измерения динамических давлений используются первичные преобразователи (датчики) различных типов – пьезоэлектрические, тензометрические, пьезорезистивные и др. Наиболее отработанными являются тензометрические ($f_o = 5 \div 15$ кГц) и пьезоэлектрические ($f_o = 30 \div 200$ кГц) датчики. Отметим, что наряду с более высокой собственной частотой f_o , пьезоэлектрические датчики имеют большую статическую погрешность по сравнению с тензометрическими. Основные характеристики некоторых серийно выпускаемых отечественных датчиков представлены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

| Марка | Тип | Диапазон, МПа | Собственная частота f_o , кГц | Относительная погрешность, % |
|--------|--------------------|-----------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| ЛХ-412 | Тензометрический | 6; 8; 10; 15; 25; 40; 60 | 15 | 0.8 |
| ЛХ-415 | Тензометрический | 0.5; 1; 1.5; 2; 3; 4; | 5 | 0.8 |
| ЛХ-418 | Тензометрический | 6; 8; 10; 15; 25; 40; 60 | 5 | 0.8 |
| ИС-401 | Тензометрический | 6; 8; 10 | 10 | 1.2 |
| ЛХ-600 | Пьезоэлектрический | 5 | 30 | 10 |
| ЛХ-606 | Пьезоэлектрический | 3 | 100 | 10 |
| ЛХ-611 | Пьезоэлектрический | 5 | 200 | 15 |

Для преобразования сигнала с датчика давления наиболее широко используются тензометрические усилители (тензостанции), в которых сигнал с датчика модулируется несущей частотой с последующей демодуляцией и аналоговым выходом на регистрирующее устройство.

В табл. 7.4 приведены характеристики нескольких штатных тензо-станций.

Таблица 7.4

| Тип | Количество каналов | Несущая частота, кГц | Основная приведенная погрешность, % |
|----------|--------------------|----------------------|-------------------------------------|
| 8 АНЧ–7м | 8 | 3,5 | 3 |
| 8 АНЧ–23 | 8 | 8,2 | 0,5 |
| ТА–5 | 4 | 7 | 3 |
| ЛХ–7000 | 16 | 10 | 0,7 |

Системы измерения температуры

Для температурных измерений широко используются термоэлектрические преобразователи (термопары). В области высоких температур (до 2770 К) обычно применяются вольфрам–рениевые термопары. Динамические характеристики термоприемников зависят не только от их материала и конструкции, но и от условий теплообмена с измеряемой средой и подлежат определению в каждом конкретном случае. Как правило, определение постоянной времени T или времени установления T_y проводится в результате *динамической градуировки* термопары. При этом регистрируется выходной сигнал термопары $y(t)$ для входного воздействия в виде единичной функции $x(t) = \varepsilon(t)$.

Оценку времени тепловой релаксации термопары можно провести с использованием рассмотренной выше формулы (7.3)

$$T = \frac{c\rho V}{\alpha S},$$

которая для спая сферической формы диаметром D имеет вид

$$T_y = 3T = \frac{c\rho D^2}{4\lambda}.$$

Здесь c , ρ – удельная теплоемкость и плотность материала термопары;

λ – коэффициент теплопроводности измеряемой среды.

Величина T_0 для вольфрам-рениевых термопар в зависимости от диаметра спая D приведена в табл. 7.5.

Таблица 7.5

| D , мкм | 10 | 50 | 100 | 200 | 500 |
|-----------|---------------------|----------------------|------|------|------|
| T_y , с | $0,7 \cdot 10^{-3}$ | $1,75 \cdot 10^{-2}$ | 0,07 | 0,28 | 1,75 |

При выборе термоприемника необходим компромисс между его инерционностью и работоспособностью (например, в условиях камеры сгорания ракетного двигателя термопары малого диаметра будут сгорать в первые секунды работы двигателя).

Регистрирующие приборы

Любая измерительная система включает в свою структуру устройство вывода измерительной информации на ЭВМ или некоторый регистрирующий прибор (см. рис. 7.2). В практике инженерно-физического эксперимента используются регистрирующие приборы разного типа – стрелочные манометры, амперметры, тахометры, а также самописцы, светолучевые (шлейфовые) и электронные осциллографы и т. д. Данные приборы вносят свой вклад в общую динамическую погрешность системы измерений. Порядок величин времени установления T_y и предельной частоты f_{zp} для наиболее распространенных электрических показывающих и регистрирующих приборов приведен в табл. 7.6.

Таблица 7.6

| Тип приборов | T_y , с | f_{zp} , Гц |
|---|-------------------------------|------------------------------|
| Электрические показывающие стрелочные приборы | 1 ÷ 10 | 0,05 ÷ 0,5 |
| Механические самописцы, использующие чернила | 0,01 ÷ 1 | 0,5 ÷ 5,0 |
| Светолучевые осциллографы | $(0,1 \div 1) \cdot 10^{-3}$ | $(0,5 \div 5,0) \cdot 10^3$ |
| Электронные осциллографы | $(0,1 \div 10) \cdot 10^{-6}$ | $(0,05 \div 5,0) \cdot 10^6$ |

При регистрации аналоговых сигналов на светолучевом осциллографе необходимо учитывать динамические характеристики используемых осциллографических гальванометров-вставок (шлейфов). В отечественных осциллографах Н115, Н117, Н043, Н145 используются унифицированные гальванометры с собственной частотой f_o от 20 Гц до 15 кГц. Динамические характеристики высокочастотных гальванометров серии М1005 приведены в табл. 7.7, а зависимость рабочей полосы частот от допустимой величины нелинейности амплитудно-частотной характеристики – в табл. 7.8.

Таблица 7.7

| Тип гальванометра | Чувствительность к току, мм/мА | Собственная частота f_o , кГц | Рабочая полоса частот с нелинейностью $\pm 10\%$, кГц |
|-------------------|--------------------------------|---------------------------------|--|
| М1005–600 | 24 | 0,6 | 0 ÷ 0,3 |
| М1005–1200 | 6 | 1,2 | 0 ÷ 0,6 |
| М1005–2500 | 1,2 | 2,5 | 0 ÷ 1,25 |
| М1005–5000 | 2,0 | 5,0 | 0 ÷ 2,5 |
| М1005–10000 | 0,5 | 10,0 | 0 ÷ 5,0 |

Таблица 7.8

| Нелинейность АЧХ, % | ± 3 | ± 5 | ± 10 | ± 15 |
|-----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Рабочая полоса частот | $(0 \div 0,1) f_o$ | $(0 \div 0,4) f_o$ | $(0 \div 0,5) f_o$ | $(0 \div 0,6) f_o$ |

8. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

8.1. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Основная цель инженерно-физического эксперимента – это выявление главных особенностей изучаемых объектов или явлений и формирование на основе экспериментальных результатов некоторой математической модели. Эта модель служит инструментом в руках инженера-исследователя и может иметь разную степень сложности – от простейших алгебраических формул до систем функциональных уравнений. Приведем некоторые примеры задания математической модели.

Пример 1. Для расчета линейной скорости горения твердого ракетного топлива u при заданном давлении в камере сгорания p используется полученная экспериментально зависимость

$$u = u_a \left(p / p_a \right)^v,$$

где p_a – атмосферное давление; u_a, v – эмпирические константы (u_a – скорость горения топлива при атмосферном давлении).

В данном случае математическая модель сводится к простой эмпирической формуле – степенному закону скорости горения.

Пример 2. Для расчета поведения автомобиля при разных скоростях движения (устойчивость, коэффициент лобового сопротивления, длина тормозного пути и т. д.) используется пакет прикладных программ, включающий алгоритмы численного решения нескольких взаимосвязанных задач (расчет аэродинамики обтекания, устойчивости, трения и т. п.). Математическая модель при этом представляет собой сложную систему дифференциальных уравнений с соответствующими краевыми условиями.

При постановке эксперимента очень часто встречаются ситуации, когда объект исследования принципиально недоступен для наблюдения. Например, эксперименты по изучению внутреннего строения Земли, на основе которых можно было бы прогнозировать месторождения нефти и других полезных ископаемых, предсказывать время и место землетрясений. Для непосредственных измерений доступна лишь небольшая приповерхностная часть Земли (наибольшая глубина бурения шахт не превышает 20 км). При

этом необходимо делать заключение о свойствах Земли (например, об изменении ее плотности с глубиной) по измеренным в эксперименте косвенным проявлениям, например, по амплитуде и фазе отраженных волн, генерируемых некоторым источником колебаний. Аналогичная ситуация возникает в задачах неразрушающего контроля изделий и объектов, когда требуется выявить структуру или дефекты внутреннего объема работающего ракетного двигателя или ядерного реактора, а также в задачах медицинской томографии при обследовании патологии различных органов человека *in vivo*.

Общим у рассмотренных задач является определение *причины* по измеренным в результате эксперимента *следствиям* этой причины, то есть обращение причинно-следственной связи. С точки зрения соотношения причина–следствие все задачи математического моделирования делятся на два больших класса – *прямые задачи математической физики* (известны причины, необходимо найти следствие) и *обратные задачи математической физики* (известны следствия, необходимо найти причины, вызвавшие эти следствия).

Прямые задачи

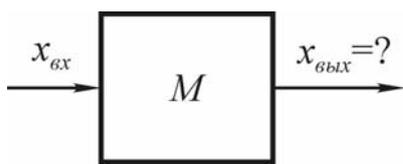


Рис. 8.1. К постановке прямой задачи

При постановке и решении прямой задачи математического моделирования должна быть задана математическая модель M исследуемого объекта или явления, а также совокупность входных воздействий $x_{вх}$ на эту модель (как правило, это начальные и граничные условия соответствующих дифференциальных уравнений). Конечной целью решения прямой задачи является нахождение поведения модели (совокупности $x_{вых}$) при воздействии на нее $x_{вх}$ (рис. 8.1).

Решение прямой задачи полностью предопределяется самой моделью M и заданными входными воздействиями $x_{вх}$. К прямым задачам относятся, например, задачи расчета механических, тепловых, электромагнитных полей для объектов, свойства и конфигурация которых известны. С помощью решения прямой задачи можно на любой момент времени рассчитать положения планет Солнечной системы, зная главную причину, которая лежит в основе их движения – закон всемирного тяготения Ньютона. К прямым задачам относятся и рассмотренные выше примеры 1 и 2.

Решение прямой задачи полностью предопределяется самой моделью M и заданными входными воздействиями $x_{вх}$. К прямым задачам относятся, например, задачи расчета механических, тепловых, электромагнитных полей для объектов, свойства и конфигурация которых известны. С помощью решения прямой задачи можно на любой момент времени рассчитать положения планет Солнечной системы, зная главную причину, которая лежит в основе их движения – закон всемирного тяготения Ньютона. К прямым задачам относятся и рассмотренные выше примеры 1 и 2.

Прямые задачи математического моделирования к настоящему времени достаточно хорошо изучены и составляют предмет одного из важнейших разделов современной математики – уравнений математической физики или уравнений в частных производных. Первые работы в этой области появи-

лись более двух столетий назад, и с тех пор накоплено большое количество методов и результатов решения целого ряда сложнейших задач.

При конкретно заданной модели и заданных входных воздействиях поведение объекта, описываемого этой моделью, вполне определено и предсказуемо. Если решение прямой задачи существенно расходится с опытными данными, то это дает основание для уточнения или даже пересмотра математической модели изучаемого явления.

Обратные задачи

При постановке и решении обратной задачи также задается математическая модель процесса M . При этом входные воздействия $x_{вх}$ частично или полностью неизвестны и их трудно или невозможно получить. Зато из реальных экспериментов известны выходные параметры модели $x_{вых}$ как результат взаимодействия модели M с неизвестными входными воздействиями $x_{вх}$ (рис. 8.2).

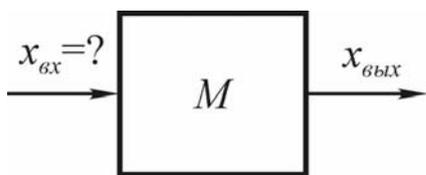


Рис. 8.2. К постановке обратной задачи

К обратным задачам относятся задачи определения некоторых физических свойств объекта (плотности, коэффициента теплопроводности, модуля упругости и других характеристик) в зависимости от координат или в виде функций других параметров. Решение обратных задач связано с экспериментальным исследованием (диагностикой)

физических явлений. Измеряемая величина в инженерно-физическом эксперименте очень редко обнаруживается в чистом виде. Чаще всего прибор регистрирует результат в виде некоторой суммы воздействий.

Особенно важную роль играют обратные задачи в диагностике атомных реакторов, внутрибаллистических характеристик ствольных систем и ракетных двигателей. Это связано с экстремальными условиями работы этих систем – малые характерные времена, высокие температуры и давления, сверхзвуковые скорости потока, токсичность реагентов и т. д. При этом невозможно проводить прямые измерения целого ряда параметров непосредственно в реакторе или в камере сгорания, особенно в условиях летных испытаний.

Решение обратных задач проводится, как правило, в рамках некоторой математической модели исследуемого объекта. Оно состоит в определении коэффициентов дифференциальных уравнений либо области, в которой действует оператор, либо начальных условий, либо сочетания этих причин. Процедура решения обратных задач, состоящих в обращении причинно-следственных связей, связана с преодолением серьезных математических трудностей. Качество решения зависит как от точности

и количества полученной из эксперимента информации, так и от способа (алгоритма) ее обработки. Приведем некоторые примеры важных для практики обратных задач математической физики.

Пример 3. Движение частицы массы m описывается законом Ньютона в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t),$$

где $x(t)$ – положение частицы в момент времени t ;

$F(t)$ – действующая на частицу сила.

Предположим, что при заданных начальных условиях (положение и скорость частицы при $t = 0$) известно ее положение как функция времени $x(t)$. Обратная задача состоит в определении зависимости $F(t)$, то есть в определении действующей на частицу силы по измеренной ее траектории.

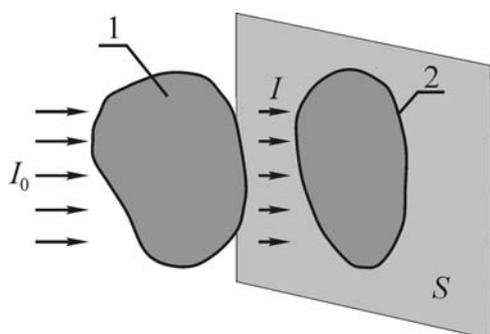


Рис. 8.3. Задача томографии:

1 – исследуемое тело;

2 – теневое изображение на плоскости S

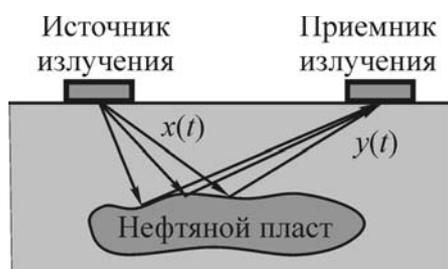


Рис. 8.4. Обратная задача геофизики

Пример 4. Рассмотрим задачу компьютерной томографии. Пусть в пространстве расположено недоступное для непосредственного наблюдения тело (например опухоль в головном мозге). Облучая тело рентгеновскими лучами под разными углами и регистрируя его тень на некоторой фиксированной плоскости S , можно получить семейство его теней. Обратная задача состоит в определении формы тела по измеренным теням (рис. 8.3).

Пусть $f(x)$ – коэффициент поглощения рентгеновских лучей биотканями в точке x , который пропорционален плотности тканей. Если обозначить через I_0 начальную интенсивность излучения прямолинейного луча, а через I – интенсивность излучения после прохождения сквозь тело, то в соответствии с законом Бугера получим уравнение

$$T = \frac{I}{I_0} = \exp\left(-\int f(x) dx\right),$$

где T – коэффициент пропускания.

В ходе эксперимента, при облучении тела по различным направлениям, измеряются интегралы от функции $f(x)$. Обратная задача состоит в определении $f(x)$ по совокупности этих интегралов, то есть в нахождении конфигурации тела.

Пример 5. Одним из примеров важных для практики обратных задач является определение конфигурации нефтяного пласта («линзы») с помощью геофизических методов. От источника электромагнитного поля распространяется сигнал $x(t)$, который, отражаясь от нефтяного пласта, поступает на приемник излучения в виде сигнала $y(t)$ (рис. 8.4). Обратная задача состоит в определении конфигурации и глубины залегания нефтяного пласта по характеристикам сигнала $y(t)$ – его амплитуде и фазе.

Пример 6. Измерение нестационарной тяги при запуске твердотопливного ракетного двигателя (РДТТ) на стенде (рис. 8.5, а). С помощью датчика тяги регистрируется сигнал $y(t)$, который отражает не только реальное изменение тяги $x(t)$ в процессе запуска, но и колебательные процессы в упругой системе «опора–датчик–двигатель». Обратная задача состоит в фильтрации этого сигнала с целью получения реальной зависимости $x(t)$ (рис. 8.5, б).

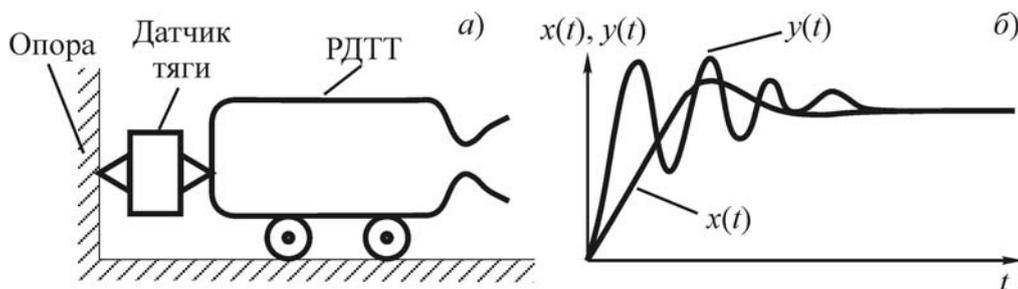


Рис. 8.5. Измерение тяги ракетного двигателя:
а – схема измерений; б – зависимости $y(t)$, $x(t)$

Пример 7. Определение радиального распределения $f(r)$ параметров осесимметричных или сферически-симметричных объектов (температуры, плотности, концентрации частиц, показателя преломления и т. д.) проводится путем сканирования объекта, то есть измерением коэффициента пропускания $\tau(y)$ по различным хордам с координатами y_i . Схема сканирования приведена на рис. 8.6.

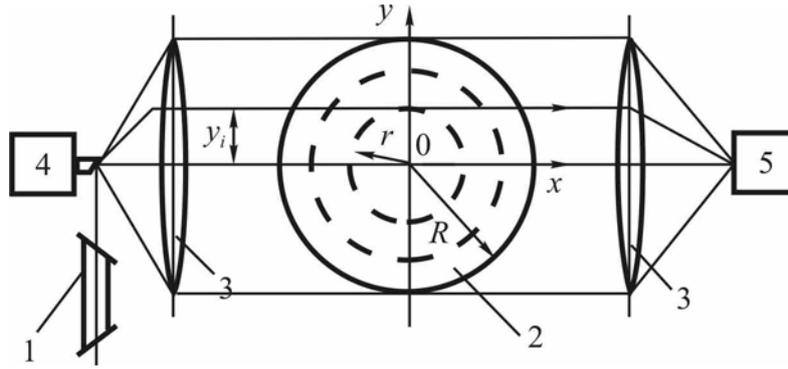


Рис. 8.6. Схема сканирования осесимметричного объекта:

1 – лазер; 2 – исследуемый объект; 3 – оптическая система;
4 – сканирующее устройство; 5 – приемник излучения

Задача нахождения распределения $f(r)$ по измеренной зависимости $\tau(y)$ сводится к обратной задаче – решению интегрального уравнения Абеля

$$\ln[\tau(y)] = - \left[2 \int_y^R \frac{rf(r)}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr \right]^{-1},$$

где R – радиус объекта; r – радиальная координата; y – декартова координата ($y = 0 \div R$).

Пример 8. Определение скорости нестационарного горения твердого ракетного топлива $u(t)$ при резком сбросе давления. При этом измеряются зависимости давления $p(t)$ и температуры $T(t)$ в камере сгорания при нестационарном процессе. Определение зависимости $u(t)$ при этом сводится к решению соответствующей обратной задачи внутренней баллистики, которая связана с численным дифференцированием экспериментально полученных кривых $p(t)$ и $T(t)$. Данная процедура – численное дифференцирование таблично заданных или экспериментально измеренных функций – также является типичной обратной задачей.

Рассмотренные выше примеры 3–8 можно трактовать как обратные задачи идентификации, то есть задачи определения свойств объекта. При решении обратных задач идентификации желательно использовать некоторую априорную информацию, то есть дополнительные сведения о свойствах исследуемого объекта. Учет априорной информации приводит к сужению класса возможных решений и, как правило, к снижению погрешностей определения искомых характеристик.

Отметим, что наряду с задачами идентификации существуют еще два важных типа обратных задач – это проектирование технических объектов (создание аэродинамических профилей оптимальной формы,

например) и управление сложными системами. В отличие от задач идентификации для задач проектирования и управления расширение множества допустимых решений обычно улучшает ситуацию, поскольку в них требуется найти любое технически выполнимое решение, обеспечивающее критерий качества с необходимой точностью.

8.2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Под обратной понимается задача отыскания функции $f(x)$ по измеренной экспериментально функции $\varphi(y)$ из операторного уравнения вида

$$A[y, f(x)] = \varphi(y), \quad (8.1)$$

где A – некоторый известный оператор (интегральный, дифференциальный или алгебраический), устанавливающий причинно-следственную связь между функцией $f(x)$ в метрическом пространстве X искомым характеристикам объекта или процесса и функцией $\varphi(y)$ в метрическом пространстве Y наблюдаемых характеристик, то есть косвенных характеристик объекта или процесса. Таким образом, функция $\varphi(y)$ описывает *следствие* какого-либо процесса, *причина* которого определяется функцией $f(x)$. При решении обратной задачи мы должны по наблюдаемым следствиям $\varphi(y)$ процесса найти причины $f(x)$, вызвавшие их.

Вопрос о единственности решения (8.1) относительно $f(x)$ реализуется только в конкретных случаях и лишь при точном задании правой части $\varphi(y)$ – наблюдаемых характеристик. Формальное доказательство единственности решения (8.1), если это убедительно не следует из физического смысла задачи, является чисто математической проблемой.

Процедура решения таких задач, состоящих в *обращении* причинно-следственных связей, связана с преодолением серьезных математических трудностей. Отметим, что без умения решать прямые задачи невозможно подойти к обратным. Решение обратных задач проводится, как правило, в рамках некоторой математической модели объекта или процесса.

В зависимости от определяемой при решении задачи причинной характеристики, обратные задачи подразделяют на следующие группы:

- граничные обратные задачи, состоящие в нахождении функций и параметров, входящих в граничные условия;
- коэффициентные обратные задачи, которые определяют функции и параметры, входящие в качестве коэффициентов в уравнения процесса;
- геометрические обратные задачи, ставящие целью реконструкцию геометрических характеристик области решения, в которой действует оператор A , или характерных точек, линий, поверхностей внутри нее;

- ретроспективные или обращенные во времени обратные задачи, определяющие характеристики процесса в предыдущие моменты времени, то есть устанавливающие предысторию данного состояния;
- обратные задачи химической кинетики, связанные с определением термокинетических постоянных гомогенных и гетерогенных химических реакций.

Специфика обратных задач

Обратные задачи обладают рядом неприятных с математической точки зрения особенностей.

- Они, как правило, нелинейны, то есть неизвестная функция или неизвестный параметр входят в операторное или функциональное уравнение (8.1) нелинейным образом.
- Решение обратных задач обычно неединственно, что может привести к появлению посторонних («фантомных») решений.
- Обратные задачи являются некорректно поставленными (не следует путать это понятие с ошибочно или неправильно поставленными).

Эти особенности заложены в исходной физической постановке обратной задачи. Каждая прямая задача в рамках принятой математической модели может быть сопоставлена с некоторым множеством обратных задач, требующих ответа на вопрос – какова единственная причина, приведшая к наблюдаемому в эксперименте следствию? Ответ на этот вопрос неоднозначен по сути. Например, установление одного и того же температурного поля в твердом теле может быть результатом различных внешних тепловых и динамических воздействий. Таким образом, уже в исходной постановке обратных задач проявляется их физическая некорректность – неединственность причин, приводящих к однозначно проявляемому следствию. Физическая некорректность обратной задачи порождает определенную специфику их математических постановок: обратные задачи относятся к классу некорректно поставленных задач математической физики.

Понятие корректности задачи, являющееся одним из важнейших в современной математике, было сформулировано французским ученым Ж. Адамаром в 1923 году. Это понятие означает, что задача типа (8.1) является *корректно поставленной*, если ее решение удовлетворяет следующим требованиям (условиям Адамара):

- решение задачи существует на множестве $\varphi(y) \in Y$ (условие разрешимости);
- решение задачи единственно на множестве $f(x) \in X$ (условие однозначности);

- решение задачи непрерывно зависит от входных данных $\varphi(y)$ (условие устойчивости).

Смысл первого условия (*существование решения*) состоит в том, что среди исходных данных нет противоречащих друг другу условий, исключающих возможность решения задачи. Второе условие (*единственность*) означает, что данных достаточно для однозначной определенности решения задачи. Третье условие (*непрерывная зависимость от исходных данных*) означает, что малые изменения в данных приводят к малым изменениям в решении. Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из условий Адамара, называются *некорректно поставленными*. В зарубежной литературе используется термин «*ill-posed problem*» (слабо поставленная, плохо поставленная задача), что более точно отражает суть понятия «некорректность». В обратных задачах, как правило, отсутствует непрерывная зависимость решения от исходных данных, в отличие от прямых задач.

Поскольку входной информацией в обратных задачах являются опытные данные, которые всегда имеют погрешность (величина которой не всегда известна), то решение обратной задачи с «испорченными» входными данными может существенно отличаться от точного решения. Это означает, что малым возмущениям входной информации $\varphi(y)$ могут соответствовать сколь угодно большие возмущения полученного решения $f(x)$, то есть решение неустойчиво.

Пример 9. Оптическая диагностика размеров и концентрации аэрозольных частиц включает методы малых углов (ММУ), спектральной прозрачности (МСП), полной индикатрисы (МПИ). При этом измеряются характеристики рассеянного или ослабленного аэрозольным облаком излучения при взаимодействии зондирующего лазерного излучения с частицами. Данные задачи сводятся к решению соответствующего интегрального уравнения и также являются типичными обратными задачами математической физики.

В оптической диагностике уравнение (8.1) – это уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_{x_n}^{x_k} R(x, y) f(x) dx = \varphi(y), \quad (8.2)$$

где $R(x, y)$ – ядро уравнения;

$f(x)$ – искомая функция;

$\varphi(y)$ – измеряемая функция.

Обычно $f(x)$ – это функция распределения частиц по размерам, а $\varphi(y)$ – индикатриса рассеяния либо спектральный коэффициент пропускания облака аэрозольных частиц. В ядре уравнения $R(x, y)$ заложена информация о прямом процессе (соответствующие факторы эффективности ослабления или рассеяния, рассчитанные по теории Ми). Экспериментальное определение $\varphi(y)$ всегда связано с погрешностями измерений. Это приводит к тому, что уравнению (8.2) в пределах этих погрешностей удовлетворяет бесконечная совокупность решений, то есть задача (8.2) некорректна. Степень некорректности во многом зависит от поведения ядра $R(x, y)$ как функции x (переменной интегрирования). Если ядро $R(x, y)$ при $y = \text{const}$ обладает сильным сглаживающим действием, особенно в области высоких частот, оно способно сгладить любую функцию $f(x)$. Указанная некорректность является неизбежной для рассматриваемого класса задач независимо от того, имеет ли уравнение типа (8.2) аналитическое решение (например, полученное с использованием преобразований Абеля, Меллина и др.), либо оно решается численным методом.

8.3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В этой ситуации большую роль играют способы математической обработки входной экспериментальной информации. В 50-е годы прошлого века стала бурно развиваться общая теория и методы решения некорректных задач (А.Н. Тихонов, Г.И. Марчук, М.М. Лаврентьев и др.). Академик А.Н. Тихонов предложил один из возможных способов регуляризации некорректных задач – сведение исходной задачи решения операторного уравнения к проблеме отыскания минимума некоторого функционала. В настоящее время создан ряд регуляризирующих алгоритмов решения широкого класса обратных задач. Регуляризирующие алгоритмы строятся на основе привлечения дополнительной (априорной) информации об искомой функции $f(x)$ – гладкости, выпуклости, монотонности решения, принадлежности его к конечно-параметрическому семейству и т. д. С помощью такой информации из множества возможных решений отбирается такое, которое в определенном смысле близко к истинному. Регуляризирующие алгоритмы позволяют получить устойчивое приближение к истинному решению некорректной задачи, то есть при стремлении погрешности измерений к нулю приближенное решение стремится к истинному.

Основные подходы к решению обратных задач

Пусть связь исходных данных $x \in X$ и решения некоторой задачи $y \in Y$ задана в виде операторного уравнения

$$y = Ax.$$

Оператор A выражает математическую модель процесса. В частности, он может быть задан алгоритмически. Прямая задача состоит в отыскании решения y для некоторого элемента x из области X допустимых значений исходных данных. Обратная задача формулируется следующим образом:

$$x = A^{-1}y,$$

где A^{-1} – оператор, обратный оператору A .

Для решения обратных задач разработаны различные подходы: использование теоремы Дюамеля, применение которой ограничено линейными задачами, численные методы конечных разностей и конечных элементов для решения нелинейных задач, а также алгоритмы, основанные на точных решениях. Для решения реальных задач наибольшее распространение получили три основных подхода – естественная регуляризация, регуляризация по Тихонову (методы оптимизации) и технология прямого поиска.

Прямые методы

Прямые методы являются численной реализацией принципа естественной регуляризации. Принцип естественной регуляризации означает, что обратная задача решается в исходной постановке с помощью таких методов, которые допускают управление мерой «близости» приближенного решения к точному в результате изменения параметров вычислительных процедур (шагов по аргументам, числа членов ряда в разложении функций, числа итераций). Источниками естественной регуляризации являются эффекты регуляризации режима нагрева точки тела, в которой установлен термочувствительный элемент, и «вязкостные» свойства вычислительных алгоритмов, заключающиеся в естественной фильтрации высокочастотных составляющих в искомой причинной характеристике. На практике принцип шаговой регуляризации реализуется в применении рекуррентных алгоритмов и разностных алгоритмов на основе явных схем продолжения температурного поля.

Численная реализация прямого метода заключается в алгоритмизации расчета обратного оператора и дополняется алгоритмом сглаживания. Прямые методы широко используются при алгебраическом решении некорректных задач в интегральных формах (обратная задача теплопроводности, оптическое зондирование). Во внутренней баллистике прямые методы в сочетании со сплайн-аппроксимацией могут эффективно использоваться при обратных задачах внутренней баллистики в простых постановках (нульмерные), где несложно получить обратный оператор A^{-1} .

Методы оптимизации

Если оператор A задан алгоритмически, то более удачна экстремальная (вариационная) постановка обратной задачи внутренней баллистики. При этом некорректная задача редуцируется к задаче поиска минимума функционала. Эти методы являются основным инструментом решения обратных задач внутренней баллистики (из-за сложности оператора A). Задача оптимизации может решаться в конечномерном пространстве параметров (параметрическая оптимизация), а также в бесконечномерном функциональном пространстве (функциональная оптимизация). Наиболее широко применяются градиентные методы (метод наискорейшего спуска и метод сопряженных градиентов). Основной проблемой при реализации градиентных методов является построение экономичной процедуры вычисления градиента целевого функционала.

Технология прямого поиска

Одним из перспективных методов решения обратных задач внутренней баллистики является технология прямого поиска. При этом решение обратной задачи сводится к выбору наиболее оптимального решения из серии вычислений прямых задач. Общая технология расчета базируется на вариации функции, определяющей решение, путем прямого выбора ее вида на программной основе генератора композиций с ограничениями. Искомые функции моделируются кусочно-постоянной зависимостью с увеличивающейся (по мере повышения точности) степенью дискретизации в областях, где эти функции максимально соответствуют исходной системе уравнений. Система ограничений строится на базе физического анализа задачи, анализа текущего поведения решения, а также априорной информации о решении.

Преимущества метода квазирешений состоят в простоте задания системы ограничений, построении в процессе решения структуры зависимости функционала невязки от определяющих параметров и в возможности выделения области решения. Очевидная неэкономичность метода на современном этапе развития вычислительной техники является вполне преодолимым препятствием.

Основные этапы решения обратных задач

Рассмотрим основные этапы решения обратных задач на примере обратной задачи внутренней баллистики, которая в общем виде формулируется следующим образом. Пусть существует некоторая экспериментальная установка (стенд) и схема проведения испытаний, в результате которых определяется значение измеряемой величины в одной или нескольких точках (чаще всего это зависимость давления от времени $p(t)$). Требуется восстановить некоторую причинную характеристику исследуемого процесса – тяги двигателя, удельного импульса тяги, ско-

рости нестационарного горения топлива и т. д. Решение обратных задач внутренней баллистики включает следующие этапы.

1. Выбор модели процесса

Модель задается самой постановкой задачи, если измеряемая величина представляет собой некий эффективный параметр. В общем случае выбор модели диктуется компромиссом между степенью адекватности и простотой математического описания. Можно выделить два фактора, существенных при постановке обратных задач внутренней баллистики.

- В полную (и сложную) модель входят кроме искомого и другие параметры, сходные по влиянию на измеряемую величину, которые неизвестны или известны с малой точностью.
- Численная реализация обратных задач внутренней баллистики предполагает многократное решение прямой задачи, что даже при современных ЭВМ накладывает ограничение на модель.

2. Исследование прямой задачи

Этот этап включает проработку и оптимизацию расчетного алгоритма и его программной реализации, проведение параметрических исследований в приближенных к условиям опыта параметрах, качественное сопоставление экспериментально измеренных проявлений и соответствие им расчетных величин.

3. Проверка чувствительности

На данном этапе необходимо ответить на вопрос о степени чувствительности измеряемой величины y к вариациям восстанавливаемой характеристики x . Очевидно, что если y не меняется при изменении x , то решение обратной задачи внутренней баллистики вряд ли удастся получить. Исследование чувствительности можно проводить как аналитически, так и численным решением прямой задачи.

4. Выбор подхода к регуляризации

Выбирается один из трех рассмотренных выше подходов.

5. Формирование целевого функционала

Этот этап необходим при решении задачи в экстремальной постановке.

6. Выбор численного метода

7. Модельное решение обратных задач внутренней баллистики (численный эксперимент)

Задается точное значение искомого параметра x , и решается прямая задача. Полученное проявление y возмущается случайной погрешностью и используется далее в виде входной «экспериментальной» информации для решения обратной задачи внутренней баллистики. Затем решается обратная задача внутренней баллистики, и восстановленная характеристика x сравнивается с заданным точным значением. Данный этап позволяет оценить влияние погрешностей измерений на результат восстановления.

9. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА

В настоящее время в тепловом проектировании и моделировании тепловых режимов технических систем широко используются методы, основанные на принципах обратных задач теплообмена и химической кинетики. Особенное значение эти методы имеют при экспериментальном изучении нестационарных тепловых процессов в теплонапряженных агрегатах и системах летательных аппаратов, ракетных двигателей, тепловых машин, атомных реакторов. Для сложных технических систем можно выделить три больших класса задач: обратные задачи теплопроводности, обратные задачи теплообмена и обратные задачи химической кинетики.

9.1. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При постановке обратных задач для уравнения теплопроводности – обратных задач теплопроводности (ОЗТ), предполагается, что процесс теплопереноса в некотором твердом теле происходит либо за счет чисто кондуктивного механизма, либо модель теплообмена в теле может быть представлена в виде обобщенного уравнения теплопроводности с эффективными значениями коэффициентов. Рассмотрим основные классы обратных задач теплопроводности. Для компактности и ясности изложения примем одномерную постановку.

Пусть в области

$$D = \{(x, t) : x_1(t) < x < x_2(t), 0 < t \leq t_m\}$$

задано нелинейное обобщенное уравнение теплопроводности

$$c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + k(T) \frac{\partial T}{\partial x} + Q(T). \quad (9.1)$$

Здесь x, t – пространственные координаты и время соответственно;

x_1, x_2 – подвижные границы области D ;

c – удельный объемный коэффициент теплоемкости;

T – абсолютная температура;

λ – коэффициент теплопроводности;

Q – мощность внутренних источников тепла в теле;

k – коэффициент, зависящий от температуры.

Известно начальное распределение температуры:

$$T(x, 0) = \psi(x), \quad x_1(0) \leq x \leq x_2(0), \quad (9.2)$$

а также заданы граничные условия:

$$L_i(T) = \varphi_i(T), \quad 0 \leq t \leq t_m, \quad i = 1, 2. \quad (9.3)$$

Для краевой задачи первого рода оператор L записывают в виде

$$L_1(T) \equiv T[x_j(t), t],$$

для краевых задач второго рода:

$$L_2(T) \equiv -\lambda[T, x_j(t)] \frac{\partial T[x_j(t), t]}{\partial x}, \quad j = 1, 2.$$

Возможна также и смешанная краевая постановка.

Прямая задача теплопроводности заключается в нахождении функции $T(x, t)$, удовлетворяющей уравнению (9.1) в области D , удовлетворяющей условиям (9.2) и (9.3), и непрерывной вместе с градиентом $\partial T(x, t)/\partial x$ в области D .

Если же одна из функций $\varphi_i(t)$, $\psi(x)$, $c(T)$, $\lambda(T)$, $k(T)$, $Q(T)$ неизвестна и требуется найти эту функцию и поле температуры $T(x, t)$ по известным остальным и дополнительному условию $T(x_*, t) = f_1(t)$ или $T(x, t_*) = f_2(x)$, где x_*, t_* – заданные точки или кривые $[x_*(t), t_*(x)]$ внутри области D , то имеем обратную задачу теплопроводности.

В соответствии с причинными характеристиками процесса теплообмена можно выделить четыре типа ОЗТ.

1. Ретроспективная задача теплопроводности (задача с обратным временем), которая заключается в нахождении распределения температуры в предыдущие моменты времени, то есть в установлении предыстории данного теплового состояния.
2. Граничная обратная задача теплопроводности, которая заключается в восстановлении тепловых условий на границе тела. К этому типу задач можно отнести также задачи, связанные с продолжением решения уравнения теплопроводности от некоторой границы, где одновременно заданы температура $T(x_*, t)$ и плотность теплового потока $q(x_*, t)$.
3. Коэффициентная обратная задача теплопроводности, заключающаяся в определении коэффициентов уравнения теплопроводности – задача идентификации оператора теплопроводности (9.1).
4. Геометрическая обратная задача теплопроводности, заключающаяся в нахождении некоторых геометрических характеристик нагреваемого тела, в частности, определения закона движения теплообменной границы тела по результатам измерений температуры внутри тела.

Отметим, что ОЗТ с граничными условиями третьего и четвертого рода можно свести к граничным ОЗТ. В частности, определение функций и параметров, входящих в граничные условия (коэффициента теплоотдачи α в граничных условиях третьего рода, контактного сопротивления R в граничных условиях четвертого рода, интегральных коэффициентов поглощения β и излучения ε), обычно можно свести к граничной ОЗТ.

Например, коэффициент теплоотдачи $\alpha(T)$ рассчитывается по плотности конвективного теплового потока $q_k(t)$, температуре поверхности тела $T_{cm}(t)$ и температуре обтекающего потока $T_g(T)$:

$$\alpha(T) = \frac{q_k(t)}{T_g(t) - T_{cm}(t)}.$$

Величина $q_k(t)$ находится из уравнения теплового баланса на поверхности тела по известной плотности кондуктивного теплового потока (в предположении, что тепловое излучение газа, а также унос массы и вдув в пограничный слой отсутствуют):

$$q_k(t) = q(t) + \varepsilon\sigma T_{cm}^4(t),$$

где ε – коэффициент излучения (степень черноты) поверхности тела;

σ – постоянная Стефана–Больцмана.

В такой постановке дополнительно должны быть заданы функции $T_g(t)$ и коэффициент излучения ε . Функции $q(t)$ и $T_{cm}(t)$ находятся из решения граничной ОЗТ.

Возможны также комбинированные постановки обратных задач теплопроводности, когда одновременно определяются причинные характеристики разных типов. Например, одновременно могут оцениваться граничные условия и температурное поле в прошедшие моменты времени в задаче без начальных условий, то есть комбинации граничной и ретроспективной задач ОЗТ. Могут также быть комбинации граничной и коэффициентной задач, а также граничной и геометрической ОЗТ.

В общем случае обратные задачи теплопроводности, в зависимости от модели процесса и вида области изменения независимых переменных, делятся на одномерные и пространственные, линейные и нелинейные, с фиксированными и подвижными границами, односвязные и многосвязные. Задача определения какой-либо причинной характеристики может быть переопределена, то есть задано не одно, а несколько дополнительных условий.

9.2. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА

Аналогично обратным задачам теплопроводности можно ввести обратные задачи сложного теплообмена, обратные задачи в системе тел, обратные задачи в сопряженной постановке, обратные задачи химической кинетики и т. д. Для теплового проектирования и моделирования сложных технических систем наибольший практический интерес представляют обратные задачи теплообмена.

Рассмотрим систему, состоящую из нескольких тел с внутренним выделением или поглощением тепла. В частности, это может быть приборный отсек космического аппарата, в котором расположены тепловыделяющие элементы (радиокомпоненты), контурные тепловые трубы, инертные в тепловом отношении конструкционные панели. На отсек воздействует солнечная радиация и отрицательные температуры (с теневой стороны). Элементы данной системы обмениваются тепловой энергией с окружающей средой и между собой.

В данном случае основное уравнение теплообмена получается из анализа теплового баланса в предположении, что данная техническая система может быть условно разделена на конечное число n изотермических элементов:

$$c_i \frac{dT_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n+r} \lambda_{ij} (T_j - T_i) + \sum_{j=1}^{n+s} k_{ij} \sigma (T_j^4 - T_i^4) S_i + Q_{ci} + Q_i, \quad (9.4)$$

$$I = 1, 2, \dots, n; \quad s \geq 0; \quad r \geq 0.$$

Здесь c_i – удельная объемная теплоемкость i -го элемента;

λ_{ij} – коэффициент теплообмена (тепловая проводимость между элементами i и j);

k_{ij} – угловые коэффициенты между элементами i и j ;

Q_{ci} – количество тепла, подводимого к i -му элементу из окружающей пространства;

Q_i – количество тепла, выделяемого i -м элементом;

S_i – площадь поверхности i -го элемента;

r и s – количество элементов, взаимодействующих с окружающей средой путем конвекции и излучения соответственно.

Коэффициенты λ_{ij} рассчитываются по разным формулам в зависимости от того, какой вид теплообмена между элементами i и j реализуется – теплопроводность, конвекция или смешанный механизм (конвекция и теплопроводность).

Процесс теплообмена, описываемый уравнением (9.4), определяется параметрами граничных условий и уравнений теплового баланса, связя-

ми кондуктивного, конвективного и радиационного типов, геометрией взаимного расположения тел в пространстве, а также начальным тепловым состоянием рассматриваемой системы. По аналогии с задачами теплопроводности можно ввести прямые и обратные задачи теплообмена.

Прямая задача теплообмена системы заключается в расчете ее текущего теплового состояния (температурного режима) по заданным причинным характеристикам.

Обратные задачи теплообмена системы заключаются в определении отдельных заранее неизвестных причинных характеристик по известной информации о тепловых состояниях рассматриваемой системы. При моделировании систем используется информация о фактических (измеренных) температурных полях, а при их проектировании – о допустимых (заданных конструктором) температурных полях.

Следует отметить, что одновременное определение всех параметров, входящих в уравнение (9.4), возможно лишь с точностью до постоянного множителя. При исследовании теплового состояния сложных технических систем в ряде случаев оказывается необходимым определение более подробного температурного поля в отдельных наиболее важных элементах рассматриваемой системы. Составная модель, описываемая уравнением (9.4), не позволяет решить эту задачу. Применяя расчленение составной модели на более простые, можно перейти к постановкам локальных обратных задач теплообмена, которые в большинстве случаев сводятся к соответствующим обратным задачам теплопроводности.

9.3. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Процессы термического разложения, воспламенения и горения реакционноспособных систем, в частности, твердых, жидких и газообразных топлив играют определяющую роль в целом ряде современных отраслей техники и технологии. Среди них такие важнейшие направления, как теплоэнергетика, химическая технология, ракетное, авиационное и автотракторное двигателестроение, металлургия, пожаротушение, экология и т. д.

К прямым задачам химической кинетики относятся расчеты условий воспламенения, скорости распространения пламени, условий гашения и других характеристик горения. При этом должна быть задана кинетическая схема реакций, а также термокинетические постоянные химических реакций. При современном уровне развития вычислительной техники можно получить численное решение прямых задач химической кинетики, в том числе теории горения для сколь угодно сложной кинетики и компонентного состава топлива.

По самой природе реальных процессов горения для них гораздо важнее не прямая, а обратная задача химической кинетики – выявление из наблюдаемых феноменологических характеристик горения кинетики и меха-

низма химических реакций, приводящих к воспламенению и распространению пламени. Все процессы горения, имеющие реальное значение в природе и технике, основаны на сложных химических реакциях, состоящих из многих последовательных и параллельных стадий с участием нескольких промежуточных продуктов. Кинетические эксперименты, проводимые по необходимости в далеких от реальных процессов условиях, не могут выявить полный механизм процесса и дать кинетические закономерности, пригодные для экстраполяции к условиям горения. Кинетические измерения, проведенные при низких температурах, не позволяют выявить полностью механизм реакций; в них остаются незамеченными те стадии, которые выходят на передний план при высоких температурах.

Таким образом, основной проблемой при решении прямых задач теории горения является недостаточное количество и (или) низкая точность исходных данных по термокинетическим параметрам исследуемых процессов. Для преодоления этой проблемы необходимо решать обратные задачи теории горения. Они позволяют из измерений в условиях самого горения вывести кинетические закономерности, характерные для этих условий. В сочетании с низкотемпературной кинетикой они позволяют выявить полный механизм реакций и создать теорию, пригодную для экстраполяции к любым условиям.

В настоящее время для определения термокинетических постоянных широко используются неизотермические методы. Наиболее распространенным для определения термокинетических постоянных является «метод спрямления», основанный на сопоставлении полученных теоретически и экспериментально макрохарактеристик процесса. В частности, методы определения термокинетических постоянных гомогенных химических реакций при помощи макрохарактеристик воспламенения (взрывного предела и времени воспламенения) были развиты в работах Н.Н. Семенова, О.М. Тодеса, Д.А. Франк-Каменецкого, В.Н. Вилюнова, А.Г. Мержанова, А.М. Гришина и ряда других авторов.

Основные понятия химической кинетики

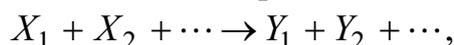
Приведем краткие сведения из химической кинетики – науки о механизме и скорости химической реакции. Важнейшая величина – скорость химической реакции – определяется изменением во времени количества какого-либо из исходных веществ или продуктов реакции в результате химического превращения. Химические реакции могут протекать гомогенно (в объеме одной фазы) или гетерогенно (на поверхности раздела фаз). Скорость гомогенной реакции – это количество вещества, вступающего в реакцию или образующегося в результате реакции в единицу времени в единице объема. Для реакций, протекающих в системах постоянного объема,

$$u_i = \frac{dC_i}{dt},$$

где C_i – концентрация i -го вещества, моль·м⁻³ или кг·м⁻³;

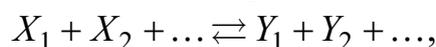
u_i – скорость реакции по i -му веществу, моль·м⁻³·с⁻¹ или кг·м⁻³·с⁻¹.

Если i -е вещество – продукт реакции, то $dC_i/dt > 0$; если это исходное вещество, то $dC_i/dt < 0$. Химические реакции делятся на простые и сложные. Простая реакция протекает в одном направлении и в один этап; кинетическая схема такой реакции имеет вид

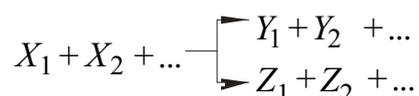


где X_i – исходные вещества; Y_i – продукты реакции.

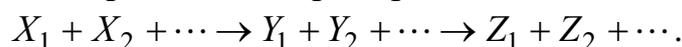
К сложным относятся обратимые реакции (одновременно протекающие в двух противоположных направлениях)



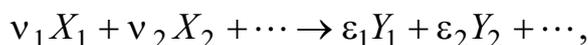
параллельные реакции, описываемые в частном случае кинетической схемой



и последовательные реакции, например



Для простой реакции можно записать стехиометрическое уравнение



где ν_i, ε_i – стехиометрические коэффициенты, соответственно равные числам молекул исходных веществ и продуктов реакции, участвующих в элементарном процессе. Стехиометрическое уравнение позволяет установить связь между скоростями простой реакции по различным компонентам:

$$u_1 = \frac{dC_{X_1}}{dt}; \quad u_2 = \frac{dC_{X_2}}{dt}; \quad \dots; \quad u'_1 = \frac{dC_{Y_1}}{dt}; \quad u'_2 = \frac{dC_{Y_2}}{dt} \dots$$

При квазистационарном протекании процесса все исходные вещества должны исчезать, а продукты – появляться в результате химической реакции в эквивалентных количествах, то есть должно удовлетворяться условие стехиометрии:

$$-\frac{u_1}{\nu_1} = -\frac{u_2}{\nu_2} = \dots = \frac{u'_1}{\varepsilon_1} = \frac{u'_2}{\varepsilon_2} = \dots = \text{idem}.$$

Чем больше величина ν_i или ε_i , тем больше по модулю должна быть скорость реакции $|u_i|$ или $|u'_i|$ (то есть при большем значении стехиомет-

рического коэффициента большее количество соответствующего вещества реагирует в единицу времени). Отсюда следует, что независимо от выбора вещества скорость реакции можно охарактеризовать величиной

$$u = \frac{|u_1|}{\nu_1} = \frac{|u_2|}{\nu_2} = \dots = \frac{|u'_1|}{\varepsilon_1} = \frac{|u'_2|}{\varepsilon_2} = \dots$$

Величина u называется скоростью простой реакции без отношения к какому-либо конкретному компоненту.

Скорость простой реакции подчиняется закону действующих масс

$$u = k C_{X_1}^{\nu_1} C_{X_2}^{\nu_2} \dots,$$

где k – константа скорости реакции, численно равная ее скорости при единичных концентрациях.

Подчеркнем, что в это уравнение входят только концентрации исходных веществ в степени их стехиометрических коэффициентов.

Сумма стехиометрических коэффициентов $\nu = \sum \nu_i$, равная количеству молекул, принимающих участие в единичном акте, называется стехиометрическим порядком (молекулярностью) реакции:

$$\nu = \sum \nu_i = 1 \text{ – мономолекулярная реакция;}$$

$$\nu = \sum \nu_i = 2 \text{ – бимолекулярная реакция;}$$

$$\nu = \sum \nu_i = 3 \text{ – тримолекулярная реакция.}$$

Стехиометрический порядок простой реакции – всегда целое число (не дробное) и не превышает трех (вероятность столкновения более чем трех молекул близка к нулю). Применять закон действующих масс для расчета сложных реакций можно для одностадийной обратимой реакции, скорость которой

$$u = u_+ - u_-,$$

где u_+ , u_- – скорость реакции в прямом и обратном направлениях. По закону действующих масс

$$u = k_+ C_{X_1}^{\nu_1} C_{X_2}^{\nu_2} \dots - k_- C_{Y_1}^{\varepsilon_1} C_{Y_2}^{\varepsilon_2} \dots,$$

где k_+ , k_- – константы скорости прямой и обратной реакций. При $u_+ = u_-$ величина $u = 0$, что соответствует химическому равновесию системы.

В общем случае для описания сложной реакции нужно несколько стехиометрических уравнений. Складывая их, получаем брутто-уравнение реакции, которое описывает процесс в целом, но не отражает истинного механизма химических превращений. Для сложной реакции можно (на основе экспериментов) записать уравнение, связывающее скорость реакции с концентрацией исходных веществ (кинетическое уравнение)

$$u = kC_{X_1}^{n_1}C_{X_2}^{n_2} \dots C_{Y_1}^{m_1}C_{Y_2}^{m_2} \dots,$$

где n_i, m_j – порядок реакции по i -му и j -му веществу; $n = \sum n_i + \sum m_j$ – порядок реакции (кинетический порядок реакции). В отличие от $v = \sum v_i$, кинетический порядок реакции n может быть дробным числом. Возможна и другая функциональная зависимость скорости реакции от концентрации исходных и конечных веществ. Размерность константы скорости реакции k зависит от ее порядка:

$$n = 0, [k] = [C] \cdot c^{-1}; \quad n = 1, [k] = c^{-1}; \quad n = 2, [k] = [C]^{-1} \cdot c^{-1},$$

где $[C]$ – принятая размерность концентрации.

Различие в размерности константы скорости реакции k связано с тем, что размерность скорости реакции всегда должна быть

$$[u] = \text{моль} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1} \text{ или } [u] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Скорость подавляющего большинства реакций (простых и сложных) повышается с ростом температуры T , а константа скорости реакции подчиняется закону Аррениуса

$$k = z \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT}\right),$$

где z – предэкспонент (предэкспоненциальный множитель, частотный фактор), размерность которого равна размерности константы скорости реакции $[z] = [k]$;

T – абсолютная температура, К;

E – энергия активации реакции, Дж · моль⁻¹;

$R = 8,3134$ Дж · К⁻¹ · моль⁻¹ – универсальная газовая постоянная.

Безразмерный показатель экспоненты в законе Аррениуса называется критерием Аррениуса:

$$\text{Arn} = \frac{E}{RT_*},$$

где T_* – характерная температура.

Этот критерий выражает чувствительность скорости химической реакции к изменению температуры. Чем выше значение Arn , тем сильнее эта чувствительность. Входящие в закон Аррениуса величины z и E называются кинетическими константами химической реакции. Физический смысл энергии активации E для простой реакции состоит в том, что это энергия, которой должна обладать молекула для того, чтобы вступить в реакцию. Для сложных реакций E не имеет простого физического смысла. Значения z, E определяются, как правило, эксперимен-

тальным путем. Кинетические константы полностью определяют скорость протекания каждой конкретной реакции, в том числе и реакции воспламенения или горения. Задача экспериментального определения этих констант является важнейшей при исследовании физико-химических процессов в высокоэнергетических установках.

Химическая реакция проходит с выделением тепла (экзотермическая реакция), либо с его поглощением (эндотермическая реакция). Если прямая реакция – экзотермическая, то обратная – эндотермическая. Количество тепла, выделяемого при полном реагировании единицы количества вещества (1 моль или 1 кг), называется тепловым эффектом реакции Q . Размерность теплового эффекта реакции $[Q] = \text{Дж} \cdot \text{моль}^{-1}$ или $[Q] = \text{Дж} \cdot \text{кг}^{-1}$.

Определение констант формальной химической кинетики при кондуктивном нагреве образца

Рассмотрим две практически важные обратные задачи определения формальной химической кинетики на основании опытных данных по зажиганию твердого топлива в условиях кондуктивного нагрева и в условиях зажигания лучистой энергией. Данные методы основаны на развитой В.Н. Вилуновым теории зажигания конденсированных веществ.

Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 9.1. В качестве нагретой поверхности используется отшлифованная алюминиевая цилиндрическая пластина 3 диаметром 20 мм и высотой 3 мм, запрессованная в углубление массивного медного стержня 2 диаметром 50 мм и высотой 250 мм. Стержень нагревается в муфельной печи 1. В пластине 3 на расстоянии $0,3 \div 0,4$ мм от рабочей поверхности по радиусу просверлены два отверстия диаметром 1,5 мм, в которые помещены медь-константановая 7 и хромель-алюмелевая 5 термопары диаметром 0,5 мм.

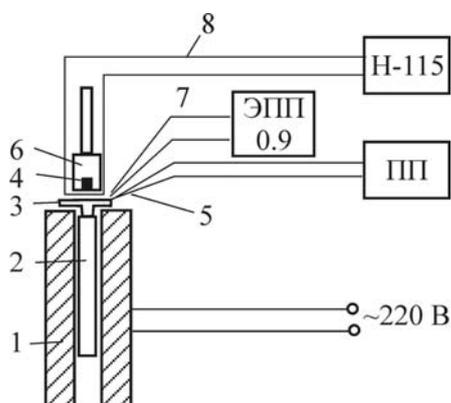


Рис. 9.1. Схема установки кондуктивного нагрева

Термостатирование медного стержня осуществляется автоматическим устройством ЭПП-0.9, включающим (или выключающим) трансформатор, питающий муфельную печь. Управляющий сигнал автоматического устройства подается от медь-константановой термопары. После выхода на заданный тепловой режим температура нагретой поверхности пластины поддерживается постоянной с погрешностью $\pm 0,5$ К. Температура поверхности более точ-

но (с погрешностью 0,1 %) измеряется хромель-алюмелевой термопарой 5, показания которой регистрируется потенциометром марки ПП.

В экспериментах используются цилиндрические образцы 4 исследуемого высокоэнергетического материала (пороха Н, пироксилина или другого конденсированного вещества) диаметром $8 \div 10$ мм и высотой 10 мм. Образец закрепляется в углублении основания массивного стального (массой 0,5 кг) стержня 6, что обеспечивает надежный тепловой контакт с нагретой поверхностью пластины 3. Время задержки воспламенения образца определяется с помощью малоинерционной ленточной медь-константановой термопары 8 диаметром $7 \div 10$ мкм, которая приклеивается ацетоном в центре отшлифованной поверхности образца. Сигнал с ленточной термопары записывается на светолучевом осциллографе Н-115; одновременно на осциллограмму записываются метки времени (рис. 9.2). На осциллограмме четко регистрируется момент контакта топлива с нагретой поверхностью и момент воспламенения. Погрешность измерения времени задержки воспламенения t_{ign} не превышает 0,01 с.

Методика определения кинетических констант

Рассмотрим твердофазную модель кондуктивного зажигания конденсированного вещества (к-вещества), в которой предполагается, что ответственными за зажигание являются суммарно-экзотермические процессы разложения, протекающие в конденсированной фазе (к-фазе) вещества. Возможные фазовые переходы (испарение, плавление, абляция) не учитываются.

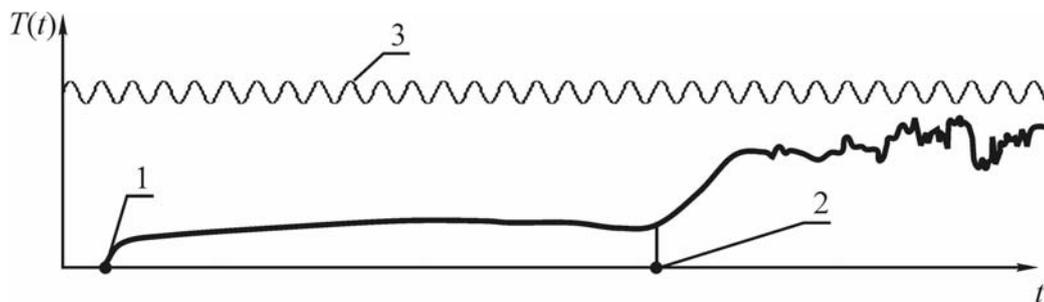


Рис. 9.2. Осциллограмма изменения температуры на поверхности образца:
1 — момент контакта; 2 — момент воспламенения;
3 — сигнал от отметчика времени осциллографа

До момента времени $t < 0$ пластина к-вещества равномерно прогрета до начальной температуры $T_n > 0$; при $t = 0$ она одной своей поверхностью приводится в соприкосновение с нагретым до некоторой постоянной температуры $T_s > T_n$ горячим телом. Уравнение распространения тепла в одномерной постановке для твердофазной модели зажигания имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \text{ж} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q}{c} z \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT}\right). \quad (9.5)$$

В уравнении (9.5) приняты следующие обозначения:

ж – коэффициент температуропроводности к-вещества, $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$;

с – удельная теплоемкость к-вещества, $\text{Дж} \cdot \text{кг} \cdot \text{К}^{-1}$.

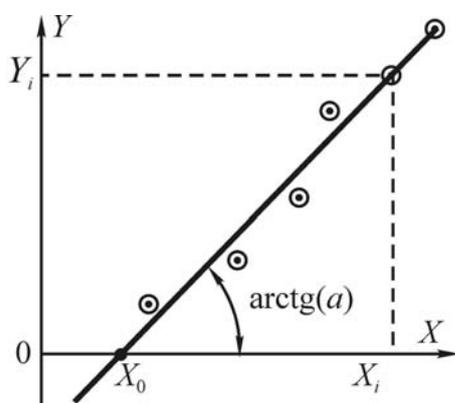
Прямая задача исследования заключается в решении уравнения (9.5) при соответствующих начальных и граничных условиях, то есть в нахождении температурных полей $T(x)$ в различные моменты времени, а также времени задержки воспламенения t_{ign} , при котором наступает самопроизвольное разогревание нагреваемой поверхности к-вещества. Очевидно, что для решения прямой задачи необходимо знать кинетические константы исследуемого к-вещества z , E , а также величину теплового эффекта Q твердофазной реакции.

Для решения обратной задачи определения кинетических констант реакции по экспериментально измеренной зависимости времени задержки воспламенения t_{ign} от температуры нагретого тела T_s можно использовать формулу В.Н. Вилюнова

$$t_{ign} = \frac{1.18c}{T_s \cdot Q \cdot z} \sqrt{\frac{E}{R}} (T_s - T_n)^{3/2} \cdot \exp\left(\frac{E}{RT_s}\right). \quad (9.6)$$

Формула (9.6) получена интерполяцией результатов численных расчетов задачи (9.5) с погрешностью аппроксимации не хуже 0,5 %. Вводя новые переменные

$$X = \frac{1}{T_s}, \quad Y = \ln \left[\frac{t_{ign} \cdot T_s}{(T_s - T_n)^{3/2}} \right], \quad (9.7)$$



и обозначая

$$\frac{E}{R} = a, \quad \ln \left[\frac{1.18c}{Q \cdot z} \sqrt{\frac{E}{R}} \right] = b,$$

уравнение (9.6) можно привести к линейному виду

$$Y = aX + b.$$

Если экспериментальные точки $t_{ign,i}, T_{s,i}$ нанести на график в координатах X, Y , то они должны укладываться на прямую линию (рис. 9.3). Проводя ап-

Рис. 9.3. Определение констант формальной кинетики

проксимацию экспериментальных точек X_i, Y_i (например, методом наименьших квадратов), по наклону полученной прямой можно найти коэффициент a и, следовательно, энергию активации E :

$$E = a \cdot R.$$

Коэффициент b находится с помощью координат точки пересечения аппроксимирующей прямой с осью абсцисс ($X = X_o, Y = 0$):

$$b = -aX_o = -\frac{E}{R}X_o.$$

Представляя коэффициент b в виде

$$b = \ln\left(\frac{1,18c}{Q \cdot z} \sqrt{\frac{E}{R}}\right) = \ln\left(1,18c \sqrt{\frac{E}{R}}\right) - \ln(Q \cdot z),$$

можно получить формулу для расчета произведения теплового эффекта реакции на предэкспонент $Q \cdot z$:

$$Q \cdot z = \exp\left[\ln\left(1,18c \sqrt{\frac{E}{R}}\right) + \frac{E}{R \cdot T_{so}}\right], \quad (9.8)$$

где $T_{so} = X_o^{-1}$.

Полученные с использованием данной методики кинетические константы, в частности, для пироксилина в диапазоне температур $T_s = 484 \div 514$ К ($E = 0,185$ МДж \cdot кмоль $^{-1}$, $Q \cdot z = 0,251 \cdot 10^{19}$ МДж \cdot кг $^{-1} \cdot$ с $^{-1}$) хорошо согласуются с литературными данными.

Таким образом, методика определения кинетических констант заключается в измерении зависимости времени задержки воспламенения от температуры нагретого тела, определении с помощью графика (см. рис. 9.3) значения коэффициента a и, соответственно, энергии активации E , а также в расчете произведения $Q \cdot z$ по формуле (9.8) при известных значениях c, R, E, T_{so} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТ ФОРМАЛЬНОЙ КИНЕТИКИ ПРИ ЛУЧИСТОМ ЗАЖИГАНИИ ОБРАЗЦА

Экспериментальная установка

Для измерения времени задержки воспламенения конденсированных веществ при лучистом нагреве используется установка «Уран-1». Установка (рис. 9.4, а) состоит из блока питания, выносного блока управления и излучателя. Блоком питания является выпрямитель на кремниевых диодах. Блок управления предназначен для подачи на лампу напряжения поджигающего импульса (30 кВ, 0.5 МГц) и для плавного регулирования

мощности лампы. Конструкция установки предусматривает возможность автоматического поддержания заданного режима лампы установлением обратной связи и подачей в блок управления сигнала от исследуемого образца. Излучатель состоит из эллиптического зеркала, контротражателя и ксеноновой лампы типа ДКсР-10000. Оптическая схема излучателя приведена на рис. 9.4, б. Шнур разряда лампы помещен в первый фокус зеркала. Во втором фокусе получается увеличенное изображение сечения разряда. Номинальный режим лампы характеризуется величиной тока 285 А, напряжением 35 В. Распределение излучения по областям спектра: 0,5 кВт (9 %) в ультрафиолетовой области спектра, 2 кВт (36 %) в видимой области и 3 кВт (55 %) в инфракрасной области. На воздухе или в другой газовой среде на поверхности образца, помещенного в фокусе отражателя, достигается температура ≈ 2770 К.

Излучение ксеноновой лампы ДКсР-10000 фокусируется эллиптическим зеркалом в пятно диаметром $12 \div 20$ мм. Установка обеспечивает стабильность потока излучения во времени не ниже 95 %. Отклонение от фокальной плоскости на 1 мм в любую сторону приводит к уменьшению теплового потока на 5 %. Интенсивность теплового излучения измеряется медным калориметром с погрешностью, не превышающей 10 %. Исследуемые образцы имеют форму цилиндров диаметром 10 мм и высотой 5 мм. Коэффициент отражения исследуемых образцов определяется на шаровом фотометре ФМШ-56М в диапазоне длин волн ($0,36 \div 1,10$) мкм. Для большинства образцов коэффициент отражения составляет ($11 \div 13$) % и практически не зависит от длины волны излучения.

Для получения прямоугольного импульса излучения используется дисковый затвор. Величина теплового потока сохраняется постоянной в течение 60 % от времени экспозиции. Начало и конец экспозиции, а также момент появления пламени фиксируются фотоэлектрической системой и регистрируются на светолучевом осциллографе Н117.

Время задержки воспламенения t_{ign} в опытах определяется по появлению пламени, регистрируемого ионизационным датчиком. Электроды ионизационного датчика, на которые подается напряжение 600 В, расположены на расстоянии ($3 \div 5$) мм от образца. При действии излучения электрический сигнал от фотодиода ФД-9 запускает электронносчетный частотомер ЧЗ-54, а при появлении пламени срабатывает ионизационный датчик, сигнал от которого также подается на частотомер. Показания частотомера соответствуют величине времени задержки воспламенения.

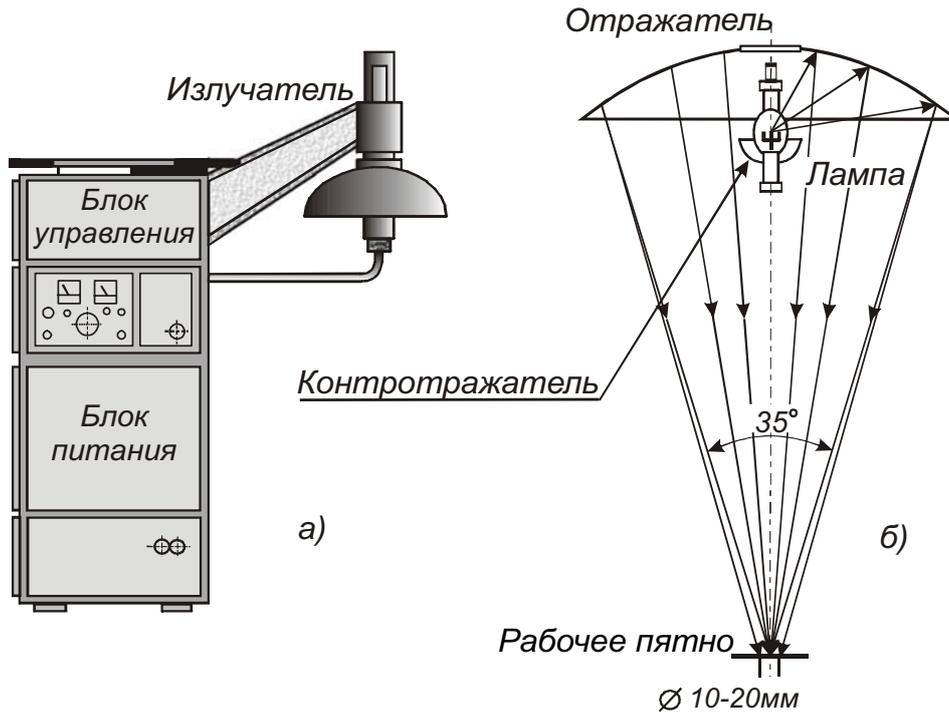


Рис. 9.4. Установка лучистого нагрева «Уран-1» с ксеноновой лампой 10 кВт:
 а – общий вид установки; б – схема излучателя

Методика определения кинетических констант

Теория зажигания конденсированных веществ лучистой энергией позволяет решить обратную задачу определения формальной макрокинетики процесса зажигания. При нагреве поверхности образца лучистым потоком с интенсивностью q до $(20 \div 40)$ Вт/см² процесс зажигания лимитируется экзотермическими реакциями в конденсированной фазе вещества. Для непрозрачных веществ, например для пороха Н с добавлением 1 % сажи, математическая постановка задачи сводится к решению нестационарного уравнения теплопроводности с источником членом (9.5). В случае лучистого зажигания краевые условия для этого уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
 T(x, 0) &= T_n = \text{const}, & 0 \leq x < \infty; \\
 -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} &= q = \text{const} > 0, & x = 0, t > 0; \\
 \frac{\partial T}{\partial x} &\rightarrow 0, & x \rightarrow \infty, t > 0.
 \end{aligned}$$

Здесь q – интенсивность (поверхностная плотность) потока излучения;
 T_n – начальная температура образца.

Аналитическое решение данной краевой задачи для параболического уравнения (9.5) получить не удастся. Аппроксимация численного решения этого уравнения, полученная В.Н. Вилюновым, имеет вид

$$t_{ign} = 0,35 \left(1 - \frac{T_H}{T_*}\right)^2 \frac{E \cdot c}{R \cdot Q \cdot z} \exp\left(\frac{E}{RT_*}\right), \quad (9.9)$$

где T_* – масштабная температура, величину которой непосредственно экспериментальным способом определить нельзя. Для ее расчета используется следующая формула:

$$T_* = T_H + 1,2q \sqrt{\frac{t_{ign}}{\lambda \cdot \rho \cdot c}}, \quad (9.10)$$

где λ , ρ – коэффициент теплопроводности и плотность исследуемого образца.

Вводя новые переменные

$$X = \frac{1}{T_*}, \quad Y = \ln \left[\frac{t_{ign} \cdot T_*^2}{(T_* - T_H)^2} \right]$$

и обозначая

$$\frac{E}{R} = a, \quad \ln \left[0,35 \frac{E \cdot c}{R \cdot Q \cdot z} \right] = b,$$

уравнение (9.9) можно привести к виду

$$Y = aX + b.$$

В координатах X , Y получим аппроксимацию в виде прямой, аналогичной приведенной на рис. 9.3. Наклон прямой определяет эффективную энергию активации E , а следовательно, по координатам точки пересечения аппроксимирующей прямой с осью абсцисс при известных теплофизических константах исследуемого конденсированного вещества можно определить и произведение $Q \cdot z$. Поскольку величина теплового эффекта реакции в конденсированной фазе Q известна из термодинамических расчетов или из эксперимента, то определяется и значение предэкспонента z .

Методика определения термокинетических констант включает следующие этапы.

- Измеряется зависимость времени задержки воспламенения t_{ign} от поверхностной плотности теплового потока q , и по формуле (9.10) рассчитываются значения масштабной температуры T_{*i} для каждой экспериментальной точки, а также рассчитываются соответствующие значения Y_i (табл. 9.1).

Таблица 9.1

| | | | | |
|-----------|-------------|-------------|-----|-------------|
| i | 1 | 2 | ... | n |
| q_i | q_1 | q_2 | ... | q_n |
| t_{ign} | $t_{ign,1}$ | $t_{ign,2}$ | ... | $t_{ign,n}$ |
| T_* | T_{*1} | T_{*2} | ... | T_{*n} |
| Y_i | Y_1 | Y_2 | ... | Y_n |

- По данным табл. 9.1 наносятся экспериментальные точки на график $Y(X)$ и проводится их аппроксимация в виде линейной зависимости.
- По наклону полученной прямой находится значение коэффициента a , и, соответственно, энергии активации $E = a \cdot R$.
- По координатам точки пересечения аппроксимирующей прямой с осью абсцисс ($X = X_0, Y = 0$) определяется произведение $Q \cdot z$:

$$Q \cdot z = \exp \left[\ln \left(\frac{0,36E \cdot c}{R} \right) + \frac{E}{RT_{*0}} \right],$$

где $T_{*0} = X_0^{-1}$.

Для полупрозрачных конденсированных веществ методика определения кинетических констант по измерению времени задержки воспламенения при лучистом нагреве несколько изменяется. В этом случае необходимы измерения показателя поглощения образца и использование несколько усложненной формулы для определения времени задержки воспламенения. Далее расчет кинетических констант ведется аналогично, но с пересчитанным временем задержки воспламенения.

9.4. АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕПЛО- И МАССООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Математическая модель сложной технической системы строится, как правило, с использованием моделей отдельных элементов системы и тепломассообменных процессов, происходящих в ней. Для выбора, корректировки и оценки адекватности как простых, так и составных моделей широко используются методы физического моделирования – экспериментальные исследования. При этом обратные задачи выступают как задачи идентификации тепловых объектов (технических устройств или тепломассообменных процессов), а также как задачи обработки результатов теплового эксперимента и контроля соответствующих причинных характеристик в процессе испытаний.

Таким образом, под идентификацией понимается процедура определения или оценивания неизвестных параметров для установленного вида тепловой модели. Процедура идентификации основывается на специально поставленных экспериментах и более точных теоретических результатах с привлечением положений теории подобия и анализа размерностей.

На основе анализа многочисленных работ по идентификации процессов нестационарного тепло- и массопереноса в реагирующих средах в монографии А.М. Гришина, В.И. Зинченко, А.Я. Кузина и др. (2006 г.) был предложен алгоритм, блок-схема которого представлена на рис. 9.5. Для исследуемых физико-химических процессов записывается идентифицируемая оптимальная математическая модель (ММ) в виде

$$A_h(w)u = f_\delta,$$

где w, u – некоторые совокупности определяемых величин из числа теплофизических характеристик, начального распределения температуры, геометрических характеристик, характеристик, входящих в граничные условия, дискретизированного температурного поля и т. д.;

A_h – разностный оператор;

f_δ – исходные экспериментальные данные, заданные с известной погрешностью δ (например, значение переменной состояния процесса в некоторых точках области изменения пространственных переменных).

Затем проводится планирование эксперимента и выполняется новая серия специальных лабораторных или натуральных экспериментов. Осуществляется первичная математическая обработка полученных в ходе экспериментов результатов и проводится сравнение решения прямой задачи с величиной f_δ . Если их разность по норме превышает наперед заданную величину ε , проводится решение обратной задачи с помощью ранее рассмотренных соответствующих алгоритмов и определяется новое приближение к искомым параметрам. Процесс расчета повторяется до тех пор, пока эта разность не станет равной или меньшей ε . После этого проводится проверка адекватности модели реальным физическим процессам в рассматриваемой системе. Степень адекватности математической модели определяет, в конечном счете, достоверность и точность моделирования.

Если мера адекватности, определяемая как

$$\eta_\delta(A) = \sup_{f_\delta \in F_o} \inf_{u \in U} \|A_h u - f_\delta\|_F,$$

где $F_o \subset F$ – некоторое множество возможных состояний исследуемого процесса, которые должны быть описаны данной математической моделью, больше предельно допустимой погрешности моделирования, то проводится

новая серия экспериментов и производится корректирование идентифицируемой математической модели и алгоритмов решения обратной задачи.

В случае когда мера адекватности не превышает предельно допустимую погрешность, процесс идентификации считается законченным. Необходимо отметить, что выбор алгоритмов параметрической идентификации должен быть четко связан со структурой математической модели, которая зависит от особенностей конкретного исследуемого физического процесса.

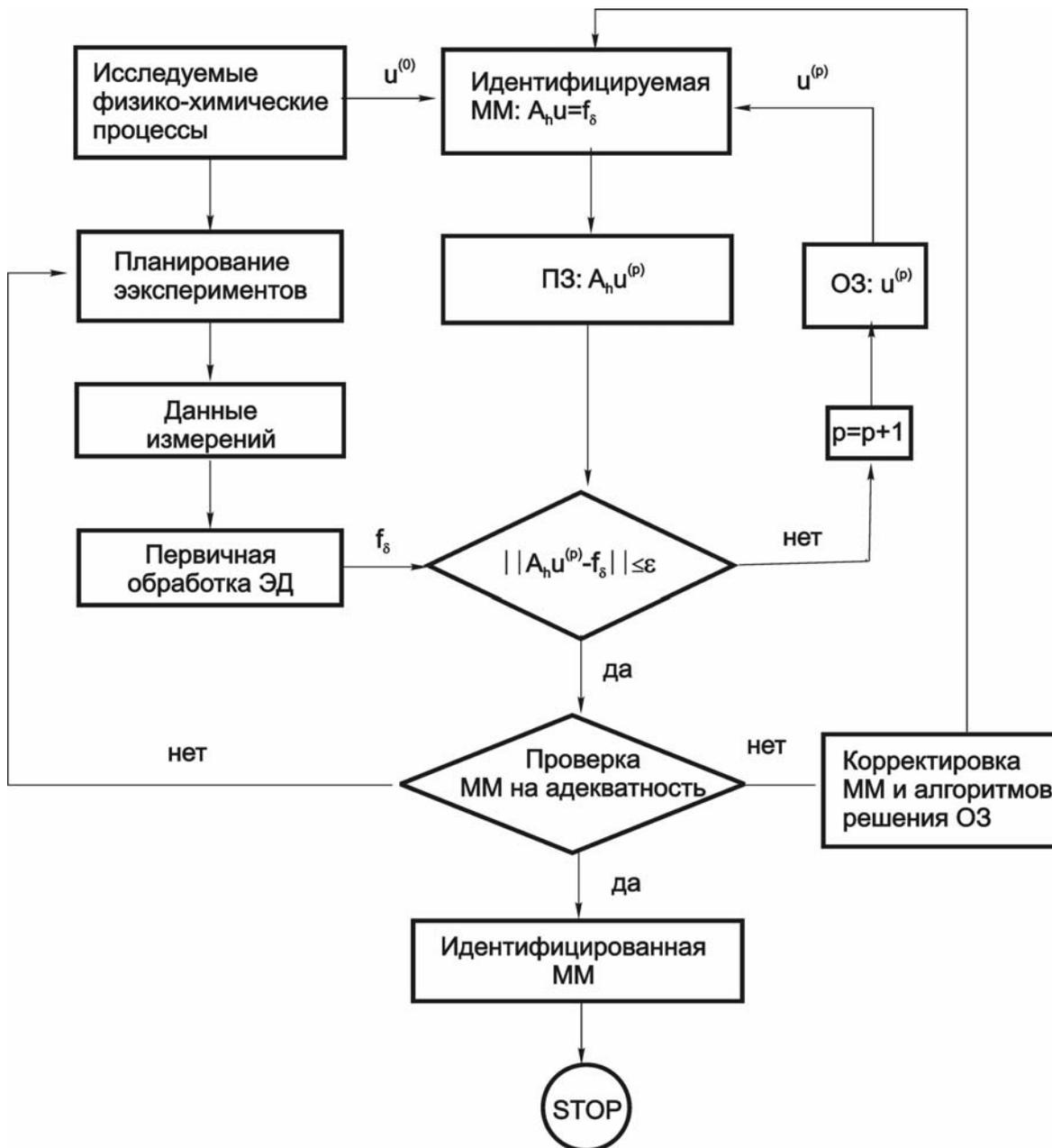


Рис. 9.5. Блок-схема идентификации: ЭД – экспериментальные данные; ММ – математическая модель; ПЗ – прямая задача; ОЗ – обратная задача

10. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АЭРОЗОЛЕЙ

Течения газа со взвешенными в нем твердыми или жидкими частицами конденсированной фазы (аэрозолями) широко распространены в природе, а также играют важную роль во многих отраслях современной техники и технологии. Атомная энергетика и метеорология, аэрокосмическая техника и химическая технология, двигателестроение и экология – вот далеко не полный перечень областей практического использования законов динамики двухфазных сред. Одними из важнейших характеристик аэрозольных систем являются их дисперсность (распределение частиц по размерам) и концентрация, которые определяются, как правило, только экспериментальным путем. Наиболее перспективными представляются бесконтактные оптические методы измерения этих характеристик. Их основное преимущество перед методами отбора и анализа проб (зондовыми методами) состоит в отсутствии возмущения исследуемой среды. Диагностика высокотемпературных двухфазных потоков в большинстве случаев возможна только с использованием бесконтактных методов, поскольку вводимые в поток зонды будут разрушаться под воздействием высоких температур.

10.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОПТИКИ АЭРОЗОЛЕЙ

Методы лазерной диагностики двухфазных потоков основаны на практическом использовании закономерностей взаимодействия оптического излучения с малыми частицами. Основы оптики аэрозолей подробно изложены в монографиях К.С. Шифрина, В.Е. Зуева, Д. Дейрменджана и других авторов. Рассмотрим лишь основные понятия и определения, необходимые при анализе конкретных методов измерения.

Одиночные частицы

При взаимодействии частицы с полем падающего на нее электромагнитного излучения появляется поле излучения, рассеянное в иных направлениях, чем поле падающего излучения. При этом поток падающего излучения ослабляется за счет рассеяния и поглощения излучения частицей. Для количественного описания этих эффектов вводятся следующие характеристики.

- Фактор эффективности ослабления Q , рассеяния Q_p , поглощения Q_n – доля попавшего внутрь контура частицы потока излучения, соответственно, уходящая из прямого пучка, рассеянная частицей во всех направлениях, поглощенная частицей. Факторы эффективности являются безразмерными величинами и связаны между собой соотношением

$$Q = Q_p + Q_n.$$

- Полное сечение или коэффициент ослабления Σ , рассеяния Σ_p , поглощения Σ_n – отношение потока излучения, соответственно, изымаемого частицей из падающего на нее пучка, рассеянного во всех направлениях, поглощенного частицей, к плотности потока излучения в падающем на частицу пучке. Эти коэффициенты имеют размерность площади; для сферических частиц диаметром D

$$\Sigma = \frac{\pi D^2}{4} Q; \quad \Sigma_p = \frac{\pi D^2}{4} Q_p; \quad \Sigma_n = \frac{\pi D^2}{4} Q_n.$$

- Индикатриса рассеяния $J(\theta)$ – отношение потока излучения, рассеянного частицей в единичном телесном угле в данном направлении θ , к полному потоку рассеянного частицей излучения. Индикатриса рассеяния является безразмерной функцией угла рассеяния θ и характеризует пространственное распределение рассеянного частицей света. Интеграл от нее по всему пространству равен единице. Угол рассеяния θ определяется направлением падающих волн, точкой рассеяния (рассеивающей частицей) и направлением на

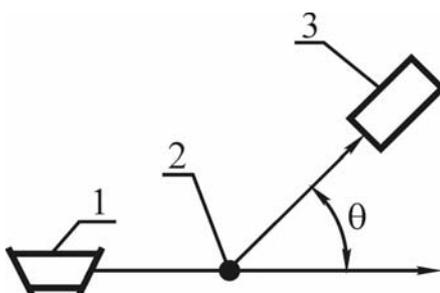


Рис. 10.1. Определение угла рассеяния θ :

- 1 – источник излучения (лазер);
2 – рассеивающая частица;
3 – приемник излучения

приемником излучения (рис. 10.1).

В оптике аэрозолей показано, что для однородных сферических частиц количественные характеристики светорассеяния полностью определяются двумя параметрами – комплексным показателем преломления материала частицы $m = n - i \cdot k$ (n – показатель преломления; k – показатель поглощения) и безразмерным параметром дифракции (параметром Ми):

$$\alpha = \frac{\pi D}{\lambda},$$

где λ – длина волны падающего на частицу излучения.

Если размер частицы много меньше длины волны излучения ($\alpha < 0,2$ или $D < 0,06\lambda$), то характеристики светорассеяния определяются простыми зависимостями (приближение Рэлея):

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{24n\alpha}{(2+n^2-\alpha^2)^2 + (2n\alpha)^2}, \\ Q_p &= \frac{8}{3} \cdot \frac{\left[(n^2 - \alpha^2 + 2) + (n^2 + \alpha^2)^2 \right]^2 + (6n\alpha)^2}{\left[(n^2 - \alpha^2 + 2)^2 + (2n\alpha)^2 \right]^2} \cdot \alpha^4, \\ Q_n &= Q - Q_p. \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Интенсивность излучения, рассеянного под произвольным углом θ , определяется соотношением

$$J = 0,5 \left(\frac{\pi D^3}{2L\lambda^2} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) I_o,$$

где L – расстояние от частицы до приемника излучения;

I_o – интенсивность падающего на частицу излучения.

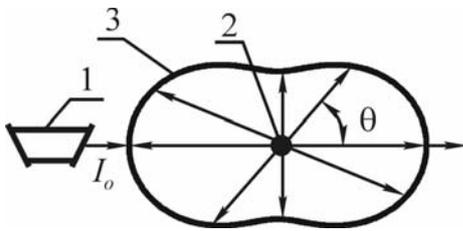


Рис. 10.2. Индикатриса рассеяния для малых частиц:
1 – источник излучения (лазер);
2 – рассеивающая частица;
3 – индикатриса рассеяния

Для случая малых частиц характерна сильная зависимость интенсивности рассеянного света от размера частицы ($\sim D^6$) и от длины волны падающего на частицу излучения ($\sim \lambda^{-4}$). Индикатриса рассеяния симметрична (рис. 10.2), то есть поток излучения, рассеянный в направлении распространения излучения I_o , равен потоку излучения, рассеянному в обратном направлении.

Другой предельный случай, когда размер частиц много больше длины волны ($\alpha > 30$ или $D > 10\lambda$), характеризуется тем, что фактор эффективности рассеяния практически постоянен ($Q_p = \text{const} = 2$), то есть рассеяние не зависит от длины волны зондирующего излучения и оптических констант материала частиц.

Точное аналитическое решение проблемы определения факторов эффективности и индикатрисы рассеяния (в функции параметра дифракции α и комплексного показателя преломления m) для произвольных значений параметра дифракции было получено немецким ученым Ми (1908 г.) в результате применения теории электромагнитного поля Максвелла к задаче рассеяния света однородной сферической частицей, на которую в определенном направлении падает плоская волна. Доведение решения до численных значений возможно только с помощью ЭВМ.

Монодисперсная среда

Рассмотрим монодисперсную среду, то есть аэрозольную систему, состоящую из частиц одинакового размера. При прохождении оптического излучения с длиной волны λ через слой аэрозольных частиц толщиной l , состоящий из равномерно распределенных монодисперсных частиц диаметром D со счетной концентрацией C_n (количество частиц в единице объема), происходит его ослабление за счет рассеяния и поглощения частицами. Количественной характеристикой ослабления является спектральный коэффициент пропускания T_λ , равный отношению потока излучения, прошедшего сквозь слой, к упавшему на него потоку излучения. Величина T_λ определяется *законом Бугера*:

$$T_\lambda = \frac{I_\lambda}{I_0} = \exp(-\tau_\lambda) = \exp(-K_\lambda \cdot l), \quad (10.2)$$

где τ_λ – спектральная оптическая плотность слоя; K_λ – спектральный показатель ослабления, который характеризует ослабление света единичным объемом среды, содержащим независимо рассеивающие частицы. Выражение для K_λ записывается в виде

$$K_\lambda = \Sigma \cdot C_n = \frac{\pi D^2}{4} C_n Q(\alpha, m).$$

Характеристики излучения, рассеянного или ослабленного монодисперсной средой (без учета влияния многократного рассеяния), могут быть определены простым суммированием результатов одиночных взаимодействий с каждой частицей.

Полидисперсная среда

При рассмотрении полидисперсных сред, состоящих из частиц разных размеров, будем предполагать, что частицы сферические, рассеяние света на каждой из них происходит независимо от других, а слой рассеивающей среды достаточно тонкий, так что рассеяние второго и более порядков можно не учитывать. Показатель ослабления для полидис-

персной среды с дифференциальной функцией распределения частиц по размерам $f(D)$ равен

$$K_\lambda = \frac{\pi C_n}{4} \int_0^\infty Q(\alpha, m) D^2 f(D) dD.$$

Заменяя C_n через массовую концентрацию C_m (суммарная масса частиц в единице объема)

$$C_m = C_n \frac{\pi \rho_k}{6} \int_0^\infty D^3 f(D) dD,$$

выражение для показателя ослабления можно представить в виде

$$K_\lambda = \frac{3C_m}{2\rho_k} \frac{\int_0^\infty Q(\alpha, m) D^2 f(D) dD}{\int_0^\infty D^3 f(D) dD},$$

где ρ_k – плотность материала частиц.

По аналогии с одиночной частицей можно ввести понятие усредненного фактора эффективности ослабления для полидисперсной среды:

$$\bar{Q} = \frac{\int_0^\infty Q(\alpha, m) D^2 f(D) dD}{\int_0^\infty D^2 f(D) dD}. \quad (10.3)$$

Аналогично вводятся понятия усредненных факторов эффективности рассеяния и поглощения. Выражение для спектральной оптической плотности полидисперсной среды при этом можно представить в следующем виде:

$$\tau_\lambda = \frac{3}{2} \cdot \frac{C_m \cdot l \cdot \bar{Q}}{\rho_k \cdot D_{32}}, \quad (10.4)$$

где D_{32} – средний объемно-поверхностный диаметр частиц, определяемый по формуле

$$D_{32} = \frac{\int_0^\infty D^3 f(D) dD}{\int_0^\infty D^2 f(D) dD}. \quad (10.5)$$

Важную роль в описании оптических характеристик полидисперсной среды имеет усредненный параметр дифракции

$$\alpha_{32} = \frac{\pi D_{32}}{\lambda},$$

который играет роль, аналогичную параметру дифракции α в случае монодисперсной среды.

10.2. ДИСПЕРСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Содержание частиц различных размеров в полидисперсной системе полностью определяется заданием ее дифференциальной функции распределения от параметра x , характеризующего размер индивидуальной частицы (радиус, диаметр, масса, объем частицы и т. д.). Эта функция имеет смысл плотности распределения вероятности, то есть нормирована на единицу:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (10.6)$$

При этом $df(x) = f(x)dx$ – доля количества частиц, размеры которых лежат в диапазоне $(x, x + dx)$.

Наряду с функцией распределения для описания дисперсных сред широко используются осредненные характеристики, определяемые следующей формулой:

$$x_{mn} = \left[\frac{\int_0^{\infty} x^m f(x) dx}{\int_0^{\infty} x^n f(x) dx} \right]^{\frac{1}{m-n}}, \quad (10.7)$$

где m, n – целые числа, означающие порядок момента функции распределения.

Наиболее распространенными из них являются следующие размеры:

- x_{10} – среднеарифметический (среднесчетный);
- x_{20} – среднеквадратический;
- x_{30} – среднеобъемный;
- x_{32} – средний объемно-поверхностный;
- x_{43} – среднемассовый.

Анализ многочисленных литературных данных по гранулометрическому составу различных аэрозольных систем показал, что все системы (в том числе и нанопорошки металлов) с унимодальной (одновершинной) функцией распределения могут быть описаны с помощью либо обобщенного гамма-распределения (ОГР), либо логарифмически нормального распределения (ЛНР).

Формула для обобщенного гамма-распределения записывается в виде

$$f(x) = ax^\alpha \cdot \exp(-bx^\beta), \quad (10.8)$$

где $a > 0$ – нормирующий множитель; α, β, b – параметры распределения ($\alpha > -1, b > 0, \operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}(\beta)$).

Нормирующий множитель для обобщенного гамма-распределения, определяемый из условия нормировки (10.6), имеет вид

$$a = \frac{\beta \cdot b^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)}.$$

Здесь Γ – гамма-функция. При $\beta = 1$ обобщенное гамма-распределение переходит в ГР – гамма-распределение ($\alpha > 0$):

$$f(x) = ax^\alpha \exp(-bx),$$

нормирующий множитель для которого

$$a = \frac{b^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Логарифмически нормальное распределение имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \ln \sigma_p} \exp\left[-\frac{(\ln x - \ln x_p)^2}{2(\ln \sigma_p)^2}\right],$$

где $\ln x_p$ – математическое ожидание логарифма размеров частиц;

$(\ln \sigma_p)^2$ – среднеквадратическое отклонение логарифма размеров.

Выражение для логарифмически нормального распределения удобно записать в компактном виде:

$$f(x) = \frac{a}{x} \exp\left[-b(\ln \beta x)^2\right], \quad (10.9)$$

где параметры α, β, b связаны с параметрами x_p, σ_p следующими соотношениями:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2} \ln \sigma_p}, \quad b = \frac{1}{2(\ln \sigma_p)^2}, \quad \beta = \frac{1}{x_p}.$$

Графики $f(x)$ для обобщенного гамма-распределения и логарифмически нормального распределения при соответствующем выборе входящих в них параметров имеют близкий вид. В качестве примера на рис. 10.3 приведены функции распределения для порошка алюминия марки АСД-4, микрофотография которых приведена на рис. 10.4.

Одной из характеристик дисперсности порошка является его удельная поверхность $S_{y\partial}$, определяемая как отношение суммарной поверхности частиц к их массе. Для сферических частиц величина $S_{y\partial}$ рассчитывается по формуле

$$S_{y\partial} = \frac{\int_0^{\infty} \pi D^2 f(D) dD}{\int_0^{\infty} \rho_k \frac{\pi D^3}{6} f(D) dD} = \frac{6}{\rho_k} \frac{\int_0^{\infty} D^2 f(D) dD}{\int_0^{\infty} D^3 f(D) dD}.$$

В соответствии с (10.5) это выражение можно представить в виде

$$S_{y\partial} = \frac{6}{\rho_k D_{32}}.$$

Таким образом, для сферических частиц удельная поверхность обратно пропорциональна среднему объемно-поверхностному диаметру частиц.

10.3. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение свойств вещества по особенностям рассеяния излучения является одной из фундаментальных проблем физики. В теории элементарных частиц и атомной физике, например, задача состоит в восстановлении потенциала поля по асимптотике волновых функций на бесконечности или, в классической формулировке, по заданной зависимости эффективного сечения от угла рассеяния.

Во всех случаях рассеяния фотонов, α -частиц и т. д. мы имеем дело с *прямой* и *обратной задачей*. В прямой задаче заданы зондирующий пучок и свойства вещества; при этом необходимо исследовать особенности рассеяния. В обратной задаче (задаче зондирования) известными считаются характеристики пучка до и после рассеяния. Необходимо определить свойства элемента объема вещества, на котором происходило рассеяние. Хотя обе задачи представляют по сути два разных подхода к

одному и тому же явлению, методы решения их существенно различны. Более того, если для прямой задачи решение всегда существует, то для обратной задачи это далеко не так, что связано с некорректностью задачи. Для решения обратной задачи необходимо наложить дополнительные условия (сузить постановку задачи), исключающие физически абсурдные (фантомные) решения, то есть провести регуляризацию задачи.

Постановка задачи

Предположим, что аэрозольные частицы являются однородными сферами радиуса a . Будем также считать, что элемент объема облучается параллельным пучком монохроматического света и что в рассеянном пучке отсутствуют интерференция и многократное рассеяние. В этом случае задача сводится к обращению интегрального уравнения первого рода:

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} F(x, a) f(a) da. \quad (10.10)$$

Здесь $f(a)$ – дифференциальная функция распределения частиц по размерам; $F(x, a)$ – ядро уравнения, известное из теории рассеяния света на отдельной частице; $\varphi(x)$ – функция, определяемая в специально поставленном эксперименте. В частности, если ядро $F(x, a)$ – индикатриса рассеяния монодисперсной системы частиц, то $\varphi(x)$ является полидисперсной индикатрисой рассеяния, описывающей рассеяние под углом $\theta = x$.

Обращение уравнения (10.10) путем замены его алгебраической системой приводит к принципиальным трудностям, свойственным интегральным уравнениям первого рода. Получающаяся алгебраическая система является плохо обусловленной – небольшие неточности в $\varphi(x)$ и $F(x, a)$ приводят к громадным ошибкам в $f(a)$. Формально правильное решение содержит отрицательные корни, что физически бессмысленно. Причина этих трудностей связана с некорректностью задачи.

В работах К.С. Шифрина показано, что существует три случая, в которых удастся получить аналитическую формулу для ядра $F(x, a)$. Это случаи индикатрисы рассеяния под малыми углами, коэффициента рассеяния для «мягких» частиц и полной индикатрисы для «мягких» частиц. Для этих случаев ядро $F(x, a)$ будет зависеть только от произведения аргументов и уравнение (10.10) удастся точно обернуть. При этом искомая функция $f(a)$ явно выражается через интеграл от $\varphi(x)$ и некоторое несложное ядро в каждом случае свое.

Полученные К.С. Шифриным точные решения удобны для проверки различных методов регуляризации, позволяют определять необходимые требования к погрешностям измерений, к диапазону и числу измерительных точек. Кроме того, эти частные случаи сами по себе важны и широко применяются в практике измерений дисперсности различных аэрозольных систем. Рассмотрим более подробно эти методы – метод малых углов (ММУ), метод спектральной прозрачности (МСП) и метод полной индикатрисы (МПИ).

Метод малых углов

Этот метод основан на исследовании ореола вокруг направления на источник зондирующего излучения. При увеличении размера частиц индикатриса рассеяния $J(\theta, \alpha)$ деформируется: доля излучения, рассеянного вперед, растет (эффект Ми) и в случае крупных частиц ($\alpha > 1$) становится сильно вытянутой вперед (в области малых углов рассеяния θ).

Как показывают расчеты, частицу можно считать крупной при значении $\alpha > 30$. Например, при длине волны излучения $\lambda = 0.6328$ мкм (излучение гелий-неонового лазера) крупными можно считать частицы диаметром $D = 2a > 6$ мкм. Большинство распылителей жидкости (центробежные, акустические и пневматические форсунки) содержат крупные (по оптическим свойствам) частицы, и для исследования характеристик распылителей можно успешно применять метод малых углов.

Интенсивность излучения $J(\theta)$, рассеянного крупной частицей под малыми углами ($\theta \approx 1$), может быть представлена в виде

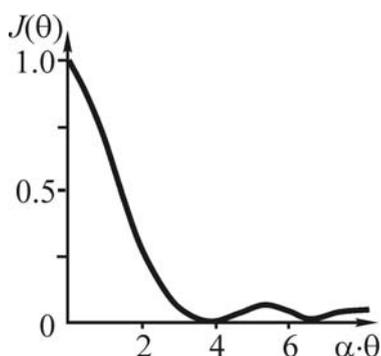


Рис. 10.3. Распределение интенсивности рассеянного света для монодисперсной системы крупных частиц под малыми углами

$$J(\theta) = I_0 \cdot a^2 \frac{Y_1^2(\alpha \cdot \theta)}{\theta^2}, \quad (10.11)$$

где I_0 – интенсивность падающего на частицу радиусом a излучения;

$Y_1(x)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка;
 $\alpha = 2\pi a/\lambda$ – параметр дифракции.

В формуле (10.11) учитывается только дифракционное рассеяние, так как его интенсивность в области малых углов намного превосходит интенсивность рассеяния

вследствие преломления. Распределение интенсивности рассеянного света для крупных частиц ($\alpha \gg 1$) под малыми углами ($\theta \ll 1$), рассчитанное по формуле (10.11), представлено на рис. 10.3.

Интенсивность излучения, рассеянного полидисперсной системой частиц, определяется формулой

$$\bar{J}(\theta) = \frac{I_0}{\theta^2} \int_0^{\infty} f(a) \cdot a^2 \cdot Y_1^2(\alpha \cdot \theta) da. \quad (10.12)$$

Выражение (10.12) представляет частный случай общей формулы (10.10). Обращение уравнения (10.12) позволяет определить функцию распределения частиц по размерам:

$$f(\alpha) = -\frac{2}{\alpha^2} \int_0^{\infty} P(\alpha \cdot \theta) \varphi(\theta) d\theta, \quad (10.13)$$

где $P(x) = xY_1(x)Y_2(x)$; $Y_2(x)$ – функция Неймана, а функция $\varphi(\theta)$ имеет вид

$$\varphi(\theta) = \pi \left(\frac{2\pi}{\lambda^3} \right) \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\bar{J}(\theta)}{I_0} \theta^3 \right]. \quad (10.14)$$

Таким образом, определив экспериментально индикатрису рассеяния $\bar{J}(\theta)$ и рассчитав по формуле (10.14) функцию $\varphi(\theta)$, далее с помощью (10.13) можно найти функцию распределения частиц по размерам $f(\alpha)$ (или $f(a)$ для заданной длины волны λ зондирующего излучения).

Техническая реализация метода малых углов возможна с использованием различных оптических схем. Один из вариантов схемы измерения малоуглового рассеяния приведен на рис. 10.4. Измерения интенсивности рассеянного излучения проводятся в фокальной плоскости 8 приемной линзы 7 (за пределами фокального пятна, в котором собран прямой пучок). Коллиматор, состоящий из элементов 1–6, создает параллельный монохроматический пучок излучения. При использовании в качестве источника зондирующего излучения ОКГ (лазера), схема коллиматора существенно упрощается.

Измеряемые частицы расположены в измерительном объеме 9. Излучение, рассеянное под данным углом θ , приходит в фокальную плоскость 8 на заданное расстояние от ее центра. Регистрация интенсивности рассеянного излучения $\bar{J}(\theta)$ производится фотоприемником 10 (фотодиод, фотоумножитель), который перемещается в фокальной плоскости 8 по радиусу, от центра к периферии.

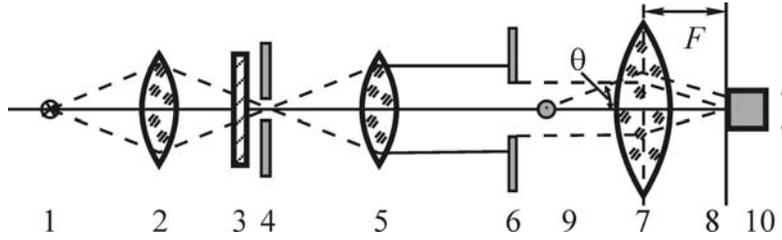


Рис. 10.4. Оптическая схема измерения малоуглового рассеяния:
 1 – точечный источник; 2 – конденсорная линза;
 3 – интерференционный светофильтр; 4 – точечная диафрагма;
 5 – коллимационная линза; 6 – выходная диафрагма;
 7 – приемная линза; 8 – фокальная плоскость приемной линзы;
 9 – измерительный объем; 10 – фотоприемник

Диапазон углов измерения при реализации данного метода $\theta_{\min} < \theta < \theta_{\max}$ определяется следующим образом. Величина θ_{\max} обычно принимается равной $\theta_{\max} \approx (5 \div 6)^\circ$, поскольку при $\theta > 6^\circ$ ореольная часть рассеяния резко уменьшается. Величина $\theta_{\min} \approx 10'$ определяется размерами фокального пятна, в котором собрано прямое излучение.

Пределы применимости метода малых углов по размерам частиц ограничены снизу условием корректности $\alpha < 30$ (для $\lambda = 0,6328$ мкм, например, $a_{\min} \approx 3$ мкм). При уменьшении длины волны зондирующего излучения нижний предел по размеру частиц можно снизить в соответствии с формулой

$$a_{\min} = \frac{30\lambda}{2\pi} \approx 4,8\lambda.$$

Со стороны больших размеров ограничение определяется техническими возможностями оптико-электронного прибора. Для крупных частиц дифрагированная составляющая индикатрисы рассеяния направлена вперед в узком конусе ($\theta \sim \alpha^{-1}$), и ее трудно отделить от зондирующего пучка. На практике обычно принимают значение верхнего предела измерений $a_{\max} \approx 50$ мкм.

К достоинствам метода малых углов относятся его слабая чувствительность к показателю преломления материала частиц, а также сравнительная простота схемы оптико-электронного прибора и возможность проведения динамических измерений. Измерение малоугловой индикатрисы можно осуществить, например, с помощью позиционно-чувствительных приемников излучения – диссекторов с очень высоким временным разрешением.

Метод спектральной прозрачности

Метод спектральной прозрачности основан на измерении спектрального коэффициента пропускания T_λ аэрозольной системы в некотором диапазоне длин волн зондирующего излучения. Исходным для метода спектральной прозрачности является уравнение, выражающее закон Бугера (10.2) для полидисперсной системы частиц:

$$T(\lambda) = \frac{I(\lambda)}{I_0(\lambda)} = \exp \left[-\pi C_n l \int_0^\infty Q(\alpha, m) a^2 f(a) da \right]. \quad (10.15)$$

По измеренной экспериментальной зависимости $T(\lambda)$ можно из (10.15) получить формулу для коэффициента ослабления:

$$\Sigma(\lambda) = \pi \int_0^\infty Q(\alpha, m) a^2 f(a) da. \quad (10.16)$$

Уравнение (10.16) является частным случаем интегрального уравнения (10.10). При обращении уравнения (10.16) приняты следующие допущения:

- частицы сферические;
- рассеяние однократно и некогерентно;
- частицы «мягкие», то есть показатель преломления вещественный ($\varkappa=0$) и близок к единице ($n \approx 1$).

В работах Ван де Хюлста и К.С.Шифрина показано, что в рамках данных допущений явление рассеяния зависит не от n и α в отдельности, а от величины

$$y = 2\pi(n-1) \frac{a}{\lambda} = \beta \nu a,$$

где $\beta = 2\pi(n-1)$; $\nu = \lambda^{-1}$ – волновое число.

Для фактора эффективности ослабления при этом справедлива формула, предложенная Ван де Хюлстом:

$$Q = 2 \left(1 - \frac{\sin 2y}{y} + \frac{1 - \cos 2y}{2y^2} \right). \quad (10.17)$$

Величина $Q(y) \rightarrow 2$ при $y \rightarrow \infty$ совершает затухающие колебания вокруг значений $Q = 2$. Подставляя (10.17) в уравнение (10.16), получим основное интегральное уравнение метода спектральной прозрачности

$$\Sigma(\lambda) = 2\pi \int_0^\infty \left[1 - \frac{\sin 2y}{y} + \frac{1 - \cos 2y}{2y^2} \right] a^2 f(a) da. \quad (10.18)$$

Применяя к уравнению (10.18), записанному в соответствующих безразмерных переменных (в качестве масштаба выбирается модальный радиус капель a_0 , соответствующий максимуму функции распределения), преобразование Меллина, можно получить формулу для определения $f(a)$. Эта формула содержит интегралы от измеренной зависимости $\Sigma(\lambda)$ и ввиду ее громоздкости не приводится.

Метод спектральной прозрачности применим в области, где зависимость фактора эффективности ослабления от λ наиболее сильно выражена (в области до первого максимума функции Q). Устойчивое решение возможно, если прозрачность (спектральный коэффициент пропускания) определена во всем интервале длин волн $0 < \lambda < \infty$. Тем не менее, если учитывать асимптотику поведения $Q(\alpha)$ (например, при $\alpha \rightarrow 0$ взаимодействие излучения со средой описывается в приближении Рэлея, а при $\alpha \rightarrow \infty$ описывается приближением геометрической оптики), то требуемый интервал λ можно сузить, руководствуясь соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\min} &= 0,5\beta a_0 \\ \lambda_{\max} &= 3\beta a_0 \end{aligned} \right\}$$

При этом в интервале $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ достаточно произвести порядка 20–30 измерений коэффициента пропускания на равноотстоящих значениях λ . Погрешность измерения должна быть не ниже 1%.

Техническая реализация метода спектральной прозрачности связана, как правило, с использованием тепловых источников зондирующего излучения в сочетании со сканирующими спектральными приборами. Использование перестраиваемых по длине волны лазеров на органических красителях позволяет существенно упростить схему опико-электронного прибора для диагностики аэрозолей и расширить область практического использования метода спектральной прозрачности.

Метод полной индикатрисы

В методе полной индикатрисы используется то же основное уравнение (10.12), что и в методе малых углов. Полидисперсная индикатриса $\bar{J}(\theta)$ измеряется, в отличие от метода малых углов, в гораздо большем диапазоне углов рассеяния $\theta = \theta_{\min} \div \theta_{\max}$. Данный метод применим в рамках тех же допущений, что и метод спектральной прозрачности, за исключением того, что условие оптической «мягкости» частиц записывается в виде

$$\alpha(n-1) < 1.$$

Индикатриса рассеяния для «мягкой» частицы записывается в виде

$$J(\theta, a) = I_0 \psi(\beta) G(q) a^2, \quad (10.19)$$

где

$$\psi(\beta) = 2\pi^2 \left[\frac{3}{4\pi} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) \right]^2 \frac{1 + \cos^2 \beta}{(1 - \cos \beta)^2};$$

$$G(q) = \left(\frac{\sin q - q \cos q}{q} \right)^2;$$

$$q = 2\alpha \sin(\beta/2).$$

Основное уравнение метода аналогично общему интегральному уравнению (10.10):

$$\bar{J}(\theta) = \int_0^{\infty} J(\theta, \alpha) f(a) a^2 da. \quad (10.20)$$

По оценкам К.С. Шифрина, в случае гамма-распределения частиц по размерам достаточно пяти экспериментальных точек при погрешности измерения 1 % для восстановления $f(a)$. Требуемый диапазон углов рассеяния при этом зависит от моды распределения. При $a_0 = 0,1$ мкм необходимо получить экспериментальное значение индикатрисы в диапазоне углов $\theta = 30 \div 130^\circ$, для $a_0 = 2,5$ мкм — $\theta = 1 \div 5^\circ$ (для длины волны зондирующего излучения $\lambda = 0,55$ мкм). Для малых частиц необходимо измерять индикатрису в большом диапазоне углов. Минимальное значение a_0 для $\theta_{\max} = 180^\circ$ составляет 0,9 мкм ($\lambda = 0,55$ мкм). Для продвижения в область меньших значений a_0 необходимо работать на более коротких длинах волн. При измерениях распределений частиц с большими значениями a_0 информация о распределении лежит в области малых углов рассеяния, тем более узкой, чем больше a_0 . При этом целесообразно использование метода малых углов.

Лидарный метод

Использование рассеяния излучения в обратном направлении ($\theta \cong 180^\circ$) выделяется в отдельную группу методов ввиду возможности построения схем дистанционной диагностики аэрозоля. Большой вклад в развитие лидарных методов внесли работы Института оптики атмосферы СО РАН, г. Томск. Принцип действия лидара заключается в следующем. Короткий импульс, длительностью $\sim 10^{-8}$ с, узконаправленного (в телесном угле $\sim 10^{-3}$ рад) лазерного излучения направляется на иссле-

дуемый объект. Приемный телескоп, расположенный рядом с излучателем, собирает рассеянное в обратном направлении излучение на входе приемника излучения. По характеристикам полученного сигнала определяется расстояние R до исследуемого объекта.

Соотношение между рассеивающими характеристиками аэрозоля и регистрируемым сигналом $P(R)$ дается лидарным уравнением, которое в предположении однократного рассеяния и малой длительности зондирующего импульса имеет вид

$$P(R) = \frac{E}{R^2} AT_\lambda^2(R)\beta_\pi(R), \quad (10.21)$$

где $T_\lambda(R) = \exp\left[-\int_0^R K_\lambda(x) dx\right]$ – прозрачность по линии зондирования;

A – аппаратная константа;

β_π – коэффициент обратного рассеяния, который связан с коэффициентом ослабления K_λ с помощью лидарного отношения α_π соотношением $\beta_\pi = \alpha_\pi K_\lambda$;

E – энергия излучения импульса.

Если пренебречь молекулярным рассеянием и поглощением, то коэффициенты β_π и K_λ в лидарном уравнении полностью определяются характеристиками аэрозоля. Характеристики сигнала определяются двумя независимыми величинами: T_λ и β_π или α_π и профилем K_λ , поэтому в общем случае уравнение (10.21) не может быть решено. Рассмотрим частные случаи, когда решение возможно.

1. Если зондируемая среда достаточно прозрачна (можно принять $T_\lambda(R) \approx 1$), то из (10.21) находится $\beta_\pi(R)$.
2. Для среды с постоянной микроструктурой или, в более общем случае, с постоянным лидарным отношением уравнение разрешается относительно α_π :

$$\alpha_\pi = \frac{2E}{A} \frac{\int_0^R P(x)x^2 dx}{1 - T_\lambda^2(R)}.$$

При $\alpha_\pi = \text{const}$ достаточно измерять прозрачность в одной точке. В случае оптически плотных сред интегрирование можно вести до R_k при $T_\lambda^2(R_k) \ll 1$, тогда

$$\alpha_{\pi} = \frac{2E}{A} \int_0^{R_k} P(x) x^2 dx,$$

$$K_{\lambda}(R) = \frac{P(R) R^2}{2 \int_R^{R_k} P(x) x^2 dx}.$$

Таким образом, в приближении лидарного уравнения (10.21) определение микроструктуры аэрозоля возможно только на основе использования зависимости от λ величин α_{π} , коэффициентов ослабления и коэффициентов обратного рассеяния. Естественно, что при определении параметров микроструктуры по полученным зависимостям $\beta_{\pi}(\lambda)$, $\alpha_{\pi}(\lambda)$ приходится решать обратную задачу, и все изложенные выше трудности характерны и для лидарных методов диагностики.

10.4. МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ СРЕДНЕГО РАЗМЕРА И КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ

Рассмотренные в подразд. 10.3 обратные методы оптики аэрозолей, позволяющие определять функцию распределения частиц по размерам $f(a)$, успешно используются для диагностики факела распыла форсунок, парожидкостных и запыленных потоков, атмосферных аэрозолей и других двухфазных сред. Применение этих методов в условиях высокотемпературных двухфазных потоков ограничено как по максимальной температуре потока, так и по предельным значениям концентрации частиц и размеров исследуемого объекта. Наиболее перспективны в этих условиях методы, основанные на измерении спектральных коэффициентов пропускания двухфазного потока для нескольких фиксированных длин волн λ_i зондирующего излучения. Эти методы не позволяют найти функцию распределения частиц по размерам без априорной информации о виде функциональной зависимости $f(a)$, однако для оценки средних размеров частиц обладают рядом преимуществ – простотой аппаратного оформления и юстировки, оперативностью получения результатов, обоснованностью применения теории Ми, закона Бугера и приближения однократного рассеяния, а также возможностью диагностики оптически плотных излучающих двухфазных потоков. Рассмотрим метод, основанный на измерении спектрального коэффициента пропускания T_{λ} для двух фиксированных длин волн λ_1 и λ_2 излучения зондирующего лазера.

Обоснование метода

Основным уравнением метода является выражение для оптической плотности слоя равномерно распределенных полидисперсных частиц (10.4), записанное применительно к двум длинам волн:

$$\tau_{\lambda, i} = \ln \left(\frac{1}{T_{\lambda, i}} \right) = \frac{1,5 C_m l \bar{Q}(\lambda_i)}{\rho_k D_{32}}, \quad i = 1, 2. \quad (10.22)$$

Усредненные факторы эффективности ослабления \bar{Q} , входящие в (10.22), являются важнейшими характеристиками, определяющими оптические свойства совокупности полидисперсных частиц. Выяснение зависимости \bar{Q} от микроструктуры среды представляет интерес при решении как прямых, так и обратных задач оптики дисперсных сред. Величина усредненного фактора эффективности рассеяния для непоглощающих частиц ($\varkappa = 0$) не зависит от вида функции распределения $f(D)$, а определяется (при заданном $m = n - i\varkappa$) усредненным параметром дифракции α_{32} или средним диаметром D_{32} (при заданном α_{32}).

Этот результат может быть положен в основу метода измерения среднего объемно-поверхностного диаметра частиц D_{32} . Для проверки вывода об однозначной зависимости \bar{Q} от α_{32} и распространения его на более широкий класс частиц ($\varkappa \neq 0$) в работах авторов было проведено расчетно-теоретическое исследование влияния вида функции распределения на характер зависимости $\bar{Q}(\alpha_{32})$ на примере частиц окиси алюминия.

Расчеты усредненных факторов эффективности проводились для трех функций распределения, отличающихся по своему виду:

$$\begin{aligned} f(D) &= a \cdot \exp(-bD); \\ f(D) &= a \cdot D^2 \exp(-bD^2); \\ f(D) &= a \cdot \exp(-b \ln^2 \beta D). \end{aligned}$$

Здесь a – нормирующий множитель; b, β – параметры распределения, связанные с D_{32} соотношениями $D_{32} = 3/b$, $D_{32} = 1,5/\sqrt{b}$, $D_{32} = \beta^{-1} \exp 1,75/b$ соответственно.

На рис. 10.5 приведены графики зависимости $\bar{Q}(\alpha_{32})$ для $m = 1,8 - 0,0074i$ (оксид алюминия). Кривые $\bar{Q}(\alpha_{32})$, соответствующие различным распределениям $f(D)$, совпадают (с погрешностью не более 4 %) для значений $\alpha_{32} > 10$. Следовательно, для точных измерений

D_{32} необходим выбор длины волны излучения лазера таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\lambda < 0,1\pi D_{32}.$$

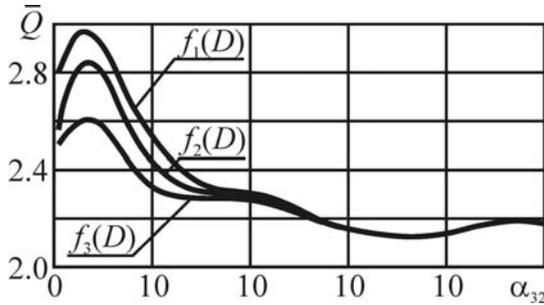


Рис. 10.5. Зависимость $\bar{Q}(\alpha_{32})$ для трех функций распределения частиц по размерам ($m = 1,8 - 0,0074i$)

При использовании гелий-неоновых и аргоновых лазеров возможна диагностика полидисперсных частиц окиси алюминия рассматриваемым методом при D_{32} не менее 1,5 мкм. Как видно из приведенных графиков (рис. 10.5), в диапазоне размеров частиц $D_{32} = 1 \div 15$ мкм величина усредненного фактора эффективности ослабления значительно отличается от своего асимптотического значения $\bar{Q} = 2$. Допущение $\bar{Q} = 2$, принятое

в некоторых работах, является грубым и приводит к большим погрешностям в определении D_{32} .

Отношение $\tau_{\lambda,i}$ для двух длин волн является однозначной функцией D_{32} :

$$\frac{\tau_{\lambda,2}}{\tau_{\lambda,1}} = \frac{\bar{Q}(\lambda_2)}{\bar{Q}(\lambda_1)} \equiv F_2(D_{32}). \quad (10.23)$$

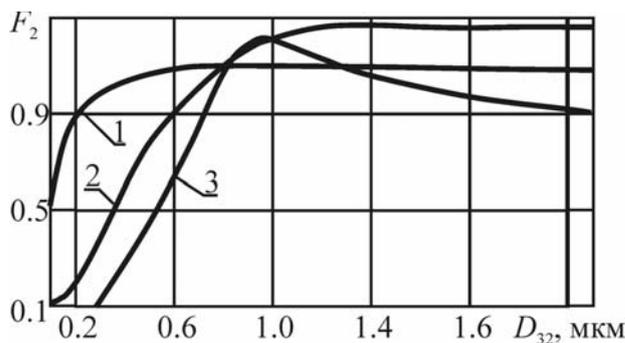


Рис. 10.6. Рабочий график для определения D_{32} частиц окиси алюминия по результатам измерений T_λ на двух длинах волн:

- 1 - $\lambda_1 = 0,63$ мкм, $\lambda_2 = 1,15$ мкм;
- 2 - $\lambda_1 = 0,63$ мкм, $\lambda_2 = 3,39$ мкм;
- 3 - $\lambda_1 = 0,365$ мкм, $\lambda_2 = 1,01$ мкм

Таким образом, по экспериментально измеренным $T_{\lambda,i}$ и рассчитанному графику $F_2(D_{32})$ (рис. 10.6) можно непосредственно найти D_{32} и концентрацию частиц в зоне измерений:

$$C_m = \frac{\tau_{\lambda,i} \rho_k D_{32}}{1,5 \cdot l \cdot \bar{Q}(\lambda_i D_{32})}.$$

В случае измерений с использованием одной длины волны зондирующего излучения по измеренному

значению τ_λ можно определить D_{32} , если известна концентрация частиц. При этом D_{32} определяется путем решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q} &= F_1(\lambda, D_{32}), \\ \bar{Q} &= \frac{\tau_\lambda \rho_k}{1,5 C_m l} D_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

Решение системы (10.24) удобно проводить графическим способом (рис. 10.7). На заранее построенном графике $F_1(\lambda, D_{32})$ проводится через начало координат прямая с угловым коэффициентом

$$k = \frac{\tau_\lambda \rho_k}{1,5 C_m l}.$$

Абсцисса точки пересечения дает искомую величину D_{32} . При измерениях с использованием одного лазера концентрацию частиц необходимо определить независимым способом. Можно использовать для этого экспериментально измеренную скорость частиц u :

$$C_m = \frac{4zM}{\pi l^2 u \rho_k},$$

где M – массовый секундный расход в потоке; z – массовая доля частиц в потоке; ρ_k – плотность материала частиц.

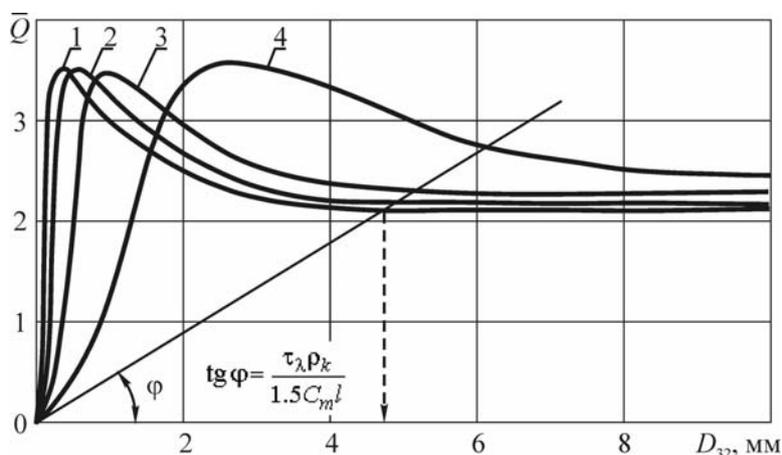


Рис. 10.7. Рабочий график для определения D_{32} частиц окиси алюминия по результатам измерений $T_{\lambda i}$ на одной длине волны:

1 – $\lambda = 0,48$ мкм; 2 – $\lambda = 0,63$ мкм; 3 – $\lambda = 1,15$ мкм; 4 – $\lambda = 3,39$ мкм

Кроме того, C_m можно найти расчетным путем:

$$C_m = \frac{\rho z}{1 - z},$$

где плотность газа ρ рассчитывается по таблицам газодинамических функций.

Рабочие графики, необходимые при практической реализации этого метода, приведены на рис. 10.8 для частиц окиси алюминия.

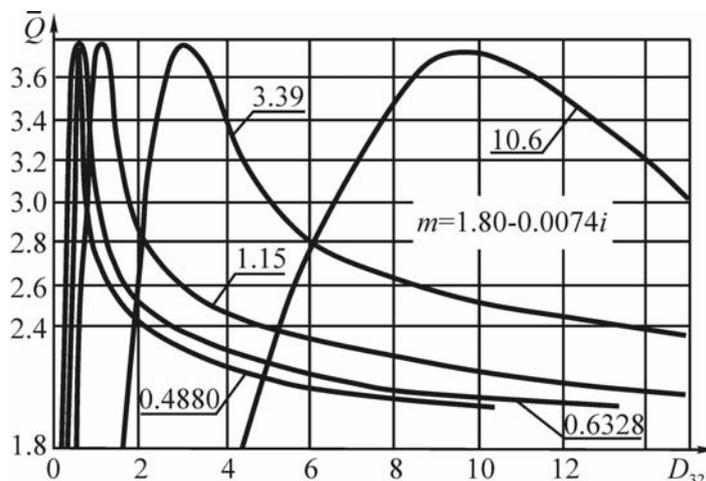


Рис. 10.8. Зависимость $\bar{Q}(D_{32})$ для частиц окиси алюминия (цифрами указаны значения длины волны зондирующего излучения λ , мкм)

В различных технических устройствах часто возникает необходимость определять дисперсность и концентрацию частиц сажи в потоке. В первую очередь, эта задача актуальна при исследовании технических пламен и течений продуктов сгорания углеводородных топлив. Использование измерения спектральной прозрачности для двух длин волн позволяет реализовать экспрессный метод диагностики сажевых частиц. Характеристики сажи в продуктах сгорания достаточно хорошо изучены путем анализа микрофотографий отобранных проб. Частицы сажи являются сильными поглотителями в оптическом диапазоне ($\kappa \sim 1$); модальный диаметр частиц имеет порядок $D_0 \sim 0,1$ мкм. Распределение частиц по размерам можно с достаточной достоверностью аппроксимировать функцией:

$$f(D) = \frac{4D^2}{\sqrt{\pi}D_0} \exp\left(-\frac{D^2}{D_0^2}\right).$$

Наличие априорной информации о дисперсности частиц позволяет использовать для нахождения $f(D)$ метод параметризации. Подставляя $f(D)$ в систему уравнений (10.22), получим

$$\frac{\tau_{\lambda,2}}{\tau_{\lambda,1}} = \frac{\int_0^{\infty} D^4 Q(\lambda_2) \exp(-D^2/D_0^2) dD}{\int_0^{\infty} D^4 Q(\lambda_1) \exp(-D^2/D_0^2) dD} = \Phi(D_0),$$

где $\Phi(D_0)$ – однозначная функция модального диаметра D_0 .

Полидисперсный показатель ослабления для данной функции распределения также однозначно зависит от D_0 :

$$K_\lambda = C_m \Psi(D_0) = C_m \frac{\int_0^\infty D^4 Q(\lambda_2) \exp(-D^2/D_0^2) dD}{\int_0^\infty D^4 Q(\lambda_1) \exp(-D^2/D_0^2) dD}.$$

Рассчитанные заранее графики $\Phi(D_0)$ и $\Psi(D_0)$ позволяют по измеренным значениям $\tau_{\lambda,2}, \tau_{\lambda,1}$ определить средний размер и концентрацию частиц.

На рис. 10.9 приведены графики факторов эффективности для сажевых частиц в диапазоне размеров, характерных для реальных пламен. Как видно из этих графиков, основной вклад в ослабление лазерного излучения вносит поглощение; влияние рассеяния незначительно. Графики функций $\Phi(D_0)$ и $\Psi(D_0)$ приведены на рис. 10.10. Эти графики являются рабочими при использовании лазерного метода измерения параметров сажевых частиц в потоке.

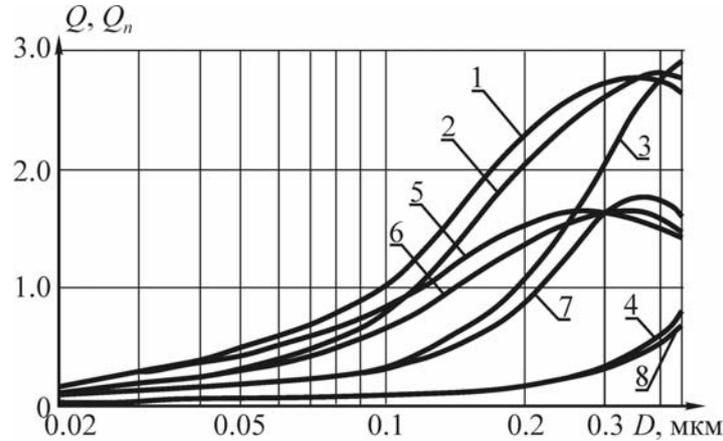


Рис. 10.9. Факторы эффективности $Q(1 \div 4)$, $Q_n(5 \div 8)$ для частиц сажи:
 1 – $\lambda = 0,49$ мкм; 2 – $\lambda = 0,63$ мкм; 3 – $\lambda = 1,15$ мкм; 4 – $\lambda = 3,39$ мкм;
 5 – $\lambda = 0,49$ мкм; 6 – $\lambda = 0,63$ мкм; 7 – $\lambda = 1,15$ мкм; 8 – $\lambda = 3,39$ мкм

Рассмотрим некоторые предельные случаи.

Малые частицы ($D \ll \lambda$)

Для таких частиц выражение для Q существенно упрощается:

$$Q(\alpha, m) = \frac{24n\alpha}{(2 + n^2 - \alpha^2)^2 + (2n\alpha)^2}.$$

Подставляя в эту формулу зависимости n и α от λ , получим

$$Q(\alpha, m) = 1,36(1 - 0,1\lambda) \frac{\pi D}{\lambda}.$$

Показатель ослабления при фиксированной λ является постоянной величиной

$$K_\lambda = C_m \frac{1,5\pi}{\lambda \rho_k} \cdot 1,36(1 - 0,1\lambda) = C_m \Psi_\lambda.$$

Значения Ψ_λ для длин волн излучения некоторых лазеров представлены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Функция Ψ_λ для частиц сажи ($\rho_k = 1,75 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$) при $D \ll \lambda$

| λ , мкм | 0,5 | 0,63 | 1,15 | 3,39 |
|--|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Ψ_λ , $\text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$ | $6,96 \cdot 10^4$ | $5,44 \cdot 10^4$ | $2,82 \cdot 10^4$ | $0,71 \cdot 10^4$ |

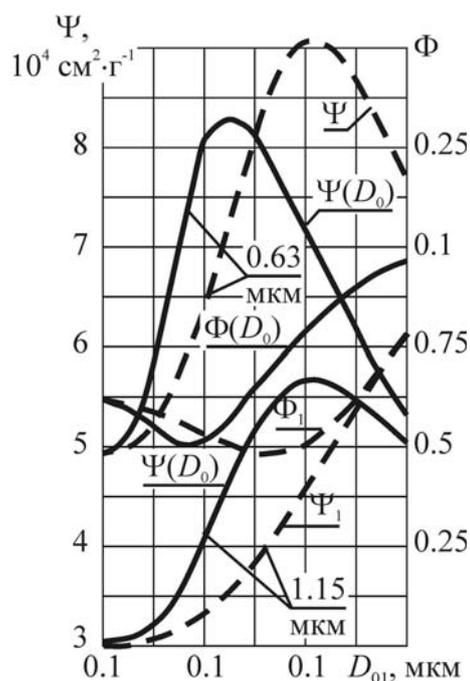


Рис. 10.10. Рабочие графики для определения D_0 и C_m частиц сажи (цифрами указаны значения длины волны зондирующего излучения λ , мкм)

Используя эти Ψ_λ , можно по измеренной τ_λ непосредственно определять концентрацию частиц. Размеры частиц при этом определять невозможно, так как τ_λ не зависит от $f(D)$. Критерием применимости приближения малых частиц является выполнение неравенства $\alpha < 0,05$.

Крупные частицы ($D \gg \lambda$)

В этом случае Q не зависит ни от λ , ни от m и стремится к предельному значению $Q = 2$.

Оптическая плотность при этом может быть представлена в виде

$$\tau_\lambda = \frac{3C_m l}{\rho_k D_{32}}.$$

В случае крупных частиц τ_λ не зависит от λ , и, следовательно, одновременное определение дисперсности и концентрации частиц не представляется возможным. При этом можно определить D_{32} по известной C_m и наоборот. Критерием применимости приближения крупных частиц является выполнение неравенства $\alpha > 30$, а также независимость τ_λ от длины волны излучения.

Монодисперсная среда ($D = \text{const}$)

В подавляющем большинстве работ по оптической диагностике сажевых частиц, в основном, использовалась простейшая модель – монодисперсная среда. Сравним ее оптические характеристики с параметрами реальной полидисперсной среды. Оптическая плотность в этом случае равна

$$\tau_\lambda = \frac{\pi D^2}{4} C_m l Q(\alpha, m).$$

Отношение $\tau_{\lambda,2}/\tau_{\lambda,1}$ может быть записано в виде

$$\frac{\tau_{\lambda,2}}{\tau_{\lambda,1}} = \frac{Q\left(\frac{\pi D}{\lambda_2}, m\right)}{Q\left(\frac{\pi D}{\lambda_1}, m\right)} = \Phi_1(D).$$

Показатель ослабления имеет вид

$$K_\lambda = C_m \frac{1,5}{\rho_k D} Q(\alpha, m) = C_m \Psi_1(D).$$

На рис. 10.10 приведены графики функций $\Phi_1(D)$, $\Psi_1(D)$, которые могут быть использованы для нахождения параметров среды, состоящей из частиц одинаковых размеров. Из анализа результатов, представленных на рис. 10.10, следует, что использование модели монодисперсной среды приводит к большим погрешностям в определении концентрации и дисперсности сажевых частиц.

Для проведения точных измерений необходимо использовать графики $\Phi(D_0)$, $\Psi(D_0)$, рассчитанные для реальной среды, состоящей из полидисперсных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 1

1. Буркина Р.С. Асимптотика задач теории горения / Р.С. Буркина, В.Н. Вилунов. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982. – 100 с.
2. Ковеня В.М. Некоторые проблемы и тенденции развития математического моделирования // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43. – № 3. – С. 3–14.
3. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
4. Липанов А.М. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков / А.М. Липанов, Ю.Ф. Кисаров, И.Г. Ключников. – Екатеринбург: Изд-во Президиума УрО РАН, 2001. – 162 с.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 2

1. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. – Л.: Наука, 1985. – 112 с.
2. Кассандрова О.Н. Обработка результатов наблюдений / О.Н. Кассандрова, В.В. Лебедев. – М.: Наука, 1970. – 104 с.
3. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1968. – 288 с.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 3

1. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. – Л.: Гидрометеоздат, 1982. – 255 с.
2. Кутателадзе С.С. Анализ подобия и физические модели. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1986. – 290 с.
3. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
4. Тирский Г.А. Анализ размерностей // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – Т. 7. – № 6. – С. 82–87.
5. Тирский Г.А. Подобие и физическое моделирование // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – Т.7. – № 8. – С. 122–127.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 4

1. Жиравок А.Н. Планирование эксперимента для построения математических моделей // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – Т.7. – № 9. – С. 121–127.

2. Финни Л. Введение в теорию планирования экспериментов. – М.: Наука, 1970. – 287 с.
3. Хартман К. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / К. Хартман, В. Лецкий, В. Шифер и др. – М.: Мир, 1977. – 557 с.
4. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. – М.: Мир, 1972. – 381 с.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 5

1. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
2. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – Л.: Физматгиз, 1962. – 352 с.
3. Райхмист Р.Б. Графики функций. – М.: Высшая школа, 1991. – 160 с.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 6

1. Артамонов В.М. Светолучевые осциллографы / В.М. Артамонов, Г.П. Лебедев, П.И. Хренков. – Л.: Энергоиздат, 1982. – 104 с.
2. Баженов Д.В. О понятии «динамические измерения» / Д.В. Баженов, В.В. Чернов // Измерительная техника. – 1975. – № 12. – С. 14–16.
3. Грановский В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 224 с.
4. Измерения в промышленности. Справочное издание. В 3-х кн. Кн. 1. Теоретические основы. – М.: Металлургия, 1990. – 492 с.
5. Широков К.П. Основные понятия теории динамических измерений / К.П. Широков, В.О. Арутюнов, В.А. Грановский // Измерительная техника. – 1975. – № 12. – С. 9–13.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 7

1. Драйпер Н. Прикладной регрессионный анализ / Н. Драйпер, Г. Смит. – М.: Статистика, 1973. – 392 с.
2. Лавренчик В.Н. Постановка физического эксперимента и статистическая обработка его результатов: Учебное пособие для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 272 с.
3. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 207 с.
4. Филонов Н.Г. Статистика: Учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского государственного педагогического университета, 2005. – 208 с.
5. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: ИЛ, 1956. – 664 с.

6. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973. – 957 с.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 8

1. Ватульян А.О. Математические модели и обратные задачи // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – № 11. – С. 143–148.
2. Ильинский Н.Б. Обратные краевые задачи и их приложение // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 4. – С. 105–110.
3. Черепашук А.М. Обратные задачи в астрофизике // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 12. – С. 84–91.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 9

1. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (Введение в теорию обратных задач теплообмена). – М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
2. Вилунов В.Н. Теория зажигания конденсированных веществ – Новосибирск: Наука, 1984. – 189 с.
3. Гришин А.М. Решение некоторых обратных задач механики реагирующих сред: Учебное пособие / А.М. Гришин, В.И. Зинченко, А.Я. Кузин и др. – Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 2006. – 418 с.
4. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – М.: Наука, 1987. – 502 с.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 10

1. Архипов В.А. Лазерные методы диагностики гетерогенных потоков: Учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1987. – 140 с.
2. Беляев С.П. Оптико-электронные методы изучения аэрозолей / С.П. Беляев, Н.К. Никифорова, В.В. Смирнов, Г.И. Щелков. – М.: Энергоиздат, 1981. – 232 с.
3. Власов В.А. Диагностика низкотемпературной плазмы высокочастотных разрядов и плазмы горения веществ / В.А. Власов, И.А. Тихомиров, В.Ф. Мышкин. – М.: Энергоатомиздат, 2002. – 300 с.
4. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. – М.: Мир, 1971. – 168 с.
5. Шифрин К.С. Обратные задачи теории рассеяния и распространения излучения / Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света. – Минск: Наука и техника, 1971. – С. 228–244.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Коэффициенты Стьюдента $t(\alpha, n)$

| n | α | | | | | | | |
|-----|----------|-----|-----|-----|------|------|------|-------|
| | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 0.95 | 0.98 | 0.99 | 0.999 |
| 2 | 1.38 | 2.0 | 3.1 | 6.3 | 12.7 | 31.8 | 63.7 | 636.6 |
| 3 | 1.06 | 1.3 | 1.9 | 2.9 | 4.3 | 7.0 | 9.9 | 31.6 |
| 4 | 0.98 | 1.3 | 1.6 | 2.4 | 3.2 | 4.5 | 5.8 | 12.9 |
| 5 | 0.94 | 1.2 | 1.5 | 2.1 | 2.8 | 3.7 | 4.6 | 8.7 |
| 6 | 0.92 | 1.2 | 1.5 | 2.0 | 2.6 | 3.4 | 4.0 | 6.9 |
| 7 | 0.90 | 1.1 | 1.4 | 1.9 | 2.4 | 3.1 | 3.7 | 6.0 |
| 8 | 0.90 | 1.1 | 1.4 | 1.9 | 2.4 | 3.0 | 3.5 | 5.4 |
| 9 | 0.89 | 1.1 | 1.4 | 1.9 | 2.3 | 2.9 | 3.4 | 5.0 |
| 10 | 0.88 | 1.1 | 1.4 | 1.8 | 2.3 | 2.8 | 3.3 | 4.8 |
| 11 | 0.88 | 1.1 | 1.4 | 1.8 | 2.2 | 2.8 | 3.2 | 4.6 |
| 12 | 0.87 | 1.1 | 1.4 | 1.8 | 2.2 | 2.7 | 3.1 | 4.5 |
| 13 | 0.87 | 1.1 | 1.4 | 1.8 | 2.2 | 2.7 | 3.1 | 4.3 |
| 14 | 0.87 | 1.1 | 1.4 | 1.8 | 2.2 | 2.7 | 3.0 | 4.2 |
| 15 | 0.87 | 1.1 | 1.3 | 1.8 | 2.1 | 2.6 | 3.0 | 4.1 |
| 16 | 0.87 | 1.1 | 1.3 | 1.8 | 2.1 | 2.6 | 2.9 | 4.0 |
| 17 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.6 | 2.9 | 4.0 |
| 18 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.6 | 2.9 | 4.0 |
| 19 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.6 | 2.9 | 3.9 |
| 20 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.5 | 2.9 | 3.9 |
| 21 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.5 | 2.8 | 3.8 |
| 22 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.5 | 2.8 | 3.8 |
| 23 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.5 | 2.8 | 3.8 |
| 24 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.5 | 2.8 | 3.8 |
| 25 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.5 | 2.8 | 3.7 |
| 26 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.5 | 2.8 | 3.7 |
| 27 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.5 | 2.8 | 3.7 |
| 28 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.5 | 2.8 | 3.7 |
| 29 | 0.86 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.0 | 2.5 | 2.8 | 3.7 |
| 30 | 0.85 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.0 | 2.5 | 2.8 | 3.7 |
| 40 | 0.85 | 1.1 | 1.3 | 1.7 | 2.0 | 2.4 | 2.7 | 3.6 |
| 60 | 0.85 | 1.0 | 1.3 | 1.7 | 2.0 | 2.4 | 2.7 | 3.5 |
| 120 | 0.84 | 1.0 | 1.3 | 1.7 | 2.0 | 2.4 | 2.6 | 3.4 |

Приложение 2

**Формулы расчета абсолютной Δz и относительной δz погрешностей косвенных измерений для некоторых функций
(a, b – результаты прямых измерений;
 A, B – численные константы;
 \bar{a}, \bar{b} – средние арифметические значения результатов прямых измерений)**

| № п/п | Вид функции $z = f(a)$ | Δz | $\delta z = \frac{\Delta z}{z}$ |
|-------|--------------------------------|---|---|
| 1 | Aa | $A\Delta a$ | $\frac{\Delta a}{\bar{a}}$ |
| 2 | a^A | $A\bar{a}^{(A-1)}\Delta a$ | $A\frac{\Delta a}{\bar{a}}$ |
| 3 | $\frac{a}{1+a}$ | $\frac{\Delta a}{(1+\bar{a})^2}$ | $\frac{\Delta a}{\bar{a}(1+\bar{a})}$ |
| 4 | $\frac{a}{1-a}$ | $\frac{\Delta a}{(1-\bar{a})^2}$ | $\frac{\Delta a}{\bar{a}(1-\bar{a})}$ |
| 5 | $\exp\left(\frac{a}{A}\right)$ | $\frac{\Delta a}{A} \exp\left(\frac{\bar{a}}{A}\right)$ | $\frac{\Delta a}{A}$ |
| 6 | $\ln a$ | $\frac{\Delta a}{\bar{a}}$ | $\frac{\Delta a}{\bar{a} \ln \bar{a}}$ |
| 7 | $\sin\left(\frac{a}{A}\right)$ | $\frac{\Delta a}{A} \cos\left(\frac{\bar{a}}{A}\right)$ | $\frac{\Delta a}{A} \operatorname{ctg}\left(\frac{\bar{a}}{A}\right)$ |

| № п/п | Вид функции $z = f(a, b)$ | Δz | $\delta z = \frac{\Delta z}{z}$ |
|-------|------------------------------|---|--|
| 1 | $Aa + Bb$ | $\sqrt{A^2\Delta a^2 + B^2\Delta b^2}$ | $\frac{\sqrt{A^2\Delta a^2 + B^2\Delta b^2}}{A\bar{a} + B\bar{b}}$ |
| 2 | $Aa - Bb$ | $\sqrt{A^2\Delta a^2 + B^2\Delta b^2}$ | $\frac{\sqrt{A^2\Delta a^2 + B^2\Delta b^2}}{A\bar{a} - B\bar{b}}$ |
| 3 | ab | $\sqrt{\bar{b}^2\Delta a^2 + \bar{a}^2\Delta b^2}$ | $\sqrt{\frac{\Delta a^2}{\bar{a}^2} + \frac{\Delta b^2}{\bar{b}^2}}$ |
| 4 | $\frac{a}{b}$ | $\sqrt{\frac{\Delta a^2}{\bar{b}^2} + \frac{\bar{a}^2\Delta b^2}{\bar{b}^4}}$ | $\sqrt{\frac{\Delta a^2}{\bar{a}^2} + \frac{\Delta b^2}{\bar{b}^2}}$ |

Приложение 3

**Множители для образования десятичных кратных
и дольных единиц**

| Наименование | Множитель | Обозначение | |
|--------------|------------|-------------|---------------|
| | | русское | международное |
| экса | 10^{18} | Э | E |
| пета | 10^{15} | П | P |
| тера | 10^{12} | Т | T |
| гига | 10^9 | Г | G |
| мега | 10^6 | М | M |
| кило | 10^3 | к | k |
| гекто | 10^2 | г | h |
| дека | 10 | да | da |
| деци | 10^{-1} | д | d |
| санти | 10^{-2} | с | c |
| милли | 10^{-3} | м | m |
| микро | 10^{-6} | мк | μ |
| нано | 10^{-9} | н | n |
| пико | 10^{-12} | п | p |
| фемто | 10^{-15} | ф | F |
| атто | 10^{-18} | а | A |

Приложение 4

Таблица для выявления промахов

| <i>n</i> | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---------------|
| v_{\min} | 1.41 | 1.65 | 1.79 | 1.89 | 1.97 | 2.04 | 2.10 | 2.15 | 2.19 | 2.23 | 2.26 | $\beta = 0.1$ |
| v_{\max} | 1.41 | 1.72 | 1.96 | 2.13 | 2.27 | 2.37 | 2.46 | 2.54 | 2.61 | 2.66 | 2.71 | |

| <i>n</i> | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---------------|
| v_{\min} | 2.30 | 2.33 | 2.35 | 2.38 | 2.40 | 2.43 | 2.45 | 2.47 | 2.49 | 2.50 | 2.52 | $\beta = 0.1$ |
| v_{\max} | 2.76 | 2.80 | 2.84 | 2.87 | 2.90 | 2.93 | 2.96 | 2.98 | 3.01 | 3.03 | 3.05 | |

β – вероятность случайного появления выскакивающих значений в ряду n измерений. Например, для $n = 15$ с вероятностью $\beta = 0,01$ (1 %) может появиться значение x_k с $v_{\max} = 2,80$. Вероятность появления x_i с $v > 2,80$ менее 1 %. Следовательно, такие значения x_i можно считать промахами и отбраковывать.

**РАЗМЕРНОСТИ ОСНОВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ И
ТЕПЛОДИФфуЗИОННЫХ ВЕЛИЧИН В СИСТЕМЕ СИ**

Основные единицы СИ

| Величина | Наименование | Обозначение | |
|-------------------------------|--------------|-------------|---------|
| | | русское | intern. |
| Длина | Метр | м | m |
| Масса | Килограмм | кг | kg |
| Время | Секунда | с | s |
| Сила электрического тока | Ампер | А | A |
| Термодинамическая температура | Кельвин | К | K |
| Количество вещества | Моль | моль | mol |
| Сила света | Кандела | кд | cd |

Механические величины

| Величина | Обозначение | | Размерность |
|--------------------------------------|------------------|------------------|---|
| | русское | intern. | |
| Скорость | м/с | m/s | $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ |
| Ускорение | м/с ² | m/s ² | $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ |
| Энергия и работа | Дж | J | $\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ |
| Мощность | Вт | W | $\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$ |
| Сила | Н | N | $\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ |
| Давление | Па | Pa | $\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ |
| Плотность | ρ | ρ | $\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$ |
| Коэффициент динамической вязкости | μ | μ | $\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ |
| Коэффициент кинематической вязкости | ν | ν | $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ |
| Коэффициент поверхностного натяжения | σ | σ | $\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$ |

Теплодиффузионные величины

| Величина | Обозначение | | Размерность |
|------------------------------------|-------------------|------------------|--|
| | русское | intern. | |
| Количество теплоты | Дж | J | $\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ |
| Тепловой поток | Вт | W | $\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$ |
| Плотность теплового потока | Вт/м ² | W/m ² | $\text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$ |
| Удельная теплоемкость | c | c | $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$ |
| Коэффициент теплопроводности | λ | λ | $\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}$ |
| Коэффициент теплоотдачи | α | α | $\text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}$ |
| Коэффициент температуропроводности | α | α | $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ |
| Коэффициент диффузии | D | D | $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ |
| Коэффициент массоотдачи | α_D | α_D | $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ |
| Газовая постоянная | R | R | $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$ |

Основные критерии подобия

| | | | |
|-----|--------------------|--|---|
| Ar | Число Архимеда | $\frac{g \cdot l_0^3}{\nu^2} \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2}$ | Соотношение подъемной (архимедовой) силы, обусловленной разницей плотностей ρ_1, ρ_2 фаз, и силы сопротивления, обусловленной молекулярной вязкостью (g – ускорение свободного падения; l_0 – характерный размер; ν – коэффициент кинематической вязкости) |
| Arr | Критерий Аррениуса | $\frac{E}{R \cdot T}$ | Соотношение энергии активации E и температуры T (R – универсальная газовая постоянная). Характеризует чувствительность скорости химической реакции к изменению температуры |
| Bi | Число Био | $\frac{\alpha \cdot l_0}{\lambda_{ст}}$ | Является мерой отношения внутреннего термического сопротивления ($l_0/\lambda_{ст}$) к внешнему термическому сопротивлению ($1/\alpha$) теплоотдаче (α – коэффициент теплоотдачи; $\lambda_{ст}$ – коэффициент теплопроводности твердого тела) |
| Bo | Число Бонда | $\frac{\rho_l \cdot g \cdot D^2}{\sigma}$ | Соотношение между силами инерции и силами поверхностного натяжения (ρ_l – плотность жидкости; g – ускорение массовых сил, в частности, силы тяжести; D – диаметр капли; σ – коэффициент поверхностного натяжения) |

| | | | |
|-----------------|--------------------------|-----------------------------------|--|
| Da ₁ | Число Дамкелера (первое) | $\frac{k \cdot l_0}{u}$ | Соотношение между скоростью протекания химической реакции и гидродинамической скоростью потока u (k – константа скорости реакции) |
| Da ₂ | Число Дамкелера (второе) | $\frac{Q}{c_p \cdot T}$ | Соотношение между тепловым эффектом химической реакции Q и энтальпией компонентов |
| Eu | Число Эйлера | $\frac{\Delta p}{\rho \cdot u^2}$ | Соотношение сил давления и инерции в потоке (Δp – разность давлений в двух точках потока; u – скорость потока; ρ – плотность) |
| Fo | Число Фурье | $\frac{\alpha \cdot t_0}{l_0^2}$ | Соотношение между темпом изменения условий в окружающей среде и темпом изменения температурного поля внутри тела (t_0 – характерное время; α – коэффициент температуропроводности). Характеризует скорость изменения температурных полей и является критерием тепловой гомохронности |
| Fr | Число Фруда | $\frac{u^2}{g \cdot l_0}$ | Соотношение сил тяжести и сил инерции. Характеризует подобие процессов, идущих при действии силы тяжести |
| Gr | Критерий Галилея | $\frac{g \cdot l_0^3}{\nu^2}$ | Соотношение массовых сил (в частности, силы тяжести) и сил вязкости (молекулярного трения) в потоке |

| | | | |
|----|-----------------------|--|--|
| Gr | Число Грасгофа | $\frac{g \cdot l_0^3}{\nu^2} \cdot \beta \cdot \Delta T$ | Характеризует величину подъемной силы свободной конвекции по отношению к вязким силам (β – коэффициент объёмного расширения; ΔT – повышение температуры данной частицы среды по сравнению с нагретыми частицами). Является критерием свободной тепловой конвекции |
| Kn | Число Кнудсена | $\frac{l}{l_0}$ | Отношение длины свободного пробега молекул l к характерному размеру l_0 в поле течения. Характеризует влияние разреженности газа на характер течения |
| Le | Число Льюиса–Семенова | $\frac{D}{\alpha}$ | Соотношение диффузионных и тепловых молекулярных переносов (D – коэффициент диффузии) |
| M | Число Маха | $\frac{u}{c}$ | Отношение скорости потока u к скорости звука c в одинаковых точках потока. Характеризует влияние сжимаемости жидкости на характер ее движения |
| Ne | Критерий Ньютона | $\frac{F \cdot l_0}{m \cdot u^2}$ | Критерий механического подобия (F – сила, действующая на тело массой m) |
| Nu | Число Нуссельта | $\frac{\alpha \cdot l_0}{\lambda}$ | Соотношение между интенсивностью конвективной теплоотдачи и теплопроводностью в пограничном слое потока |
| Pe | Число Пекле | $\frac{u \cdot l_0}{\alpha}$ | Соотношение между конвективным и молекулярным переносом теплоты в потоке |

| | | | |
|-----|------------------|---|--|
| Pr | Число Прандтля | $\frac{\mu \cdot c_p}{\lambda}$ | Безразмерная характеристика теплофизических свойств жидкости или газа (μ – коэффициент динамической вязкости; c_p – удельная изобарическая теплоемкость) |
| Re | Число Рейнольдса | $\frac{\rho \cdot u \cdot l_0}{\mu}$ | Соотношение сил инерции и вязкого трения в потоке |
| Sc | Число Шмидта | $\frac{\mu}{\rho \cdot D}$ | Диффузионное число Прандтля. Характеризует отношение коэффициентов кинематической вязкости и диффузии (D – коэффициент диффузии) |
| Sh | Число Шервуда | $\frac{\alpha_D \cdot l_0}{D}$ | Диффузионное число Нуссельта. Характеризует соотношение между интенсивностями конвективного массобмена и молекулярной диффузии в пограничном слое потока |
| St | Число Стентона | $\frac{\alpha}{c_p \cdot \rho \cdot u}$ | Соотношение между интенсивностью теплоотдачи и удельным теплосодержанием (энтальпией) потока |
| Str | Число Струхаля | $\frac{u \cdot t_0}{l_0}$ | Учитывает влияние нестационарности движения на скорость жидкости. Является критерием гомохронности |
| We | Число Вебера | $\frac{\rho \cdot u^2 \cdot D}{\sigma}$ | Соотношение между силами инерции и силами поверхностного натяжения (ρ – плотность обтекающего потока; D – диаметр капли). Характеризует процессы, при которых существенное значение имеют силы поверхностного натяжения (капли, пленки, капилляры) |

Критические значения критерия Фишера (F-критерия)

| f_1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8. | 10 | 20 |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| f_2 | Уровень значимости $\beta = 0,05$ | | | | | | | | |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.04 | 5.96 | 5.80 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.82 | 4.74 | 4.56 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.15 | 4.06 | 3.87 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.73 | 3.63 | 3.44 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.44 | 3.34 | 3.15 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.23 | 3.13 | 2.93 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.07 | 2.97 | 2.77 |
| Уровень значимости $\beta = 0,01$ | | | | | | | | | |
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.17 | 2.98 | 2.55 |
| 40 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 2.99 | 2.80 | 2.37 |
| 60 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.82 | 2.63 | 2.20 |
| 120 | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 3.48 | 3.17 | 2.96 | 2.66 | 2.47 | 2.03 |

Учебное издание

АРХИПОВ Владимир Афанасьевич
БЕРЕЗИКОВ Алексей Петрович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебное пособие

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Р.С. Буркина

Редактор

Н.В. Ермакова

Верстка

Д.В. Сотникова

Дизайн обложки

О.А. Дмитриев

О.Ю. Аршинова

Подписано к печати 25.12.2008. Формат 60х84/8. Бумага «Снегурочка».

Печать XEROX. Усл.печ.л. 11,98. Уч.-изд.л. 10,84.

Заказ № 822. Тираж 200 экз.



Томский политехнический университет
Система менеджмента качества

Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.