ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.К. Жуков

НОРМИРОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ НА СТАДИЯХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ИЗГОТОВЛЕНИЯ

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Издательство
Томского политехнического университета
2008

УДК 681.2(075.8)
ББК 34.9я73
Ж86

Жуков В.К.

Ж86 Нормирование инструментальной погрешности средств измерения на стадиях проектирования и изготовления: учебное пособие / В.К. Жуков. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 132 с.

ISBN 5-98298-308-X

В пособии рассматриваются вопросы расчёта инструментальной погрешности средств измерения на стадии их проектирования и экспериментального нормирования инструментальной погрешности в соответствии с ГОСТ 8.009–84. Излагается порядок экспериментального определения класса точности средств измерения, порядок обработки и представления результатов однократных и многократных прямых, косвенных, совместных и совокупных измерений.

Разработано в рамках реализации Инновационной образовательной программы ТПУ по направлению «Неразрушающий контроль» и предназначено для бакалавров и магистров, обучающихся по направлению «Приборостроение».

УДК 681.2(075.8)
ББК 34.9я73

Рецензент

Доктор технических наук, профессор ТГАСУ

О.И. Недавний

ISBN 5-98298-308-X

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Элементарные события и вероятность

Любой проводимый опыт (эксперимент) имеет результат. В теории вероятностей результат опыта называют *исходом опыта*. При бросании монеты возможны два исхода: появление герба – один исход, появление цифры другой. При бросании игральной кости возможны шесть исходов, а именно, появление цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6. При вынимании шаров из урны, в которой находится два черных и три белых шара, возможны пять исходов: два исхода, когда вынимаются черные шары, и три исхода, когда – белые.

Исход или группа исходов, удовлетворяющих определённым требованиям, называются *событием*. Примеры событий: появление при бросании монеты, только герба; появление двух гербов при двукратном бросании монеты; появления туза при вынимании карты из колоды карт; попадание в цель с первого выстрела. Событие при проведении опыта может произойти, а может и не произойти. Если считаем событием появление герба при бросании монеты, а появилась цифра, то событие не произошло. Если считаем событием появление четного числа 2,4,6 при бросании игральной кости, а выпало одно из нечётных чисел 1,3,5, то событие не произошло.

Исходы опытов, соответствующие установленному событию, называются *благоприятными исходами*.

Рассматривая приведённые выше примеры событий, можно утверждать, что одни из них более возможны, а другие менее возможны. Появление герба при одном бросании монеты более возможно, чем появление двух гербов при двух последовательных бросаниях монеты.

Чтобы количественно сравнивать между собой события по степени их возможности, нужно с каждым событием связать некоторое число, которое тем больше, чем более возможно событие. Такое число называют вероятностью события. *Вероятность события* есть численная мера степени объективной возможности этого события.

Событие, которое в результате опыта обязательно произойдёт, называют *достоверным событием*. Например, такое событие, как появление герба или цифры при бросании монеты, является достоверным событием. Вероятность достоверного события принимается равной единице, т.е. вероятность достоверного события является единицей измерения вероятности. Событие, которое в результате опыта не может произойти, называют *недостоверным событием*. При бросании монеты невозможно одновременное появление герба и цифры. Такое событие недостоверно, вероятность его равна нулю. Таким образом, диапазон изменения вероятности любых событий лежит в пределах от нуля до единицы.

Существует класс опытов, для которых исходы равновероятны. При бросании игральной кости в форме правильного куба появление каждой из шести цифр равновероятно. При многократном бросании игральной кости каждая цифра будет появляться в одной шестой части опытов и это утверждение будет тем более правильным, чем больше опытов (бросаний) будет произведено. Принимая вероятность достоверного события, каковым является появление одной из цифр 1,2,3,4,5,6, равным единице, естественно приписать вероятности появления одной из шести цифр число 1/6.

Для всякого опыта, в котором возможные исходы равновероятны, можно применить указанный приём подсчёта вероятности, который называется непосредственным подсчётом вероятности

$$P(A) = \frac{1}{n}, \qquad 1.1.1$$

где $P(A)-$ вероятность исхода A; n – число возможных равновероятных исходов.

Несколько возможных событий образуют *полную группу событий*, если в результате опыта обязательно должно произойти хотя бы одно из них. Примеры событий, образующих полную группу: появление герба или появление цифры при бросании монеты; попадание или промах при выстреле в цель; появление цифр 1,2,3,4,5,6 при бросании игральной кости; появление четного или появление нечётного числа при бросании игральной кости.

Несколько событий в данном опыте называются *несовместными*, если они не могут появиться вместе. Так, одновременное появление герба и цифры в одном опыте являются несовместными событиями. Также несовместными событиями являются попадание в цель и промах при одном выстреле в цель.

Несколько событий в данном опыте называются *равновероятными*, если есть веские основания считать, что ни одно из этих событий является объективно более возможным, чем другое. Примеры равновозможных событий: появление герба и появление цифры при бросании монеты равновозможные события; появление четного и нечетного числа при бросании игральной кости равновозможные события.

Вероятность события A в данном опыте вычисляется как отношение благоприятного числа исходов опыта к общему числу исходов

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad 1.1.2$$

где $P(A)$ – вероятность события A; m – благоприятное число исходов опыта; n – общее число исходов опыта.
Так как m заключено между 0 и n, то

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad 1.1.3$$

Выражение 1.1.2 называется классической формулой для вычисления вероятности события.

Пример использования формулы. В урне находятся два белых и три черных шара. Из урны вынимается один шар. Какова вероятность вынуть при этом белый шар. В этом опыте число возможных исходов пять (по числу шаров), число благоприятных исходов два (по числу белых шаров). Вероятность события, вынуть белый шар, равна 2/5.

Формула 1.1.2 применима только для определения вероятности события в опытах с равновероятными исходами, поэтому имеет ограниченное применение. Например, если у игральной кости сделать разные по площади грани, то появления чисел 1,2,3,4,5,6 при бросании кости будут не равновероятными исходами. В этом случае нельзя утверждать, что при бросании кости вероятность появления какой-либо цифры равна 1/6.

Для определения вероятности события A в опыте с разновероятными исходами пользуются понятием частота события. Частотой события A в данной серии одинаковых опытов, например при бросании игральной кости, называется отношение числа опытов, в которых появилось событие A, к общему числу произведённых опытов. Частоту события называют его статистической вероятностью в отличие от математической вероятности, определяемой по формуле 1.1.2. Статистическая вероятность (частота события) определяется формулой

$$P_c(A) = \frac{m}{n}, \qquad 1.1.4$$

где m – число появлений события A в серии одинаковых опытов, n – число опытов в серии.

Чем больше число опытов, тем точнее определяется вероятность появления события в отдельно взятом опыте.

Одним из важнейших понятий в теории вероятностей является понятие случайная величина. Случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причём до завершения опыта неизвестно какое. Примером случайной величины может служить погрешность измерения.

Случайные величины делят на непрерывные и дискретные. *Дискретная случайная величина* в заданном диапазоне может принимать конечное число значений. Например, число попаданий при 10 выстрелах в цель является дискретной случайной величиной с возможными значениями от нуля до десяти. *Непрерывная случайная величина* в заданном диапазоне значений может принимать любое значение и число таких значений бесконечно. Границы непрерывной случайной величины могут быть точно определены, например координаты пасущейся на огороженном участке коровы, а чаще всего являются неопределёнными, расплывчатыми, например погрешность измерения.

1.2. Непрерывные случайные величины

Имеем некоторую непрерывную случайную величину x, которая в заданном интервале (в пределе от $-\infty$ до ∞) может принимать бесконечное число значений.

Интегральной функцией распределения случайной величины x называют функцию $F(x)$, значение которой для каждого x является вероятностью события, заключающегося в том, что значение случайной величины x_i в i-ом опыте меньше x

$$F(x) = p\{x_i \prec x\} = p\{-\infty \prec x_i \prec x\}, \qquad 1.2.1$$

где $p\{x_i \prec x\}$ – вероятность события, заключающегося в том, что в i-ом опыте x_i меньше x, $p\{-\infty \prec x_i \prec x\}$ – вероятность того, что x_i лежит в интервале от $-\infty$ до x.

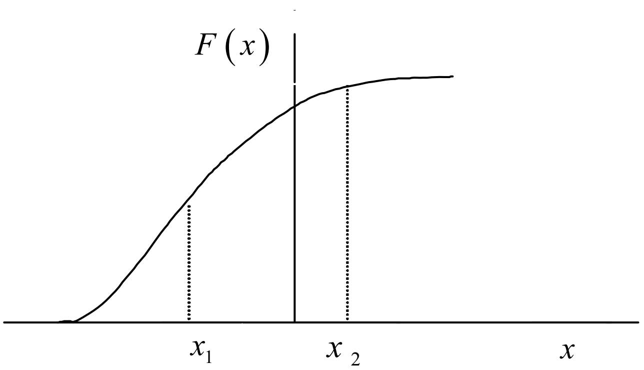


Рис. 1.2.1. Интегральная функция распределения случайной величины x

Значение случайной величины в *i*-ом опыте, обозначенное как x_i, может быть любым в интервале от $-\infty$ до *x*, поэтому *x* является непрерывной случайной величиной.

Свойства интегральной функции распределения непрерывной случайной величины:

$$1.\ F(x) \geq 0,$$

$$2.\ F(x_2) \geq F(x_1),\ \text{если}\ x_2 \succ x_1,$$

$$3.\ F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1. \qquad 1.2.2$$

Графически интегральная функция распределения случайной величины представлена на рис. 1.2.1

Вероятность нахождения x_i в интервале $x_1 \div x_2$ равна

$$p\{x \prec x_i \prec x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \qquad 1.2.3$$

Другой характеристикой непрерывной случайной величины является дифференциальная функция распределения, называемая так же, как *плотность распределения вероятностей*

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \qquad 1.2.4$$

Эта функция неотрицательна и подчиняется условию нормирования в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1. \qquad 1.2.5$$

Интеграл 1.2.5 показывает, что площадь, ограниченная линией $p(x)$ и осью *x*, равна единице.

Вероятность того, что x_i лежит в интервале $x_1 \div x_2$, равна

$$p\{x_1 \prec x_i \prec x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)d(x), \qquad 1.2.6$$

т.е. равна заштрихованной на рис 1.2.2 площади.

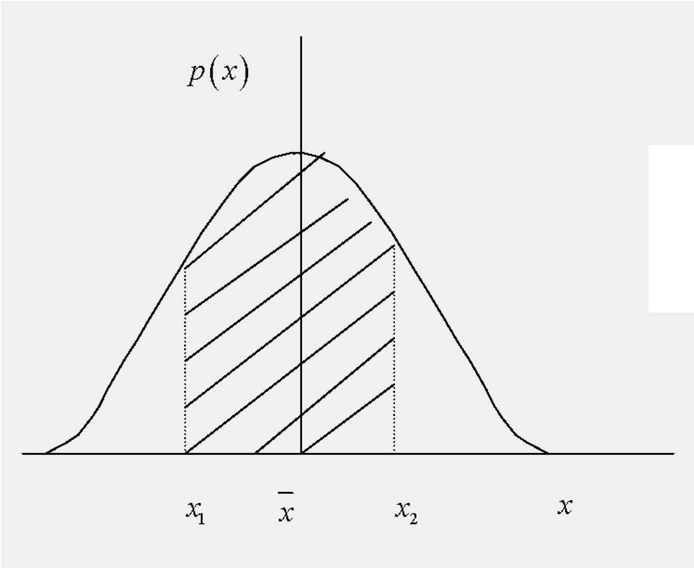


Рис. 1.2.2. Распределение плотности вероятностей случайной величины x

Координата центра распределения называется *математическим ожиданием* или наиболее вероятным значением случайной величины:

$$\vec{x} = m_x = M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx. \qquad 1.2.7$$

Рассеивание случайной величины относительно её математического ожидания называется *дисперсией* и определяется по формуле

$$D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \vec{x})^2 \cdot p(x) \cdot dx. \qquad 1.2.8$$

При $\vec{x} = 0$ имеем

$$D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) \cdot dx. \qquad 1.2.9$$

В теории погрешностей измерения широко используется понятие *среднее квадратическое отклонение* случайной величины от центра распределения

$$\sigma = \sqrt{D[x]}. \qquad 1.2.10$$

Если x величина размерная (ампер, килограмм, секунда), то σ будет иметь ту же размерность, а дисперсия – размерность в квадрате.

1.3. Дискретные случайные величины

Непрерывная случайная величина в результате проведения операции квантования может превратиться в дискретную случайную величину. Например, погрешность измерения является непрерывной случайной величиной, но если провести *n* повторных измерений и получить *n* отсчётов, то эти отсчёты уже представят собой дискретную случайную величину

$$x = \{x_1 \ldots x_i \ldots x_n\}, \qquad 1.3.1$$

где x – множество результатов измерений; $x_1 \ldots x_2$ – элементы множества.

Математическое ожидание случайной величины, а в случае дискретных случайных величин это среднее арифметическое значение, равно

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i \,. \qquad 1.3.2$$

Дисперсия дискретной случайной величины равна:

$$D[x] = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \,. \qquad 1.3.3$$

Среднее квадратическое отклонение (СКО) дискретной случайной величины от среднего арифметического значения определяется по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \,. \qquad 1.3.4$$

Закон распределения плотности вероятности дискретной случайной величины определяется по *гистограмме*.

Имеем множество дискретных значений случайной величины

$$x = \{x_1 \ldots x_i \ldots x_n\}, \qquad 1.3.5$$

где $x_1 \ldots x_n$ – элементы множества.

В множестве 1.3.5 есть минимальное значение случайной величины $x_{\min}$ и есть максимальное $x_{\max}$ Разделим интервал $x_{\max} - x_{\min}$ на *n* участков

$$n = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta x} \,. \qquad 1.3.6$$

Число попаданий случайной величины *x* в *j*-й участок обозначим $m_j(x)$. Это число означает множество дискретных значений *x,* удовлетворяющих условию быть больше значения $j \cdot \Delta x$ и меньше значения $(j+1) \cdot \Delta x$.

$$m_j(x) = \{x : j \cdot \Delta x \prec x \prec (j+1) \cdot \Delta x\}. \qquad 1.3.7$$

Будем считать попадание дискретной случайной величины в интервал $(j+1)\cdot\Delta x \div j\cdot\Delta x$ событием. Частота этого события равна

$$p_j(x)=\frac{m_j(x)}{n}, \qquad 1.3.8$$

в соответствии с 1.1.4 будет представлять вероятность попадания случайной величины в i-м опыте в рассматриваемый интервал.

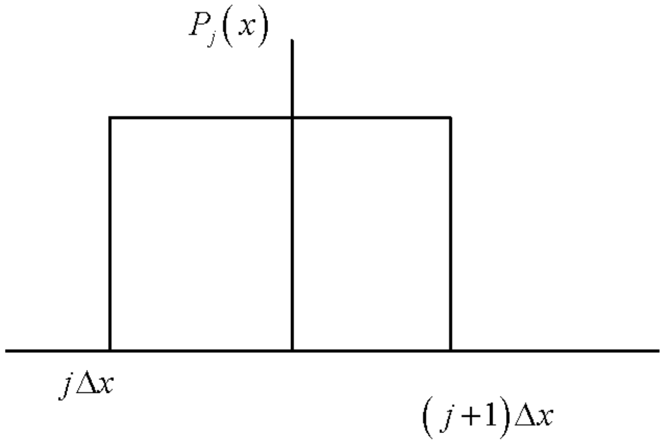
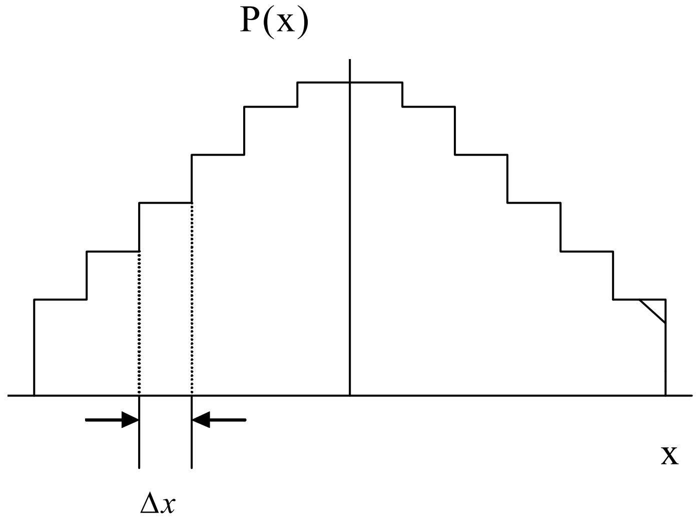


Рис. 1.3.1. Частота попадания случайной величины x в j-й участок возможных значений

Если определить частоту попадания x во все n-участков и отобразить на графике, то получится фигура, называемая гистограммой.

Рис. 1.3.2. Гистограмма для экспериментального определения закона распределения случайной величины x



При увеличении числа опытов и числа интервалов гистограмма стремится к графическому изображению плотности вероятностей. Однако, если при ограниченном числе опытов сделать большое число интервалов, то это может привести к появлению пустых интервалов, в которые не попадает ни один исход опыта, и в результате гистограмма будет иметь изрезанный вид с многими провалами и всплесками. При малом числе интервалов гистограмма будет отличаться от действительной кривой распределения вследствие слишком крупной ступенчатости.

1.4. Законы распределения случайных величин

В теории погрешностей измерения наиболее используемыми являются нормальный закон распределения плотности вероятностей, распределение Стьюдента и равномерный закон распределения.

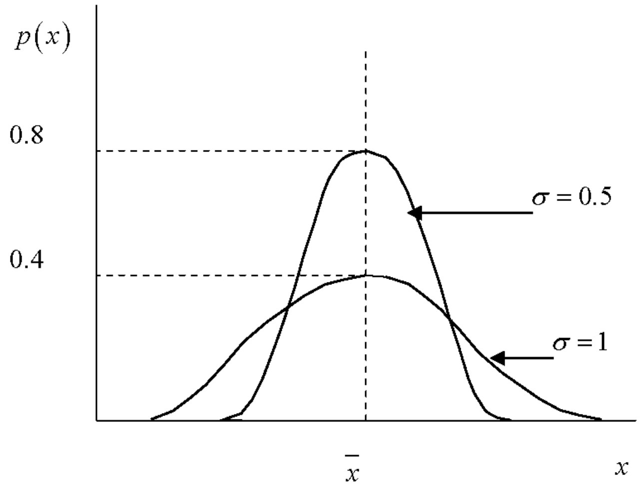
Нормальный закон распределения плотности вероятностей, описывается выражением

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} \right], \qquad 1.4.1$$

где $p(x)$ – плотность вероятностей случайной величины x; σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины x от центра распределения; $\bar{x}$ – математическое ожидание непрерывной случайной величины или среднее арифметическое значение дискретной случайной величины; x – значение случайной величины, вероятность появления которой определяется.

Значение математического ожидания $\bar{x}$ определяется по формуле (1.2.7) для непрерывной случайной величины и по формуле (1.3.2) для дискретной случайной величины. Среднеквадратические отклонения находятся соответственно по формуле (1.2.10) для непрерывной случайной величины и по формуле (1.3.4) – для дискретной случайной величины.

Рис. 1.4.1. Графическое представление нормального закона распределения плотностей вероятности случайной величины x



На рис. 1.4.1 показана форма нормального закона распределения плотности вероятностей случайной величины для двух значений σ.

Наибольшую вероятность $p(x)_{\max}$ имеет значение случайной величины $x = \vec{x}$. Подставив $x = \bar{x}$ в формулу (1.4.1), получим:

$$p(x)_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \qquad 1.4.2$$

Законы распределения Стьюдента описывают плотность распределения вероятностей дискретной случайной величины при ограниченном числе *n* экспериментально полученных значений случайной величины. Распределение Стьюдента используют обычно при $2 \prec n \prec 20$. При $n \succ 20$ распределение Стьюдента стремится к нормальному закону распределения плотности вероятностей.

Распределение Стьюдента отличается от нормального закона распределения тем, что учитывает число *n* значений случайной величины и задаётся функцией относительно аргумента *t*

$$t = \frac{x - \vec{x}}{\sigma}. \qquad 1.4.3$$

Для расчёта аргумента *t* имеется аналитическое выражение и таблицы.

Равномерный закон распределения плотностей вероятности описывает распределение случайной величины при равновероятных её значениях в интервале от $x_{\min}$ до $x_{\max}$. Графически равномерный закон распределения плотности вероятности случайной величины представлен на рис. 1.4.2. Таким законом, в частности, описывается погрешность от дискретности у цифровых измерительных приборов.

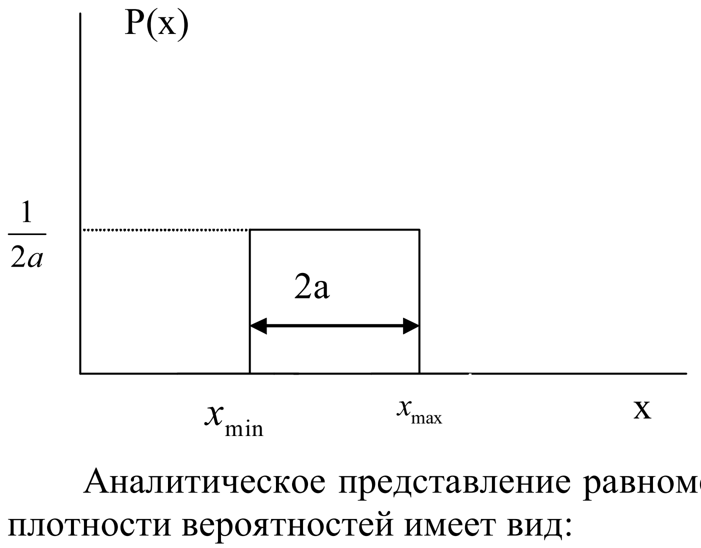


Рис.1.4.2. Графическое представление равномерного закона распределения плотностей вероятности случайной величины x

Аналитическое представление равномерного закона распределения плотности вероятностей имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases}0 \; при \;\; x \prec \bar{x}-a, \; x \succ \bar{x}+a \\ \dfrac{1}{2a} \; при \;\; (\bar{x}-a) \prec x \prec (\bar{x}+a)^4 \, . \end{cases} \qquad 1.4.4$$

Существуют и другие законы распределения плотности вероятностей случайных величин, такие как треугольный, трапециедальный, но в измерительной технике они применяются редко, поэтому на них не останавливаемся.

1.5. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Имеем произвольную случайную величину x с математическим ожиданием $\bar{x}$ и среднеквадратическим отклонением σ. Распределение плотности вероятности случайной величины подчиняется нормальному закону. Вероятность попадания случайной величины при каком-либо исходе опыта в интервал $x_2 - x_1$ (рис. 1.5.1) равна

$$p\{x_1 \prec x \prec x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]. \qquad 1.5.1$$

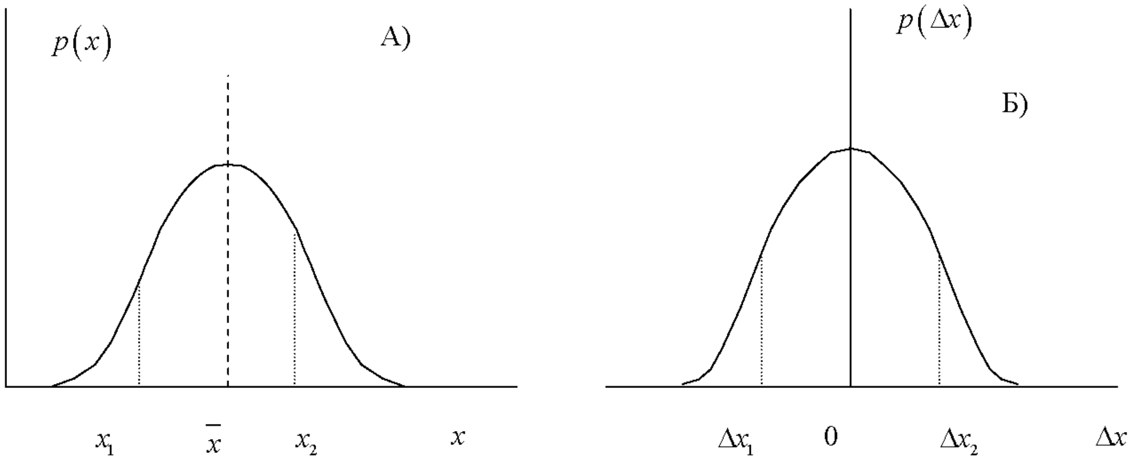


Рис. 1.5.1. Определение вероятности попадания случайной величины в интервал: А – величины x в интервал $x_1 \div x_2$*; Б – величины* Δx *в интервал* $\Delta x_1 \div \Delta x_2$

Введём новую переменную

$$\Delta x = x - \bar{x}\,. \qquad 1.5.2$$

Границами интервала для Δx будут Δx_1 и Δx_2. Положим $|\Delta x_1| = |\Delta x_2| = |\Delta x_Г|$, тогда $\Delta x_1 = -\Delta x_Г$, а $\Delta x_2 = \Delta x_Г$. Значением $\Delta x_Г$ обозначены границы интервала, симметричного относительно центра распределения $\Delta x = 0$.

Вероятность попадания случайной величины Δx в интервал $-\Delta x \div \Delta x$ равна:

$$p\left\{-\Delta x_{\Gamma} \prec \Delta x \prec \Delta x_{\Gamma}\right\} = 2\int_{0}^{\Delta x_{\Gamma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-\Delta x^2}{2\sigma^2}\right] \cdot d\left(\Delta x\right). \qquad 1.5.3$$

Введём ещё одну переменную

$$t = \frac{\Delta x}{\sigma}, \qquad 1.5.4$$

границами интервала для которой будут

$$t_{\Gamma} = \pm \frac{\Delta x_{\Gamma}}{\sigma}. \qquad 1.5.5$$

Вероятность попадания t в интервал $-t_{\Gamma} \div t_{\Gamma}$ равна:

$$p\left\{-t_{\Gamma} \prec t \prec t_{\Gamma}\right\} = 2\int_{0}^{t_{\Gamma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \cdot \left(\sigma \cdot dt\right) =$$
$$= 2\int_{0}^{t_{\Gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \cdot dt = \Phi\left(t_{\Gamma}\right). \qquad 1.5.6$$

Полученное выражение обозначается $\Phi(t_{\Gamma})$ и называется интегралом вероятности, для которого существуют графики и таблицы.

Характерные значения интеграла, используемые в теории погрешности измерений:

1. $p\{-1 \prec t \prec 1\} = p\{-\sigma \prec \Delta x \prec \sigma\} = 0{,}683$;
2. $p\{-2 \prec t \prec 2\} = p\{-2\sigma \prec \Delta x \prec 2\sigma\} = 0{,}95$;
3. $p\{-3 \prec t \prec 3\} = p\{-3\sigma \prec \Delta x \prec 3\sigma\} = 0{,}997$. 1.5.7

Приведённые значения интеграла вероятности показывают, что вероятность попадания Δx в каком-либо опыте в интервал $\pm\sigma$ равна 0,683, вероятность попадания в интервал $\pm 2\sigma$ равна 0,95, а в интервал $\pm 3\sigma$ – равна 0,997, т.е. практически достоверное событие.

Интервал значений Δx от $-\Delta x_{\Gamma}$ до Δx_{Γ} в теории вероятностей называют доверительным интервалом. Вероятность попадания случайной величины в этот интервал после проведения опыта называют доверительной вероятностью.

В измерительной технике доверительный интервал берут обычно равным $\pm 2\sigma$, а в особо ответственных случаях, когда от погрешности измерения зависит нежелательный исход события (например, авария на объекте), доверительный интервал берут равным $\pm 3\sigma$.

Исходная случайная величина по (1.5.2) равна $x = \Delta x + \bar{x}$, поэтому вероятность попадания x в интервал $\bar{x} \pm \sigma$ равна 0,683, в интервал $x \pm 2\sigma$ – 0,95, а в интервал $x \pm 3\sigma$ – 0,997.

1.6. Функциональная и корреляционная связь двух случайных величин

Имеем две случайные величины x и y. При проведении опыта x и y принимают определённые значения. Если между значениями имеется такая связь, что любому x_i соответствует только одно значение y_i, то такая связь называется функциональной $y = kx$. Графически функциональная связь двух величин представляется прямой линией или, в общем случае, какой то кривой (рис. 1.6.1А).

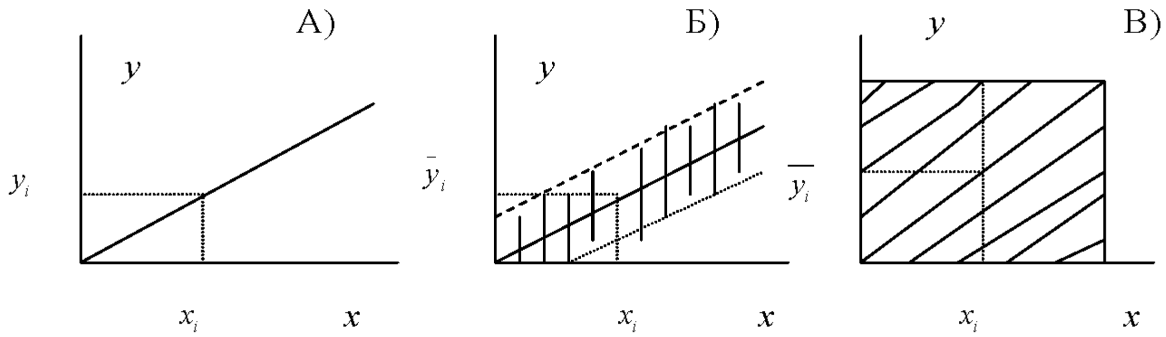


Рис. 1.6.1. Графическое представление связи между двумя физическими величинами: А) – функциональная связь; Б) – корреляционная связь; В) – некоррелированная связь (связь отсутствует)

Если любому значению величины x в повторяющихся опытах соответствуют различные значения величины y с математическим ожиданием $\bar{y}$, то такая связь величин называется корреляционной (рис. 1.6.1).

Степень тесноты корреляционной связи между двумя величинами определяется коэффициентом корреляции

$$\rho = \sqrt{1 - (2\gamma)^2} \quad , \qquad 1.6.1$$

где Δy_i – есть половина полосы неопределённости,

$$\gamma = \frac{\Delta y_i}{y_i}.$$

Для функциональной связи $\Delta y_i = 0$ и $\rho = 1$. Для некоррелированных величин (абсолютно несвязанных между собой) $\gamma = \frac{1}{2}$ и $\rho = 0$.

Дисперсия суммы двух коррелированных величин равна

$$D[x_1 + x_2] = D[x_1] + D[x_2] + 2k_{x1x2}, \qquad 1.6.2$$

где: $D[x_1]$ – дисперсия случайной величины x_1; $D[x_2]$ – дисперсия случайной величины x_2.

$$k_{x1x2} = \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \qquad 1.6.3$$

взаимный корреляционный момент, зависящий от коэффициента корреляции ρ и среднеквадратических отклонений σ_1 и σ_2 величин x_1 и x_2 от их математических ожиданий.

Для физических величин функционально связанных между собой

$$D[x_1 + x_2] = D[x_1] + D[x_2] + 2\sigma_1\sigma_2. \qquad 1.6.4$$

Среднее квадратическое отклонение для суммы таких величин находится алгебраическим суммированием

$$\sigma_{\Xi} = \sqrt{D[x_1 + x_2]} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sigma_1 + \sigma_2. \qquad 1.6.5$$

Для некоррелированных величин $\rho = 0$ и $k_{x1x2} = 0$, поэтому

$$D[x_1 + x_2] = D[x_1] + D[x_2]. \qquad 1.6.6$$

Среднее квадратическое отклонение таких величин от их математического ожидания находится геометрическим суммированием

$$\sigma_{\Xi} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \qquad 1.6.7$$

Контрольные вопросы

1. Что такое исход опыта?
2. Дать определение вероятности события.
3. В чем заключаются достоверное и недостоверное события?
4. Объяснить суть непосредственного подсчёта вероятности равновероятных событий.
5. Какие события образуют полную группу событий?
6. Объяснить классическую формулу подсчёта вероятностей.

7. Как определяется статистическая вероятность (частота) события?

8. Нарисовать и объяснить интегральную функцию распределения случайной величины.

9. Описать свойства интегральной функции распределения вероятностей.

10. Что такое дискретная случайная величина и какими точечными оценками она описывается?

11. Какой формулой описывается нормальный закон распределения случайных величин?

12. Что такое доверительный интервал и доверительная вероятность?

13. Какая связь между физическими величинами называется функциональной, а какая корреляционной?

14. Как складывать дисперсии коррелированных и некоррелированных величин?

2. НОРМИРОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ НА СТАДИИ РАЗРАБОТКИ СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ

2.1. Погрешности измерения

Измерение – это процесс нахождения значения физической величины опытным путём с помощью специальных технических средств (ГОСТ 16263-70). Это определение относится только к области технических измерений, хотя существуют измерения в экономике, психологии, педагогике и других областях знаний.

По ГОСТ 16263-70 *физическая величина* есть одно из свойств физического объекта, в качественном отношении общее для многих физических объектов, а в количественном отношении индивидуальное для каждого из них. Например, температура есть физическая величина, присущая всем физическим объектам, но разная для каждого из них: в комнате температура воздуха $20\,^0\mathrm{C}$, на улице –20 $^0\mathrm{C}$, температура солнца миллионы градусов.

Качество измерения оценивается погрешностью измерения. *Погрешность измерения* есть абсолютная разность между измеренным значением физической величины $x_и$ (показания средства измерения) и истинным значением физической величины x:

$$\Delta x = x_и - x\,.$$

Истинное значение физической величины неизвестно, поэтому не известна и погрешность измерения и, строго говоря, никогда не может быть найдена. Однако качество измерения, т.е. погрешность измерения, оценивать необходимо. Для этого в метрологии введено понятие *действительное значение* измеряемой физической величины x_d, под которым подразумевается результат измерения, полученный с наивысшей достижимой точностью. Абсолютная погрешность измерения при таком допущении определяется как разность показаний средства измерения и действительного значения физической величины:

$$\Delta x = x_и - x_d\,. \qquad 2.1.1$$

По месту возникновения в измерительном эксперименте погрешности делят на методические, инструментальные и случайные.

Методические погрешности оператором, проводящим измерительный эксперимент, закладываются на стадии планирования эксперимента. Эти погрешности определяются несовершенством выбранной математической модели объекта измерения и влиянием средства измерения на объект измерения.

Например, при измерении площади сечения цилиндра путём измерения его диаметра считается, что сечение цилиндра есть круг, а в действительности сечение не круг, а эллипс или ещё более сложная геометрическая фигура. Допускаемая при этом методическая погрешность измерения будет обусловлена несовершенством выбранной математической модели объекта измерения.

Примером методической погрешности, обусловленной влиянием средства измерения на объект измерения, может служить физический эксперимент измерения электрического напряжения вольтметром с входным сопротивлением, соизмеримым с внутренним сопротивлением источника измеряемого напряжения.

Инструментальная погрешность полностью определяется средством измерения.

Случайная погрешность является следствием действия многих известных и неизвестных причин. Часть этих причин обусловлена внешними условиями проведения эксперимента (электромагнитные помехи, вибрация, ориентация средства измерения в пространстве и др.), часть внутренними причинами, такими, как внутренние шумы электронных элементов и дрейф нуля. Случайную погрешность, порождённую процессами внутри средства измерения, относят к инструментальной погрешности.

Предметом рассмотрения в настоящем учебном пособии является инструментальная погрешность, её нормирование на стадиях проектирования средства измерения и последующего изготовления опытной партии, а также отражение этой погрешности в результатах измерения при оценке качества измерения.

Инструментальная погрешность делится на основную, дополнительную и динамическую.

Основная погрешность средства измерения нормируется в нормальных условиях эксплуатации, указанных в нормативно технической документации (НТД) на средство измерения, например, температура окружающей среды 20^0C, напряжение питающей электрической сети 220 В.

Основная погрешность средства измерения, в свою очередь, делится на систематическую, случайную и погрешность гистерезиса.

Систематическая составляющая основной погрешности средства измерения определяется разбросом характеристик компонентов, образующих в совокупности средство измерения: резисторов, конденсаторов, электронных элементов.

Случайная составляющая основной погрешности средства измерения определяется процессами внутри элементов, образующих средство измерения: дрейф параметров элементов, внутренние шумы, внутренние электромагнитные поля, создаваемые трансформаторами, дросселями, реле, тиристорами и др.

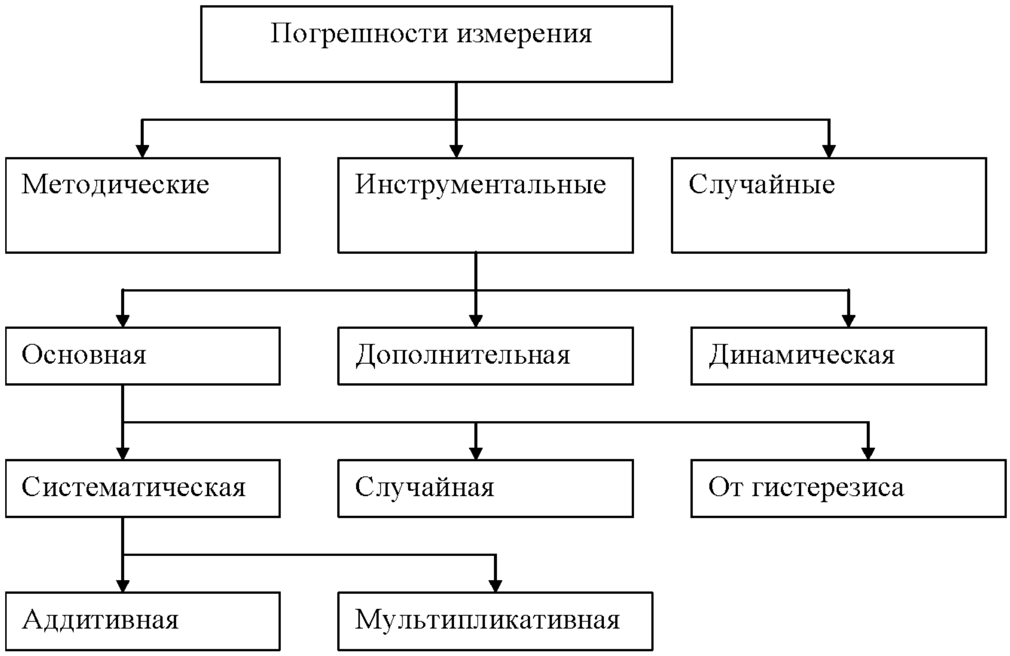


Рис. 2.1.1. Классификация погрешностей измерения

Погрешность гистерезиса определяется как разность показаний средства измерения, одно из которых есть показание, когда измеряемая величина подходит к установившемуся значению снизу (от меньшего значения, в том числе и от нуля), а другое показание, когда измеряемая величина подходит к установившемуся значению от большего значения (в пределе от верхнего предела измерения). Эта погрешность в основном присутствует у электромеханических средств измерения за счёт трения в опорах указателя значения измеряемой величины.

Дополнительная погрешность средства измерения появляется тогда, когда его условия эксплуатации отличаются от нормальных, но находятся в отведённом диапазоне значений, которые называются рабочими условиями эксплуатации. Например, температура окружающей среды от $-10\ ^0C$ до $+30\ ^0C$, напряжение питающей сети от 200 до 250 В.

Динамические погрешности средства измерения возникают при условии, если измеряемая физическая величина изменяется во времени со скоростью, сравнимой с быстродействием средства измерения. В этой ситуации средство измерения не успевает следить за изменениями измеряемой физической величины, вследствие чего и появляется динамическая погрешность.

2.2. Измерительный преобразователь и измерительный прибор

Для проведения измерительного эксперимента используются различные средства измерения. По ГОСТ 16263-70 *средство измерения* определяется как техническое средство, используемое для измерения и имеющее нормированные метрологические характеристики. В первую очередь у средства измерения нормируется инструментальная погрешность.

Средства измерения делятся на измерительные преобразователи, измерительные приборы и измерительные системы.

Элементарным средством измерения является измерительный преобразователь. *Измерительный преобразователь* – это техническое устройство, построенное на определённом физическом принципе и выполняющее одно частное измерительное преобразование, т.е. операцию преобразования входного сигнала x в выходной сигнал y, информативный параметр которого с заданной степенью точности связан с информативным параметром входного сигнала. Например, электронный усилитель электрического сигнала, по-другому называемый масштабным преобразователем, имеет уравнение преобразования

$$u_{\text{вых}} = k_{\text{у}} \cdot u_{\text{вх}}, \qquad 2.2.1$$

где $u_{\text{вх}}$ – уровень входного напряжения усилителя; $u_{\text{вых}}$ – уровень выходного напряжения усилителя; k_y – коэффициент преобразования (коэффициент усиления).

В нормативно-технической документации на усилителе обязательно должно быть указано значение коэффициента усиления и его допустимый разброс. Если допустимое отклонение коэффициента усиления от номинального значения не указано, то такой усилитель не может считаться, в соответствии с приведённым выше определением, измерительным преобразователем.

Измерительный преобразователь, на входе которого действует измеряемая физическая величина, а на выходе образуется электрический сигнал, информативный параметр которого связан со значением физической величины, называется *первичным измерительным преобразователем*. Примеры первичных измерительных преобразователей: термопара, преобразователь Холла, тензорезистор. Первичный преобразователь, конструктивно определённым образом оформленный для размещения на объекте контроля, физическая величина которого измеряется, называется датчиком.

Вторичные измерительные преобразователи осуществляют преобразование сигналов. Преобразователи, осуществляющие преобразование сигнала в форму, удобную для визуального восприятия, называют индикаторами. Индикаторы бывают стрелочными или цифровыми.

Измерительный прибор – это средство измерения, предназначенное для получения значения измеряемой физической величины в форме, доступной для восприятия оператором, проводящим измерительный эксперимент (отклонение стрелки показывающего аналогового индикатора, показание цифрового индикатора).

Каждый измерительный преобразователь имеет *уравнение преобразования,* связывающее информативные параметры входного и выходного сигналов,

$$y = kx, \qquad 2.2.2$$

где x – информативный параметр входного сигнала; y – информативный параметр выходного сигнала; k – коэффициент преобразования (для линейного преобразования).

Для первичного измерительного преобразователя

$$y = k_{Д} \cdot x_{Д}, \qquad 2.2.3$$

где $x_{Д}$ – действительное значение измеряемой физической величины; y – информативный параметр выходного сигнала.

Для оконечного преобразователя (индикатора)

$$x_{и} = k_{и} \cdot y, \qquad 2.2.4$$

где $x_{и}$ – показания прибора; y – сигнал на входе индикатора; $k_{и}$ – коэффициент преобразования индикатора.

Измерительный прибор представляет собой набор определённым образом включённых измерительных преобразователей. Если измерительные преобразователи включены последовательно, то

$$x_{и} = k_{д} \cdot k_1 \cdots k_i \cdots k_{и} \cdot x_{д}. \qquad 2.2.5$$

В общем случае при наличии обратной связи

$$x_{и} = f\left(k_{д} \cdots k_i \cdots k_{и} \cdot x_{д}\right). \qquad 2.2.6$$

Выражение (2.2.6) является уравнением преобразования измерительного прибора.

Различают три вида уравнений преобразования: номинальное, индивидуальное и действительное.

Номинальное уравнение преобразования указывается в нормативно-технической документации на данный тип средства измерения формулой или графиком. Оно устанавливается для средств измерения массового производства на весь тип.

Индивидуальное уравнение преобразования устанавливается для конкретного средства измерения путём индивидуальной градуировки при определённом значении влияющих параметров.

Действительное уравнение преобразования отражает реально существующую связь между информативными параметрами входного и выходного сигнала. Существует это уравнение преобразования только теоретически, поскольку точное значения коэффициента преобразования неизвестно.

2.3. Расчёт основной погрешности измерительного преобразователя

Инструментальная погрешность средства измерения, будь то измерительный преобразователь или измерительный прибор, складывается из трёх составляющих: основной, дополнительной и динамической погрешностей.

Основная погрешность зависит только от средства измерения, тогда как дополнительная и случайная зависят не только от средства измерения, но и от многих внешних факторов и потому в чистом виде инструментальными погрешностями могут считаться только с некоторыми оговорками.

Основная составляющая инструментальной погрешности средства измерения, в свою очередь, является комбинацией систематической, случайной и гистерезисной составляющих. Гистерезисная составляющая погрешности имеет место у аналоговых средств измерения и её расчёт практически невозможен. Случайная составляющая инструментальной погрешности имеет много причин и её расчёт также практически невозможен. Наибольшая по численному значению систематическая составляющая основной инструментальной погрешности может рассчитываться. На её расчёте, на стадии проектирования, и остановимся.

Рассмотрим вначале порядок расчёта систематической погрешности измерительного преобразователя. Имеем измерительный преобразователь, у которого информативный параметр входного сигнала имеет значение $x_д$.

Информативный параметр выходного сигнала по номинальному уравнению преобразования равен

$$y_н = f\left(a_{1н} \cdots a_{nн}, x_д\right), \qquad 2.3.1$$

где $a_{1н} \cdots a_{nн}$ – номинальные значения элементов, определяющих уравнение преобразования (резисторы, конденсаторы, индуктивности, микросхемы).

Действительные значения элементов, определяющих уравнение преобразования, отличаются от номинальных значений, указанных в нормативно-технической документации,

$$a_{1д} = a_{1н} + \Delta a_1 \cdots a_{nд} = a_{nн} + \Delta a_n, \qquad 2.3.2$$

$a_{1д} \cdots a_{nд}$ – действительные значения параметров элементов, определяющих уравнение преобразования.

Например, резистор с номинальным значением 100 Ом и с допустимым отклонением 1% в действительности может иметь значение электрического сопротивления в пределах 99 $\div$ 101 Ом. Пределы отклонения значения сопротивления резистора от номинального значения определяются как доверительный интервал с доверительной вероятностью 2σ или 3σ.

Действительное уравнение преобразования измерительного преобразователя

$$y_д = \left(a_{1д}, \cdots a_{nд}, x_д\right) + \Delta y_а \qquad 2.3.3$$

отличается от номинального (2.3.1). Величина Δy_a определяется смещением нуля измерительного преобразователя ($y_д = \Delta y_a$ при $x_д = 0$).

Абсолютная погрешность измерительного преобразователя определяется как разность значений информативного параметра выходного сигнала, полученных по номинальному и действительному уравнениям преобразования:

$$\Delta y = y_н - y_д = f\left(a_{1н}, \cdots a_{nн}, x_д\right) - f\left(a_{1д}, \cdots a_{nд}, x_д\right) - \Delta y_a. \qquad 2.3.4$$

Представим, что влияющие параметры в номинальном уравнении преобразования получили дифференциально малые приращения $da_1 \cdots da_n$. Тогда информативный параметр выходного сигнала получит также дифференциально малое приращение

$$dy = \frac{\partial f\left(a_{1н}, \cdots a_{nн}, x_д\right)}{\partial a_1} da_1 + \cdots \frac{df\left(a_{1н}, \cdots a_{nн}, x_д\right)}{\partial a_n} da_n, \qquad 2.3.5$$

где $\dfrac{\partial f\left(a_{1н},\cdots a_{nн},x_{д}\right)}{\partial a_1}$ и $\dfrac{\partial f\left(a_{1н},\cdots a_{nн,}x_{д}\right)}{\partial a_n}$ – частные производные от уравнения преобразования по аргументам a_1 и a_n.

Переходя к малым конечным приращениям, получим

$$\Delta y=\frac{\partial f\left(a_{1н},\cdots a_{nн},x_{д}\right)}{\partial a_1}\Delta a_1+\cdots+\frac{\partial f\left(a_{1н},\cdots a_{nн,}x_{д}\right)}{\partial a_n}\Delta a_n. \qquad 2.3.6$$

В выражении (2.3.6) $\Delta a_1\cdots\Delta a_n$ – границы отклонения значения параметров элементов, определяющих уравнение преобразования, от их номинального значения. Величина Δy будет представлять абсолютное значение мультипликативной составляющей инструментальной погрешности измерительного преобразователя.

Общая погрешность измерительного преобразователя

$$\Delta y_{\Sigma}=\Delta y+\Delta y_a \qquad 2.3.7$$

складывается из мультипликативной Δy и аддитивной Δy_a составляющих.

Расчёт аддитивной составляющей инструментальной погрешности не имеет общего подхода и представляет большие сложности. У многих средств измерения эта составляющая отсутствует, а у тех, где она присутствует, предусмотрена операция под названием коррекция нуля, которая проводится перед началом измерения при нулевом значении входной измеряемой величины. По названным причинам нормирование аддитивной составляющей основной инструментальной погрешности не рассматриваем.

Рассмотрим использование представленной методики расчёта мультипликативной составляющей основной инструментальной погрешности на примере расчёта погрешности делителя напряжения (масштабный измерительный преобразователь). Принципиальная схема делителя представлена на рис. 2.3.1.

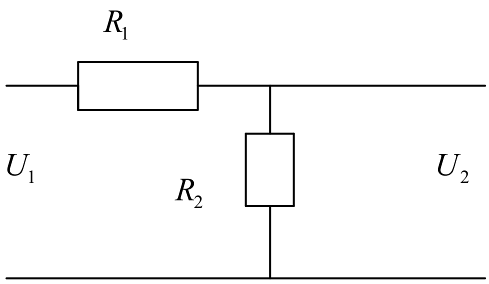


Рис. 2.3.1 Резистивный делитель напряжения (масштабный преобразователь)

Уравнение преобразования рассматриваемого масштабного измерительного преобразователя

$$U_2 = \frac{R_{2\text{н}}}{R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}} U_1, \qquad 2.3.8$$

где $R_{1\text{н}}$ и $R_{2\text{н}}$ – номинальные значения электрического сопротивления резисторов. Действительные значения сопротивления резисторов $R_{1\text{д}} = R_{1\text{н}} \pm \Delta R_1$, $R_{2\text{д}} = R_{2\text{н}} \pm \Delta R_2$. Доверительные интервалы ΔR_1 и ΔR_2 указаны в нормативно технической документации выбранного типа резисторов.

Если действительное значение сопротивления резисторов отличается от номинального, то выходное напряжение делителя будет отличаться от значения определяемого (2.3.8), в соответствие с (2.3.6), на величину

$$\Delta U_2 = \pm \frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{R_{2\text{н}}}{R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}}\right)\Delta R_1 U_1 \pm \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{R_{2\text{н}}}{R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}}\right)\Delta R_2 U_1. \qquad 2.3.9$$

После нахождения частных производных

$$\Delta U_2 = \mp \frac{R_{2\text{н}}}{\left(R_{1н} + R_{2н}\right)^2}\Delta R_1 U_1 \pm \frac{R_{1\text{н}}}{\left(R_{1н} + R_{2н}\right)^2}\Delta R_2 U_1. \qquad 2.3.10$$

Относительная погрешность измерительного преобразователя равна

$$\delta = \frac{\Delta U_2}{U_{2\text{н}}} = \mp \frac{\Delta R_1}{R_{1\text{н}}}\frac{R_{1\text{н}}}{R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}} \pm \frac{\Delta R_2}{R_{2\text{н}}}\frac{R_{1\text{н}}}{R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}}. \qquad 2.3.11$$

Множитель $R_{1\text{н}} / \left(R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}\right)$ можно рассматривать как коэффициент влияния параметров элементов на общую погрешность измерительного преобразователя. При $R_{1\text{н}} \prec\prec R_{2\text{н}}$ относительная погрешность $\delta \to 0$, при $R_{1\text{н}} \succ\succ R_{2\text{н}}$ относительная погрешность стремится к

$$\delta = \mp \frac{\Delta R_1}{R_{1\text{н}}} \pm \frac{\Delta R_2}{R_{2\text{н}}}. \qquad 2.3.12$$

Отклонения ΔR_1 и ΔR_2 в пределах доверительного интервала могут быть в обе стороны от номинального значения и эти отклонения у разных резисторов даже одного типа не коррелированны, поэтому суммарную относительную погрешность в соответствие (1.6.7) определяем как

$$\delta = \frac{R_{1н}}{R_{1н} + R_{2н}} \sqrt{\left(\frac{\Delta R_1}{R_{1н}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_2}{R_{2н}}\right)^2}\,. \qquad 2.3.13$$

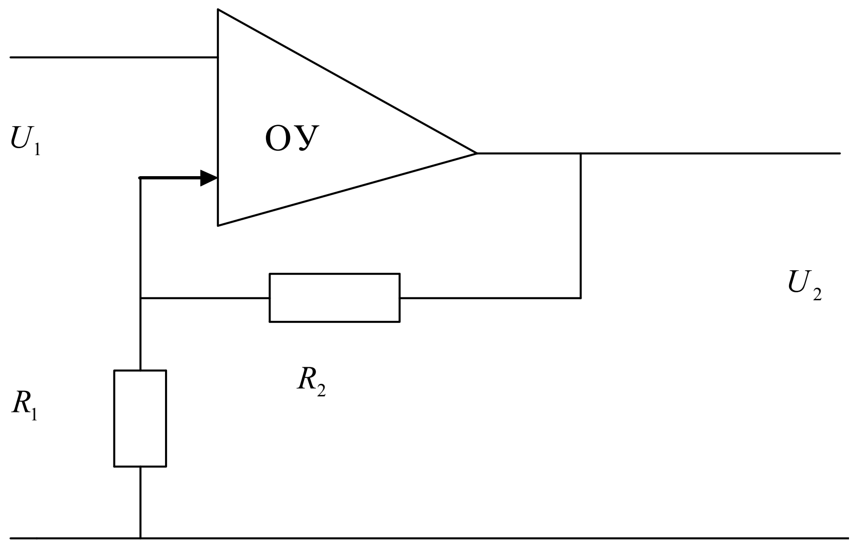


Рис. 2.3.2. Измерительный усилитель напряжения (маситабный преобразователь)

Рассмотрим другой вариант расчёта мультипликативной составляющей инструментальной погрешности измерительного преобразователя на примере расчёта погрешности измерительного усилителя, принципиальная схема которого представлена на рис. 2.3.2.

Коэффициент усиления измерительного усилителя равен

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1} + 1 \qquad 2.3.14$$

при условии, что коэффициент усиления операционного усилителя (микросхемы) много больше единицы. Номинальное значение электрического сопротивления резисторов равно $R_{1н}$ и $R_{2н}$, действительное значение сопротивления резисторов равно

$$R_{1д} = R_{1н} \pm \Delta R_1,$$

$$R_{2д} = R_{2н} \pm \Delta R_2\,. \qquad 2.3.15$$

Номинальное значение коэффициента усиления равно

$$k_н = \frac{R_{2н}}{R_{1н}} + 1\,. \qquad 2.3.16$$

При $R_{2н} \succ R_{1н}$, $k_н = \dfrac{R_{2н}}{R_{1н}}$.

Действительное значение коэффициента усиления равно

$$k_д = \frac{R_{2н} \pm \Delta R_2}{R_{1н} \pm \Delta R_1} + 1. \qquad 2.3.17$$

Абсолютная погрешность усилителя

$$\Delta k = k_н - k_д = \frac{R_{2н}}{R_{1н}}\left(\pm \frac{\Delta R_2}{R_{2н}} \mp \frac{\Delta R_1}{R_{1н}} \right) = k_н \left(\pm \frac{\Delta R_2}{R_{2н}} \mp \frac{\Delta R_1}{R_{1н}} \right). \qquad 2.3.18$$

Отклонения параметров резисторов от номинального значения не коррелированны, поэтому при оценке суммарной погрешности нужно использовать геометрическое суммирование составляющих. С учётом сказанного относительная погрешность усилителя равна

$$\delta = \frac{\Delta k}{k_н} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_2}{R_{2н}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta R_1}{R_{1н}} \right)^2}. \qquad 2.3.19$$

2.4. Расчёт основной погрешности измерительного прибора

Измерительный прибор представляет собой совокупность измерительных преобразователей, определённым образом между собой соединённых. В частном случае измерительные преобразователи соединены последовательно, и уравнение преобразования измерительного прибора имеет вид:

$$x_{ин} = k_{1н} k_{2н} \cdots k_{mн} x_д = k_н x_д, \qquad 2.4.1$$

где $k_{1н} \cdots k_{mн}$ – номинальные значения коэффициентов преобразования элементарных измерительных преобразователей, образующих в своей совокупности измерительный прибор; $x_д$ – значение измеряемой физической величины; $x_{ин}$ – номинальное значение измеренной величины (ожидаемые показания измерительного прибора).

При использовании действительных значений коэффициентов преобразования элементарных измерительных преобразователей уравнение преобразования измерительного прибора будет иметь вид

$$x_{ид} = \left(k_{1н} \pm \Delta k_1\right) \cdot \left(k_{2н} \pm \Delta k_2\right) \cdots \left(k_{mн} \pm \Delta k_n\right) \cdot x_д = k_д \cdot x_д, \qquad 2.4.2$$

где $x_{ид}$ – действительное показание измерительного прибора; $\Delta k_1 \cdots \Delta k_n$ – доверительные интервалы отклонений коэффициентов преобразования элементарных измерительных преобразователей от номинальных значений, указанных в нормативно-технической документации.

Абсолютная погрешность измерительного прибора может быть рассчитана одним из описанных приёмов в подразд. 2.3.

Дифференциально малое изменение $x_{\text{ин}}$, вызванное дифференциально малыми изменениями коэффициентов преобразования элементарных измерительных преобразователей, образующих измерительный прибор, будет равно

$$dx_{\text{ин}} = \frac{\partial k_{\text{ин}}}{\partial k_1} dk_1 x_{\text{д}} + \cdots + \frac{\partial k_{\text{ин}}}{\partial k_n} dk_n x_{\text{д}}. \qquad 2.4.3$$

При переходе к малым конечным приращениям имеем:

$$\Delta x_{\text{ин}} = \frac{\partial k_{\text{ин}}}{\partial k_1} \Delta k_1 x_{\text{д}} + \cdots + \frac{\partial k_{\text{ин}}}{\partial k_n} \Delta k_n x_{\text{д}}. \qquad 2.4.4$$

Относительная погрешность измерительного прибора будет равна:

$$\delta = \frac{\Delta x_{\text{ин}}}{x_{\text{ин}}} = \frac{\partial k_{\text{ин}}}{\partial k_1} \frac{\Delta k_1}{k_{\text{ин}}} + \cdots + \frac{\partial k_{\text{ин}}}{\partial k_n} \frac{\Delta k_n}{k_{\text{ин}}}. \qquad 2.4.5$$

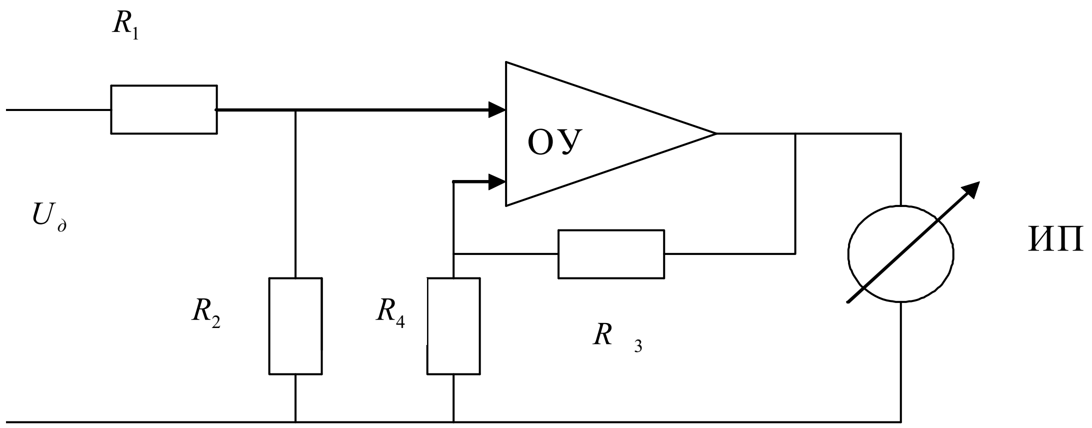


Рис. 2.4.1. Принципиальная схема вольтметра:
R_1R_2– делитель напряжения; ОУ – операционный усилитель; ИП – показывающий электромеханический прибор

Рассмотрим для примера расчёт мультипликативной погрешности вольтметра, принципиальная схема которого изображена на рис. 2.4.1.

Вольтметр состоит из трёх последовательно включённых элементарных измерительных преобразователей: делителя напряжения с номинальным значением коэффициента преобразования равным

$$k_{1н} = \frac{R_{2н}}{R_{1н} + R_{2н}}, \tag{2.4.6}$$

усилителя напряжения с коэффициентом преобразования

$$k_{2н} = \frac{R_{3н}}{R_{4н}} + 1 \tag{2.4.7}$$

и показывающего электромеханического прибора с коэффициентом преобразования $k_{3н}$.

Общий коэффициент преобразования прибора при номинальных значениях коэффициентов преобразований элементарных преобразователей равен

$$k_{н} = k_{1н} k_{2н} k_{3н}. \tag{2.4.8}$$

Действительные значения коэффициентов преобразования у элементарных измерительных преобразователей отличаются от номинальных значений на Δk_1, Δk_2 и Δk_3 соответственно. Отклонения Δk_1 и Δk_2 находятся по формуле (2.3.6) и методике изложенной в подразд. 2.3, а отклонение Δk_3 берётся из нормативно-технической документации на показывающий прибор.

Относительное значение мультипликативной погрешности измерительного прибора, в соответствии с формулой (2.4.5), будет равно

$$\delta = \frac{\partial k_{н}}{\partial k_{1н}} \frac{\Delta k_1}{k_{н}} + \frac{\partial k_{н}}{\partial k_{2н}} \frac{\Delta k_2}{k_{н}} + \frac{\partial k_{н}}{\partial k_{3н}} \frac{\Delta k_3}{k_{н}} =$$

$$= k_{2н} k_{3н} \frac{\Delta k_1}{k_{н}} + k_{1н} k_{3н} \frac{\Delta k_2}{k_{н}} + k_{1н} k_{2н} \frac{\Delta k_3}{k_{н}}. \tag{2.4.9}$$

После подстановки в (2.4.9) значения $k_{н}$ из (2.4.8) получается формула для расчёта относительной погрешности измерительного прибора:

$$\delta = \frac{\Delta k_1}{k_{1н}} + \frac{\Delta k_2}{k_{2н}} + \frac{\Delta k_3}{k_{3н}}. \tag{2.4.10}$$

Поскольку погрешности элементарных преобразователей не коррелированны, то их нужно суммировать геометрически

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{\Delta k_1}{k_{1н}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k_2}{k_{2н}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k_3}{k_{3н}}\right)} = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}. \tag{2.4.11}$$

Относительные погрешности $\delta_{1,}$ δ_2 и δ_3 элементарных измерительных преобразователей определяются, как описано в подразд. 2.3.

2.5. Расчёт дополнительной погрешности средства измерения

Дополнительная погрешность средства измерения появляется тогда, когда его условия эксплуатации отличаются от номинальных, но остаются в пределах рабочего интервала. Например, номинальное значение окружающей температуры для средства измерения установлено $20^0\mathrm{C}$, а рабочий интервал температур $20 \pm 10^0\mathrm{C}$. Основная погрешность средства измерения каким-либо образом определена и указана в нормативно-технической документации. Отклонение окружающей температуры от $20^0\mathrm{C}$ ведёт к появлению дополнительной погрешности средства измерения.

Рассмотрим порядок расчёта дополнительной температурной погрешности элементарного измерительного преобразователя.

Номинальное уравнение преобразования преобразователя представим в общем виде

$$y = f\left(a_{1\text{н}}, \cdots a_{n\text{н}}, x\right), \qquad 2.5.1$$

где x – значение информативного параметра входного сигнала; $a_{1\text{н}}, \cdots a_{n\text{н}}$ – номинальные значения параметров элементов преобразователя, определяющих уравнение преобразования (резисторы, конденсаторы, микросхемы); $y_\text{н}$ – номинальное значение информативного параметра выходного сигнала преобразователя.

Каждый элемент измерительного преобразователя имеет указанный в нормативно-технической документации температурный коэффициент. Температурный коэффициент элемента равен относительному изменению номинального значения параметра элемента, вызванному изменением окружающей температуры на один градус. Например, если в нормативно-технической документации на резистор указано, что его температурный коэффициент равен $\alpha_{Rt} = 0{,}001$, то это означает, что при изменении окружающей температуры на $1^0\mathrm{C}$ сопротивление резистора изменится на 0,001 или на 0,1%. При изменении окружающей температуры на Δt сопротивление резистора изменится на величину

$$\Delta R_t = \alpha_{Rt} R_\text{н} \Delta t, \qquad 2.5.2$$

где $R_н$ – номинальное значение сопротивления резистора при номинальной температуре окружающей среды. Таким образом, в рабочем интервале температур сопротивление резистора будет находиться в пределах

$$R = R_\text{н} \pm \Delta R_t. \qquad 2.5.3$$

Если для резистора 100 Ом указаны, номинальное значение температуры 20 ^{0}C, рабочий интервал температур $\pm 10^0$C и температурный коэффициент $\alpha_{Rt} = 0.001$, то в рабочем интервале температур сопротивление резистора будет находиться в пределах 100 $\pm$ 1 Ом.

Вернёмся к уравнению (2.5.1). При изменении окружающей температуры на Δt значение $y_{\text{н}}$ изменится на Δy:

$$\Delta y = \frac{\partial f(a_{1\text{н}}, \cdots a_{m\text{н}}, x)}{\partial a_1}\Delta a_{1t} + \cdots + \frac{\partial f(a_{1\text{н}}, \cdots a_{m\text{н}}, x)}{\partial a_n}\Delta a_{nt}, \qquad 2.5.4$$

где $\Delta a_{1t} = \alpha_{1t} a_{1\text{н}} \Delta t$, $\Delta a_{nt} = \alpha_{nt} a_{m\text{н}} \Delta t$ – абсолютные значения изменений параметров элементов, определяющих уравнение преобразования, при отклонении окружающей температуры от номинального значения.

Используя формулу (2.5.4), рассчитаем температурную погрешность делителя напряжения, принципиальная схема которого изображена на рис. 2.3.1. Уравнение преобразования делителя напряжения

$$U_2 = \frac{R_{2\text{н}}}{R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}} U_1 = k_{\text{н}} U_1. \qquad 2.5.5$$

Заданы: номинальное значение температуры $t_{\text{н}} = 20^0\text{C}$, рабочий интервал температур $20 \pm 10\ {}^0C$, температурные коэффициенты резисторов R_1 и R_2 соответственно $\alpha_{1t} = 0.001$ и $\alpha_{2t} = 0.002$, номинальные значения резисторов $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 200$ Ом.

В соответствии с формулой (2.5.4) температурное изменение выходного напряжения делителя будет равно

$$\Delta U = U_1 \frac{\partial k_{\text{н}}}{\partial R_1} \Delta R_{1t} + U_1 \frac{\partial k_{\text{н}}}{\partial R_2} \Delta R_{2t}, \qquad 2.5.6$$

где ΔR_{1t} и ΔR_{2t} находятся по формуле (2.5.2).

Найдя частные производные, получим

$$\Delta U = -U_2 \frac{\Delta R_{1t}}{R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}} + U_2 \frac{R_{1\text{н}} \Delta R_{2t}}{(R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}) R_{2\text{н}}}. \qquad 2.5.7$$

Относительное значение дополнительной температурной погрешности равно

$$\delta = \frac{\Delta U}{U_2} = -\frac{\Delta R_{1t}}{R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}} + \frac{R_{1\text{н}} \Delta R_{2t}}{R_{2\text{н}}(R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}})} = k_{\text{н}}\left(-\frac{\Delta R_{1t}}{R_{1\text{н}}} + \frac{\Delta R_{2t}}{R_{2\text{н}}}\right). \qquad 2.5.8$$

Используя выражение (2.5.2), получим расчётную формулу в окончательном виде:

$$\delta = k_{\text{н}}\left(-\alpha_{1t} + \alpha_{2t}\right)\frac{R_{1\text{н}}}{R_{2\text{н}}}\Delta t. \qquad 2.5.9$$

Если температурные коэффициенты резисторов равны, то дополнительная температурная погрешность у делителя напряжения отсутствует. В рассматриваемом примере относительная температурная погрешность, после подстановки числовых значений величин, будет равна:

$$\delta = \pm\frac{100}{100+200}(-0.001+0.002)10 = \frac{1}{300}.$$

$$\delta_{\%} = 3.3\%$$

Контрольные вопросы

1. Дать определение понятию измерение.
2. Что такое физическая величина?
3. Дать определение понятию погрешность измерения физической величины?
4. Какими причинами определяется методическая погрешность измерения?
5. Откуда появляется случайная погрешность измерения?
6. Из каких основных составляющих образуется инструментальная погрешность измерения?
7. Какие существуют разновидности средств измерения?
8. Дать определение понятию первичный измерительный преобразователь.
9. Что понимают под уравнением преобразования измерительного преобразователя?
10. Описать порядок расчёта систематической погрешности измерительного преобразователя.
11. Описать пример расчёта мультипликативной погрешности делителя напряжения.
12. Как рассчитать мультипликативную погрешность прибора, зная погрешности элементарных преобразователей, образующих прибор?
13. Что такое дополнительная погрешность средства измерения?
14. Как рассчитать дополнительную температурную погрешность средства измерения?

3. НОРМИРОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ КЛАССОМ ТОЧНОСТИ

3.1. Мультипликативная и аддитивная составляющие систематической погрешности средства измерения

В средствах измерения, не используемых для измерения быстро меняющихся физических величин, динамическая составляющая инструментальной погрешности отсутствует. Если такое средство измерения используют по назначению только в лабораторных условиях, то пренебрежимо малы и дополнительные погрешности. В инструментальной погрешности для нормирования остаётся только основная погрешность.

Основная погрешность, как показано на рис. 2.1.1, состоит из систематической, случайной и гистерезисной составляющих. Для приборов невысокой точности случайная составляющая основной погрешности мала, а гистерезисная составляющая у современных приборов редко встречается. Поэтому для многих типов средств измерения в инструментальной погрешности наибольший вес имеет систематическая составляющая основной погрешности, обусловленная разбросом параметров элементарных измерительных преобразователей, образующих в совокупности средство измерения различной степени сложности.

Систематическая составляющая основной погрешности средства измерения, в зависимости от значения измеряемой физической величины, делится на аддитивную и мультипликативную погрешности.

Аддитивная погрешность постоянна во всём интервале изменения измеряемой физической величины $x_д$ от 0 до $x_{д.\max}$ (рис. 3.1.1)

$$\Delta x = x_и - x_д, \qquad 3.1.1$$

где Δx – абсолютная погрешность измерения; $x_и$ – измеренное значение (показания прибора); $x_д$ – действительное (истинное) значение измеряемой физической величины.

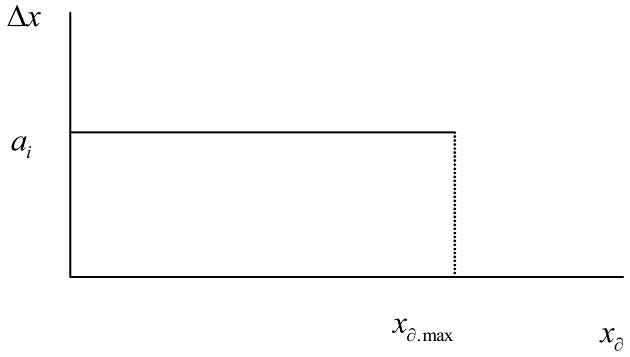


Рис. 3.1.1. Зависимость аддитивной погрешности одного экземпляра средства измерения от действительного значения измеряемой величины x_∂

У различных экземпляров измерительных приборов одного типа аддитивная составляющая систематической погрешности различна и для всего типа приборов лежит в пределах от $-a_m$ до a_m. Аддитивные погрешности средств измерения одного типа есть множество

$$\Delta x = a = \{-a_m \cdots a_i \cdots a_m\}. \qquad 3.1.2$$

Аддитивные погрешности называют погрешностями от смещения нуля шкалы отсчётов.

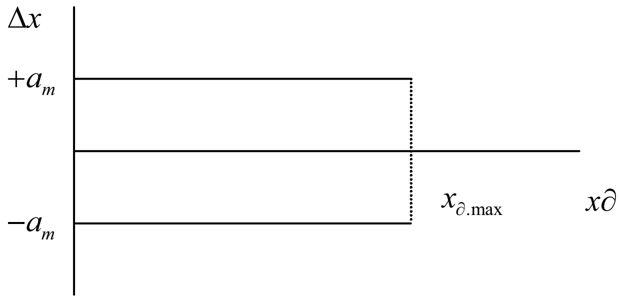


Рис. 3.1.2 Зависимость аддитивной погрешности от x_∂ для одного типа средств измерения

Мультипликативная составляющая систематической погрешности средства измерения зависит от значения измеряемой физической величины (рис. 3.1.3)

$$\Delta x = \pm b x_{\text{д}}, \qquad 3.1.3$$

где b – коэффициент, численно определяющий мультипликативную погрешность.

Эту погрешность называют погрешностью уравнения преобразования средства измерения (рис. 3.1.3).

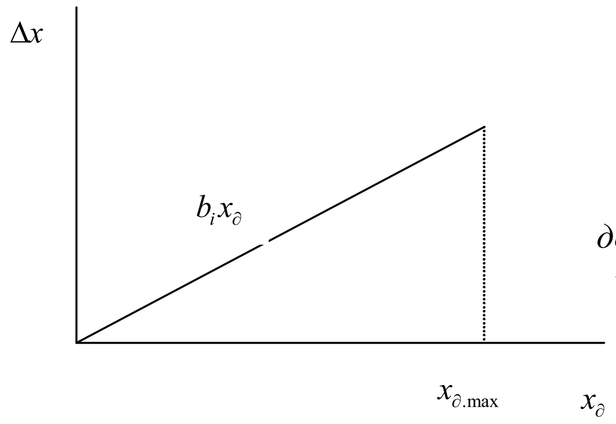


Рис. 3.1.3. Зависимость мультипликативной погрешности одного экземпляра средства измерения от действительного значения измеряемой величины x_∂

Коэффициент b для каждого экземпляра средства измерения одного типа свой, индивидуальный. Для всего множества средств измерения одного типа коэффициент b есть множество

$$b = \{-b_m \cdots b_i \cdots b_m\}, \qquad 3.1.4$$

где $\pm b_m$ – границы интервала, в котором лежат значения b отдельных экземпляров средств измерения (рис. 3.1.4).

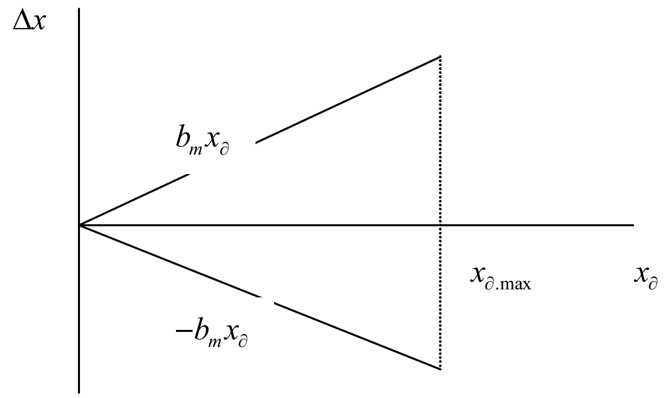


Рис. 3.1.4. Мультипликативная погрешности для одного типа средства измерения

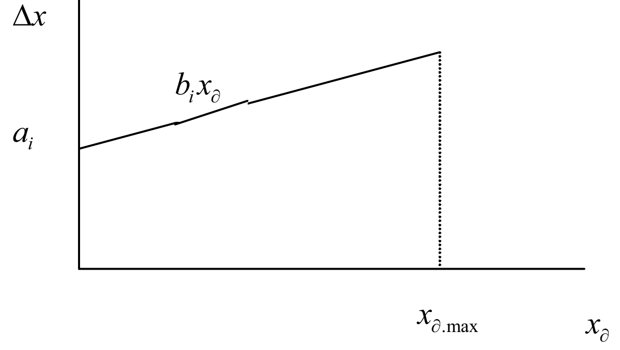


Рис. 3.1.5. Аддитивная и мультипликативная погрешности одного экземпляра средства измерения

Для многих типов средств измерения в систематическую составляющую основной инструментальной погрешности средств измерения входят как аддитивная, так и мультипликативная погрешности. Для таких средств измерения (рис. 3.1.5) погрешность равна

$$\Delta x = a + bx_{д}. \qquad 3.1.5$$

Для всего типа приборов погрешность лежит в части поверхности между линиями $-b_m x_{д}$ и $b_m x_{д}$ (см. рис. 3.1.6).

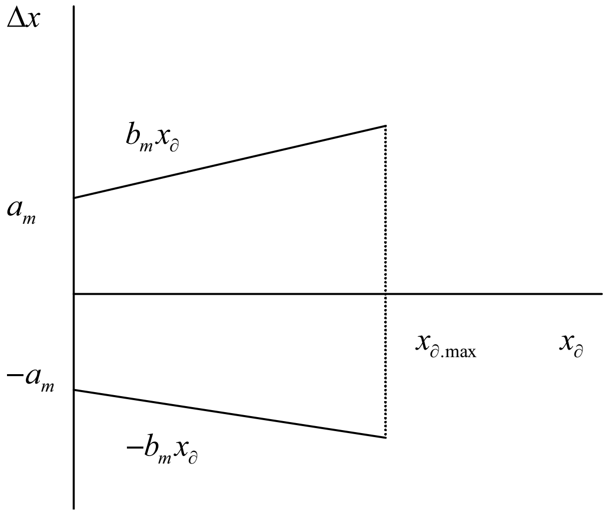


Рис. 3.1.6. Аддитивная и мультипликативная погрешности одного типа средств измерения и их зависимость от измеряемой величины

Аддитивная часть погрешности для типа средств измерения есть множество

$$a = \{-a_m \cdots a_i \cdots a_m\}, \qquad 3.1.6$$

а мультипликативная часть погрешности определяется слагаемым $bx_{д}$, которое определяется значением $x_{д}$ и коэффициентом *b*. Коэффициент *b* для типа средств измерения есть множество

$$b = \{-b_m \cdots b_i \cdots b_m\}. \qquad 3.1.7$$

3.2. Средства измерения с мультипликативной погрешностью

На приборостроительном заводе разработали новый тип измерительного прибора и выпустили опытную партию в количестве *m* экземпляров.

Метрологам завода ставится задача, экспериментальным путём установить инструментальную погрешность приборов и в обобщённом виде предложить её для внесения в нормативно-техническую документацию на данный тип приборов.

Вместе с метрологами завода проследим возможный путь решения этой задачи.

Вначале, путём проведения многократных измерений в лабораторных условиях, убедимся в отсутствии случайной составляющей инструментальной погрешности. Проведением измерений фиксированного значения физической величины при подходе к точке отсчёта сверху и снизу убедимся в отсутствии гистерезисной составляющей инструментальной погрешности.

Убедившись в отсутствии случайной и гистерезисной составляющих инструментальной погрешности, делаем вывод, что инструментальная погрешность средства измерения состоит из систематической составляющей.

Далее надо установить, какая разновидность систематической погрешности преобладает: аддитивная или мультипликативная. Для этого возьмём любой экземпляр из изготовленной партии приборов, установим несколько значений измеряемой физической величины (с использованием образцовых средств измерения),

$$x_Д = \{x_{Д1} \cdots x_{Дi} \cdots x_{Дn}\} \qquad 3.2.1$$

от 0 до максимального значения $x_{Дn} = x_{Д\max}$, определяемого верхним пределом измерения исследуемого средства измерения, и проведём измерения выбранных значений $x_Д$.

В результате проведения измерительных экспериментов получим множество результатов измерения, по числу установленных значений $x_Д$:

$$x_и = \{x_{и1} \cdots x_{иi} \cdots x_{иn}\}. \qquad 3.2.2$$

При каждом измерении будет иметь место абсолютная погрешность измерения Δx:

$$\Delta x = \{\Delta x_1 \cdots \Delta x_i \cdots \Delta x_n\}, \qquad 3.2.3$$

где $\Delta x_i = x_{иi} - x_{Дi}$.

Представим графически зависимость $\Delta x = f(x_Д)$. Если окажется, что Δx не зависит от $x_Д$ (рис. 3.1.1), то делаем вывод о том, что в инструментальной погрешности преобладает аддитивная составляющая. Если погрешность линейно зависит от значения измеряемой величины (рис. 3.1.3), то в инструментальной погрешности преобладает мультипликативная составляющая. Если же зависимость погрешности от значения измеряемой физической величины будет похожа на показанную на рис. 3.1.5, то в инструментальной погрешности присутствуют как аддитивная, так и мультипликативная составляющие.

Рассмотрим вначале случай, когда погрешность линейно зависит от значения измеряемой физической величины, т.е. является мультипликативной инструментальной погрешностью:

$$\Delta x = b x_Д . \qquad 3.2.4$$

Для этого проведём измерения установленных значений $x_Д$ всеми m приборами изготовленной опытной партии. В результате получим m зависимостей вида (3.2.4), по числу приборов

$$\Delta x = \{b_1 x_Д \cdots b_j x_Д \cdots b_m x_Д\}. \qquad 3.2.5$$

Если все полученные зависимости изобразить графически, то все они разместятся в секторе между линиями $-b_m x_Д$ и $b_m x_Д$ (рис. 3.1.4). Коэффициент b для каждого прибора величина постоянная, отличная от коэффициентов других приборов, а для всей партии приборов этот коэффициент будет величиной случайной.

$$b = \{b_1 \cdots b_j \cdots b_m\}. \qquad 3.2.6$$

Построив гистограмму, убеждаемся, что закон распределения этой случайной величины близок к нормальному.

Среднее арифметическое значение коэффициента равно

$$\bar{b} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} b_j = 0 . \qquad 3.2.7$$

Среднее квадратическое отклонение b_j от $\bar{b}$ равно

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} b_j^2} . \qquad 3.2.8$$

Принимая доверительный интервал, в котором лежат значения коэффициента, равным $\pm k\sigma_b$, найдём границы интервала

$$b_m = \pm k\sigma_b . \qquad 3.2.9$$

Если k =2, то доверительная вероятность нахождения коэффициента b_j в указанном интервале равна 0.95 (см. выражение 1.5.7), если k=3, то доверительная вероятность нахождения коэффициента в указанном доверительном интервале равна 0.997.

Абсолютное значение максимальной инструментальной погрешности, в соответствии с (3.2.4), будет равно

$$\Delta_m = k\sigma_b x_Д . \qquad 3.2.10$$

Относительная максимальная погрешность для партии приборов

$$\delta_m = \pm\frac{\Delta_m}{x_Д} = \pm\frac{k\sigma_b x_Д}{x_д} = \pm k\sigma_b. \qquad 3.2.11$$

Классом точности измерительных приборов исследуемой партии является ближайшее, большее к $100\delta_m$ число, выбираемое из ряда

$$1\cdot10^n;\ 1.5\cdot10^n;\ 2\cdot10^n;\ 2.5\cdot10^n;\ 4\cdot10^n;\ 5\cdot10^n;\ 6\cdot10^n\ , \qquad 3.2.12$$

где $n = 0; –1; –2$.

Например, в результате описанных действий, для партии средств измерения одного типа, получили максимальное значение относительной погрешности $\delta_m = \pm0.013$ и $100\delta_m = 1.3$. Тогда классом точности приборов будет ближайшее, большее к 1.3 число из ряда (3.2.12). Таким числом является 1.5. Следовательно, класс точности приборов исследуемой партии 1.5.

Класс точности измерительных приборов с преобладающей мультипликативной погрешностью изображается на лицевой панели приборов и в нормативно-технической документации числом, помещённым в круг (в нашем случае это будет число 1.5).

Операцию по установлению класса точности средства измерения производит разработчик (научно-исследовательский и проектный институт, приборостроительный завод). Эта операция называется нормированием инструментальной погрешности средства измерения.

3.3. Средства измерения с аддитивной погрешностью

Как и в подразд. 3.2 берём партию однотипных средств измерения в количестве m экземпляров. Проводим эксперимент по установлению зависимости абсолютной погрешности измерения от значения измеряемой величины $x_Д$ на одном, выбранном случайно, экземпляре прибора.

Для этого устанавливаем ряд значений измеряемой физической величины

$$x_Д = \{x_{Д1} \cdots x_{Дi} \cdots x_{Дn}\}. \qquad 3.3.1$$

Проводим измерение установленных значений физической величины и получаем ряд измеренных значений

$$x_и = \{x_{и1} \cdots x_{иi} \cdots x_{иn}\}. \qquad 3.3.2$$

Вычисляем погрешность каждого измерения и получаем множество

$$\Delta x = \{\Delta x_1 \cdots \Delta x_i \cdots \Delta x_n\}. \qquad 3.3.3$$

Если у средства измерения преобладает аддитивная составляющая погрешности, то

$$\Delta x_1 = \cdots \Delta x_i = \cdots \Delta x_n = a. \qquad 3.3.4$$

Проделаем описанную процедуру со всеми m экземплярами исследуемых приборов. В результате получим множество погрешностей

$$\Delta x = a = \{a_1 \cdots a_j \cdots a_m\}. \qquad 3.3.5$$

На рис. 3.1.2 все значения погрешностей по оси ординат будут расположены между отметками $-a_m$ и a_m.

Рассматривая a_j для всей партии приборов как случайную величину с нормальным законом распределения, определим её среднее арифметическое значение, которое должно быть равно нулю,

$$\bar{a} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_j = 0, \qquad 3.3.6$$

и среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} a_j^2}. \qquad 3.3.7$$

Принимая доверительный интервал, в котором лежит a_j, равным $\pm k\sigma_a$, найдём границы интервала

$$a_m = \pm k\sigma_a. \qquad 3.3.8$$

При k=2 любое a_j лежит в интервале $-a_m \prec a_j \prec a_m$ с доверительной вероятностью $P_d = 0.95$, а при $k=3$ – с доверительной вероятностью 0.997.

Класс точности средств измерения, с преобладающей аддитивной погрешностью, определяется по приведённой максимальной погрешности измерения

$$\gamma_m = \pm\frac{a_m}{x_{Дn}}, \qquad 3.3.9$$

где $x_{Дn}$ – последнее в ряду (3.3.1) значение измеряемой физической величины, совпадающее с верхним пределом измерения исследуемых средств измерения.

Классом точности аттестуемой партии средств измерения будет ближайшее к $100\gamma_m$ число, выбираемое из ряда (3.2.12).

Например, в результате описанных измерительных экспериментов для партии средств измерения одного типа получили $\gamma_m = 0.018$ и

$100\gamma_m = 1.8$. В соответствии с определением класс точности приборов партии будет равен $\gamma_{\text{кл}} = 2$.

Класс точности средств измерения с преобладающей аддитивной погрешностью изображается числом на лицевой панели и в нормативно-технической документации без обрамления круговой линией.

3.4. Средства измерения, имеющие аддитивную и мультипликативную погрешности

Так же, как описано в подразд. 3.2. и 3.3, имеем опытную партию приборов, из которых берём один и проводим с ним эксперимент по установлению зависимости абсолютной погрешности измерения от значения измеряемой величины. Результаты эксперимента графически представлены на рис. 3.1.5**.** Представленная зависимость абсолютной погрешности измерения Δx от значения измеряемой физической величины свидетельствует о том, что в общей погрешности измерения присутствуют как аддитивная, так и мультипликативная составляющие.

Проделав подобный эксперимент со всеми приборами исследуемой партии, увидим, что все зависимости $\Delta x = f\left(x_Д\right)$ лежат между линиями $-b_m x_Д$ и $b_m x_Д$ (рис. 3.1.6).

При этом

$$-a_m \prec a_j \prec a_m,$$

$$-b_m \prec b_j \prec b_m. \qquad 3.4.1$$

Граничные значения a_m и b_m определяем как границы доверительных интервалов

$$a_m = \pm k\sigma_a; \quad b_m = \pm k\sigma_b \qquad 3.4.2$$

с доверительной вероятностью $P_d = 0.95$ при *k=2* и $P_d = 0.997$ при *k*=3.

Нормирование погрешности средства измерения, обладающего как аддитивной, так и мультипликативной составляющими инструментальной погрешности, проводится по формуле:

$$\delta_m = \frac{\Delta x_m}{x_\text{д}} \cdot 100 = \frac{a_m + b_m x_\text{д}}{x_\text{д}} \cdot 100 = c + d\left(\frac{x_{\text{дп}}}{\text{x}_\text{д}} - 1\right), \qquad 3.4.3$$

где δ_m – относительная максимальная погрешность измерения $x_\text{д}$ приборами аттестуемой партии; Δx_m – максимальное значение абсолютной погрешности для приборов всей партии; $x_\text{д}$ – измеряемая физическая величина; $x_{\text{дп}} = x_{\text{дmax}}$ – максимальное значение измеряемой физической величины, соответствующее верхнему пределу измерения аттестуемых средств измерения; c и d – коэффициенты, нормирующие погрешность и определяющие класс точности средств измерения аттестуемой партии.

Коэффициенты c и d указываются в нормативно-технической документации на все средства измерения тех типов приборов, класс точности которых нормируется рассматриваемым способом.

Установим связь между коэффициентами c и d, с одной стороны, и значениями a_m и b_m, определяемыми экспериментально, с другой стороны.

Положим $x_{\text{д}} = x_{\text{дп}}$, тогда из выражения (3.4.3) следует, что

$$\frac{a_m + b_m x_{\text{дп}}}{x_{\text{дп}}} \cdot 100 = c. \qquad 3.4.4$$

Для нахождения коэффициента d в нормирующую формулу (3.4.3) подставим значение коэффициента c из (3.4.4) в результате получим уравнение

$$\frac{a_m + b_m x_{\text{д}}}{x_{\text{д}}} \cdot 100 = \frac{a_m + b_m x_{\text{дп}}}{x_{\text{дп}}} + d\left(\frac{x_{\text{дп}}}{x_{\text{д}}} - 1\right). \qquad 3.4.5$$

Решив уравнение, найдём

$$d = \frac{a_m}{x_{\text{дп}}} \cdot 100. \qquad 3.4.6$$

Класс точности средств измерения, обладающих сопоставимыми аддитивной и мультипликативной составляющими инструментальной погрешности, задаётся в нормативно-технической документации коэффициентами c и d в виде c/d. Коэффициенты c и d находятся с использованием ряда (3.2.12), как ближайшее, большее к значениям, полученным экспериментально.

Например, в результате проведённых измерительных экспериментов с опытной партией средств измерения, получили c=0.14 и d=0.07. В этом случае класс точности средств измерения будет c/d = 0.15/0.1.

Контрольные вопросы

1. Что такое аддитивная погрешность средства измерения?
2. Что такое мультипликативная погрешность средства измерения?
3. Как убедиться, что у средства измерения преобладает мультипликативная погрешность?
4. Как убедиться, что у средства измерения преобладает аддитивная погрешность?

5. Как убедиться, что у средства измерения присутствуют как аддитивная, так и мультипликативная составляющие погрешности?

6. Как осуществить нормирование инструментальной погрешности с преобладающей мультипликативной составляющей?

7. Как установить класс точности прибора с мультипликативной погрешностью?

8. Как осуществить нормирование инструментальной погрешности средства измерения с аддитивной погрешностью?

9. Что понимать под классом точности средства измерения с аддитивной погрешностью?

10. Как нормируется класс точности средств измерения, имеющих аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности?

11. Какие средства и способы существуют для уменьшения аддитивной погрешности средства измерения?

12. Какие средства и способы существуют для уменьшения мультипликативной составляющей погрешности средства измерения?

4. НОРМИРОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ В СООТВЕТСТВИИ С ГОСТ 8.009-84

4.1. Математические модели инструментальной погрешности

ГОСТ 8.009-84 для инструментальных погрешностей средств измерения устанавливаются две математические модели.

Модель первая

$$\Delta = \Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_{o} * \overset{o}{\Delta}_{oH} * \sum_{1}^{l} \Delta_{ci} * \Delta_{dyn}. \qquad 4.1.1$$

Формула (4.1.1) представляет собой символическую запись объединения пяти составляющих инструментальной погрешности средства измерения. Под объединением понимают применение к составляющим погрешности некоторого функционала, позволяющего рассчитать общую погрешность измерения, обусловленную совместным воздействием этих составляющих.

В выражении (4.1.1) приняты следующие обозначения:

Δ – абсолютная инструментальная погрешность средства измерения;

Δ_{os} – систематическая составляющая основной погрешности средства измерения;

$\overset{o}{\Delta}_{o}$ – случайная составляющая основной погрешности средства измерения;

$\overset{o}{\Delta}_{oH}$ – случайная составляющая основной погрешности средства измерения, обусловленная гистерезисными явлениями;

$\sum_{1}^{l} \Delta_{ci}$ – объединение дополнительных погрешностей средства измерения, обусловленных действием влияющих величин в рабочих условиях эксплуатации;

Δ_{dyn} – динамическая погрешность средства измерения, обусловленная изменениями во времени значения измеряемой физической величины.

В зависимости от конкретного типа средства измерения и условий его эксплуатации в (4.1.1) могут отсутствовать отдельные составляющие погрешности. В предельном случае

$$\Delta = \Delta_{os}. \qquad 4.1.2$$

В этом случае инструментальная погрешность может быть представлена классом точности средства измерения, как описано в третьем разделе данного учебного пособия.

Вторая математическая модель инструментальной погрешности средства измерения

$$\Delta = \Delta_o * \sum_{1}^{l} \Delta_{ci} * \Delta_{dyn}. \qquad 4.1.3$$

В этой модели Δ_o есть основная погрешность средства измерения , используемая без разделения её на систематическую, случайную и гистерезисную составляющие. При определённых условиях использования средства измерения дополнительная и динамическая составляющие инструментальной погрешности могут отсутствовать и тогда

$$\Delta = \Delta_o. \qquad 4.1.4$$

Средства измерения, которые будут использоваться в таких регламентированных условиях, могут иметь инструментальную погрешность, нормированную классом точности.

4.2. Нормирование систематической погрешности средства измерения

При рассмотрении вопросов нормирования инструментальной погрешности средства измерения по ГОСТ 8.009-84 будем использовать первую математическую модель инструментальной погрешности (4.1.1). Первой в (4.1.1) стоит систематическая составляющая основной погрешности Δ_{os}, с неё и начнём.

Для нормирования систематической погрешности на основе экспериментальных данных выделим партию из m средств измерения одного типа. Далее, возьмём из этой партии одно j-ое средство измерения и с его помощью экспериментально определим, какая составляющая (аддитивная, мультипликативная или их совокупность) определяет систематическую погрешность выбранного средства измерения, а следовательно, и всей партии приборов.

В начале измерительного эксперимента установим несколько дискретных значений измеряемой физической величины в интервале от нуля до некоторого максимального значения, равного верхнему пределу измерения средства измерения

$$x_{\text{д}} = \{x_{\text{д}1} \cdots x_{\text{д}i} \cdots x_{\text{д}n}\}. \qquad 4.2.1$$

Проведём измерение установленных значений физических величин одним, выбранным из партии j-м средством измерения. В результате проведённых измерений получим ряд показаний прибора

$$x_{\text{и}} = \{x_{\text{и}1} \cdots x_{\text{и}i} \cdots x_{\text{и}n}\}. \qquad 4.2.3$$

Определив абсолютную погрешность каждого проведённого измерения, получим ряд значений погрешности

$$\Delta = \{\Delta_1 \cdots \Delta_i \cdots \Delta_n\}, \qquad 4.2.4$$

где

$$\Delta_i = x_{\text{и}i} - x_{\text{д}i}. \qquad 4.2.5$$

Далее нужно исследовать зависимость абсолютной погрешности измерения от значения измеряемой физической величины. При этом возможными могут быть три варианта зависимости.

В первом варианте абсолютная погрешность не зависит от значения измеряемой физической величины, т.е. является аддитивной погрешностью

$$\Delta = \Delta_1 = \cdots \Delta_i = \cdots \Delta_n = a_j, \qquad 4.2.6$$

где a_j – аддитивная погрешность выбранного для эксперимента j-го средства измерения.

Во втором варианте абсолютная погрешность линейно зависит от значения измеряемой физической величины и, следовательно, является мультипликативной погрешностью измерения

$$\Delta = b_j x_{\text{д}}, \qquad 4.2.7$$

где b_j – коэффициент, определяющий мультипликативную погрешность для выбранного j-го средства измерения.

В третьем варианте в абсолютной погрешности измерения присутствуют как аддитивная составляющая, так и мультипликативная.

$$\Delta = a_j + b_j x_{\text{д}}. \qquad 4.2.8$$

Проведём нормирование систематической погрешности средств измерения с преобладающей аддитивной составляющей. Для этого проведём измерение какого-либо одного установленного значения измеряемой физической величины из ряда (4.1.1) всеми средствами измерения выделенной партии. После проведения измерений вычислим аддитивную погрешность для каждого средства измерения, участвующего в измерительном эксперименте по формуле (4.2.5). В результате получим множество аддитивных погрешностей, образованное аддитивными погрешностями отдельно взятых средств измерения

$$\Delta_{os} = \{a_1 \cdots a_j \cdots a_m\}, \qquad 4.2.9$$

где a_j – аддитивная погрешность j-го средства измерения; a_m– аддитивная погрешность последнего в партии средства измерения.

Для j-го средства измерения $\Delta_{os} = a_j$ есть величина постоянная. Для всей партии средств измерения Δ_{os} есть величина случайная.

Среднее значение систематической погрешности для партии средств измерения равно

$$\bar{\Delta}_{os} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_j = 0. \qquad 4.2.10$$

Если среднее значение систематической погрешности окажется не равным нулю, то конструкторам средств измерения нужно внести соответствующие доработки в прибор и добиться выполнения равенства (4.2.10).

Среднее квадратическое отклонение систематической (аддитивной) погрешности от своего среднего значения равно

$$\sigma[\Delta_{os}] = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} a_j^2}. \qquad 4.2.11$$

Границы систематической погрешности лежат в доверительном интервале

$$\Delta_{osp} = k\sigma[\Delta_{os}] \qquad 4.2.12$$

который, при доверительной вероятности $P_д = 0.95$, равен $\Delta_{osp} = 2\sigma[\Delta_{os}]$, а при доверительной вероятности $P_д = 0.997$, равен $\Delta_{osp} = 3\sigma[\Delta_{os}]$.

В нормативно-технической документации на аттестуемое средство измерения метрологи приборостроительного завода должны, в соответствии с ГОСТ 8.009-84, указать среднее квадратическое отклонение систематической погрешности от своего среднего значения $\sigma[\Delta_{os}]$ и границы доверительного интервала Δ_{osp}, в котором находятся значения систематической погрешности, с указанной доверительной вероятностью P_d.

Рассмотрим нормирование систематической погрешности по второму варианту, когда она определяется мультипликативной составляющей. В этом варианте для *j*-го средства измерения систематическая погрешность равна

$$\Delta_{os} = b_j x_{д}. \qquad 4.2.13$$

Для *j*-го средства измерения коэффициент b_j величина постоянная, а для всей партии средств измерения коэффициент *b* есть величина переменная и случайная.

Среднее значение коэффициента равно

$$\bar{b} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} b_j = 0. \qquad 4.2.14$$

Среднее квадратическое отклонение коэффициента от среднего значения

$$\sigma[b] = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum b_j^2}. \qquad 4.2.15$$

Среднее квадратическое отклонение абсолютной погрешности измерения от своего среднего значения с учётом (4.2.13) равно

$$\sigma[\Delta_{os}] = x_{д}\sigma[b]. \qquad 4.2.16$$

В нормативно-технической документации, в этом варианте нормирования систематической погрешности, нормируются $\sigma[\Delta_{os}]$, определяемое по (4.2.16), и границы систематической погрешности, определяемые как границы доверительного интервала Δ_{osp}, равные $\Delta_{osp} = 2\sigma[\Delta_{os}]$ при доверительной вероятности $P_{д} = 0.95$ и $\Delta_{osp} = 3\sigma[\Delta_{os}]$ при доверительной вероятности $P_{д} = 0.997$.

Рассмотрим нормирование систематической погрешности средства измерения по третьему варианту, когда она определяется аддитивной и мультипликативной составляющими. В этом варианте систематическая погрешность для *j*-го средства измерения равна

$$\Delta_{os} = a_j + b_j x_{д}. \qquad 4.2.17$$

Для любого *j*-го средства измерения из аттестуемой партии коэффициенты a_j и b_j являются величинами постоянными. Для всей совокупности средств измерения выбранной партии приборов они величины случайные и представляют собой множества

$$a = \{a_1 \cdots a_j \cdots a_m\},$$

$$b = \{b_1 \cdots b_j \cdots b_m\}. \quad 4.2.18$$

Установим $x_д = 0$, проведём измерения этого значения физической величины всеми средствами измерения и определим абсолютные погрешности измерения, получим множество

$$a = \{a_1 \cdots a_j \cdots a_m\}. \quad 4.2.19$$

Среднее арифметическое значение коэффициента, определяющего аддитивную составляющую погрешности равно

$$\bar{a} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_j = 0. \quad 4.2.20$$

Если в (4.2.20) $\bar{a}$ не равно нулю, то в приборах испытуемой партии нужно провести конструктивно коррекцию начала отсчёта по шкале, иными словами коррекцию нуля шкалы.

Среднее квадратическое отклонение a_j от своего среднего арифметического значения равно

$$\sigma[a] = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} a_j^{\,2}}. \quad 4.2.21$$

С целью определения точечных оценок случайной величины *b* для всей партии средств измерения, установим какое-либо значение $x_д$ измеряемой физической величины и проведём её измерение *j*-м средством измерения. В результате проведённого эксперимента получим измеренное значение физической величины $x_и$ и систематическую погрешность

$$\Delta_{osj} = x_и - x_д = a_j + b_j x_д. \quad 4.2.22$$

Интересующее нас значение коэффициента определяем из (4.2.22)

$$b_j = \frac{\Delta_{osj} - a_j}{x_д}, \quad 4.2.23$$

где Δ_{osj} – систематическая погрешность (4.2.22), определённая экспериментально; a_j – аддитивная составляющая погрешности, выбираемая из множества (4.2.19) и $x_д$ – установленное в эксперименте значение измеряемой физической величины.

Проделав описанный эксперимент со всей партией средств измерения, получим множество значений коэффициентов *b*

$$b = \{b_1 \cdots b_j \cdots b_m\}. \quad 4.2.24$$

Среднее арифметическое значение коэффициента, при нормальном законе распределения, должно быть равно нулю

$$\bar{b} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} b_j = 0 . \qquad 4.2.25$$

Среднее квадратическое отклонение *j*-го коэффициента от среднего арифметического значения всех коэффициентов равно

$$\sigma[b] = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} b_j^2} . \qquad 4.2.26$$

Среднее квадратическое отклонение мультипликативной погрешности от своего среднего значения

$$\sigma[bx_д] = x_д\sigma[b]. \qquad 4.2.27$$

Если считать аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности некоррелированными, тогда среднее квадратическое отклонение суммарной систематической погрешности от своего среднего значения будет равно

$$\sigma[\Delta_{os}] = \sqrt{(\sigma[a])^2 + (x_д\sigma[b])^2} . \qquad 4.2.28$$

В нормативно-технической документации в рассматриваемом варианте нормируются среднее квадратическое отклонение суммарной систематической погрешности $\sigma[\Delta_{os}]$ от своего среднего значения и границы доверительного интервала $\Delta_{osp} = k\sigma[\Delta_{os}]$.

Как и в двух предыдущих вариантах, границы интервала равны $2\sigma[\Delta_{os}]$ при доверительной вероятности $P_d = 0.95$ и $3\sigma[\Delta_{os}]$ при доверительной вероятности $P_d = 0.997$.

4.3. Нормирование случайной составляющей основной погрешности средства измерения

Случайная погрешность средства измерения стоит второй в математической модели инструментальной погрешности (4.1.1). Эта погрешность порождается различными явлениями внутри средства измерения, такими как внутренние шумы, дрейфы нуля, электромагнитные наводки от собственных электрических элементов (трансформаторы, реле, тиристоры и др. коммутирующие элементы). Рассматриваемая погрешность не зависит от значения измеряемой величины, т.е. носит аддитивный характер.

Для экспериментальной оценки случайной составляющей основной погрешности средства измерения возьмём из партии аттестуемых приборов одно *j*-ое средство измерения и проведём им многократные измерения какого-либо значения величины $x_{д}$, в результате получим множество измеренных значений

$$x_{и} = \{x_{и1} \cdots x_{иi} \cdots x_{иn}\}. \qquad 4.3.1$$

При каждом измерении будет иметь место погрешность измерения, их совокупность даст множество погрешностей

$$\Delta = \{\Delta_1 \cdots \Delta_i \cdots \Delta_n\}. \qquad 4.3.2$$

Среднее значение погрешности измерений для *j*-го прибора

$$\bar{\Delta}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i . \qquad 4.3.3$$

В отсутствии случайной составляющей инструментальной погрешности, а также при нормальном законе распределения случайной составляющей погрешности, среднее арифметическое значение погрешности многократных измерений должно равняться систематической погрешности:

$$\bar{\Delta}_j = \Delta_{osj} . \qquad 4.3.4$$

Среднее квадратическое отклонение погрешности отдельных измерений от их среднего арифметического значения погрешности равно

$$\sigma_j[\Delta] = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta_i - \bar{\Delta}_j\right)^2} . \qquad 4.3.5$$

Проделав со всеми *m*-средствами измерения аттестуемой партии описанную выше процедуру, получим для каждого средства измерения среднее квадратическое отклонение его погрешностей многократных измерений от их среднего значения, которые в совокупности составят множество

$$\sigma[\Delta] = \{\sigma_1[\Delta] \cdots \sigma_j[\Delta] \cdots \sigma_m\{\Delta\}\}. \qquad 4.3.6$$

Среднее для всей партии среднее квадратическое отклонение погрешностей будет равно

$$\bar{\sigma}[\Delta] = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma_j[\Delta]. \qquad 4.3.7$$

Границы случайной погрешности для всей партии средств измерения

$$\overset{o}{\Delta}_o = k\bar{\sigma}[\Delta]. \qquad 4.3.8$$

Как и в предыдущих случаях, k =2 при доверительной вероятности 0.95 и k =3 при доверительной вероятности 0.997.

В нормативно-технической документации на всю аттестуемую партию указываются границы случайной погрешности $\overset{o}{\Delta}_o$ и среднее квадратическое отклонение случайной погрешности от её среднего арифметического значения $\bar{\sigma}[\Delta]$.

4.4. Нормирование случайной погрешности от гистерезиса

Погрешность от гистерезиса стоит третьей по порядку в математической модели инструментальной погрешности средства измерения (4.1.1). Погрешность гистерезиса определяется разностью показаний средства измерения, одно из которых получают при приближении измеряемой физической величины к установившемуся значению снизу (от меньших значений, в предельном случае от нуля), другое показание получают при приближении измеряемой физической величины к точке отсчёта сверху (от больших значений, в крайнем случае, от верхнего предела измерения прибора). Эта разность показаний является величиной случайной.

Для оценки погрешности гистерезиса, из партии аттестуемых приборов берём один j-ый.

Выбираем какое-либо значение измеряемой физической величины $x_{\text{д}}$, изменяем значение измеряемой физической величины от нуля до установившегося значения $x_{\text{д}}$ и снимаем показания средства измерения при достижении измеряемой физической величиной установившегося значения. Повторяем эксперимент n-раз и получаем в результате n измеренных значений:

$$x_{\text{ин}} = \{x_{\text{и}1} \cdots x_{\text{иi}} \cdots x_{\text{иn}}\}. \quad 4.4.1$$

Среднее значение показаний средства измерения

$$\bar{x}_{\text{ин}} = \frac{1}{n}\sum_{\text{i}=1}^{\text{n}} x_{\text{иi}}. \quad 4.4.2$$

Погрешность i-го измерения равна

$$\Delta_{нi} = x_{\text{иi}} - x_{\text{д}}. \quad 4.4.3$$

Погрешности всех произведённых измерений образуют множество

$$\Delta_{нj} = \{\Delta_{\text{н}1} \cdots \Delta_{нi} \cdots \Delta_{\text{нn}}\}. \quad 4.4.4$$

При нормальном законе распределения погрешностей их среднее арифметическое должно быть равно нулю

$$\bar{\Delta}_{нj} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{нi} = 0\,. \qquad 4.4.5$$

Среднее квадратическое отклонение погрешности измерения от его среднеарифметического значения равно

$$\sigma[\Delta_{н}] = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{нi}^{2}}\,. \qquad 4.4.6$$

Проделав подобные эксперименты при приближении измеряемой физической величины к установившемуся значению сверху (от больших значений), найдем среднее арифметическое значение показаний средства измерения.

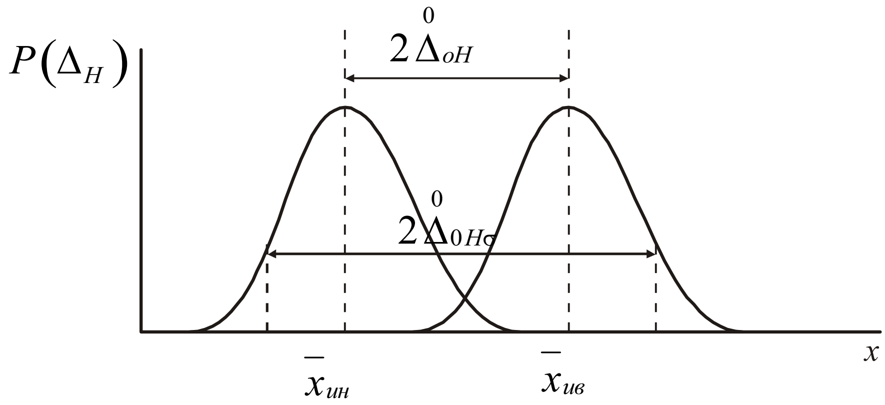


Рис. 4.4.1. Случайная погрешность средства измерения, обусловленная гистерезисными явлениями:
$P(\Delta_H)$ *- плотность вероятности гистерезисной случайной погрешности;* $\bar{x}_{ин}$ *– среднее арифметическое значение показаний средства измерения при приближении к точке отсчёта снизу;* $\bar{x}_{ив}$ *– среднее арифметическое значение показаний средства измерения при приближении к точке отсчёта сверху;* $2\overset{0}{\Delta}_{0H}$ *– интервал случайной погрешности от гистерезиса;* $2\overset{0}{\Delta}_{0H\sigma}$ *– интервал случайной погрешности от гистерезиса с учётом погрешности от разброса показаний средства измерения при повторяющихся измерительных экспериментах*

$$\bar{x}_{ив} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{иi}\,, \qquad 4.4.6$$

и среднее квадратическое отклонение погрешности измерения от его среднего значения

$$\sigma[\Delta_{в}] = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{вi}^{2}}\,. \qquad 4.4.7$$

На рис. 4.1.1 результаты экспериментов представлены в графической форме.

Из рисунка видно, что интервал, в котором лежит среднее значение погрешности от гистерезиса, равен

$$2\overset{o}{\Delta}_{oH} = \bar{x}_{\text{ив}} - \bar{x}_{\text{ин}}. \qquad 4.4.8$$

В нормативно-технической документации на всю партию приборов нужно указать границы погрешности от гистерезиса

$$\bar{\Delta}_{oH} = \pm\frac{\bar{x}_{\text{ив}} - \bar{x}_{\text{ин}}}{2}. \qquad 4.4.9$$

Если требуется более точно указать границы погрешности от гистерезиса, то нужно учесть также разброс погрешностей, задаваемый их среднеквадратическими отклонениями $\sigma[\Delta_{в}]$ и $\sigma[\Delta_{н}]$, и границы установить по формуле

$$\overset{o}{\Delta}_{oH\sigma} = \pm\left(\frac{\bar{x}_{\text{ив}} - \bar{x}_{\text{ин}}}{2} + k\sigma[\Delta]\right), \qquad 4.4.10$$

где $k\sigma[\Delta] = k\sigma[\Delta_{\text{в}}] = k\sigma[\Delta_{\text{н}}]$.

4.5. Нормирование дополнительных погрешностей средств измерения

Дополнительные погрешности средства измерения стоят четвёртыми по порядку в математической модели инструментальной погрешности средства измерения. Расчёт дополнительных погрешностей для конкретных типов средств измерения имеет свои особенности, которые не возможно рассмотреть в одном учебном пособии. Для иллюстрации одного из подходов расчёта дополнительной погрешности, рассмотрим расчёт дополнительной погрешности, появляющейся при отклонении окружающей температуры от номинального значения, указанного в нормативно-технической документации.

Из опытной партии средств измерения берём один прибор и помещаем его в термостат с регулируемой температурой. Устанавливаем какое-либо значение измеряемой физической величины $x_{\text{д}}$. При нескольких фиксированных значениях температуры в термостате

$$t = \{t_1 \cdots t_{\text{ном}} \cdots t_n\} \qquad 4.5.1$$

проводим измерения установленного значения физической величины и получаем ряд измеренных значений

$$x_{\text{и}} = \{x_{u1} \cdots x_{\text{ином}} \cdots x_{un}\}. \qquad 4.5.2$$

Далее вычисляем погрешности каждого измерения по общей формуле

$$\Delta_i = x_i - x_{\text{д}}. \qquad 4.5.3$$

После проведённых вычислений получим ряд погрешностей

$$\Delta = \{\Delta_1 \cdots \Delta_{ном} \cdots \Delta_n\}. \qquad 4.5.4$$

Погрешность средства измерения при номинальном значении температуры есть не что иное, как систематическая не исключённая погрешность выбранного для эксперимента средства измерения

$$\Delta_{ном} = \Delta_{os}. \qquad 4.5.5$$

Дополнительная погрешность средства измерения, обусловленная изменением температуры окружающей среды будет равна

$$\Delta_t = \{\Delta_{t1} \cdots 0_{t\text{ном}} \cdots \Delta_{tn}\}, \qquad 4.5.6$$

где $\Delta_{t1} = \Delta_1 - \Delta_{os}$, … $\Delta_{tn} = \Delta_n - \Delta_{os}$.

При номинальном значении окружающей температуры дополнительная температурная погрешность отсутствует, т.е. равна нулю.

На рис. 4.5.1 показана графически зависимость дополнительной температурной погрешности от значения окружающей температуры. Эта зависимость в частном случае может быть линейной, а в общем случае она нелинейная.

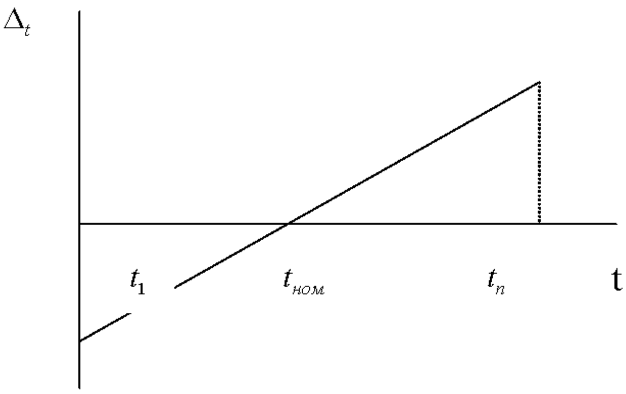


Рис. 4.5.1. Дополнительная температурная погрешность средства измерения: Δt – абсолютное значение дополнительной температурной погрешности; t – окружающая средство измерения температура; $t_{ном}$ – номинальное значение окружающей температуры

Для случая линейной зависимости она может быть аппроксимирована выражением

$$\Delta_t = k(t - t_{\text{ном}}). \qquad 4.5.7$$

При необходимости описанную процедуру можно проделать со всеми m приборами опытной партии и получить множество коэффициентов k в аппроксимирующем выражении (4.5.7)

$$k = \{k_1 \cdots k_j \cdots k_m\}. \qquad 4.5.8$$

Среднее значение аппроксимирующего коэффициента равно

$$\bar{k} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} k_j . \qquad 4.5.9$$

В нормативно-технической документации на аттестуемую партию средств измерения указывается вид температурной зависимости и температурный коэффициент аппроксимирующей формулы.

Контрольные вопросы

1. Написать первую математическую модель инструментальной погрешности средства измерения по ГОСТ 8.009-84 и дать пояснения.
2. Написать вторую математическую модель инструментальной погрешности средства измерения по ГОСТ 8.009-84 и дать пояснения.
3. Как провести нормирование основной инструментальной погрешности у средства измерения с преобладающей аддитивной составляющей основной погрешности?
4. Как провести нормирование основной инструментальной погрешности у средства измерения с преобладанием мультипликативной составляющей погрешности?
5. Как провести нормирование основной инструментальной погрешности у средства измерения, у которого присутствуют соизмеримые аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности?
6. Описать процесс нормирования случайной составляющей основной инструментальной погрешности средства измерения.
7. Описать процесс нормирования случайной погрешности от гистерезиса.
8. Описать процесс нормирования дополнительной инструментальной погрешности средства измерения.

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

5.1. Математическая модель погрешности измерения

Математическую модель погрешности измерения в общем случае можно представить в виде объединения трёх основных составляющих погрешности

$$\Delta_и = \Delta_м * \Delta * \overset{o}{\Delta}, \qquad 5.1.1$$

где $\Delta_м$ – методическая погрешность измерения; Δ – инструментальная погрешность измерения; $\overset{o}{\Delta}$ – случайная погрешность, обусловленная действием внешних причин.

Методическая погрешность, как правило, рассчитывается и на неё вводятся поправки в результат измерения, поэтому её из дальнейшего рассмотрения исключаем.

Инструментальная погрешность описывается математической моделью (4.1.1). Если при проведении технических измерений границы внутренней случайной составляющая основной инструментальной погрешности

$$k\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right] \prec 0.1\Delta_{osp}, \qquad 5.1.2$$

то этой составляющей погрешности при обработке результатов измерений можно пренебречь.

Также можно пренебречь и гистерезисной составляющей основной инструментальной погрешности, если

$$k\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_{oH}\right] \prec 0.1\Delta_{osp}. \qquad 5.1.3$$

При выполнении условий (5.1.2) и (5.1.3) в основной инструментальной погрешности остаётся только систематическая составляющая Δ_{os}.

Динамические погрешности привязаны к конкретным типам средств измерения, общих подходов для их расчётов нет, поэтому в данном учебном пособии на них остановимся в гл. 8.

Дополнительная инструментальная погрешность в нормативно-технической документации указывается формулой или границами в рабочем диапазоне влияющих величин.

С учётом вышесказанного в большинстве случаев технических измерений математическая модель погрешности измерения будет иметь вид

$$\Delta_u = \Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}, \tag{5.1.4}$$

т.е. является объединением систематической инструментальной погрешности и случайной погрешности, обусловленной действием внешних причин.

Систематическая инструментальная погрешность задаётся классом точности средства измерения по ГОСТ 8401-80 или границами систематической погрешности Δ_{osp} и её среднеквадратическим отклонением $\sigma[\Delta_{os}]$ по ГОСТ 8.009-84.

5.2. Формы представления результатов измерений

В соответствии с методическими указаниями Госстандарта МИ 1317-86 результаты измерения могут представляться в двух вариантах.

В первом варианте в качестве характеристик погрешности измерения используются точечные оценки, такие, как среднее арифметическое значение или среднеквадратическое отклонение от среднего арифметического. Этот вариант применяют тогда, когда результат данного измерения будут использовать совместно с результатами других измерений с целью получения некоторого общего результата измерений. Например, при выполнении косвенных измерений используются результаты измерения нескольких приборов для определения по установленной формуле некоторого другого результата.

Во втором варианте в качестве характеристик погрешности используют интервальные оценки, т.е. границы, в пределах которых находятся погрешности измерения с заданной доверительной вероятностью.

Рассмотрим пример представления результатов измерения по первому варианту. Провели измерение добротности катушки индуктивности. Результаты измерения: добротность катушки индуктивности $Q = 70$, среднеквадратическое отклонение систематической погрешности от среднего арифметического значения $\sigma[\Delta_{os}]$=0.1, среднеквадратическое отклонение случайной погрешности $\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right] = 0.04$, диапазон значений измеряемой добротности от 50 до 80, диапазон температур окружающей среды от 15 до 25 $^{\circ}\mathrm{C}$.

Приведём пример представления результатов измерения по второму варианту. Измерили расход жидкости. Результаты измерения: расход жидкости $N = 30m^3/c$, границы погрешности измерения $\Delta_{osp} = \pm 0.2m^3/c$ с доверительной вероятностью $P_d = 0.95$, температура жидкости от 15 до 30 $^{\circ}\mathrm{C}$, диапазон значений измеряемого расхода от 10 до 50 m^3/c.

5.3. Способы уменьшения систематической погрешности в представленном результате измерения

Постоянная систематическая погрешность результата измерения, обусловленная основной систематической погрешностью средства измерения, может быть обнаружена только путём сравнения показаний данного средства измерения с показаниями другого, однотипного, но более точного средства измерения. В предельном случае это может быть эталонное средство измерения.

Для уменьшения инструментальной систематической погрешности результата измерения применяют различные способы. Приведём наиболее простые и эффективные из них.

Метод замещения.

Суть метода можно пояснить простым примером. Вольтметром измерили электрическое напряжение некоторого источника и получили показания 5.345 В. Затем к вольтметру подключили источник эталонного регулируемого напряжения, на котором установили значение 5.345 В. Вольтметр при этом выдал показания 5.348 В. Разность в показаниях 0.003 В и будет не исключённой систематической погрешностью используемого средства измерения. Чтобы исключить эту погрешность в результат измерения необходимо ввести поправку и представить его в виде

$$U_Д = 5.345 + 0.003 \pm \Delta_{osp} \text{ В},$$

где $U_Д$ – действительное значение измеряемого напряжения; Δ_{osp} – границы систематической погрешности эталонного средства измерения.

Метод компенсации по знаку

Этот метод предусматривает проведение двух измерений так, чтобы систематическая погрешность входила в результат каждого из них с разным знаком.

Например, проводим измерение напряжения $U_Д$ вольтметром, с аддитивной погрешностью ΔU.

Результат первого измерения

$$U_Д = U_{и1} + \Delta U\ , \qquad 5.3.1$$

где $U_{и1}$ – показания вольтметра; ΔU – неизвестная систематическая аддитивная погрешность вольтметра.

Изменим полярность подключения источника измеряемого напряжения и проведём его измерение. Получим результат

$$U_{\partial} = U_{и2} - \Delta U\ . \qquad 5.3.2$$

Для исключения аддитивной составляющей инструментальной погрешности средства измерения находим среднее значение результатов двух измерений.

Из (5.3.1) и (5.3.1) следует

$$U_{и1} + \Delta U = U_{и2} - \Delta U\ , \qquad 5.3.3$$

откуда

$$\Delta U = -\frac{U_{и1} - U_{и2}}{2}\ . \qquad 5.3.4$$

Подставляя (5.3.4) в (5.3.1), получим

$$U_{\partial} = U_{и1} - \frac{U_{и1} - U_{и2}}{2} = \frac{U_{и1} + U_{и2}}{2}\ . \qquad 5.3.5$$

Как видим, обработанные таким образом результаты измерения не содержат систематической аддитивной погрешности измерения.

Метод рандомизации

Суть метода состоит в том, что неизвестная величина x измеряется различными типами средств измерения с различными систематическими погрешностями. Систематические погрешности каждого участвующего в эксперименте средства измерения являются величинами случайными.

Для i-го средства измерения показания будут равны

$$x_i = x_{\partial} - \Delta x_i\ , \qquad 5.3.6$$

где Δx_i – систематическая погрешность i-го средства измерения.

Среднее значение показаний всех средств измерения, задействованных в проведении эксперимента, равны

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{\partial} - \Delta x_i\right) = x_{\partial} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i. \qquad 5.3.7$$

Из полученного выражения следует, что в результате описанного приёма, именуемого рандомизацией, систематическая погрешность уменьшается в n раз, где n – число участвующих в измерительном эксперименте средств измерения.

Контрольные вопросы

1. Представить математическую модель погрешности измерения в общем виде и дать пояснения.
2. Представить частные случаи математической модели погрешности измерения.
3. Как представить результат измерения с использованием точечных оценок? Привести пример.
4. Как представить результат измерения с использованием интервальных оценок? Привести пример.
5. В чём заключается сущность метода замещения, используемого для уменьшения систематической инструментальной погрешности измерения?
6. В чём заключается метод компенсации по знаку, используемый для уменьшения систематической инструментальной погрешности измерения?
7. В чём заключается метод рандомизации при уменьшении систематической инструментальной погрешности измерения?

6. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ОТ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ С ОБОЗНАЧЕННЫМ КЛАССОМ ТОЧНОСТИ

6.1. Прямые однократные измерения

Прямыми измерениями называют такие измерения, при которых искомое значение физической величины находят непосредственно по показаниям измерительного прибора, например, напряжение – по показаниям вольтметра, температуру – по показаниям термометра.

Однократные измерения проводят тогда, когда случайная составляющая погрешности значительно меньше систематической погрешности средства измерения. Если границы случайной составляющей погрешности, обусловленной действием внешних причин

$$k\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right] \prec 0.1\Delta_{osp}, \qquad 6.1.1$$

то можно проводить однократные измерения. Математическая модель погрешности измерения (5.1.4) в этом случае будет иметь вид

$$\Delta_u = \Delta_{os}. \qquad 6.1.2$$

При проведении прямых измерений приборами с установленным классом точности нужно иметь в виду, что у таких средств измерения не нормируется случайная составляющая погрешности от внутренних причин и не нормируется дополнительная погрешность в рабочем диапазоне влияющих внешних факторов.

В разд. 3 показано, что класс точности средства измерения устанавливается по-разному, в зависимости от того, какая составляющая инструментальная погрешность преобладает: аддитивная, мультипликативная или они соизмеримы. Обработка результатов измерений несколько различается в зависимости от того, как установлен класс точности прибора.

6.1.1. Обработка результатов измерений, полученных от приборов, с нормированной мультипликативной погрешностью

Если однократное измерение проведено прибором, у которого класс точности нормирован мультипликативной погрешностью, то относительная погрешность измерения в соответствии с (3.2.11) будет равна

$$\delta = \delta_{\text{кл}} = \frac{\Delta_{os}}{x_{\text{и}}}100, \qquad 6.1.3$$

где $x_{\text{и}}$ – показания измерительного прибора; Δ_{os} – абсолютная погрешность измерения; $\delta_{кл}$ – класс точности прибора, которым проведено измерение.

Из (6.1.1) находим абсолютную погрешность измерения

$$\Delta_{os} = \frac{1}{100}\delta_{\text{кл}} x_{\text{и}}. \qquad 6.1.4$$

Действительное значение измеряемой физической величины будет лежать в интервале

$$x_{\text{и}} - \Delta_{os} \prec x_{\text{д}} \prec x_{и} + \Delta_{os}, \qquad 6.1.5$$

$$x_{\text{д}} = x_{\text{и}} \pm \Delta_{os},\ P_{\text{д}}. \qquad 6.1.6$$

Форму записи (6.1.5) используют, если нижняя и верхняя граница интервала погрешности по модулю не равны.

Например, провели измерение напряжения вольтметром с классом точности $\delta_{кл} = 1.0$, показания вольтметра равны 5.0 В. Границы абсолютной погрешности измерения, в соответствии с (6.1.4), при этом будут равны

$$\Delta U = \frac{1.0 \cdot 5.0}{100} = 0.05\text{В}.$$

Результат измерения представляем границами, в которых с доверительной вероятностью 0.95 или 0.997 лежит действительное значение измеряемого напряжения

$$4.95 \prec U_{\text{д}} \prec 5.05\text{В}.$$

Доверительная вероятность устанавливается при нормировании инструментальной погрешности и указывается в нормативно-технической документации на средство измерения.

Если у средства измерения задана в нормативно-технической документации дополнительная погрешность, например температурная

Δ_{ct}, определённая каким-либо способом, то результат измерения нужно представить с учётом дополнительной погрешности

$$x_{\text{и}} - \Delta_{os} + \Delta_{ct} \prec x_{\text{д}} \prec x_{\text{и}} + \Delta_{os} + \Delta_{ct},$$

$$x_{\text{д}} = x_{\text{и}} \pm \Delta_{os} + \Delta_{ct}.$$

Дополнительная погрешность сдвигает границы доверительного интервала в одну сторону.

6.1.2. Обработка результатов измерений, полученных от приборов с нормированной аддитивной погрешностью

Если измерение проведено прибором, у которого класс точности нормирован аддитивной погрешностью, то приведённая погрешность измерения, в соответствии с (3.3.9), в этом случае будет равна

$$\gamma = \gamma_{кл} = \frac{\Delta_{os}}{x_m} 100, \qquad 6.1.7$$

где Δ_{os} – границы абсолютной погрешности измерения; x_m – верхний предел измерения прибора.

Из (6.1.7) находим границы абсолютной погрешности измерения

$$\Delta_{os} = \frac{1}{100} x_m \gamma_{\text{кл}}. \qquad 6.1.8$$

Результат измерения можно представлять в двух формах:

$$x_{\text{и}} - \Delta_{os} \prec x_{\text{д}} \prec x_{\text{и}} + \Delta_{os}, \qquad 6.1.9$$

$$x_{\text{д}} = x_{\text{и}} \pm \Delta_{os},\ P_{\text{д}}, \qquad 6.1.10$$

где $x_{\text{и}}$ – показания средства измерения; $x_{\text{д}}$ – действительное значение измеряемой физической величины; P_d – доверительная вероятность нахождения погрешности измерения в доверительном интервале $\pm \Delta os$.

Запись в форме (6.1.9) необходимо использовать, когда границы доверительного интервала по модулю не равны.

Например, провели измерение электрического напряжения вольтметром, у которого класс точности нормирован аддитивной погрешностью $\gamma_{кл} = 1.0$. Верхний предел измерения $U_m = 10\text{В}$, показания вольтметра $U_{\text{и}} = 5.00\text{В}$. Границы абсолютной погрешности измерения в соответствии с (6.1.8) определятся числом

$$\Delta U \le \frac{1}{100} U_m \gamma_{\text{кл}} = \frac{1}{100} 10 \cdot 1.0 = 0.1\text{В}.$$

Результат измерения представляем границами, в которых с доверительной вероятностью 0.95 или 0.997 лежит действительное значение измеряемого напряжения

$$5.0 - 0.1\text{В} \prec U_{\text{д}} \prec 5.0 + 0.1\text{В}$$

или

$$U_{\text{д}} = 5.0 \pm 0.1B \quad , P_{\text{д}} = 0.95\,(0.997).$$

Рассмотренные два варианта являются наиболее употребляемыми при представлении результатов измерения, полученных аналоговыми средствами измерения.

6.1.3. Обработка результатов измерений, полученных прибором с аддитивной и мультипликативной составляющими погрешности

Класс точности средства измерения, обладающего аддитивной и мультипликативной составляющими инструментальной погрешности, определяется коэффициентами c и d, указанными в нормативно-технической документации на измерительный прибор. При выполнении измерения таким прибором относительная погрешность будет лежать в интервале (3.4.3)

$$\delta = \frac{\Delta_{os}}{x_{\text{и}}} \cdot 100 = \pm\left[c + d\left(\frac{x_m}{x_{\text{и}}} - 1\right)\right], \qquad 6.1.11$$

где Δ_{os} – границы, в которых лежит действительное значение погрешности проведённого измерения; $x_{\text{и}}$ – показания измерительного прибора; x_{m} – верхний предел измерения прибора; c и d – коэффициенты, определяющие класс точности средства измерения.

Границы абсолютной погрешности измерения находим из (6.1.11)

$$\Delta_{os} = \pm\frac{1}{100} x_{\text{и}}\left[c + d\left(\frac{x_m}{x_{\text{и}}}\right) - 1\right]. \qquad 6.1.12$$

Результаты измерения представляем в форме (6.1.9) или (6.1.10)

$$x_{\text{д}} = x_{и} \pm \Delta_{os},\ P_{\text{д}}. \qquad 6.1.13$$

Для примера рассмотрим представления результата измерения электрического тока амперметром, класс точности которого задан коэффициентами c и d, 2.0/1.0. Предел измерения амперметра 10 А, показания амперметра 4.53 А. Границы абсолютной погрешности выполненного измерения

$$\Delta I = \frac{1}{100} \cdot 4.53\left[2.0 + 1.0\left(\frac{10}{4.5}\right) - 1\right] = 0.15 \text{ А.}$$

Окончательный результат измерения

$$I_{\text{д}} = 4.53 \pm 0.15A,\ P_{\text{д}} = 0.95(0.997).$$

6.2. Прямые многократные измерения

6.2.1. Прямые многократные измерения с преобладающей случайной составляющей погрешности измерения

Если при проведении нескольких повторных измерений одной и той же физической величины $x_{\text{д}}$ в одинаковых условиях окажется, что результаты измерения (показания средства измерения) заметно различаются, то из этого следует вывод о присутствии в погрешности измерения случайной составляющей и о необходимости проводить многократные измерения с целью оценки значения случайной погрешности.

Рассмотрим случай, когда систематическая погрешность пренебрежимо мала по сравнению со случайной погрешностью, что можно считать допустимым при выполнении неравенства

$$\Delta_{osp} \prec 0.1\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right], \tag{6.1.14}$$

где Δ_{osp} – границы основной систематической погрешности средства измерения; $\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]$ – среднее квадратическое отклонение результатов отдельных измерений от их среднего арифметического значения, определяемого объединением

$$\overset{o}{\Delta} = \overset{o}{\Delta}_o * \overset{o}{\Delta}_{oH} * \overset{o}{\Delta}_{ext}\ , \tag{6.1.15}$$

которое, в данном случае, является математической моделью погрешности измерения.

В (6.1.15) $\overset{o}{\Delta}_o$ – случайная составляющая основной инструментальной погрешности средства измерения; $\overset{o}{\Delta}_{oH}$ – случайная погрешность от гистерезиса; $\overset{o}{\Delta}_{ext}$ – случайная погрешность, порождённая внешними причинами; $\overset{o}{\Delta}$ – суммарная, случайная погрешность, обусловленная действием всех представленных в объединении (6.1.15) причин.

Для получения результата измерения физической величины $x_д$, при превалирующей случайной погрешности, проведём n измерений одним j-м прибором, случайно взятым из партии приборов. Получим множество показаний средства измерения

$$x_и = \{x_{и1} \cdots x_{иi} \cdots x_{иn}\}. \qquad 6.1.16$$

Среднее арифметическое значение показаний

$$\bar{x}_и = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{иi}. \qquad 6.1.17$$

Абсолютная погрешность i-го измерения равна

$$\Delta_i = x_{иi} - x_д. \qquad 6.1.18$$

Поскольку неизвестно значение измеряемой физической величины, то неизвестно и значение абсолютной погрешности измерения. Выражение (6.1.18) всего лишь математическая формула, которая никогда не может быть использована на практике. На практике мы имеем среднее арифметическое значение измеряемой величины (6.1.17) и среднеквадратическое отклонение результатов отдельных измерений от их среднего арифметического для j-го средства измерения

$$\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_j\right] = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{иi} - \bar{x}_u\right)^2}. \qquad 6.1.19$$

Среднеквадратическое отклонение (6.1.19) характеризует разброс результатов отдельных измерений $x_{иi}$ относительно их среднего арифметического $\bar{x}_и$, но не даёт информации относительно отклонения $\bar{x}_и$ от $x_д$.

Чтобы оценить отклонение среднего арифметического значения результатов измерений от действительного значения измеряемой физической величины, проведём m серий измерений по n измерений в каждой серии, в результате получим m средних арифметических значений результатов измерений физической величины.

$$\bar{x}_и = \left\{\bar{x}_{и1} \cdots \bar{x}_{иj} \cdots \bar{\mathrm{x}}_{иm}\right\}. \qquad 6.1.20$$

Среднее из средних арифметических равно

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{m}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \bar{x}_{иj}. \qquad 6.1.21$$

Среднеквадратическое отклонение результатов измерения от их среднего арифметического в каждой серии образуют множество

$$\sigma\left[\overset{o}{\Delta}j\right]=\left\{\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_1\right]\cdots\sigma\left[\overset{o}{\Delta}j\right]\cdots\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_m\right]\right\}. \qquad 6.1.22$$

Среднеквадратическое отклонение среднего результата измерения в j-ой серии от среднего арифметического значения всех серии экспериментов равно

$$\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_{\text{o}}\right]=\sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{\text{j}=1}^{\text{m}}\left(\bar{x}_{\text{иj}}-\bar{\bar{x}}_{\text{и}}\right)^2}\ . \qquad 6.1.23$$

Результат измерения в окончательном виде

$$\bar{\bar{x}}_{\text{и}}-k\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right]\prec x_{\text{д}}\prec\bar{\bar{x}}_{\text{и}}+k\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right]. \qquad 6.1.24$$

В теории вероятностей доказано, что можно получить такую же точность измерения, проведя всего одну серию из n измерений, после чего вычислить среднее арифметическое по формуле (6.1.17) и среднеквадратическое отклонение среднего арифметического от действительного значения измеряемой физической величины по формуле

$$\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right]=\sqrt{\frac{1}{(n-1)n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{\text{иi}}-\bar{x}_{\text{и}}\right)^2}\ . \qquad 6.1.25$$

Результат измерения представляется в окончательном виде

$$\bar{x}_{\text{и}}-k\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right]\prec x_{\text{д}}\prec\bar{x}_{\text{и}}+k\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right]. \qquad 6.1.26$$

Измеряемое значение физической величины находится в интервале, указанном в (6.1.26) с доверительной вероятностью $P_{\text{д}}$= 0.95 при k =2 и $P_{\text{д}}$= 0.997 при k= *3*.

На практике при обработке результатов многократных измерений используются формулы (6.1.17) и (6.1.25).

6.2.2. Прямые многократные измерения в присутствии систематической и случайной составляющих инструментальной погрешности измерения

Несколькими прикидочными измерениями установлено, что случайная погрешность соизмерима с систематической погрешностью средства измерения

$$0.1\,\Delta_{osp} \prec \sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right] \prec \Delta_{osp}. \qquad 6.1.27$$

Математическая модель погрешности измерения в данном случае

$$\Delta = \Delta_{os} * \overset{O}{\Delta}_o. \qquad 6.1.28$$

Систематическая погрешность определяется классом точности средства измерения. Если у средства измерения преобладает мультипликативная составляющая инструментальной погрешности, то границы систематической погрешности определяются как

$$\Delta_{osp} = \pm\frac{1}{100}\delta_{\text{кл}} x_{\text{и}}, \qquad 6.1.29$$

где $\delta_{кл}$ – класс точности средства измерения; $x_{\text{и}}$ – показания средства измерения; Δ_{osp} – границы систематической погрешности.

Если у средства измерения преобладает аддитивная составляющая инструментальной погрешности, то границы систематической погрешности определяются как

$$\Delta_{osp} = \pm\frac{1}{100}\gamma_{\text{кл}} x_m, \qquad 6.1.30$$

где $\gamma_{\text{кл}}$ – класс точности средства измерения с аддитивной погрешностью; x_m – верхний предел средства измерения.

При сопоставимых аддитивной и мультипликативной составляющих инструментальной погрешности, границы инструментальной погрешности определяются по формуле

$$\Delta_{osp} = \pm\frac{x_{\text{и}}}{100}\left[c + d\left(\frac{x_m}{x_{\text{и}}} - 1\right)\right], \qquad 6.1.31$$

где c и d – коэффициенты, нормирующие класс точности средства измерения; $x_{\text{и}}$ – показания средства измерения; x_m – верхний предел средства измерения.

Границы доверительного интервала систематической погрешности связаны со среднеквадратическим отклонением погрешности соотношением

$$\Delta_{osp} = k\sigma\left[\Delta_{os}\right],$$

из которого следует

$$\sigma\left[\Delta_{os}\right] = \frac{\Delta_{osp}}{k}. \qquad 6.1.32$$

Оценки случайной составляющей погрешности измерения находятся после проведения многократных измерений и статистической обработки с использованием формул (6.1.17) и (6.1.25). Эта составляющая погрешности оценивается среднеквадратическим отклонением среднего значения показаний средства измерения от действительного значения измеряемой физической величины (6.1.25).

Среднеквадратическоё отклонение суммарной погрешности от среднего арифметического, согласно правилу сложения СКО некореллированых случайных величин, равно

$$\sigma[\Delta] = \sqrt{\sigma[\Delta_{os}]^2 + \sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right]^2} . \qquad 6.1.33$$

Определив суммарное значение среднеквадратического отклонения погрешности, находим границы погрешности измерения

$$\Delta_p = k\sigma[\Delta]. \qquad 6.1.34$$

Результаты измерения в рассматриваемом случае

$$\bar{x}_{\text{и}} - \Delta_p \prec x_{\text{д}} \prec \bar{x}_{\text{и}} + \Delta_p . \qquad 6.1.35$$

где $\bar{x}_{\text{и}} = \frac{1}{n}\sum_{\text{i}=1}^{\text{n}} x_{\text{иi}}$, а Δ_p – по формуле (6.1.34).

6.3. Обработка результатов косвенных измерений

При осуществлении косвенных измерений искомая физическая величина находится путём вычислений с использованием результатов прямых измерений других физических величин, функционально с ней связанных.

Например, требуется измерить мощность, выделяемую током I на резисторе R (рис. 6.3.1).

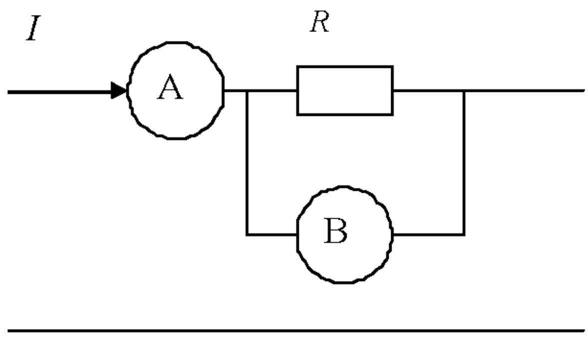


Рис. 6.3.1. Измерение электрической мощности, выделяемой током I на резисторе R, по методу амперметра и вольтметра

Соотношение между током, напряжением и мощностью устанавливает выражение

$$P = U \cdot I. \qquad 6.3.1$$

Падение электрического напряжения на резисторе измеряется вольтметром с известным классом точности, электрический ток, протекающий по резистору, измеряется амперметром тоже с известным классом точности.

Вольтметр и амперметр осуществляют прямые измерения. Каждый из них имеет свою погрешность измерения. Как найти погрешность измерения мощности.

Для этого представим измеряемую косвенно физическую величину как функцию нескольких прямо измеряемых физических величин

$$y = f\left(x_1 \cdots x_i \cdots x_n\right), \qquad 6.3.2$$

где $x_1 \cdots x_n$ – физические величины, определяемые прямыми измерениями; y – искомая физическая величина.

После проведения измерений и вычислений получим функцию

$$y_{\text{и}} = f\left(x_{\text{и}1} \cdots x_{\text{и}i} \cdots x_{\text{и}n}\right), \qquad 6.3.3$$

где $x_{\text{и}1} \cdots x_{\text{и}n}$ – показания средств измерения, осуществляющих прямые измерения; $y_{\text{и}}$ – измеренное значение искомой физической величины.

При прямом измерении *i*-ой физической величины имеет место погрешность измерения

$$\Delta_i = x_{\text{и}i} - x_i. \qquad 6.3.4$$

Эта погрешность для типа прибора, которым осуществлено измерение величины x_i, может быть представлена границей интервала $\Delta_{osp.i}$, в котором лежат погрешности всех приборов данного типа, с доверительной вероятностью P_d:

$$\Delta_{osp.i} = k\sigma\left[\Delta_i\right]. \qquad 6.3.5$$

В (6.3.5) $\sigma\left[\Delta_i\right]$ среднеквадратическое отклонение систематической погрешности всех приборов типа от их среднего арифметического значения. Доверительная вероятность равна 0.95 при *k* =2 и 0.997 при *k*=3.

Поскольку все приборы, участвующие в косвенном измерении физической величины *y*, имеют погрешность измерения, определяемую их классом точности, то и значение искомой физической величины будет вычислено с погрешностью

$$\Delta_y = y_{\text{и}} - y. \qquad 6.3.6$$

Для нахождения этой погрешности найдём полный дифференциал функции (6.3.2)

$$dy = \frac{\partial f(x_1 \cdots x_i \cdots x_n)}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial f(x_1 \cdots x_i \cdots x_n)}{\partial x_n} dx_n . \qquad 6.3.7$$

Переходя от дифференциально малых приращений к малым конечным приращениям, получим

$$\Delta y = \frac{\partial f(x_1 \cdots x_i \cdots x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \cdots \frac{\partial f(x_1 \cdots x_i \cdots x_n)}{\partial x_n} \Delta x_n . \qquad 6.3.8$$

Частные производные в (6.3.8) определяют вклад каждого средства измерения, участвующего в измерительном эксперименте, в погрешность измерения искомой физической величины y

$$\Delta y = k_{x1} \Delta x_1 + \cdots k_{xi} \Delta x_i + \cdots k_{xn} \Delta x_n , \qquad 6.3.9$$

где $k_{x1} \cdots k_{xi} \cdots k_{xn}$ – весовые коэффициенты погрешностей средств измерения, участвующих в физическом измерительном эксперименте.

Поскольку погрешности участвующих в эксперименте приборов величины случайные, то и Δy – величина случайная, границы которой определяют интервал

$$\Delta_{osp} = k\sigma[\Delta y]. \qquad 6.3.10$$

Используя (6.3.5), можем записать

$$\Delta_{osp} = k\sigma[\Delta y] = k_{x1} k\sigma[\Delta x_1] + \cdots k_{xi} k\sigma[\Delta x_i] + \cdots k_{xn} k\sigma[\Delta x_n]. \qquad 6.3.11$$

Коэффициент k определяет значение доверительной вероятности и равен 2 или 3. Если значение этого коэффициента у всех погрешностей одинаково, то

$$\sigma[\Delta y] = k_{x1} \sigma[\Delta x_1] + \cdots k_{xi} \sigma[\Delta x_i] + \cdots k_{xn} \sigma[\Delta x_n]. \qquad 6.3.12$$

Среднеквадратическое значение погрешности измерения искомой физической величины $\sigma[\Delta y]$ определяется суммой и весовыми коэффициентами погрешностей, участвующих в эксперименте приборов.

Суммирование погрешностей нужно проводить с учётом их взаимной корреляции. Поскольку в эксперименте участвуют разнотипные средства измерения, то их погрешности не коррелированны и, следовательно, нужно проводить их геометрическое суммирование

$$\sigma[\Delta y] = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (k_{xi} \sigma[\Delta x_i])^2} . \qquad 6.3.13$$

Если окажется, что погрешности приборов коррелированны, то суммирование нужно проводить алгебраическое

$$\sigma[\Delta y] = k_{x1}\sigma[\Delta x_1] + \cdots k_{xn}\sigma[\Delta x_n]. \qquad 6.3.14$$

В качестве примера косвенных измерений рассмотрим измерение электрической мощности по методу амперметра и вольтметра.

Напряжение измерили вольтметром с преобладающей мультипликативной составляющей погрешности и обозначенным классом точности $\delta_{кл} = 1.0$, показания вольтметра оказались равными $U_{и} = 5.00\text{В}$. Электрический ток измерили амперметром с преобладающей аддитивной погрешностью и обозначенным классом точности $\gamma_{кл} = 1.0$, показания амперметра $1.00\ \text{А}$, верхний предел измерения по шкале амперметра $5\ \text{А}$.

Абсолютную погрешность измерения электрического напряжения вольтметром вычисляем по классу точности прибора

$$\delta_{кл} = \frac{\Delta U}{U_{и}}100. \qquad 6.3.15$$

Из (6.3.15) следует

$$\Delta U = \frac{1}{100}\delta_{кл}U_{и}. \qquad 6.3.16$$

Подставляя в (6.3.16) численные значения, получим

$$\Delta U = \frac{1}{100} \cdot 1.0 \cdot 5.00 = 0.05\ \text{В}.$$

Абсолютная погрешность связана со среднеквадратическим значением погрешности соотношением

$$\Delta U = k\sigma[\Delta U], \qquad 6.3.17$$

откуда среднеквадратическое значение погрешности равно

$$\sigma[\Delta U] = \frac{\Delta U}{k}. \qquad 6.3.18$$

При k =2, что соответствует доверительной вероятности 0.95,

$$\sigma[\Delta U] = 0.025\text{В}. \qquad 6.3.19$$

Абсолютную погрешность измерения электрического тока определяем по классу точности амперметра

$$\gamma_{кл} = \frac{\Delta I}{I_m}100. \qquad 6.3.20$$

Из (6.3.20) следует, что

$$\Delta I = \frac{1}{100} \cdot \gamma_{\text{кл}} I_m . \qquad 6.3.21$$

Подставляя численные значения величин, определим абсолютную погрешность измерения электрического тока

$$\Delta I = \frac{1}{100} \cdot 1.0 \cdot 5.0 = 0.05 \ \text{А} . \qquad 6.3.22$$

Среднеквадратическое значение погрешности измерения электрического тока

$$\sigma\left[\Delta I\right] = \frac{\Delta I}{k} = \frac{0.05}{2} = 0.025\text{А} . \qquad 6.3.23$$

Определим далее весовые коэффициенты погрешностей вольтметра и амперметра

$$k_u = \frac{\partial P}{\partial U} = \frac{\partial (UI)}{\partial U} = I = 1.00 \ \text{А} , \qquad 6.3.24$$

$$k_I = \frac{\partial P}{\partial I} = U = 5.00\,\text{В} . \qquad 6.3.25$$

На основании (6.3.13) среднеквадратическое значение погрешности измерения мощности будет равно

$$\sigma[\Delta P] = \sqrt{(k_u \sigma[\Delta U])^2 + (k_i \sigma[\Delta I])^2} . \qquad 6.3.26$$

После подстановки численных значений величин, входящих в (6.3.36), получим

$$\sigma[\Delta P] = \sqrt{(1.00 \cdot 0.025)^2 + (5.00 \cdot 0.025)^2} = \sqrt{6.25 \cdot 10^{-4} + 156.3 \cdot 10^{-4}} = 0.13 .$$

В приведённом примере больший вес имеет погрешность амперметра. Это объясняется тем, что класс точности амперметра определён аддитивной погрешностью, которая особенно сильно сказывается в начале шкалы. В нашем случае предел измерения 5В, а показания прибора 1В, как раз находятся в начале шкалы.

Границы погрешности измерения мощности

$$\Delta osp = k\sigma[\Delta P] . \qquad 6.3.27$$

При k =2 имеем $\Delta_{osp} = 0.26\,\text{Вт}$, а при k =3 имеем $\Delta_{0sp} = 0.39\,\text{Вт}$.

Результат косвенных измерений представляем в виде

$$P_{\text{и}} - \Delta_{osp} \prec P_{\text{д}} \prec P_{\text{и}} + \Delta_{osp}. \qquad 6.3.28$$

После подстановки численных значений получаем результат измерения

$$5.00 - 0.26 \text{ Вт} \prec P_{\text{д}} \prec 5.00 + 0.26 \text{ Вт}.$$

6.4. Обработка результатов совместных измерений

6.4.1. Совместные измерения и однофакторный эксперимент

Имеем две физические величины: независимую x и зависимую y. Задача совместных измерений или однофакторного эксперимента заключается в том, чтобы установить математическую зависимость между величинами x и y.

По ГОСТ 16263-70 эта процедура называется совместными измерениями, а по ГОСТ 24026-80 называется однофакторным экспериментом.

При нахождении зависимости y от x возможны два варианта.

Вариант первый: зависимость y от x функциональная, известна по виду, и нужно найти коэффициенты, входящие в зависимость

$$y = f(x). \qquad 6.4.1$$

Например, для термопары зависимость выходного напряжения от температуры имеет вид

$$U = \alpha\left(t^o - t_x^o\right) + \beta\left(t^o - t_x^o\right)^2, \qquad 6.4.2$$

где t^o – температура горячего спая термопары; t_x^o – температура холодных концов термопары; α и β – коэффициенты, которые нужно определить проведением совместных измерений.

В этом варианте можно говорить о совместном измерении температуры и напряжения.

Вариант второй. Зависимость между x и y носит корреляционный характер. В этом случае правильнее говорить об однофакторном эксперименте. Зависимость y от x выражается некоторой аппроксимирующей функцией

$$\bar{y} = f(x). \qquad 6.4.3$$

Математическим выражением, описывающим аппроксимирующую функцию, могут быть элементарные математические функции, а в общем случае многочлен вида

$$\bar{y} = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n. \qquad 6.4.4$$

6.4.2. Совместные измерения

Реализацию совместных измерений рассмотрим на примере определения коэффициентов уравнения преобразования термопары (6.4.2).

Для решения поставленной задачи необходимо провести два раза совместные измерения температуры и выходного напряжения термопары.

Число повторных совместных измерений определяется числом неизвестных коэффициентов уравнения преобразования. В рассматриваемом случае число неизвестных коэффициентов равно двум, поэтому необходимо провести минимум два совместных измерения.

При первом совместном измерении температуры и напряжения термопары устанавливаем температуру горячего спая t_1 (в термостате) и измеряем напряжение U_1 на выходных зажимах термопары, получаем уравнение преобразования в виде

$$U_1 = \alpha(t_1 - t_x) + \beta(t_1 - t_x)^2 . \qquad 6.4.5$$

При проведении второго эксперимента по совместному измерению, устанавливаем температуру в термостате t_2 и измеряем соответствующее этой температуре напряжение термопары U_2. В результате получаем второе уравнение преобразования

$$U_2 = \alpha(t_2 - t_x) + \beta(t_2 - t_x)^2 . \qquad 6.4.6$$

Решив систему уравнений (6.4.5) и (6.4.6), найдём коэффициенты

$$\alpha = \frac{U_2 t_1^2 - U_1 t_2^2}{t_2 t_1^2 - t_1 t_2^2}, \qquad 6.4.7$$

$$\beta = \frac{U_1}{t_1^2} - \frac{U_2 t_1^3 - U_1 t_2^2 t_1}{t_2 t_1^4 - t_1^3 t_2^2}. \qquad 6.4.8$$

Погрешность определения коэффициентов будет определяться погрешностью вольтметра, измеряющего выходное напряжение термопары, и термометра, измеряющего температуру в термостате.

В нормативно-технической документации на вольтметр и термометр указаны их класс точности. По классу точности и доверительной вероятности, с которой установлен класс точности, определяем среднеквадратическое значение погрешностей для вольтметра $\sigma[\Delta_U]$ и для термометра $\sigma[\Delta_t]$ при измеренных значениях U_1 , U_2 и t_1, t_2.

Весовые коэффициенты погрешностей вольтметра и термометра при определении коэффициента α находим как частные производные

$$k_{\alpha U2} = \frac{\partial \alpha}{\partial U_2}, \quad k_{\alpha U1} = \frac{\partial \alpha}{\partial U_1}, \quad k_{\alpha t1} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_1}, \quad k_{\alpha t2} = \frac{\partial \alpha}{\partial t_2}. \qquad 6.4.9$$

Весовые коэффициенты погрешностей вольтметра и термометра при определении коэффициента β находим аналогичным образом:

$$k_{\beta U2} = \frac{\partial \beta}{\partial U_2}, \quad k_{\beta U1} = \frac{\partial \beta}{\partial U_1}, \quad k_{\beta t1} = \frac{\partial \beta}{\partial t_1}, \quad k_{\beta t2} = \frac{\partial \beta}{\partial t_2}. \qquad 6.4.10$$

Среднеквадратическое значение погрешности нахождения коэффициента α будет равно:

$$\sigma[\Delta_\alpha] = \sqrt{\left(k_{\alpha U2}\sigma[\Delta_{U2}]\right)^2 + (k_{\alpha U1}\sigma[\Delta_{U1}])^2 + \left(k_{\alpha t1}\sigma[\Delta_{t1}]\right)^2 + \left(k_{\alpha t2}\sigma[\Delta t_2]\right)^2}.$$

6.4.11

При

$$\sigma[\Delta_{U2}] = \sigma[\Delta_{U1}] = \sigma[\Delta_U] \quad \text{и} \quad \sigma[\Delta_{t1}] = \sigma[\Delta_{t2}] = \sigma[\Delta_t] \qquad 6.4.12$$

имеем

$$\sigma[\Delta_\alpha] = \sqrt{\left(k_{\alpha U2}{}^2 + k_{\alpha U1}{}^2\right)\sigma[\Delta_U]^2 + \left(k_{\alpha t1}{}^2 + k_{\alpha t2}{}^2\right)\sigma[\Delta_t]^2}. \qquad 6.4.13$$

Среднеквадратическое значение погрешности нахождения коэффициента β равно:

$$\sigma[\Delta_\beta] = \sqrt{\left(k_{\beta U2}\sigma[\Delta_U]\right)^2 + \left(k_{\beta U1}\sigma[\Delta_U]\right)^2 + \left(k_{\beta t1}\sigma[\Delta_t]\right)^2 + \left(k_{\beta t2}\sigma[\Delta_t]\right)^2}. \quad 6.4.14$$

Если при вычислении $\sigma[\Delta_\beta]$ по (6.4.14) выполняется условие (6.4.12), то

$$\sigma[\Delta_\beta] = \sqrt{\left(k_{\beta U2}{}^2 + k_{\beta U1}{}^2\right)\sigma[\Delta_U]^2 + \left(k_{\beta t1}{}^2 + k_{\beta t2}{}^2\right)\sigma[\Delta_t]}. \qquad 6.4.15$$

6.4.3. Однофакторный эксперимент

По ГОСТ 24026-80 однофакторный эксперимент ставит целью установление корреляционной зависимости между двумя физическими величинами x и y. Одна физическая величина x объективно существует и имеет определённое количественное значение. Другая физическая величина, или результат измерения, y корреляционно связаны с величиной x.

Установим несколько фиксированных значений измеряемой величины и будем их рассматривать как множество

$$x = \{x_1 \cdots x_i \cdots x_n\}. \qquad 6.4.16$$

При проведении многократных измерений значения физической величины x_i получаем множество результатов измерений

$$y_i = \{y_{i1} \cdots y_{ij} \cdots y_{in}\}. \qquad 6.4.17$$

При проведении измерений других значений физической величины x будем иметь другие множества значений y .

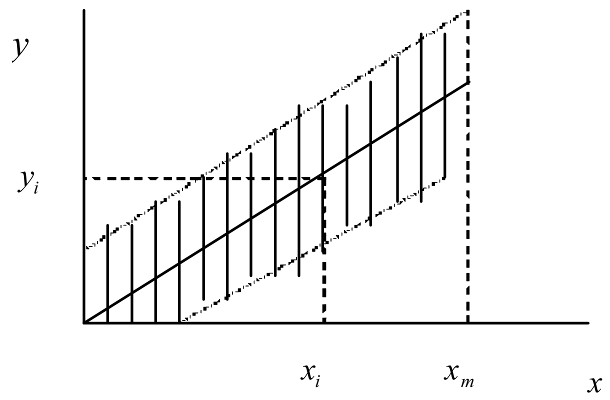


Рис. 6.4.1. Корреляционная зависимость у от х. Определение аппроксимирующей функции $y = f(x)$

Если, полученные в результате измерительных экспериментов множества, отобразить графически, то получится нечто вроде изображённого на рис. 6.4.1

Значения y не укладываются на какую-либо монотонно изменяющуюся кривую. После нанесения экспериментальных данных на график проводят линии *1* и *2*, между которыми располагаются экспериментальные точки.

Задача обработки результатов однофакторного эксперимента заключается в том, чтобы найти такую аппроксимирующую функцию

$$\bar{y} = f(x), \qquad 6.4.18$$

которая наилучшим образом отображала бы связь между x и y.

Для решения указанной задачи существуют различные методы.

Наибольшее распространение получил метод наименьших квадратов.

В методе наименьших квадратов для получения аппроксимирующей зависимости $\bar{y} = f(x)$ используем многочлен вида

$$\bar{y} = a_o + a_1 x + \cdots a_i x^i + \cdots a_n x^n . \qquad 6.4.19$$

Для рассмотрения сущности метода и с целью его упрощения ограничимся двумя членами выражения (6.4.19).

$$\bar{y} = a_o + a_1 x. \qquad 6.4.20$$

Величину

$$\Delta y = y_i - \bar{y}_i \qquad 6.4.21$$

принято называть невязкой или остаточной погрешностью измерения.

Согласно методу наименьших квадратов, наилучшая оценка $\bar{y}_i$ величин y_i, соответствующих x_i, будет найдена при минимальном значении суммы квадратов невязок

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 = \min. \qquad 6.4.22$$

Для определения коэффициента a_o, при котором сумма квадратов невязок минимальна, найдём производную от левой части (6.4.22) по a_o

$$\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i^2\right)}{\partial a_o} = \frac{\partial\left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_o - a_1 x_i)^2\right]}{\partial a_o} =$$

$$=-2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_o - a_1 x_i\right) = 0. \qquad 6.4.23$$

Для определения a_1, при котором сумма квадратов невязок минимальна, найдём производную от левой части (6.4.22) по a_1

$$\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i^2\right)}{\partial a_1} = \frac{\partial\left[\sum_{i=1}^{n} \left[(y_i - a_o - a_1 x)^2\right]\right]}{\partial a_1} = \qquad 6.4.24$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_o - a_1 x_i\right) x_i = 0.$$

Из (6.4.23) следует

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n a_o + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad 6.4.25$$

Из (6.4.24) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = a_o \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \qquad 6.4.26$$

Решая систему уравнений (6.4.25) и (6.4.26), определим формулы для расчёта коэффициентов a_o и a_1

$$a_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad 6.4.27$$

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \qquad 6.4.28$$

В (6.4.27) и (6.4.28) значения x_i и y_i берутся из данных эксперимента.

При большем числе коэффициентов аппроксимирующего выражения (6.4.19) получается большее число уравнений, для решения которых приходится использовать матрицы и определители.

Погрешность однофакторного эксперимента оценивается отличием y_i от $\bar{y}_i$ (6.4.21).

Среднеквадратическое отклонение y_i от $\bar{y}$ определяется по известному правилу

$$\sigma[\Delta_i] = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}_i\right)^2}. \qquad 6.4.29$$

6.5. Обработка результатов совокупных измерений

Совокупными называют проводимые одновременно измерения нескольких связанных одноименных (по размерности) величин с целью определения их значения путём решения системы уравнений. Систему уравнений получают в результате измерения комбинации искомых величин.

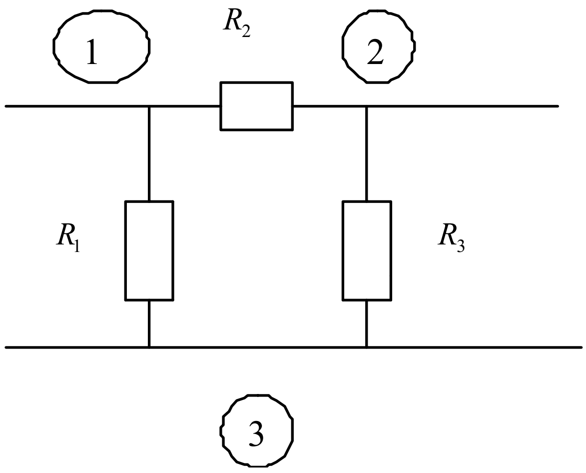


Рис. 6.5.1. Измерение электрического сопротивления резисторов по методу совокупных измерений

Для пояснения сути косвенных измерений рассмотрим простой пример измерения сопротивления резисторов, включённых треугольником (рис. 6.5.1). Это могут быть, например, электрические сопротивления обмоток трёхфазного электродвигателя. Требуется измерить сопротивления обмоток, не нарушая их электрического соединения.

Для получения результата проведём последовательно три измерения.

При первом измерении находим электрическое сопротивление между точками *1* и *2*. Для чего подключаем к этим точкам омметр и делаем отсчёт R_{12}.

В соответствии с принципиальной схемой (рис. 6.5.1)

$$R_{12} = \frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}. \qquad 6.5.1$$

Далее измеряем сопротивление R_{23} между точками *2* и *3* электрической цепи и сопротивление R_{31} между точками *3* и *1* .

$$R_{23} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}, \qquad 6.5.2$$

$$R_{31} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}. \qquad 6.5.3$$

Получили три уравнения, в которых известны R_{12} , R_{23} и R_{31}, полученные по показаниям средства измерения при трёх измерениях. В каждом измерительном эксперименте измерялись одноименные физические величины, в рассматриваемом случае это электрические сопротивления. В уравнениях (6.5.1), (6.5.2) и (6.5.3) три неизвестных величины

R_1 ,R_2 ,R_3. Число уравнений равно числу неизвестных, следовательно, система уравнений имеет однозначное решение.

С целью упрощения возьмём частный случай, когда

$$R_1 = R_2 = R_3 .$$

В этом простом случае

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_{и} = \frac{2}{3} R ,$$

откуда искомое значение сопротивления равно

$$R = \frac{3}{2} R_{и} .$$

В общем случае, когда $R_1 \neq R_2 \neq R_3$, т.е. все сопротивления разные, для их нахождения необходимо решать систему из трёх алгебраических уравнений (6.5.1, 6.5.2 и 6.5.3). В результате решения системы уравнений получаются формулы для расчёта сопротивлений R_1 , R_2, R_3.

Для оценки погрешности измерения сопротивлений представим расчётные формулы в общем виде

$$R_i = f_i\left(R_{12}, R_{23}, R_{31}\right). \qquad 6.5.4$$

Погрешность измерения сопротивлений плеч вычисляется, как и при косвенных измерениях, с учётом весовых коэффициентов составляющих погрешности, полученных при измерении сопротивлений между узлами R_{12}, R_{23}, R_{31}.

Абсолютная погрешность измерения сопротивления R_i $(i = 1,2,3)$ равна

$$\Delta R_i = \frac{\partial f_i (R_{12}, R_{23}, R_{31})}{\partial R_{12}} \Delta R_{12} + \frac{\partial f_i (R_{12,} \ R_{23}, R_{31})}{\partial R_{23}} \Delta R_{23} +$$

6.5.5

$$+ \frac{\partial f_i (R_{12}, R_{23}, R_{31})}{\partial R_{31}} \Delta R_{31},$$

где ΔR_{12}, ΔR_{23}, ΔR_{31} – абсолютные погрешности измерения сопротивлений между узлами электрической цепи R_{12}, R_{23}, R_{31}.

Частные производные в выражении (6.5.5) являются весовыми коэффициентами k_{i12}, k_{i23}, k_{i31} составляющих погрешности измерения сопротивления R_i:

$$k_{i12} = \frac{\partial f_i(R_{12},\quad R_{23},\quad R_{31}}{\partial R_{12}}, \qquad 6.5.6$$

$$k_{i23} = \frac{\partial f_i(R_{12},\quad R_{23},\quad R_{31})}{\partial R_{23}}, \qquad 6.5.7$$

$$k_{i31} = \frac{\partial f_i(R_{12},\quad R_{23},\quad R_{31})}{\partial R_{32}}. \qquad 6.5.8$$

Если все измерения проводились одним омметром, то все три погрешности измерения коррелированны и, следовательно, погрешность измерения R_i $(i = 1,2,3)$ нужно находить алгебраическим суммированием составляющих:

$$\Delta R_i = k_{i12}\Delta R_{12} + k_{i23}\Delta R_{23} + k_{i31}\Delta R_{31}. \qquad 6.5.9$$

При одновременном измерении сопротивлений между узлами электрической цепи тремя разными омметрами, погрешности измерения не коррелированны, и поэтому погрешность измерения сопротивления, нужно находить геометрическим суммированием составляющих

$$\Delta R_i = \sqrt{\left(k_{i12}\Delta R_{12}\right)^2 + \left(k_{i23}\Delta R_{23}\right)^2 + \left(k_{i31}\Delta R_{31}\right)^2}. \qquad 6.5.10$$

Результат измерения в окончательной форме представляется в виде

$$R_i = R_{iи} \pm \Delta R_i, \qquad 6.5.11$$

где $R_{iи}$ – сопротивление ветви, рассчитанное по формуле (6.5.4) с использованием показаний омметра или омметров, если использовались три омметра.

6.6. Правила округления результатов измерений

Класс точности средства измерения, используемый для расчёта абсолютной погрешности измерения, указывается числом с одной или двумя значащими цифрами, поэтому абсолютная погрешность измерения также должна указываться числом с одной или двумя значащими цифрами. В связи с этим, при окончательном представлении результатов измерения необходимо руководствоваться тремя основными правилами.

Первое правило. Как проводить округление численного значения погрешности измерения?

Абсолютная погрешность измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной цифрой, если первая есть 3 и больше. Например, $\Delta x = 0.15$; $\Delta x = 0.025$; $\Delta x = 0.3$; $\Delta x = 0.005$. Округление до одной или двух значащих цифр осуществляется по правилам математики. Если первый отбрасываемый при округлении знак меньше 5, то последняя сохраняемая значащая цифра не изменяется. Если знак старшего разряда отбрасываемого при округлении числа больше 5, то последняя сохраняемая значащая цифра увеличивается на единицу. Например, в результате вычислений абсолютная погрешность измерения равна $\Delta x = 0.153$, после округления $\Delta x = 0.15$; если $\Delta x = 0.158$, то после округления по правилам математики $\Delta x = 0.16$.

Второе правило. Как проводить округление показаний средств измерения?

Показания средства измерения округляются до того же десятичного знака, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности измерения. Например, показания средства измерения равны $x_и = 5.785$, вычисленная погрешность после округления $\Delta x = 0.05$, тогда результат измерения с учётом приведённых выше правил $x_d = 5.79 \pm 0.05$. Если абсолютная погрешность измерения равняется $\Delta x = 0.015$, то результат измерения будет $x_d = 5.785 \pm 0.015$.

Третье правило. В каком месте измерительного эксперимента проводить округление его результатов?

Округление производится лишь при окончательном представлении результата измерения. Все предварительные вычисления погрешности, например при косвенных измерениях, проводятся с одним-двумя лишними знаками.

Пример представления результатов однократных измерений. Вольтметром класса точности 1.5 и верхним пределом измерения $U_m = 10$В провели измерение напряжения. Показания вольтметра при этом получены $U_и = 5.754$ В. Абсолютная погрешность измерения находится по классу точности прибора в соответствии с формулой (6.1.7), которая для рассматриваемого примера будет иметь вид

$$\gamma_{кл} = \frac{\Delta U}{U_m} 100 . \qquad (6.6.1)$$

Из (6.6.1) следует, что абсолютная погрешность измерения равна

$$\Delta U = \frac{\gamma_{кл} U_m}{100} . \qquad (6.6.2)$$

После подстановки численных значений

$$\Delta U = \frac{1.5 \bullet 10}{100} = 0.15 \text{ В} . \qquad (6.6.3)$$

Результат измерения в рассматриваемом примере с учётом приведённых выше правил:

$$U_d = 5.75 \pm 0.15 \text{ В} .$$

Контрольные вопросы

1. Показать представление результатов измерений, полученных от средства измерения с классом точности, определённым по мультипликативной погрешности.

2. Как обработать результат измерения, полученный от средства измерения, с классом точности по аддитивной погрешности?

3. Как обработать результат измерения, полученный от средства измерения, у которого класс точности определён по аддитивной и мультипликативной погрешностям?

4. Показать на примере представление результата прямых многократных измерений с преобладающей случайной составляющей погрешности измерения.

5. Показать на примере представление результата многократных измерений в присутствии случайной и систематической составляющих погрешности измерения.

6. Как представить результаты косвенных измерений на основе данных от прямых измерений других физических величин?

7. Как проводится обработка результатов совместных измерений? Показать на примере.

8. В чём заключается однофакторный эксперимент?

9. Показать на примере обработку результатов совокупных измерений.

10. Назвать основное правило округления абсолютной погрешности измерения.

11. Назвать основные правила округления результатов измерения.

7. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ, ПОЛУЧЕННЫХ ОТ ПРИБОРОВ С ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ, НОРМИРОВАННОЙ ПО ГОСТ 8.009-84

7.1. Обработка результатов прямых измерений

Математическая модель погрешности при прямых измерениях описывается выражением (5.1.1).

Методическая погрешность, как правило, вычисляется и на неё в результат измерения вносится поправка.

Инструментальная погрешность по ГОСТ 8.009-84 представлена объединением

$$\Delta = \Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_o * \overset{o}{\Delta}_{oH} * \sum_{i=1}^{l} \Delta_{ci} * \Delta_{dyn}, \qquad 7.1.1$$

в котором:

Δ – абсолютная инструментальная погрешность средства измерения;

Δ_{os} – систематическая составляющая основной погрешности средства измерения;

$\overset{o}{\Delta}_o$ – случайная составляющая основной погрешности средства измерения;

$\overset{o}{\Delta}_{oH}$ – случайная составляющая основной погрешности средства измерения, обусловленная внутренними гистерезисными явлениями;

$\sum_{i=1}^{l} \Delta_{ci}$ – объединение дополнительных погрешностей средства измерения, обусловленных действием внешних влияющих величин в рабочем диапазоне их значений;

Δ_{dyn} – динамическая погрешность средства измерения, обусловленная изменением во времени значения измеряемой физической величины со скоростью, соизмеримой с быстродействием прибора.

Исключив из рассмотрения методическую погрешность, математическую модель погрешности измерения представим в виде объединения

$$\Delta_u = \Delta * \overset{o}{\Delta}, \qquad 7.1.2$$

где Δ_u – абсолютная погрешность измерения; Δ – инструментальная погрешность, определяемая объединением (7.1.1), и $\overset{o}{\Delta}$ – случайная погрешность, создаваемая действием внешних причин, не имеющих отношения к процессам внутри средства измерения.

Если преобладает инструментальная погрешность

$$\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right] \prec 0.1\Delta,$$

то математическая модель погрешности измерения будет определяться математической моделью инструментальной погрешности средства измерения в соответствии с (7.1.1).

При соизмеримых инструментальной и внешней случайной составляющих погрешностей математическая модель погрешности измерения будет иметь вид:

$$\Delta_u = \Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_0 * \overset{o}{\Delta}_{oH} * \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ci} * \Delta_{dyn} * \overset{0}{\Delta}. \qquad 7.1.3$$

На практике может быть много частных моделей погрешности измерения, полученных из (7.1.3), как различные сочетания составляющих. Остановимся на некоторых из них подробнее.

Самая простая модель погрешности измерения имеет место тогда, когда погрешность измерения определяется только систематической составляющей инструментальной погрешности

$$\Delta_u = \Delta_{os}. \qquad 7.1.4$$

В приборах высокой точности приходится учитывать при представлении результатов измерения внутреннюю случайную погрешность и погрешность гистерезиса

$$\Delta_u = \Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_o * \overset{0}{\Delta}_{oH}. \qquad 7.1.5$$

Если прибор эксплуатируется в рабочих условиях и в нормативно-технической документации указана методика нахождения дополнительной погрешности, то модель имеет вид

$$\Delta_u = \Delta_{os} * \sum_{i=1}^{l} \Delta_{ci}. \qquad 7.1.6$$

При использовании прибора для измерения изменяющихся во времени величин в математическую модель погрешности вводится динамическая составляющая Δ_{dyn}

$$\Delta_{и} = \Delta_{os} * \Delta_{dyn}. \qquad 7.1.7$$

Когда повторными измерениями обнаружена внешняя случайная погрешность, соизмеримая с систематической инструментальной погрешностью, то используется математическая модель

$$\Delta_{и} = \Delta_{os} * \overset{0}{\Delta} \qquad 7.1.8$$

или

$$\Delta_{и} = \Delta_{os} * \overset{o}{\Delta} * \sum_{i=1}^{l} \Delta_{ci}. \qquad 7.1.9$$

Последний случай (7.1.9) для обработки результатов самый сложный, так как для получения погрешности измерения должны учитываться инструментальная, дополнительная и внешняя случайная погрешности.

Рассмотрим порядок получения результата измерения с использованием представленных выше математических моделей погрешности измерения.

7.1.1. Обработка результатов прямых измерений с использованием только систематической погрешности средства измерения

В этом случае имеем математическую модель погрешности измерения по формуле (7.1.4).

По ГОСТ 8.009-84 систематическая основная погрешность нормируется её границами Δ_{osp}, установленными с доверительной вероятностью $P_{д} = 0.95$ или $P_{д} = 0.997$, а также среднеквадратическим отклонением $\sigma[\Delta_{os}]$ систематической погрешности для всего типа средств измерения.

Если систематическая погрешность задана границами, то результат измерения представляется в одном из двух видов

$$x_{и} - \Delta_{osp} \prec x_{д} \prec x_{и} + \Delta_{osp} \qquad 7.1.10$$

или

$$x_{д} = x_{и} \pm k\sigma[\Delta_{os}], \qquad 7.1.11$$

где $x_д$ – действительное значение измеряемой физической величины; $x_и$ – показания средства измерения, $k = 2$ при доверительной вероятности нахождения систематической погрешности в интервале Δ_{osp}, равной 0.95 и $k = 3$ при доверительной вероятности, равной 0.997.

7.1.2. Обработка результатов прямых измерений при наличии систематической и внутренней случайной составляющих инструментальной погрешности

В рассматриваемом случае используем математическую модель погрешности измерения по формуле (7.1.5).

В нормативно-технической документации на средство измерения должны быть указаны границы систематической погрешности Δ_{osp}, среднеквадратическое отклонение систематической погрешности $\sigma[\Delta_{os}]$, а также среднеквадратическое отклонение случайной погрешности, порождённой процессами внутри средства измерения $\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right]$.

Для представления результата измерения в этом случае, прежде всего, необходимо найти суммарное среднеквадратическое значение погрешности измерения $\sigma\left[\Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_o\right]$, которое находится суммированием среднеквадратических значений $\sigma[\Delta_{os}]$ и $\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right]$. Поскольку среднеквадратическое значение систематической погрешности не коррелированно со среднеквадратическим значением случайной погрешности средства измерения, то суммирование нужно проводить геометрически

$$\sigma\left[\Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_o\right] = \sqrt{(\sigma[\Delta_{os}])^2 + (\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right])^2}\,. \qquad 7.1.12$$

Результат измерения представляется в виде

$$x_и - k\sigma\left[\Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_o\right] \prec x_д \prec x_и + k\sigma\left[\Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_o\right] \qquad 7.1.13$$

или

$$x_д = x_и \pm k\sigma\left[\Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_o\right]. \qquad 7.1.14$$

7.1.3. Обработка результатов прямых измерений при наличии систематической, внутренней случайной и гистерезисной составляющих инструментальной погрешности

В этом случае используем математическую модель погрешности измерения по формуле (7.1.5).

Для реализации принятой модели измерения в нормативно-технической документации на средство измерения должны быть указаны границы систематической погрешности Δ_{osp}, среднеквадратическое отклонение систематической погрешности $\sigma[\Delta_{os}]$, среднеквадратическое значение случайной составляющей основной погрешности средства измерения $\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o\right]$ и среднеквадратическое значение основной погрешности, обусловленной гистерезисными явлениями $\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_{oH}\right]$.

Если в нормативно-технической документации задано среднеквадратическое отклонение систематической погрешности, то геометрическим суммированием, поскольку погрешности не зависимы, находится среднеквадратическое значение суммарной погрешности измерения

$$\sigma\left[\Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_{oH} * \overset{o}{\Delta}_o\right] = \sqrt{(\sigma[\Delta_{os}])^2 + \sigma(\left[\overset{o}{\Delta}_o\right])^2 + (\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_{oH}\right])^2}\,. \qquad 7.1.15$$

Результат измерения представляем в виде

$$x_и - k\sigma\left[\Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_{oH} * \overset{o}{\Delta}_o\right] \prec x_д \prec x_и + k\sigma\left[\Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_{oH} * \overset{o}{\Delta}_o\right] \qquad 7.1.16$$

или

$$x_д = x_и \pm k\sigma\left[\Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}_{oH} * \overset{o}{\Delta}_o\right]. \qquad 7.1.17$$

Если в нормативно-технической документации не задано среднеквадратическое отклонение систематической погрешности, то тогда для получения результата измерения несколько иной порядок действия.

Вначале определяется среднеквадратическое значение случайных погрешностей

$$\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o * \overset{o}{\Delta}_{oH}\right] = \sqrt{\left(\sigma\left[\overset{0}{\Delta}_o\right]\right)^2 + \left(\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_{oH}\right]\right)^2}\,. \qquad 7.1.18$$

Затем определяются границы доверительного интервала для случайных погрешностей

$$\Delta_{oo} = k\sigma\left[\overset{o}{\Delta}_o * \overset{o}{\Delta}_{oH}\right]. \qquad 7.1.19$$

Границы суммарной погрешности находятся геометрическим суммированием доверительных интервалов систематической и случайной погрешностей при условии одинаковости законов распределения всех случайных величин (7.1.18) и (7.1.19)

$$\Delta_{\Sigma p} = \sqrt{\left(\Delta_{osp}\right)^2 + \left(\Delta_{oo}\right)^2}. \qquad 7.1.20$$

Результат измерения

$$x_д = x_и \pm \Delta_{\Sigma p}. \qquad 7.1.21$$

Зная границы доверительного интервала систематической погрешности, можно найти среднеквадратическое отклонение систематической погрешности

$$\sigma\left[\Delta_{os}\right] = \frac{\Delta_{osp}}{k},$$

где k – квантильный множитель, равный 2 или 3 при нормальном законе распределения и доверительной вероятности 0.95 или 0.997. Затем геометрически суммируются все среднеквадратические отклонения и находится СКО суммарной погрешности

$$\sigma\left[\Delta_{\Sigma}\right] = \sqrt{\sigma\left[\Delta_{os}\right]^2 + \sigma\left[\overset{0}{\Delta}_o\right]^2 + \sigma\left[\overset{0}{\Delta}_{oH}\right]^2}. \qquad 7.1.22$$

Границы максимального интервала суммарной погрешности

$$\Delta_{\Sigma p} = k\sigma\left[\Delta_{\Sigma}\right]. \qquad 7.1.23$$

Результат измерения представляется в соответствии с (7.1.21).

7.1.4. Обработка результатов измерений при наличии систематической, дополнительной и динамической составляющих инструментальной погрешности

При таких измерениях могут присутствовать все три составляющие погрешности или их комбинации по две (7.1.6) или (7.1.7).

Систематическая погрешность оценивается своими границами Δ_{osp}, которые устанавливаются для средств измерения одного типа и одного завода изготовителя. Она закладывается в средство измерения при его проектировании и нормируется после изготовления. Для конкретного средства измерения систематическая погрешность постоянна, но не известна. Известно только, что она лежит в интервале Δ_{osp}. Систематическая погрешность по мере старения прибора изменяется (см. гл. 9).

Дополнительная погрешность прибора определяется условиями эксплуатации в рабочем диапазоне влияющих величин, имеет детерминированную зависимость от значения этих величин и не связана никак с систематической погрешностью.

Динамическая погрешность средства измерения зависит от скорости изменения измеряемой физической величины. В каждый момент времени процесса измерения она различна (гл. 8)

Таким образом, систематическая, дополнительная и динамическая погрешности имеют различную природу, разный временной характер проявления и по разному зависят от условий эксплуатации. Они не могут быть оценены какой-то суммарной погрешностью. В результатах измерения эти погрешности представляются раздельно, каждая со своей оценкой.

7.1.5. Обработка результатов измерений при наличии систематической инструментальной и внешней случайной составляющих погрешности

Этому случаю соответствует математическая модель погрешности измерения (7.1.8). Для оценки суммарной погрешности измерения, выберем j-ый прибор из партии однотипных средств измерения и проведём с ним измерительный эксперимент.

Известно, что выбранное средство измерения имеет систематическую погрешность Δ_{os}. Об этой погрешности известно, что для выбранного средства измерения она постоянна, по крайней мере на протяжении измерительного эксперимента, и лежит в нормированном интервале Δ_{osp}, установленном для выбранного типа приборов.

Выбранным средством измерения провели измерение физической величины x_∂ в отсутствии случайных погрешностей и получили показания прибора x_{uj}, которые отличаются от действительного значения на величину систематической погрешности

$$\Delta_{osj} = x_{uj} - x_\partial . \qquad 7.1.24$$

Далее, этим же прибором провели измерение той же физической величины x_∂, но в условиях действия помех, которые создают случайные погрешности измерения, и получили множество показаний прибора

$$x_u = \left\{ x_{u1} \cdots x_{ui} \cdots x_{un} \right\} . \qquad 7.1.25$$

Отклонение отдельного измерения x_{ui} от x_{uj} равно

$$\Delta x_i = x_{ui} - x_{uj}. \qquad 7.1.26$$

Среднее арифметическое значение измеренной физической величины, которое войдет в результат измерения

$$\bar{x}_u = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_{ui}. \qquad 7.1.27$$

Отклонение $\bar{x}_u$ от x_{uj} для j-го средства измерения равно

$$\sigma\left[\overset{0}{\Delta} x_j\right] = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1}^{n}\left(x_{ui} - \bar{x}_u\right)^2}. \qquad 7.1.28$$

Таким образом, $\sigma\left[\overset{0}{\Delta} x_j\right]$ есть среднеарифметическое отклонение среднего арифметического $\bar{x}_u$ от показаний средства измерения x_{uj} в отсутствии случайной погрешности.

В свою очередь x_{uj} отличается от действительного значения измеряемой физической величины $x_д$. Среднеквадратическое значение этого отличия для партии средств измерения

$$\frac{\Delta_{osp}}{k} = \sigma\left[\Delta_{os}\right]. \qquad 7.1.29$$

Суммарное среднеквадратическое отклонение среднего значения показаний прибора $\bar{x}_u$ от действительного значения измеряемой величины равно

$$\sigma\left[\Delta_\Sigma\right] = \sqrt{\sigma\left[\Delta_{os}\right]^2 + \sigma\left[\overset{0}{\Delta} x_j\right]^2}. \qquad 7.1.30$$

Границы результирующей погрешности

$$\Delta_{\Sigma p} = k\sigma\left[\Delta_\Sigma\right], \qquad 7.1.31$$

а результат измерения

$$x_д = \bar{x}_u \pm \Delta_{\Sigma p}. \qquad 7.1.32$$

7.2. Обработка результатов косвенных измерений

При осуществлении косвенных измерений искомая физическая величина находится путём вычислений с использованием результатов прямых измерений других физических величин, функционально с ней связанных.

Представим измеряемую косвенно физическую величину как функцию нескольких прямо измеряемых величин

$$y = f\left(x_1 \cdots x_i \cdots x_n\right), \tag{7.2.1}$$

где $x_1 \cdots x_n$ – физические величины, определяемые прямыми измерениями; y – искомая физическая величина, определяемая косвенными измерениями.

После проведения измерений имеем другую функцию

$$y_{\text{и}} = f\left(x_{\text{и}1} \cdots x_{\text{иi}} \cdots x_{\text{иn}}\right), \tag{7.2.2}$$

где $x_{\text{и}1} \cdots x_{\text{иn}}$ – показания индикаторов n средств измерения, участвующих в измерительном эксперименте.

При прямом измерении *i*-ой физической величины имеет место погрешность измерения

$$\Delta_i = x_{\text{иi}} - x_i\,. \tag{7.2.3}$$

Без учёта случайной, дополнительной и динамической погрешностей погрешность измерения *i*-ой физической величины будет определяться первой математической моделью погрешности измерения и будет состоять из одной систематической составляющей, задаваемой доверительным интервалом Δ_{osp}, среднеквадратическим отклонением $\sigma[\Delta_{os}]$ или тем и другим.

Абсолютная погрешность косвенно измеряемой физической величины равна

$$\Delta y = y_{\text{и}} - y\,. \tag{7.2.4}$$

Эта погрешность определяется погрешностями участвующих в эксперименте приборов и находится их суммированием с учётом весовых коэффициентов. Поскольку при проведении косвенных измерений используются разнотипные приборы с известными среднеквадратическими отклонениями систематической погрешности, то результирующее значение среднеквадратической погрешности косвенных измерений находится геометрическим суммированием среднеквадратических погрешностей участвующих в эксперименте приборов (6.3.8), (6.3.9).

$$(\Delta_{osp})_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[k_{xi}(\Delta_{osp})_i\right]^2}\,, \tag{7.2.6}$$

где $k_{x1} \cdots k_{xi} \cdots k_{xn}$ – весовые коэффициенты погрешностей, определяемые частными производными в соответствии с формулой (6.3.8).

Рассмотрим пример измерения электрической мощности, выделяемой на нагрузке электрическим током, методом амперметра и вольтметра

$$P = UI, \tag{7.2.7}$$

где I – ток, протекающий по нагрузке и измеряемый амперметром; U – падение напряжения на нагрузке, измеряемое вольтметром.

Весовой коэффициент погрешности вольтметра

$$k_u = \frac{\partial P}{\partial U} = \frac{\partial (UI)}{\partial U} = I, \tag{7.2.8}$$

а весовой коэффициент погрешности амперметра

$$k_i = \frac{\partial P}{\partial U} = \frac{\partial (UI)}{\partial I} = U. \tag{7.2.9}$$

Интервал погрешности измерения мощности, в соответствии с формулой (7.2.6), равен

$$\left(\Delta_{OSP}\right)_p = \sqrt{\left[k_u \left(\Delta_{osp}\right)_u\right]^2 + \left[k_i \left(\Delta_{osp}\right)_i\right]^2}. \tag{7.2.10}$$

Результат измерения

$$P = P_{\text{и}} \pm k\left(\Delta_{osp}\right)_P. \tag{7.2.11}$$

В (7.2.11) $P_{\text{и}} = U_{\text{и}} I$ – мощность, вычисленная по показаниям вольтметра и амперметра.

Рассмотрим численный пример косвенного измерения мощности. Пусть показания вольтметра равны $U_{\text{и}} = 5.0\text{В}$, границы систематической погрешности вольтметра $\left(\Delta_{osp}\right)_u = 0.1\text{В}$, показания амперметра равны $I_{\text{и}} = 1.0\text{А}$, границы систематической погрешности амперметра $\left(\Delta_{osp}\right)_A = 0.01\text{А}$.

В соответствии с формулой (7.2.10) интервал погрешности для мощности равен

$$\left(\Delta_{osp}\right)_P = \sqrt{\left[k_u \left(\Delta_{osp}\right)_u\right]^2 + \left[k_i \left(\Delta_{osp}\right)_i\right]^2}. \tag{7.2.12}$$

В соответствии с (7.2.8) весовой коэффициент погрешности вольтметра равен $k_U = 1.0$ А, в соответствии с (7.2.9) весовой коэффициент погрешности амперметра равен $k_I = 5.00$ В.

После подстановки численных значений в (7.2.12) получается

$$\left(\Delta_{osp}\right) = \sqrt{(1.0 \cdot 0.1)^2 + (5.0 \cdot 0.01)^2} = 0.11 \text{ Вт.}$$

Результат измерения мощности

$$P = 5.00 \pm 0.11\,\text{Вт}.$$

Относительная погрешность измерения мощности

$$\delta_P = \frac{0.11}{5.0} = 0.022; \quad \delta_{P\%} = 2.2\,\%.$$

7.3. Обработка результатов совместных измерений

Обработку результатов совместных измерений рассмотрим на примере градуировки термопары, подобно тому, как это было сделано в подразд. 6.4.2. Различие будет состоять в том, что инструментальная погрешность вольтметра и термометра нормируются не классом точности средства измерения, а границей систематической погрешности Δ_{osp} или её среднеквадратическим отклонением $\sigma[\Delta_{os}]$.

Уравнение преобразования термопары

$$U = \alpha(t - t_x) + \beta(t - t_x)^2, \tag{7.3.1}$$

где t – температура в термостате, куда помещен горячий спай термопары; t_x – температура холодных концов термопары (температура окружающей среды); U – напряжение на концах термопары; α и β – коэффициенты, аппроксимирующие уравнение преобразования термопары.

Для нахождения коэффициентов α и β проводится два совместных измерения напряжения и температуры, при разных значениях установленной в термостате температуры, и получают два уравнения

$$U_1 = \alpha(t_1 - t_x) + \beta(t_1 - t_x)^2, \tag{7.3.2}$$

$$U_2 = \alpha(t_2 - t_x) + \beta(t_2 - t_x)^2. \tag{7.3.3}$$

В полученных уравнениях U_1 и t_1 – напряжение на концах термопары и температура горячего спая при первом измерительном эксперименте, U_2 и t_2 – то же, но при втором измерительном эксперименте с другим значением температуры в термостате.

Коэффициенты α и β находятся в результате решения уравнений (7.3.2) и (7.3.3).

После решения уравнений получаются два выражения для расчёта искомых коэффициентов

$$\alpha = \frac{U_2 t_1^2 - U_1 t_2^2}{t_2 t_1^2 - t_1 t_2^2}, \tag{7.3.4}$$

$$\beta = \frac{U_1}{t_1^2} - \frac{U_2 t_1^3 - U_1 t_2^2 t_1}{t_2 t_1^4 - t_1^3 t_2^2}.$$

Погрешность определения коэффициентов будет определяться погрешностью измерения напряжения и температуры. При использовании первой математической модели погрешности (7.1.4) погрешность вольтметра и термометра определяются только систематической погрешностью. Систематическая погрешность по ГОСТ 8.009-84 нормируется доверительным интервалом Δ_{osp}, в котором с заданной доверительной вероятностью P_d находится систематическая погрешность, и среднеквадратическим отклонением систематической погрешности от своего среднего значения $\sigma[\Delta_{os}]$.

Весовые коэффициенты погрешностей вольтметра и термометра при определении погрешностей нахождения коэффициента α находятся как частные производные:

$$k_{\alpha U2} = \frac{\partial \alpha}{\partial U_2}; \quad k_{\alpha U1} = \frac{\partial \alpha}{\partial U_1}; \quad k_{\alpha t1} = \frac{\partial \alpha}{\partial t_1}; \quad k_{\alpha t2} = \frac{\partial \alpha}{t_2}. \qquad 7.3.5$$

В (7.3.5) $k_{\alpha U1}$ и $k_{\alpha U2}$ – весовые коэффициенты погрешности вольтметра при первом и втором измерениях напряжения, соответственно, $k_{\alpha t1}$ и $k_{\alpha t2}$ – весовые коэффициенты погрешности термометра при первом и втором измерениях температуры. Аналогичным образом определяются весовые коэффициенты погрешностей вольтметра и термометра при вычислении коэффициента β:

$$k_{\beta U2} = \frac{\partial \beta}{\partial U_2}; \quad k_{\beta U1} = \frac{\partial \beta}{\partial U}; \quad k_{\beta t1} = \frac{\partial \beta}{\partial t_1}; \quad k_{\beta t2} = \frac{\partial \beta}{\partial t_1}. \qquad 7.3.6$$

Среднеквадратическое значение погрешности нахождения коэффициента α:

$$\sigma[\Delta_\alpha] = \sqrt{\begin{matrix}(k_{\alpha U1}\sigma[\Delta_{os}]_U)^2 + (k_{\alpha U2}\sigma[\Delta_{os}]_U)^2 + \\ (k_{\alpha t1}\sigma[\Delta_{os}]_t)^2 + (k_{\alpha t2}\sigma[\Delta_{os}]_t)^2\end{matrix}}. \qquad 7.3.7$$

Подобным образом находится среднеквадратическое отклонение погрешности вычисления коэффициента β подстановкой других весовых коэффициентов из ряда (7.3.6):

$$\sigma[\Delta_\beta] = \sqrt{\begin{matrix}(k_{\beta U1}\sigma[\Delta_{os}]_U)^2 + (k_{\beta U2}\sigma[\Delta_{os}]_U)^2 \\ (k_{\beta t1}\sigma[\Delta_{os}]_t)^2 + (k_{\beta t2}\sigma[\Delta_{os}]_t)^2\end{matrix}}. \qquad 7.3.8$$

Доверительный интервал для погрешности определения коэффициента α равен

$$\left(\Delta_{osp}\right)_{\alpha} = k\sigma\left[\Delta_{\alpha}\right]. \qquad 7.3.9$$

Доверительный интервал для погрешности вычисления коэффициента β равен

$$\left(\Delta_{osp}\right)_{\beta} = k\sigma\left[\Delta_{\beta}\right]. \qquad 7.3.10$$

Если в погрешности измерения напряжения и температуры присутствует случайная составляющая погрешности, обусловленная как внутренними, так и внешними причинами, то в погрешности определения коэффициентов α и β также появится случайная составляющая погрешности. Среднеквадратические значения случайной погрешности вольтметра и термометра равны $\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_U$ и $\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_t$, соответственно.

Среднеквадратическое значение случайной погрешности определения коэффициента α находим с использованием формулы (7.3.7), заменяя

$$\sigma\left[\Delta_{os}\right]_U \quad \text{и} \quad \sigma\left[\Delta_{os}\right]_t \quad \text{на} \quad \sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_U \quad \text{и} \quad \sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_t.$$

После замены и подстановки получим:

$$\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_{\alpha} = \sqrt{\begin{array}{c}\left(k_{\alpha U1}\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_U\right)^2 + \left(k_{\alpha U2}\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_U\right)^2 \\ \left(k_{\alpha t1}\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_t\right)^2 + \left(k_{\alpha t2}\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_t\right)^2\end{array}}. \qquad 7.3.11$$

Аналогично находится среднеквадратическое значение случайной погрешности определения коэффициента β:

$$\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_{\beta} = \sqrt{\begin{array}{c}\left(k_{\beta U1}\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_U\right)^2 + \left(k_{\beta U2}\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_U\right)^2 \\ \left(k_{\beta t1}\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_t\right)^2 + \left(k_{\beta t2}\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_t\right)^2\end{array}}. \qquad 7.3.12$$

Далее по правилу сложения нескольких некоррелированных среднеквадратических значений погрешностей находим суммарное среднеквадратическое значение погрешности определения коэффициентов α и β:

$$\sigma\left[\Delta_{\alpha}\right]_{\Xi 1}=\sqrt{\left(\sigma\left[\Delta_{os}\right]\right)^{2}+\left(\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_{\alpha}\right)^{2}}\,. \qquad 7.3.13$$

Границы интервала суммарной погрешности определения α

$$\left\lfloor\Delta_{osp}\right\rfloor_{\alpha\Xi 1}=k\sigma\left[\Delta_{\alpha}\right]_{\Xi 1}. \qquad 7.3.14$$

Для коэффициента β аналогично:

$$\sigma\left[\Delta_{\beta}\right]_{\Xi 1}=\sqrt{\left(\sigma\left[\Delta_{os}\right]\right)^{2}+\left(\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_{\beta}\right)}\,, \qquad 7.3.15$$

$$\left\lfloor\Delta_{osp}\right\rfloor_{\beta\Xi 1}=k\sigma\left\lfloor\Delta_{\beta}\right\rfloor_{\Xi 1}. \qquad 7.3.16$$

Если в нормативно-технической документации на вольтметр и термометр нормированы дополнительные погрешности измерения, то их необходимо учесть в результирующей погрешности определения значения коэффициентов α и β. Это можно сделать двояко, в зависимости от того, как задана дополнительная погрешность в нормативно-технической документации на средства измерения.

Если дополнительная погрешность средств измерения задана среднеквадратическими отклонениями $\sigma[\Delta_c]_U$ и $\sigma[\Delta_c]_t$, то её нужно учесть вначале при определении суммарного значения среднеквадратического отклонения погрешности определения коэффициентов α и β.

Для этого, используя формулы (7.3.7) и (7.3.8), определяем среднеквадратические значения погрешности определения коэффициентов α и β, вносимой дополнительными погрешностями вольтметра и термометра

$$\sigma\left[\Delta_{c}\right]_{\alpha}=\sqrt{\begin{array}{l}\left(k_{\alpha U1}\sigma\left[\Delta_{c}\right]_{U}\right)^{2}+\left(k_{\alpha U2}\sigma\left[\Delta_{c}\right]_{U}\right)^{2}+\\ \left(k_{\alpha t1}\sigma\left[\Delta_{c}\right]_{t}\right)^{2}+\left(k_{\alpha t2}\sigma\left[\Delta_{c}\right]_{t}\right)^{2}\end{array}}\,. \qquad 7.3.17$$

$$\sigma\left[\Delta_{c}\right]_{\beta}=\sqrt{\begin{array}{l}\left(k_{\beta U1}\sigma\left[\Delta_{c}\right]_{U}\right)^{2}+\left(k_{\beta U2}\sigma\left[\Delta_{c}\right]_{U}\right)^{2}+\\ \left(k_{\beta t1}\sigma\left[\Delta_{c}\right]_{t}\right)^{2}+\left(k_{\beta t2}\sigma\left[\Delta_{c}\right]_{t}\right)^{2}\end{array}}\,. \qquad 7.3.18$$

Суммарное значение среднеквадратической погрешности определения коэффициентов α и β находим используя формулы (7.3.13) и (7.3.15), добавляя под корнем третье слагаемое, определяемое дополнительной погрешностью вольтметра и термометра (7.3.17) и (7.3.18):

$$\sigma\left[\Delta_{\alpha}\right]_{\Xi 2}=\sqrt{\left(\sigma\left[\Delta_{os}\right]\right)^{2}+\left(\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_{\alpha}\right)^{2}+\left(\sigma\left[\Delta_{c}\right]_{\alpha}\right)^{2}}, \qquad 7.3.19$$

$$\sigma\left[\Delta_{\beta}\right]_{\Xi 2}=\sqrt{\left(\sigma\left[\Delta_{os}\right]\right)^{2}+\left(\sigma\left[\overset{o}{\Delta}\right]_{\varepsilon}\right)^{2}+\left(\sigma\left[\Delta_{c}\right]_{\beta}\right)}. \qquad 7.3.20$$

Границы доверительных интервалов, в которых находятся погрешности определения α и β, определяются аналогично (7.3.14) и (7.3.16):

$$\left[\Delta_{osp}\right]_{\alpha\Xi 2}=k\sigma\left[\Delta_{\alpha}\right]_{\Xi 2}. \qquad 7.3.21$$

Если дополнительная погрешность задана в нормативно-технической документации числом Δ_c, то в окончательном представлении результатов измерения это число с одним знаком нужно прибавить к границам интервалов погрешности, определяемых формулами (7.3.14) и (7.3.16)

$$\left[\Delta_{p\alpha}\right]_{\Xi 2}=k\sigma\left[\Delta_{\alpha}\right]+\Delta_{c}, \qquad 7.3.22$$

$$\left[\Delta_{p\beta}\right]_{\Sigma 2}=k\sigma\left[\Delta_{\beta}\right]_{\Xi 2}+\Delta_{c}. \qquad 7.3.23$$

Контрольные вопросы

1. Дать описание математической модели инструментальной погрешности средства измерения по ГОСТ 8.009-84.
2. Описать возможные частные случаи математической модели инструментальной погрешности средства измерения.
3. Как представить результат измерения при наличии только систематической погрешности средства измерения?
4. Как представить результат измерения при наличии систематической, случайной и гистерезисной составляющих инструментальной погрешности?
5. Как представить результат измерения при наличии систематической, внутренней случайной и дополнительной составляющих инструментальной погрешности измерения?
6. Как представить результат измерения при наличии инструментальной и внешней случайной погрешности измерения?
7. Как представить результат косвенных измерений по ГОСТ 8.009-84?

8. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ

8.1. Отклик измерительного преобразователя на входное воздействие

Измерительный сигнал представляет собой физический процесс, характеризуемый определёнными параметрами. Один или несколько параметров процесса могут быть измеряемыми величинами или параметрами, функционально связанными с другими измеряемыми величинами.

Например, физическим процессом является протекание по проводнику постоянного электрического тока или, как результат этого, падение напряжения на участке электрической цепи. В рассматриваемых случаях имеется единственный информативный параметр – уровень тока в первом случае и уровень напряжения во втором.

В качестве другого примера назовём процесс протекания по проводнику переменного электрического тока

$$i = I_m Sin(\omega t + \varphi), \qquad 8.1.1$$

где i – мгновенное значение протекающего тока; I_m – амплитуда переменного тока; ω – частота изменения переменного тока; φ – начальная фаза переменного процесса.

Все четыре названных параметра могут быть измеряемыми величинами. Амплитуда тока измеряется амперметром, частота измеряется частотомером, а начальная фаза – фазометром при наличии значения опорного тока

$$i = I_m Sin(\omega t). \qquad 8.1.2$$

Если какой-то параметр процесса (8.1.1) функционально связан с измеряемой физической величиной, то он является информативным параметром сигнала. Например,

$$I_m = kx, \qquad 8.1.3$$

где x – измеряемая физическая величина; k – коэффициент связи; I_m – информативный параметр сигнала, в основу которого положен физический процесс в виде переменного электрического тока (8.1.1).

Если измеряемая физическая величина изменяется во времени

$$x = x(t), \tag{8.1.4}$$

то и информативный параметр будет изменяться во времени

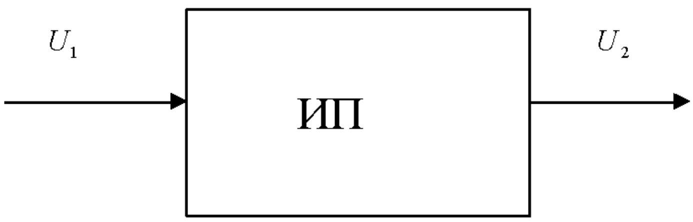
$$I_m = kx(t), \tag{8.1.5}$$

т.е. амплитуда тока будет модулирована во времени по закону изменения измеряемой физической величины.

Динамические характеристики средства измерения приходится учитывать тогда, когда скорость (частота) изменения физического процесса (8.1.1) или скорость изменения во времени информативного параметра (8.1.5) соизмеримы с быстродействием средства измерения.

Для примера возьмём измерительный преобразователь ИП (рис. 8.1.1), на входе которого действует сигнал в виде постоянного или переменного напряжения.

Рис. 8.1.1. Измерительный преобразователь: U_1 – входной сигнал в виде электрического напряжения; U_2 – выходной сигнал (отклик преобразователя на входное воздействие)



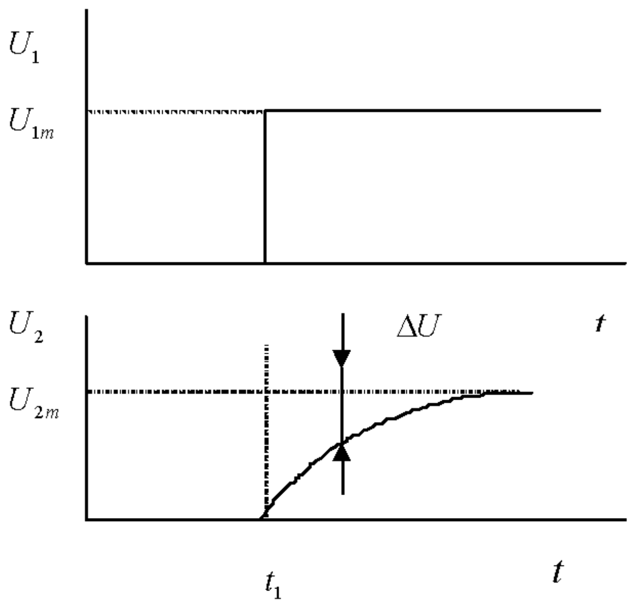


Рис 8.1.2. Переходной процесс в измерительном преобразователе при воздействии на его вход скачка напряжения с уровнем U_{1m}: ΔU – динамическая погрешность

Если на вход измерительного преобразователя подействует напряжение в виде скачка, то напряжение на выходе преобразователя, вследствие его инерционных свойств, будет нарастать постепенно, а не скачком (рис. 8.1.2).

Установившееся значение напряжения на выходе преобразователя

$$U_{2m} = k_0 U_{1m}, \tag{8.1.6}$$

где k_0 – коэффициент преобразования (коэффициент усиления) в установившемся состоянии. Во время переходного процесса будет иметь место динамическая погрешность ΔU, которая со временем уменьшается и в пределе стремится к нулю.

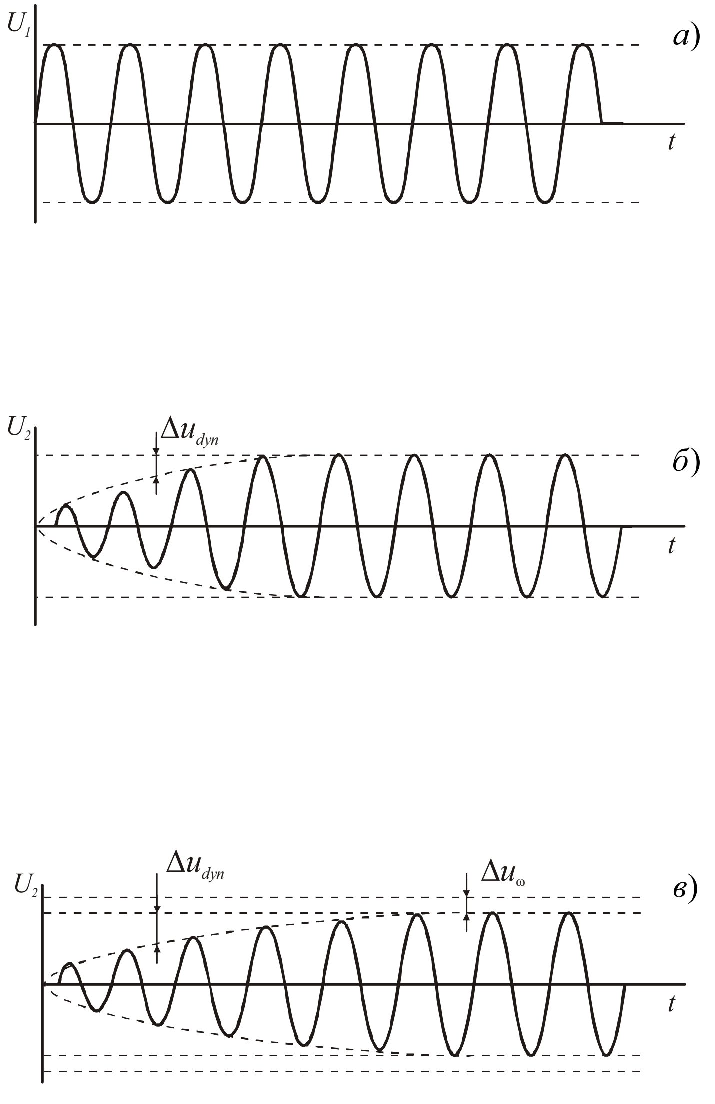


Рис. 8.1.3. Отклик измерительного преобразователя на подключение к его входу синусоидального напряжения: а) – входное напряжение; б) – отклик на входное воздействие при отсутствии частотной погрешности в установившемся режиме; в) – отклик на входное воздействие при наличии частотной погрешности в установившемся режиме; ΔU_{dyn} – динамическая погрешность в переходном режиме; ΔU_{ω} – частотная погрешность в установившемся режиме

Если ко входу преобразователя подключить в момент времени t_1 переменное напряжение, то изменение напряжения на выходе из-за действия инерционных процессов будет иметь вид, показанный на рис. 8.1.3.

Переменное напряжение на входе преобразователя изменяется по синусоидальному закону

$$u = U_{1m} \sin(\omega t + \varphi). \qquad 8.1.7$$

Допустим, что параметр процесса U_{1m} является информативным и связан с измеряемой физической величиной линейно через коэффициент связи k

$$U_{1m} = kx, \qquad 8.1.8$$

где x – измеряемая физическая величина.

Если измеряемая физическая величина изменяется во времени,

$$U_{1m} = kx(t), \qquad 8.1.9$$

то, подставив (8.1.9) в (8.1.7), получим

$$u = kx(t)\sin(\omega t + \varphi). \qquad 8.1.10$$

Из (8.1.10) следует, что временные изменения сигнала связаны с изменениями измеряемой физической величины x, через информативный параметр U_{m1}, и с временными параметрами ωt физического процесса, лежащего в основе сигнала. Временные изменения информативного параметра приводят к переходным процессам и динамической погрешности, а временные параметры процесса – к частотным погрешностям преобразователя, которые следует рассматривать как дополнительную погрешность.

Если временные изменения измеряемой физической величины, а следовательно, и информативного параметра сигнала носят периодический характер, то они могут сказаться и в установившемся состоянии как дополнительные частотные погрешности.

Для иллюстрации рассмотрим прохождение через преобразователь модулированного сигнала

$$u = (U_m \sin \Omega t)\sin \omega t, \qquad 8.1.11$$

где Ω – частота модуляции информативного параметра сигнала (амплитуды); ω – частота физического процесса, образующего основу измерительного сигнала.

При разложении в ряд Фурье входной сигнал будет представлен суммой трёх гармоник

$$\begin{aligned} U_1 &= U_m Sin\omega_o t + kU_m Sin(\omega_o t + \Omega t) + kU_m Sin(\omega_o t - \Omega t) = \\ &= U_o + U_в + U_н \end{aligned}. \qquad 8.1.12$$

Спектр такого сигнала представлен на рис. 8.1.4, *а*.

Если полоса пропускания преобразователя шире спектра входного сигнала (рис. 8.1.4, *б*), то преобразуемый сигнал проходит без искажений и соотношение между гармониками в выходном сигнале сохраняется (рис.8.1.4, *в*).

Если полоса пропускания частот у преобразователя относительно спектра сигнала узкая и неравномерная, то соотношение между гармониками на выходе преобразователя изменится, что свидетельствует о искажении сигнала и о наличии динамических погрешностей.

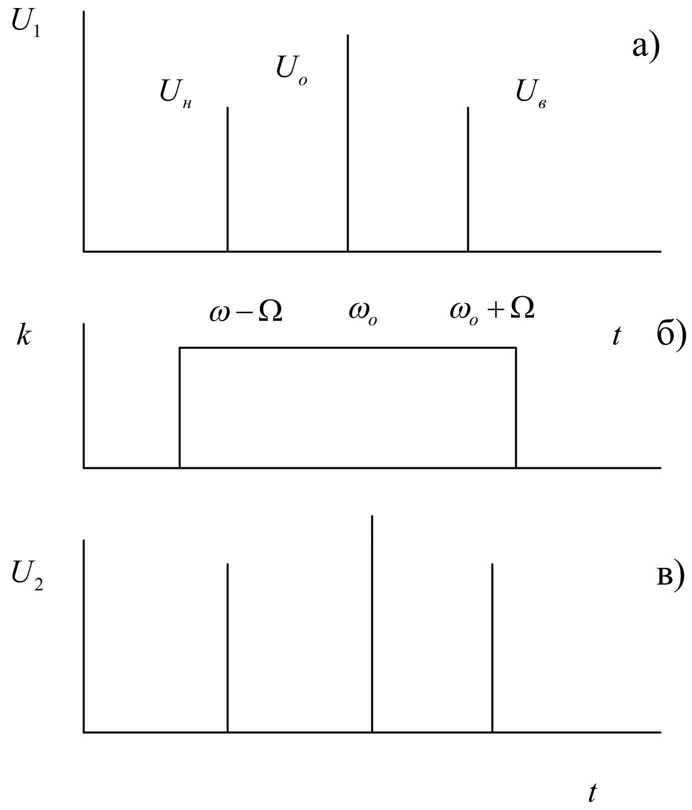


Рис. 8.1.4. Прохождение амплитудно-модулированного сигнала через преобразователь с равномерной полосой пропускания в диапазоне частот: $U_н$ – нижняя гармоника входного сигнала; $U_в$ – верхняя гармоника входного сигнала; k – коэффициент преобразования (усиления); U_2 – спектр выходного сигнала

Если полоса пропускания частот у преобразователя относительно спектра сигнала узкая и неравномерная, то соотношение между гармониками на выходе преобразователя изменится, что свидетельствует об искажении сигнала и о наличии динамических погрешностей (рис. 8.1.5).

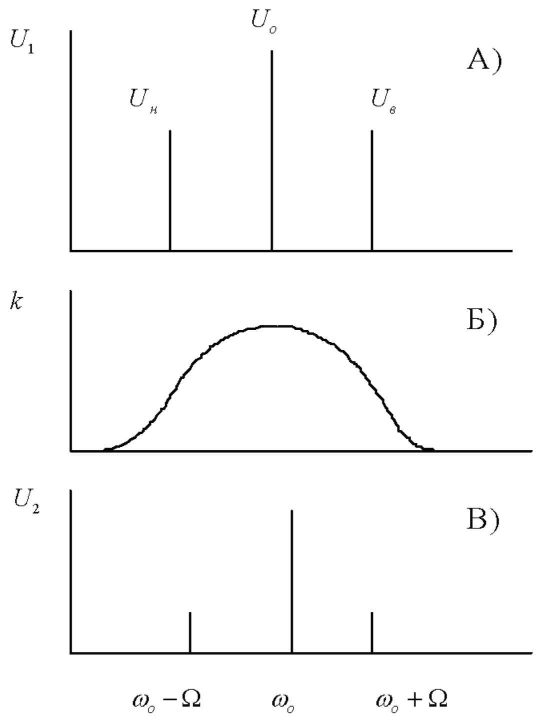


Рис. 8.1.5. Прохождение амплитудно-модулированного сигнала через преобразователь с неравномерной полосой пропускания частот входного сигнала: U_1 – спектр входного сигнала; k – коэффициент преобразования сигнала в неравномерной полосе частот преобразователя; U_2 – спектр выходного сигнала преобразователя

8.2. Динамические характеристики средств измерения

8.2.1. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения наиболее полно описывают динамические свойства измерительных преобразователей.

Общий вид дифференциального уравнения m-го порядка с нулевыми начальными условиями имеет вид

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} \cdots + b_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} + \cdots + y(t) = k_o x(t). \qquad 8.2.1$$

Порядок уравнения (8.2.1) бывает высоким, по крайней мере, выше второго. Его решение затруднительно, а часто и невозможно. Известно, что дифференциальные уравнения высокого порядка могут быть представлены системой дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Это означает представление сложного в динамическом отношении средства измерения совокупностью более простых динамических элементов нулевого, первого и второго порядков.

Самым простым в динамическом отношении измерительным преобразователем является преобразователь нулевого порядка. Преобразователь нулевого порядка есть безынерционное динамическое звено, которое описывается уравнением

$$y(t) = k_0 x(t). \tag{8.2.2}$$

У такого преобразователя отклик в точности повторяет входное воздействие.

Преобразователь с динамическими характеристиками первого порядка описывается дифференциальным уравнением

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_o x(t), \tag{8.2.3}$$

где T – постоянная времени преобразователя.

Вместо постоянной времени используют также граничную частоту

$$\omega_г = \frac{1}{T}. \tag{8.2.4}$$

Динамические характеристики измерительного преобразователя второго порядка описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{\omega_o^2}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2\beta}{\omega_o}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_o x(t), \tag{8.2.5}$$

где ω_o – резонансная частота собственных колебаний измерительного преобразователя; β – коэффициент демпфирования или, по-другому степень успокоения преобразователя.

8.2.2. Частотные характеристики

Амплитудно-фазовая характеристика измерительного преобразователя. Если на вход линейного измерительного преобразователя подать гармонический сигнал, представленный в символической форме

$$x(j\omega) = x_m e^{j\omega t}, \tag{8.2.6}$$

то на выходе преобразователя образуется сигнал, запись которого в символической форме выглядит так

$$y(j\omega) = y_m(\omega)e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} = \dot{y}_m(\omega)e^{j\omega t}, \tag{8.2.7}$$

где $\dot{y}_m$ – комплексная амплитуда выходного сигнала

$$\dot{y}_m(\omega) = y_m(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \tag{8.2.8}$$

Амплитудно-фазовой характеристикой измерительного преобразователя называют отношение

$$G(j\omega)=\frac{y(j\omega)}{x(j\omega)}=\frac{\dot{y}_m}{x_m}=\frac{y_m(\omega)}{x_m}e^{j\varphi(\omega)}. \qquad 8.2.9$$

Эта динамическая характеристика описывает зависимость выходного сигнала измерительного преобразователя от изменении частоты физического процесса входного сигнала в установившемся состоянии (после окончания переходных процессов)

Амплитудно-частотная характеристика измерительного преобразователя описывается выражением

$$A(\omega)=\left|G(j\omega)\right|=\frac{Y_m(\omega)}{x_m} \qquad 8.2.10$$

и представляет отношение амплитуд выходного сигнала и входного сигнала в установившемся режиме.

Фазочастотная характеристика измерительного преобразователя определяет разность фаз между напряжениями выходного и входного сигналов в установившемся режиме. Эту характеристику описывает $\varphi(\omega)$ в формуле (8.1.17).

8.2.3. Переходная характеристика

Переходная характеристика – это временная зависимость выходного сигнала, полученная в результате подачи на вход измерительного преобразователя сигнала в виде единичной функции с заданной амплитудой

$$x(t)=x_m 1(t). \qquad 8.2.11$$

Эта функция описывает инерционность средства измерения, обуславливающую запаздывание и, следовательно, искажение выходного сигнала относительно входного.

Переходная характеристика динамического элемента нулевого порядка

$$h(t)=0. \qquad 8.2.12$$

Для измерительного преобразователя с динамическими характеристиками первого порядка

$$h(t)=x_m k_0\left(1-e^{t/T}\right), \qquad 8.2.13$$

где T – постоянная времени измерительного преобразователя. Постоянная времени преобразователя определяется наклоном касательной к кривой переходного процесса при $t=0$ (рис. 8.2.1).

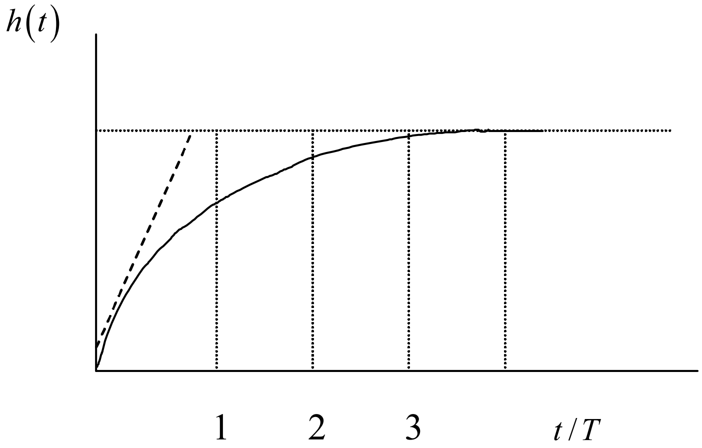


Рис. 8.2.1. Переходная характеристика измерительного преобразователя с динамической характеристикой первого порядка

Для измерительного преобразователя второго порядка при $x_m = 1$ переходная характеристика описывается выражением:

$$h(t) = k_0 \left[1 - \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin\left(\sqrt{1-\beta^2 \omega_0 t} + \arccos\beta \right) \right]. \qquad 8.2.14$$

Импульсная переходная характеристика $g(t)$ – это временная характеристика измерительного преобразователя, полученная в результате приложения к его входу сигнала в виде дельта функции.

Выходной сигнал измерительного преобразователя при заданом $x(t)$ определяется с использованием переходной характеристики $h(t)$ или импульсной переходной характеристики $g(t)$ и интеграла Дюамеля:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) g(t-\tau) d\tau, \qquad 8.2.15$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau. \qquad 8.2.16$$

8.3. Измерительные преобразователи с динамическими характеристиками нулевого, первого и второго порядков

8.3.1. Безынерционный преобразователь

Идеальный безынерционный элемент, являющийся динамическим звеном нулевого порядка, описывается динамическими характеристиками

$$G(j\omega) = k_o; \qquad A(\omega) = k_o; \qquad \varphi(\omega) = 0, \qquad 8.3.1$$

где $G(j\omega)$ – амплитудно-фазовая характеристика преобразователя; $A(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика; $\varphi(\omega)$ – фазочастотная характеристика.

Измерительный преобразователь с динамическими характеристиками звена нулевого порядка является частотно-независимым. Уравнение преобразования такого преобразователя

$$y = k_0 x + a. \qquad 8.3.2$$

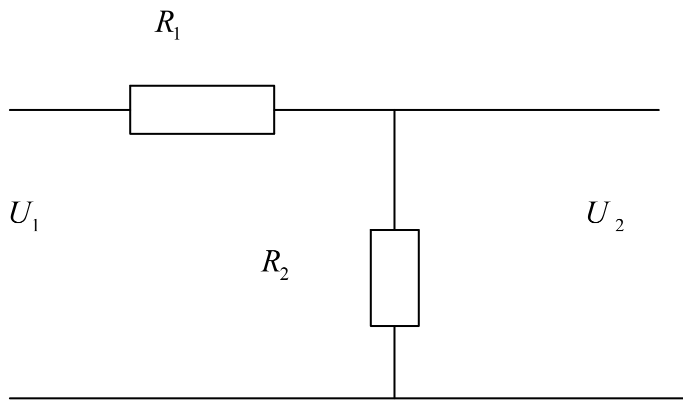


Рис. 8.3.1. Резистивный делитель напряжения как измерительный преобразователь с динамическими характеристиками нулевого порядка

Второе слагаемое а в уравнении преобразования характеризует начальное смещения и в частных случаях может отсутствовать. Примером измерительного преобразователя нулевого динамического порядка может служить резистивный делитель напряжения (рис. 8.3.1).

8.3.2. Динамическое звено первого порядка

Преобразователь с динамическими характеристиками первого порядка описывается дифференциальным уравнением

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_o x(t), \qquad 8.3.3$$

где T – постоянная времени преобразователя.

Вместо постоянной времени используют также граничную частоту

$$\omega_г = \frac{1}{T}. \qquad 8.3.4$$

Для динамического элемента первого порядка, описываемого дифференциальным уравнением (8.3.3), частотные характеристики описываются выражениями:

$$G(j\omega) = \frac{k_o}{1 + j\omega T}; \qquad A(\omega) = \frac{k_o}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}; \qquad \varphi(\omega) = -arctg(\omega T). \quad 8.3.5$$

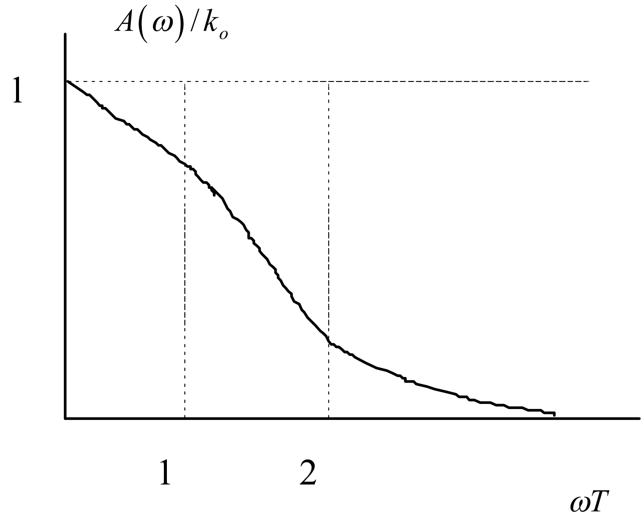


Рис. 8.3.2. Амплитудно-частотная характеристика динамического звена первого порядка

Переходная характеристика динамического звена первого порядка имеет вид

$$y = y_0\left(1 - e^{-t/T}\right). \qquad 8.3.6$$

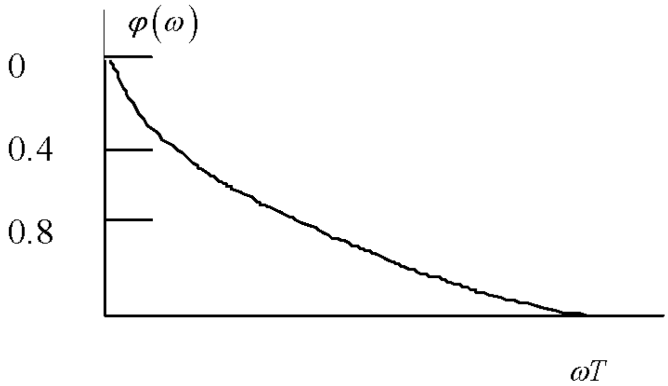


Рис. 8.3.3. Фазочастотная характеристика динамического звена первого порядка

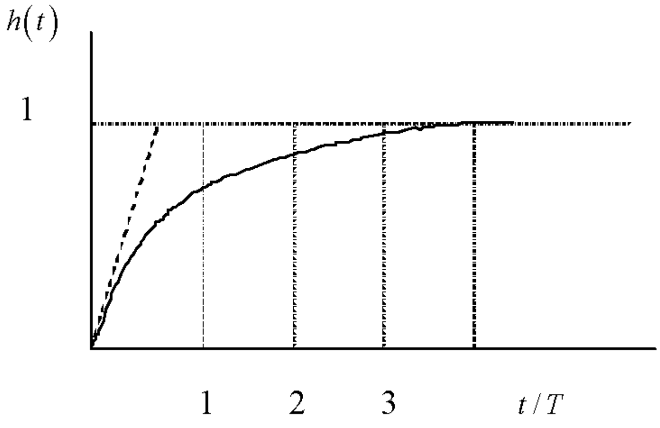


Рис. 8.3.4. Переходная характеристика измерительного преобразователя с динамической характеристикой первого порядка

Измерительный преобразователь с динамическими характеристиками звена первого порядка является инерционным звеном. Его отклик на входное ступенчатое воздействие происходит с запаздыванием, о чём наглядно свидетельствует вид переходной характеристики (рис. 8.3.4).

8.3.3. Динамическое звено второго порядка

Динамические характеристики звена второго порядка описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{\omega_o^2}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{2\beta}{\omega_o}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k_o x(t), \qquad 8.3.7$$

где ω_o – резонансная частота собственных колебаний измерительного преобразователя; β – коэффициент демпфирования или по-другому степень успокоения преобразователя.

Измерительный преобразователь с динамическими характеристиками звена второго порядка, описываемый дифференциальным уравнением (8.3.7), имеет частотные характеристики:

$$G(j\omega)=\frac{k_o}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_o^2}+j2\beta\dfrac{\omega}{\omega_o}}, \qquad 8.3.8$$

$$A(\omega)=\frac{k_o}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_o^2}+4\beta^2\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}, \qquad 8.3.9$$

$$\varphi(\omega)=-arctg\left(\frac{2\beta\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right). \qquad 8.3.10$$

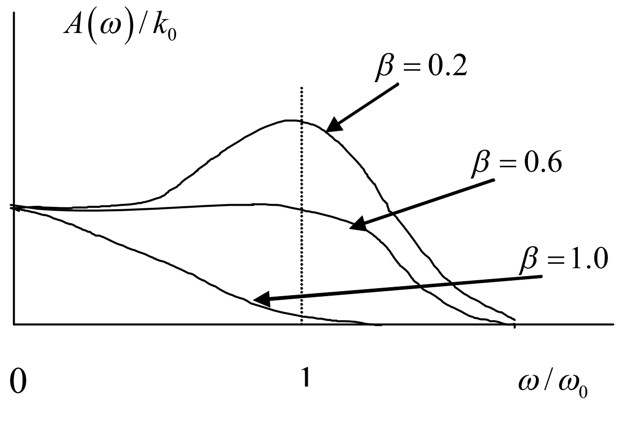


Рис. 8.3.5. Амплитудно-частотная характеристика измерительного преобразователя с динамическими характеристиками второго порядка

Для измерительных преобразователей, с динамическими характеристиками второго порядка, вид частотных характеристик в значительной степени зависит от коэффициента демпфирования (рис. 8.3.5).

При $\beta \succ 0.6$, в относительно широком частотном диапазоне $A(\omega) \simeq k_0$. Этот режим наиболее важен для практического применения. При $\beta \prec 0.6$ начинают проявляться резонансные явления, особенно при $\omega = \omega_0$.

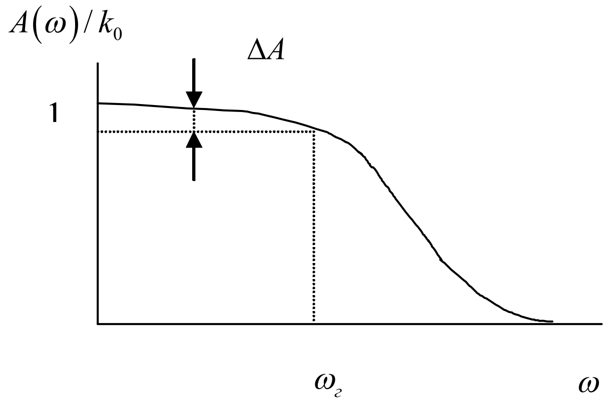


Рис.8.3.6. Амплитудно-частотная характеристика аналогового вольтметра

Ясное физическое представление и относительная простота экспериментального определения частотных характеристик послужили причиной широкого их применения для оценки динамических свойств измерительных преобразователей в метрологии. Для примера на рис. 8.3.6 показана типичная для аналогового вольтметра, предназначенного для измерения постоянного и переменного напряжения, амплитудно-частотная характеристика измерительного тракта. Для вольтметра установлена граничная частота $\omega_{гр}$, выше которой спад амплитудно-частотной характеристики считается недопустимым. В пределах граничной частоты ΔA определяет частотную погрешность измерительного преобразователя. Полоса частот от 0 до $\omega_{гр}$ называется полосой пропускания измерительного преобразователя.

В нормативно-технической документации на средство измерения указываются $\omega_{гр}$ и ΔA.

8.4. Нормирование динамических характеристик средств измерения

В перечень нормальных условий, при которых нормируется основная погрешность средств измерения, работающих с меняющимися во времени сигналами, входят определённый спектр сигнала или определённая частота из этого спектра.

Для средств измерения, частотный диапазон которых начинается с нулевой частоты, нормирование основной погрешности производится на нулевой частоте при установившемся значении выходного сигнала. Например, для вольтметра действующего значения напряжения, измеряющего постоянное и переменное напряжения, нормирование основной погрешности производят на постоянном напряжении.

Если средство измерения предназначено для работы в диапазоне частот, задаваемом частотой нижней границы диапазона $\omega_н$ и частотой верхней границей диапазона $\omega_в$, то основную погрешность нормируют на одной частоте, лежащей где-то в середине диапазона частот.

Для средств измерения, работающих с меняющимися во времени информативными параметрами, нормирование погрешности производится в установившемся режиме. Например, погрешность термопары определяют тогда, когда измеряемая температура достигла установившегося значения и все переходные процессы в термопаре закончились.

В аналоговых средствах измерения, работающих с переменными физическими процессами, лежащими в основе сигнала, нормируют амплитудно-частотную, фазочастотную и амплитудно-фазовую характеристики.

В аналоговых средствах измерения, работающих с переменными информативными параметрами, нормируют переходную и импульсную переходную характеристики, постоянную времени, время установления показаний.

В цифровых средствах измерения нормируются максимальная частота преобразования, определяющая быстродействие цифрового прибора, и погрешность датирования отсчёта, т.е. привязки момента получения отсчёта к определённому моменту времени на временной оси.

Контрольные вопросы

1. Какие физические процессы могут лежать в основе измерительного сигнала?

2. Когда в результатах измерения необходимо учитывать динамическую погрешность?

3. В чём различие динамических и частотных погрешностей измерительного преобразователя?

4. Показать на графике, как изменится выходной сигнал измерительного преобразователя при скачкообразном изменении входного сигнала, задаваемого уровнем напряжения.

5. Показать рисунком, как проходит модулированный по амплитуде сигнал через измерительный преобразователь с равномерной и неравномерной аплитудно-частотной характеристиками.

6. Написать дифференциальное уравнение динамического звена первого порядка.

7. Написать дифференциальное уравнение динамического звена второго порядка.

8. Что понимают под амплитудно-фазовой характеристикой измерительного преобразователя?

9. Что понимают под амплитудно-частотной характеристикой измерительного преобразователя?

10. Что понимают под фазочастотной характеристикой измерительного преобразователя?

11. Изобразить на графике динамические свойства измерительного преобразователя второго порядка.

12. Назвать динамические характеристики средства измерения.

13. Написать математическое выражение для переходной характеристики динамического измерительного преобразователя нулевого и первого порядков.

14. Что такое постоянная времени измерительного преобразователя с динамической характеристикой первого порядка?

15. Какие динамические характеристики нормируются у цифровых измерительных преобразователей и приборов?

9. МЕТРОЛОГИЧЕСКАЯ НАДЁЖНОСТЬ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ

9.1. Основные понятия теории метрологической надёжности

В процессе эксплуатации метрологические свойства средств измерения изменяются по причине старения элементов, образующих средство измерения. Эти изменения носят случайный монотонный или флуктуирующий характер и в некоторый момент времени могут привести к отказам, т.е. к невозможности средства измерения выполнять свои функции. Отказы делятся на неметрологические и метрологические.

Неметрологические отказы обусловлены причинами не связанными с метрологическими свойствами средства измерения. Они носят явный характер, происходят внезапно и могут быть обнаружены без проведения поверки. Попросту говоря, неметрологический отказ – это поломка прибора (сгорел трансформатор в источнике питания, вышло из строя реле и т.д.).

Метрологический отказ вызывается выходом метрологических характеристик, указанных в нормативно-технической документации, за установленные пределы. При метрологическом отказе средство измерения работает, но не гарантирует, установленную для него погрешность измерения, т.е. такому средству измерения нельзя верить.

Внезапный метрологический отказ характеризуется скачкообразным изменением одной или нескольких метрологических характеристик, выводящим эти характеристики за допустимые пределы. Такой отказ можно рассматривать как неполную поломку средства измерения. Этот отказ, как и полная поломка средства измерения, просто диагностируется в процессе эксплуатации. Особенностью внезапных метрологических отказов является постоянство во времени их интенсивности. Это даёт возможность применять для анализа внезапных метрологических отказов классическую теорию надёжности.

Постепенный метрологический отказ характеризуется монотонным изменением одной или нескольких метрологических характеристик. По характеру проявления постепенные отказы являются скрытыми и очень опасными, так как они могут быть выявлены только по результатам периодического контроля средства измерения, называемого его поверкой.

Метрологическая исправность средства измерения есть состояние средства измерения, при котором все его нормируемые метрологические характеристики соответствуют значениям, указанным в нормативно-технической документации.

Метрологическая надёжность есть способность средства измерения сохранять установленные в нормативно-технической документации метрологические характеристики в течение заданного времени при определённых режимах и условиях эксплуатации. Метрологическая надёжность оценивается временем, в течение которого выполняется это условие. Специфика метрологической надёжности состоит в том, что для неё основное положение классической теории надёжности о постоянстве во времени интенсивности отказов оказывается неправомерным. Современная классическая теория надёжности ориентирована на изделия, обладающие двумя состояниями работоспособности: работоспособное состояние и неработоспособное состояние. Постепенное изменение погрешности средства измерения позволяет ввести сколь угодно много работоспособных состояний с различным уровнем эффективности функционирования, определяемым степенью приближения погрешности к допустимым граничным значениям.

Понятие метрологического отказа является в определённой степени условным, поскольку определяется допуском на метрологические характеристики средства измерения.

Зафиксировать точно наступление метрологического отказа невозможно ввиду его скрытности. В классической теории надёжности явные отказы фиксируются в момент их возникновения. Такое различие потребовало разработки специальных методов анализа метрологической надёжности.

Надёжность средств измерения является обобщённой характеристикой средства измерения и детализируется другими характеристиками, такими как стабильность, безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость.

Стабильность средства измерения является качественной характеристикой, отражающей неизменность во времени его метрологических свойств. Стабильность описывается временными зависимостями параметров закона распределения инструментальной погрешности средства измерения. Стабильность определяется процессами старения внутри средства измерения и количественно их описывает.

Безотказность есть свойство средства измерения непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение определённого времени.

Безотказность характеризуется двумя состояниями: работоспособное и неработоспособное. Отказ является случайным событием, связанным с прекращением работоспособного состояния средства измерения.

Долговечность средства измерения оценивается временем, в течение которого оно сохраняет работоспособное состояние до наступления предельного состояния. В предельном состоянии метрологические характеристики не соответствуют значениям, установленным в нормативно-технической документации, и эксплуатация средства измерения не допустима.

Ремонтопригодность есть свойство средства измерения, заключающееся в приспособленности к предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов, восстановлению и поддержанию его работоспособного состояния путём технического обслуживания и ремонта. Ремонт и восстановление являются затратными мероприятиями, и если их приходится проводить часто, то ставится вопрос о целесообразности дальнейшей эксплуатации средства измерения

9.2. Изменение метрологических характеристик в процессе эксплуатации

Изменение метрологических характеристик средств измерения во времени обусловлено процессами старения его элементов, вызванными взаимодействием с внешней окружающей средой. Эти процессы протекают на молекулярном уровне и не зависят от того, находится ли средство измерения в эксплуатации или хранится на консервации. Основным фактором, определяющим старение средств измерения, является календарное время, прошедшее с момента их изготовления, т.е. их возраст. Скорость старения зависит от качества элементов образующих средство измерения. Старение средств измерения протекает медленно и экспериментально, его обнаружить можно только в течение длительного времени. В связи с этим большое значение приобретают математические методы прогнозирования процесса старения.

Теоретическая задача определения метрологической надёжности средства измерения состоит в нахождении начальных изменений метрологических характеристик и построении математической модели, экстраполирующей полученные результаты на большой интервал времени. Изменения во времени метрологических характеристик средств измерения являются случайным процессом, поэтому основным инструментом построения математических моделей процесса старения является теория случайных процессов. При этом нужно иметь в виду, что этот процесс нестационарный.

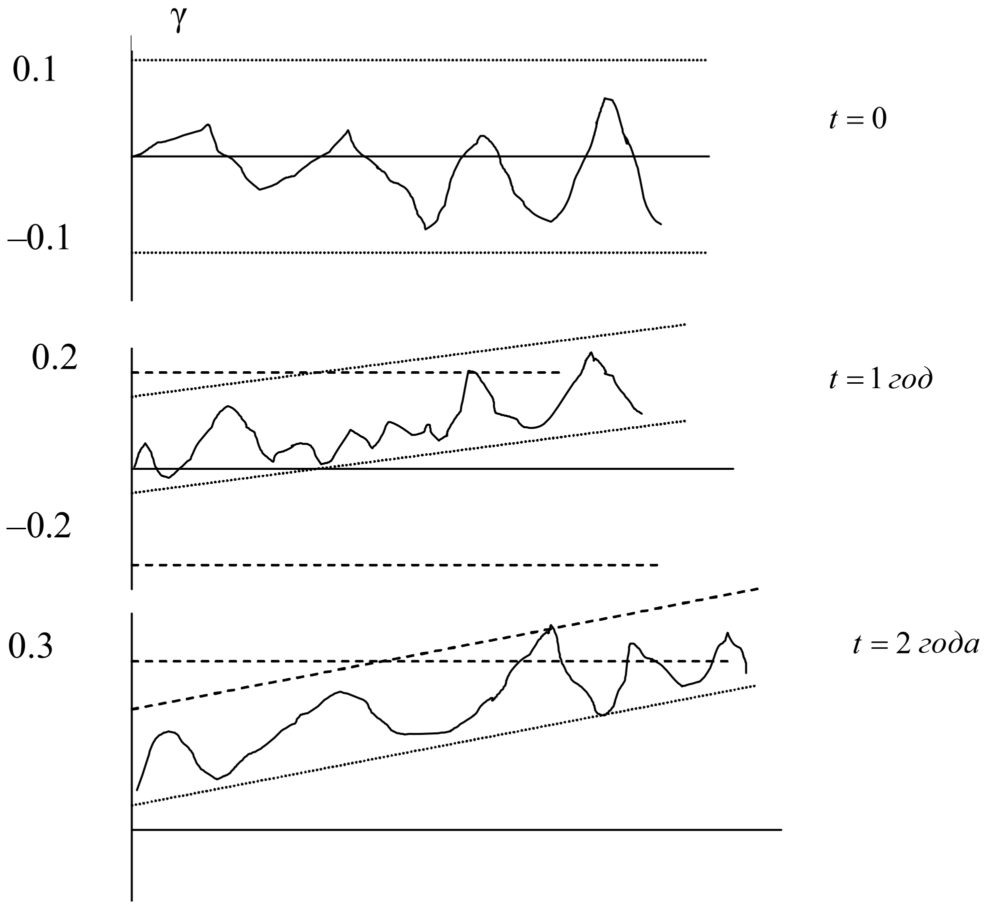


Рис. 9.2.1. Зависимость погрешности средства измерения от значения измеряемой величины x *после изготовления* $t = 0$*, через один год и через два года*

С учётом неизбежного старения завод изготовитель в нормативно-технической документации основную погрешность средства измерения устанавливает с 1.25–2.5-кратным запасом. Если, например, экспериментально установлен класс точности средства измерения 0.2, то в нормативно-технической документации указывается класс точности 0.5.

Для иллюстрации на рис. 9.2.1 показан процесс метрологического старения средства измерения.

При изготовлении средства измерения установлено, что его класс точности 0,1, однако завод-изготовитель в нормативно-технической документации установил класс точности 0.5, т.е. с пятикратным запасом. Поэтому через два года, несмотря на старение, прибор не имеет метрологических отказов.

9.3. Математическая модель надёжности метрологических характеристик

Так как заранее неизвестно, на каком участке шкалы погрешность прибора превысит нормированное для него значение класса точности, то процесс возрастания прогрессирующей погрешности в работе $[10]$ рассматривался как нестационарный случайный процесс, состоящий из пучка реализаций, соответствующих траекториям возрастания погрешности на отдельных участках шкалы. Далее определялся доверительный интервал погрешностей при доверительной вероятности 0.95. Если доверительный интервал на каком то участке шкалы превышал интервал, установленный классом точности прибора, то это фиксировалось как метрологический отказ средства измерения.

В результате проведённых исследований оказалось, что для аналоговых и цифровых приборов текущее значение приведённой погрешности $\gamma(t)$ (в процентах) описывается выражением

$$\gamma(t)=\gamma_0+\frac{v_0}{a}\left(e^{at}-1\right)=\gamma_0+v_0\tau\left(1-e^{t/\tau}\right), \qquad 9.3.1$$

где t – возраст прибора с момента его изготовления в годах; τ – постоянная времени метрологической стабилизации прибора в годах; $a=-1/\tau$ – отрицательное ускорение процесса старения (1/год); v_0 – начальная скорость прогрессирующего возрастания приведённой погрешности средства измерения (%/год); γ_0 – значение приведённой погрешности прибора в момент выпуска из производства, выраженное в процентах.

Эта зависимость графически представлена кривой *1* на рис 9.2.2. При $t=0$ кривая выходит из точки с ординатой γ_0, скорость её возрастания постепенно замедляется с отрицательным ускорением a и при $t\to\infty$ она стремится к установившемуся значению $\gamma_\infty=\gamma_0+v_0\tau$.

Если бы класс точности средства измерения устанавливался из условия $\gamma_{кл}=\gamma_\infty$, то основная инструментальная погрешность $\gamma(t)$ достигала бы своего значения $\gamma_{кл}$ при $t=\infty$, что означало бы отсутствие метрологических отказов за весь срок эксплуатации измерительного прибора. Однако заводы изготовители, чтобы не снижать заметно класс точности средства измерения и, тем самым, не снижать его стоимость, устанавливают $\gamma_{кл}\prec\gamma_\infty$. Вследствие этого в возрасте прибора t_{p1} основная инструментальная погрешность достигает предельного значения $\gamma_{кл}$, прибор бракуется и направляется на первый метрологический ремонт и регулировку. Если при ремонте его погрешность будет доведена до значения γ_0, то при дальнейшей эксплуатации старение прибора будет идти по линии *2* (рис. 9.2.2). При достижении момента времени t_{p2} прибор направляется на второй метрологический ремонт.

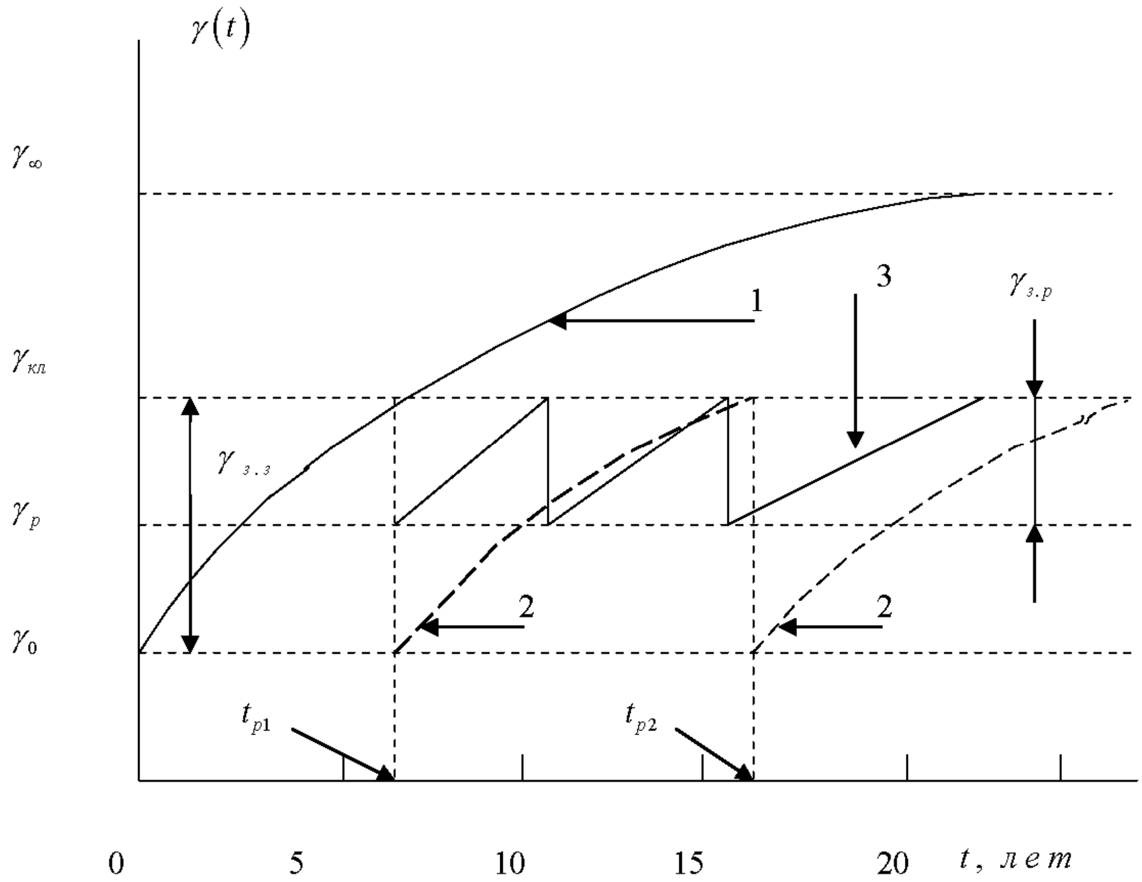


Рис. 9.2.2. Старение и метрологический ремонт средств измерения: 1 – кривая естественного старения; 2 – старение с регламентным ремонтом до первоначального значения погрешности γ_0; 3 – старение при некачественных метрологических ремонтах с восстановлением погрешности до γ_p

Если при первом метрологическом ремонте была достигнута погрешность $\gamma_p \succ \gamma_{кл}$, то процесс старения пойдёт по кривой *3*. В этом случае межповерочные интервалы становятся меньше, чем в случае старения по кривой *2*.

Для аналоговых приборов среднее время наработки на первый метрологический отказ (момент времени t_{p1}) составляет от 4 до 14 лет. Некоторые типы приборов, хорошо сконструированные и качественно изготовленные, морально устаревают прежде чем доживут до первого метрологического отказа, не говоря уже о втором.

9.4. Показатели метрологической надёжности средства измерения

Знание показателей метрологической надёжности позволяет потребителю оптимально использовать средство измерения, планировать мощность ремонтных подразделений, размер резервного фонда приборов, обоснованно назначать межповерочные интервалы и грамотно проводить мероприятия по техническому обслуживанию средств измерения.

Основная инструментальная погрешность средства измерения задаётся классом точности γ или доверительным интервалом Δ_{osp} с доверительной вероятностью $P_d = 0.95$ или $P_d = 0.997$.

На заводе-изготовителе в результате статистических экспериментальных исследований устанавливается класс точности средства измерения или доверительный интервал, обозначим их как γ_0 и $\Delta_{osp.0}$.

Стабильность средства измерения характеризуется изменением основной систематической погрешности во времени и задаётся плотностью распределения приращения погрешности:

$$\begin{aligned} \Delta\gamma &= \gamma(t) - \gamma_0; \\ \Delta\left(\Delta_{osp}\right) &= \Delta_{osp}(t) - \Delta_{osp.0}. \end{aligned} \qquad 9.4.1$$

Вероятность безотказной работы средства измерения в процессе эксплуатации – это вероятность того, что в течение времени t погрешность не выйдет за границы доверительного интервала с заданной доверительной вероятностью. Если не сделать запаса по метрологической надёжности, то вероятность безотказной работы будет очень мала. Чтобы увеличить вероятность безотказной работы завод изготовитель в нормативно-технической документации на средства измерения конкретного типа указывает класс точности и границы доверительного интервала с увеличением в 1.2–2.5 раза:

$$\gamma = (1.2 \div 2.5)\gamma_0; \quad \Delta_{osp} = (1.2 \div 2.5)\Delta_{osp.0}, \qquad 9.4.2$$

где γ_0 – действительный класс точности средства измерения на момент изготовления; γ – завышенный класс точности, вносимый в нормативно-техническую документацию на приборы данного типа; $\Delta_{osp.0}$ – действительное значения доверительного интервала на момент изготовления; Δ_{osp} – значение доверительного интервала, вносимое в паспорт приборов данного типа.

Наработка до отказа – продолжительность работы средства измерения от начала эксплуатации до первого метрологического отказа. На рис. 9.2.2 это момент времени t_{p1}.

Вероятность безотказной работы является функцией времени и задаётся аналитически, таблицей или графиком (рис. 9.2.2). Аналитическое представление вероятности безотказной работы

$$P(t) = 1 - F(t) = \int_{t}^{\infty} p_{н}(t), \tag{9.4.3}$$

где $F(t)$ и $p_{н}(t)$ – интегральная и дифференциальная функции распределения наработки на отказ.

Например, если вероятность безотказной работы в течение 1000 часов составляет $P(t) = 0.97$, то это означает, что из большого числа средств измерения данного типа около 97% проработает более 1000 часов.

Средней наработкой до отказа называется математическое ожидание наработки средства измерения до первого отказа

$$t_{cp} = \int_{0}^{\infty} t p_{н}(t) dt. \tag{9.4.4}$$

Гамма-процентная наработка до отказа – это наработка (продолжительность работы средства измерения), в течение которой отказ прибора не возникает с вероятностью γ, выраженной в процентах

$$P(t_{\gamma}) = 1 - F(t_{\gamma}) = 1 - \int_{0}^{t_{\gamma}} p_{н}(t) dt = \gamma. \tag{9.4.5}$$

При $\gamma = 100\%$ гамма-процентная наработка называется установленной безотказной наработкой, при $\gamma = 50\%$ – медианной наработкой.

Частота (интенсивность) отказов $\omega(t)$ определяется как условная плотность вероятности возникновения отказа средства измерения, которая находится для рассматриваемого момента времени при условии, что до этого момента отказов не было:

$$\omega(t) = -\frac{1}{p(t)} \frac{dp(t)}{dt} = p_{н}(t) / \int_{t}^{\infty} p_{н}(t) dt. \tag{9.4.6}$$

Вероятность того, что средство измерения, проработавшее безотказно в течение времени t, откажет в последующий малый промежуток dt, равна $\omega(t)d(t)$.

Срок службы средства измерения – это календарная продолжительность его работы от начала эксплуатации до перехода в предельное состояние, определяемое как метрологическим, так и не метрологическим отказом. Он измеряется в годах или месяцах.

Средним сроком службы для типа прибора называется математическое ожидание срока службы

$$\bar{T}_{сл} = \int_0^\infty t f_{сл}(t)\,dt, \qquad 9.4.7$$

где $f_{сл}(t)$ – плотность вероятностей распределения срока службы для совокупности средств измерения данного типа.

9.5. Метрологическая надёжность и межповерочные интервалы

Основным способом поддержания средства измерения в исправном состоянии является его периодическая поверка, при которой показания поверяемого прибора сравниваются с показаниями более точного прибора того же вида при измерении одного и того же значения физической величины. Поверка проводится метрологическими службами согласно правилам, залаженным в нормативно-техническую документацию на средство измерения. Периодичность поверки должна быть согласована с требованиями к надёжности средства измерения. Поверку необходимо проводить через оптимально выбранные интервалы времени, называемые межповерочными интервалами.

Момент наступления метрологического отказа может выявить только поверка, результаты которой позволят утверждать, отказ произошёл в период времени между двумя последними поверками. Продолжительность межповерочного интервала должна быть оптимальной, поскольку частые поверки приводят к излишним материальным и трудовым затратам на их организацию и проведение, а редкие поверки ведут к большим погрешностям из-за метрологических отказов.

Межповерочные интервалы устанавливаются в календарном времени для средств измерения, изменение метрологических характеристик у которых обусловлено старением и не зависит от интенсивности эксплуатации. Значение интервала рекомендуется выбирать из следующего ряда: 0.25; 0.5; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 12 *К* месяцев, где *К* – целое положительное число. Для средств измерения, у которых изменение метрологических характеристик связано не со старением, а с износом его элементов, зависящим от интенсивности его эксплуатации, межповерочные интервалы назначаются по времени наработки.

При установлении межповерочного интервала в первую очередь учитывается самая короткоживущая метрологическая характеристика, обычно это бывает основная инструментальная погрешность, включая систематическую, случайную и гистерезисную.

Выбор межповерочного интервала проводят:

– на основе статистики отказов;

– на основе экономического критерия;

– путём произвольного назначения с последующей корректировкой в течение всего срока службы средства измерения.

Выбор конкретного способа определения межповерочного интервала зависит, в первую очередь, от исходной информации о надёжности и стабильности средства измерения.

Первый способ является эффективным при условии, что известны показатели метрологической надёжности. Наиболее полно такая информация содержится в моделях, описывающих старение средств измерения (рис. 9.2.2). Такие модели могут быть получены для типов средств измерения, находящихся в длительной эксплуатации.

Применение способа расчёта межповерочного интервала времени, основанного на статистике скрытых и явных отказов, требует большого количества экспериментальных данных. Такого рода исследования трудоёмки и занимают значительное время, в течение которого прибор может морально устареть.

Определение межповерочного интервала по экономическому критерию заключается в выборе такого интервала, при котором можно минимизировать расходы на эксплуатацию средства измерения и можно устранять последствия от возможных ошибок, вызванных его не предусмотренными метрологическими отказами. Исходной информацией при выборе такого способа служат данные о стоимости поверки и ремонта средства измерения, а также от ущерба, изъятия из эксплуатации и использования метрологически неисправного прибора.

Основная сложность применения этого способа заключается в том, что затраты на поверку и ремонт легко определяются, а вот потери от скрытых метрологических отказов, как правило, неизвестны. Приходится прибегать к приближенным математическим моделям, описывающим затраты на эксплуатацию средств измерения со скрытыми метрологическими отказами в виде функций потерь.

Наиболее универсальным является способ, состоящий в произвольном назначении межповерочного интервала с последующей корректировкой его величины. В этом способе при минимальной исходной информации назначается произвольно начальный интервал, а результаты последующих поверок становятся исходными данными для его корректировки.

Основной трудностью при применении названного способа является назначение первого межповерочного интервала. Выход из затруднения ищется тремя путями. Во-первых, для определения длительности первого межповерочного интервала используются показатели метрологической надёжности поверяемого средства измерения, заложенные на заводе-изготовителе. Во-вторых, длительность первого интервала может быть приблизительно оценена из анализа данных по эксплуатации, аналогичных поверяемому по конструкции и технологии изготовления средств измерения. В-третьих, первый межповерочный интервал выбирается по рекомендациям государственных и ведомственных метрологических служб.

Последующие межповерочные интервалы выбираются путём корректировки первого интервала, с учётом результатов проведённых первых поверок большого числа однотипных средств измерения.

Данный способ установления межповерочного интервала рекомендуется методикой МИ 1872-88 «ГСИ Межповерочные интервалы образцовых средств измерения. Методика определения и корректировки» и в международном стандарте ИСЩ 10012-1 «Требования, гарантирующие качество измерительного оборудования».

Контрольные вопросы

1. Что такое отказ средства измерения? Чем отличается метрологический отказ от неметрологического?

2. Дать определение метрологической исправности средства измерения.

3. Что следует понимать под метрологической надёжностью средства измерения?

4. Чем вызвано изменение во времени метрологических характеристик средств измерения? Привести вариант математического описания старения измерительного прибора.

5. Что называется межповерочным интервалом средства измерения?

6. Какие способы выбора межповерочных интервалов существуют?

7. Назовите нормативный документ, в котором рассматриваются вопросы выбора межповерочных интервалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
2. Рабинович С.Г. Погрешности измерения. – Л.: Энергия, 1978.
3. Кузнецов В.А., Якунина Г.В. Общая метрология. – М.: ИПК Изд-во стандартов, 2001.
4. Шишкин И.Ф. Теоретическая метрология. – М.: Изд-во стандартов. 1990.
5. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология. – М.: Логос. 2002.
6. Куртев Н.Д., Голубь Б.И., Анцыферов С.С. Основы метрологии. – М.: МИРА, 2002.
7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969.
8. Долинский Е.Ф. Обработка результатов измерений. – М.: Изд-во стандартов. 1973.
9. Куликов Е.И. Методы измерения случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1986.
10. Новицкий П.В., Зограф И.А., Лабунец В.С. Динамика погрешности средств измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1990.
11. Грановский В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения. – Л.: Энергоатомиздат. 1984.
12. Земельман М.А. Метрологические основы технических измерений. – М.: Изд-во стандартов. 1991.
13. Грановский В.А., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных. – Л.: Энергоатомиздат, 1990.
14. Пиотровский Я.М. Теория измерений для инженеров. – М.: Мир, 1989.
15. Екимов А.В., Ревяков М.И. Надёжность средств электроизмерительной техники. – Л.: Энергоатомиздат, 1991.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ЖУКОВ Владимир Константинович

НОРМИРОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ НА СТАДИЯХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ИЗГОТОВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор	*Г.П. Орлова*
Верстка	*Г.П. Орлова*
Дизайн обложки	*О.Ю. Аршинова* *О.А. Дмитриев*

Подписано к печати 25.12.2008. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 7,67. Уч.-изд. л. 6,94.
Заказ 818. Тираж 200 экз.

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.