

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.М. Малышенко

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
вузов Российской Федерации по образованию в области
радиотехники, электроники, биомедицинской техники
и автоматизации в качестве учебника для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по направлению
подготовки 220200 «Автоматизация и управление»*

Издательство
Томского политехнического университета
2008

УДК 681.51.01:51(075.8)

ББК 32.817я73

М20

Малышенко А. М.

М20 Математические основы теории систем: учебник для вузов / А. М. Малышенко. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 364 с. : ил.

ISBN 5-98298-305-5

В учебнике представлен основной современный математический аппарат, используемый при анализе и синтезе систем автоматизации и управления. Приведено описание детерминированных и случайных сигналов в системах, способов формирования, линеаризации, преобразования (в том числе типизации) математических моделей вход-выходных систем, их типовых операторных, временных и частотных характеристик, основных методов анализа статики и динамики и используемых для этого универсальных математических пакетов.

Разработан в рамках реализации Инновационной образовательной программы Томского политехнического университета по направлению «Информационно-коммуникационные системы и технологии». Учебник предназначен для подготовки бакалавров и магистров по направлению 220200 «Автоматизация и управление», по специальностям 220301 «Автоматизация технологических процессов и производств», 220401 «Мехатроника» и другим специальностям кибернетического профиля, а также инженеров, аспирантов и научных сотрудников, специализирующихся в разработке и исследовании систем автоматизации и управления техническими объектами.

УДК 681.51.01:51(075.8)

ББК 32.817я73

Рецензенты

Кафедра автоматики Новосибирского
государственного технического университета
(зав. кафедрой – д.т.н., профессор *А. С. Востриков*)

Доктор технических наук, профессор *А. М. Кориков*

© Малышенко А. М., 2008

© Томский политехнический университет, 2008

© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2008

ISBN 5-98298-305-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебник предназначен для усвоения студентами тех разделов математики, которые не освещаются в общем курсе «Высшая математика», но в то же время широко используются в инженерной практике и научных исследованиях при разработке и анализе систем автоматизации и управления, а также других технических систем, близких к ним по своим свойствам и математическим моделям. Их изложение в отдельном курсе обусловлено стремлением отразить специфику инженерных задач, донести ее до будущих бакалавров, магистров и инженеров, специализирующихся в области автоматизации и управления.

Курс «Математические основы теории систем» или близкие ему по содержанию курсы изучаются студентами вузов, как правило, после традиционного курса высшей математики, но до изучения общепрофессиональных и специальных дисциплин. В этой связи он выполняет функцию своеобразного «моста» между математикой и инженерными дисциплинами, ориентированными на изучение технических систем, в том числе систем автоматизации и управления.

Автор выражает искреннюю признательность своим коллегам – преподавателям кафедры интегрированных компьютерных систем управления Томского политехнического университета и рецензентам: коллективу кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета, ее заведующему – доктору технических наук, профессору А. С. Вострикову и заведующему кафедрой автоматизированных систем управления Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, доктору технических наук, профессору А. М. Корикову за полезные замечания по структуре и содержанию данного учебника. Большую помощь в оформлении рисунков для учебника оказали инженеры Т. Н. Лебедева и О. А. Борисова, за что им автор сердечно благодарен.

Отзывы, критические замечания и пожелания по этому учебнику просьба направлять по адресу: Россия, 634034, г. Томск, ул. Советская, 84, Кибернетический центр Томского политехнического университета, кафедра интегрированных компьютерных систем управления или по e-mail: mam@tpu.ru.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Математические основы теории систем» (МОТС) ориентирован на формирование у студентов общесистемных знаний и навыков математического моделирования систем (преимущественно технических) с целью последующего их анализа или синтеза. Он включает в себя краткие сведения о системах и системном анализе, методы математического описания и исследования состояний, свойств, характеристик систем, а также протекающих в них процессов. Кроме того, в нем излагаются методы преобразования и типизации математических моделей систем, математическое описание типовых сигналов в системах, приводятся типовые динамические характеристики систем, широко используемые в научных исследованиях и инженерной практике при их анализе и синтезе. Эти знания необходимы студентам, обучающимся в технических вузах по многим направлениям и специальностям, в частности по направлениям 220100 – «Системный анализ и управление», 220200 – «Автоматизированные технологии и производства», 220300 – «Автоматизация технологических процессов и производств», 220400 – «Мехатроника и робототехника», для изучения ряда общепрофессиональных и специальных дисциплин и последующей профессиональной деятельности.

Математические методы широко используются для решения задач анализа и синтеза технических средств и систем. В этой связи подготовка дипломированных специалистов во вузах в настоящее время обязательно включает в себя изучение высшей математики. Однако изложение высшей математики только в терминах абстрактных категорий, без привязки к объектам будущей профессиональной деятельности студентов, затрудняет ее усвоение и использование при математической формулировке и решении практических задач. По этой причине часть разделов высшей математики в учебных планах подготовки, например, бакалавров и магистров по направлению «Автоматизация и управление» и дипломированных специалистов (инженеров) по специальностям кибернетического профиля во многих вузах уже много лет выделяют в отдельный курс, который называют «Математические основы теории систем», «Математические основы кибернетики», или близкий им по своей сути. Он призван дать студентам базовые сведения по системотехнике, методам системного анализа и тем дополнительным, по сравнению с курсом "Высшая математика", ее разделам, кото-

рые широко используются при проектировании и исследовании систем автоматизации и управления техническими объектами.

Несмотря на то что подобные курсы уже сравнительно давно читаются во многих вузах, их содержание до сих пор не устоялось. Это обусловлено, прежде всего, спецификой организации учебного процесса в каждом вузе и большим перечнем тех разделов высшей математики, которые с полным основанием могут быть отнесены к основному математическому базису кибернетики. Подобная разноплановость по содержанию данного курса нашла своё отражение и в тех нескольких учебных пособиях по математическим основам кибернетики (МОК) и теории систем, которые были изданы до сих пор [1–3].

После изучения курса МОТС студент должен уметь формировать математические модели для задач анализа систем по результатам их содержательной постановки, проводить соответствующую формализацию, выбирать необходимый математический метод исследования, получать решения в терминах выбранного метода.

Данный учебник ориентирован преимущественно на подготовку специалистов по автоматизации и управлению. По сравнению с ранее изданными учебными пособиями по МОК оно имеет ряд существенных отличий. Прежде всего, это выразилось в перечне включенных в учебник разделов математики, в более детальном изложении методологии формирования и преобразований математических моделей систем различного назначения, их типизации. При этом уделяется внимание не только описанию состояний систем и протекающих в них процессов, но и математическому описанию их сигналов, структур, свойств и характеристик. Включение этих разделов в пособие обусловлено тем, что ни в курсе высшей математики, ни в последующих инженерных дисциплинах, ориентированных на изучение конкретных средств и систем автоматизации и управления, подобные вопросы детально не изучаются. В то же время успех в анализе и синтезе систем в существенной мере зависит не только от правильной формулировки задач такого анализа или синтеза, но в определяющей мере и от того, насколько адекватно сформированы для этих целей математические модели.

В курс введены разделы, описывающие типовые операторные, частотные и временные характеристики линейных динамических систем, их операторно-структурные схемы и типовые динамические звенья систем этого класса. Ныне эти разделы обычно изучаются студентами, специализирующимися по автоматизации и управлению, в курсе «Теория автоматического управления». Но вряд ли такое положение вещей следует сохранять и впредь, так как содержащиеся в этих

разделах сведения широко применяют не только при анализе объектов и систем автоматического управления, но и при анализе электрических, электронных, электромеханических и других устройств и систем. К тому же они начинают использоваться в настоящее время в образовательном процессе до начала изучения теории автоматического управления.

Имеется в учебнике и ряд оригинальных разделов, прежде всего, связанных с описанием состояний и процессов в сложных обыкновенных, логических и логико-обыкновенных системах, с использованием для этих целей векторно-матричного исчисления.

Курс начинается с главы, в которой вводится определение понятий «кибернетика», «автоматизация» и «система», даётся классификация систем по различным признакам и излагаются основные принципы и методы системного анализа. Определения кибернетики, автоматизации включены в пособие специально для тех, кто, приступая к изучению МОТС, еще незнаком с этими понятиями. Кроме того, это сделано и в связи с тем, что современная теория систем рассматривается как один из разделов кибернетики.

Во *второй главе* приводится определение и математическое описание детерминированных переменных (сигналов в технических системах) непрерывного и дискретного типа, описываются виды модуляции сигналов. Здесь же приводятся операторные представления и спектральные характеристики детерминированных переменных, а также описаны логические переменные и математические операции с ними.

Третья глава включает в себя описание случайных величин и случайных процессов. В ней приведены основные понятия теории вероятностей, вероятностные характеристики дискретных и непрерывных случайных величин и случайных процессов. В этот же раздел включено описание интервально-определенных переменных и их алгебраические преобразования.

В *четвертой главе* отражены цели и специфика формирования математических моделей систем, их основные типы. Здесь же излагаются методы формирования математических моделей, характеризующих структуры систем, их свойства, характеристики, состояния и протекающие в них процессы.

Пятая глава посвящена описанию широко используемых на практике приёмов преобразования математических моделей технических систем. В частности, описываются процедуры линеаризации математических моделей, представлены записи их в относительных

величинах и в отклонениях от базисных состояний и процессов, а также процедуры редуцирования математических моделей.

В *шестой главе* описываются типовые формы математических моделей состояний и процессов в системах; процедуры типизации математических моделей систем различных видов.

Седьмая глава содержит сведения о типовых характеристиках динамических свойств линейных вход-выходных, в том числе управляемых объектов и систем. В частности, вводятся типовые операторные, временные и частотные характеристики; рассматриваются способы их аналитического и экспериментального определения.

В *восьмой главе* описаны операторно-структурные схемы и графы линейных стационарных обыкновенных непрерывных и дискретных во времени систем, даны правила преобразования таких схем и графов.

Девятая глава посвящена описанию типовых элементов математических моделей и операторно-структурных схем технических систем, приводятся их типовые операторные, временные и частотные характеристики.

Десятая глава включает в себя сведения об установившихся и переходных процессах в стационарных обыкновенных непрерывных системах и методах их анализа.

Последняя, *одиннадцатая глава* содержит краткие сведения по универсальным математическим пакетам и специализированным пакетам программ, которые широко используются при компьютерном моделировании систем автоматизации и управления.

Курс «Математические основы теории систем» базируется главным образом на знаниях из типового курса высшей математики втузов. Он необходим для изучения целого ряда последующих общепрофессиональных и специальных дисциплин, в частности курсов «Теория автоматического управления», «Моделирование систем», «Проектирование систем управления».

Библиографический список

1. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1980.
2. Математические основы теории автоматического регулирования / под ред. Б. К. Чемоданова. – М.: Высшая школа, 1971.
3. Основы кибернетики. Математические основы кибернетики / под ред. К. А. Пупкова. – М.: Высшая школа, 1974.

КИБЕРНЕТИКА, СИСТЕМЫ
И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

1.1. Определение понятия «кибернетика»

Термин «*кибернетика*» (от греческого слова «*kybernhtixh*» – искусство управлять) впервые был использован французским учёным А. М. Ампером (1775–1836 гг.) в 1834 году в разработанной им классификации наук для обозначения несуществующей ещё в то время науки об управлении в человеческом обществе. Как самостоятельное научное направление, кибернетика начала формироваться с 1948 года – с момента выхода в свет монографии американского учёного Норберта Винера (1894–1964 гг.) с одноименным названием [4]. В этой связи Норберта Винера не без основания многие называют «отцом кибернетики», а 1948 год считают датой начала развития кибернетики.

По определению Норберта Винера, *кибернетика* – наука об управлении и связи в животном и машине. В настоящее время под кибернетикой понимают научное направление, включающее в себя область теоретических знаний и прикладных исследований, разработок, связанных с формированием и практическим использованием общих законов управления и получения, хранения, преобразования и использования информации в технических, биологических и социальных объектах и системах [8, 12, 19].

К числу основных разделов кибернетики относят:

- *техническую кибернетику*, ориентированную на разработку и исследование на основе единых для кибернетики в целом научных идей и методов технических систем управления и являющуюся основной научной базой для решения задач комплексной автоматизации самых разнообразных технических объектов, процессов и производств;
- *теорию информации*, занимающуюся математическим описанием и оценкой методов и средств формирования, передачи, хранения, извлечения и классификации информации;
- *системотехнику*, ориентированную на исследование и проектирование сложных систем различной физической природы на основе концепций и методов системного анализа, суть которых изложена в разделе 1.3;

▪ **теорию автоматов**, изучающую математические модели (называемые автоматами) реально существующих технических и других устройств и систем, перерабатывающих дискретную информацию дискретными временными тактами.

Кибернетику, в зависимости от объектов её приложения, делят на техническую, биологическую, медицинскую, экономическую, химическую и ряд других.

Непосредственной предшественницей кибернетики является **теория автоматического управления** [15, 16], относимая ныне к основным разделам технической кибернетики. При классификации наук в последнюю включают также и **автоматику** – область теоретических и прикладных знаний об автоматически действующих устройствах и системах.

1.2. Понятие «система»

В любой сфере деятельности (человек–природа, человек–техника, человек–человек) мы имеем, как правило, дело с системами или системными объектами. Понятие «**система**» является основополагающим во многих научных дисциплинах, прежде всего в таких, как «**системный анализ**», «**общая теория систем**», «**системотехника**». Они же являются основными объектами исследования и разработки в кибернетике.

Исключительно большое разнообразие систем порождает те сложности, которые возникают при строгом определении (дефиниции) понятия «**система**». С одной стороны, оно должно позволять однозначно отличать системный объект (систему) от несистемного, а с другой – указывать на то, как строить систему или выделять её из окружающей среды, отображать её целевое назначение. В этой связи в настоящее время существуют десятки определений системы [7, 11, 14, 18], не заключающих в себе ее назначение, конкретную реализацию, и, по видимому, тысячи, ориентированных на частные виды систем определённого назначения.

Все известные определения систем можно условно разделить на несколько типов: *дескрипторные (описательные)*, *конструктивные*, *теоретико-формальные*, *математические* [7, 11, 13].

Дескрипторные определения систем базируются на интуитивном понимании «что такое система» и фактически отражают наши представления о них, основанные на сопоставлении разнообразных объектов. Этот подход лежит, например, в основе следующих определений:

система – это совокупность элементов, находящихся в отно-

шениях и связях друг с другом, которая образует определённую целостность, единство [18];

система – это совокупность объектов, свойства которой определяются отношением между этими объектами [7].

Близкое по сути определение системы дал один из основоположников теории систем Людвиг фон Берталанфи, определивший систему как *комплекс взаимодействующих элементов* или как *совокупность элементов, находящихся в определенных отношениях друг с другом и со средой* [13], а также А.И. Уемов, характеризовавший систему как множество вещей, свойств и отношений [17].

Объекты, входящие в систему, принято называть *элементами системы* или *подсистемами*. При этом *элемент системы* представляет собой простейшую часть системы, внутреннее устройство которой в рамках данного рассмотрения не имеет самостоятельного интереса. Если же сам элемент при детальном изучении рассматривается как система, то такой элемент системы называют её *подсистемой*. Робототехнический комплекс, например, может включать станок, автоматический манипулятор, которые сами по себе являются системами.

Вышеприведенные определения отражают факт объединения в системе нескольких элементов (подсистем), находящихся между собой в определённых отношениях. Например, системой с полным основанием можно назвать телевизор, металлорежущий станок. Их свойства и возможности определяются составом входящих в них элементов, взаимными связями последних. К системам, разумеется, относятся также солнечная система; системы подсчёта голосов в избирательных кампаниях; нотная система звуков; балльная система оценки знаний в высшей школе; государственная система пенсионного обеспечения и многие другие разнообразные по своему составу и физической природе системы.

Так называемые *конструктивные определения систем* базируются на функционально-целевом подходе и подсказывают, какова стратегия формирования системы. При этом подразумевается, что окружающий систему мир (внешняя для неё среда) тоже есть бесконечное множество объектов, систем, находящихся в определённых отношениях между собой. Всякая входящая в этот мир система нужна ему как источник удовлетворения каких-либо его потребностей. Именно при возникновении какой-то *неудовлетворённой потребности (проблемной ситуации)* приступают к созданию систем (здесь мы имеем в виду прежде всего технические, производственные, социальные и другие искусственные физические и абстрактные системы, создаваемые людьми).

Первым этапом создания новой системы при этом будет определение её *цели* (информационного образа желаемой потребности). На втором этапе определяют *функции системы*, обеспечивающие достижение системой поставленной цели. Затем разрабатывается *структура системы*, обеспечивающая реализацию требуемых от неё функций.

Структуру определяют как совокупность функциональных элементов и внутренних связей между ними. В этот набор могут входить и те элементы и связи, которые обеспечивают потребности системы в восполнении вышедших из строя элементов с целью повышения её живучести, а также те, которые обеспечивают при необходимости развитие системы и заведомо или по ходу её функционирования вводятся в систему.

После того как очерчены границы системы и внешнего для неё мира, определяются связи между создаваемой системой и внешней для неё средой. Последняя представляет собой совокупность всех элементов и образованных из них других систем, кроме тех, которые непосредственно обеспечивают поставленную перед данной системой цель.

Взаимодействие системы и внешней для неё среды иллюстрируется рис. 1.1.

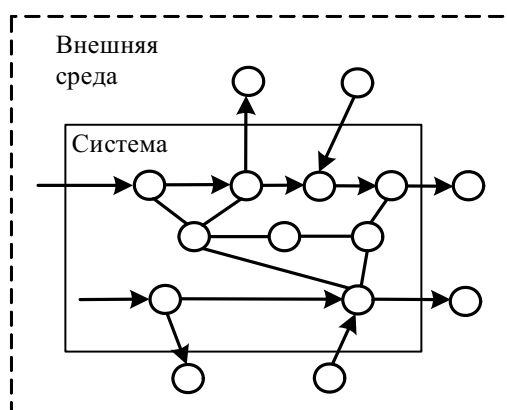


Рис. 1.1. Взаимодействие системы и внешней среды

Это взаимодействие характеризуется двумя типами связей – входными и выходными для системы и внешней среды (сокращённо – *входами* и *выходами*). И те, и другие представляют собой материальные, энергетические и/или информационные потоки (непрерывные или дискретные во времени).

В кибернетике предпочитают, как правило, отображать взаимовлияние системы и внешней среды более упрощенно, нежели это сделано на рис. 1.1, а именно так, как показано на рис. 1.2.



Рис. 1.2. Отображение системы

Если состав и внутренние связи в системе, а также свойства ее элементов неизвестны, то систему определяют как "**чёрный ящик**". Под последним в кибернетике принято понимать объект, о внутреннем строении которого ничего неизвестно и информацию о строении и функционировании которого можно частично получить, лишь анализируя вход-выходные связи этого объекта. При этом следует иметь в виду, что и вход и выход системы, как правило, носят двоякую природу. В частности, на вход системы поступают от внешней среды не только те материальные, энергетические и/или информационные потоки, которые необходимы для её функционирования в соответствии с поставленными перед ней целями, но и такие, которые фактически затрудняют реализацию системой поставленных целей. Первые из них обычно называют **ресурсами** системы, а вторые – **помехами**. Последние могут носить как индифферентный (безразличный) по отношению к цели системы характер, так и быть целенаправленно организованными со стороны части внешней среды для воспрепятствования выполнению системой своего назначения.

Выходы системы (её **конечные продукты**) также могут быть как полезными для окружающей систему внешней среды, так и нежелательными для неё.

Из выше изложенного чётко просматривается цепочка: *проблемная ситуация – цель – функция* (при необходимости с её декомпозицией) – *структура* системы. Отсюда исходит, например, следующее конструктивное определение: **система – это конечное множество функциональных элементов и отношений между ними, выделяемое из среды в соответствии с определённой целью в рамках определённого временного интервала** [7].

Необходимо заметить, что дескрипторные и конструктивные определения систем фактически дополняют друг друга. Первые указывают на составной характер систем и зависимость их свойств от свойств и связей (отношений) их элементов. Вторые подчёркивают распределённость функций между элементами систем, целенаправленность и взаимосвязанность их действий.

В общей теории систем и в математике типичным является определение систем в теоретико-множественных терминах. При этом абстраги-

руются от физической природы входящих в систему элементов и отражают в модельном представлении те признаки, которые позволяют характеризовать ее сущностные свойства и состояния. С этой целью вводится множество V компонентов системы и множество их отношений H . При этом систему определяют как

$$S \subset (V, H),$$

а в качестве компонентов системы обычно используют декартово произведение вида $V = U \times Y$, где U – множество входных воздействий на систему со стороны внешней для него среды (входных алфавитов), Y – множество выходных объектов (выходов системы, выходных алфавитов); или же $V = U \times X \times Y$, где дополнительно вводимое множество X есть множество элементов, характеризующих внутреннее состояние системы. Отношения H могут быть заданы отображениями $\psi: U \rightarrow Y$ входных алфавитов U на множество Y или отображениями $\xi: U \rightarrow X$ и $\eta: X \rightarrow Y$. В частных случаях эти отображения представляют системой уравнений, связывающих между собой вышеуказанные вход U , состояние X и выход Y . В случае, когда $V = U \times Y$, **система – это множества входного и выходного алфавитов и их отношений H** . Более детальные определения систем на абстрактном уровне приведены в [10, 11, 13].

В математике часто системой называют также определённого типа математическую модель, отражающую состояния или процессы в исследуемой реальной системе. Так, например, при исследовании динамики линейных стационарных обыкновенных динамических систем с дискретным относительным временем t системой часто называют $\sum(A, B, C, D)$, то есть четвёрку матриц (A, B, C, D) , подразумевая при этом математическую модель (систему векторно-матричных уравнений) вида

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

где вход $u \in R^m$, состояние $x \in R^n$, выход $y \in R^r$, а матрицы A, B, C, D имеют соответствующие этим векторным величинам размерности.

В дальнейшем мы будем пользоваться всеми вышеперечисленными типами определений систем в зависимости от того, какие конкретно свойства систем будут при этом рассматриваться.

1.3. Классификация систем

В основе используемых классификаций систем лежат те или иные признаки, характерные для основных компонентов, определяющих систему, а именно: элементы, отношения между ними и их свойства. Из-за многообразия систем их классификация может быть проведена по самым различным признакам, и в этой связи является также достаточно многообразной.

Обычно классификация проводится по какому-либо предметному или категориальному признаку. В первом случае выделяют основные типы существующих систем по природе входящих в них элементов. При категориальной классификации систем выделяются общие характерные признаки, присущие любым системам независимо от их материального воплощения. Так как системные исследования обычно ведутся с целью выявления категориальных свойств систем, а не для того, чтобы выяснить из каких элементов материализуется система, то основное внимание при их классификации чаще всего уделяется именно категориальным признакам.

Начнём классификацию систем по таким признакам, которые не отражают специфические особенности их математических моделей.

1. **По форме существования** все системы делятся на физические и абстрактные. Первые из них имеют реальное физическое воплощение, а вторые формируются людьми для отражения тех или иных явлений. К последним, в частности, следует отнести математические модели реальных физических систем.

2. **По способу создания** различают системы искусственного и естественного происхождения. При этом к последним относят все те системы, в создании которых не участвовали живые существа.

3. **По природе входящих в системы элементов** выделяют технические, биологические, социальные, экономические, энергетические и т. п. По этому же признаку технические системы делят на механические, электрические, оптические, гидравлические, пневматические, химические и др. Многие системы при этом являются системами комбинированного типа. Например, робототехническая система может включать в себя манипулятор, т. е. механическую подсистему; гидроприводы; электрические, оптические и электронные датчики; преобразователи; усилители.

4. **По целевой ориентации** выделяют системы целенаправленного типа и системы без явно выраженной цели. В частности, один и тот же набор радиоэлементов может образовывать в одном случае радиоприёмник, в другом – входить в комплект запасных деталей радиомастерской,

а в третьем случае может представлять собой хаотично сформированную систему (собранную навалом). В первых двух случаях можно говорить о системах целенаправленного типа, а в последнем – нецеленаправленного типа. Чаще всего в технике имеют дело с системами целенаправленного типа, поэтому в дальнейшем в данном пособии будем ориентироваться именно на этот класс систем.

5. **По целевому назначению** системы можно разделить на системы, предназначенные для достижения одной, двух, трёх и большего числа целей.

6. **По характеру своего развития** системы можно делить на элементарно- и функционально стабильные и развивающиеся. Последние пополняют свой состав как за счёт элементов, поступающих из внешней среды, так и за счёт создаваемых самой системой. Они могут также расширять свои функциональные возможности.

7. **По характеру взаимосвязи с внешней средой** выделяют системы *открытые* и *закрытые* (соответственно, *неавтономные* и *автономные*). Первые из них взаимодействуют с внешней средой, обмениваются с ней веществом, энергией и/или информацией. К системам второго типа (автономным, закрытым) относят такие, у которых подобные взаимодействия отсутствуют.

Нетрудно доказать, что автономных систем в природе фактически нет. В то же время при некоторых исследованиях изучают свойства систем и/или протекающие в них процессы без учета воздействий на них внешней среды. Такие исследования проводятся, в частности, для выявления внутренних свойств некоторых систем (например, их устойчивости).

8. **По приспособляемости к условиям существования** системы делятся на неприспособляющиеся и приспособляющиеся (или, соответственно, на неадаптивные и адаптивные).

9. **По количественному признаку** все компоненты систем могут рассматриваться как *монокомпоненты* (один элемент, одно свойство, одно отношение) и *поликомпоненты* (много элементов, много свойств и/или отношений). Соответственно, следует говорить о системах с монокомпонентами и о системах с поликомпонентами.

10. **По структуре связей между элементами** различают системы с последовательными (рис. 1.3, а) и параллельными связями (рис. 1.3, б), с обратными связями (рис. 1.3, в); с кольцевыми связями (рис. 1.3, г); со звёздными (веерными) связями (рис. 1.3, д), с иерархической структурой (рис. 1.3, е). Структура сложных систем может быть комбинированной, со связями из числа вышеуказанных.

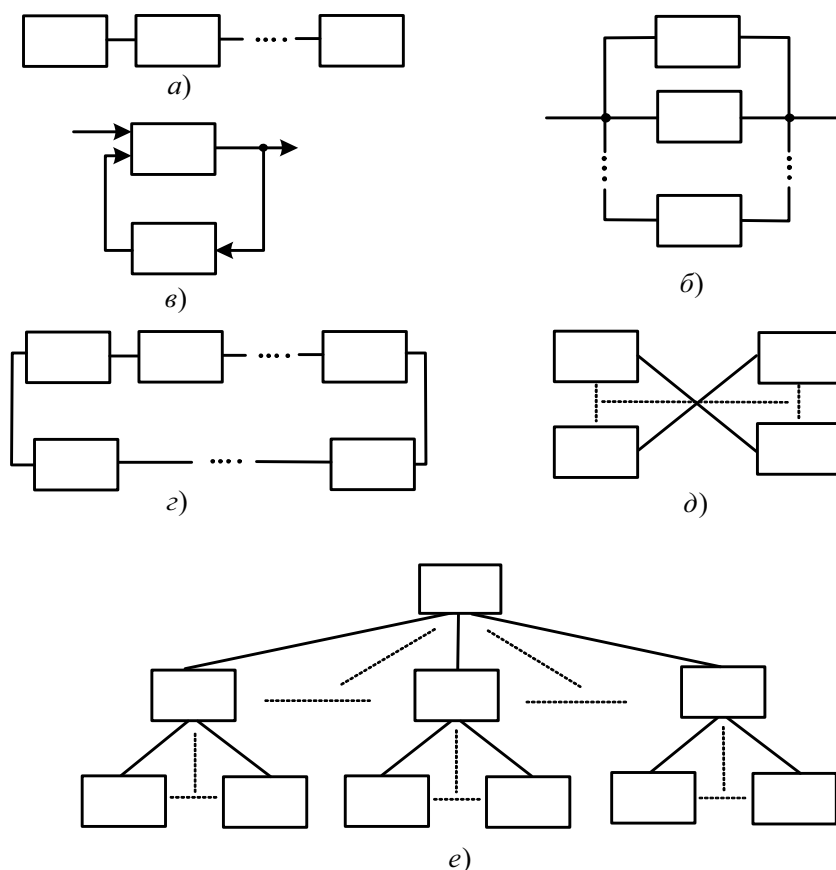


Рис. 1.3. Варианты структурных связей в системах

11. **По положению относительно внешней среды** системы делят на неподвижные и подвижные. Последние перемещаются в пространстве, изменяя в нём свои линейные и/или угловые координаты. К таким системам относятся, например, летательные аппараты, транспортные и манипуляционные роботы, автомобили.

12. **По степени сосредоточенности в пространстве** различают системы сосредоточенные и распределённые. Примерами систем второго типа могут служить, в частности, нефте- и газопроводы, телефонные и теплоснабжающие сети городов, системы электроснабжения регионов, гидрометеослужба страны.

В порядке иллюстрации приложимости вышеуказанных классификационных признаков к конкретной системе, классифицируем такую хорошо известную систему, как *самолёт*. С учётом выше изложенного самолёт можно определить как систему физическую, искусственную, техническую, целенаправленную, функционально-стабильную, открытую, неприспосабливающуюся, с поликомпонентами, с комбинированными связями, сосредоточенную, подвижную (если рассматривать самолет в процессе движения).

Использованные выше классификационные признаки характеризовали, прежде всего, сами системы и в меньшей мере влияли на типы математических моделей, которыми описываются их состояния, свойства, характеристики и/или протекающие в этих системах процессы. Далее приводится классификация систем по таким признакам, которые непосредственно отражаются на типах используемых для них математических моделей.

13. По типу переменных, используемых для описания состояний, свойств, характеристик систем и протекающих в них процессов, системы и их элементы делят на системы и элементы с действительными (вещественными), целыми, комплексными и/или логическими переменными, а также с комбинированными из числа вышеуказанных. При этом логические переменные могут быть одного из двух следующих типов: булевыми переменными (определёнными на двухэлементном множестве $B = (0,1)$) или переменными многозначной логики [9].

14. По степени предсказуемости состояний, свойств, характеристик и/или вход-выходных отображений различают системы *детерминированные и вероятностные*. Если информации о свойствах входящих в систему элементов, отношениях между ними, а также о воздействиях внешней среды на систему достаточно для установления с необходимой степенью точности её состояний и свойств в последующие моменты времени, то такая система называется *детерминированной*. Её поведение (протекающие в ней процессы) полностью предсказуемо на основе вышеуказанной информации.

Для *вероятностной (случайной, стохастической)* системы вышеуказанных знаний достаточно лишь для предсказания вероятности нахождения её в том или ином состоянии, либо для вероятностной оценки свойств системы в последующие моменты времени. Случайными могут оказаться и элементный состав, задействованный в системе в настоящее и последующее время, и свойства хотя бы части из них, и отношения между этими элементами.

15. По временной зависимости свойств и вход-выходных отношений системы и их компоненты делят на *безынерционные и инерционные*.

Безынерционные системы и их компоненты отличаются тем, что значения их выходных величин в любой момент времени t зависят только от текущего значения входа и состояния, с которого началась их эволюция. Это значит, что если их вход $x(t)$ с некоторого момента времени становится постоянным, то постоянным с этого же момента

будет и выход $y(t)$ при условии, что неизменными при этом будут оставаться в системе (ее компоненте) элементный состав, его свойства и структурные связи. Системы и их компоненты, не удовлетворяющие вышеуказанным требованиям, называют *инерционными*.

Следует отметить, что безынерционные системы часто называют также *статическими* [10], а инерционные – *динамическими*. Подобные определения, на наш взгляд, не удачны, так как термины "статический" и "динамический" чаще соотносят с режимами работы системы. При этом подразумевается, что в системе в статическом режиме работы все отношения между элементами, свойства последних, входные воздействия на систему и её реакции на них остаются неизменными во времени, а в динамических режимах происходит изменение во времени какого-либо из этих факторов или всей их совокупности в силу причинно-следственных связей. Заметим также, что и безынерционные, и инерционные системы могут находиться как в статических, так и в динамических режимах.

Все вышеперечисленные классификационные признаки и классы систем в настоящее время являются общепринятыми. Такого взаимопонимания нет, когда речь идёт о делении систем на простые, сложные, сверхсложные, большие и т. п.

Некоторые специалисты по системотехнике различают системы по числу входящих в них элементов. Так, Г. Н. Поваров предложил при делении систем по этому признаку придерживаться варианта, отражённого в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Классификация систем по числу входящих в них элементов

Число элементов системы	Тип системы по её сложности
10 ... 1000	малая
10^3 ... 10^7	сложная
10^7 ... 10^{30}	ультрасложная
10^{30} ... 10^{200}	суперсложная

К сложным системам по этому варианту классификации относятся, например, автоматическая телефонная станция и транспортная система крупного города, космический аппарат, большинство производственных

предприятий. К ультрасложным можно отнести, в частности, организмы животных и человека, а к суперсложным – звёздную вселенную.

Есть и другие взгляды на эту классификацию. В частности, академик А. И. Берг и Ю. И. Чумак предложили считать сложной лишь такую систему, поведение которой можно описать не менее чем на двух математических языках. Например, на языке теории дифференциальных уравнений и на языке алгебры логики (булевой или многозначной).

По-видимому, можно определить систему как сложную, исходя из того, каково число тех свойств, которыми обладает данная система, причём эти свойства должны характеризоваться разными математическими моделями.

В настоящее время всё чаще систему определяют как сложную, если ей присущи следующие свойства:

1) многомерность (большая размерность, большое число элементов, большие объёмы циркулирующей в ней информации и т. п.);

2) многообразие элементов системы (различных по назначению и по физической природе);

3) многообразие возможных форм связей между элементами и разнородность используемых в ней структур (иерархических, с последовательными и параллельными включениями, кольцевых, веерных и т. п.);

4) многокритериальность, т. е. наличие нескольких, часто противоречивых, критериев, которым должна удовлетворять система;

5) многократные изменения состава и/или структуры системы в процессе функционирования;

6) многоплановость при моделировании и исследовании её свойств.

Следует заметить, что разная глубина исследования состояний, свойств или процессов в системах приводит к различным вариантам их классификации. Один и тот же объект исследования в одном случае может выступать как простой (например, электронный усилитель как элемент системы управления роботом), а в другом – как сложный (тот же усилитель на этапе его разработки); может рассматриваться как детерминированный или как вероятностный и т. п. Это влечёт за собой и разный уровень детализации в описании его свойств и поведения, соответственно, и использование для этих целей разных классов математических моделей.

Как правило, приводимые классификации основываются на использовании какого-либо одного признака, как это было описано выше. Примером классификации систем по двум признакам является классификация, предложенная в [1] Стаффордом Биром (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Классификация систем по двум признакам

Системы	простые (состоящие из небольшого числа элементов)	сложные (достаточно разветвлённые, но поддающиеся описанию)	очень сложные (не поддающиеся точному описанию)
детерминированные (их поведение точно предсказуемо)	привод станка робота	ЦВМ	–
вероятностные (не поддающиеся детальному описанию)	рулетка, система стабилизации платформы на корабле	система управления запасами на складе	мозг, энергосистема страны, промышленное предприятие

Внутри данной таблицы приведены примеры систем, относящихся к указанным классам. У такой классификации много изъянов. Её недостатки связаны с делением систем по сложности «на глазок» и тем, что она не показывает, для решения каких задач такого деления достаточно. Тем не менее, она конструктивна в том плане, что указывает на различные подходы к анализу систем.

С развитием техники и общества предметом исследований всё чаще выступают системы большой сложности – энергосистемы городов и регионов; системы космической связи; гибкие автоматические и автоматизированные производства и т. п. При этом познание и практическая деятельность человечества шли и идут преимущественно от моносистем к полисистемам, от детерминированных – к вероятностным, от простых – к сложным и сверхсложным.

В настоящее время делаются лишь первые попытки развития теории сложных систем [6], хотя подобные системы уже давно существуют в природе, успешно разрабатываются и используются в технике, экономике, производстве и общественной жизни. Необходимо также отметить, что практически со всеми рассмотренными классами систем приходится иметь дело, разрабатывая и исследуя системы автоматизации и управления.

В заключение отметим, что приведенная выше классификация не может рассматриваться как исчерпывающая все возможные варианты. Частично она будет продолжена в последующих разделах при матема-

тическом описании и анализе систем, где они будут классифицированы по типам используемых для их анализа математическим моделям и характерным для этих систем свойствам.

1.4. Основные принципы системного анализа и синтеза

Чем сложнее создаваемая или анализируемая система, тем бóльшую значимость приобретает используемая при этом методология. Системная методология (системный подход) – это, прежде всего, комплекс принципов проведения системного анализа и синтеза, обеспечивающий получение эффективных вариантов решения поставленных задач.

Системный подход включает такие методы и средства анализа и синтеза, которые приложимы к любым системам. В его основе лежат следующие основополагающие **системные принципы** [7]:

1) **целостность**, под которой понимают принципиальную *несводимость* свойств системы к простой сумме свойств составляющих её элементов и невыводимость этих свойств только из свойств элементов;

2) **взаимозависимость системы и среды**, согласно которой система формирует и проявляет свои свойства в процессе взаимодействия с окружающей её средой;

3) **целенаправленность** как самой системы, так и решаемых задач анализа и/или синтеза;

4) **структурность**, т. е. возможность описания системы лишь с использованием информации об её структуре, связях и отношениях элементов в системе;

5) **обусловленность поведения** системы не только свойствами и поведением её элементов, но и свойствами её структуры;

6) **многоуровневость (иерархичность)**, отражающая тот факт, что часть или даже все элементы системы, в свою очередь, тоже могут рассматриваться как системы (подобные элементы, как уже отмечалось выше, в таком случае обычно называют *подсистемами*). При этом исследуемая система сама может рассматриваться как подсистема более общей системы;

7) **множественность описания**, означающая, что в силу сложности практически каждой рассматриваемой системы её исследование требует построения множества различных моделей, каждая из которых отражает определённый аспект и описывает определённое свойство системы. Например, применительно к робототехническому комплексу это могут быть модели, описывающие его поведение в различных

режимах (в том числе статических и динамических), модели для оценки его надёжности, энергопотребления и т. п.;

8) **причинность**, подчёркивающая причинно-следственный характер свойств и протекающих в системе процессов;

9) **непротиворечивость целей**, отражающая факт недопустимости превалирования целей отдельных элементов или подсистем над общей целью всей системы;

10) **многовариантность достижения поставленных целей**, подчёркивающая возможность получения планируемых результатов не единственным способом;

11) **многокритериальность систем и решаемых задач их анализа или синтеза**, обеспечивающая получение результатов решаемых задач, удовлетворяющих ряду критериев;

12) **ограниченность ресурсов**, нацеливающая на учёт ограничений, которые имеет сама система по входам и внутренним ресурсам, а также на учёт ограниченности средств и времени на выполнение задач анализа и/или синтеза системы.

Выше перечислены лишь основные принципы системного подхода. Они обеспечивают при анализе раскрытие, а при синтезе – реализацию целостности системы с учётом её целей и реальных условий функционирования.

Заметим также, что основными средствами системного анализа в настоящее время являются математические, имитационные и натурные модели исследуемых систем, развитые для этих целей методы математического анализа, алгоритмические и программные средства, ориентированные на использование ЭВМ, а также методы планирования экспериментов и обработки их результатов.

1.5. Типовые задачи и методы системного анализа

Анализ систем чаще всего проводят с целью определения их свойств, характеристик, а также внутренних состояний или характера протекающих в них процессов при определённых воздействиях на них внешней среды и в зависимости от конкретных вариантов их элементного состава, структуры и параметризации. Кроме того, в число задач анализа систем часто входит также определение и математическое описание входных воздействий на систему.

Для каждой системы может быть свой специфический набор свойств, характеристик, которые представляют интерес для исследователя. Применительно к средствам и системам автоматизации, управ-

ления к таковым, в частности, можно отнести точность выполнения функциональных задач, устойчивость работы, быстродействие, надёжность, живучесть, помехозащищённость, ремонтпригодность. Для каждого конкретного типа автоматических средств и систем есть ещё, как правило, и целый ряд своих специфических свойств и характеристик, представляющих практический интерес для разработчиков и исследователей. В частности, для объектов и систем управления к подобным свойствам можно отнести управляемость, наблюдаемость, достижимость, восстанавливаемость, каузальность, маневренность, функциональную воспроизводимость, автономизируемость, инвариантность. Все эти свойства будут рассматриваться более подробно в курсе «Теория автоматического управления».

Свойства, характеристики, состояния и процессы в системах анализируются либо для изучения конкретной системы, либо для сопоставительного анализа различных вариантов систем, либо для подбора структуры, элементного состава и параметрической настройки систем, т. е. для их синтеза. Эти задачи системного анализа могут решаться как по отдельности, так и в совокупности с целью модернизации или создания новых систем.

Необходимо также подчеркнуть, что часть этих свойств, характеристик зависит только от состава элементов, их состояния и внутренних связей в системе, а целый ряд других характеризуют систему в её взаимодействии с внешней средой и проявляется только в подобных ситуациях. По этой причине системный анализ может проводиться как без учёта внешних связей системы (в автономных режимах функционирования), так и с учётом этих связей, т. е. в неавтономных режимах её работы.

Многообразие задач системного анализа и изучаемых при этом свойств, характеристик, состояний и процессов обуславливает и разнообразие методов системного анализа. Для этих целей используются моделирование, аналитические и экспериментальные исследования. При этом моделирование может проводиться как с использованием физических моделей, так и специализированных средств (например, аналоговых и/или цифровых вычислительных машин). Анализ осуществляется как с целью получения конкретных результатов при фиксированных входах и параметрах исследуемых систем, так и с целью их изучения при различных вариантах исполнения и условиях функционирования. Последний вариант анализа систем называют *имитационным моделированием*. В связи с широким распространением средств вычислительной техники этот метод анализа находит с каждым годом всё большее применение [2, 3, 5].

Аналитические методы анализа базируются на использовании математических моделей систем и точных методах решения входящих в них уравнений и неравенств. В зависимости от того, какова цель намеченного анализа, он может проводиться с использованием математической модели, отражающей либо структуру системы, либо её функции, либо и то и другое одновременно. В этой связи некоторые специалисты – системотехники говорят, соответственно, о *структурном, функциональном и структурно-функциональном методах анализа систем* [7]. Например, анализ надёжности системы обычно проводят лишь с использованием информации о её структуре и надёжностных характеристиках входящих в нее элементов.

Для анализа состояний и процессов в системах требуются математические модели, отражающие особенности их функционирования. При этом информация о структуре системы отражается в используемой математической модели в явном виде (например, описана матрицей инцидентий или графом) или же косвенным образом (за счёт отражения существующих связей между элементами системы равенствами одних и тех же выходов и входов соседних по структуре элементов).

В данном учебнике основное внимание уделяется математическому описанию сигналов в системах; формированию и типизации математических моделей систем; операторным, временным и частотным характеристикам систем, а также методам анализа протекающих в них процессов.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под кибернетикой?
2. Перечислите основные разделы кибернетики
3. В чем суть дескрипторного, конструктивного, теоретико-формального и математического определения понятия «система»?
4. Перечислите основные признаки, используемые при классификации систем?
5. Что понимается под большой системой?
6. Перечислите основные принципы системного анализа.
7. Каковы типовые задачи системного анализа?
8. Каковы основные методы системного анализа?

Библиографический список к главе 1

1. *Бир Ст.* Кибернетика и управление производством. – 2-е изд. – М.: Наука, 1965.

2. Бусленко В. Н. Автоматизация имитационного моделирования сложных систем. – М.: Наука, 1977.
3. Веников В. В., Веников Т. В. Теория подобия и моделирования. – М.: Высшая школа, 1990.
4. Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. – М.: Наука, 1983.
5. Горбачевич Е. Д., Левинзон Д. Д. Аналоговое моделирование систем управления. – М.: Наука, 1984.
6. Денисов А. А., Колесников Д. Н. Теория больших систем управления: учеб. пособие для вузов. – Л.: Энергоиздат, Ленингр. отд., 1982.
7. Корииков А. М., Сафьянова Е. Н. Основы системного анализа и теории систем. – Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1989.
8. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергоатомиздат, 1987.
9. Левин В. И. Введение в динамическую теорию конечных автоматов. – Рига: Зинатне, 1975.
10. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1978.
11. Мороз А. И. Курс теории систем: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1987.
12. Основы кибернетики. Математические основы кибернетики / под ред. К. А. Пупкова. – М.: Высшая школа, 1974.
13. Острейковский В. А. Теория систем: учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1997.
14. Системный анализ: проектирование, оптимизация и приложения. Т.1 / под общ. ред. А. Антамошкина. – Красноярск: Сибирская аэрокосмическая академия, 1996.
15. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, 1987.
16. Теория автоматического управления / под ред. А. А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1983.
17. Уемов А. И. Системный подход и общая теория систем. – М.: Мысль, 1978.
18. Философский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983.
19. Энциклопедия кибернетики. Кн. 1 / под ред. В. М. Глушкова. – Киев: Гл. редакция Украинской советской энциклопедии, 1975.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ
ПЕРЕМЕННЫЕ СИСТЕМ

Математическое описание состояний, процессов, свойств, характеристик систем сводится к составлению характеризующих их с достаточной для практического использования степенью точности равенств, неравенств и/или функций. Константы этих функций, равенств и неравенств образуют множество *постоянных параметров* описываемых систем. Переменными у систем могут быть величины, которые характеризуют их входы (входные воздействия); параметрическое, координатное, структурное и/или алгоритмическое состояние; динамику протекающих в них процессов, а также те величины, которые непосредственно отражают описываемые свойства или характеристики.

Вся совокупность переменных, характеризующих систему, с позиций системного анализа может быть разбита на две группы – независимые и зависимые переменные. Под *независимыми переменными* понимают ту часть изменяющих свое значение величин, используемых в математических моделях систем, которые изменяются под действием внешней для данной системы среды. *Зависимыми переменными* системы следует считать ту совокупность описывающих состояния, процессы, свойства и/или характеристики этой системы величин, изменения которых являются следствием изменения независимых переменных.

Переменные, используемые в математических моделях систем, могут быть вещественными, целочисленными, комплексными и/или логическими. В свою очередь, переменная каждого из этих типов в зависимости от типа описываемой системы, условий ее функционирования может быть как детерминированной, так и случайной (стохастической), а ее изменение во времени может быть либо непрерывным, либо дискретным (скачкообразным).

В данной главе приводятся определения всех вышеуказанных типов детерминированных переменных и основные сведения по их характеристике и математическому базису, прежде всего по алгебрам их объединений и преобразований в функциях, уравнениях и неравенствах.

Детерминированными переменными принято называть такие величины, которые могут изменять свои значения (в том числе во времени), и при этом эти изменения заранее известны или с достаточной

точностью могут быть определены в зависимости от параметров описываемой ими системы и/или условий ее функционирования.

2.1. Детерминированные переменные непрерывного типа

Под *переменными непрерывного типа* понимают величины, которые могут принимать любые значения в пределах области их определения, и изменения которых не происходят скачкообразно. Их детерминизм обеспечивает знание законов их изменения во времени или в пространстве определения таких величин, или же возможность их определения по имеющейся информации о рассматриваемой системе и воздействиях на нее внешней среды.

Системы, у которых все переменные, характеризующие внутренние состояния этих систем, являются только переменными непрерывного типа, принято называть *непрерывными системами*. Класс подобных технических систем достаточно широк. В частности, к ним можно отнести нереконфигурируемые (без встроенных переключателей) электрические четырехполюсники, состоящие из RLC -элементов; многие теплоэнергетические, химико-технологические установки; транспортные средства; электрические машины.

Детерминированные переменные непрерывного типа определяются на поле действительных (вещественных) или комплексных чисел. Всякая вещественная переменная x может принадлежать всему множеству (полю) действительных чисел R (записывается это как $x \in R$) или ограниченному интервалу X , т. е. $x \in X \subset R$. При этом, если $A < x < B$, то этот интервал называют незамкнутым, а если $x \leq B$; $x \geq A$; $A \leq x \leq B$, то замкнутым. Ограниченными или неограниченными, незамкнутыми или замкнутыми могут быть и используемые при описании систем комплексные переменные.

Математическое описание детерминированных непрерывных переменных, используемое в теории систем, в том числе в технической кибернетике, сводится к установлению их аналитических зависимостей от времени, их операторных изображений или спектральных составов.

Для независимых детерминированных переменных исследуемых или синтезируемых систем их аналитические зависимости выбираются в соответствии с их реальными изменениями в системе или исходя из интересующих разработчиков или исследователей влияний внешней среды на эти системы. Довольно часто при этом внешние воздействия

на систему $x(t)$ принимаются изменяющимися скачкообразно по уровню, т. е. в виде:

$$x(t) = x_0 \cdot 1(t - t_0),$$

где единичная функция

$$1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq t_0 \\ 0, & \text{если } t < t_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Другими типовыми воздействиями на систему, часто используемыми при анализе или синтезе систем, являются:

1) гармонические воздействия вида

$$x(t) = x_0 e^{j\omega t} \quad \text{или} \quad x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_x);$$

2) воздействия, нарастающие с течением времени,

$$x(t) = x_0 t;$$

3) воздействия импульсного типа, форма которых может изменяться в зависимости от типа исследуемой системы. Часто таковым выбирается импульс, соответствующий дельта-функции Дирака $\delta(t - \tau)$, равной нулю всюду при $t - \tau \neq 0$ и бесконечности при $t - \tau = 0$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.2)$$

Эта функция технически не реализуема в виде сигнала, но удобна в исследованиях систем, так как достаточно просто связана с рядом важных типовых характеристик динамических систем (см. главу 8).

Экспериментальные данные, полученные при анализе систем, часто представляют в аналитической форме, используя для этого так называемые сплайны-функции времени вида:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i.$$

Наиболее часто при этом используются сплайны второго и третьего порядка (когда n равняется 2 или 3). Сплайны широко используются также при задании программ работы автоматических систем и отражают при этом требуемые изменения во времени программно изменяемых величин.

Другой, широко используемой в инженерной практике и научных исследованиях формой представления переменных – функций времени, является их разложение по той или иной системе ортогональных функций. Такие разложения дают вполне адекватное описание функций $x(t)$ достаточно общего вида при конечном числе членов разложения

$\{g_i(t)\}$. Кроме того, оно позволяет в дальнейшем сравнительно просто проводить необходимые математические преобразования членов подобного разложения.

Введем необходимые для дальнейшего изложения определения. Две функции $g_i(t)$ и $g_k(t)$, определенные на интервале

$$a \leq t \leq b, \quad (2.3)$$

называются **ортгоналными** [1,11] на этом интервале, если они удовлетворяют условию:

$$\int_a^b g_i(t) \cdot g_k(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ \neq 0, & \text{если } i = k. \end{cases} \quad (2.4)$$

Система функций $\{g_i(t), i = \overline{1, n}\}$, определенных на интервале (2.3), называется **ортгоналной системой функций**, если все эти функции попарно ортгоналны, т. е. удовлетворяют условию (2.4). При этом обычно полагают, что

$$\int_a^b g_i^2(t) dt = \lambda_i > 0.$$

В тех случаях, когда $\lambda_i = 1$ для всех $i \in \overline{1, n}$, ортгоналная система функций $\{g_i(t), i = \overline{1, n}\}$ называется **нормальной**. Совокупность таких функций называют также сокращенно **ортонормальной** [1,11]. Если же это условие не выполнено, то при желании всегда исходную систему ортгоналных функций можно привести к нормальной, выбрав в качестве последней совокупность функций вида:

$$\left\{ \frac{g_i(t)}{\sqrt{\lambda_i}}, i = \overline{1, n} \right\}.$$

К числу ортгоналных систем функций относится, например, тригонометрический ряд

$$1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \sin 3t, \cos 3t, \dots, \sin nt, \cos nt, \dots$$

Различают счетные и континуальные наборы ортгоналных функций. *Счетными* они называются в тех случаях, когда удовлетворяют условию (2.4).

Континуальные наборы ортгоналных функций удовлетворяют условию:

$$\int_a^b g_i(t) \cdot g_k(t) dt = \delta(i - k),$$

где $\delta(\bullet)$ – определенная выше функция Дирака.

Произвольную непрерывную или кусочно-непрерывную на интервале (2.3) функцию $x(t)$ можно разложить в ряд по полному набору ортонормальных функций, т. е. представить в виде обобщенного ряда Фурье [1, 9, 15, 17]:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i(t), \quad (2.5)$$

приняв

$$c_i = \int_a^b x(t) g_i(t) dt. \quad (2.6)$$

Если воспользоваться континуальным набором ортонормальных функций, то $x(t)$ можно представить в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c_j g_j(t) dt,$$

где

$$c_j = \int_a^b x(t) g_j(t) dt.$$

Счетные наборы ортонормальных функций обладают рядом важных в практическом плане свойств. В частности, выбор коэффициентов c_i согласно (2.6) при аппроксимации $x(t)$ рядом (2.5) обеспечивает минимум среднеквадратической ошибки такой аппроксимации по сравнению с любой другой взвешенной суммой ортонормированных функций. К тому же увеличение числа членов ряда (2.5) не влечет за собой изменения коэффициентов c_i ранее использовавшегося ряда. В этой связи при подобном увеличении числа элементов ряда (2.5) не требуется производить пересчет этих коэффициентов, что удобно при практическом использовании этого ряда. Существенным является и тот факт, что при $x(t)$, удовлетворяющем условию

$$\int_a^b x^2(t) dt < \infty,$$

коэффициенты $c_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

При аппроксимации функций конечным рядом (2.5) имеется возможность введением весовой функции $w(t)$ изменять вклад в среднеквадратическую ошибку

$$E = \int_a^b \left\{ x(t) - \sum_{i=1}^m c_i g_i(t) \right\}^2 w(t) dt$$

такой аппроксимации отдельных ортогональных функций $g_i(t)$. Для этого вместо условия ортогональности (2.4) следует применить условие

$$\int_a^b g_i(t) \cdot g_k(t) w(t) dt = \delta_{ik},$$

в котором δ_{ik} – символ Кронекера, равный нулю, если $i \neq k$, и равный единице при $i = k$.

Наиболее часто используемые на практике наборы ортогональных функций приведены в приложении 1. Там же указаны и используемые при их определении интервалы $[a, b]$ и значения весовых функций $w(t)$.

2.2. Дискретные переменные, квантованные по уровню

Подобный тип дискретизации (квантования) переменных (в технических системах часто называемых сигналами) характерен, прежде всего, для релейных устройств и устройств кодирования сигналов. Последние предназначены для представления сигналов в цифровой форме, т. е. в виде кодовых комбинаций.

При дискретизации непрерывных переменных за счет квантования по уровню выходной сигнал преобразователя принимает значения из конечного числа фиксированных значений. Это особенно наглядно можно проиллюстрировать на примере квантователей, используемых, в частности, в аналого-цифровых (АЦП) и цифро-аналоговых (ЦАП) преобразователях, т. е. в устройствах, преобразующих соответственно аналоговые сигналы в цифровые коды и наоборот [3, 10, 13].

В аналого-цифровых квантователях непрерывный сигнал преобразуется в кодовую комбинацию, например, в двоичный код с числом разрядов для отображения абсолютных значений сигнала, равным k .

Эта разрядность всегда ограничена и поэтому число возможных кодовых комбинаций $N = 2^k$ и, следовательно, выходной сигнал квантователя будет принимать в зависимости от текущего значения x лишь одно из 2^k возможных значений.

Если при этом используется дробное представление чисел и максимально возможное значение преобразуемого сигнала x равно x_m , то цена старшего разряда выходного кода равна $\frac{1}{2}x_m$, а младшего – $\frac{1}{2^k}x_m$. Цена любого i -го промежуточного разряда при этом равна $\frac{1}{2^i}x_m$. Вход-выходная характеристика подобного квантователя представлена на рис. 2.1.

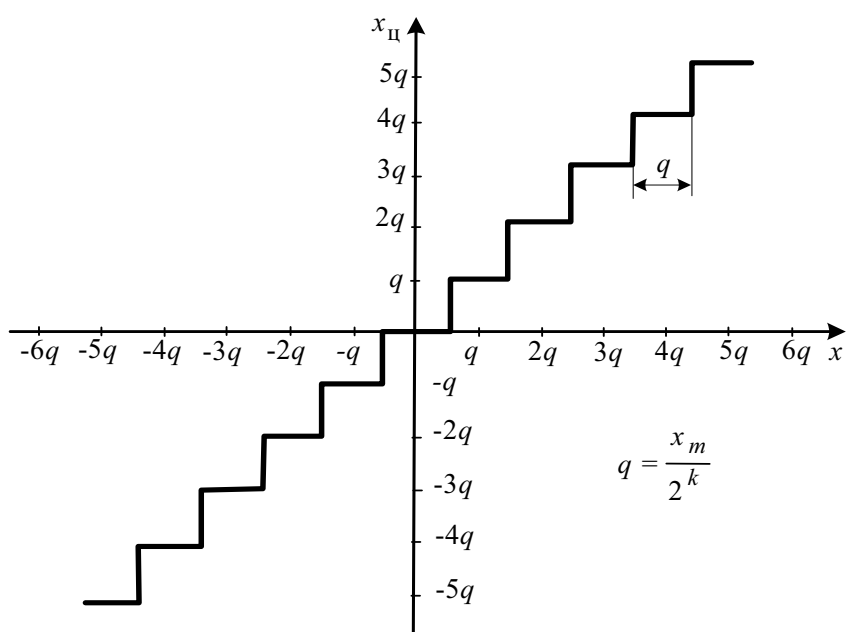


Рис. 2.1. Вход-выходная характеристика аналого-цифрового квантователя

В аналого-цифровых квантователях «округление» преобразуемого сигнала x проводится до ближайшего фиксированного значения $x_{ц}$ из числа возможных значений

$$X = \left(a_1 \frac{1}{2^1} + a_2 \frac{1}{2^2} + a_3 \frac{1}{2^3} + \dots + a_k \frac{1}{2^k} \right) x_m,$$

где $a_i \in \{0, 1\}$, $i \in \overline{1, k}$. Это значение определяется из условия

$$x_{\text{ц}} = E(x + 0,5q),$$

где $q = \frac{1}{2^k} x_m$ – дискрета квантования сигнала x по уровню, равная цене младшего разряда его цифрового кода; $E(\beta)$ – целая часть β . При этом погрешность квантования x при его изменениях в пределах до $(x_m - 0,5q)$ не превышает $0,5q = \frac{0,5}{2^k} x_m$.

В общем случае процесс квантования по уровню представляет собой фиксацию выходного сигнала $y(x)$ на уровнях $y_{\text{ц}}$, кратных шагу дискретизации y , равному q (рис. 2.2).

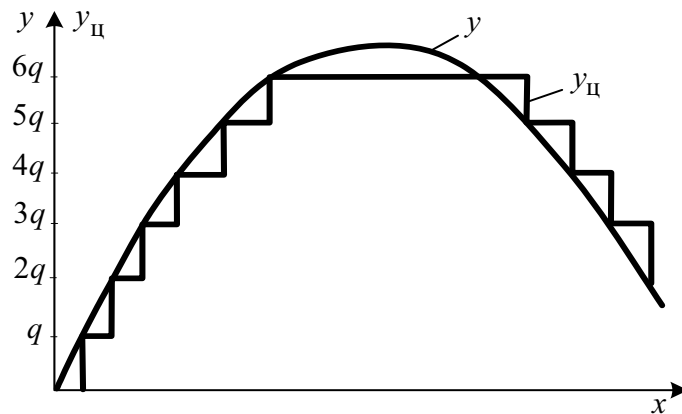


Рис. 2.2. Квантование по уровню

Квантованный, согласно рис. 2.2, выходной сигнал может быть представлен в следующей аналитической форме:

$$y_{\text{ц}} = \begin{cases} nq, & \text{если } dy/dx > 0 \text{ и } nq \leq y < (n+1)q \\ & \text{или } dy/dx = 0 \text{ и } nq \leq y \leq (n+0,5)q; \\ (n+1)q, & \text{если } dy/dx < 0 \text{ и } nq \leq y < (n+1)q \\ & \text{или } dy/dx = 0 \text{ и } (n+0,5)q < y \leq (n+1)q. \end{cases}$$

Здесь $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

2.3. Дискретные переменные, квантованные по времени

Во многих электронных, автоматических и вычислительных системах широко используются импульсные устройства и импульсные преобразователи. Под последними понимают устройства, специально предназначенные для преобразования сигналов непрерывного типа в последовательности импульсов, несущих информацию об уровнях и изменениях преобразуемых сигналов. Подобные преобразования называют *импульсной модуляцией*. Информация о преобразуемом непрерывном сигнале находит свое отражение в уровнях формируемых импульсным преобразователем сигналов или в их длительности, или в периоде (частоте) повторения. Соответственно говорят об амплитудной, широтной или временной (частотной) модуляции.

В настоящее время известны десятки типов импульсных преобразователей, различающихся, прежде всего, способами модуляции, формой выходных импульсов, правилами формирования их амплитудных и модуляционных характеристик (см. ниже), средствами реализации. Так как детальное изучение различных импульсных преобразователей не входит в цели данного курса (они изучаются в курсе «Электроника» и описаны во многих книгах), ниже приводятся сведения лишь о наиболее широко применяемых типах импульсных преобразователей и используемых для их математического описания переменных.

2.3.1. Амплитудно-импульсные преобразователи

В амплитудно-импульсных преобразователях происходит фиксация с помощью идеального импульсного ключа (импульсного элемента) текущих значений преобразуемого непрерывного сигнала $x(t)$ через период повторения (квантования) T (рис. 2.3), т. е. определение значений последовательности $x[nT]$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, которую принято называть *решетчатой функцией* сигнала (переменной) $x(t)$ [15].

На каждом периоде повторения $nT \leq t \leq (n+1)T$ при этом формируется импульс постоянной длительности τ , уровень которого либо постоянен и равен или прямо пропорционален $x[nT]$ (рис. 2.4, а), либо равен или прямо пропорционален значению $x(t)$ на интервале $nT \leq t \leq nT + \tau$ (рис. 2.4, б).

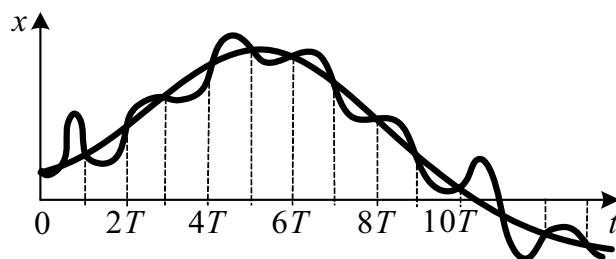


Рис. 2.3

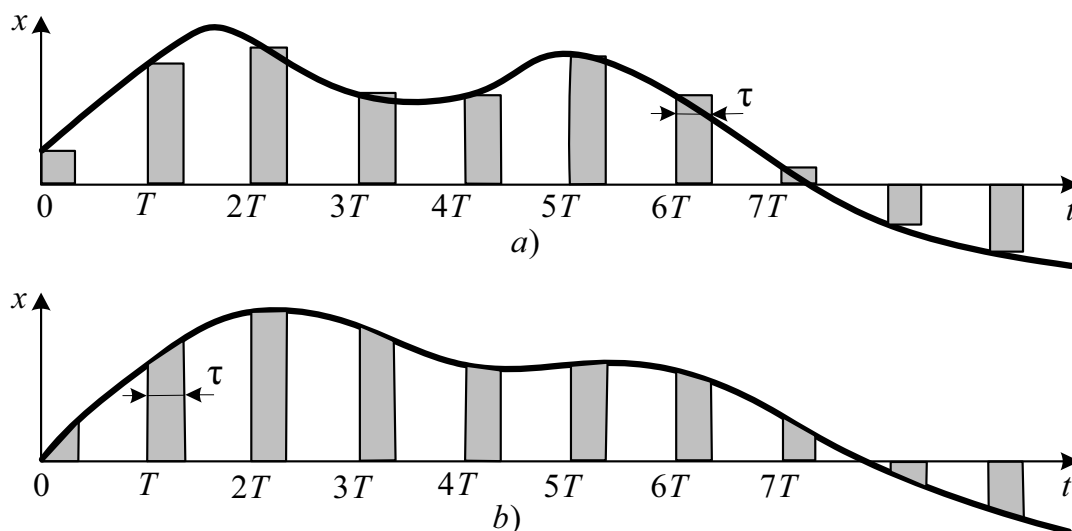


Рис. 2.4. Амплитудно-импульсная модуляция:
а – АИМ-1; б – АИМ-2

Соответственно, имеем *амплитудно-импульсную модуляцию первого рода* (АИМ-1) или *второго рода* (АИМ-2).

Очевидно, что одной и той же последовательности импульсов на выходе преобразователей с АИМ-1 и АИМ-2 могут соответствовать различные входные сигналы $x(t)$, что и иллюстрируется для АИМ-1 на рис. 2.3. Поэтому для более полного отражения информации о входном сигнале $x(t)$ импульсными последовательностями в преобразователях этих типов (впрочем, как и в других ИП) необходимо сокращать период дискретизации T , а в случае АИМ-2 – и длительности этих импульсов.

При математическом описании преобразователя с АИМ-1 последний может быть представлен (рис. 2.5, а) как амплитудный модулятор последовательности импульсов $\theta(t)$ с периодом повторения T , длительностью τ и единичным уровнем (рис. 2.5, б).

В таком случае без учета переходных процессов в устройстве импульсная последовательность может быть описана с помощью единичных ступенчатых функций следующим образом:

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [1(t - nT) - 1(t - nT - \tau)], \quad (2.7)$$

где $\tau < T$ и

$$1(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda \geq 0; \\ 0, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

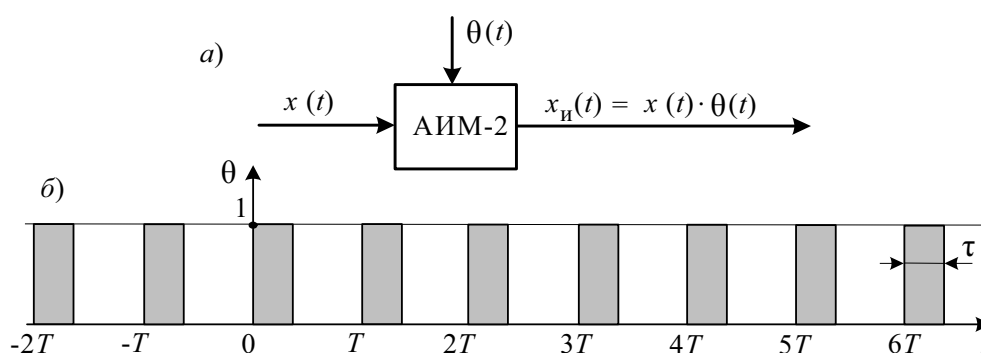


Рис. 2.5. Амплитудный модулятор: а – схема модулятора; б – импульсная последовательность на выходе

При этом выходной сигнал импульсного преобразователя с АИМ-2 будет определяться как

$$x_{и} = x(t) \cdot \theta(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} [1(t - nT) - 1(t - nT - \tau)]. \quad (2.9)$$

Способ представления импульсных преобразователей с АИМ-1 приведен на рис. 2.6.

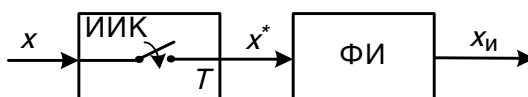


Рис. 2.6. Схема импульсного преобразователя с АИМ-1

Здесь ИИК – идеальный импульсный ключ (элемент) с периодом коммутации T , ФИ – формирователь импульсов. Первый из них из непрерывного сигнала $x(t)$ формирует последовательность мгновенных значений

$$x^{\bullet}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT),$$

то есть решетчатую функцию сигнала $x(t)$, а второй по этой последовательности формирует на каждом периоде $[nT, (n+1)T]$ дискретизации импульсы конечной длительности τ с амплитудой, соответствующей (равной или прямо пропорциональной) значению $x(nT)$. При этом ИИК может рассматриваться как амплитудный модулятор последовательности δ -импульсов (то есть функций Дирака):

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

входным сигналом $x(t)$. Выход идеального импульсного ключа $x^{\bullet}(t)$ в этом случае может быть представлен как

$$\begin{aligned} x^{\bullet}(t) &= x(t) \cdot \delta_T(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT). \end{aligned}$$

Заметим, что площадь этих импульсов с учетом (2.2) равна текущим значениям $x(nT)$.

Формирователь импульсов в этой схеме обычно обеспечивает поддержание мгновенных значений сигнала $x(nT)$ на интервале $[nT, nT + \tau]$ и, следовательно, может рассматриваться как запоминающее устройство с длительностью запоминания τ , имеющее непрерывную вход-выходную связь.

Представление преобразователей с АИМ-1 схемой, приведенной на рис. 2.6, удобно для математического описания включающих такие преобразователи систем, так как при этом используется типовой импульсный элемент – идеальный импульсный ключ, который применяют и для описания других типов импульсных преобразователей и цифровых устройств. Кроме того, подобное представление импульсных преобразователей позволяет описывать входящие в них формирователи импульсов как непрерывные устройства и объединять их при структурных преобразованиях систем с другими непрерывными устройствами.

Для импульсных преобразователей с АИМ-2 выходной сигнал на интервале $nT \leq t \leq (n+1)T$

$$x(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } nT \leq t \leq (n+\tau)T; \\ 0, & \text{если } (n+\tau)T < t < (n+1)T. \end{cases}$$

Если в импульсных преобразователях с АИМ-2 сигнал $x(t) \gg 0$ и на каждом интервале дискретизации меняется за время τ относительно медленно, то такие преобразователи можно описывать таким же образом, как и импульсные преобразователи с АИМ-1, т. е. выражением типа (2.9).

2.3.2. Широтно-импульсные преобразователи

В широтно-импульсных преобразователях период дискретизации T и уровень (амплитуда) выходных импульсов остаются постоянными, а меняется лишь длительность импульсов. Наиболее часто они используются с модуляцией первого рода (ШИМ-1) и второго рода (ШИМ-2). Их особенности отражены на рис. 2.7 и 2.8.

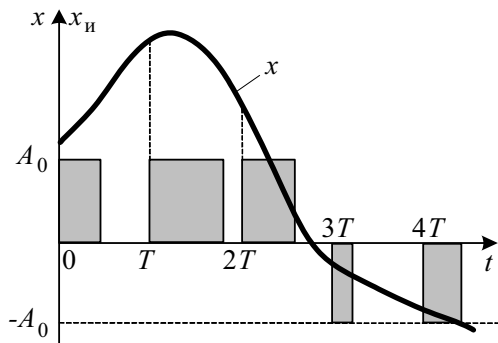


Рис. 2.7. ШИМ-1

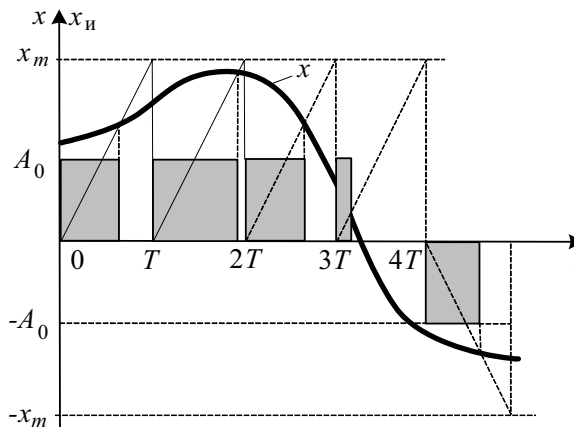


Рис. 2.8. ШИМ-2

В обоих типах ШИМ амплитудная характеристика, т. е. зависимость амплитуды импульсов A от уровня входного сигнала, принимается чаще всего в виде $A_n = A_0 \text{sign } x[nT]$ (рис. 2.9, а).

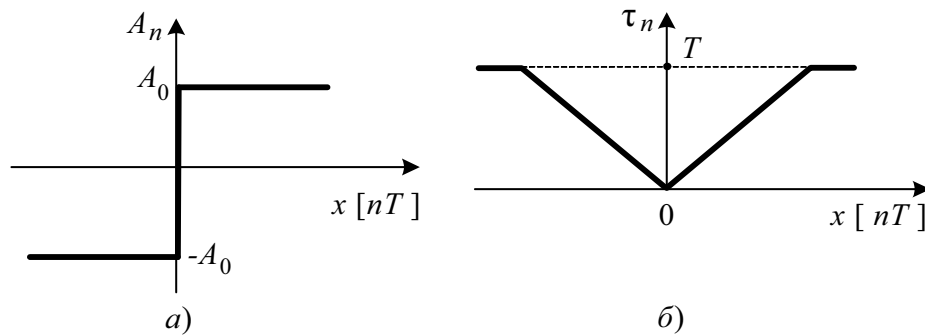


Рис. 2.9. Виды амплитудных характеристик ШИМ:
 а – амплитудная характеристика; б – модуляционная характеристика

При реализации ШИМ-1 длительность импульса τ_n на интервале $nT \leq t \leq (n+1)T$ выбирается в функции $x[nT]$. Чаще всего ее принимают прямо пропорциональной $x[nT]$, но так, что $0 \leq \frac{\tau_n}{T} \leq 1$. В этом случае зависимость модулируемого параметра импульсов (их длительность τ_n) от уровня входного сигнала, т. е. то, что принято называть *модуляционной характеристикой* ИП, имеет вид, представленный на рис. 2.9, б.

В случае ШИМ-2 длительность импульса τ_n на интервале $nT \leq t \leq (n+1)T$ выбирается из условия, что $k\tau_n = x(nT + \tau_n)$. В этой связи в математической модели таких преобразователей необходимо использовать не просто решетчатые функции типа $x[nT]$, а так называемые *смещенные решетчатые функции* $x[nT + \varepsilon T]$, у которых $0 < \varepsilon \leq 1$.

2.3.3. Время-импульсные (частотно-импульсные) преобразователи

В преобразователях этого типа амплитуды импульсов и их длительность поддерживаются постоянными, а время появления этих импульсов изменяется на каждом очередном такте дискретизации. При этом чаще всего время задержки импульса σ_n на такте $nT \leq t \leq (n+1)T$ выбирается прямо- или обратно пропорциональным значению $x[nT]$ и так, что $0 \leq \sigma_n \leq 1$.

2.4. Дискретные переменные, квантованные по уровню и по времени

Квантование сигналов по уровню и по времени характерно, прежде всего, для систем, содержащих одновременно непрерывные и цифровые устройства [3, 10, 13]. Оно реализуется в таких системах с помощью аналого-цифровых преобразователей (АЦП).

В преобразователях этого типа в каждый момент дискретизации nT , где $n = 0, 1, 2, \dots$, на выходе формируется сигнал (рис. 2.10) в виде кодовой комбинации, отражающей ближайшее к $x[nT]$ значение из множества $M = \Delta \cdot [0, 2^r]$, где r – разрядность АЦП, а цена одного разряда АЦП

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^r}.$$

Этот выходной сигнал сохраняется на всем интервале $nT \leq t \leq (n+1)T$ и, если уровень преобразуемого сигнала x существенно превышает Δ , близок по уровню к значению $x[nT]$.

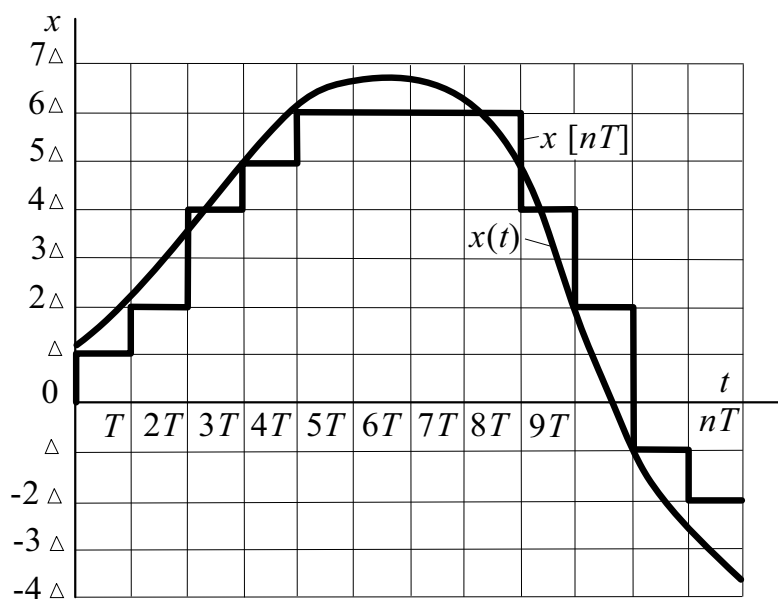


Рис. 2.10. Аналого-цифровое преобразование

По этой причине для описания вход-выходных связей в АЦП в подобных ситуациях используют решетчатые функции входных сигналов. Следует также иметь в виду, что и в самих цифровых вычислительных устройствах, формирующих по входным кодовым комбинациям и

принятым алгоритмам выходные сигналы в виде кодовых комбинаций, вход-выходные связи отражаются математическими моделями, связывающими решетчатые функции входных сигналов с решетчатыми функциями выходных сигналов.

Таким образом, из изложенного выше следует, что для устройств и систем, содержащих импульсные и/или аналого-цифровые преобразователи, цифровые вычислительные устройства, при описании протекающих в них процессов необходимо использовать решетчатые функции, а для отражения изменений во времени сигналов импульсного или цифрового типа – соответствующие обыкновенным производным сигналов по времени в непрерывных системах операторы от решетчатых функций. В качестве последних используются так называемые упреждающие и/или отстающие разности этих решетчатых функций различных порядков [1, 11, 15].

Упреждающей (нисходящей) разностью первого порядка для решетчатой функции $x[nT]$ называется функция, определяемая как

$$\Delta x [nT] = x [(n + 1) T] - x [nT] ,$$

а **отстающей (восходящей) разностью** первого порядка – величина

$$\nabla x [nT] = x [nT] - x [(n - 1) T] .$$

Отличие этих двух разностей фактически сводится к используемым при их определении упреждающим или отстающим от момента nT на такт значениям x . Очевидно, что при $T \rightarrow 0$

$$\lim \frac{\Delta x [nT]}{T} = \lim \frac{\nabla x [nT]}{T} = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=nT} ,$$

то есть вышеуказанные разности $\Delta x [nT]$ и $\nabla x [nT]$ приближенно характеризуют скорость изменения во времени переменной $x(t)$ в момент nT .

По аналогии **упреждающей разностью ν -го порядка** называют

$$\Delta^\nu x [nT] = \Delta^{\nu-1} x [(n + 1) T] - \Delta^{\nu-1} x [nT] , \quad (2.10)$$

а **отстающей разностью ν -го порядка** –

$$\nabla^\nu x [nT] = \nabla^{\nu-1} x [nT] - \nabla^{\nu-1} x [(n - 1) T] .$$

Указанные разности при $T \rightarrow 0$ стремятся к масштабированным в $T^{-\nu}$ значениям $\frac{d^\nu x}{dt^\nu}$ при $t = nT$. Они могут быть выражены через разности более низкого порядка и в конечном итоге – через самую решетчатую функцию. В частности, разность второго порядка

$$\begin{aligned} \Delta^2 x [nT] &= \Delta x [(n+1)T] - \Delta x [nT] = \\ &= \left\{ x [(n+2)T] - x [(n+1)T] \right\} - \left\{ x [(n+1)T] - x [nT] \right\} = \\ &= x [(n+2)T] - 2x [(n+1)T] + x [nT]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Содержащие решетчатые функции и/или их разности уравнения и неравенства называют соответственно *разностными уравнениями или неравенствами* или, что эквивалентно, *уравнениями или неравенствами в конечных разностях* [11, 15]. Именно такие уравнения и неравенства используются при описании состояний и процессов во многих импульсных и цифровых устройствах и системах.

Разностные уравнения, как и обыкновенные алгебраические и дифференциальные, бывают линейными или нелинейными. Они могут содержать только решетчатые функции или их разности, или же включать одновременно те и другие. В частности, линейное разностное уравнение, описывающее свободные движения системы с постоянными параметрами, может быть записано в виде:

$$a_k \Delta^k x [nT] + a_{k-1} \Delta^{k-1} x [nT] + \dots + a_1 \Delta x [nT] + a_0 x [nT] = 0. \quad (2.12)$$

Заменой входящих в него разностей разностями более низкого порядка и самой решетчатой функцией согласно (2.10), (2.11) это уравнение можно представить в другом виде:

$$b_k x [(n+k)T] + b_{k-1} x [(n+k-1)T] + \dots + b_1 x [(n+1)T] + b_0 x [nT] = 0. \quad (2.13)$$

Связь между коэффициентами в уравнениях (2.12) и (2.13) определяется следующими соотношениями:

$$b_{k-\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\lambda} a_{k-\nu} \cdot (-1)^{\lambda-\nu} \cdot \binom{k-\nu}{\lambda-\nu};$$

$$a_{k-\lambda} = \sum_{v=0}^{\lambda} b_{k-v} \cdot \binom{k-v}{\lambda-v},$$

где $\lambda \in \overline{0, k}$, а биномиальные коэффициенты вычисляются по формуле

$$\binom{k-v}{\lambda-v} = \frac{(k-v)!}{(\lambda-v)! (k-\lambda)!}.$$

2.5. Спектральные характеристики детерминированных непрерывных переменных

Часто внешние воздействия на системы, их внутренние и/или выходные переменные имеют не гармонический, но явно выраженный периодический характер с известным аналитическим выражением в функции времени. В подобных случаях при необходимости их представляют в виде совокупности постоянной и гармонических составляющих, частоты которых кратны частоте периодических изменений таких переменных. С этой целью их разлагают в *ряд Фурье* [9, 15, 17].

Действительная периодическая функция $x(t)$ с периодом повторения T , для которой существует интеграл:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt,$$

может быть представлена рядом Фурье

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \omega_0 t + b_k \sin k \omega_0 t) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk \omega_0 t}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

в котором для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) \cdot \cos k \omega_0 \tau \cdot d\tau;$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) \cdot \sin k \omega_0 \tau \cdot d\tau; \quad (2.15)$$

$$c_k = c_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) \cdot e^{-k \omega_0 \tau} \cdot d\tau,$$

а основная круговая частота

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Ряд Фурье (2.14) сходится всюду на интервале $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ к $x(t)$, если эта функция на нем непрерывна и либо не имеет, либо имеет конечное число экстремумов. Если при этом представляемая рядом Фурье периодическая действительная функция $x(t)$ имеет разрывы при $t = t_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, но сама она и ее производная dx/dt на каждом открытом интервале (t_j, t_k) кусочно-непрерывны, то ряд (2.14) сходится всюду на таких интервалах к $x(t)$, а в точках разрыва – к значениям

$$x(t_i) = \frac{x(t_i - 0) + x(t_i + 0)}{2}.$$

Представление периодических сигналов (переменных) рядом Фурье отражает их спектральный состав, т. е. набор образующих их гармонических функций и частоты изменения этих гармоник.

Во многих технических системах, в том числе в радиотехнических, электронных, автоматических и информационных, широко применяются спектральные представления сигналов, причем не обязательно периодических. Знание спектральных составов сигналов позволяет целенаправленно и более эффективно вести синтез систем, определять допустимые упрощения в математических моделях, описывающих процессы в системах, формировать специальные фильтрующие устройства.

Для определения спектрального состава сигнала произвольной формы $x(t)$ используются его **прямые интегральные Фурье-преобразования** [2, 7, 9, 11, 15, 18]. Для заданных в аналитической форме переменных при произвольных интервалах их определения, в том числе

при $t \leq 0$, с этой целью чаще всего используется **двухстороннее Фурье-преобразование** вида

$$F \{ x(t) \} \triangleq X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x(t) \cdot e^{j\omega t} \cdot dt. \quad (2.16)$$

Оно определяется в смысле главного значения, т. е.

$$X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x(t) \cdot e^{j\omega t} \cdot dt, \quad (2.17)$$

и имеет смысл лишь когда интегралы в (2.16), (2.17) являются абсолютно сходящимися относительно ω . В подобных случаях переменная $x(t)$ может быть представлена Фурье-преобразованием (2.16).

Обратное преобразование Фурье позволяет определять сигнал во временной области по его прямому Фурье-преобразованию и осуществляется по одной из нижеприведенных формул:

$$x(t) = F^{-1} \{ X(j\omega) \} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot \exp(j\omega t) \cdot d\omega; \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} X(j\omega) \cdot \cos \omega t \cdot d\omega; \\ -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} X(j\omega) \cdot \sin \omega t \cdot d\omega. \end{cases} \quad (2.18)$$

В них

$$X(j\omega) = \operatorname{Re} X(j\omega) + j \operatorname{Im} X(j\omega) = A(\omega) \cdot \exp[j\varphi(\omega)] -$$

комплексный; $A(\omega)$ – **амплитудный** и $\varphi(\omega)$ – **фазовый спектры сигнала** $x(t)$. Связь между ними определяется следующими соотношениями:

$$A(\omega) = |X(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 X(j\omega) + \operatorname{Im}^2 X(j\omega)}; \quad (2.19)$$

$$\varphi(\omega) = \arg X(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} X(j\omega)}{\operatorname{Re} X(j\omega)}. \quad (2.20)$$

Обратное, как и прямое, преобразование Фурье требует абсолютной сходимости определяющих его интегралов в (2.18). Эта сходимость при решении практических задач для (2.18) может быть установлена с использованием известного условия:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega) \cdot e^{j\omega t}| \cdot d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)| \cdot d\omega,$$

то есть на основании проверки сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)| \cdot d\omega.$$

Следует иметь в виду, что спектральное представление, согласно (2.16), возможно лишь для сигналов, удовлетворяющих условию сходимости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot dt = \text{const} \neq \infty. \quad (2.21)$$

Однако именно такие ограниченные по уровню (не нарастающие бесконечно со временем) сигналы и имеют место в абсолютном большинстве технических систем. С правилами спектральных представлений сигналов, не удовлетворяющих условию (2.21), можно ознакомиться по учебному пособию [15].

Очевидно, что интеграл Фурье-преобразования (2.16) определяет спектр преобразуемого сигнала (переменной) $x(t)$ произвольной формы на всем интервале частот от $\omega = -\infty$ до $\omega = \infty$, в то время как ряд Фурье (2.14) определяет лишь спектральный состав периодических функций, причем в этом спектре присутствуют лишь частота основной гармоники $\omega_0 = 2\pi/T$ (T – период этой гармоники) и кратные ей частоты.

Прямое и обратное преобразования Фурье удовлетворяют условию линейности. Поэтому, если переменные $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ преобразуемы по Фурье и их спектральными характеристиками являются, соответственно, $X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), \dots, X_n(\omega)$, и если при этом $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ – величины, не зависящие от t и ω , то справедливы следующие соотношения:

$$F \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot X_i(j\omega);$$

$$F^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot X_i(j\omega) \right\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i(t).$$

При решении практических задач представляют интерес не только спектры сигналов, но и спектры производных и интегралов по времени от этих сигналов. Если переменная $x(t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^{(k)}(t) = 0 \quad \text{при } k = 0, 1, 2, \dots, m-1,$$

то

$$F \left\{ x^{(m)}(t) \right\} = (j\omega)^m X(j\omega).$$

Если спектральная характеристика преобразуемого по Фурье сигнала $x(t)$ есть $X(j\omega)$ и если при этом $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot dt = 0$, то

$$F \left\{ \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot d\tau^n \right\} = \frac{1}{(j\omega)^n} \cdot X(j\omega).$$

Для преобразуемой по Фурье смещенной функции $x(t - \tau)$ при $\tau > 0$ спектральная характеристика

$$F \left\{ x(t - \tau) \right\} = e^{-j\omega\tau} \cdot X(j\omega).$$

Для функции $x(t)$, имеющей Фурье-преобразование $X(j\omega)$, спектральная характеристика масштабированной по времени функции $x\left(\frac{t}{a}\right)$ с положительным вещественным a определяется как

$$F \left\{ x\left(\frac{t}{a}\right) \right\} = a \cdot X(j\omega).$$

Таким образом, "сжатие (растяжение)" во времени сигнала $x(t)$ в a раз приводит к a -кратному расширению (сжатию) его спектральной

характеристики вдоль оси ω . В этой связи у более интенсивно меняющихся во времени переменных более широкий спектр составляющих частот.

Для функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$, имеющих Фурье-преобразования, соответственно, $X_1(j\omega)$, $X_2(j\omega)$, интегралы от которых $\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) \cdot d\omega$ и $\int_{-\infty}^{\infty} X_2(j\omega) \cdot d\omega$ абсолютно сходятся, справедлива

теорема Парсеваля, согласно которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega)X_2(-j\omega)d\omega. \quad (2.22)$$

Правую часть последнего равенства можно преобразовать, используя (2.19), (2.20). Тогда вместо (2.22) можно записать эквивалентное ему равенство:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X_1(j\omega)| \cdot |X_2(-j\omega)| \cdot \cos|\varphi_{x_1}(\omega) - \varphi_{x_2}(\omega)| d\omega. \end{aligned}$$

Из него следует формула Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)| \cdot d\omega,$$

которая характеризует энергетические свойства сигнала $x(t)$. Считается, что в полосе частот от ω до $\omega + d\omega$ энергия сигнала $x(t)$ пропорциональна величине

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)| \cdot d\omega.$$

Для **интеграла типа свертки**, т. е. для

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau,$$

в котором функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют, соответственно, Фурье-преобразования $X_1(j\omega)$, $X_2(j\omega)$, справедлива следующая формула:

$$F \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau) d\tau \right\} = X_1(j\omega)X_2(-j\omega).$$

Для произведения двух преобразуемых по Фурье функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ Фурье-преобразование имеет вид

$$F \{ x_1(t)x_2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j(\omega - \eta))X_2(j\eta) d\eta.$$

Доказательства вышеприведенных формул можно найти в [15].

Если исходная функция $x(t)$ определяется лишь при $t \geq 0$, то её спектральный состав определяется по одностороннему преобразованию Фурье:

$$F^1 \{ x(t) \} \triangleq X^1(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt.$$

Обратное преобразование Фурье при этом осуществляется по $X^1(j\omega)$ в соответствии с (2.18).

Наряду с вышеописанными спектральными представлениями непрерывных переменных (сигналов), базирующимися на двухстороннем и одностороннем преобразованиях Фурье, при решении практических задач анализа и синтеза систем получили применение и другие спектральные представления. В частности, достаточно широко используются **текущие спектральные характеристики**. Для переменной $x(t)$ такая характеристика получается прямым преобразованием вида

$$F_t \{ x(t) \} \triangleq X_t(j\omega) = \int_0^t x(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.23)$$

Оно позволяет охарактеризовать текущий спектральный состав переменной $x(t)$ за время ее изменения на текущем интервале $[0, t]$ и удобно для решения задач спектрального анализа сигналов в системах не только по неограниченным во времени реализациям (наблюдениям)

этих сигналов, но и непосредственно в процессе функционирования систем.

Из (2.23) следует, что текущая спектральная характеристика для переменной $x(t)$ зависит не только от частоты ω , но и от момента времени t , определяющего длительность интервала наблюдения. Это позволяет оценивать спектральный состав сигналов (переменных) в системах в различные интервалы времени работы систем и его зависимость от длительности интервала наблюдения при экспериментальном определении спектров сигналов в системах.

2.6. Спектральные характеристики детерминированных переменных с амплитудно-импульсной модуляцией

Автоматические и информационные системы очень часто объединяют в себе устройства и непрерывного, и дискретного типа. В этой связи характеризующие подобные системы переменные состояний и входные воздействия представляют сочетание как непрерывных, так и дискретных функций времени. Сочетания обоих типов переменных характерно также для аналого-дискретных и дискретно-аналоговых преобразователей. Поэтому представляют несомненный практический интерес не только спектральные характеристики непрерывных функций времени (переменных), но и дискретных, а также взаимосвязи спектральных характеристик сигналов в указанных типах преобразователей и систем.

Как уже отмечалось выше, в импульсных устройствах наиболее часто используется амплитудно-импульсная модуляция первого рода. Этот же тип модуляции используется и в аналого-цифровых преобразователях (АЦП), встраиваемых с целью преобразования непрерывных переменных в цифровые коды в системы, объединяющие в себе непрерывные и цифровые устройства [13]. Поэтому далее более подробно рассматриваются спектры дискретных сигналов с АИМ-1.

Определим вначале спектральный состав последовательности единичных импульсов $\theta(t)$ с периодом повторения T и длительностью τ , описываемых согласно (2.7). Так как эта последовательность является периодической функцией времени, то ее можно представить согласно (2.14) рядом Фурье

$$\theta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (2.24)$$

Здесь $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – **частота квантования**, определяемая в рад/с, а коэффициенты (амплитуды гармоник) C_k ряда Фурье в соответствии с (2.15) определяются как

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T \theta(t) e^{jk\omega_0 t} dt.$$

Так как

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \text{если } \tau < t < T, \end{cases}$$

то

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1 - e^{-jk\omega_0 \tau}}{jk\omega_0 T}.$$

Последнему выражению, используя его преобразования, можно придать вид

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{\tau}{T} \cdot \frac{2 e^{-jk\omega_0 \tau/2} \left(e^{jk\omega_0 \tau/2} - e^{-jk\omega_0 \tau/2} \right)}{j 2 k \omega_0 \tau} = \\ &= \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(k\omega_0 \tau/2)}{(k\omega_0 \tau/2)} e^{-jk\omega_0 \tau/2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

При этом выходной сигнал рассматриваемого импульсного преобразователя с АИМ-1, в соответствии с (2.9) и с учетом (2.24), получаем в виде

$$x_{\text{н}}(t) = x(t) \cdot \theta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k x(t) e^{jk\omega_0 t}.$$

Преобразование Фурье для этого сигнала

$$X_{\text{н}}(j\omega) = F\{x_{\text{н}}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{н}}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

а с учетом теоремы преобразования Фурье о смещении в области комплексной переменной, согласно которой

$$F\{x(t)e^{jk\omega_0 t}\} = X(j\omega - jk\omega_0),$$

оно может быть представлено в виде

$$X_{\text{и}}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k X(j\omega - jk\omega_0) \quad (2.26)$$

или как

$$X_{\text{и}}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k X(j\omega + jk\omega_0). \quad (2.27)$$

Для $k=0$, согласно (2.25), получаем $C_0 = \frac{\tau}{T}$ и поэтому в Фурье-преобразовании $X_{\text{и}}(j\omega)$ выходного сигнала $x_{\text{и}}(t)$ импульсного преобразователя присутствует соответствующая $k=0$ составляющая

$$X_{\text{и}}(j\omega)|_{k=0} = C_0 X(j\omega) = \frac{\tau}{T} \cdot X(j\omega).$$

Таким образом, гармоники входного сигнала $x(t)$ преобразователя присутствуют и в спектре его выходного сигнала $x_{\text{и}}(t)$, но отличаются по амплитуде в $\frac{\tau}{T}$ раз.

С учетом (2.25) амплитуда k -й гармоники последовательности единичных импульсов $\theta(t)$

$$|C_k| = \frac{\tau}{T} \left| \frac{\sin(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2} \right|, \quad (2.28)$$

а амплитудный спектр этой периодической последовательности не является непрерывным. Он в соответствии с (2.24) может быть представлен лишь набором значений, соответствующих $\omega=0, \pm\omega_0, \pm2\omega_0, \pm3\omega_0, \dots$, уровень которых определяется согласно (2.28). Его графическая иллюстрация представлена на рис. 2.11, б.

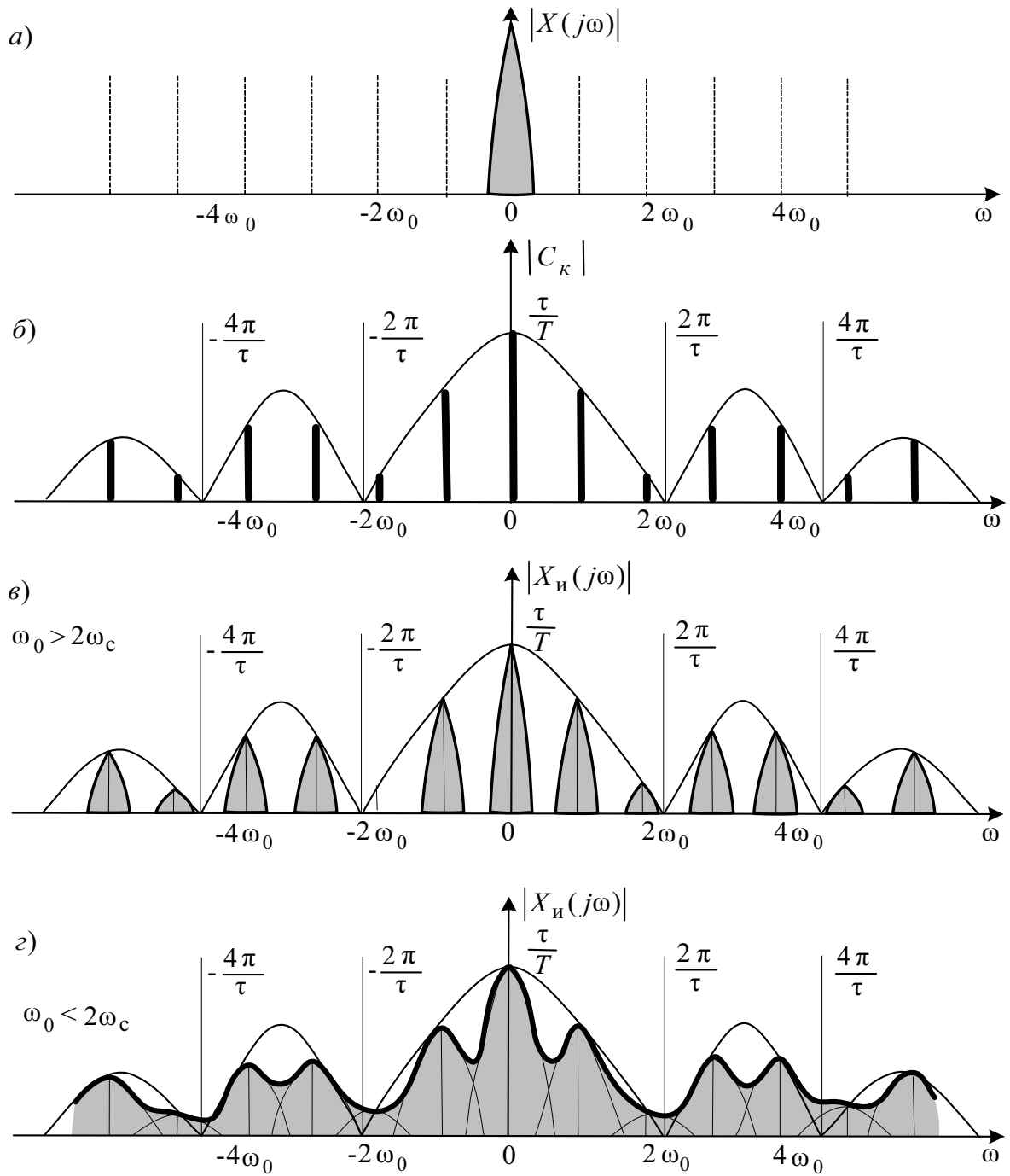


Рис. 2.11

Амплитудный спектр выходного сигнала $x_H(t)$ импульсного преобразователя с АИМ-1 согласно (2.27) можно описать как

$$|X_H(j\omega)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k| \cdot |X(j\omega + jk\omega_0)|.$$

Если при этом амплитудный спектр непрерывного входного сигнала $x(t)$ преобразователя будет иметь вид, соответствующий рис. 2.11, *а*, то амплитудный спектр выходного сигнала $x_{\text{и}}(t)$ этого преобразователя в зависимости от соотношения частоты квантования ω_0 и наивысшей частоты ω_c в спектре сигнала $x(t)$ примет вид, представленный на рис. 2.11, *в* или 2.11, *г*. Первый из этих рисунков соответствует случаю, когда $\omega_0 > 2\omega_c$, а второй – когда $\omega_0 < 2\omega_c$.

Таким образом, спектр выходного сигнала $x_{\text{и}}(t)$ содержит не только основную составляющую – спектр входного сигнала $X(j\omega)$, но и соответствующие $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ так называемые **транспонированные составляющие** $X(j\omega + jk\omega_0)$. Последние получаются умножением $|X(j\omega)|$ на соответствующий им коэффициент $|C_k|$ и сдвигом полученного спектра на $k\omega_0$.

В связи с вышеприведенным импульсный преобразователь АИМ-1, согласно (2.23), представляет собой генератор гармоник, выход которого содержит основные и транспонированные составляющие спектра входного сигнала, ограниченные по уровню коэффициентами $|C_k|$ и отстоящими друг от друга на частоту квантования. Неискаженная информация о преобразуемом таким импульсным преобразователем входном непрерывном сигнале $x(t)$ содержится в основной полосе частот $[0, \omega_0]$ только в том случае, когда $\omega_0 > 2\omega_c$.

Поэтому данное условие является необходимым для восстановления информации о непрерывном сигнале $x(t)$ по соответствующей ему импульсной последовательности $x_{\text{и}}(t)$, получаемой с применением к $x(t)$ амплитудно-импульсной модуляции первого рода или аналого-цифрового преобразования. Оно было установлено акад. В. А. Котельниковым и американским ученым Р. Шенноном и составляет суть так называемой **теоремы Котельникова–Шеннона**, согласно которой *«если непрерывный сигнал не содержит гармонических составляющих с частотой выше, чем ω_c , то он полностью описывается своими значениями в дискретные моменты времени kT , $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, удовлетворяющие условию $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_c$ »*.

Для восстановления $x(t)$ по дискретному сигналу $x_{\text{и}}(t)$ в таком случае необходимо последний подать на вход идеального низкочастотного фильтра, пропускающего на свой выход с одинаковым (лучше единичным) коэффициентом передачи только гармонические составляющие входных сигналов с частотами в пределах от $-\omega_0$ до $+\omega_0$, и тем самым исключить вредное влияние составляющих $X(j\omega + jk\omega_0)$ дискретного сигнала $x[kT]$.

Практическая реализация процедуры восстановления непрерывного сигнала $x(t)$ по его импульсной последовательности $x_{\text{и}}(t)$ не может быть выполнена идеально точно по целому ряду причин. Прежде всего, это связано с тем, что физически точно не реализуем требуемый идеальный фильтр с вышеуказанной характеристикой. Кроме того, реальные сигналы $x(t)$, как правило, имеют достаточно широкий спектр и поэтому не всегда может быть обеспечено выполнение условий теоремы Котельникова–Шеннона. Усложняет решение данной задачи и необходимость обработки достаточно большого числа дискретных значений сигнала, а это связано с необходимостью их сохранения и увеличением длительности времени восстановления, что в практических реализациях может быть недопустимым. Поэтому восстановление непрерывных сигналов по их импульсным последовательностям обычно проводится на условиях компромисса между требуемой точностью воспроизведения непрерывного сигнала и простотой и временем реализации этой процедуры.

В реальных ситуациях процесс восстановления непрерывного сигнала $x(t)$ по его импульсной последовательности $x_{\text{и}}(t)$ сводится к определению значений $x(t)$ для $t \geq 0$ по дискретным значениям $x(kT)$ при $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, соответствующим предшествующим текущему t моментам времени. В этой связи данный процесс может рассматриваться как процесс экстраполяции (предсказания) $x(t)$ по информации о предшествующих значениях $x_{\text{и}}(t)$. В его основу может быть положена аппроксимация $x(t)$ на интервале между моментами выборки nT и $(n+1)T$ рядом вида

$$x_n(t) = x(nT) + x'(nT) \cdot (t - nT) + \frac{x''(nT)}{2!} \cdot (t - nT)^2 + \dots, \quad (2.29)$$

где

$$x_n(t) = x(t) \quad \text{для } nT \leq t < (n+1)T;$$

$$x'(nT) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=nT};$$

$$x''(nT) = \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=nT}.$$

Так как для определения производных функции $x(t)$ в моменты $t = nT$ доступна лишь информация о значениях $x(kT)$, соответствующих $k = (0, 1, 2, 3, \dots, n)$, то их вычисление может быть произведено лишь на основании приближенных равенств. В частности, можно принять

$$x'(nT) \cong \frac{1}{T} \{x[nT] - x[(n-1)T]\}; \quad (2.30)$$

$$x''(nT) \cong \frac{1}{T} \{x'[nT] - x'[(n-1)T]\}; \quad (2.31)$$

.....

$$x^{(\alpha)}(nT) \cong \frac{1}{T} \{x^{(\alpha-1)}[nT] - x^{(\alpha-1)}[(n-1)T]\}, \quad (2.32)$$

где $\alpha = 3, 4, 5, \dots$. При этом, последовательно подставляя предшествующие значения из ряда (2.30)–(2.32) в последующие, можно выразить аппроксимированные значения производных функции $x(t)$ через ее предшествующие значения $x(kT)$. В частности, получаем

$$x''(nT) \cong \frac{1}{T^2} \{x[nT] - 2x[(n-1)T] + x[(n-2)T]\}.$$

Легко показать, что для такого вычисления производной $x^{(\alpha)}(nT)$ необходимо использовать $(\alpha+1)$ предшествующих значений $x(kT)$, которые с этой целью должны запоминаться в устройстве восстановления сигнала $x(t)$. На практике очень часто с целью упрощения при восстановлении непрерывных сигналов по их импульсным последовательностям ограничиваются лишь небольшим числом составляющих ряда (2.29). Во многих случаях при этом используют лишь первую

составляющую этого ряда, тем самым принимая для $x(t)$ на интервале между моментами выборки nT и $(n+1)T$ значение $x(nT)$. Устройство, обеспечивающее такую аппроксимацию, называют **фиксатором (экстраполятором) нулевого порядка**, так как в нем значение $x(t)$ фиксируется на всем вышеуказанном интервале времени (рис. 2.12) и используемый в этом случае для определения $x(t)$ полином является полиномом нулевого порядка.

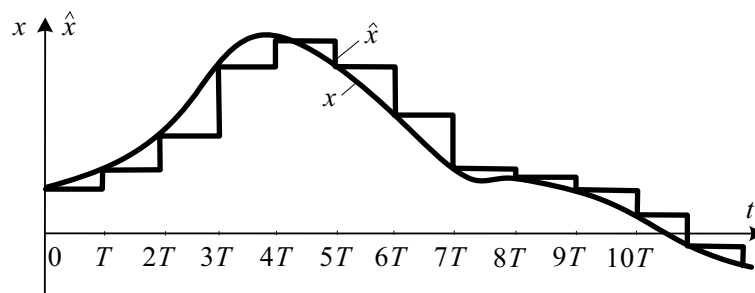


Рис. 2.12. Вход-выходная характеристика фиксатора нулевого порядка

Очевидно, что точность восстановления непрерывного сигнала $x(t)$ по выходным данным фиксатора нулевого порядка зависит, прежде всего, от периода дискретизации T (частоты квантования ω_0).

Фиксаторами нулевого порядка фактически являются и импульсные преобразователи с АИМ-1, у которых длительность импульсов τ равна периоду дискретизации T . Такие преобразователи широко используются во многих современных автоматических, информационных системах и цифровых устройствах. В этой связи представляет практический интерес спектральный состав выходного сигнала $x_{и}(t)$ такого преобразователя и его связь со спектром преобразуемого им непрерывного сигнала $x(t)$.

Спектральные характеристики выходного сигнала фиксатора нулевого порядка определяются теми же формулами (2.26) и (2.27), которыми определялись спектральные характеристики для ИП с АИМ-1, однако при этом следует принять $\tau = T$.

В другом предельном случае, когда длительность импульсов τ бесконечно мала, преобразователь с АИМ-1 превращается в идеальный импульсный ключ. Для последнего связь между спектральными характеристиками $X(j\omega)$ непрерывного входного сигнала $x(t)$, не претерпевающего разрыва при $t = 0$, и $X^*(j\omega)$ выходного сигнала $x^*(t)$ опре-

деляется соотношением

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega + jk\omega_0)$$

и отражена на рис. 2.13.

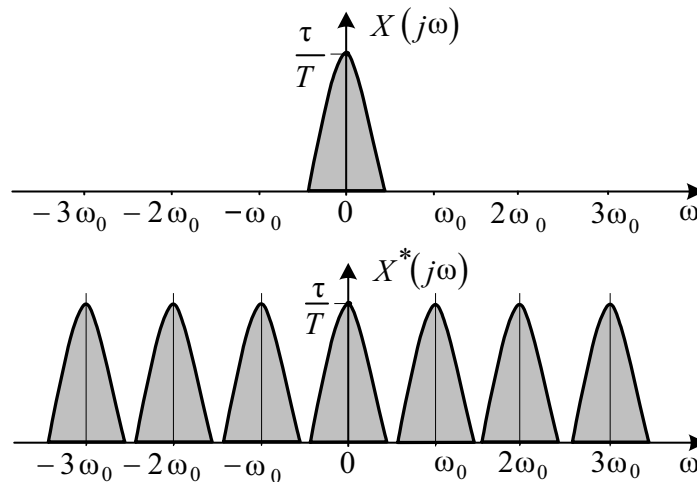


Рис. 2.13. Спектр идеального импульсного ключа

Для сигналов $x(t)$, не удовлетворяющих вышеуказанному условию, связь между $X(j\omega)$ и $X^*(j\omega)$ имеет несколько иной вид [13]:

$$X^*(j\omega) = \frac{x(0^+)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega + jk\omega_0).$$

2.7. Операторные представления непрерывных переменных

Анализ процессов в системах связан с определением изменений во времени величин, отражающих внутреннее состояние и/или выходы систем. Эти процессы происходят при изменениях воздействий внешней среды на системы или из-за несоответствующих состояниям покоя начальных условий. Их аналитические исследования связаны с решением дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных и/или разностных уравнений. Из курса высшей математики известно, что такие решения, как правило, проще всего получаются не классическим методом, а при использовании для этих целей какого-либо из интегральных преобразований операционного исчисления. Упрощение

достигается за счет преобразований исходных уравнений вышеуказанных типов в алгебраические уравнения, из которых находятся операторные изображения интересующих внутренних или выходных переменных систем в функции изображений входных воздействий на эти системы. Дальнейшее определение искомых переменных сводится к процедурам обратного перехода (преобразования) от их операторных изображений к оригиналам (как функциям времени t).

Так как операционное исчисление и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений достаточно подробно изучается в курсе «Высшая математика», ниже приводятся лишь основные правила операторных представлений непрерывных по времени функций.

Из используемых в операционном исчислении [1, 7, 8, 11, 15] интегральных представлений непрерывных функций (одностороннее и двухстороннее преобразования Лапласа, Карсона, Ганкеля, Меллина и др.) наибольшее применение при исследовании процессов получило одностороннее преобразование Лапласа (далее его будем называть просто *преобразованием Лапласа*). Оно связывает функцию (оригинал) $x(t)$ с ее изображением $x(s)$ прямым преобразованием вида

$$L\{x(t)\} \triangleq x(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (2.33)$$

и обратным преобразованием вида

$$L^{-1}\{x(s)\} \triangleq x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} x(s) e^{st} ds. \quad (2.34)$$

Связь оригинала $x(t)$ и его изображения $x(s)$, соответствующая (2.33) и (2.34), часто для краткости обозначается как

$$x(t) \doteq x(s).$$

Одностороннее преобразование Лапласа вполне удобно для решения задач анализа переходных процессов в системах, так как всегда имеется возможность принять за начало отсчета времени t момент начала переходного процесса и поэтому нет необходимости учитывать процессы при $t < 0$. Оно существует лишь для таких функций $x(t)$ вещественной переменной t , которые удовлетворяют следующим условиям:

1) при $t < 0$ преобразуемая функция должна быть тождественно нулю;

2) на интервале $t \geq 0$ функция $x(t)$ должна быть непрерывной или непрерывной с конечным числом разрывов непрерывности первого рода;

3) преобразуемая функция должна иметь ограниченный порядок возрастания, т. е. удовлетворять условию

$$x(t) < C e^{-\alpha t},$$

где $C > 0; \alpha \geq 0$.

Вышеуказанные условия обеспечивают сходимость интеграла в прямом преобразовании Лапласа. Для его абсолютной и равномерной сходимости требуется, чтобы интегральные выражения

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt = \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt$$

при $\sigma \geq \sigma_0$ имели предел. В этом случае изображение $x(s)$ в части плоскости s , где $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, может быть представлено аналитической функцией.

Наименьшее значение σ_0 , при котором выполняется указанное условие, называется *абсциссой абсолютной сходимости* преобразования Лапласа. Если преобразуемая функция $x(t)$ такова, что $\int_0^{\infty} |x(t)| dt$ существует, то $\sigma_0 = 0$.

В приложении 2 для справки приведены основные правила (теоремы) непрерывного преобразования Лапласа типа (2.33) и (2.34), а в приложении 3 – достаточно часто встречающиеся в инженерной практике функции $x(t)$ и их изображения. Более подробные таблицы преобразований Лапласа можно найти в [2, 7, 8, 11]. Процедуры получения прямых и обратных преобразований Лапласа могут быть выполнены и с использованием современных универсальных математических пакетов, например, с помощью *Mathcad*, краткое описание которого приведено в последней главе данной книги.

2.8. Операторные представления переменных, квантованных по времени

Для операторного представления дискретных, квантованных по времени переменных, описываемых решетчатыми функциями, достаточно часто применяется *дискретное преобразование Лапласа* [3, 10, 13, 15].

В частности, для решетчатой функции $x[nT]$ прямое (одностороннее) дискретное преобразование Лапласа (часто называемое также *D-преобразованием*) выполняется по формуле

$$L_q \{x[nT]\} \triangleq x(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] e^{-qnT}. \quad (2.35)$$

Она в пределе при $T \rightarrow 0$ преобразуется в формулу прямого одностороннего преобразования Лапласа для непрерывных функций.

Обратное дискретное преобразование Лапласа имеет вид:

$$x[nT] = \frac{T}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\frac{\pi}{T}}^{\sigma_0 + j\frac{\pi}{T}} x(q) e^{qn} dq. \quad (2.36)$$

Здесь σ_0 – абсцисса абсолютной сходимости интеграла (2.36).

В теории дискретных систем вместо дискретного преобразования Лапласа, определяемого согласно (2.35) и (2.36), чаще используется так называемое *z-преобразование*. Оно получается из *D-преобразования* заменой вида

$$z = e^{qT}. \quad (2.37)$$

В результате прямое *z-преобразование* для решетчатой функции $x[nT]$ определяется как

$$Z \{x[nT]\} = x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] z^{-n}. \quad (2.38)$$

Обратное *z-преобразование* несколько отличается от (2.36) и имеет следующий вид:

$$x[nT] = \frac{1}{2\pi j} \oint x(z) z^{n-1} dz. \quad (2.39)$$

Здесь интегрирование ведется в плоскости z по окружности радиуса e^{σ_0} , центр которой совпадает с началом координат этой плоскости.

Для смещенных решетчатых функций D -преобразование и z -преобразование ведутся по тем же формулам (2.35), (2.36) и (2.38), (2.39), что и для несмещенных решетчатых функций. Таблицы этих преобразований для ряда решетчатых функций имеются в [3, 11, 15]. В приложении 3 приведена таблица z -преобразований для функций времени, типичных для систем технической кибернетики.

Свойства вышеуказанных дискретных преобразований во многом подобны свойствам непрерывного преобразования Лапласа. Перечислим некоторые из них применительно к z -преобразованию. С этой целью будем далее полагать, что $Z\{x_i[nT]\} = x_i(z)$; a_i – постоянные вещественные числа и при этом $i = 1, 2, 3, \dots$. Тогда будут справедливы следующие теоремы, устанавливающие соответствие между операциями, совершаемыми над решетчатыми функциями $x_i[nT]$, и операциями, совершаемыми над их изображениями $x_i(z)$.

1. **Теорема суммирования и вычитания.** В соответствии с этой теоремой

$$Z\{x_1[nT] \pm x_2[nT]\} = x_1(z) \pm x_2(z).$$

2. **Теорема линейности.** Она позволяет осуществлять переход от изображения суммы линейно взвешенных решетчатых функций к соответствующему этой сумме изображению. Из нее следует, что

$$Z\left\{\sum_i a_i x_i[nT]\right\} = \sum_i a_i x_i(z). \quad (2.40)$$

3. **Теорема о начальном значении** устанавливает связь между изображением $x(z)$ решетчатой функции $x[nT]$ и её начальным значением. Согласно этой теореме

$$\lim_{n \rightarrow 0} x[nT] = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z).$$

4. **Теорема о конечном значении.** По этой теореме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[nT] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})x(z).$$

5. **Теорема о смещении в области оригиналов.** Эта теорема необходима для z -преобразования разностных уравнений типа (2.13) из предыдущего параграфа. В соответствии с этой теоремой для смещенной решетчатой функции $x[(n+k)T]$, удовлетворяющей условию

$$x[(n+k)T] \equiv 0 \quad \text{при } n < 0,$$

справедливы следующие соотношения:

$$Z\{x[(n+k)T]\} = z^k \left\{ x(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x[mT]z^{-m} \right\} \quad \text{при } k > 0; \quad (2.41)$$

$$Z\{x[(n+k)T]\} = z^k x(z) \quad \text{при } k < 0. \quad (2.42)$$

Если при этом

$$x[0] = x[T] = x[2T] = \dots = x[(k-1)T] = 0,$$

то изображения смещенных функций, вычисленные по формулам (2.41) и (2.42), совпадают.

6. **Теорема о смещении в области изображений.** Она устанавливает при постоянной величине θ следующее соотношение:

$$x(z \pm \theta) = Z\{e^{\mp \theta n T} x[nT]\}.$$

7. **Теорема о суммах решетчатых функций.** Согласно этой теореме

$$Z\left\{\sum_{m=0}^{n-1} x[mT]\right\} = \frac{x(z)}{z^n - 1}.$$

8. **Теоремы об изображении конечных разностей.** Они позволяют ставить в соответствие упреждающим и отстающим конечным разностям их изображения. При этом

$$Z\{\Delta^k x[nT]\} = (z-1)^k x(z) - z \sum_{v=0}^{k-1} (z-1)^{k-1-v} \Delta^v x(z);$$

$$Z\{\Delta^k x[nT]\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^k x(z).$$

Вышеприведенные теоремы используются для преобразования разностных уравнений в эквивалентные им операторные уравнения, которые являются алгебраическими относительно входящих в них изображений решетчатых функций. Из последних могут быть определены изображения искомым решетчатых функций в функции изображений независимых переменных, по которым в дальнейшем определяются решетчатые функции искомым переменных. Все эти процедуры идентичны процедурам, используемым при решении дифференциальных уравнений операторным способом.

Для определения оригинала $x[nT]$ по его изображению $x(z)$ на практике крайне редко применяют формулу обратного z -преобразования. Для этих целей чаще используют представление $x(z)$ в виде алгебраической суммы простых составляющих, для которых можно определить оригиналы по таблицам z -преобразования. Эти оригиналы в дальнейшем суммируют и таким образом получают искомую переменную $x[nT]$.

В частности, широко распространен способ определения оригинала $x[nT]$ по его изображению $x(z)$, базирующийся на его представлении в виде *ряда Лорана*, то есть в виде полинома относительно z^{-1} . Для этого изображение $x(z)$, которое очень часто имеет вид

$$x(z) = \frac{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}, \quad (2.43)$$

приравнивают ряду Лорана

$$x(z) = c_0 z^0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \dots \quad (2.44)$$

Коэффициенты этого ряда легко находятся из равенства правых частей (2.39) и (2.44). В таком случае решетчатая функция $x[nT]$ может быть определена по формуле

$$x[nT] = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \delta(t - iT),$$

где $i = 1, 2, 3, \dots$, а функция Дирака

$$\delta(t - iT) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = iT; \\ 0, & \text{если } t \neq iT. \end{cases}$$

В итоге получаем:

$$\begin{aligned}x[0] &= c_0; \\x[iT] &= c_0 + c_i.\end{aligned}$$

Более подробные сведения по D -преобразованию и z -преобразованию можно найти в [3, 10, 15].

2.9. Логические переменные двухзначной логики

Переменные двухзначной логики описывают, прежде всего, состояния и процессы в логических устройствах. Последние находят широкое применение в средствах автоматизации и управления. Напомним, что под *логическим устройством* или *системой* понимают устройство или систему, состояния и процессы в которых описываются логическими переменными и формируемыми на их основе логическими уравнениями и/или неравенствами [5, 6, 12, 14]. Они могут быть определены на элементах булевой алгебры, т. е. на множестве $B = \{0, 1\}$ двух логических констант [5, 12, 16], или на элементах многозначной (в этом случае число логических констант конечно и больше двух), или даже на элементах бесконечнозначной логики [4, 14, 19].

Основным допущением, которое используется при подобном описании, является предположение о том, что переходные процессы в реальном устройстве, связанные с изменениями его логических переменных с одного допустимого значения на другое, не принимаются во внимание. Рассматриваются лишь установившиеся режимы, при которых логические переменные устойчиво удерживаются на допустимых уровнях, например на уровне 0 или 1 – для устройств, характеризующихся булевыми переменными. Подобным образом чаще всего описывают состояния и процессы в цифровых устройствах управления и вычислительной техники. Класс логических устройств с подобным образом изменяющимися дискретными состояниями в кибернетике принято называть **конечными автоматами**.

Математическим аппаратом исследования дискретных состояний и процессов в таких устройствах и системах является математическая логика, оперирующая логическими переменными, логическими функциями и логическими уравнениями и неравенствами [12]. К числу основных логических операций (логических связок), используемых в математической логике, относятся конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, эквиваленция. На их основе формируются и более

сложные логические операции, в частности, такие, как функция Шефера (штрих Шефера); функция Даггера (стрелка Пирса), функция запрета, функция «исключенное ИЛИ».

Для двух логических булевых переменных (т. е. переменных, принимающих значения 0 или 1) x_1 и x_2 вышеуказанные операции отображаются следующим образом.

Конъюнкцией (логическим И) называют логическую функцию вида

$$y = x_1 \& x_2 \equiv x_1 \wedge x_2 \equiv x_1 x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 = x_2 = 1; \\ 0 & - \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Дизъюнкция (логическое ИЛИ) – это логическая операция вида

$$y = x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = x_2 = 0; \\ 1 & - \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отрицание – это операция вида

$$y = \neg x \equiv \bar{x} = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Импликация, обычно обозначаемая как $x \rightarrow y$, предполагает логическое преобразование, при котором

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y = 0 \text{ или } x = y = 1, \text{ или } x = 0, y = 1; \\ 0, & \text{если } x = 1, y = 0. \end{cases}$$

Эквиваленцией называют логическую операцию, при которой

$$x \equiv y = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y; \\ 0, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Наряду с вышеприведенными функциями двух аргументов являются также **функция Шеффера (штрих Шеффера):**

$$x(y \Leftrightarrow \neg(x \& y));$$

функция Даггера (стрелка Пирса):

$$x \downarrow y \Leftrightarrow \neg(x \vee y);$$

функция запрета:

$$x \leftarrow y \Leftrightarrow \neg(x \rightarrow y);$$

и функция «исключенное ИЛИ»:

$$x \oplus y \Leftrightarrow \neg(x \equiv y).$$

Все вышеперечисленные логические операции, называемые также в математической логике *пропозициональными связками*, используются для формирования логических функций и на их основе – логических уравнений (равенств) и логических неравенств.

Преобразования логических уравнений и неравенств в математической логике и их типизация проводятся с использованием законов алгебры логики [5, 12, 16], из которых к числу основных можно отнести следующие законы.

1. Закон снятия двойного отрицания, согласно которому

$$\neg(\neg x) \Leftrightarrow x.$$

2. Законы преобразования операций с конъюнкцией, дизъюнкцией и отрицанием:

$$\begin{aligned}(x \& x) &\Leftrightarrow x; & (x \vee x) &\Leftrightarrow x; \\ (x \& x) &\Leftrightarrow 0; & (x \vee \neg x) &\Leftrightarrow 1; \\ (x \& 1) &\Leftrightarrow x; & (x \vee 1) &\Leftrightarrow 1; \\ (x \& 0) &\Leftrightarrow 0; & (x \vee 0) &\Leftrightarrow x.\end{aligned}$$

3. Законы преобразования операций с импликациями и эквиваленциями:

$$\begin{aligned}(x \rightarrow y) &\Leftrightarrow (\neg x \vee y); & (x \equiv y) &\Leftrightarrow ((x \& y) \vee (\neg x \& \neg y)); \\ (x \rightarrow y) &\Leftrightarrow (\neg(x \& \neg y)); & (x \equiv y) &\Leftrightarrow ((\neg x \vee y) \& (x \vee \neg y)).\end{aligned}$$

4. Законы де Моргана:

$$\neg(x \& y) \Leftrightarrow (\neg x \vee \neg y); \quad \neg(x \vee y) \Leftrightarrow (\neg x \& \neg y).$$

5. Законы ассоциативности операций \vee и $\&$:

$$((x \& y) \& z) \Leftrightarrow (x \& (y \& z)); \quad ((x \vee y) \vee z) \Leftrightarrow (x \vee (y \vee z)).$$

6. Закон коммутативности операций $\&$ и \vee :

$$(x \& y) \Leftrightarrow (y \& x); \quad (x \vee y) \Leftrightarrow (y \vee x).$$

7. Закон дистрибутивности операции $\&$ относительно \vee :

$$(x \& (y \vee z)) \Leftrightarrow ((x \& y) \vee (x \& z)).$$

8. Закон дистрибутивности операции \vee относительно $\&$:

$$(x \vee (y \& z)) \Leftrightarrow ((x \vee y) \& (x \vee z)).$$

9. Закон поглощения:

$$(x \& (x \vee y)) \Leftrightarrow x; \quad (x \vee (x \& y)) \Leftrightarrow x.$$

10. Закон склеивания:

$$((\neg x \& y)) \vee (x \& y) \Leftrightarrow y; \quad ((\neg x \vee y) \& (x \vee y)) \Leftrightarrow y.$$

Совокупность этих законов позволяет проводить эквивалентные преобразования логических функций, уравнений и неравенств и представлять их в наиболее удобной для последующего использования форме. Из них также следует, что для отражения сложных логических выражений не обязательно применять всю совокупность вышеприведенных логических связок, т. е. $\&$, \vee , \neg , \equiv , $|$, \leftarrow , \rightarrow , \downarrow , \oplus . Установлено, что полными системами связок (которых достаточно для записи всех возможных сложных логических выражений) являются, в частности, наборы логических связок:

1) $\&$, \neg , т. е. логических *И* и *НЕ*;

2) \vee , \neg , т. е. логических *ИЛИ* и *НЕ*;

3) \rightarrow , \neg , т. е. логических *импликаций* и *НЕ*;

4) любая из связок \downarrow или $|$, т. е. штрих Шеффера или стрелка Пирса, или их обобщения вида $\neg(x_1 \& x_2 \& \dots \& x_n)$, называемые в вычислительной технике функцией *НЕИ*, и $\neg(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)$, называемое функцией *НЕИЛИ*.

В инженерной практике при реализации логических устройств и систем чаще всего используются элементы, реализующие логические *И*, *ИЛИ*, *НЕ*, а также *НЕИ* и *НЕИЛИ*. В алгебре логики, называемой по имени ее создателя Дж. Буля (1815–1864 гг.) *булевой алгеброй*, обычно используются логические операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, т. е. логические *И*, *ИЛИ*, *НЕ*, обладающие, как уже отме-

чалось выше, достаточностью для описания любой сложности логических функций.

Логические выражения и уравнения булевой алгебры могут включать в себя не только связанные вышеприведенными логическими операторами логические переменные и их отрицания, но и сочетания связанных такими операторами логических выражений (формул). В частности, они могут быть так называемыми **конъюнкциями формул**, под которыми понимаются выражения вида

$$\begin{aligned} & ((\dots ((Y_1 \& Y_2) \& Y_3)) \& \dots \& Y_n) \equiv \\ & \equiv (Y_1 \& Y_2 \& Y_3 \& \dots \& Y_n); \end{aligned}$$

и **дизъюнкциями формул** вида

$$\begin{aligned} & ((\dots ((Y_1 \vee Y_2) \vee Y_3)) \vee \dots \vee Y_n) \equiv \\ & \equiv (Y_1 \vee Y_2 \vee Y_3 \vee \dots \vee Y_n). \end{aligned}$$

При этом всякая конъюнкция или дизъюнкция, включающая в себя только логические переменные и/или их отрицания, называется **элементарной**. Дизъюнкция элементарных конъюнкций в булевой алгебре называется **дизъюнктивной нормальной формой** (ДНФ), а конъюнкция элементарных дизъюнкций – **конъюнктивной нормальной формой** (КНФ). Если к тому же логические переменные или их отрицания входят в каждую элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) только один раз, то такие КНФ (ДНФ) называют, соответственно, **совершенной конъюнктивной (дизъюнктивной) нормальной формой** (сокращенно – СКНФ или СДНФ).

2.10. Переменные и алгебра бесконечнозначной логики

Элементы, функции, уравнения и неравенства булевой алгебры позволяют сравнительно просто описывать состояния, свойства и характеристики логических устройств и систем только в дискретные моменты времени, причем в предположении, что в них изменения определяющих состояния переменных проходят мгновенно. Однако всякая система функционирует в непрерывном времени и поэтому автоматные модели, базирующиеся на булевой алгебре, неадекватно отражают реальные процессы в логических устройствах и системах. Прежде всего, это связано с описанием переходных процессов, происходящих при переходах

переменных с одного уровня на другой, т. е. с тем, что определяет суть так называемой «динамической теории конечных автоматов» [14].

Дальнейшим развитием двухзначной (булевой) логики является *бесконечнозначная логика*, начало которой положено в 50–60-х годах двадцатого века [4, 19].

В этой логике (ее также часто называют *непрерывной логикой*) и переменные исходные величины, и результаты логических операций, состоящих из операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, принимают значения на непрерывных конечных (а в ряде случаев и на бесконечных) множествах.

Бесконечнозначная логика (БЗЛ) базируется фактически на тех же исходных посылах, что и булева алгебра. Напомним, что в последней логическая операция конъюнкции фактически сводится к выбору из двух логических переменных наименьшей, а операция дизъюнкции – к выбору наибольшей из этих двух переменных.

Определим, с учетом вышесказанного, операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания для бесконечнозначной логики. Положим, что некоторый замкнутый и ограниченный интервал

$$I = [A, B] \quad (2.45)$$

определен на поле вещественных чисел со средним значением на этом интервале:

$$C = \frac{A+B}{2}. \quad (2.46)$$

Тогда для любой пары чисел x_1 и x_2 из интервала (2.45) операцию конъюнкции следует определить как

$$x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2),$$

а операцию дизъюнкции этих двух чисел – как

$$x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2).$$

Символ дизъюнкции \wedge там, где это не вызывает недоразумений, в бесконечнозначной логике, как и в булевой, часто опускается так, что

$$x_1 \wedge x_2 \triangleq x_1 x_2.$$

Операции отрицания в БЗЛ для любого числа x из (2.45) соответствует

$$\bar{x} = 2C - x, \quad (2.47)$$

то есть она определяет число из (2.45), симметрично расположенное с x относительно средней точки этого интервала.

Приведенные выше определения конъюнкции и дизъюнкции показывают, что эти операторы применимы не только к ограниченным непрерывным интервалам поля вещественных чисел, но и к незамкнутым и неограниченным (вплоть до бесконечности) интервалам, к конечным или бесконечным множествам целых чисел. В то же время для операции отрицания необходимым является симметричность множества, на котором она определяется.

Алгебра БЗЛ базируется на законах, аналогичных, по сути, законам булевой алгебры. Перечислим основные из них.

1. Закон тавтологии определяет, что

$$x \vee x = x; \quad x x = x.$$

2. Закон сочетания:

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z); \quad x(y \vee z) = (x y)z.$$

3. Закон перемещения, согласно которому

$$x \vee y = y \vee x; \quad x y = y x.$$

4. Закон распределения:

$$x(y \vee z) = x y \vee x z; \quad x \vee y z = (x \vee y)(x \vee z).$$

5. Закон отрицания (закон де Моргана) устанавливает, что

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}; \quad \overline{x y} = \bar{x} \vee \bar{y}.$$

6. Закон поглощения устанавливает, что

$$x \vee x y = x; \quad x(x \vee y) = x.$$

7. Закон двойного отрицания определяет, что

$$\overline{\bar{x}} = x.$$

Для упрощения и оценки логических выражений, включающих только операторы конъюнкции или дизъюнкции, в бесконечнозначной логике полезно использовать следующие легко устанавливаемые соотношения:

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n \leq x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$$

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \dots \vee x_n \geq x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$$

$$x_1 \dots x_{i-1} x_i x_{i+1} \dots x_n = x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n,$$

если $x_i \geq x_j$ и при этом $i \neq j \in \overline{1, n}$, а также

$$\begin{aligned} x_1 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_i \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n &= \\ &= x_1 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n, \end{aligned}$$

если $x_i \leq x_k$, $i \neq k \in \overline{1, n}$.

Если в функции бесконечнозначной логики входят операции отрицания, то их упрощения и преобразования проводятся несколько сложнее, чем в булевой алгебре. В частности,

$$x \vee \bar{x} = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq C \\ \bar{x} = 2C - x, & \text{если } x < C \end{cases} = C + |x - C|;$$

$$\bar{x} \bar{x} = \begin{cases} x, & \text{если } x < C \\ \bar{x} = 2C - x, & \text{если } x \geq C \end{cases} = C - |x - C|,$$

где через $|a|$ обозначена абсолютная величина a , а C – середина интервала определения логической переменной x , вычисляемая согласно (2.46).

Важным достоинством бесконечнозначной логики является возможность представления операций БЗЛ через обыкновенные алгебраические операции [14]. Такое представление для операции отрицания следует из самого ее определения согласно (2.47), а для операций конъюнкции и дизъюнкции эти представления имеют следующий вид:

$$x \cdot y = \frac{1}{2} [x + y - |x - y|] = x \cdot 1(y - x) + y \cdot 1(x - y); \quad (2.48)$$

$$x \vee y = \frac{1}{2} [x + y + |x - y|] = x \cdot 1(x - y) + y \cdot 1(y - x). \quad (2.49)$$

В формулы (2.48) и (2.49) входит единичная функция, определяемая как

$$1(\lambda) = \begin{cases} 0,5 & \text{при } \lambda = 0; \\ 1 & \text{при } \lambda > 0; \\ 0 & \text{при } \lambda < 0. \end{cases}$$

Главное достоинство таких преобразований состоит в том, что с их помощью можно приводить к обыкновенному алгебраическому выражению любые функции, содержащие в себе одновременно операторы обычной алгебры и бесконечнозначной логики. Это особенно важно при исследовании систем, содержащих в своем составе непрерывные, импульсные и логические устройства.

Для выполнения подобных преобразований необходимо лишь произвести замену каждой из операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции БЗЛ согласно (2.47), (2.48) и (2.49). С этой же целью в случае необходимости можно использовать и формулы преобразований многоместных операций конъюнкции и дизъюнкции БЗЛ в алгебраические выражения:

$$\bigwedge_{i=1}^n x_i = \bigwedge_{i=1}^n x_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n 1(x_k - x_i);$$

$$\bigvee_{i=1}^n x_i = \bigwedge_{i=1}^n x_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n 1(x_i - x_k).$$

Следует лишь иметь в виду, что эти две формулы справедливы только для случаев, когда среди x_1, x_2, \dots, x_n имеется только одно минимальное и одно максимальное число.

Для эквивалентных преобразований логико-алгебраических выражений в чисто алгебраические часто могут быть полезными также формулы:

$$\begin{aligned} (x \vee y)(x \wedge y) &= xy; \\ (x \vee y) + (x \wedge y) &= x + y; \\ (x \vee y) - (x \wedge y) &= |x - y|. \end{aligned}$$

Более подробные сведения по преобразованию логико-алгебраических выражений в обычные алгебраические и применению БЗЛ для

описания процессов в логических и логико-обыкновенных системах можно найти, в частности, в [14].

Контрольные вопросы

1. Какие описывающие системы переменные относятся к классу детерминированных и к классу случайных?
2. Каковы основные способы математического описания детерминированных переменных?
3. Какие способы квантования используются для дискретизации переменных (сигналов) в системах?
4. Чем отличаются амплитудно-импульсные и широтно-импульсные модуляции первого и второго рода?
5. Что понимается под решетчатой функцией и ее разностями?
6. Чем отличаются упреждающие разности решетчатых функций от отстающих?
7. Что такое сплайн-функция?
8. Чем отличается спектр периодического сигнала от непериодического?
9. В чем разница между двухсторонним, односторонним и текущим Фурье-преобразованиями?
10. Дайте определение амплитудного и фазового спектра сигнала.
11. Какова связь между z -преобразованием и дискретным преобразованием Лапласа?
12. Каким условиям должна удовлетворять решетчатая функция, чтобы ее можно было представить в операторном виде?
13. Запишите результаты операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания для двух булевых переменных.
14. Что понимается под бесконечнозначной логикой и каковы ее основные теоремы?

Библиографический список к главе 2

1. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров: пер. с фр. – 2-е изд. – М.: Наука, 1967.
2. *Бейтмен Г. , Эрдейн А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – М.: Наука, 1969.
3. *Бесекерский В. А.* Микропроцессорные системы автоматического управления. – Л.: Машиностроение. ЛО, 1988.

4. *Гинзбург С. А.* Математическая непрерывная логика и изображение функций. – М.: Энергия, 1968.
5. *Горбатов В. А.* Основы дискретной математики. – М.: Высшая школа, 1986.
6. *Громаков Е. И., Собакин Е. Л.* Логические устройства и их применение в автоматике: учебное пособие. – Томск: Ротапринт ТПИ, 1982.
7. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Мир, 1978.
8. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление: учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1975.
9. *Жуков А. И.* Метод Фурье в вычислительной математике. – М.: Физматлит, 1992.
10. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. – М.: Мир, 1984.
11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения. Теоремы. Формулы. – 6-е изд. – СПб.: Лань, 2003.
12. *Корниенко А. В.* Дискретная математика: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 1996.
13. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1984.
14. *Левин В. И.* Введение в динамическую теорию конечных автоматов. – Рига: Зинатне, 1975.
15. Математические основы теории автоматического регулирования. – 2-е изд. / под ред. *Б. К. Чемоданова.* – М.: Высшая школа, 1977.
16. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. – 3-е изд. – М.: Наука, 1984.
17. *Толстой Г. П.* Ряды Фурье. – М.: Физматлит, 1980.
18. *Френке Л.* Теория сигналов. – М.: Наука, 1974.
19. *McNaughton R.* A theorem about infinity – valued sentential logic // *Journal Symb. Logic*, 1951, 16, № 1, pp. 1–13.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Воздействия внешней среды на системы во многих случаях не являются детерминированными (известными для изучающих эти системы специалистов и предсказуемыми на последующие интервалы времени). Их природа более сложна и не поддается достаточно точному описанию простыми аналитическими зависимостями. Приведем иллюстрирующие этот факт примеры. В частности, при движении морских судов качка корабля носит случайный характер, определяемый волнением моря. Шумы, налагаемые на полезный сигнал радиолокатора, также имеют случайный характер и определяются состоянием атмосферы, создаваемыми помехами от других радионавигационных устройств и многими другими факторами. Для системы стабилизации напряжения в городской электрической сети количество потребителей, их состав, отбираемая ими мощность в каждый момент времени заранее точно не предсказуемы. Число пассажиров в поезде метро также меняется со временем случайным образом.

Воздействия такого типа обуславливают случайный характер изменений либо независимых переменных, либо параметров в математических моделях, описывающих состояния, свойства и/или процессы в рассматриваемых системах.

Случайным образом могут меняться и сами системы, в частности их состав, внутренние связи между отдельными подсистемами, свойства последних. Например, отдельные подсистемы могут оказаться в определенный момент времени неработоспособными.

Исследование систем со случайными воздействиями на них внешней среды или же со случайным образом происходящими изменениями самих систем обычно проводят, используя один из следующих подходов.

1. Каждое из внешних случайных воздействий на систему принимают равным «наихудшему» возможному при этом значению. Аналогично выбирают «наихудшие» значения параметров системы, которые могут быть при их случайных изменениях. При таких допущениях исследуют состояния, свойства и/или процессы такой системы. Очевидно, базирующиеся на таких исходных предпосылках исследования

будут давать далеко не адекватные реальным результаты, так как подобные совпадения в реальных условиях работы системы маловероятны. Если подобные исследования проводятся с целью создания системы, то в итоге проектируемая система окажется, скорее всего, малоэффективной. Например, если исследование точности проектируемой системы автоматической стабилизации электрического напряжения в сети вести, приняв максимальное значение случайного возмущения (нагрузки), то в этом случае система окажется рассчитанной с чрезмерным запасом.

2. Расчет системы проводят, базируясь на статистической природе ее случайных возмущений и состояний, т. е. с учетом их статистических характеристик. В таких случаях состояния, свойства, характеристики системы и протекающие в ней процессы определяются как ожидаемые усредненные (статистические).

Математической основой такого метода анализа систем являются теория вероятностей [1, 3, 4–7, 9, 10, 12, 13, 15] и теория случайных функций [2, 11]. Основные сведения из этих теорий и составляют содержание данной главы.

3.1. Основные понятия теории вероятностей

К *случайным событиям (величинам)* относят такие события (величины), точное предсказание протекания (значения) которых в каждом отдельном случае оказывается невозможным.

Если какое-либо событие в N опытах повторяется m раз, то величина $\frac{m}{N}$ называется *частотой события*.

Предельное значение частоты события при числе экспериментов $N \rightarrow \infty$ называется *вероятностью P данного события*, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{N} = P. \quad (3.1)$$

Вероятность каждого события лежит в пределах от 0 до 1. Если событие является невозможным, то $P = 0$, а если событие достоверно, то $P = 1$.

Существуют случайные величины, которые могут принимать либо значения из непрерывного множества значений, либо из совокупности фиксированных (дискретных) значений. Так, например, если рассматривать стрельбу из орудия, то расстояние L от орудия до места попадания снаряда будет случайной величиной, которая может принимать *любое*

из возможных значений в некотором непрерывном интервале от L_1 до L_2 . Напряжение в электрической сети также может изменяться случайным образом и принимать *любое* из значений в интервале от U_1 до U_2 . Аналогичным образом могут меняться температура окружающей систему среды, влажность воздуха, атмосферное давление и многие другие физические переменные, характеризующие воздействия внешней среды на систему.

Случайную величину, возможные значения которой образуют непрерывное множество, принято называть **непрерывной случайной величиной**.

Вышеприведенные случайные величины относятся к непрерывным случайным величинам.

Дискретной случайной величиной принято называть такую случайную величину, которая может принимать значения только из соответствующего ей фиксированного множества значений. К таким случайным величинам относятся, например, число пассажиров в лифте или в вагоне метро, число изготовленных цехом за смену изделий, количество поступивших за год (месяц, день) в авторемонтную мастерскую автомобилей.

3.2. Вероятностные характеристики дискретных случайных величин

Для характеристики дискретной случайной величины надо иметь следующие данные:

- а) все возможные значения, которые она может принимать при данных условиях задачи или опыта;
- б) вероятность появления каждого из этих значений.

Если случайная величина может принимать конечное число значений x_1, x_2, \dots, x_n и вероятность появления каждого из этих значений будет, соответственно, p_1, p_2, \dots, p_n , то можно представить так называемый **закон распределения дискретной случайной величины**. Его определяют в виде таблицы 3.1 или в виде графика (рис. 3.1).

Таблица 3.1

Значения случайной величины	x_1	x_2	...	x_n
Вероятность значений случайной величины	p_1	p_2	...	p_n

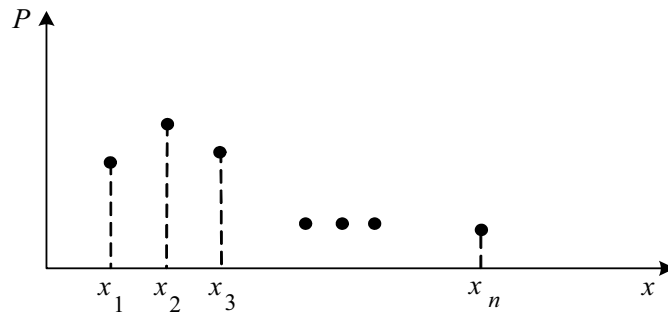


Рис. 3.1. Закон распределения дискретной случайной величины

Очевидно, что во всех случаях должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (3.2)$$

если предположить, что результатом каждого события, связанного с появлением случайной величины x , является ее равенство одному из возможных значений, указанных в таблице 3.1.

Довольно часто закон распределения дискретной случайной величины может быть определен и в аналитической форме. Примером аналитически заданного закона распределения является так называемый **закон распределения Пуассона**, для которого

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad (3.3)$$

где λ представляет собой среднее значение данной дискретной величины.

Закон распределения Пуассона справедлив для дискретных случайных величин, которые теоретически могут принимать все положительные целые значения от 0 до ∞ . Подобным законом распределения характеризуют, в частности, число пассажиров в вагоне метро; число вызовов на телефонной станции в какой-либо отрезок времени; число электронов, попадающих на анод за небольшой отрезок времени Δt .

Если вероятности того, что случайная величина x принимает значения x_1, x_2, \dots, x_n равны между собой, т. е. если $p_1 = p_2 = \dots = p_n$, то говорят, что эти значения x *равновероятны*. Например, равновероятна первая цифра лотерейного билета, на который должен выпасть выигрыш.

В таком случае закон распределения случайной величины может быть описан как

$$p_i(x_i) = \frac{1}{n} \quad (3.4)$$

для всех $i \in \overline{1, n}$.

Наряду с вышеприведенным законом распределения (назовем его обычным) в теории вероятностей широко используется и так называемый интегральный закон распределения.

Интегральным законом распределения или **функцией распределения** называется зависимость вероятности того, что случайная величина примет значение меньше каждого из возможных значений x в функции этих значений, т. е. зависимость типа

$$F(x) = P(\xi \leq x), \quad (3.5)$$

где ξ – текущее значение случайной величины.

Функция распределения является возрастающей функцией своего аргумента и равна 0 при x меньше, чем наименьшее его значение. При x большем и равном его наибольшему возможному значению функция распределения равна 1.

Для иллюстрации связи закона распределения $P(x)$ с функцией распределения $F(x)$ на рис. 3.2 изображены оба эти закона распределения для дискретной случайной величины, которая может принимать значения, равные 1, 3, 4 или 6, причем вероятности появления этих значений равны, соответственно, 0,2; 0,4; 0,3 и 0,1.

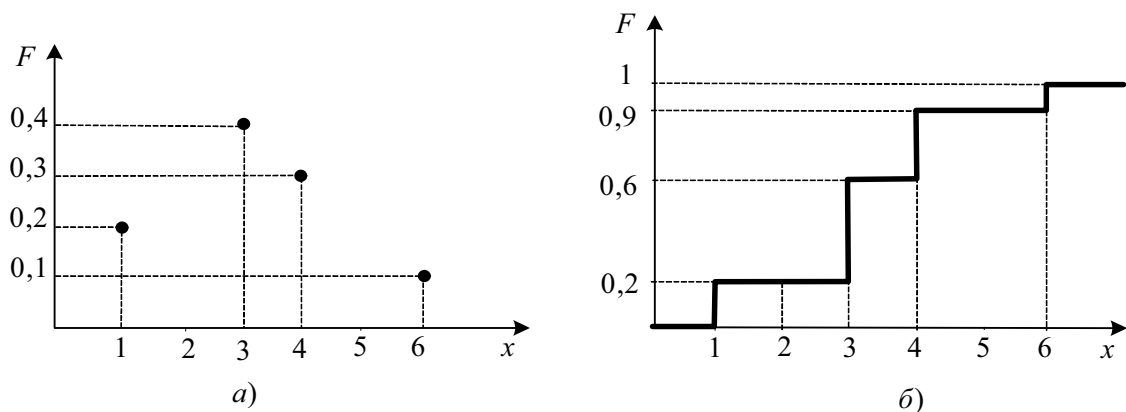


Рис. 3.2. Законы распределения случайной величины:
а – обычный; б – интегральный

Хотя вышеуказанные законы распределения достаточно полно характеризуют случайную величину, для практики нужны еще и более

простые усреднённые характеристики в виде обыкновенных неслучайных чисел.

Одной из таких характеристик является *среднее значение (математическое ожидание)* случайной величины. Оно определяется как

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \quad (3.6)$$

Для равновероятного закона распределения математическое ожидание

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.7)$$

Для случайной величины, распределённой по закону Пуассона,

$$\tilde{x} = \lambda.$$

Обобщенным понятием среднего значения является выражение

$$\widetilde{x^m} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^m \cdot p_i, \quad (3.8)$$

которое называется *моментом m -го порядка* дискретной случайной величины.

Заметим также, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^0 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \quad (3.9)$$

Момент второго порядка

$$\widetilde{x^2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot p_i \quad (3.10)$$

называют также *средним квадратом* случайной величины.

На практике часто используется так называемое *среднеквадратичное значение* случайной величины, которое определяют как

$$x_{\text{СК}} = \sqrt{\widetilde{x^2}}. \quad (3.11)$$

Обратимся теперь к характеристикам рассеяния дискретной случайной величины относительно её среднего значения (математического ожидания).

Величину $(x - \tilde{x})$ называют **отклонением** случайной величины от её среднего значения (оно также случайно) или **центрированной случайной величиной**.

Средним отклонением Δ принято называть величину, определяемую как

$$\Delta = \widetilde{|x - \tilde{x}|} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - \tilde{x}| \cdot p_i. \quad (3.12)$$

Заметим, что без знака абсолютного значения было бы

$$\widetilde{x - \tilde{x}} = \tilde{x} - \tilde{x} = 0.$$

Дисперсией дискретной случайной величины называется средний квадрат её отклонения от среднего значения, т. е.

$$D = \widetilde{(x - \tilde{x})^2} = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \tilde{x})^2 \cdot p_i = \widetilde{x^2} - (\tilde{x})^2, \quad (3.13)$$

где $\widetilde{x^2}$ – средний квадрат случайной величины.

Так как всегда выполняется неравенство

$$\widetilde{x^2} \geq (\tilde{x})^2,$$

то дисперсия всегда является положительным числом.

Корень квадратный из дисперсии называют **среднеквадратичным отклонением** случайной величины от среднего значения

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\widetilde{x^2} - (\tilde{x})^2}. \quad (3.14)$$

С учетом введенных выше определений для случайной величины, заданной законами распределения, приведенными на рис. 3.2, используя (3.6), (3.10), (3.12) – (3.14), получаем:

- математическое ожидание

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 1 \times 0,2 + 3 \times 0,4 + 4 \times 0,2 + 6 \times 0,1 = 2,8;$$

- момент второго порядка

$$\widetilde{x^2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot p_i = 1 \times 0,2 + 9 \times 0,4 + 16 \times 0,2 + 36 \times 0,1 = 10,6;$$

- среднее отклонение

$$\Delta = \widetilde{|x - \tilde{x}|} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - \tilde{x}| \cdot p_i =$$

$$= |1 - 2,8| \times 0,2 + |2 - 2,8| \times 0,4 + |4 - 2,8| \times 0,3 + |6 - 2,8| \times 0,1 = 4,66;$$

- дисперсия

$$D = \widetilde{(x - \tilde{x})^2} = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \tilde{x})^2 \cdot p_i = 10,6 - 7,84 = 2,76;$$

- среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{2,76} \approx 1,66.$$

Приведенная совокупность количественных характеристик дискретных случайных величин не исчерпывает всего их возможного множества. Она, как уже отмечалось выше, является наиболее часто используемой на практике.

3.3. Вероятностные характеристики непрерывных случайных величин

Непрерывная случайная величина может принимать любое значение в каком-либо заданном ограниченном интервале $a \leq x \leq b$ или во всем диапазоне от $-\infty$ до ∞ .

Следовательно, функция распределения (интегральный закон распределения) для непрерывной случайной величины есть непрерывная плавная кривая, «нарастающая» от 0 до 1, соответственно, на интервале $[a, b]$ (рис. 3.3, а) или в пределах от $-\infty$ до ∞ (рис. 3.3, б).

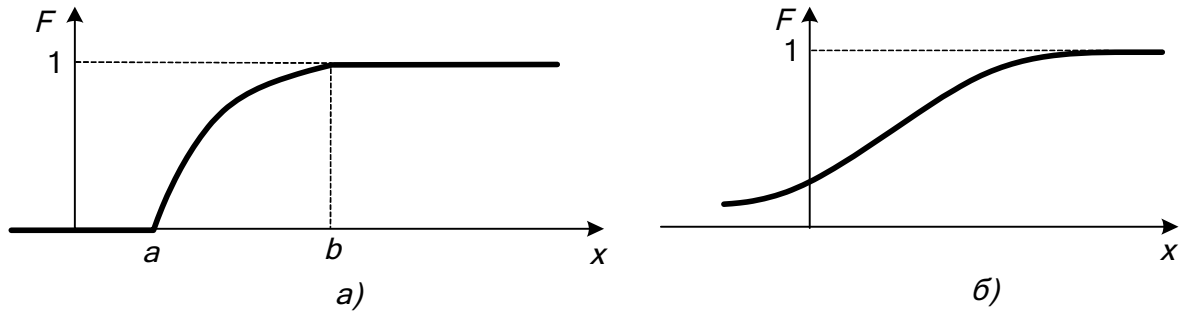


Рис. 3.3

Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение в промежутке $x_1 < x < x_2$, конечна и равна:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1), \quad (3.15)$$

а вероятность того, что она примет определённое числовое значение x_i , бесконечно мала (равна 0).

Вероятность того, что непрерывная случайная величина содержится в промежутке от x до $x + dx$

$$P(x < \xi < x + dx) = dF(x) = \frac{dF(x)}{dx} \cdot dx.$$

Величина

$$\frac{dF(x)}{dx} = w(x) \quad (3.16)$$

называется **плотностью вероятности** или **дифференциальным законом распределения** случайной величины.

Закон распределения для непрерывной случайной величины обычно задаётся определением аналитической или графической зависимости плотности вероятности $w(x)$, как это показано на рис. 3.4.

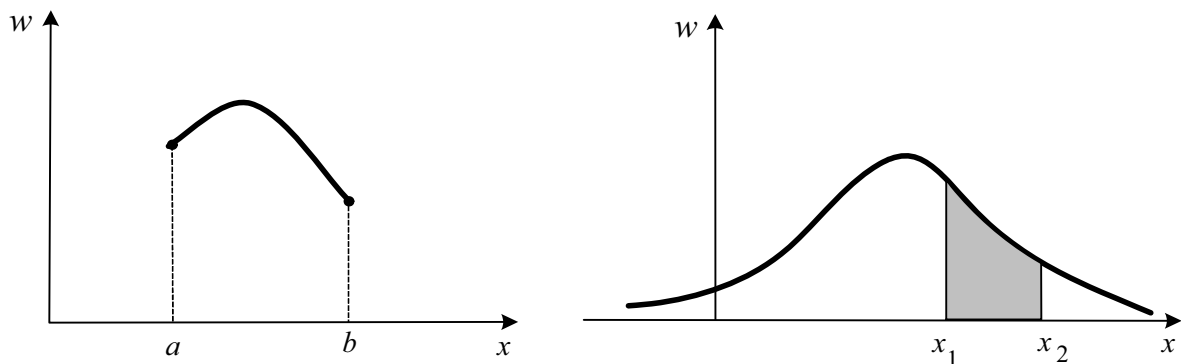


Рис. 3.4. Дифференциальные законы распределения непрерывных случайных величин

Как уже было отмечено выше, выражение $w(x) dx$ означает вероятность того, что случайная величина содержится в интервале между x и $x + dx$, т. е.

$$w(x) dx = P(x < \xi < x + dx). \quad (3.17)$$

Очевидно, что вероятность принятия случайной величиной значений, содержащихся между x_1 и x_2 ,

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx. \quad (3.18)$$

Между интегральным и дифференциальным законами распределения существует связь следующего вида:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx. \quad (3.19)$$

Вся площадь под кривой $w(x)$ на всем интервале определения случайной величины x равна 1, так как вероятность того, что x будет иметь какое-либо значение в пределах этого интервала, принимается равной 1. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1 \quad \text{и} \quad F(\infty) = 1.$$

Для непрерывных случайных величин широко используют такие же статистические характеристики, что и для дискретных случайных величин. В частности, **среднее значение (математическое ожидание)** непрерывной случайной величины соответствует моменту первого порядка и определяется по формуле

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot w(x) dx. \quad (3.20)$$

Моменты высших порядков определяются по аналогии с такими же моментами дискретных случайных величин. Так, момент m -го порядка

$$\widetilde{x^m} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m w(x) dx. \quad (3.21)$$

Среднее отклонение (малоудобная для вычислений величина) при этом может быть определена как

$$\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \tilde{x}| \cdot w(x) dx. \quad (3.22)$$

Дисперсия случайной величины

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \tilde{x})^2 \cdot w(x) dx = \tilde{x}^2 - (\tilde{x})^2, \quad (3.23)$$

а **среднеквадратическое отклонение**

$$\sigma = \sqrt{D}. \quad (3.24)$$

Нетрудно заметить, сравнивая аналитические выражения для определения статистических характеристик дискретных и непрерывных случайных величин, что эти выражения близки по своему виду. В частности, формулы (3.20)–(3.23) получаются из соответствующих формул (3.6), (3.8), (3.12), (3.13) заменой в последних знаков суммирования на интегралы, а вероятностей событий p_i – на $w(x) dx$, т. е. плотность вероятности текущих значений x , лежащих в пределах от x до $x + dx$.

К числу наиболее часто встречающихся на практике законов распределения непрерывных случайных величин относятся равномерный и нормальный (гауссовский) законы распределения. При равномерном распределении непрерывной случайной величины, принимающей значения в пределах от a до b , графики, отображающие дифференциальный и интегральный законы распределения этой величины, будут иметь вид, представленный на рис. 3.5, а и рис. 3.5, б.

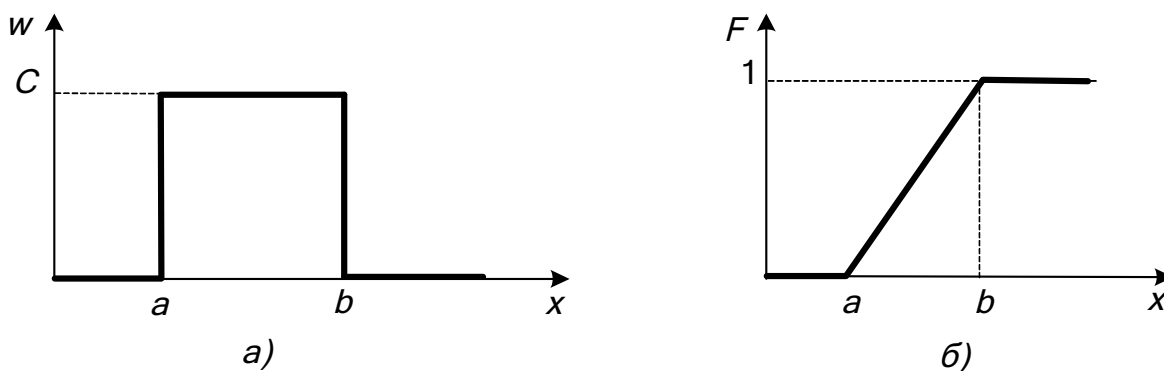


Рис. 3.5. Равномерный закон распределения

В этом случае математическое ожидание

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot w(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2},$$

а дисперсия

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \tilde{x})^2 \cdot w(x) dx = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

При нормальном законе распределения (законе Гаусса) плотность вероятности

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\tilde{x})^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.25)$$

Здесь σ – среднеквадратическое отклонение, \tilde{x} – математическое ожидание непрерывной случайной величины x . Его графическое отображение представлено на рис. 3.6.

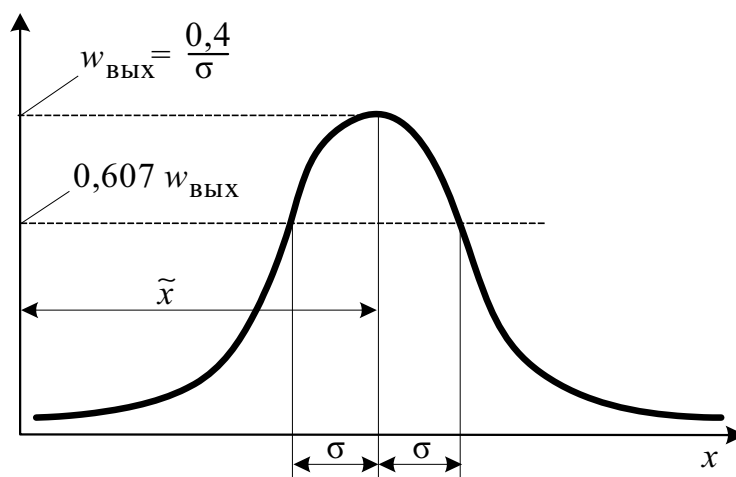


Рис. 3.6. Нормальный (гауссовский) закон распределения

Нормальное распределение имеет место во всех тех случаях, когда случайная величина характеризует собой суммарный эффект большого числа независимых причин.

При таком законе распределения полагают, что максимальное отклонение случайной величины от её математического ожидания не превышает $\pm 3\sigma$, так как вероятность того, что отклонение будет больше этой величины, равна всего лишь 0,003.

3.4. Случайные процессы и их вероятностные характеристики

Непрерывная функция, значение которой при каждом определении независимой переменной является случайной величиной, называется *случайной функцией*, а процесс, описываемый этой функцией, – *случайным процессом*.

Если аргументом случайной функции является время, то такая функция называется также *стохастической функцией*, а описываемый ею процесс – *стохастическим процессом*. В инженерной практике по автоматизации и управлению техническими объектами чаще всего приходится иметь дело именно со стохастическими процессами и стохастическими функциями. Тем не менее, в дальнейшем будем называть такие функции и процессы с целью общности изложения случайными функциями и процессами и при этом подразумевать, что аргументом t является время.

Из вышеприведенных определений следует, что случайная функция $x(t)$ не есть определённая, графически отображаемая единственным образом зависимость переменной x от аргумента t . Каждый раз при протекании процесса, который она описывает, будет своя оригинальная функциональная зависимость $x(t)$. Таким образом, случайный процесс определяется формально бесконечно большим множеством конкретных реализаций этой функции. Поэтому можно сказать, что случайный процесс $x(t)$ есть такая функция аргумента t , значение которой при каждом фиксированном t является случайной величиной. Каждая конкретная, зафиксированная в ходе процесса зависимость $x(t)$ есть лишь частная реализация $x(t)$ для этого процесса и этой зависимости (рис. 3.7).

С учетом вышесказанного никогда нельзя предсказать заранее, какова будет зависимость $x(t)$ при той или иной реализации процесса, однако случайный процесс и случайная функция $x(t)$ могут быть оценены, как и случайные величины, вероятностными (статистическими) характеристиками.

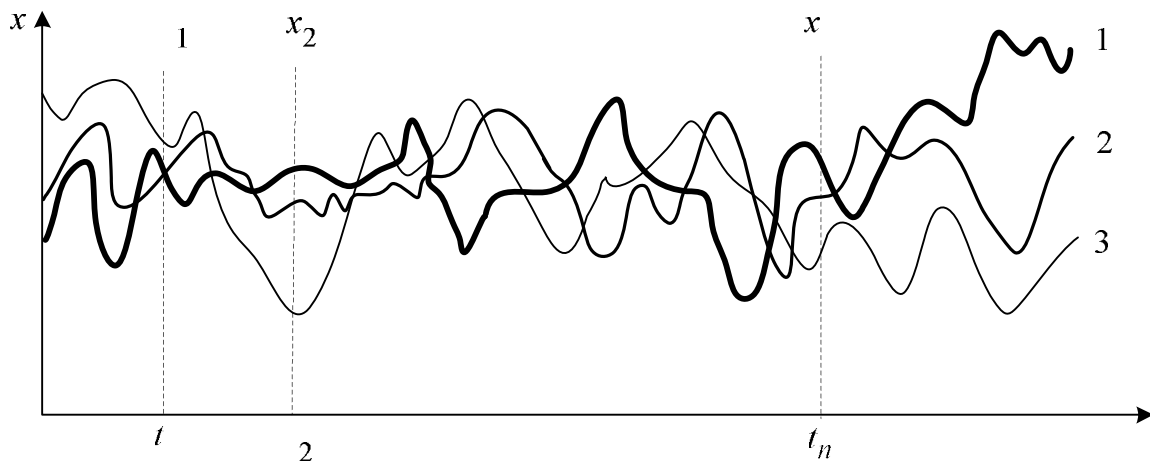


Рис. 3.7. Реализации случайного процесса $x(t)$

В каждый момент времени t_i совокупность реализаций $x(t)$ порождает множество значений, которое может рассматриваться как случайная величина x_i . Для каждого момента времени $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ будет своя случайная величина (соответственно, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$). Каждая из них имеет свой дифференциальный закон распределения, если случайная функция $x(t)$ относится к классу непрерывных, или свой набор возможных дискретных значений x_i и вероятности появления каждого из них. В технических объектах и системах автоматизации чаще всего приходится иметь дело с непрерывными случайными функциями времени, поэтому в дальнейшем будем ориентироваться на непрерывные случайные функции и пользоваться понятиями плотности вероятности.

Обозначим через $w(x_i, t_i)$ дифференциальный закон распределения для всех этих отдельных случайных величин в момент времени t_i . В общем случае он меняется с изменением t_i , но для каждого из них

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x_i, t_i) dx = 1.$$

Для каждого t_i можно найти среднее значение (математическое ожидание) случайной величины x_i , определяемое как

$$m_{x_i}(t_i) \triangleq \tilde{x}(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w(x_i, t_i) dx, \quad (3.26)$$

дисперсию

$$D(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \tilde{x})^2 \cdot w(x_i, t_i) dx = \tilde{x}^2(t_i) - [\tilde{x}(t_i)]^2 \quad (3.27)$$

и соответствующее ей среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(t_i) = \sqrt{D(t_i)}. \quad (3.28)$$

По найденным согласно (3.26) для различных значений t_i средним значениям m_{x_i} можно построить график зависимости $m_x(t)$, который будет определять характер изменения во времени математического ожидания случайной функции $x(t)$. Эта зависимость представляет собой в плоскости $x(t)$ некоторую среднюю линию \tilde{x} (рис. 3.8), вокруг которой концентрируются все графические отображения $x(t)$, соответствующие отдельным реализациям описываемого ею случайного процесса. В свою очередь, графическое отображение дисперсии $D_x(t)$ или соответствующего ей среднеквадратического отклонения $\sigma_x(t)$ будет определять среднее рассеяние совокупности реализаций $x(t)$ в каждый момент времени от её математического ожидания.

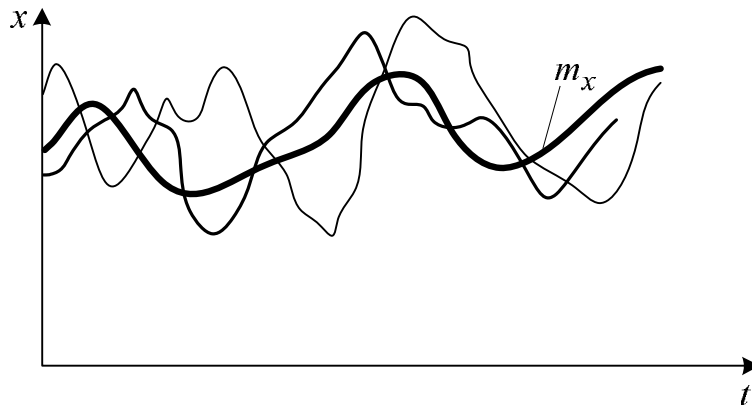


Рис. 3.8

Для установления взаимосвязи между возможными значениями функции $x(t)$ в различные моменты времени введём в рассмотрение многомерные плотности вероятности.

Вначале определим для случайного процесса $x(t)$ **двухмерную плотность вероятности** $w(x_1, t_1; x_2, t_2)$, с помощью которой будем характеризовать взаимообусловленность значений x в моменты време-

ни t_1 и t_2 . При этом будем предполагать, что вероятность того, что в момент времени t_1 величина x находится в интервале $(x_1, x_1 + dx_1)$, а в момент времени t_2 – в интервале $(x_2, x_2 + dx_2)$,

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2) = w(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 \cdot dx_2. \quad (3.29)$$

Эта вероятность того, что отдельная реализация $x(t)$ пройдёт в пространстве (x, t) вблизи точек с координатами (x_1, t_1) и (x_2, t_2) .

По аналогии можно ввести n -мерную плотность вероятности:

$$w(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_n, t_n).$$

Тогда величина

$$\begin{aligned} P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_n, t_n) = \\ = w(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_n, t_n) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (3.30)$$

будет не чем иным, как вероятностью того, что отдельная реализация $x(t)$ в пространстве (x, t) пройдёт вблизи точек (x_1, t_1) , (x_2, t_2) , \dots , (x_n, t_n) .

Случайные процессы можно разделить на три большие группы.

1. **Чисто случайные процессы.** В этом случае все значения описывающей такой процесс случайной функции $x(t)$ в отдельные моменты времени не зависят друг от друга. В этих процессах значения (x_1, t_1) , (x_2, t_2) , \dots , (x_n, t_n) и т. д. будут независимыми событиями. В связи с этим вероятность их совместного наступления, как известно из теории вероятностей, равна произведению вероятностей наступления каждого из них в отдельности, и поэтому

$$w(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_n, t_n) = w(x_1, t_1) \times w(x_2, t_2) \times \dots \times w(x_n, t_n).$$

Математическое описание чисто случайных процессов является наиболее простым и используется при анализе систем автоматизации и управления чаще всего для характеристики некоторых видов шумов.

2. **Марковские процессы.** К ним относят такие процессы, дальнейший ход которых в любой момент времени обуславливается только их состояниями в этот момент и не зависит от характера течения процесса в предшествующий период.

Примером такого процесса можно считать движение в лабиринте, если рассматривать его как совокупность последовательной реализации возможных альтернативных выборов в каждом из встречающихся перекрестков или разветвлений. Подобные процессы являются типичными для так называемых «конечных автоматов», о которых более подробно будет говориться в главе 4.

3. **Коррелированные процессы.** Во многих технических системах ход процесса (x, t) , начиная с любого промежуточного момента времени, зависит в той или иной степени от значений (x, t) в предыдущие моменты времени, т. е. как он протекал до этого.

Так, например, координаты положения летательного объекта (самолёта, ракеты), определяемые с помощью радиолокатора, случайны. Тем не менее, объект не может в силу инерционности как угодно быстро менять свою скорость и координаты. Поэтому если он занимал положение x_1 в момент t_1 , то его положение x_2 в момент t_2 уже ограничено, и, следовательно, события (x_1, t_1) и (x_2, t_2) не являются независимыми. Значит, взаимозависимыми будут и координаты объекта, определяемые радиолокатором. Чем более инерционен объект, тем больше эта взаимосвязь, или корреляция.

Аналогичную картину мы имеем и для многих других систем и действующих на них возмущений. В частности, описанная выше корреляция характерна для качки морских судов. В таких случаях двумерная плотность вероятности

$$w(x_1, t_1; x_2, t_2) = w(x_1, t_1) \times w_{21}(x_2, t_2), \quad (3.31)$$

где $w_{21}(x_2, t_2) dx_2$ – условная вероятность того, что случайный процесс пройдёт вблизи точки (x_2, t_2) , если он уже прошёл вблизи точки (x_1, t_1) .

Между основными плотностями вероятности существует следующая связь:

$$w(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2.$$

Аналогично, любая плотность вероятности низшего порядка может быть получена из плотности вероятности высшего порядка, т. е. последняя несет большее количество информации о случайном процессе. В общем случае, если бы мы имели абсолютно все плотности вероятности

для всех моментов времени, то знали бы случайный процесс достаточно подробно.

Зная n -мерную функцию распределения, можно определить все моменты, включая момент n -го порядка:

$$\begin{aligned} \widetilde{x}^n(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \dots x_n \cdot w(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_n, t_n) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (3.32)$$

n раз

В практических расчётах пользуются моментами не выше второго порядка. При этом момент первого порядка

$$m_x(t) \triangleq \widetilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(x, t) dx \quad (3.33)$$

есть *математическое ожидание (среднее значение по множеству)* случайной функции $x(t)$.

Моменты второго порядка, как правило, определяют не для исходной функции $x(t)$, а для соответствующей ей *центрированной случайной функции*

$$x^0(t) = x(t) - m_x(t).$$

В частности, *дисперсия* случайного процесса

$$D_x(t) = M \left\{ [x(t) - m_x(t)]^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)]^2 w(x, t) dx. \quad (3.34)$$

Здесь и в дальнейшем под $M \{ \bullet \}$ понимается операция определения математического ожидания от стоящей в скобках функции.

В этой связи дисперсия может быть названа моментом второго порядка от центрированной случайной функции.

Используя двумерную функцию распределения $w(x_1, t_1; x_2, t_2)$, для случайной функции $x(t)$ можно найти и другой момент второго порядка, а именно

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t_1) - m_x(t_1)] \cdot [x_2(t_2) - m_x(t_2)] \times \quad (3.35)$$

$$\times w(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2,$$

называемый **автокорреляционной функцией** для $x(t)$. Если речь идет только об этой функции, то часто её называют просто **корреляционной функцией**.

С целью большей наглядности проводимых вычислений значения случайной функции $x(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 обозначены в (3.35), соответственно, как $x_1(t_1)$ и $x_2(t_2)$. Поэтому используют и другую форму записи формулы для вычисления автокорреляционной функции, а именно:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)] \cdot [x(t_2) - m_x(t_2)] \times \quad (3.36)$$

$$\times w(x, t_1, t_2) dx dx.$$

Автокорреляционная функция является важной статистической характеристикой случайной функции, характеризующая взаимообусловленность значений последней в моменты времени t_1 и t_2 . Если вычислить её значения при различных моментах времени t_1 и t_2 , то получим полную характеристику такой зависимости.

Для двух взаимосвязанных случайных функций $x(t)$ и $y(t)$ можно ввести понятие двумерной плотности вероятности $w(x, t_1; y, t_2)$, аналогичное по смыслу ранее введенной двумерной плотности вероятности $w(x_1, t_1; x_2, t_2)$. Тогда момент второго порядка вида

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)] \cdot [y(t_2) - m_y(t_2)] \times \quad (3.37)$$

$$\times w(x, t_1; y, t_2) dx dy$$

будет называться **взаимной корреляционной функцией** случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$. Он характеризует их взаимообусловленность в моменты, соответственно, t_1 и t_2 . Такие корреляционные функции

позволяют характеризовать вход-выходные взаимосвязи в системах при случайных воздействиях и широко используются на практике.

Общая теория случайных функций, использующая многомерные функции распределения (плотности вероятностей), по которым определяются моменты различных порядков, обычно оказывается громоздкой и слишком сложной для практического применения. Поэтому на практике обычно стремятся ограничиться рассмотрением лишь моментов первого и второго порядков случайных функций. Такого рода теория, называемая *корреляционной теорией случайных функций*, чаще всего применяется при анализе случайных процессов в системах, в том числе в системах автоматизации и управления.

Заметим, что если случайный процесс имеет нормальные функции распределения вероятности, то двух его первых моментов достаточно для определения всех последующих моментов. Таким образом, корреляционная теория является общей теорией случайных процессов с нормальным законом распределения.

Однако и корреляционная теория случайных процессов является достаточно сложной, так как для определения даже первых двух моментов требуется кропотливая работа, связанная с получением множества отдельных реализаций для большого числа однотипных объектов (систем) или одного и того же объекта при одинаковых условиях и с последующей обработкой зафиксированных реализаций. Указанные процедуры существенно упрощаются, если анализируемый случайный процесс относится к числу так называемых *стационарных*. Так как эти процессы часто встречаются в инженерной практике, рассмотрим их более подробно.

3.5. Стационарные случайные процессы и случайные функции

Стационарным случайным процессом (случайной функцией) называется такой незатухающий процесс (функция), вероятностные характеристики которого не зависят от текущего значения аргумента (времени) t .

Главной особенностью таких процессов является постоянство описывающих их статистических характеристик на всем интервале изменения t . В частности, плотность вероятности стационарной случайной функции $x(t)$

$$w(x, t) = w(x) = \text{const.}$$

Аналогично,

$$w(x_1, t_1; x_2, t_2) = w(x_1, x_2, \tau),$$

то есть двумерная плотность вероятности не зависит от выбранных значений t_1 и t_2 , а зависит только от их разности $\tau = t_2 - t_1$.

Более того, все плотности вероятностей у такого процесса не меняются при любом одинаковом сдвиге рассматриваемых моментов времени $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, т. е. при сохранении постоянных разностей между ними.

Постоянство плотностей вероятностей у стационарной случайной функции приводит к постоянству во всем интервале изменения t её математического ожидания

$$\tilde{x} = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx = \text{const}$$

и дисперсии

$$D = \sigma^2 = \text{const}.$$

Корреляционная функция такой случайной функции $x(t)$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_2 - t_1) = R_{xx}(\tau).$$

Стационарные случайные процессы обладают замечательным свойством *эргодичности*, согласно которому всякое среднее значение по множеству реализаций равно соответствующему среднему значению по времени. Это значит, что длительное наблюдение за отдельной реализацией даёт такие же результаты в среднем, как и большое число наблюдений, сделанное в один и тот же момент времени на большом числе однотипных объектов. В этой связи статистическая обработка стационарных случайных функций существенно проще, не требует большого числа наблюдений на однотипных объектах. Достаточно одного длительного наблюдения на одном объекте для определения всех интересующих исследователя статистических характеристик.

В частности, на основании свойства эргодичности, математическое ожидание стационарной случайной функции $x(t)$, ранее определенное по множеству реализаций согласно (3.26), может быть определено так же, как среднее по времени:

$$m_x = \tilde{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (3.38)$$

Дисперсия такой случайной функции может быть определена по формуле

$$D_x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - m_x]^2 dt. \quad (3.39)$$

Существенно проще вычисляется на основе указанного свойства эргодичности в этом случае и автокорреляционная функция. Для стационарной случайной функции $x(t)$

$$R_{xx}(t_2 - t_1) = R_{xx}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t_1) - m_x] \cdot [x(t_2) - m_x] dt. \quad (3.40)$$

Аналогично определяется и взаимная корреляционная функция:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t_1) - m_x] \cdot [y(t_2) - m_y] dt. \quad (3.41)$$

При определении статистических характеристик стационарных случайных функций на основе свойства эргодичности, т. е. согласно (3.38)–(3.41), время наблюдения T этой функции выбирается достаточно большим, но конечным. При этом получают приближенные значения искомых статистических характеристик, точность определения которых будет тем выше, чем большее T будет использовано при статистической обработке.

Процесс определения таких характеристик может быть автоматизирован. В частности, для определения математического ожидания, согласно (3.38), необходимо подать обрабатываемый сигнал $x(t)$ на интегратор и по прошествии достаточно длительного времени разделить выходной сигнал интегратора на это время.

После нахождения математического ожидания m_x сигнала $x(t)$ сравнительно несложно можно определить дисперсию этого сигнала. Согласно (3.39) для этого нужно вначале центрировать случайный процесс $x(t)$, т. е. подать его на устройство, обеспечивающее непрерывное во времени вычитание из $x(t)$ математического ожидания m_x . После этого полученный центрированный сигнал следует подать на вход квадратора, а затем выход последнего – на вход интегратора. По прошествии времени T_0 , достаточного для определения дисперсии с

требуемой точностью, следует выходной сигнал интегратора разделить на T_0 .

Существенно сложнее автоматизируется процесс вычисления автокорреляционной функции. Для стационарного случайного сигнала $x(t)$ она описывается выражением (3.40). Из него следует, что вычисление $R_{xx}(\tau)$ может быть сведено к последовательному выполнению следующих процедур.

1. Записывается на любом доступном самописце достаточно длительная реализация сигнала $x(t)$.

2. Определяется математическое ожидание m_x вышеописанным способом.

3. Производится центрирование случайного сигнала $x(t)$, т. е. получают $x^0(t)$ путем вычитания из $x(t)$ его математического ожидания. Полученный центрированный сигнал $x^0(t)$ вновь записывается на самописец.

4. Производится считывание $x^0(t)$ двумя считывающими устройствами, причем это считывание вторым устройством производится с задержкой на время τ .

5. Оба считанных согласно п. 3 сигнала подаются на входы множительного устройства. Выходной сигнал последнего подается на вход интегратора.

6. По истечении достаточного времени T_0 выходной сигнал интегратора делят на T_0 .

По такой же технологии можно при необходимости автоматизировать и процесс определения взаимной корреляционной функции двух стационарных случайных сигналов.

Следует заметить, что устройства, предназначенные для автоматизированного определения автокорреляционных функций, принято называть *коррелографами* или *коррелометрами*. С более подробным описанием подобных устройств можно ознакомиться, воспользовавшись [14].

Ввиду важности для статистического анализа корреляционных функций, рассмотрим более подробно их физический смысл и свойства.

Автокорреляционная функция $R_{xx}(t_1, t_2)$ определяет вероятность того, что случайная функция $x(t)$, имея в момент t_1 значение x_1 , будет иметь в момент t_2 значение x_2 , т. е. характеризует взаимную обусловленность между $x(t)$ в моменты t_1 и t_2 . Чем больше значение

$R_{xx}(t_1, t_2)$, тем более вероятно, что случайная функция $x(t)$, приняв в момент t_1 значение x_1 , в момент t_2 примет значение x_2 .

Очевидно, что вышеуказанная автокорреляция обуславливается инерционностью процесса, который характеризует анализируемый случайный сигнал $x(t)$. При этом чем менее инерционен процесс, тем быстрее убывает с ростом τ автокорреляционная функция. И наоборот, для более инерционных объектов характерно менее интенсивное убывание $R_{xx}(\tau)$.

Можно также утверждать, что чем быстрее уменьшается автокорреляционная функция, тем более высокие частоты присутствуют в спектре случайного сигнала. Указанная особенность иллюстрируется рис. 3.9. На рис. 3.9, а приведены реализации двух случайных сигналов с разными спектрами, а на рис. 3.9, б – соответствующие им автокорреляционные функции.

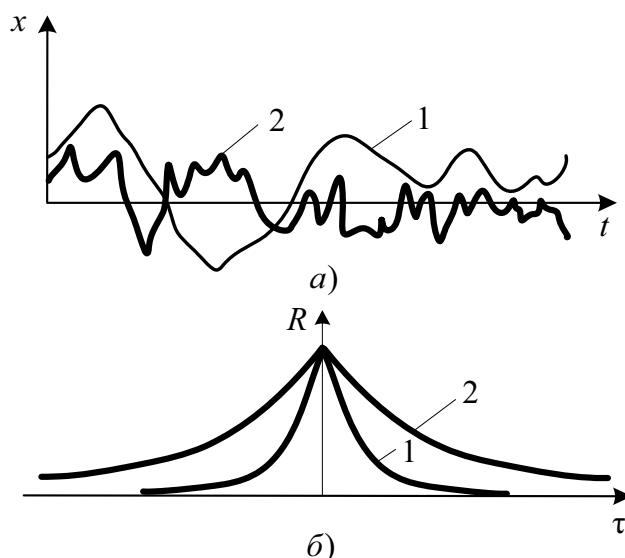


Рис. 3.9

Укажем на некоторые свойства автокорреляционных функций стационарных случайных процессов.

1. Корреляционная функция является чётной функцией своего аргумента, т. е.

$$R(\tau) = R(-\tau).$$

Это может быть доказано строго математически и следует из того факта, что взаимообусловленность значений случайной функции в два фиксированных момента времени одна и та же.

2. При $\tau = 0$ автокорреляционная функция равна среднему значению квадрата центрированной случайной величины, т. е.

$$R(0) = \overline{(x^0)^2} = \overline{(x^0)^2}.$$

3. Значение $R(\tau)$ при $\tau = 0$ максимально, так что

$$R(0) \geq R(\tau).$$

4. С ростом τ , т. е. интервала между рассматриваемыми моментами времени t_1 и t_2 , автокорреляционная функция убывает и при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к нулю, если она вычисляется согласно (3.40).

В тех случаях, когда автокорреляционная функция вычисляется для нецентрированного случайного процесса $x(t)$, т. е. с использованием формулы

$$R_{xx}(t_2 - t_1) = R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t_1) \cdot x(t_2) dt, \quad (3.42)$$

она равна квадрату среднего значения (математического ожидания) случайной величины, т. е.

$$R_{xx}(\infty) = [m_x]^2.$$

Из вышесказанного следует, что по известной автокорреляционной функции могут быть определены другие статистические характеристики описываемого случайного сигнала. Если при этом автокорреляционная функция определялась без предварительного центрирования случайной функции, то

а) математическое ожидание

$$m_x = \tilde{x} = \bar{x} = \sqrt{R_{xx}(\infty)};$$

б) среднеквадратическое значение (момент второго порядка)

$$\tilde{x}^2 = \overline{x^2} = R_{xx}(0);$$

в) дисперсия

$$D_x = R_{xx}(0) - R_{xx}(\infty);$$

г) среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{R_{xx}(0) - R_{xx}(\infty)}.$$

Для взаимной корреляционной функции стационарных сигналов $x(t)$ и $y(t)$ справедливы несколько иные соотношения. В частности,

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau),$$

то есть $R_{xy}(\tau)$ не является чётной функцией аргумента.

Для неё справедливо так называемое неравенство Буняковского, согласно которому

$$\sqrt{R_x(0)} \cdot \sqrt{R_y(0)} \geq |R_{xy}(\tau)|.$$

По взаимной корреляционной функции часто определяют так называемый **коэффициент корреляции**:

$$r(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_{xx}(0) \cdot R_{yy}(0)}}.$$

В теории случайных процессов важной характеристикой случайного сигнала является **спектральная плотность** (будем обозначать её в дальнейшем как $S(\omega)$). Она связана с автокорреляционной функцией этого сигнала Фурье-преобразованием:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad (3.43)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.44)$$

Ввиду чётности $R(\tau)$ и $S(\omega)$ справедливы также формулы

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cdot \cos \omega\tau d\tau; \quad (3.45)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cdot \cos \omega\tau d\omega. \quad (3.46)$$

Следует отметить, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \overline{x^2}, \quad (3.47)$$

то есть спектральная плотность однозначно определяет средний квадрат рассматриваемой случайной функции. Если при этом описывается случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, то формула (3.47) характеризует связь спектральной плотности и дисперсии случайной функции. Она часто используется на практике для определения дисперсии стационарных случайных сигналов.

По своему физическому смыслу спектральная плотность есть величина, которая пропорциональна средней мощности процесса в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$. Чем уже спектральная плотность, тем медленнее изменяется случайная функция во времени, и наоборот.

Связь между $S(\omega)$ и Фурье-преобразованием $F(j\omega)$ сигнала определяется следующим соотношением:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} |F(j\omega)|^2. \quad (3.48)$$

Проиллюстрируем связь автокорреляционной функции и спектральной плотности характерных сигналов.

Если имеем постоянную величину $x(t) = A_0$, то его автокорреляционная функция $R_x(\tau) = A_0^2$. При этом спектральная плотность $S_x(\omega) = 2\pi \cdot A_0^2 \delta(\omega)$. Их графическое отображение представлено на рис. 3.10.



Рис. 3.10. Корреляционная функция и спектральная плотность постоянного по уровню сигнала

Спектр процесса $x(t)$ в данном случае состоит из единственного пика (δ -функции) в начале координат. Это значит, что вся мощность рассматриваемого процесса сосредоточена на нулевой частоте, что и следовало ожидать.

Если имеем

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

то для него автокорреляционная функция

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau,$$

а спектральная плотность

$$S(\omega) = 2\pi \frac{A^2}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

Эти характеристики приведены на рис. 3.11.

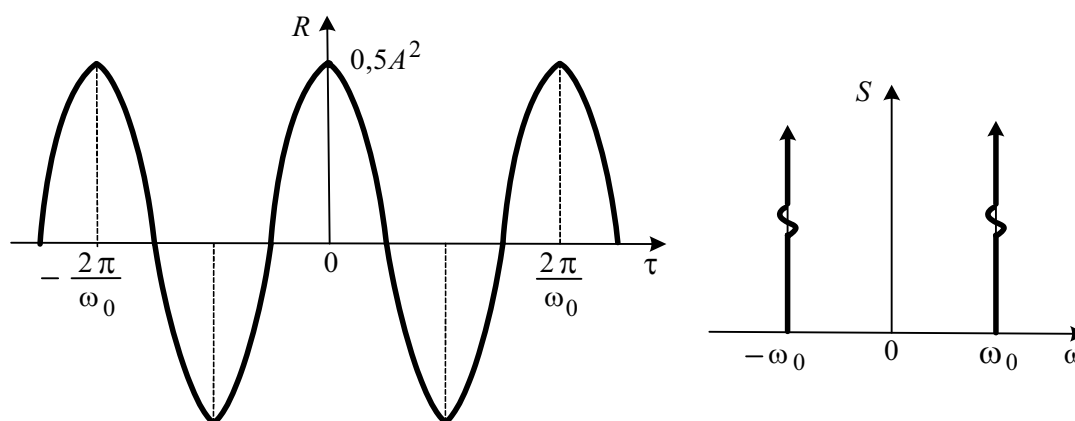


Рис. 3.11. Корреляционная функция и спектральная плотность сигнала синусоидальной формы

Если наряду со случайным процессом имеем регулярную гармоническую составляющую частоты ω_1 , то спектральная характеристика этого смешанного сигнала будет иметь вид, указанный на рис. 3.12.

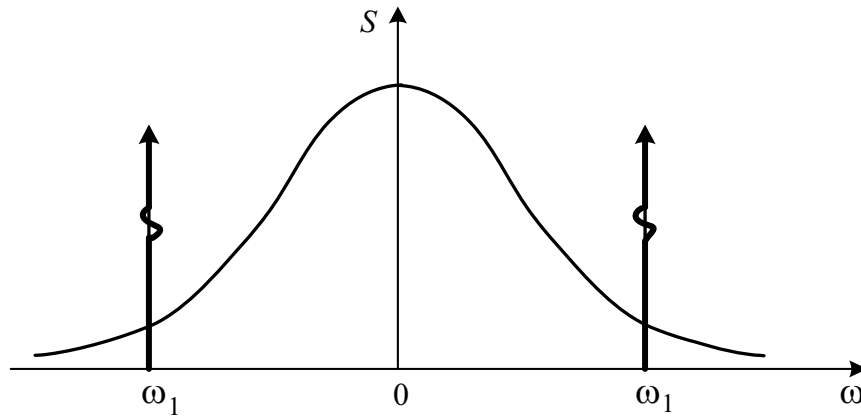


Рис. 3.12

При исследовании процессов в системах при случайных воздействиях широко используется так называемый «**белый шум**», под которым понимают стационарный случайный сигнал со спектральной плотностью $S(\omega) = \text{const}$ во всем диапазоне частот от $-\infty$ до $+\infty$.

Постоянство спектральной плотности белого шума указывает на то, что все составляющие этого сигнала в указанном диапазоне частот имеют одинаковую мощность. В этой связи такой сигнал, как и сигнал типа δ -функции, точно не воспроизводим никакими техническими средствами. Тем не менее существуют серийно выпускаемые приборы, которые называют **генераторами белого шума**. Генерируемые ими непрерывные случайные сигналы фактически имеют спектральную плотность, близкую к постоянной в достаточно большом диапазоне частот. Такие генераторы обычно используют для формирования случайных сигналов с другими, нужными исследователям спектральными плотностями. Для этого сигнал с генератора белого шума пропускают через фильтр, вход-выходные характеристики которого определяют в зависимости от того, какой сигнал на его выходе хотят получить.

3.6. Интервально-определенные переменные и их алгебраические преобразования

При решении многих прикладных задач анализа и синтеза систем альтернативным вероятностному варианту описания случайным образом изменяющихся переменных является описание лишь интервалом их изменения. Переменные величины, информация об изменениях которых (случайным или детерминированным образом) задана границами интервалов, в которых остаются данные переменные, принято называть **интервально-определенными переменными**.

Интервально-определенная величина x , удовлетворяющая условию $a \leq x \leq b$, обычно записывается в виде $\bar{x} = [a, b]$ или $[x]$. При этом длина интервала ее изменения $w[\bar{x}] = b - a$.

Арифметические операции над интервально-определенными переменными удовлетворяют следующим правилам интервального анализа [8]:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d];$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c];$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)];$$

$$\frac{[a, b]}{[c, d]} = [a, b] \cdot \left[\frac{1}{d}, \frac{1}{c} \right], \text{ если } 0 \notin [c, d].$$

Для интервально-определенных переменных справедливы законы перемещения, сочетания и распределения, согласно которым

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}; \quad \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x};$$

$$\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z};$$

$$\bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}) = (\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{z}.$$

Совокупность переменных $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ может рассматриваться как **интервально-определенный вектор** $\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]$. Последний часто называют также (не вполне удачно) **интервальным вектором**. Его значения принадлежат **интервальному брусу**, под которым понимается $\bar{X} = \bar{x}_1 \times \bar{x}_2 \times \dots \times \bar{x}_n$, где \times — знак декартова произведения. Множество последних в пространстве R^n далее будем обозначать как \bar{B}^n .

Если \bar{B}^n превратить в метрическое пространство с метрикой

$$\rho(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = \max_i \left(\max \left(\left| \underline{x}_i^1 - \underline{x}_i^2 \right|, \left| \hat{x}_i^1 - \hat{x}_i^2 \right| \right) \right),$$

где $\bar{X}_1 = \left[\underline{x}^1, \hat{x}^1 \right]$; $\bar{X}_2 = \left[\underline{x}^2, \hat{x}^2 \right]$ – интервально-определенные векторы, принадлежащие \bar{B}^n ; $i \in \overline{1, n}$; \underline{x}_i^j , \hat{x}_i^j – соответственно, нижнее и верхнее значения для интервально-определенной переменной x_i^j , $j \in (1, 2)$, то в интервальном бруске \bar{B}^n можно определить норму для любого вектора $\bar{X} \in \bar{B}^n$:

$$\|\bar{X}\| = \rho(\bar{X}, 0^n) = \max_i \|x_i\| = \max_i \left(\max(|\underline{x}_i|, |\hat{x}_i|) \right).$$

В последнем выражении $0^n = (0, 0, \dots, 0)$ – нулевой элемент в \bar{B}^n . Тогда норма для суммы интервально-определенных векторов

$$\left\| \sum_{k=1}^m \bar{X}_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m \|\bar{X}_k\|.$$

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с интервально-определенными аргументами называется **интервально-определенной функцией**, или **интервальной функцией**, и обозначается далее как $\bar{f} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

Функция $\bar{f} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, преобразующая \bar{B}^n в B , называется **рациональной интервальной функцией**.

В практических приложениях интервального анализа, в частности при оценке устойчивости систем, широко используются полиномы с интервально-определенными параметрами, общий вид которых

$$\bar{A}(p) = \bar{a}_n p^n + \bar{a}_{n-1} p^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 p + \bar{a}_0.$$

В частных случаях интервально может быть определена лишь часть коэффициентов таких полиномов, а остальные коэффициенты могут быть постоянными или изменяющимися по известным законам.

Главное достоинство описания переменных в анализируемых или синтезируемых системах как интервально-определенных заключается в существенном упрощении вычислительных процессов по сравнению с теми, которые необходимо было бы проводить в рамках вероятностного подхода. Кроме того, они позволяют относительно просто определять возможные диапазоны изменения внутренних и выходных переменных систем в процессе их функционирования при входных воздействиях на

системы, о которых известны или относительно просто прогнозируемы лишь диапазоны их изменения.

Вместе с тем следует иметь в виду, что с ростом числа выполняемых в процессе вычислений арифметических операций над каждой парой интервально-определенных переменных быстро расширяются длины интервалов для получаемых при этом результатов. Последнее может снизить достоверность (в вероятностном смысле) получаемых при интервальном анализе результатов в том смысле, что вероятность того, что какая-либо из определяемых координатных переменных в системе окажется на границах полученного для нее интервала или вблизи этих границ, будет очень мала. Тем самым "затемняются" наиболее вероятные значения переменных в анализируемой системе (их математические ожидания и дисперсии). По указанной причине интервальный анализ чаще всего используют при изучении всего множества возможных состояний систем или при оценке влияния лишь небольшого числа интервально-определенных переменных системы на их свойства.

Контрольные вопросы

1. Какие величины называются случайными?
2. Чем отличаются между собой дискретные и непрерывные случайные величины?
3. Как связаны между собой частота и вероятность события?
4. Что понимают под интегральным законом распределения случайной величины?
5. Что понимают под математическим ожиданием случайной величины и как оно определяется для дискретных и непрерывных случайных величин?
6. Какую информацию несет в себе дисперсия случайной величины?
7. Как связаны между собой средний квадрат, дисперсия и среднеквадратическое отклонение у дискретной случайной величины?
8. Что понимают под дифференциальным законом распределения непрерывной случайной величины?
9. Что такое «плотность вероятности» случайной величины?
10. Как определяются дисперсия, среднеквадратическое отклонение и момент n -го порядка непрерывной случайной величины?
11. Какую информацию о случайной функции несет в себе её автокорреляционная функция?

12. Что понимают под взаимной корреляционной функцией двух случайных сигналов?
13. Чем отличаются стационарные случайные функции от нестационарных?
14. Как удобнее определять основные статистические характеристики случайных функций, обладающих свойством эргодичности, по каким аналитическим формулам?
15. Что понимают под спектральной плотностью случайного сигнала? Каков её физический смысл?
16. Как связаны между собой автокорреляционная функция и спектральная плотность случайного сигнала?
17. Какой сигнал называют «белым шумом»?
18. Какие устройства называются корреляторами и генераторами белого шума?

Список литературы к главе 3

1. *Боровков А. А.* Теория вероятностей: учебное пособие для вузов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1986.
2. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и её инженерные приложения: учебное пособие для вузов. – 3-е изд. – М.: Академия, 2003.
3. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Задачи и упражнения по теории вероятностей. – 6-е изд. – М.: Академия, 2005.
4. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей: учебник. – 10-е изд. – М.: Академия, 2005.
5. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей: учебник. – 8-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2005.
6. *Гурский Е. И.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие. – Минск: Высшая школа, 1984.
7. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей: учебное пособие для вузов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1989.
8. *Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х.* Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986.
9. *Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В.* Теория вероятностей: учебник. – Киев: Вища школа, 1990.
10. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей: учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1986.

11. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика: учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1985.
12. Сборник задач по математике для вузов. Теория вероятностей и математическая статистика / под ред. *А. В. Ефимова*. – М.: Наука, 1990.
13. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. *А. А. Свешникова*. – М.: Наука, 1970.
14. *Солодовников В. В.* Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1960.
15. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. – 6-е изд. – СПб: Лань, 2003.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ****4.1. Цели формирования математических
моделей систем**

Математическое моделирование (математическое описание) систем представляет собой процесс формирования из математических символов (атрибутов) математических уравнений, а в ряде случаев и неравенств или других математических образов, отражающих с приемлемой точностью структуры, свойства, характеристики, состояния этих систем, их связи с внешней средой и/или протекающие в них процессы. Уравнения, неравенства или другие математические образы либо их сочетания, позволяющие проводить количественный анализ хотя бы одного из свойств, характеристик системы или её структуры, состояний при взаимодействии с внешней средой или без такового, называют *математической моделью системы* [15]. При этом обычно уточняют, для описания каких свойств, характеристик или структуры, состояний (режимов функционирования) системы она предназначена.

Вид формируемой математической модели определяется целым рядом факторов. Прежде всего, она должна давать ответы на сформулированные задачи исследования системы и обеспечивать достоверное отражение реальных явлений в описываемой ею системе с приемлемой для анализа точностью. Кроме того, она должна быть по возможности более простой и удобной для последующего ее использования. При этом следует иметь в виду, что всякая модель реальной системы, в том числе и математическая, характеризует эту систему лишь с некоторой точностью приближения.

Математические модели (ММ) являются необходимым средством при исследовании действующих и проектировании новых систем. В первом случае они используются с целью описания и последующего более детального изучения свойств, характеристик и состояний систем при различных внешних воздействиях и параметрических настройках. Созданные по результатам исследований математические модели систем в дальнейшем могут быть использованы для более углублённого изучения этих систем, их совершенствования или при проектировании

систем более высокого уровня интеграции, в которых данная система является подсистемой.

При проектировании новых систем математические модели используются на многих этапах проектирования с целью сравнительного анализа различных проектных решений и выбора таких из них, которые обеспечивают в итоге достижение поставленных перед создаваемой системой целей с возможно наилучшим качеством, требуют при этом относительно меньших исходных и эксплуатационных затрат. Математические модели в проектировании используются также и для окончательного анализа созданной системы, соответствия её предъявленным к ней требованиям.

Как уже отмечалось выше, математические модели систем описывают определённые состояния, структуру, свойства, характеристики систем, условия их функционирования и/или протекающие в них процессы. Для каждого типа систем перечень таких состояний, процессов, свойств и характеристик обычно конечен и легко устанавливается уже на первоначальных стадиях их создания или анализа.

Заметим, что вся совокупность интересующих разработчиков или исследователей свойств и характеристик систем состоит из двух групп:

- 1) внутренние свойства и характеристики систем;
- 2) свойства и характеристики систем, проявляющиеся при их взаимодействии с внешней средой (внешние свойства и характеристики систем).

Применительно, например, к такой системе, как промышленный транспортный робот (робокар), в группу внутренних свойств и характеристик можно отнести надёжность, грузоподъёмность, весогабаритные характеристики, энергоёмкость бортовых источников питания. Ко второй группе при этом будут относиться, в частности, скорость линейного перемещения робокара, точность позиционирования и поддержания заданной скорости перемещения, приспособляемость (адаптивность) к изменениям внешнего для него мира.

Часто свойства и характеристики систем напрямую количественно связаны с уровнями входных воздействий на систему, её выходами и/или внутренними состояниями. В этой связи их анализ, как и анализ состояний систем и протекающих в них процессов, требует описания вход-выходных отображений систем и внутренних состояний. Для тех свойств и характеристик систем, которые определяются иным образом (например, для оценки надёжности), приходится формировать специализированные для этих целей математические модели, отражающие структуру системы.

Практический интерес при математическом описании систем могут представлять как штатные режимы их функционирования, так и работа при нештатных условиях эксплуатации (например, при отказе части их элементов или при сверхнагрузках). Кроме того, следует иметь в виду, что анализироваться могут системы как при наличии внешних воздействий на систему, так и при их отсутствии, т. е. при работе систем в автономных режимах их функционирования. В частности, подобный анализ проводится с целью определения устойчивости характерных для системы состояний (способности систем возвращаться к подобным состояниям после вывода из них под действием импульсных или исчезающих с течением времени внешних воздействий).

Из изложенного выше следует, что для одной и той же системы может быть сформирован целый ряд математических моделей. Если при этом учесть, что степень детализации и точности описания свойств, характеристик и состояний системы и её элементов также может быть различной, то это ещё более расширяет возможное множество математических моделей для каждой описываемой системы и делает его практически неограниченным.

4.2. Особенности математического описания систем

Сложность математического описания состояний, свойств, характеристик систем и протекающих в них процессов связана с целым рядом причин. Перечислим лишь основные из них.

1. Сложность самой описываемой системы. В этой связи обычно возникают проблемы выбора типа математической модели (детерминированная или вероятностная; стационарная или нестационарная; непрерывная или дискретная и т. п.), выбора уровня декомпозиции системы на подсистемы, математического описания отдельных её элементов и их взаимосвязей.

2. Недостаток сведений о принципах работы либо о взаимосвязях величин, характеризующих свойства и состояния отдельных элементов или системы в целом. Подобная недостаточная изученность имеет место даже при описании уже созданных и эксплуатирующихся технических систем, например в химическом производстве, ядерной технике.

3. Необходимость описания свойств и состояний не только в фиксированные моменты времени при неизменных параметрах, внутренних связях в системе и внешних воздействиях, но и описания эволюции этих свойств при изменениях вышеуказанных факторов на заданных интер-

валах времени. Это порождает необходимость формировать для первых случаев статические модели системы, а для вторых – динамические.

4. Неявно выраженная зависимость точности описания изучаемых по формируемой математической модели свойств, характеристик или состояний от выбираемого типа модели и её параметризации. Это обстоятельство является одним из главных факторов, побуждающих разработчиков и исследователей систем заниматься формированием разнообразных математических моделей для каждой системы, анализировать их точностные возможности, усложнять модели по мере повышения требований к точности оценки описываемых с её помощью свойств или состояний системы, использовать для её анализа одновременно несколько математических моделей.

5. Невозможность априорной оценки влияния того или иного свойства отдельных элементов систем, например нелинейности вход-выходной связи какого-либо из них, на точностные свойства формируемой математической модели с учётом или неучётом этого свойства. Это обычно побуждает разработчиков и исследователей систем по мере углубления в процесс проектирования или исследования постепенно усложнять используемые при этом математические модели, учитывая в них поочередно все подобные факторы и их общности.

6. Невозможность оценить точностные свойства формируемых и используемых математических моделей для многих (если не всех) создаваемых новых систем до изготовления и экспериментального исследования последних. В этой связи успех в проектировании новых систем в значительной степени зависит от опыта разработчиков, их умения выбирать в процессе проектирования для синтеза и анализа систем математические модели, адекватные реалиям.

7. Сложность количественной оценки (квалиметрии) важных для многих систем свойств из-за отсутствия предложенных для этого количественных показателей и способов их определения. В этой связи в процессе проектирования такие свойства либо совсем не анализируются, либо оцениваются в недостаточной мере. Такова, например, в настоящее время ситуация, связанная с оценкой живучести систем.

Все вышеперечисленные факторы усложняют процесс формирования математических моделей систем, а в ряде случаев являются теми препятствиями, из-за сложности преодоления которых такое моделирование при разработке и исследовании систем не проводится.

Допущенные неточности в используемых математических моделях систем могут сделать результаты проведенного на их основе проектирования или исследования практически непригодными. В этой связи

сформированные для систем математические модели перед их практическим использованием, как правило, предварительно исследуют на адекватность описываемым системам. Если возможно, то оценивается и достижимый при этом уровень точности отображения этими моделями интересующих свойств, характеристик или состояний систем.

4.3. Основные типы математических моделей

Описываемые здесь типы математических моделей (ММ) характеризуют лишь те основные их варианты, с которыми приходится иметь дело при математическом описании систем управления и автоматизации. Приведенная ниже классификация отражает, прежде всего, их целевую направленность, формы представления и типы входящих в них величин.

1. *По целевому назначению* различают математические модели, используемые для описания структур, функций, свойств, характеристик, состояний и процессов в системах и их элементах. При этом часть из них может одновременно отражать и некоторые совокупности из перечисленных выше описаний систем. В частности, одна и та же ММ может одновременно служить для описания состояний и протекающих в системе процессов, а также для определения ряда её свойств.

2. *По уровню проектирования*, на котором используется та или иная модель, последние делят на модели, предназначенные для структурного, функционального, логического, схемотехнического, конструкторского и поэлементного проектирования.

3. *По форме представления* математические модели могут быть аналитическими, матричными, табличными, графовыми, операторно-структурными или алгоритмическими.

Первые из них удобны для аналитических расчётов. Матричные и табличные формы представления моделей, как правило, ориентированы на последующее их использование для решения задач на ЭВМ. Графовые (заданные в форме графа) модели обычно используются для описания структур систем [3, 11]. Для этих же целей применяются часто и матрично-заданные модели (например, в форме матриц инцидентий [3]). Операторно-структурные модели представляют собой графические отображения задаваемых операторами математических связей входных, выходных и внутренних переменных системы. Во многих инженерных дисциплинах, в частности в теории управления, такие модели обычно называют по установившейся уже с середины двадцатого столетия

традиции *структурными схемами* системы. Однако такое их название входит в противоречие с установленным в ГОСТ 2.701–84 (СЭВ 651–77) определением структурной схемы устройства или системы. По этой причине далее в книге применительно к указанным схемам используется термин «*операторно-структурная схема*», а не «структурная схема».

Алгоритмическое представление математических моделей систем или их отдельных устройств используется, как правило, в тех случаях, когда эти модели ориентированы на использование для целей имитационного моделирования систем на ЭВМ или на последующую программную реализацию.

Более детальное описание большинства вышеперечисленных типов моделей будет дано в последующих разделах.

4. *По типам используемых величин* различают математические модели, включающие в себя переменные и константы, определённые на поле действительных (вещественных) чисел R , натуральных чисел N , целых чисел Z , комплексных чисел C , либо переменные, определённые на элементах $B = \{0, 1\}$ булевой или какой-либо другой многозначной (бесконечнозначной) логики L [7].

Заметим, что все входящие в уравнения и неравенства математической модели величины делятся на две группы – на так называемые переменные и параметры. При этом под *параметрами модели* (и соответственно системы) понимают все те характеризующие описываемую систему величины, которые входят в коэффициенты уравнений и неравенств ее модели. Остальные входящие в уравнения и/или неравенства модели системы величины, характеризующие входные воздействия на систему, ее выходы и внутреннее состояние, называют *переменными* или часто также, по сложившейся в механике традиции, *координатами модели* (системы). Первое из указанных название в ряде случаев может вызвать затруднение в понимании, о чем идет речь. В частности, это может иметь место при характеристике моделей и систем с переменными параметрами. Поэтому в дальнейшем в этой книге количественно выражаемые величины, входящие в уравнения и неравенства математических моделей, будем определять, в основном, как параметры и координаты системы.

Если система описывается только переменными логического типа, то такую систему принято называть *логической системой* или *конечным автоматом* [7]. Системы, в математических моделях которых переменные и параметры определены только на поле действительных

(вещественных), целых и/или комплексных чисел, далее будем называть **обыкновенными системами**. Те же системы, в математических моделях которых присутствуют логические переменные и переменные, определённые на поле действительных, целых и/или комплексных чисел, будем называть **логики-обыкновенными**. Заметим при этом, что последние во многих технических науках в настоящее время чаще всего называют **логики-динамическими**. Это определение вносит определённую неоднозначность в характеристику типа описываемой системы, так как для систем с чисто логическими переменными могут быть использованы математические модели для характеристики как статических, так и динамических режимов их работы.

5. **По отражаемой обусловленности от времени описываемых свойств, состояний и характеристик** систем различают модели **статические** и **динамические**. Первые из них не учитывают временной зависимости анализируемых величин системы, т. е. описывают системы в статических состояниях. Модели статики при этом включают в себя только алгебраические и/или логические уравнения и неравенства, в которые не входит время. Модели динамики, наоборот, характеризуют изменения этих величин в системе с течением времени. В этом случае в математической модели системы имеется, как минимум, одна составляющая, содержащая интеграл или производную по времени любой кратности, либо хотя бы одно разностное алгебраическое и/или логическое уравнение, или неравенство минимум первого порядка.

6. **По характеру обусловленности параметров математической модели от времени** различают модели стационарные и нестационарные. В первых моделях (и описываемых ими системах) все параметры не зависят от времени, а во вторых – хотя бы один из параметров меняется во времени.

7. **По способу отсчёта времени** динамические ММ делят на **модели с непрерывным временем** (с непрерывным аргументом) и **модели с дискретным временем**. В первом случае модель описывает систему во все моменты времени t на ограниченном или неограниченном временном интервале, т. е. $t \in T \subseteq R$. В моделях с дискретным временем (с дискретным аргументом) отражаются описываемые состояния, свойства или характеристики систем лишь в определённые дискретные моменты времени. При этом, как правило, принимают $t = nT_0$, где T_0 – период дискретизации и $n \in Z$, т. е. определяется на поле целых чисел Z .

Заметим, что дискретизация времени t при описании происходящих в системе изменений необходима в тех случаях, когда хотя бы один элемент системы меняет свои состояния через фиксированные интервалы времени, как это имеет место, например, в импульсных и цифровых устройствах. Она используется также при моделировании систем на цифровых ЭВМ.

8. *По отсутствию или наличию смещённых аргументов у входящих в модель переменных различают системы с несмещённым аргументом* (временем t) и *системы со смещённым аргументом*. Включение в модель системы смещённых аргументов может быть обусловлено рядом причин, в частности необходимостью учёта постоянного запаздывания в реакции какого-либо элемента системы на входные воздействия. Например, может встретиться уравнение вида

$$y(t) = k x(t - \tau),$$

которое описывает изменение $y(t)$ в зависимости от $x(t)$ с коэффициентом масштабирования k и отставанием во времени (чистым запаздыванием) на τ . Подобное запаздывание имеет место, например, в ЦВМ на такт работы машины, во вход-выходных связях в транспортерах, трубопроводах, в передаче сигналов на большие расстояния (например, на космические аппараты, совершающие межпланетные перелеты).

Смещённые аргументы в математических моделях используются также и в тех случаях, когда ими отражается динамика систем в дискретные моменты времени и для этих целей используются решетчатые функции и разностные уравнения, представленные, например, в форме

$$f \left\{ x \left[(n+m) T_0 \right], x \left[(n+m-1) T_0 \right], \dots, x \left[n T_0 \right] \right\} = 0.$$

9. *По причине изменения переменных, характеризующих описываемую систему, математические модели делят на модели с временным, событийным и событийно-временным характером протекающих процессов*. Модели и системы с временным характером протекающих процессов изменяют свои переменные состояния лишь за счет изменения входных воздействий и параметров системы с течением времени. В моделях и системах с событийным характером протекающих процессов причиной последних являются изменения состояний подсистем и связей между ними при наступлении некоторых событий. Это характерно, в частности, для конечных автоматов без памяти [7].

Модели и системы с событийно-временным характером протекающих в них процессов вбирают в себя свойства и временных, и событийных моделей и систем.

10. *По виду входящих в них производных* различают математические модели с обыкновенными производными по времени и с частными производными по входящим в модель переменным или параметрам. Последние используются, например, для описания изменений температуры в физическом объекте вдоль какого-либо из его направлений; изменений давления в нефте- и газопроводах по их длине; изменений напряжения вдоль длинной линии электропередачи. Соответствующие модели и системы в таком случае называются *моделями и системами с распределёнными параметрами*. Если же в ММ системы присутствуют лишь производные по времени, то такие модель или система называются *моделью* или *системой с сосредоточенными параметрами*.

При этом в случаях, когда в математическую модель входят интегральные слагаемые, от них можно избавиться, продифференцировав соответствующее интегральное уравнение по времени столько раз, какова наибольшая кратность входящего в это уравнение интеграла по времени. Таким образом, систему уравнений, описывающих динамические процессы в непрерывных и логико-непрерывных системах, всегда можно преобразовать так, что в ней не будет интегральных составляющих. Вместо интегральных уравнений в итоге будем иметь дифференциальные уравнения. Тем самым обеспечивается единообразие видов математических моделей динамических процессов.

11. *По способу вхождения внутренних и выходных переменных системы* математические модели делят на линейные и нелинейные. Напомним, что в математике *линейной* называют математическую модель, все уравнения и неравенства в которой имеют составляющие (слагаемые) с линейно входящими в них внутренними и выходными переменными (координатами) системы и их производными или интегралами по времени. В противном случае математическую модель называют *нелинейной*.

Как правило, детальное описание свойств, состояний или характеристик систем приводит к нелинейным математическим моделям. Нелинейные составляющие математических моделей обычно отражают либо ограниченность энергетических ресурсов устройств системы, либо технологические дефекты их изготовления. Линейные модели чаще всего используют для более грубого (приближенного) описания систем,

что вполне допустимо на начальных этапах их проектирования и анализа.

12. *По используемой форме отображения* математические модели можно разделить на *нетипизированные* и *типизированные*. Последние представляют собой такие формы ММ, которые достаточно широко используются в математике и других науках для описания, исследования и проектирования систем. Они, как правило, являются исходными математическими моделями при разработке алгоритмов анализа и синтеза систем, поэтому их применение для указанных целей существенно облегчает решение данных задач. Они же обычно лежат в основе типового и специального программного обеспечения ЭВМ, ориентированного на решение указанных задач. В этой связи чаще всего отдаётся предпочтение именно типизированным математическим моделям систем.

4.4. Математическое описание структурных схем систем

Структурной схемой изделия или системы, согласно ГОСТ 2.701–84 (СЭВ 651–77), называют схему, определяющую основные функциональные части этого изделия или системы, их назначение и взаимосвязи. Её разрабатывают при проектировании системы на стадиях, предшествующих разработке схем других типов, и используют для общего ознакомления с системой, при изучении принципов её работы, анализе её состояний, свойств и/или при анализе протекающих в ней процессов.

На практике часто различают формальные и детальные структурные схемы (структуры) систем. Следует иметь в виду, что для реализации каждой фиксированной цели системы обычно может быть использовано ограниченное число формальных структур, а для простых систем зачастую даже только одна формальная структура. Последний случай имеет место, когда указанная цель реализуется с помощью небольшого числа функциональных элементов. Например, формальная структура часов включает, согласно [6], только два обязательных функциональных элемента – датчик времени Д и индикатор И. Кроме них может быть также (не всегда) и эталон времени Э (рис. 4.1).

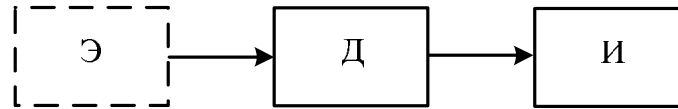


Рис. 4.1. Формальная структура часов

В то же время каждой формальной структуре, фактически являющейся логической структурой цели системы, может соответствовать достаточно большое число реальных структур. В вышеприведенном примере с часами таких реализаций действительно существует большое множество, причём основанное даже на различных физических принципах (механические, электронные, водяные, солнечные часы в различных исполнениях). Заметим, что математические проблемы анализа и синтеза возникают чаще всего при работе с детальными структурами систем.

Математическое описание структуры системы обычно производят в тех случаях, когда она достаточно сложна для анализа без её формализации, либо когда последующий анализ или синтез систем ориентирован на использование ЭВМ. Оно включает выявление и отражение состава системы, т.е. входящих в неё элементов, очерчивание границ системы с внешней средой, выявление действующих в системе структурных связей и их отражение в формализованном виде с использованием математических средств.

Структуры систем в настоящее время чаще всего описывают графами, матрицами смежности, инцидентий или с использованием других векторно-матричных отображений.

Графом называют [3, 11] упорядоченную тройку $G = (X, U, \psi)$, в которой X – непустое множество **вершин**; U – множество **рёбер**, а **отображение**

$$\psi: U \rightarrow X \overset{\rightarrow[2]}{\cup} X \overset{\leftrightarrow[2]}{\cup} X \overset{\circ[2]}{\cup} X$$

соотносит каждому ребру u элемент $\psi(u)$ одного из трёх непересекающихся множеств: множества $X \overset{\rightarrow[2]}{\cup} X$ упорядоченных пар различных вершин; множества $X \overset{\leftrightarrow[2]}{\cup} X$ неупорядоченных пар различных вершин и множества $X \overset{\circ[2]}{\cup} X$, элементы которого имеют вид $x_i x_i$, где $x_i \in X$.

В зависимости от того, к какому из трёх вышеуказанных множеств относится ребро графа $u \in U$, оно называется *дугой*, *звеном* или *петлёй*. При этом

$$\vec{U} = \left\{ u \in U : \psi(u) \in \vec{X}^{[2]} \right\} \quad (4.1)$$

называют множеством всех *дуг* графа $G = (X, U, \psi)$;

$$\vec{U} = \left\{ u \in U : \psi(u) \in \vec{X}^{[2]} \right\} \quad (4.2)$$

множеством всех *звеньев* графа и, наконец,

$$\overset{\circ}{U} = \left\{ u \in U : \psi(u) \in \overset{\circ}{X}^{[2]} \right\}$$

множеством всех *петель* графа $G = (X, U, \psi)$.

Если множество U рёбер графа не содержит элементов множества (4.2), то такой граф называют *ориентированным*, или сокращенно *орграфом*. Если же U не содержит множества (4.1), т. е. дуг, то граф называют *неориентированным* (*неографом*). В случае, когда среди рёбер графа имеются ориентированные и неориентированные, граф называют *смешанным*. При отсутствии у графа петель его вышеуказанные названия дополняют словами "*без петель*". Если число вершин и рёбер графа конечно, все его ребра не ориентированы и не параллельны и при этом среди них нет петель, то такой граф называют *обыкновенным*, а при невыполнении хотя бы одного из этих условий – *необыкновенным*. Если в графе имеются лишь ориентированные и некратные рёбра (дуги), то такой граф называют *диграфом*.

Из этих определений следует, что любой неограф или смешанный граф может быть представлен как орграф, если в нем каждое звено заменить двумя встречно направленными дугами, связывающими те же вершины, что и это звено.

Заметим, что структуры технических систем чаще всего отображаются обыкновенными графами или диграфами с конечным числом рёбер (дуг) и вершин.

Говорят, что вершина графа x и ребро u *инцидентны*, если $x \in \psi(u)$, где пара $\psi(u)$ есть множество элементов типа $x_i x_i$ или $x_i x_j$, где $i \neq j$. Считается, что дуга $x_i x_j$ *исходит* из вершины x_i

и *заходит* в вершину x_j . При этом вершины x_i и x_j называют *смежными*.

Граф $G^* = (X^*, U^*, \psi^*)$ называется *частью графа (частичным графом)* $G = (X, U, \psi)$, если он образован удалением из последнего части его вершин и/или рёбер, причём оставшиеся рёбра инцидентны только вершинам множества $X^* \subseteq X$.

Часть графа, получаемая из $G = (X, U, \psi)$ удалением только части рёбер последнего, называют *суграфом* графа $G = (X, U, \psi)$. Граф $G^* = (X^*, U^*, \psi^*)$ называется *подграфом* графа $G = (X, U, \psi)$, если $X^* \subset X$ и рёбра G^* являются всеми рёбрами графа G , концы которых подходят к вершинам X^* .

Основное достоинство отображения структур систем графами заключается в наглядности последних (если число вершин и дуг у графа относительно невелико). Подобное отображение может быть выполнено двумя способами:

а) в качестве вершин графа используются структурные элементы системы, а в качестве рёбер – их структурные связи;

б) в качестве рёбер отображаются структурные элементы системы, а вершины представляют собой связи (информационные, энергетические и/или материальные) между ними.

В первом случае граф системы называют *вершинным*, а во втором – *рёберным*. При описании структур систем автоматизации и управления используют оба указанных способа. Выбор вида описания определяется при этом той задачей, для которой формируется граф системы. В тех случаях, когда элементы системы или их основная часть обладают направленностью вход-выходных преобразований и предполагается использование графа для анализа функциональных возможностей системы, предпочтение отдают второму способу.

При большом числе функциональных элементов и структурных связей в системе графы теряют своё основное достоинство – наглядность. Анализ свойств таких систем по их графам существенно затрудняется. В этой связи в подобных случаях при математическом описании структур систем предпочтение отдают матричным или векторно-матричным способам, достоинствами которых является удобство их использования для анализа структур и обусловленных ими свойств систем на ЭВМ.

Наиболее часто для этих целей используют матрицы смежности, матрицы инцидентий и множественные представления.

Матрицей смежности, эквивалентной графу $G = (X, U, \psi)$ с мощностью множества вершин $n = \text{Card } X$ и мощностью множества дуг $m = \text{Card } U$, называют квадратную матрицу $A = [a_{ij}]$ размера $n \times n$, элементы которой a_{ij} равны 1, если в графе имеется дуга из вершины x_j в вершину x_i , и равны нулю – в противном случае. Однозначно описать смешанные и ориентированные графы можно было бы и матрицей смежности, при формировании которой использовалось бы другое правило, при котором a_{ij} принимается равным 1, если в графе имеется дуга из вершины x_i в вершину x_j , и равным нулю – в противном случае. Очевидно, что для неориентированного графа матрица смежности является симметрической.

Матрицей инцидентий, эквивалентной графу $G = (X, U, \psi)$ с мощностью множества вершин $n = \text{Card } X$ и мощностью множества дуг $m = \text{Card } U$, называют матрицу $B = [b_{ij}]$ размера $n \times m$, которая однозначно отражает все инцидентии ребер и вершин графа.

Для неориентированных графов элемент матрицы инцидентий $b_{ij} = 1$, если вершина x_i и дуга u_j инцидентны, и $b_{ij} = 0$ – в противном случае. У матрицы инцидентий ориентированного или смешанного графа чаще всего элемент b_{ij} принимают равным нулю, если вершина x_i не инцидентна ребру u_j ; равным минус 1, если из вершины x_i выходит дуга u_j ; равным 1, если эта дуга входит в вершину x_i или если ребро u_j является петлей при вершине x_i или звеном.

Для иллюстрации приведенных выше правил формирования матриц смежности и инцидентий составим их для графа, представленного на рис. 4.2.

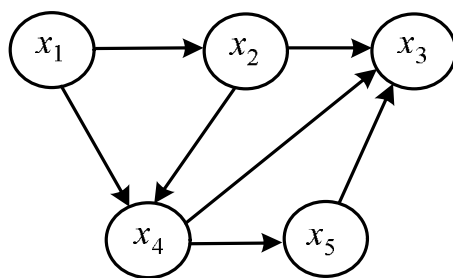


Рис. 4.2

Для этого графа матрица смежности

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

а матрица инцидентий

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

При описании структур сложных систем матрицами смежности или инцидентий значительная часть элементов этих матриц оказывается нулевыми. В этой связи применение таких матриц для структурного анализа сложных систем с использованием ЭВМ сопряжено с неэффективной затратой памяти машины. Частично этот недостаток указанных матриц может быть скомпенсирован за счёт учёта того факта, что для неориентированных графов матрицы смежности являются симметричными, и поэтому для их определения достаточно использовать верхнюю или нижнюю их треугольную блок-матрицу. В случае же ориентированного графа его матрица смежности несимметрична. При этом лишь для графов без контуров выбором принятой нумерации элементов (вершин графа) системы можно свести её матрицу смежности к треугольному виду.

Другим способом, компенсирующим указанный недостаток матриц смежности и инцидентий, является применение для их записи и обработки на ЭВМ математического аппарата *разреженных матриц* [14], который используется в инженерной практике при расчётах на ЭВМ, но пока сравнительно редко. В этой связи для сложных систем чаще используются другие способы матричного описания их структур.

В частности, применяют так называемые *множественные представления* [1], при которых для ориентированного графа задают множество его вершин $x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$ и множество правых $L(x_i)$ или левых $L^{-1}(x_i)$ соответствий для них. При этом $L(x_i)$ определяет

множество вершин графа, в которые можно непосредственно (по одной дуге) попасть из x_i , а $L^{-1}(x_i)$ – множество вершин графа, из которых можно непосредственно попасть в x_i . Соответствие $L(x_i)$ называют также *множеством правых инцидентий*, а $L^{-1}(x_i)$ – *множеством левых инцидентий* для вершины x_i . Подобные множественные представления легко определяются по заданному графу. В частности, для приведенного на рис. 4.2 графа имеем:

$$L(1) = 2, 4; \quad L(2) = 3, 4; \quad L(3) = 5; \quad L(4) = 3, 5; \quad L(5) = 3;$$

$$L^{-1}(1) = \emptyset; \quad L^{-1}(2) = 1; \quad L^{-1}(3) = 2, 4, 5; \quad L^{-1}(4) = 1, 2; \quad L^{-1}(5) = 3, 4.$$

Для подобного описания структурных схем характерно несимметричное представление исходных данных (массивов), что неудобно для хранения и обработки этой информации на ЭВМ. Поэтому более предпочтительными являются другие способы матричного описания структурных схем систем.

Эквивалентным описанию структурных схем систем множественными представлениями $L(x_i)$ и $L^{-1}(x_i)$ по используемой памяти ЭВМ является их описание матрицей S_0 размера $m \times 3$, где m – число рёбер графа [8]. Первый столбец такой матрицы формируется из номеров всех рёбер эквивалентного данной системе графа. Во втором столбце каждой строки указывается номер вершины, из которой выходит указанное в этой строке ребро, а в третьем – номер вершины, куда оно входит. Для графа, приведенного на рис. 4.2, эта матрица принимает вид

$$S_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

В этой матрице звено 7 описываемого ею графа заменено двумя противоположно направленными дугами 7 и 8.

Подобное представление информации о графе системы удобно для автоматизации его анализа на ЭВМ, так как позволяет реализовывать программное обеспечение на основе обработки матрично представленных массивов минимальной размерности, в которых к тому же нет нулевых элементов.

Отображения информации о графах систем матрицами смежности, инцидентий и дробными представлениями применимы фактически лишь для описания структур нереконфигурируемых систем. Если же структура системы меняется в процессе функционирования, то всё множество структурных связей такой системы необходимо разбить на два подмножества, одно из которых включает в себя неизменные связи в системе, а второе – те, что коммутируются при ее функционировании. Описать текущее состояние последних (связь есть или отсутствует) можно, в частности, используя булевы переменные, текущие значения которых в рассматриваемое время принимаются равными 1, если описываемая связь имеется, и равными нулю, если связь отсутствует. Для некоммутируемых связей в системе подобные переменные могут быть приняты всегда равными 1. Тогда текущее состояние связей между элементами системы может быть описано вектором вышеуказанных булевых переменных $s_v(t) \in S_v \subset B^m$. Если таким вектором-столбцом дополнить справа вышеопределенную матрицу S_0 , т. е. ввести матрицу $S(t) = [S_0 | s_v(t)]$, то последняя будет определять текущий граф $G(t)$ описываемой системы. Данный способ особенно удобен для описания структур логико-обыкновенных систем и систем с событийными и событийно-временными процессами.

Следует заметить, что описанные выше графы систем и их матричные отображения используются чаще всего на этапе макропроектирования при решении вопросов, связанных с выбором структуры системы, или на этапе предварительного анализа свойств систем. Они находят также применение при математическом описании процессов в сложных системах и отображении структур математических моделей систем с целью исследования потенциальных свойств описываемых этими моделями систем при различных их параметрических настройках. Кроме того, информация о структуре системы, заданная в виде графа или матриц, оказывается необходимой для анализа некоторых свойств и характеристик систем, например для оценки их надежности, живучести.

4.5. Математическое описание состояний и процессов в системах

Одним из основополагающих понятий в теории систем является понятие «состояние». В силу фундаментальности этого понятия для систем ниже приводится несколько введенных для него определений. Под *состоянием системы* в [4] предложено понимать тот «наименьший набор чисел, который необходимо точно определить в момент $t = t_0$, чтобы была возможность предсказать поведение системы в любой момент времени $t \geq t_0$. Другими словами, состояние системы – это кратчайшая «запись» ее прошлой истории, необходимая для предсказания будущего «поведения». Аналогичный смысл в понятие состояния вкладывается и в [12], где утверждается, что «состояние системы – это абстракция соответствующей информации, необходимой для описания ее будущих действий». Процесам в системах соответствуют изменения во времени их состояний.

Строгое определение состояния применительно к динамическим (точнее, инерционным) системам было введено Р. Калманом [5]. По этому определению *динамической* называется система, математическая модель которой включает множество моментов времени T , множество состояний X , образующих *пространство состояний системы*, множество мгновенных значений входных воздействий U , множество допустимых входных функций $\Omega = \{\omega: T \rightarrow U\}$, множество мгновенных значений выходных величин Y и множество выходных функций $\Gamma = \{\gamma: T \rightarrow Y\}$. Предполагается, что при этом выполняются следующие условия:

1) множество T есть упорядоченное подмножество множества R действительных чисел;

2) множество входных функций Ω не пусто и подчиняется аксиоме сочленения входных воздействий, согласно которой если $\omega, \omega' \in \Omega$ и $t_1 < t_2 < t_3$, то найдется такое входное воздействие $\omega'' \in \Omega$, что

$$\omega''(t_1, t_2) = \omega(t_1, t_2) \text{ и } \omega''(t_2, t_3) = \omega'(t_2, t_3);$$

3) существует переходная функция состояния $\psi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$, значениями которой служат состояния $x(t) = \psi(t; \tau, x, \omega) \in X$, в которых оказывается система в момент времени $t \in T$, если в начальный

момент времени $\tau \in T$ она была в начальном состоянии $x = x(\tau) \in X$, и если на нее действовало входное воздействие $\omega \in \Omega$. При этом

а) функция ψ определена для всех $t \geq \tau$;

б) равенство $\psi(t; t, x, \omega) = x$ выполняется при любых $t \in T$, $x \in X$ и $\omega \in \Omega$;

в) для любых $t_1 < t_2 < t_3$ и любых $x \in X$ и $\omega \in \Omega$ имеем

$$\psi(t_3; t_1, x, \omega) = \psi(t_3; t_2, \psi(t_2; t_1, x, \omega), \omega);$$

г) если $\omega, \omega' \in \Omega$ и $\omega(\tau, t) = \omega'(\tau, t)$, то

$$\psi(t_3; \tau, x, \omega) = \psi(t_3; \tau, x, \omega');$$

4) существует выходное отображение $\eta: T \times X \rightarrow Y$, определяющее выходную величину $y(t) = \eta(t, x(t))$, такое, что при $\sigma \in (\tau, t]$ отображение $\eta(\sigma, \psi(\sigma; \tau, x, \omega))$ является выходным отрезком, т. е. отрезком $\gamma(\tau, t]$ выходной функции, которая задана на интервале $(\tau, t]$.

Приведенное здесь определение динамической системы и ее состояния в равной мере применимо как для систем с непрерывным, так и для систем с дискретным временем. При этом входы, состояния и выходы могут быть определены как на поле действительных и/или комплексных чисел, так и на конечномерных их множествах, а также на элементах булевой и/или многозначной логики. Иными словами, эти определения применимы не только для обыкновенных, но и для логических, логико-обыкновенных систем. Они остаются справедливыми и для стационарных, и для нестационарных систем. Столь общее определение динамической (инерционной) системы является таковым, прежде всего, благодаря общности введенного понятия «состояние системы». Оно широко используется в теории подобных систем, в методе пространства состояний [2, 16], при описании и исследовании процессов в системах, математические модели которых представляют собой совокупности дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных и/или разностных уравнений. Введенное выше определение «состояние системы» чаще всего является конечномерным, то есть число составляющих вектора x конечно. Для ряда систем оно может быть и бесконечномерным, в частности для систем с распределенными параметрами.

В настоящее время в научных исследованиях и инженерной практике наиболее широкое применение находят математические мо-

дели стационарных нереконфигурируемых и непереалгоритмизуемых систем. Модели, описывающие состояния и процессы в таких системах, включают в себя переменные, которые могут быть названы **координатным состоянием системы**.

Применительно к сложным системам, в которых в процессе функционирования происходят изменения не только координат и параметров, но и структурных связей между отдельными элементами системы и имеются устройства, переалгоритмизуемые в процессе работы системы (в частности, встроенные микропроцессоры и ЭВМ), минимально необходимый для характеристики состояний и процессов набор данных можно отобразить множеством

$$X = X_k \cup X_p \cup X_c \cup X_a,$$

в котором

X_k – множество, характеризующее координатное состояние системы (или сокращенно – координатное состояние);

X_p – множество, характеризующее параметрическое состояние системы;

X_c – множество, характеризующее структурное состояние;

X_a – множество, характеризующее алгоритмическое состояние системы.

При этом под **параметрическим состоянием** следует понимать совокупность всех величин, которые необходимы для описания взаимодействия входных воздействий, остальных множеств состояний (X_k , X_c и X_a) и выходов системы. Например, в электрической системе (цепи, состоящей из RLC -элементов) под параметрами понимают значения сопротивлений, индуктивностей и ёмкостей.

В математических моделях, описывающих состояния и процессы в системах, параметры образуют, как уже отмечалось выше, все множество коэффициентов уравнений и/или неравенств этих моделей.

Под **координатным состоянием** системы понимают такие величины, которые входят в описывающие ее состояния математические модели и которые в математике, например в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, относят к множеству переменных. Заметим, что в математике и в данной книге при этом под переменными понимается все множество величин, характеризующих вход-выходные связи в описываемой системе.

Под *структурным состоянием* системы следует понимать все то множество данных, которое необходимо для характеристики структурных связей между элементами системы, которые имеют место при описываемых состояниях или процессах в системе.

Как правило, при описании состояний и процессов в системах в математические модели этих состояний или процессов вводят лишь описания меняющихся во времени связей между элементами системы. Постоянно действующие связи отображаются при этом либо определением выходов предыдущих в последовательной цепи элементов и входов последующих за ними элементов одним и тем же математическим символом, либо (в случае отображения этих входов и выходов разными математическими символами) добавлением в математические модели уравнений, отражающих равенства этих величин. При этом последний вариант из-за тривиальности таких уравнений используется очень редко.

Для описания систем с переменной структурой могут использоваться переменные X_c , включающие в себя информацию о меняющихся структурных связях в системе. Например, подобный вариант был рассмотрен при матричном описании структурных схем систем с переменной структурой в разделе 4.4.

Алгоритмическим состоянием X_a с учетом ранее введенных понятий следует называть ту совокупность данных о системе, которая необходима для характеристики используемого в рассматриваемый отрезок времени набора задействованных алгоритмов в переалгоритмизуемых частях системы.

Следует заметить, что при математическом описании состояний и процессов в системах с переменными параметрами, структурными связями и алгоритмами в состав X_{Π} , X_c и X_a обычно включают лишь те величины, которые отражают, соответственно, только изменяющиеся параметры, структурные связи и алгоритмы. Тем самым обеспечивается упрощение формируемых математических моделей.

Ниже сосредоточим своё внимание на математическом описании состояний и процессов в технических системах, ориентируясь при этом, прежде всего, на объекты и системы автоматизации и управления. При описании состояний и процессов в таких объектах и системах обычно придерживаются следующей последовательности процедур.

1. Определяют цели (или цель) функционирования описываемой системы, её элементный состав и изучают принципы её работы.

2. Определяют всё множество режимов функционирования системы и уточняют её цели (функции) для каждого из этих режимов. Уточняют, какие из этих режимов или переходы между ними подлежат математическому описанию.

3. Разбивают систему на функциональные элементы и строят её структурную схему с указанием всех неизменяемых и изменяемых структурных связей в системе при переходах с одного режима на другой и/или обеспечении каждого отдельного режима, математическое описание которого планируется вести.

4. Обозначают все сигналы, циркулирующие в системе по каналам структурных связей. При этом каждый вход последующего и выход предыдущего функциональных устройств, последовательно соединённых между собой, обозначают одним и тем же символом.

5. Определяют внешние воздействия на систему (воздействия на неё внешней среды) и разделяют их на две группы: полезные (в системах управления – управляющие) и возмущающие $f(t)$. К первой относят все те воздействия на систему, которые целенаправленно прикладываются к системе для достижения поставленных перед ней целей, а ко второй – все те, которые препятствуют достижению этих целей. То же самое производят и для отдельных элементов системы.

6. Определяют состояния и/или процессы, соответствующие подлежащим математическому описанию режимам функционирования, и предъявляемые к ним требования. Эти требования формализуют и формулируют в виде математических выражений типа критериев и ограничений. При этом качестве критериев обычно выступают функционалы от внутренних и/или выходных переменных систем, значения которых необходимо максимизировать или минимизировать. Ограничения сводятся обычно к неравенствам, включающим в себя входные, внутренние и/или выходные переменные систем. Часто в качестве таковых выступают и неравенства типа

$$|x| \leq x_m; \quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max}; \quad x \in X \subset R,$$

указывающие на ограниченность переменной x .

7. Описывают состояния и/или процессы в каждом из функциональных устройств, используя известные физические законы, действующие в данном устройстве. Они обычно отражаются в составляемых уравнениях в форме баланса токов, напряжений в электрических цепях; баланса входящих и выходящих материальных потоков в объектах химического производства; баланса сил, моментов, энергии и т. п. В

процессе подобного описания функциональных устройств вводят для них, если это окажется необходимым, внутренние (промежуточные) переменные и параметры.

Описание процессов в функциональных элементах ведут применительно к конкретным режимам функционирования системы. При этом различают статические и динамические режимы. Первые описываются алгебраическими уравнениями и/или неравенствами, вторые – совокупностью уравнений и/или неравенств, среди которых минимум одно дифференциальное, интегральное или разностное хотя бы первого порядка.

Если есть возможность описать несколько режимов одной и той же математической моделью, используют эту особенность функциональных устройств и формируют единую для каждого из них математическую модель, уточняя для каждого из режимов лишь критерии и типы, уровни входных воздействий. В противном случае для каждого интересующего режима работы системы составляют свои математические модели функциональных устройств. Аналогичным образом поступают и при математическом моделировании совокупности режимов описываемой системы в целом.

Аналитическое описание состояний и/или процессов в некоторых функциональных устройствах систем лишь на основе априорных сведений о принципах его работы часто оказывается затруднительным. При этом не удастся найти подходящие для них математические модели и в описывающих эти устройства литературных источниках. В таких случаях проводят *идентификацию* этих устройств, организуя их экспериментальные исследования и определенным способом обрабатывая их результаты [17], в том числе с использованием теории планирования экспериментов [10], чтобы в конечном итоге была сформирована математическая модель этого устройства.

Полученные после описания всех функциональных устройств системы и их структурных связей уравнения и неравенства и будут отражать рассматриваемые режимы работы системы, являться их математической моделью. Их дополняют совокупностью критериев и ограничений, накладываемых на процессы в системе в этих режимах. Критерии в последующем используют для сопоставительного анализа различных вариантов реализации системы или для оптимизации протекающих в ней процессов.

4.6. Математическое описание свойств и характеристик систем

Вся совокупность свойств систем, представляющих практический интерес при решении задач их анализа и синтеза, может быть разложена на следующие группы:

- свойства, характеризующие систему с общесистемных позиций;
- свойства, характерные для класса систем одного и того же функционального назначения и отражающие качественные особенности конкретных реализаций систем данного класса.

К свойствам первой группы относятся, в частности, инерционность, устойчивость, надёжность, живучесть [9, 13]. Ко второй группе свойств, например для управляемых систем, можно отнести такие важные их свойства, как управляемость, наблюдаемость, автономизируемость, функциональная воспроизводимость [17].

В настоящее время далеко не для всех свойств, существенных для анализируемых или синтезируемых систем, предложены и развиты их математические определения и количественные показатели (меры). В этой связи для оценки таких свойств систем математические модели не формируются и не используются. Последние используются для оценки лишь тех свойств, квалиметрия (математическое описание и количественные показатели) которых уже развита.

Вся совокупность количественно оцениваемых свойств систем чаще всего базируется в этой оценке на математических моделях систем, отражающих их структуру, состояния и/или процессы. Математический анализ таких свойств сводится к выбору количественных мер этих свойств из числа известных и формированию совокупности таких математических моделей, анализ которых обеспечивает расчёт вышеуказанных количественных мер. При этом в ряде случаев для этого достаточно использования моделей лишь одного типа, например моделей динамики системы. В частности, подобная ситуация имеет место при оценке устойчивости систем, их наблюдаемости, управляемости, достижимости, восстанавливаемости, автономизируемости. Аналогично ныне оценивается надёжность систем. Для этого используется обычно лишь информация о структуре рассматриваемой системы, т. е. ее структурная модель.

В других случаях оценка свойств анализируемой системы может потребовать одновременного использования математических моделей, описывающих как статические, так и динамические режимы работы системы (например, при анализе точностных свойств или маневрен-

ности систем управления), или же использования совокупности математических моделей, описывающих структуру системы, ее статические состояния и динамику (в частности, при оценке отказоустойчивости, живучести систем).

Оценка многих свойств анализируемых систем проводится в комплексе с оценкой их состояний и процессов. Поэтому, в связи с вышесказанным, она может и не потребовать формирования дополнительных математических моделей по сравнению с теми, что требуются для оценки состояний и процессов. Если же анализ системы предусматривает комплексное исследование систем по совокупности свойств, то это может потребовать и формирования дополнительных моделей (например, описания структурных схем и возможных их вариаций).

Специфические математические модели могут потребоваться для анализа весогабаритных характеристик систем и их энергопотребления. В подобных случаях для анализа таких характеристик формируются математические модели, отражающие по своей сути сводный баланс энергопотребления, весов или габаритов отдельных подсистем или элементов системы. Если при этом предусматривается использовать данные модели для решения задач минимизации характеристик указанного выше типа, то в этих моделях отражается зависимость указанных характеристик элементов или устройств системы от их параметров, которые могут допускать изменения и подлежат окончательному выбору после такой минимизации.

4.7. Основные типы математических моделей, описывающих системные свойства, состояния и/или процессы

После формирования математической модели системы, которая описывает интересные свойства, состояния и/или процессы в этой системе, определяют, к какому типу относится данная модель. Для этого используют различные классификационные признаки, по которым обычно классифицируются математические модели. Перечислим некоторые из этих классификационных признаков и соответствующие им классы математических моделей.

1. **По типу используемых в модели переменных.** Различают модели с переменными целого, вещественного, комплексного и/или логического типа. Если анализируемая модель не содержит переменных логического типа, то такую модель следует называть *моделью с пере-*

менными обыкновенного типа. Если модель содержит только переменные логического типа, то эту модель следует отнести к классу *моделей логического типа.* При одновременном присутствии в модели и обыкновенных, и логических переменных эта модель и соответствующая ей система должны быть отнесены к классу *логико-обыкновенных.*

2. *По характеру зависимости от времени.* По этому признаку следует различать *статические и динамические модели (модели статики или динамики).* Если все переменные и параметры в математической модели не зависят от времени, то такую модель принято называть статической, или моделью статики системы. Если же в модели отражено изменение во времени хотя бы одного параметра или же присутствует хотя бы одна производная или один интеграл по времени любого порядка от какой-либо переменной; или же присутствует, наряду с решетчатыми функциями от переменных системы, хотя бы одна разность любого порядка хотя бы одной из переменных; или, наконец, присутствуют решетчатые функции от переменных с различными аргументами, то соответствующую модель следует отнести к классу динамических.

3. *По типу вхождения в модель внутренних и выходных переменных.* По этому признаку различают *модели линейные и нелинейные.* К первым относят такие математические модели, у которых все переменные, их производные любого порядка, интегралы от них любой кратности или разности соответствующих им решетчатых функций входят во все уравнения линейно, т. е. в виде простых слагаемых в первой степени и с коэффициентами, не зависящими от вышеперечисленных компонентов. Во всех остальных случаях модели систем и сами системы принято называть нелинейными.

4. *По типу параметров.* Различают модели (и системы) *стационарные и нестационарные.* К первым относят модели, у которых ни один коэффициент ни в одном из уравнений модели не зависит от времени. Если это условие не выполняется, то модель и соответствующую систему принято называть нестационарными.

5. *По типу входящих в модель производных и интегралов.* Если все входящие в уравнения ММ производные и интегралы определяются в зависимости от времени, то соответствующая этой модели система относится к классу *систем с сосредоточенными параметрами.* Если же в модели системы присутствуют частные производные и интегралы по какому-либо параметру или переменной, то соответствующую этой

модели систему называют *системой с распределенными параметрами*.

6. *По типу аргументов*. Чаще всего зависимости от времени всех переменных параметров и координат в моделях динамики оказываются представленными в ММ в функции одного и того же аргумента – текущего момента времени. Это время может быть непрерывным, т. е. $t \in T = [t_1, t_2] \subseteq R$, или же дискретным. В последнем случае обычно $t = nT_0$, где T_0 – период дискретизации, а $n \in [n_1, n_2] \subseteq N$, т. е. множеству натуральных чисел. В указанных случаях математическую модель относят к классу *моделей с несмещенными аргументами*. Если же в модели присутствуют хотя бы две переменные с различными аргументами или одна и та же переменная с различными аргументами, то такую модель принято называть *моделью со смещенными аргументами*.

Обычно подобные смещенные аргументы имеют место в моделях импульсных и/или цифровых систем, когда для описания состояний или процессов в таких системах используются разностные уравнения, записанные не относительно решетчатых функций и их разностей, а только относительно решетчатых функций. Например, вместо уравнения

$$a_2 \Delta^2 x [nT] + a_1 \Delta x [nT] + a_0 x [nT] = 0$$

записывают эквивалентное ему уравнение

$$b_2 x [(n+2)T] + b_1 x [(n+1)T] + b_0 x [nT] = 0.$$

Подобный переход обеспечивается заменой разностей любого порядка разностями более низкого порядка, а разности первого порядка $\Delta x [nT]$ – эквивалентным ей значением $x[(n+1)T] - x[nT]$.

Другой причиной появления в математических моделях динамики систем смещенных аргументов является необходимость отражения в них эффектов чистого запаздывания и экстраполяции (предсказания). В частности, это может быть при отражении запаздывания в передаче сигналов на большие расстояния (например, при обмене сигналами с межпланетными космическими аппаратами), тактового запаздывания в работе ЦВМ или же при прогнозировании местоположения подвижного объекта через заданный момент времени. При этом если переменные x и y связаны между собой соотношением

$$y(t \pm \tau) = x(t),$$

то это означает, что зависимость от времени у переменной y аналогична изменениям $x(t)$, но отстает (если знак $+$) или опережает (если знак $-$) его на время τ .

Контрольные вопросы

1. Что понимают под математическим моделированием?
2. Чем определяется сложность математического описания систем?
3. Каковы основные типы (классы) математических моделей систем?
4. Что понимается под структурной схемой системы?
5. Чем описываются структурные схемы систем?
6. Что понимают под графом системы?
7. Что называют матрицей смежности и матрицей инцидентий системы?
8. Что такое множественное представление системы? Каковы его разновидности?
9. Что понимают под координатным, параметрическим, структурным и алгоритмическим состоянием системы?
10. Как классифицируются математические модели систем?

Список литературы к главе 4

1. *Денисов А. А., Колесников Д. Н.* Теория больших систем управления: учеб. пособие для вузов. – Л.: Энергоиздат, 1982.
2. *Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч.* Пространство состояний в теории управления. – М.: Наука, 1970.
3. *Зыков А. А.* Основы теории графов. – М.: Вузовская книга, 2004.
4. *Калман Р.* Об общей теории систем управления / В кн.: Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем: Труды I Международного конгресса ИФАК. Т.2. – М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 521–547.
5. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.
6. *Кориков А. М., Сафьянова Е. Н.* Основы системного анализа и теории систем. – Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1989.

7. *Левин В. И.* Введение в динамическую теорию конечных автоматов. – Рига: Зинатне, 1975.
8. *Малышенко А. М.* Системы автоматического управления с избыточной размерностью вектора управления. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2005.
9. Надежность технических систем: справочник / под ред. *И. А. Ушакова*. – М.: Радио и связь, 1985.
10. *Налимов В. В., Чернова Н. А.* Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука, 1965.
11. *Оре О.* Графы и их применение. – 4-е изд. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
12. *Питерсон Дж. Л.* Теория сетей Петри и моделирование систем. – М.: Мир, 1984.
13. *Подлесный Н. И.* Живучесть систем управления с микро-ЭВМ. – Киев: Вища школа, 1989.
14. Системы автоматизированного проектирования. В 9-ти кн. Кн. 4. Математические модели технических объектов: учеб. пособие для вузов / *В. А. Трудоношин, Н. В. Пивоварова*; под ред. *И. П. Норенкова*. – М.: Высшая школа, 1986.
15. *Бахвалов Л. А.* Моделирование систем: учебное пособие. – М.: Изд-во МГГУ, 2006.
16. *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. – М.: Наука, 1985.
17. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

5.1. Линеаризация математических моделей

Исследование свойств, характеристик, состояний или процессов в системах по нелинейным математическим моделям (ММ) существенно сложнее, чем по линейным. Поэтому там, где это допустимо по соображениям точности проводимого анализа, стремятся упростить математическую модель, линеаризуя её. Обычно линеаризованные модели, как более грубые по соображениям точности, используются на начальных этапах проектирования или при первых оценочных анализах систем.

Процедура линеаризации математической модели может быть осуществлена различными методами. Какой из них можно использовать в каждом конкретном случае зависит от того, в каком виде представлена исходная информация о вход-выходных связях, состояниях или процессах в анализируемой системе – в аналитической форме или графическими зависимостями.

Рассмотрим применяемые чаще всего методы линеаризации.

Первый метод. Он базируется на разложении нелинейных слагаемых математических моделей в ряд Тейлора [1, 3, 6].

Будем полагать, что в ММ есть аналитическая слагаемая $y = f(x)$, где x – какая-либо из внутренних или выходных переменных системы, и что эта слагаемая в рабочей области (вблизи значения $x = x_0$) является однозначной, непрерывной и гладкой функцией. Пусть соответствующая $y = f(x)$ зависимость имеет вид, представленный на рис. 5.1.

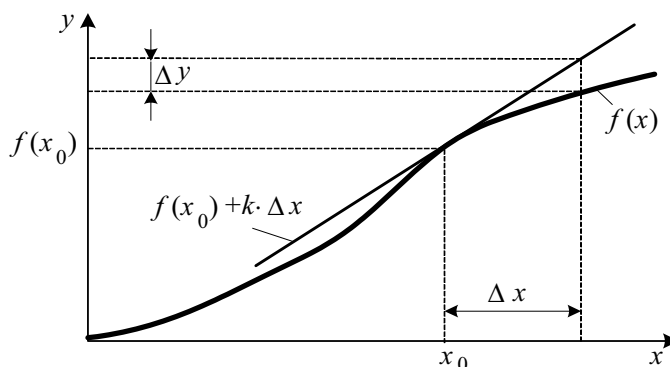


Рис. 5.1. Линеаризация первым методом

Линеаризация такой зависимости – это замена её линейной функцией $y = kx + c$, т. е. прямой линией в плоскости (x, y) , относительно близкой к исходной зависимости $y = f(x)$. Таких линий может быть выбрано достаточно большое число. Недостаток замены $f(x)$ произвольно выбранной прямой линией в том, что при её использовании невозможно в последующем делать категорические суждения о некоторых свойствах системы, например об устойчивости её состояний или протекающих в ней процессов. Именно по этой причине значительно чаще отдают предпочтение линеаризации с использованием разложения нелинейной функции в ряд Тейлора. Она применима лишь в тех случаях, когда $f(x)$ представляет собой в рабочей области гладкую, однозначную, непрерывную функцию своего аргумента. При этом если $f(x)$ при $|x - x_0| \leq r$ имеет все производные по x , то на любом промежутке $|x - x_0| \leq q \leq r$ функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Тейлора, т. е. представлена в виде

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0) \cdot (x - x_0), \quad (5.1)$$

где $0! = 1$ и $f^{(0)} = f(x_0)$, $f^{(m)}(x_0) = \frac{d^m f(x)}{dx^m}$ при $x = x_0$.

Линеаризация в этом случае эквивалентна замене $f(x)$, представленной в виде (5.1), выражением

$$y = f(x_0) + k(x - x_0), \quad (5.2)$$

где $k = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$ – частная производная $f(x)$ в точке разложения (линеаризации) $x = x_0$.

Геометрическая интерпретация такой линеаризации отражена на рис. 5.1. Она сводится к замене исходной нелинейной зависимости $y = f(x)$ прямой линией, касательной к $f(x)$ в точке, соответствующей $x = x_0$. Отсюда ясно, что подобная замена нелинейной зависимости линейной вида (5.2) будет давать при последующем анализе меньшую погрешность в тех случаях, когда $\Delta x = x - x_0$ относительно невелико и когда $f(x)$ меняется в окрестности точки линеаризации $x = x_0$ относительно плавно.

Если имеется нелинейность в виде функции нескольких переменных вида

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (5.3)$$

удовлетворяющая условиям гладкости, однозначности и непрерывности в рабочей области (около $x_i = x_0, i = \overline{1, n}$), то линеаризация по Тейлору эквивалентна ее замене вида

$$y = f(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x_0} \cdot \Delta x_i, \quad (5.4)$$

где

$$\Delta x_i \triangleq x_i - x_{i0}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь линеаризация сводится к замене нелинейной функции (5.3) гиперплоскостью, касательной к поверхности $f(x)$ в точке $x = x_0$ n -мерного ортогонального пространства $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Подобным образом проводят линеаризацию всех тех нелинейных составляющих, которые это допускают и замена которых линейными зависимостями не порождает недопустимых погрешностей при последующем анализе. Аналогично линеаризуются и динамические нелинейности, т. е. такие нелинейные функции, среди аргументов которых имеются производные или интегралы любого порядка от координат системы. В этом случае входящие в нелинейные функции производные или интегралы следует отнести к группе аргументов $x_i, i \in \overline{1, n}$ в (5.4).

Приведем примеры линеаризации моделей по этому способу.

Пример 5.1. Исходное нелинейное уравнение записано в виде

$$0,5 \frac{dy}{dt} + y^2 = 30x_1 \cdot x_2^3 + 10x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2, \quad (5.5)$$

т. е. имеет три нелинейных составляющих.

Линеаризацию (5.5) проведем в окрестности точки статического состояния (при этом $dy/dx \equiv 0$) с координатами

$$x_1 = x_{10} = 2; \quad x_2 = x_{20} = 1; \quad x_3 = x_{30} = 4. \quad (5.6)$$

Линеаризованная в соответствующем (5.6) состоянии модель будет иметь следующий вид:

$$0,5 \frac{dy}{dt} + y_0^2 + 2 y_0 \cdot \Delta y = 30 x_{10} x_{20}^3 + 10 x_{10} x_{20} x_{30}^2 + 190 \Delta x_1 + 160 \Delta x_3 = 380 + 190 \Delta x_1 + 500 \Delta x_2 + 160 \Delta x_3. \quad (5.7)$$

Пример 5.2. Угловые движения космического аппарата при его полете в космическом пространстве описываются следующими нелинейными уравнениями (уравнениями Эйлера):

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{J_3 - J_2}{J_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{M_1(t)}{J_1}; \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{J_1 - J_3}{J_2} \omega_3 \omega_1 + \frac{M_2(t)}{J_2}; \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= \frac{J_2 - J_1}{J_3} \omega_2 \omega_1 + \frac{M_3(t)}{J_3}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь ω_i , J_i , M_i , $i \in \overline{1, 3}$ – соответственно, угловая скорость, момент инерции и суммарный действующий момент вращения относительно i -й главной оси аппарата.

Уравнения в (5.8) нелинейны, так как в их правых частях имеются произведения угловых скоростей. Они удовлетворяют условиям разложения нелинейных составляющих в ряд Тейлора.

Будем полагать, что линеаризация производится при $\omega_i = \omega_{i0}$, $i \in \overline{1, 3}$. Тогда каждое из уравнений системы (5.8) после линеаризации может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_i}{dt} &= \frac{J_{i-1} - J_{i+1}}{J_i} \cdot \omega_{i-1,0} \cdot \omega_{i+1,0} - \\ &- \frac{J_{i-1} - J_{i+1}}{J_i} \cdot \omega_{i-1,0} \cdot \Delta \omega_{i+1} - \frac{J_{i-1} - J_{i+1}}{J_i} \cdot \omega_{i+1,0} \cdot \Delta \omega_{i+1} + \frac{M_i(t)}{J_i}, \end{aligned}$$

где $i \in \overline{1, 3}$ и при этом $i-1$, i , $i+1$ принадлежат циклической последовательности следующего вида: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, Например, если $i = 2$, то $i-1 = 1$, а $i+1 = 3$; если $i = 3$, то $i-1 = 2$, $i+1 = 1$.

Модель (5.8) часто записывают, используя векторные отображения угловой скорости аппарата и действующего на него вращающего момента. Для подобной записи введем следующие обозначения:

$$\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T; \quad M = [M_1, M_2, M_3]^T;$$

$$g = \begin{bmatrix} g_1(\omega) \\ g_2(\omega) \\ g_3(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_3 - J_2}{J_1} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \\ \frac{J_1 - J_3}{J_2} \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 \\ \frac{J_2 - J_1}{J_3} \cdot \omega_2 \cdot \omega_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Тогда (5.8) можно записать в виде векторного нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega}{dt} = -g(\omega) + B \cdot M(t), \quad (5.10)$$

в правой части которого имеется нелинейная вектор-функция $g(\omega)$, определенная согласно (5.9).

Линеаризация (5.10) с использованием разложения $g(\omega)$ в ряд Тейлора в окрестности $\omega = \omega_0$ приводит к следующему линейному векторно-матричному уравнению:

$$\frac{d\omega}{dt} = -g(\omega_0) - K \cdot \Delta\omega(t) + B \cdot M(t),$$

в котором матрица (якобиан)

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \omega_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \omega_2} & \frac{\partial g_1}{\partial \omega_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \omega_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial \omega_1} & \frac{\partial g_3}{\partial \omega_2} & \frac{\partial g_3}{\partial \omega_3} \end{bmatrix}$$

определяется при $\omega = \omega_0$.

Второй метод линеаризации математических моделей систем, заданных в аналитической форме, не предусматривает операций определения частных производных. Он сводится к подстановке в исходные нелинейные уравнения вместо всех внутренних и выходных перемен-

ных систем z_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ их значений, выраженных через сумму $z_{i0} + \Delta z_i$, где z_{i0} – их значения в опорном состоянии или при опорном движении, а Δz_i – текущее отклонение от этого опорного значения z_{i0} . Полагаем при этом, что отклонения Δz_i существенно меньше z_{i0} . После такой подстановки в математической модели будут 3 группы составляющих, зависящих от переменных z_i :

- не содержащие отклонений Δz_i ;
- содержащие Δz_i только в виде простых сомножителей в первой степени;
- содержащие произведения, дроби или степени с Δz_i .

После этого процедура линеаризации модели сведется лишь к исключению из уравнений нелинейных слагаемых, отнесенных выше к третьей группе.

Третий метод линеаризации ориентирован на те случаи, когда нелинейные зависимости математической модели заданы графически. Если при этом имеет место нелинейная связь типа

$$y = f(x) \quad (5.11)$$

и x – какая-либо из внутренних или выходных переменных системы является скалярной величиной, то линейную модель для такой связи можно получить, взяв уравнение касательной к зависимости $y = f(x)$ при опорном состоянии $x = x_0$ (рис. 5.1). Тогда линейная функция, соответствующая (5.11), будет описываться согласно (5.2). Коэффициент пропорциональности k в этом случае может быть определен по формуле

$$k = \frac{m_y}{m_x} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

где m_y и m_x – соответственно, масштабные коэффициенты, использованные при построении зависимости $y = f(x)$, а α – угол наклона касательной к соответствующей этой функции линии при $x = x_0$.

Довольно часто график функции двух аргументов типа $y = f(x_1, x_2)$ отображается на плоскости, как это показано на рис. 5.2, т. е. в виде графических зависимостей y от одного из аргументов при фиксированных значениях другого аргумента.

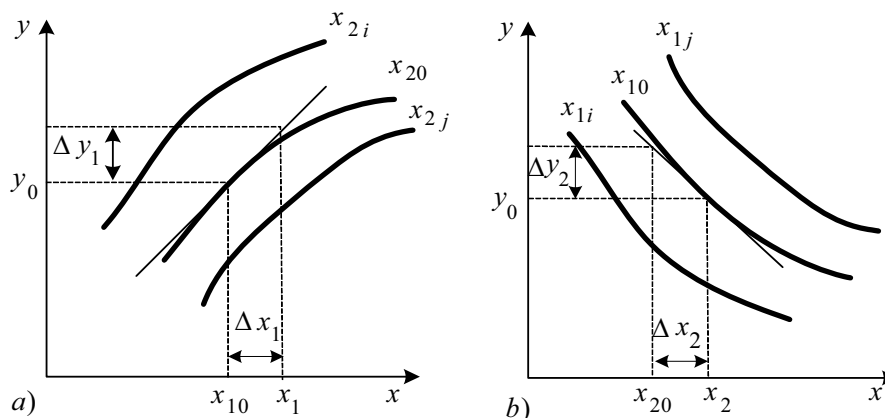


Рис. 5.2. Линеаризация третьим методом

Если указанная графическая зависимость удовлетворяет условию гладкости, непрерывности и однозначности в окрестности рабочей точки (x_{10}, x_{20}) , то линеаризацию данной зависимости можно осуществить заменой ее линейным уравнением

$$y = f(x_{10}, x_{20}) + k_1 \cdot \Delta x_1 + k_2 \cdot \Delta x_2 .$$

В этом случае коэффициенты пропорциональности вычисляются в окрестности точки (x_{10}, x_{20}) при относительно небольших значениях отклонений $\Delta x_1, \Delta x_2$ по формуле

$$k_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}, \quad i \in (1, 2).$$

5.2. Запись уравнений в отклонениях от опорных состояний и процессов

К подобной записи обращаются чаще всего в тех случаях, когда часть нелинейных слагаемых в уравнениях ММ предварительно была подвергнута линеаризации по Тейлору, т. е. математическая модель записана в линеаризованной форме первого приближения, или когда оцениваются отклонения системы от какого-либо (опорного) состояния, процесса. В таком случае выполняются следующие процедуры.

1. Для всех входных, выходных и внутренних переменных (координат) системы вводятся отклонения. Они принимаются равными значениям этих переменных в опорном состоянии или опорном процессе, для

которых была проведена линеаризация, плюс отклонениям от этих значений. Таким образом, все переменные z_k , $k = \overline{1, m}$ системы, включающие в себя входные, выходные и внутренние координаты системы, выражаются в виде

$$z_k(t) = z_{k0} + \Delta z_k(t),$$

где z_{k0} – значение координаты z_k в опорном состоянии или опорном процессе.

2. Подставляем вместо z_k во все уравнения модели $z_{k0} + \Delta z_k$.

3. Записываем исходные уравнения системы для опорного состояния или процесса, заменяя в них z_k на z_{k0} .

4. Из уравнений, полученных в п. 2, вычитаем соответствующие уравнения, полученные в п. 3. В итоге получаем математическую модель, где будут фигурировать лишь отклонения всех координат $\Delta z_k(t)$ от их значений в опорном состоянии или процессе z_{k0} .

Удобство записи математических моделей в отклонениях заключается прежде всего в том, что из их уравнений исключаются составляющие с опорными координатами и тем самым упрощаются сами математические модели. Кроме того, запись уравнений ММ в отклонениях часто предпочтительна при решении задач, связанных с оценкой устойчивости состояний и процессов в динамических системах, т. е. с оценкой способности систем сохранять предписанные им состояния и процессы.

Пример 5.3. Проиллюстрируем процедуры линеаризации по Тейлору и приведения ММ к записи в отклонениях на примере исходного нелинейного уравнения вида

$$0,5 \frac{dy}{dt} + y^2 = 30x_1 \cdot x_2^3 + 10x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2. \quad (5.12)$$

Линеаризацию проведем, например, в окрестности точки статического состояния (при этом $dy/dt \equiv 0$) с координатами

$$x_1 = x_{10} = 2; \quad x_2 = x_{20} = 1; \quad x_3 = x_{30} = 4. \quad (5.13)$$

Установившееся значение координаты y в таком статическом режиме соответствует уравнению

$$y_0^2 = 30x_{10}x_{20}^3 + 10x_{10}x_{20}x_{30}^2 = 380. \quad (5.14)$$

Линеаризованная в соответствующем (5.13) состоянии модель будет иметь вид:

$$0,5 \frac{dy}{dt} + y_0^2 + 2y_0 \cdot \Delta y = 30 x_{10} x_{20}^3 + 10 x_{10} x_{20} x_{30}^2 + 190 \Delta x_1 + 500 \Delta x_2 + 160 \Delta x_3 = 380 + 190 \Delta x_1 + 500 \Delta x_2 + 160 \Delta x_3. \quad (5.15)$$

Примем

$$y = y_0 + \Delta y, \quad x_k = x_{k0} + \Delta x_k, \quad k = \overline{1,3} \quad (5.16)$$

и перепишем уравнение (5.15), подставив в него вместо переменных y и x_k их значения согласно (5.16). Если при этом учесть, что $dy/dt \equiv 0$, и вычтем из левой и правой части полученного при этом уравнения, соответственно, левую и правую часть уравнения (5.14), то получим эквивалентное (5.12) искомое линейризованное уравнение, записанное в отклонениях от заданного опорного состояния в виде

$$0,5 \frac{d(\Delta y)}{dt} + 2 \cdot (380)^{0,5} \cdot \Delta y = 190 \Delta x_1 + 500 \Delta x_2 + 160 \Delta x_3.$$

5.3. Запись уравнений в относительных величинах

Её проводят с целью исключения размерности для переменных (координат) в уравнениях математической модели. Особенно это удобно для систем, где среди координат u, f, x, y имеются величины различной физической природы.

Тогда для всех координат $z_i \in \{u, f, x, y\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ вводят относительные переменные

$$z_{ie} = z_i / z_i^* \quad (5.17)$$

где z_i^* – базисное значение для z_i .

В качестве базисного значения z_i^* может быть использована любая величина той же размерности, что и переменная z_i . Чаще всего в качестве z_i^* предпочитают использовать номинальное, максимальное или какое-либо другое характерное для z_i значение. В случае перевода к относительным переменным уравнений, записанных в отклонениях $\Delta z_i = z_i - z_{i0}$, в качестве z_i^* лучше всего принять z_{i0} , т. е. опорные значения, использованные при записи этих уравнений в отклонениях. При этом, согласно (5.17),

$$z_i = z_i^* \cdot z_{ie}.$$

Подставляем в уравнения ММ вместо z_i равные им значения $z_i^* \cdot z_{ie}$. В итоге получим уравнения, где переменные, принадлежащие векторам u, f, x, y , будут заменены относительными величинами. Величины z_i^* , имеющие постоянный уровень, вводят в соответствующие коэффициенты уравнений математической модели. Тогда все переменные в ММ будут безразмерными. Размерными могут при этом остаться лишь коэффициенты в уравнениях. Их размерность тоже можно типизировать, разделив каждое из уравнений на коэффициент, стоящий перед какой-либо относительной переменной (координатой) в линейном слагаемом уравнения. Тогда все коэффициенты в линейных слагаемых с координатами станут безразмерными, а при производных $d^k z_{ie} / dt^k$ коэффициенты будут иметь размерность времени t в степени k . Это очень удобно для определения и контроля размерностей коэффициентов при последующей работе с уравнениями математической модели.

При желании можно перейти и к относительному времени $t_e = t/t^*$. Часто это делают, например, при описании дискретных систем с импульсными и цифровыми устройствами. В этом случае за t^* обычно выбирают период квантования в этих системах.

5.4. Дискретизация математических моделей по времени

Процессы в дискретно-непрерывных системах с квантованием переменных по времени и/или по уровню описываются совокупностью уравнений, среди которых имеются и уравнения только с непрерывными переменными, и уравнения с дискретными по времени переменными. Последние включают в себя решетчатые функции переменных системы или их разности различных порядков. Исследование процессов в таких системах обычно проводят, базируясь на одном из следующих подходов.

Если используемое в системе с АИМ или импульсно-кодowymi преобразователями квантование по времени удовлетворяет условиям теоремы Котельникова–Шеннона, то исследования проводят, используя так называемые приведенные математические модели непрерывного типа. В схемах этих систем импульсные преобразователи (см. гл. 2.) представляют лишь формирователями импульсов, исключая идеальные

импульсные ключи. Математические модели непрерывных частей системы оставляют без изменений.

Если условия теоремы Котельникова–Шеннона в анализируемой системе не выполняются, то процессы в системе исследуют по исходной ММ комбинированного типа или же модель системы преобразуют таким образом, чтобы к ней можно было применить методы анализа полностью дискретных систем (аппарат разностных уравнений, дискретные операторные преобразования). В последнем случае уравнения, описывающие процессы в непрерывных частях системы и представляющие собой алгебраические и/или дифференциальные уравнения относительно непрерывных переменных, заменяют эквивалентными им разностными уравнениями. Подобную замену уравнений непрерывного типа разностными называют *дискретизацией по времени*. Следует заметить, что такую операцию дискретизации ММ в ряде случаев выполняют и для систем с переменными только непрерывного типа, если интерес представляют значения их внутренних и выходных переменных лишь в определенные равноотстоящие моменты времени или последующие исследования проводят, ориентируясь на алгоритмы решения систем разностных уравнений. Эта же операция лежит в основе целого ряда решений систем дифференциальных уравнений.

Существуют различные способы дискретизации моделей по времени. Все они вносят определенные погрешности в точностные показатели последующих исследований систем. И именно в зависимости от того, какого уровня погрешности от дискретизации приемлемы при последующем анализе, используют тот или иной способ дискретизации. Более подробные сведения о способах дискретизации по времени можно получить, в частности, в [9]. Один из наиболее простых способов сводится к замене в математической модели всех входных, внутренних и выходных переменных системы их решетчатыми функциями, а обыкновенных производных от переменных системы – разностями решетчатых функций.

При этом вместо переменной $z_i(t)$, $i=1, 2, 3, \dots$ в математическую модель вводится решетчатая функция $z_i[nT]$. Так как

$$\frac{d^k z_i}{dt^k} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\Delta^k z_i[nT]}{T^k},$$

то производную $\frac{d^k(t)}{dt^k}$ заменяют выражением $\frac{\Delta^k z_i[nT]}{T^k}$. Для

обеспечения приемлемой погрешности от такой замены следует уменьшать выбранный период дискретизации T .

При решении задач анализа и синтеза систем управления практический интерес часто представляет дискретизация математической модели непрерывной части системы, включенной последовательно с цифровым вычислительным устройством.

Будем полагать, что они сопряжены между собой цифро-аналоговым преобразователем с фиксатором нулевого порядка. Вход-выходная связь у такого фиксатора на интервале $nT \leq t \leq (n+1)T$, где T – период дискретизации, а $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, описывается соотношением

$$u(t) = u[nT].$$

Полагаем также, что непрерывная часть системы (НЧС) является линейной, гладкой и описывается совокупностью следующих уравнений:

уравнением состояния

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (5.18)$$

и **уравнением выхода**

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \quad (5.19)$$

В случае, когда непрерывная часть многомерна по входу и выходу, можно считать, что состояние системы $x \in R^n$, выход $y \in R^p$, входной сигнал $u \in R^m$, n – **порядок системы**, а матрицы $A(t), B(t), C(t)$ и $D(t)$ имеют соответствующие размерности и непрерывны относительно своих аргументов.

Решение векторно-матричного уравнения (5.18), согласно [7, 8], можно записать в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (5.20)$$

где $\Phi(t, t_0)$ – так называемая **переходная матрица**, являющаяся решением векторно-матричного уравнения

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0). \quad (5.21)$$

Переходная матрица удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\Phi(t_0, t_0) = I$, где I – единичная матрица размера $n \times n$;
- 2) $\Phi(t_2, t_1) \cdot \Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$ для всех t_0, t_1, t_2 ;
- 3) $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$ для всех t_0, t ;
- 4) $\Phi(t, t_0) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)$.

В последней формуле

$$\Phi(t) = e^{A(t)t} \quad (5.22)$$

есть **фундаментальная матрица**, соответствующая (5.21) и являющаяся решением однородного векторно-матричного уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

Эта матрица удовлетворяет следующим свойствам:

$$\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t); \quad \Phi(t + t_0) = \Phi(t) \cdot \Phi(t_0);$$

$$\Phi(t - t_0) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0).$$

Из-за сложности аналитического выражения матрицу (5.22) чаще всего при решении практических задач определяют, используя конечное число членов ее разложения вида:

$$\Phi(t) = e^{A(t)t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t)t^k}{k!}. \quad (5.23)$$

Воспользуемся полученным выше решением (5.20) уравнения состояния (5.18) для определения состояния непрерывной части системы в момент $t = (n+1)T$. Так как на интервале от nT до $(n+1)T$ её вход $u(t) = u[nT]$, то получаем

$$x[(n+1)T] = \Phi[(n+1)T, nT] \cdot x[nT] + \left[\int_{nT}^{(n+1)T} \Phi[(n+1)T, \tau] B(\tau) d\tau \right] \cdot u[nT]. \quad (5.24)$$

Если ввести обозначения

$$A_d[nT] = \Phi[(n+1)T, nT],$$

$$B_d[nT] = \int_{nT}^{(n+1)T} \Phi[(n+1)T, \tau] B(\tau) d\tau,$$

то уравнение состояния (5.24) можно представить в виде

$$x[(n+1)T] = A_d[nT]x[nT] + B_d[nT]u[nT]. \quad (5.25)$$

При этом выход НЧС в момент nT можно определить согласно (5.19) как

$$y[nT] = C[nT]x[nT] + D[nT]u[nT]. \quad (5.26)$$

Уравнения (5.25) и (5.26) и будут векторно-матричными уравнениями, отражающими связи входа, состояния и выхода непрерывной части системы в дискретные моменты времени. Они в совокупности с разностными уравнениями, описывающими вход-выходные связи цифрового вычислительного устройства, образуют дискретную по времени математическую модель системы. Эта модель будет несколько проще в том случае, когда непрерывная часть системы стационарна, т. е. когда матрицы A, B, C, D ее математической модели (5.18), (5.19) постоянны. Тогда переходная матрица

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0).$$

В результате в дискретном по времени уравнении состояния (5.25) НЧС $A_d[nT]$ преобразуется согласно (5.23) в

$$A_d = \Phi(T) = e^{AT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^k}{k!} = I + AT + \frac{1}{2!}(AT)^2 + \frac{1}{3!}(AT)^3 + \dots,$$

где I – единичная матрица размера $n \times n$, а матрицу $B_d[nT]$ следует заменить на

$$B_d = \int_{nT}^{(n+1)T} \Phi[(n+1)T - \tau] B d\tau.$$

Разностное уравнение выхода НЧС в этом случае будет отличаться от (5.26) лишь тем, что в нем вместо матриц C_d, D_d будут, соответственно, постоянные матрицы C, D .

Довольно часто возникает необходимость перехода от математической модели непрерывной стационарной системы с одним входом и одним выходом вида

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \\ y(t) &= c^T x(t) + du(t)\end{aligned}$$

к ее дискретному по времени аналогу

$$\begin{aligned}x(t+1) &= A^* x(t) + b^* u(t), \\ y(t) &= (c^*)^T x(t) + d^* u(t).\end{aligned}$$

Для такого перехода, согласно [9], следует принять

$$\begin{aligned}A^* &= e^{AT}; \\ b^* &= \int_0^T e^{A\tau} b \, d\tau = A^{-1} (e^{AT} - I) b = T \left[I + \frac{AT}{2!} + \frac{(AT)^2}{3!} + \dots \right] b; \\ c^* &= c; \quad d^* = d.\end{aligned}$$

5.5. Редуцирование математических моделей

На начальных этапах исследования и проектирования систем далеко не всегда требуется высокая точность анализа их свойств, состояний или процессов. Поэтому естественно желание в таких ситуациях использовать по возможности более простые математические модели систем. Это позволит получать значительно быстрее и/или проще требуемые результаты исследований или выбирать проектные решения. В этой связи для проведения подобных исследований часто проводят редуцирование исходных математических моделей. Под **редуцированием** (понижением порядка) ММ понимают процедуру замены исходной математической модели системы другой моделью более низкого порядка [5, 10].

Напомним, что в силу инерционности систем, протекающие в них процессы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями и/или дифференциальными уравнениями в частных производных. **Порядком обыкновенного дифференциального уравнения**

$$F\left(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}\right) = 0 \quad (5.27)$$

называют порядок наивысшей из производных от неизвестной переменной (или неизвестных переменных), которая входит в это уравнение.

Если система описывается совокупностью дифференциальных уравнений, то её порядок определяется числом неизвестных n , которые необходимы для приведения этой системы уравнений к нормальной форме, т. е. к совокупности дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.28)$$

Таким образом, редуцирование математической модели системы, описываемой уравнением (5.27), сводится к подбору такого уравнения

$$F\left(t, x, x', x'', \dots, x^{(m)}\right) = 0,$$

у которого $m < n$ и которое с достаточной точностью отражает протекающие в системе процессы. Аналогично, редуцирование (5.28) сводится к выбору модели этого же типа с $m < n$. При этом порядок редуцированной модели m либо заранее задается, либо подбирается в процессе редуцирования.

К настоящему времени предложено уже довольно много процедур редуцирования ММ [10]. Большинство из них базируется на выявлении и последующем исключении тех составляющих исходной математической модели системы, которые в наименьшей степени отражаются на количественных характеристиках свойств системы, представляющих при анализе или синтезе наибольшую значимость. Таковыми могут быть точность определения выходных и/или внутренних переменных системы, ее устойчивость, управляемость, наблюдаемость или какие-либо другие свойства. Более детально вопросы редуцирования ММ с учетом этих свойств рассматриваются в курсе «Теория автоматического управления».

5.6. Расщепление математических моделей

Математические модели, описывающие процессы в сложных системах, часто отражают изменения переменных, происходящие одновременно в разных темпах. Например, многие искусственные спутники Земли (ИСЗ) при полете должны поддерживать свою ориентацию в орбитальной системе осей, т. е. так, чтобы одна из строительных осей аппарата была ориентирована по вертикали к центру Земли, другая была перпендикулярна плоскости орбиты, а третья – взаимно ортогональна

двум другим. Тогда угловые положения ИСЗ в неподвижном (инерциальном) пространстве описываются математической моделью, отражающей относительное положение строительных осей аппарата и трехгранника ортогональных осей, жестко связанного с инерциальным пространством. Изменения этого углового положения при полете ИСЗ связаны с изменениями его местонахождения на орбите и дополнительными угловыми колебаниями аппарата относительно орбитальных осей. Периоды изменений положения ИСЗ на орбите определяются параметрами орбиты и не могут быть менее 84,4 минуты. В то же время периоды угловых колебаний относительно орбитальных осей составляют (в зависимости от инерционности аппарата) несколько секунд или десятков секунд.

В подобных случаях общую математическую модель угловых движений ИСЗ можно разделить (расщепить) на две модели. В первую из них включаются лишь те составляющие уравнений общей ММ, которые описывают медленные движения, соответствующие периоду обращения ИСЗ на орбите. Во вторую модель включают только те составляющие исходной ММ, которые описывают угловые колебания аппарата относительно орбитальной системы координатных осей. Такое разделение математических моделей систем на модели относительно медленных и быстрых движений и представляет собой расщепление ММ. Эту операцию преобразования моделей называют часто ещё и операцией *разделения движений* в описываемой системе [2, 4].

Операции расщепления ММ в настоящее время широко используются при анализе динамики не только подвижных объектов, но и при анализе сложных систем других применений. Они существенно упрощают последующий анализ процессов в исследуемых системах. Вместе с тем, расщепление ММ порождает дополнительную погрешность в анализе процессов. Чем больше разница в периодах медленных и быстрых движений, на которые производится расщепление модели, тем меньше уровень погрешности от этой операции. Во многих случаях уровень этой погрешности не превышает допустимый на данном этапе исследования системы. Именно в таких ситуациях и используют подобные преобразования математических моделей.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под линеаризацией математических моделей и как она проводится?
2. Как производится запись уравнений математических моделей систем в отклонениях от опорных состояний или процессов?

3. С какой целью и как записываются уравнения математических моделей систем в отклонениях?
4. Как осуществляется переход в математических моделях от абсолютных переменных к относительным?
5. Для каких целей и как осуществляют дискретизацию математических моделей по времени?
6. Что такое «редуцирование» математических моделей? Зачем и как его проводят?
7. В каких ситуациях и зачем проводят расщепление математических моделей систем?

Библиографический список к главе 5

1. *Бронштейн И. Р., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 15-е изд. – М.: Физматлит, 1998.
2. *Востриков А. С., Французова Г. А.* Теория автоматического управления. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006.
3. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2008.
4. *Геращенко Е. И., Геращенко С. М.* Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. – М.: Наука, 1975.
5. *Домбровский В. В.* Понижение порядка систем оценивания и управления. – Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1994.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения. Теоремы. Формулы. – 6-е изд. – СПб.: Лань, 2003.
7. Математические основы теории автоматического регулирования / под ред. *Б. К. Чемоданова*. 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1977.
8. *Острейковский В. А.* Теория систем: учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1997.
9. *Уемов А. И.* Системный подход и общая теория систем. – М.: Мысль, 1978.
10. *Юркова Г. Н.* Методы понижения порядка линейных динамических систем: обзор / Ленинградский институт точной механики и оптики, 1984, 31с. Деп. в ЦНИИТЭИ приборостроения, № 2502 пр-84деп.

ТИПИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ
МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ**6.1. Типовые формы записи математических моделей
статических и динамических режимов в обыкновенных системах**

Типовые формы записи математических моделей стремятся использовать для того, чтобы в последующем применительно к рассматриваемой системе легче было использовать стандартные приёмы анализа или синтеза, а также созданные для этих целей алгоритмы и пакеты прикладных программ для ЭВМ.

Типизация форм математических моделей в настоящее время проводится, как правило, с использованием элементов векторно-матричного исчисления, которое позволяет наиболее компактно отразить ММ сложных систем. С этой целью все входы в систему объединяют в два вектора: вектор полезных входов и вектор возмущающих входов. Вся совокупность полезных выходов системы также объединяется в единый вектор выхода системы, а для совокупности внутренних переменных системы вводится вектор внутренних переменных. При необходимости отражения вредных воздействий описываемой системы на внешнюю среду для этих воздействий также вводится общее векторное обозначение. Элементы этих векторов для систем автоматизации и управления чаще всего определяются на поле вещественных чисел, но они могут быть определенными и на поле комплексных чисел, как, например, в случае описания процессов в электрических системах переменного тока, или же на поле целых чисел. При необходимости подобным же способом описывают множества входных, выходных и внутренних переменных для отдельных подсистем описываемой системы. Заметим также, что типизируют как модели, описывающие статические состояния, так и модели динамических процессов в системах.

Для систем рассматриваемого класса (для обыкновенных систем) используется несколько типовых форм. С целью знакомства с ними обозначим у рассматриваемой системы управляющий и возмущающий входы и выход, соответственно, через u, f, y , а внутренние переменные – через z .

Рассмотрим наиболее употребительные типовые формы ММ для систем этого класса.

1. Форма «вход-выход»

Форма «вход-выход» определяет вход-выходное отображение системы $\varphi: (u, f) \rightarrow y$ или же один из частных случаев такого отображения, а именно $\varphi_u: u \rightarrow y$ или $\varphi_f: f \rightarrow y$. Сокращенно будем ниже называть эту форму **ВВ-формой** (от слов «вход-выход»). Заметим, что в научных публикациях на английском языке эта форма также часто называется сокращенно, а именно как *IO-форма* (аббревиатура от английских слов «input-output»).

Для обыкновенной линейной или предварительно линеаризованной системы математическая модель, описывающая статику системы, в этом случае имеет вид:

$$y = D u + G f. \quad (6.1)$$

Для нелинейной системы имеем нелинейную модель вида

$$y = \varphi(u, f). \quad (6.2)$$

В случае описания этими уравнениями статических режимов в обыкновенных системах с координатными переменными, определенными на поле вещественных чисел, можно полагать, что в (6.1) и (6.2) $y \in R^r$, $u \in R^m$, $f \in R^q$, а D , G – матрицы размерностей, соответственно, $r \times m$ и $r \times q$. Таким образом, модель ВВ-формы может описывать системы с произвольным числом элементов во входах u , f и выходе y .

Очевидно, что для получения математической модели системы в таком виде фактически необходимо выразить выход y как функцию входных сигналов u и f , исключив при этом все внутренние переменные системы z . Если такое представление затруднительно, математическую модель статики системы предпочитают записать в виде

$$g(u, f, z, y) = 0, \quad (6.3)$$

где левая часть этой системы уравнений представляет собой вектор-функцию от входных, внутренних и выходных переменных системы. Подобная запись системы уравнений позволяет использовать многие из предложенных алгоритмов решения систем алгебраических и трансцендентных уравнений численными методами [2, 3, 5, 14, 15].

Математические модели динамики линейных или предварительно линеаризованных обыкновенных непрерывных стационарных систем в форме «вход-выход» обычно представляют в виде

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) + C(p)f(t). \quad (6.4)$$

Здесь выход системы $y \in R^r$, полезный вход $u \in R^m$, возмущение $f \in R^q$, p – оператор дифференцирования по времени, т. е. $p = \frac{d}{dt}$, а

полиномиальные матрицы $A(p), B(p), C(p)$ имеют соответствующие указанным выше векторам размерности, т. е. $r \times r, r \times m, r \times q$. При этом полиномиальность каждой из указанных матриц означает, что минимум один из ее элементов имеет полиномиальный вид. Например, в матрице A её ij -й элемент в общем случае может быть вида

$$a_{ij}(p) = a_{ij}^0 + a_{ij}^1 p + a_{ij}^2 p^2 + \dots + a_{ij}^k p^k,$$

где a_{ij}^μ , $\mu = \overline{0, k}$ – постоянные коэффициенты, часть из которых могут быть равными нулю.

Если система непрерывна, линейна и нестационарна, то хотя бы один из элементов матриц A, B, C в (6.4) является функцией не только символа дифференцирования по времени p , но и самого времени t , либо один из них является функцией p , а какой-либо другой – функцией от t . Поэтому для нестационарной системы указанного типа в общем случае вместо уравнения (6.4) получается векторно-матричное уравнение в форме "вход-выход" вида

$$A(p, t)y(t) = B(p, t)u(t) + C(p, t)f(t). \quad (6.5)$$

Следует отметить, что в (6.4) и (6.5) выход y входит в неявной форме и поэтому эта форма удобна не для непосредственного определения $y(t)$, а для получения других важных для решения задач анализа и синтеза систем характеристик, в частности для определения так называемых передаточных функций и передаточных матриц. Эти фундаментальные в теории линейных систем характеристики будут строго определены и более подробно описаны в главе 7.

Заметим также, что применительно к динамике сложных непрерывных нелинейных систем *ВВ-форма* используется сравнительно редко

из-за ее малой эффективности. В подобных случаях ее применяют, лишь когда модель такой системы представима в виде

$$A(p, t)y(t) = \varphi(p, t, u(t), f(t)). \quad (6.6)$$

2. Упорядоченная каноническая форма

В некоторых случаях при многомерных векторах входов u, f , выхода y и внутренних промежуточных переменных $z \in R^k$ удаётся свести математические модели системы к так называемой *упорядоченной канонической форме* вида

$$A(p, t)g(t) = B(p, t)u(t) + C(p, t)f(t). \quad (6.7)$$

Отличие её от модели вида (6.5) лишь в том, что здесь в вектор g включают весь набор внутренних переменных (координат) системы z и, возможно, часть или же все выходные координаты y . Если при этом все переменные вектора выхода y входят в g , то этот случай наиболее прост в математическом плане (такая модель весьма удобна для выявления вход-выходных отображений системы). Если же в (6.7) вектор g включает лишь внутренние переменные z , то для полного описания процессов в системе это векторно-матричное уравнение должно быть дополнено уравнением выхода, которое для рассматриваемого класса систем предпочтительно иметь в виде

$$y(t) = C(p, t)z(t) + D(p, t)u(t) + G(p, t)f(t). \quad (6.8)$$

Последнее уравнение будет отражать связь выхода системы с её внутренними и входными переменными. Если рассматриваемая система при этом стационарна, то все матрицы в системе векторно-матричных уравнений (6.5), (6.7) не будут зависеть от времени t , а в (6.6) не будет явно зависеть от t вектор-функция $\varphi(\bullet)$.

3. Форма «вход-состояние-выход»

В настоящее время для описания динамики линейных обыкновенных непрерывных систем без переалгоритмизаций и реконфигураций предпочитают использовать в качестве типовой математической

модели модель в форме «*вход-состояние-выход*» (*ВСВ-форме*), которая для этого случая имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + E f(t); \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + G f(t).\end{aligned}\tag{6.9}$$

В этой модели в общем случае $x(t) \in R^n$ и эту совокупность переменных, характеризующих внутреннее состояние системы, называют **вектором состояния системы** или **вектором обобщённых координат системы**. Под $\sigma x(t)$ здесь понимается производная по времени от $x(t)$, т. е. dx/dt . Остальные переменные имеют ранее определенный смысл.

Первое из уравнений (6.9) описывает динамику системы и называется её **уравнением состояния**. Оно является векторно-матричным уравнением первого порядка.

Матрица A называется **матрицей состояний, или матрицей собственных движений системы**. Такое её название объясняется тем, что при отсутствии внешних воздействий на систему, т. е. при $u(t) \equiv 0$, $f(t) \equiv 0$, причём в ситуации, когда $x(0) \neq 0$, динамика системы (её собственные движения) описывается уравнением

$$\sigma x(t) = Ax(t).\tag{6.10}$$

Матрицы B и E отражают влияние на $x(t)$ полезного и возмущающего входов и называются, соответственно, **матрицами полезных и вредных входов системы**. Применительно к управляемым системам их, соответственно, называют **матрицей управляющих и матрицей возмущающих входов**.

Второе уравнение в (6.9) называется **уравнением выхода системы**. Оно является алгебраическим векторно-матричным уравнением и показывает, как связан выход системы $y(t)$ с входами и вектором состояния $x(t)$. Чаще всего $y(t)$ не зависит непосредственно от $u(t)$ и $f(t)$, а связан с ними через вектор состояния $x(t)$. Тогда уравнение выхода принимает вид

$$y(t) = Cx(t).\tag{6.11}$$

В стационарных системах в математическая модель типа (6.9) матрицы A, B, C, D, E, G не зависят от времени t , т. е. содержат лишь постоянные элементы.

Для линейных обыкновенных дискретных по времени систем математическая модель типа «вход-состояние-выход» имеет полностью совпадающий с (6.9) вид. Отличие заключается лишь в том, что в этом случае под $\sigma x(t)$ следует понимать сдвинутое на один такт дискретизации значение $x(t)$, т. е. в этом случае $\sigma x(t) = x(t+1)$, а t означает относительное время, равное фактическому времени, отнесённому к периоду дискретизации. В этой связи в дальнейшем уравнениями (6.9) при необходимости будем описывать одновременно и обыкновенные системы непрерывного типа, и дискретные по времени системы.

В некоторых случаях уравнения в форме "вход-состояние-выход" удаётся записать несколько в другом виде, а именно как

$$H\sigma x(t) = Ax(t) + Bu(t) + E f(t); \quad (6.12)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + G f(t).$$

Представленную подобным образом математическую модель и соответствующую ей систему называют *дескрипторными*, а вектор $x(t)$ – *дескриптором* или *полусостоянием системы*.

Из анализа формы уравнений (6.9) и (6.12) вытекает, что переход к ним от исходной математической модели требует исключения из последней всех алгебраических уравнений, кроме тех, что описывают непосредственную связь выхода $y(t)$ с x, u, f .

Если описываемая система нелинейна, то ее математическая модель в форме «вход-состояние-выход» принимает вид

$$\sigma x(t) = g[x(t), u(t), f(t)]; \quad (6.13)$$

$$y(t) = h[x(t), u(t), f(t)]. \quad (6.14)$$

В этих уравнениях $g(\bullet)$, $h(\bullet)$ – соответственно, n -мерная и r -мерная вектор-функции указанных аргументов.

Следует иметь в виду, что модели (6.12) и (6.13)–(6.14) вновь описывают как непрерывные, так и дискретные по времени системы. Такое объединение математических моделей особенно удобно при исследовании фундаментальных свойств этих систем, так как позволяет делать заключения одновременно по обоим классам систем.

4. Канонические формы моделей обыкновенных линейных систем

Модели этого вида особенно широко используются при синтезе и исследовании свойств систем указанного класса. Как правило, используют такие канонические формы математических моделей систем, у которых матрицы состояния, входов и/или выходов имеют специфический вид. В частности, многие элементы этих матриц равны нулю, блочно-нулевые или же равны единице. Подобные представления математических моделей позволяют отражать структурные свойства и взаимосвязь входных, внутренних и выходных переменных описываемых ими систем, их важные свойства или же, при желании, минимизировать общее число ненулевых элементов в уравнениях, записанных в форме «вход-состояние-выход».

В настоящее время предложено и используется в инженерной и научной практике свыше двух десятков различных канонических форм математических моделей линейных обыкновенных систем [13, 16, 18], ориентированных на решение конкретных задач анализа или синтеза. Таковыми, например, являются канонические верхняя и нижняя треугольные блочные формы Хессенберга, наглядно разбивающие вектор состояния системы на подмножества однообразно управляемых или наблюдаемых переменных. Другие канонические формы ММ ориентированы на определение составляющих собственных движений и вынужденных процессов в системах (форма Жордана), на определение таких свойств, как управляемость и наблюдаемость (управляемая каноническая форма и наблюдаемая каноническая форма) [18], на определение так называемых нулей системы (форма Смита–Макмилана, форма Йокаямы) [16].

Канонические преобразования математической модели системы, представленной в *BCB*-форме, т. е. модели (6.9), производятся путем замены вектора состояния системы x на новый вектор состояния

$$z = Hx. \quad (6.15)$$

При этом математическая модель системы канонического типа принимает вид, подобный (6.9), а именно

$$\begin{aligned} \sigma z(t) &= A^* z(t) + B^* u(t) + E^* f(t); \\ y(t) &= C^* z(t) + D^* u(t) + G^* f(t), \end{aligned} \quad (6.16)$$

где

$$\begin{aligned} A^* &= HAH^{-1}; & B^* &= HB; & E^* &= HE; \\ C^* &= CH^{-1}; & D^* &= D; & G^* &= F. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Таким образом, используя различные матрицы преобразования $H \in R^{n \times n}$, можно получить сколь угодно большое число канонических форм математических моделей, соответствующих исходной ММ, представленной в форме «вход-состояние-выход», однако, как уже отмечалось выше, не все они могут представить практический интерес. В разделе 6.6 предлагаются примеры приведения моделей класса (6.12) к наиболее часто встречающимся каноническим формам.

Дополнительно отметим, что при переходе к каноническим формам представления математических моделей, как правило, резко усложняется связь переменных состояния с физическими переменными описываемой системы. Вектор $z(t)$ в моделях канонической формы, согласно (6.15), является линейной комбинацией от составляющих использовавшегося в модели (6.12) вектора состояния $x(t)$. Тем не менее, во многих случаях подобные преобразования, по указанным выше причинам, вполне оправданны.

6.2. Приведение математических моделей линейных обыкновенных непрерывных систем к форме «вход-состояние-выход»

При приведении математических моделей к форме «вход-состояние-выход» практический интерес представляют два случая:

1) в математической модели системы присутствуют после исключения алгебраических и интегральных уравнений только дифференциальные уравнения с производными от одной (выходной для данного элемента) переменной (координаты);

2) в уравнениях математической модели присутствуют одновременно производные от выходных и входных координат соответствующего элемента (и в левой, и в правой его части).

В первом случае каждое из дифференциальных уравнений сводят к совокупности дифференциальных уравнений первого порядка (к форме Коши), а затем объединяют в векторно-матричное уравнение состояния.

Проиллюстрируем это на примерах.

Пример 6.1. Пусть имеем уравнение

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = kx(t). \quad (6.18)$$

Вводим обозначения

$$x_1 \triangleq y, \quad x_2 \triangleq \frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt}.$$

Тогда вместо исходного уравнения (6.18) можно записать следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{a_2} \cdot (-a_0 x_1 - a_1 x_2 + ku). \end{aligned}$$

Эти уравнения можно свести к векторно-матричному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t),$$

где

$$x \triangleq [x_1 \quad x_2]^T, \quad B \triangleq \begin{bmatrix} 0 & k \\ & a_2 \end{bmatrix}^T,$$

а матрица состояния

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix}.$$

Уравнение выхода в этом случае имеет вид:

$$y(t) = Cx(t), \quad \text{где } C = [1 \quad 0].$$

Если бы наряду с этим уравнением было бы ещё одно уравнение, например

$$c_1 \frac{dz}{dt} + c_0 z(t) = e y(t),$$

то следовало бы ввести ещё одну переменную состояния, приняв $x_3 = z$. Тогда данное уравнение с учетом приведенных выше обозначений преобразуется к следующему виду:

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{e}{c_1}x_1 - \frac{c_0}{c_1}x_3.$$

Совокупность двух указанных исходных уравнений будет иметь стандартную ВСВ-форму (6.9). При этом

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} & 0 \\ \frac{e}{c_1} & 0 & \frac{c_0}{c_1} \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ 0 \ 1]; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{a_2} & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Из этих примеров следует, что для приведения к форме Коши дифференциального уравнения

$$a_n \frac{d^n z}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dz}{dt} + a_0 z(t) = ku(t)$$

нужно ввести переменные состояния:

$$x_1 = z; \quad x_2 = \frac{dz}{dt} = \frac{dx_1}{dt};$$

$$x_3 = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}; \dots; \quad x_n = \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} = \frac{dx_{n-1}}{dt}.$$

Тогда получаем n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3;$$

.....

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n;$$

$$\frac{dx_n}{dt} = -\frac{a_0}{a_n}x_1 - \frac{a_1}{a_n}x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n + \frac{k}{a_n}u(t).$$

Эти уравнения в векторно-матричном представлении отображаются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t),$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdot & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{k}{a_n} \end{bmatrix}^T.$$

При этом уравнение выхода системы принимает следующий вид:

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \cdot x(t).$$

В формируемых в подобных ситуациях случаях составляющими вектора состояния являются выходные сигналы каждого из описываемых элементов системы и их младшие производные по времени, число которых на единицу меньше, чем порядок соответствующего уравнения модели. Заметим, что далеко не всегда такой явно выраженный «физический» смысл соответствует вводимым элементам вектора состояния $x(t)$.

Иначе формируется математическая модель в форме «вход-состояние-выход» в ситуациях, когда для описываемой линейной системы или отдельной ее подсистемы математическая модель динамики представлена в форме «вход-выход» и при этом в уравнении присутствуют производные по времени как от выходной, так и входной переменной. Проиллюстрируем процедуру преобразования такой модели [18] в *BCB*-форму, полагая, что исходное уравнение, описывающее систему со входом u и выходом y , имеет вид:

$$\begin{aligned} (d_n p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \dots + d_1 p + d_0) \cdot y(t) = \\ = (e_m p^m + e_{m-1} p^{m-1} + \dots + e_1 p + e_0) \cdot u(t). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Здесь использована традиционная в математике символическая форма записи обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е.

$$p \triangleq \frac{d}{dt}.$$

Уравнение (6.19) можно представить в более компактной форме, а именно в виде

$$D(p)y(t) = E(p)u(t), \quad (6.20)$$

приняв

$$D(p) = d_n p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \dots + d_1 p + d_0;$$

$$E(p) = e_m p^m + e_{m-1} p^{m-1} + \dots + e_1 p + e_0.$$

Из (6.20) следует, что

$$y(t) = D^{-1}(p)E(p)u(t).$$

Введем новую переменную $x(t)$, полагая, что

$$D^{-1}(p)E(p)u(t) = E(p)x(t). \quad (6.21)$$

При этом в (6.21) операторы $E(p)$ могут быть исключены, поэтому вместо (6.21) можно записать уравнение

$$D^{-1}(p)u(t) = z(t).$$

Таким образом, вместо исходного уравнения (6.20) можно использовать систему двух эквивалентных ему уравнений:

$$D(p)z(t) = u(t); \quad (6.22)$$

$$E(p)z(t) = y(t). \quad (6.23)$$

Введём следующие переменные состояния:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z(t); \\ x_2(t) &= x_1^{(1)}(t) = z^{(1)}(t); \\ &\dots\dots\dots \\ x_n(t) &= x_{n-1}^{(1)}(t) = z^{(n-1)}(t). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Тогда

$$x_n^{(1)}(t) = z^{(n)}(t)$$

и уравнение (6.22) принимает вид:

$$x_n^{(1)}(t) = \frac{1}{d_n} u(t) - \frac{d_{n-1}}{d_n} x_n(t) - \dots - \frac{d_1}{d_n} x_2(t) - \frac{d_0}{d_n} x_1(t). \quad (6.25)$$

Система уравнений (6.24), (6.25) сводится при этом к векторно-матричному уравнению

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \\ \dots \\ x_n^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{d_0}{d_n} & -\frac{d_1}{d_n} & -\frac{d_2}{d_n} & \dots & -\frac{d_{n-1}}{d_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \frac{1}{d_n} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

или в свёрнутом виде к уравнению

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (6.26)$$

определяющему динамическую часть *ВСВ*-модели системы.

Ранее полученное уравнение (6.23) устанавливает связь выходного сигнала $y(t)$ с введенной с целью преобразований модели переменной $z(t)$. Если в этом уравнении заменить производные от $z(t)$ их выражениями согласно (6.24), то получим:

$$y(t) = e_0 x_1(t) + e_1 x_2(t) + \dots + e_{n-1} x_n(t) + e_n x_n^{(1)}(t). \quad (6.27)$$

Здесь принято допущение, что $m = n$. Если же $m < n$, то часть коэффициентов в последнем уравнении (с e_{m+1} до e_n) будет равна нулю.

Подставляя в (6.27) значение $x_n^{(1)}(t)$ из (6.25), получаем уравнение выхода системы

$$y(t) = \left(e_0 - \frac{d_0}{d_n} e_n \right) x_1(t) + \left(e_1 - \frac{d_1}{d_n} e_n \right) x_2(t) + \dots + \left(e_{n-1} - \frac{d_{n-1}}{d_n} e_n \right) x_n(t) + \frac{e_n}{d_n} u(t),$$

которое в векторно-матричной форме может быть представлено как

$$y(t) = Cx(t) + Hu(t), \quad (6.28)$$

если принять, что

$$C = \left[e_0 - \frac{d_0}{d_n}, e_1 - \frac{d_1}{d_n}, \dots, e_{n-1} - \frac{d_{n-1}}{d_n} \right]; \quad H = \frac{e_n}{d_n}.$$

Таким образом, уравнения (6.26) и (6.28) образуют в совокупности уравнения в форме «вход-состояние-выход», эквивалентные исходному уравнению (6.19).

Матрица A в (6.26) имеет так называемую **форму Фробениуса** и существенно упрощается, если предварительно записать исходное уравнение так, чтобы $d_n = 1$. Если при этом и $m < n$, то упрощается к тому же и матрица выхода C .

Если в (6.19) не будет производных от $u(t)$, то в эквивалентной этому уравнению BCB -форме элементами вектора состояния будут выходной сигнал $y(t)$ и его производные по времени от первой до $(n-1)$ -й включительно.

Описанная выше процедура приведения уравнений типа (6.19) к форме «вход-состояние-выход» не является единственно возможной. В частности, за переменные состояния при таком преобразовании можно принять линейные комбинации от входа $u(t)$ и выхода $y(t)$ модели и производных по времени от этих переменных.

В частности, если для преобразования (6.19) принять в качестве переменных состояния:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= d_n y(t) - e_n u(t); \\ x_2(t) &= d_{n-1} y(t) + d_n y^{(1)}(t) - e_n u^{(1)}(t) - e_{n-1} u(t); \\ x_3(t) &= d_{n-2} y(t) + d_{n-1} y^{(1)}(t) + d_n y^{(2)}(t) - e_n u^{(1)}(t) - \\ &- e_n u^{(2)}(t) - e_{n-1} u^{(1)}(t) - e_{n-2} u(t); \\ &\dots\dots\dots \\ x_n(t) &= d_1 y(t) + d_2 y^{(1)}(t) + \dots + d_n y^{(n-1)}(t) - \\ &- e_n u^{(n-1)}(t) - e_{n-1} u^{(n-2)}(t) - \dots - e_1 u(t). \end{aligned}$$

то в соответствующей этому уравнению BCB -форме вида (6.26) и (6.28) получим

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{d_{n-1}}{d_n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{d_{n-2}}{d_n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{d_1}{d_n} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{d_0}{d_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} e_{n-1} - \frac{d_{n-1}}{d_n} \cdot e_n \\ e_{n-2} - \frac{d_{n-2}}{d_n} \cdot e_n \\ \dots \\ e_1 - \frac{d_1}{d_n} \cdot e_n \\ e_0 - \frac{d_0}{d_n} \cdot e_n \end{bmatrix};$$

$$C = \left[\frac{1}{d_n}, 0, 0, \dots, 0 \right]; \quad H = \frac{e_n}{d_n}.$$

Основной недостаток последнего варианта преобразования определяется тем, что используемые в нем переменные состояния $x(t)$ находятся в более сложных аналитических зависимостях со входным и выходным сигналами по сравнению с первым вариантом приведения уравнения (6.19) к записи в форме «вход-состояние-выход».

6.3. Приведение математических моделей линейных обыкновенных дискретных систем к форме «вход-состояние-выход»

Как и в предыдущем случае, нужно методом подстановок исключить из исходной математической модели уравнения, не содержащие разностей переменных типа $\Delta^k z(t)$ или $\nabla^k z(t)$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, переменных со смещенными по времени аргументами. Кроме того, нужно каждое из полученных разностных уравнений, описывающих отдельные части системы, записать в форме «вход-выход». В итоге в полученной математической модели будут уравнения с правыми частями либо содержащими, либо не содержащими разности переменных или переменные со смещенными аргументами. Для непрерывных систем это соответствует случаям наличия или отсутствия в правых частях уравнений производных от переменных системы.

Процедуру приведения разностного уравнения к форме «вход-состояние-выход» покажем для случая, когда это уравнение записано в относительном времени и имеет вид:

$$\begin{aligned}
& d_n y(k-n) + d_{n-1} y(k-n+1) + \dots + d_1 y(k-1) + d_0 y(k) = \\
& = e_n u(k-n) + e_{n-1} u(k-n+1) + \dots + e_1 u(k-1) + e_0 u(k).
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Если преобразуемое уравнение подобно форме (6.29), но имеет положительные знаки в аргументах переменных, то его не трудно перевести в форму (6.29) вычитанием из исходных аргументов величины n . Если же в нем в правой части имеется только $e_0 u(k)$, то его преобразование в *BCB*-форму можно получить по нижеописанной процедуре, приняв все коэффициенты e_1, e_2, \dots, e_n равными нулю.

Введением оператора запаздывания q^{-v} на v периодов квантования, и приняв

$$q^{-v} [y(k)] = y(k-v),$$

уравнение (6.29) можно записать в виде

$$D(q) y(k) = E(q) u(k), \tag{6.30}$$

где

$$D(q) = \sum_{i=0}^n d_i q^{-i}; \quad E(q) = \sum_{i=0}^n e_i q^{-i}.$$

Уравнение (6.30) аналогично уравнению (6.20), которое было исходным при преобразовании в *BCB*-форму модели непрерывной системы. Поэтому описанным уже в параграфе 6.2 способом преобразуем (6.30) в совокупность уравнений:

$$D(q) z(k) = u(k); \tag{6.31}$$

$$E(q) z(k) = y(k). \tag{6.32}$$

Для их преобразования в *BCB*-форму введем следующие переменные состояния:

$$\begin{aligned}
& x_1(k) = z(k-n); \\
& x_2(k) = z(k-n+1) = x_1(k+1); \\
& x_3(k) = z(k-n+2) = x_2(k+1); \\
& \dots\dots\dots \\
& x_n(k) = z(k-1) = x_{n-1}(k+1); \\
& x_n(k+1) = z(k).
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Тогда уравнение (6.31) можно представить в виде

$$x_n(k+1) = \frac{1}{d_0} [u(k) - d_1 x_n(k) - d_2 x_{n-1}(k) - \dots - d_n x_1(k)]. \quad (6.34)$$

По совокупности уравнений (6.33) и (6.34) получаем уравнения состояния описываемой дискретной по времени системы:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \dots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{d_n}{d_0} & -\frac{d_{n-1}}{d_0} & \dots & \dots & -\frac{d_1}{d_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_1(k+1) \\ \dots \\ x_1(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \frac{1}{d_0} \end{bmatrix} \cdot u(k). \quad (6.35)$$

Уравнение (6.32) с учетом (6.33) можно представить в виде

$$y(k) = e_0 x_n(k+1) + e_1 x_n(k) + e_2 x_{n-1}(k) + \dots + e_n x_1(k).$$

Если в него вместо $x_n(k+1)$ подставить соответствующее ему значение из (6.34), то получим

$$y(k) = \left[\left(e_0 - \frac{e_0 d_n}{d_0} \right), \left(e_{n-1} - \frac{e_0 d_{n-1}}{d_0} \right), \dots, \left(e_1 - \frac{e_0 d_1}{d_0} \right) \right] \times \\ \times [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T + \frac{e_0}{d_0} u(k).$$

По уравнениям (6.33) и (6.34) получаем уравнения состояния описываемой дискретной по времени системы. Это уравнение и уравнения (6.35) в совокупности и определяют *ВСВ*-форму математической модели. Они могут быть представлены в типовой векторно-матричной форме как

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (6.36)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \quad (6.37)$$

При этом матрицы состояния, входа и выхода описываемой уравнением (6.29) системы или ее части имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{d_n}{d_0} & -\frac{d_{n-1}}{d_0} & \dots & \dots & -\frac{d_1}{d_0} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ d_0 \end{bmatrix};$$

$$C = \left[\left(e_0 - \frac{e_0 d_n}{d_0} \right), \dots, \left(e_0 - \frac{e_0 d_n}{d_0} \right) \right]; \quad D = \frac{e_0}{d_0}.$$

Если уравнение (6.29) описывает лишь часть дискретной системы, для которой формируется математическая модель в *BCB*-форме, то уравнения (6.36) и (6.37) следует присоединить к другим аналогичным уравнениям системы так, как это уже делалось в аналогичном случае в разделе 6.2.

С другими способами представления математических моделей непрерывных и дискретных по времени систем в форме «вход-состояние-выход» можно ознакомиться, в частности, воспользовавшись [6, 17].

6.4. Типизация математических моделей обыкновенных систем с переменными параметрами

Вышеприведенные математические модели описывают состояния и процессы в обыкновенных системах в пространстве состояний, которое можно назвать координатным. При этом, как уже отмечалось, под *координатным пространством состояний* понимают такое конечномерное метрическое пространство X_K , базис которого образуют характеризующие процессы в описываемой моделью системе величины $x_K = [x_{K1}, x_{K2}, \dots, x_{Kn}]^T$, входящие в математические модели системы в качестве переменных (координат). Такое пространство используется для описания состояний и процессов лишь в системах с неизменяемыми параметрами, структурными связями и алгоритмами. В то же время оно может быть использовано и для описания состояний и процессов в системах с изменяемыми, в том числе и специально, параметрами. Допустимость использования его для описания систем с переменными параметрами объясняется прозрачностью границ между понятиями «координата» (переменная) и «параметр» в алгебраических, дифференциальных, интегральных и разностных уравнениях. Эта прозрачность

определяется тем, что деление описывающих состояния и процессы в системе величин на координаты и параметры определяется местом их расположения в уравнениях ее модели и во многом зависит от того, что мы выделяем, как наиболее существенное во вход-выходных преобразованиях данной системы. Например, моменты инерции космического аппарата (КА) при описании его угловых движений могут рассматриваться не только как параметры КА (что характерно для большинства случаев), но и как дополнительные координатные переменные КА в ситуациях, когда эти моменты специально изменяют в значительных пределах для обеспечения требуемой ориентации аппарата.

Это дает основание ряду специалистов по теории систем считать параметрами системы лишь те входящие в математические модели величины, которые остаются при функционировании системы неизменными или закон изменения которых во времени известен априорно. Остальные переменные и являющиеся в нашем понимании параметрами системы величины можно отнести к множеству величин, образующих вектор параметрического состояния системы x_{Π} .

В этой связи для отражения состояний и процессов в обыкновенных системах с изменяемыми параметрами можно использовать пространство состояний

$$X_0 = X_K \cup X_{\Pi}, \quad (6.38)$$

представляющее собой объединение ортонормированных подпространств координат и параметров системы. Тогда текущее состояние системы, определяемое набором значений координат системы $x_K(t)$ и параметров $x_{\Pi}(t)$, будет характеризоваться фиксированной точкой в расширенном пространстве координатно-параметрического состояния

$$X_0 \ni x_{K\Pi} = \left[x_K^T, x_{\Pi}^T \right]^T. \quad (6.39)$$

Введение подобного координатно-параметрического состояния дает возможность описывать состояния и процессы в обыкновенных системах с переменными параметрами так же, как и в обыкновенных системах со стационарными параметрами, в частности представлять математические модели процессов в таких системах в форме «вход-состояние-выход» вида

$$\sigma x_{K\Pi}(t) = Ax_{K\Pi}(t) + Bu(t), \quad (6.40)$$

$$y(t) = Cx_{K\Pi}(t) + Du(t), \quad (6.41)$$

где, как и ранее, $\sigma x_{кп}(t)$ означает производную по времени от $x_{кп}(t)$ для непрерывных систем (для моделей с непрерывным аргументом – временем t) и $x_{кп}(t+1)$ – для систем с дискретным относительным временем.

Если модель описываемой системы может быть приведена к форме (6.40), (6.41), то соответствующую ей обыкновенную систему с изменяемыми параметрами следует называть линейной. Если же она нелинейна, то математическая модель для нее в форме «вход-состояние-выход» будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma x_{кп}(t) &= g[x_{кп}(t), u(t), f(t)], \\ y(t) &= h[x_{кп}(t), u(t), f(t)].\end{aligned}$$

Здесь $g(\cdot)$ и $h(\cdot)$ – соответственно, n -мерная и r -мерная вектор-функции указанных аргументов.

6.5. Приведение математических моделей сложных линейных стационарных систем к форме «вход-состояние-выход» на основе матричного способа описания их элементов

Формирование математических моделей в *BCB*-форме описанным выше способом не вызывает больших затруднений лишь для сравнительно несложных систем. В ситуациях, когда описываемая система достаточно сложна (имеет много подсистем, которые, возможно, сами весьма сложны и характеризуются многомерными входами и выходами, а также несколько типов связей между подсистемами), получить математическую модель в указанной форме крайне затруднительно, даже если математическая модель этой системы линейна. Следует также добавить, что в большинстве случаев процедуры приведения исходных математических моделей к *BCB*-форме для сложных (пусть и линейных) систем выполняются «вручную» из-за отсутствия строго формализованных алгоритмов и реализованных на их основе программ для ЭВМ.

Получать модели для сложных (в указанном выше смысле) линейных систем в форме «вход-состояние-выход» можно, используя методологию [10–12], базирующуюся на матричном описании всех их подсистем и структурных связей.

Полагаем, что математическая модель линейной стационарной обыкновенной системы (ЛСОС) имеет вид (6.9). Информация о ней, согласно [10], может быть описана с помощью пары матриц

$$N = \begin{bmatrix} n_x & n_u \\ n_y & n_f \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} A & B & E \\ C & D & G \end{bmatrix}, \quad (6.42)$$

первая из которых, **матрица размерностей**, определяет размерности векторов x, y, u, f системы, а вторая, **матрица параметров**, представляет собой блочную матрицу указанного вида, вбирающую в себя информацию о параметрах системы. В случае $n_f = 0$ последняя может быть представлена в усеченной форме без последнего блочного столбца. Очевидно, что элементы матрицы N системы несут в себе информацию о размерностях её матриц A, B, C, D, E, G и поэтому определение последних из P не представляет никаких трудностей.

С целью сохранения в формируемой математической модели ЛСОС исходных обозначений её координат эти две матрицы при описании динамических подсистем следует дополнить четверкой матриц X, Y, U, F , которые несут в себе информацию о составляющих, соответственно, векторов x, y, u, f и имеют размеры, соответственно, $n_x \times 2, n_y \times 2, n_u \times 2, n_f \times 2$. Элементам первого столбца каждой из этих матриц присваивается значение, равное номеру описываемой им подсистемы, а второй столбец образуется записью в него соответствующего вектора, т. е. x, y, u или f . Почему отдано предпочтение такому способу отображения математических моделей для ЛСОС и ее подсистем будет понятно из последующего изложения.

В сложной ЛСОС наряду с динамическими элементами (подсистемами) типа (6.9) могут быть и статические элементы, описываемые уравнениями вида

$$y = D u + G f. \quad (6.43)$$

При $f \equiv 0$ частными видами (6.43) являются: квадраторы входов-выходов, отличающиеся тем, что у них $n_u \neq n_y$, инверторы ($n_u = n_y$; $D = \text{diag}[-1, -1, \dots, -1]$) и коммутаторы.

В последнем случае, если $n_u = n_y$, то D имеет вид матрицы перестановок. При $n_u - n_y \triangleq \rho > 0$ ρ компонентов u не проходит на выход коммутатора и соответствующие им столбцы D имеют только нулевые

элементы. Подматрица из ненулевых столбцов может быть единичной диагональной или матрицей перестановок.

Подобно динамическим системам или элементам и статические элементы (системы) типа (6.43) могут быть описаны соответствующими им матрицами размерностей и параметров N , P , причем

$$N = \begin{bmatrix} 0 & n_u \\ n_y & n_f \end{bmatrix}, \quad P = [D, G], \quad (6.44)$$

и тройками матриц Y , U , F .

Для сложных многомерных ЛСОС, в структуру которых входят динамические и статические подсистемы типа (6.9) и (6.43), определение математических моделей в BCB -форме может быть осуществлено на основе структурного отображения системы и последующего его преобразования по формализованным правилам.

Для структурного отображения ЛСОС каждую из ее подсистем следует представить отдельным элементом (звеном), характеризуя его соответствующими данной подсистеме матрицами N , P , X , Y , U , F , и указать фактические связи в системе векторов входов и выходов ее подсистем, используя при этом традиционные для операторно-структурных схем узлы и сумматоры.

Типовыми вариантами соединения двух подсистем (звеньев структурной схемы) системы, которые могут быть в структуре сложной ЛСОС, являются: *последовательное*; *параллельно-согласное*, для простоты далее называемое просто *параллельным* соединением; *параллельно-встречное*, в дальнейшем называемое также *соединением с обратной связью*; «*входная вилка*» и «*выходная вилка*». Кроме того, к числу типовых соединений, которые могут быть в структурных схемах сложных ЛСОС и подлежать последующим преобразованиям, следует отнести также соединения типа «*соединение с обратной связью и двумя входами*»; «*соединение с обратной связью и двумя выходами*»; «*параллельное соединение с двумя входами*» и «*параллельное соединение с двумя выходами*».

Определение математической модели всей системы в форме «вход-состояние-выход» по подобным образом представленной её структурной схеме сводится к поэтапной свертке последней на основе формализованных правил формирования матриц N , P , X , Y , U , F для объединенных подсистем, состоящих из двух элементов. При таком объединении двух подсистем (звеньев структурной схемы системы) и замене их одной эквивалентной подсистемой (эквивалентным звеном) математи-

ческая модель последней формируется в общем случае также в виде совокупности матриц N, P, X, Y, U, F . Таким образом, каждое эквивалентное звено структурной схемы системы, полученное после замены двух исходных звеньев, описывается тем же самым набором матриц, что и сами исходные звенья (подсистемы).

Все эти матрицы определяются по правилам, которые легко устанавливаются и изложены ниже.

1. Последовательное соединение подсистем

Полагаем, что последовательно связаны между собой два динамических элемента системы, причем так, как показано на рис. 6.1.

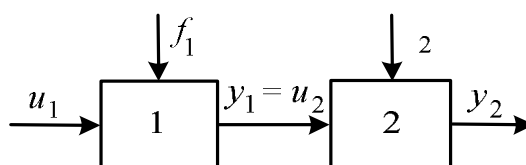


Рис. 6.1. Последовательное соединение подсистем

Условием такого соединения является равенство $y_1 = u_2$. Эквивалентная этим двум элементам система характеризуется следующими матрицами:

$$U_k = U_1; Y_k = Y_2; X_k = [X_1^T, X_2^T]^T; F_k = [F_1^T, F_2^T]^T; \quad (6.45)$$

$$N_k = \begin{bmatrix} n_{x_1+n_{x_2}} & n_{u_1} \\ n_{y_2} & n_{f_1+n_{f_2}} \end{bmatrix}; P_k = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 & E_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 & B_2 D_1 & B_2 G_1 & E_2 \\ D_2 C_1 & C_2 & D_2 D_1 & D_2 G_1 & G_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее стоящие в матрицах параметров нули означают нулевые блок-матрицы соответствующих размерностей. В частности, в данном случае второй элемент первой строки означает нулевую блок-матрицу размера $n_{x_1} \times n_{x_2}$, а последний — блок-матрицу размера $n_{x_1} \times n_{x_2}$.

Если оба элемента в данном соединении или один из них являются статическими и описываются соответственно (6.43), то матрицы

N, P, X, Y, U, F для эквивалентной им системы могут быть получены из (6.45) обнулением матриц A, B, E, C у каждого статического элемента в таком соединении и учетом соответствующих изменений в векторах x, y, u, f .

В ситуациях, когда первый элемент в соединении является статическим, а второй – динамическим, для эквивалентной им системы получим

$$U_k = U_1; \quad Y_k = Y_2; \quad X_k = X_2; \quad F_k = \left[F_1^T, F_2^T \right]^T;$$

$$N_k = \begin{bmatrix} n_{x_2} & n_{u_1} \\ n_{y_2} & n_{f_1} + n_{f_2} \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 & E_2 \\ C_2 & D_2 D_1 & D_2 G_1 & G_2 \end{bmatrix}.$$

Если же в соединении первый элемент динамический, а второй статический, то у эквивалентной системы

$$U_k = U_1; \quad Y_k = Y_2; \quad X_k = X_1; \quad F_k = \left[F_1^T, F_2^T \right]^T;$$

$$N_k = \begin{bmatrix} n_{x_1} & n_{u_1} \\ n_{y_2} & n_{f_1} + n_{f_2} \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & E_1 & 0 \\ D_2 C_1 & D_2 D_1 & D_2 G_1 & G_2 \end{bmatrix}.$$

Наконец, если оба элемента статические, то у эквивалентной их последовательному соединению системы

$$U_k = U_1; \quad Y_k = Y_2; \quad F_k = \left[F_1^T, F_2^T \right]^T;$$

$$N_k = \begin{bmatrix} 0 & n_{u_1} \\ n_{y_2} & n_{f_1} + n_{f_2} \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} B_1 & E_1 & 0 \\ D_2 D_1 & D_2 G_1 & G_2 \end{bmatrix}.$$

2. Параллельное соединение

Параллельное соединение двух элементов (рис. 6.2) имеет место, если

$$u = u_1 = u_2; \quad y = y_1 \pm y_2.$$

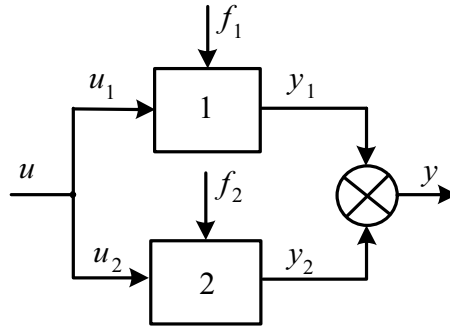


Рис. 6.2. Параллельное соединение подсистем

Плюс (минус) здесь и далее в матрицах параметров P соответствует суммированию (вычитанию) выходных сигналов первого и второго элементов.

Если таким образом связаны два динамических элемента, то эквивалентная им система имеет

$$U_k = U_1 = U_2; \quad Y_k = Y_1 \pm Y_2; \quad X_k = [X_1^T, X_2^T]^T;$$

$$F_k = [F_1^T, F_2^T]^T;$$

$$N_k = \begin{bmatrix} n_{x_1} + n_{x_2} & n_{u_1} \\ n_{y_1} & n_{f_1} + n_{f_2} \end{bmatrix};$$

$$P = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 & E_1 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & 0 & E_2 \\ C_1 & \pm C_2 & D_1 \pm D_2 & G_1 & \pm G_2 \end{bmatrix}. \quad (6.46)$$

Для параллельного соединения двух статических элементов или одного статического и одного динамического матрицы $X_k, Y_k, U_k, F_k, N_k, P_k$ получаются из (6.46) как частные случаи.

3. Соединение с обратной связью

Условиями соединения с обратной связью (рис. 6.3) являются следующие равенства:

$$u_1 = u \pm y_2; \quad y_1 = u_2.$$

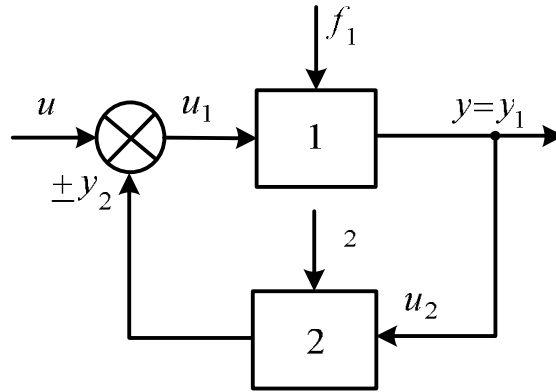


Рис. 6.3. Соединение подсистем с обратной связью

Здесь знак «+» соответствует соединению с положительной обратной связью (ПОС), а знак минус – с отрицательной обратной связью (ООС).

Для такого типа соединения двух динамических элементов у эквивалентной им системы получаем:

$$U_k = U; \quad Y_k = Y_1; \quad X_k = [X_1^T, X_2^T]^T; \quad F_k = [F_1^T, F_2^T]^T;$$

$$N_k = \begin{bmatrix} n_{x_1} + n_{x_2} & n_{u_1} \\ n_{y_1} & n_{f_1} + n_{f_1} \end{bmatrix}; \quad (6.47)$$

$$P_k = \begin{bmatrix} A_1 \pm B_1 H & \pm B_1 R C_2 & B_1 R & E_1 \pm B_1 L & \pm B_1 R G_2 \\ B_2 (C_1 \pm D_1 H) & A_2 \pm B_2 D_1 R C_2 & B_1 D_1 R & B_2 (G_1 \pm D_1 L) & E_2 \pm B_2 D_1 R G_2 \\ C_1 \pm D_1 H & \pm D_1 R C_2 & D_1 R & G_1 \pm D_1 L & \pm D_1 R G_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$R = (I \mp D_2 D_1)^{-1}; \quad H = R D_2 C_1; \quad L = R D_2 G_1.$$

4. Соединение типа «входная вилка»

Необходимость преобразования соединений типа «входная вилка» появляется в тех случаях, когда у системы имеется несколько входных элементов со своими в общем случае многомерными векторами управляемых входов. Замена таких соединений эквивалентным звеном равно-

сильна «сборке» входных управляющих (полезных) и возмущающих воздействий на систему и учету преобразований, которые претерпевают эти входы непосредственно во входящих в вилку элементах. Условиями такого соединения (рис. 6.4) двух динамических элементов являются

$$y_k = y_1 \pm y_2 ; \quad n_{y_1} = n_{y_2} = n_{y_k} .$$

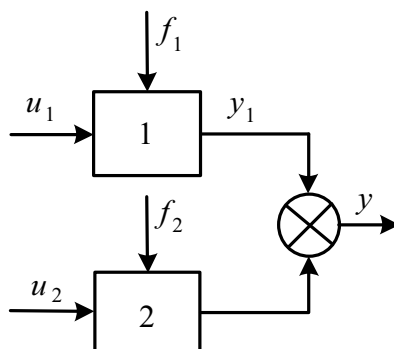


Рис. 6.4. Соединение подсистем типа «входная вилка»

При этом для эквивалентного звена получаем:

$$Y_k = Y_1; \quad X_k = [X_1^T, X_2^T]^T; \quad F_k = [F_1^T, F_2^T]^T; \quad (6.48)$$

$$N_k = \begin{bmatrix} n_{x_1} + n_{x_2} & n_{u_1} + n_{u_2} \\ n_{y_1} & n_{f_1} + n_{f_2} \end{bmatrix};$$

$$P_k = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 & 0 & E_2 \\ C_1 & \pm C_2 & D_1 & \pm D_2 & G_1 & \pm G_2 \end{bmatrix}.$$

В тех ситуациях, когда элементы, образующие входную вилку, имеют различные векторы выхода, замена их эквивалентным звеном должна включать в себя процедуру формирования их общего выхода y из векторов y_1 и y_2 . При этом, если у последних нет общих составляющих, то следует принять

$$U_k = [U_1^T, U_2^T]^T; \quad Y_k = [Y_1^T, Y_2^T]^T; \quad X_k = [X_1^T, X_2^T]^T;$$

$$F_k = [F_1^T, F_2^T]^T; \quad N_k = \begin{bmatrix} n_{x_1} + n_{x_2} & n_{u_1} + n_{u_2} \\ n_{y_1} + n_{y_2} & n_{f_1} + n_{f_2} \end{bmatrix}; \quad (6.49)$$

$$P_k = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 & 0 & E_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & 0 & G_1 & 0 \\ 0 & \pm C_2 & 0 & \pm D_2 & 0 & \pm G_2 \end{bmatrix}.$$

Ситуация, когда у векторов y_1 и y_2 часть компонентов общая (это относительно редкий на практике случай), здесь не рассматривается, однако не составляет труда и для этого случая получить матричное описание типа (6.48) или (6.49), сформировав из u_1 и u_2 общий вектор входа и объединив соответствующие столбцы уравнений динамики и общие строки уравнений выхода у эквивалентной системы.

5. Соединение типа «выходная вилка»

В соединениях типа «выходная вилка» (рис. 6.5) общим является вектор управляемого входа у каждого элемента, т. е. $u_1 = u_2$.

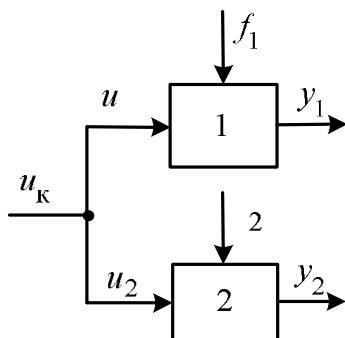


Рис. 6.5. Соединение подсистем типа «выходная вилка»

Для эквивалентной системы при двух входящих в «выходную вилку» динамических элементах получаем:

$$U_k = U_1 = U_2; \quad Y_k = [Y_1^T, Y_2^T]^T; \quad X_k = [X_1^T, X_2^T]^T;$$

$$F_k = [F_1^T, F_2^T]^T; \quad N_k = \begin{bmatrix} n_{x_1} + n_{x_2} & n_{u_1} \\ n_{y_1} + n_{y_2} & n_{f_1} + n_{f_2} \end{bmatrix}; \quad (6.50)$$

$$P = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 & E_1 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & 0 & E_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & G_1 & 0 \\ 0 & C_2 & D_2 & 0 & G_2 \end{bmatrix}.$$

Если во входную или выходную вилку входит пара статических элементов или один статический и другой динамический, расчетные соотношения для N , P , X , Y , U , F эквивалентных этим соединениям систем вновь могут быть получены как частные случаи (6.48)–(6.50).

6. Соединение с обратной связью и двумя входами

При соединении подсистем 1–3 с обратной связью и двумя входами (рис. 6.6) имеем две точки приложения в общем случае многомерных полезных входных воздействий на систему.

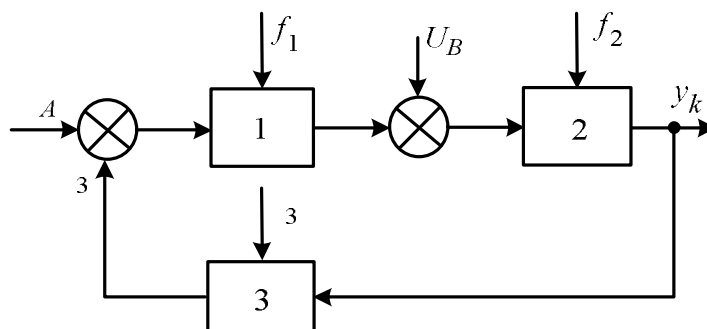


Рис. 6.6. Соединение с обратной связью и двумя входами

Для определения математической модели в BCB -форме для эквивалентной такому соединению элементов системы необходимо провести структурное преобразование исходной схемы, приведенной на рис. 6.6. В частности, ее можно представить эквивалентной схемой, приведенной на рис. 6.7.

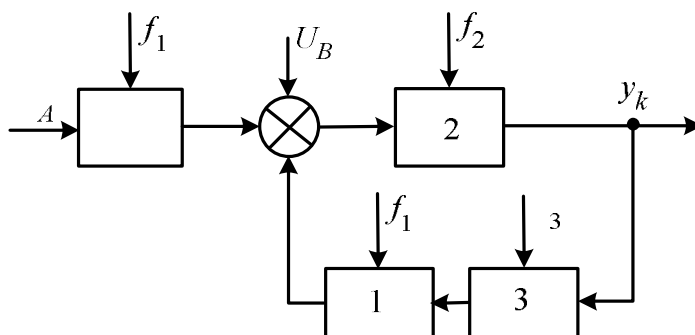


Рис. 6.7

Последующие преобразования полученной таким образом системы подпадают под вышерассмотренные варианты объединения параллельных и последовательных соединений элементов и соединений типа «входная вилка», которые должны выполняться в допустимой последовательности.

7. Соединение с обратной связью и двумя выходами

При соединении с обратной связью и двумя выходами (рис. 6.8) для получения математической модели в *BCB*-форме необходимо провести предварительное структурное преобразование.

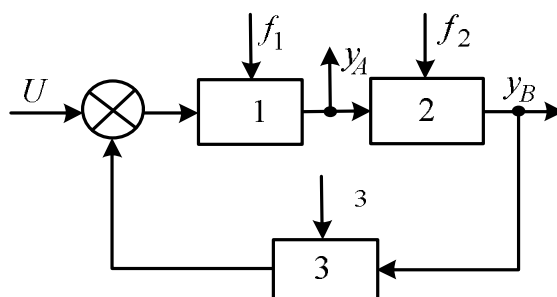


Рис. 6.8. Соединение с обратной связью и двумя выходами

В частности, структуру эквивалентной системы можно представить согласно рис. 6.9.

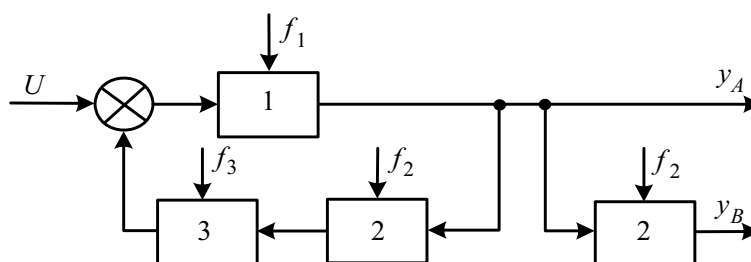


Рис. 6.9

Последующая свертка этой структурной схемы и формирование на этой основе математической модели системы в форме «вход-состояние-выход» вновь будет сводиться к поэтапному использованию процедур объединения последовательно и параллельно соединенных элементов, а также в свертке соединения типа «выходная вилка».

8. Параллельное соединение с двумя входами или выходами

При формировании математических моделей в *BCB*-форме для систем с подобными вариантами структур или для подсистем с такими структурами (рис. 6.10, *а* и *б*) также необходимы предварительные структурные преобразования.

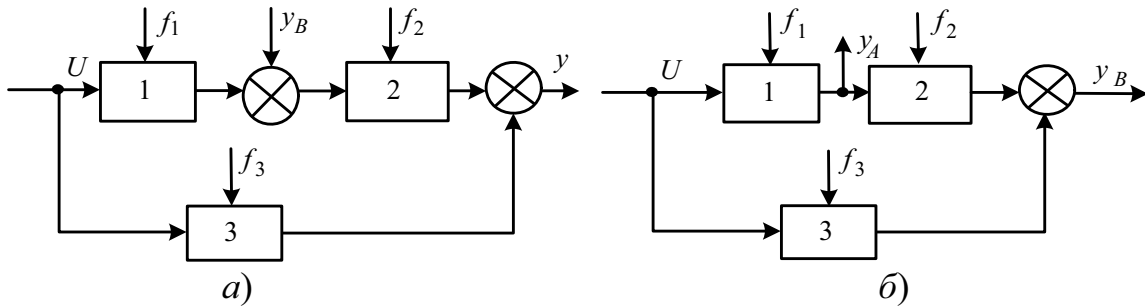


Рис. 6.10. Параллельные соединения:
а – с двумя входами; *б* – с двумя выходами

В частности, можно им поставить в соответствие структурные схемы, представленные соответственно, на рис. 6.11, *а* и *б*.

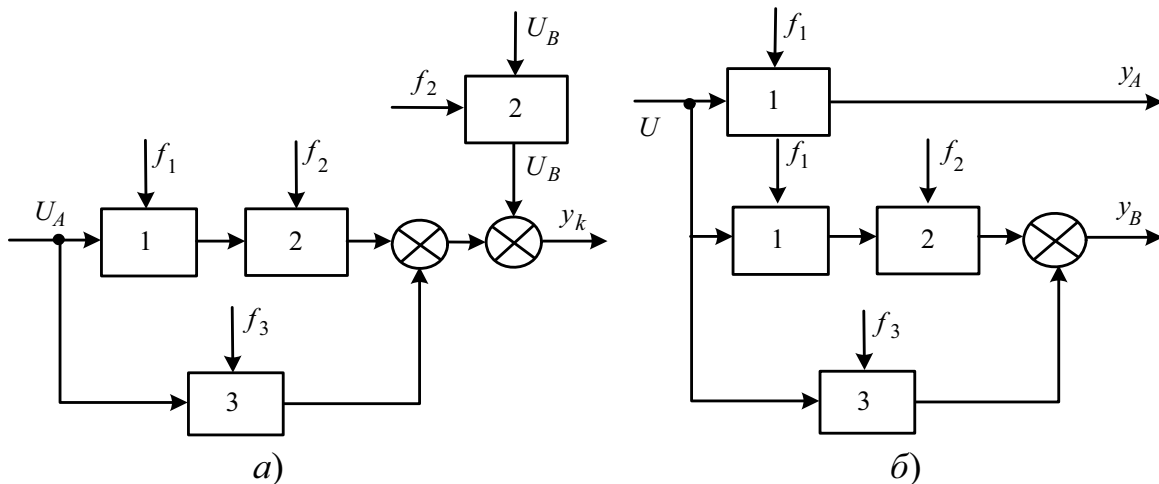


Рис. 6.11

Дальнейшие упрощения этих структурных схем вновь сводятся к последовательности объединения попарно элементов этих схем на основе известных процедур замены пары последовательно или параллельно соединенных элементов эквивалентным им звеном или же к объединениям типа «входная вилка» или «выходная вилка».

Заметим также, что все процедуры формирования математических моделей в *BCB*-форме для эквивалентных систем при всех рассмотрен-

ных выше типовых соединениях легко алгоритмизируются. На их основе на кафедре интегрированных компьютерных систем управления Томского политехнического университета создан специализированный пакет прикладных программ для автоматизированного решения указанных задач на ЭВМ применительно к сложным ЛСОС. С этой целью необходимо также использовать матричный способ описания структур описываемых систем. В частности, для этого можно воспользоваться описанным в главе 4 матричным способом описания структур систем, базирующимся на использовании указанных в разделе 4.4 матриц S_0 размера $N \times 3$, где N – число подсистем в описываемой системе.

6.6. Типизация математических моделей состояний и процессов в логических системах

Как уже отмечалось в разделе 2.9, под *логическим устройством* или *системой* понимают устройство или систему, состояния и процессы в которых описываются логическими переменными и формируемыми на их основе логическими уравнениями и/или неравенствами. Обычно рассматриваются лишь установившиеся режимы, при которых логические переменные устойчиво удерживаются на допустимых уровнях, например, на уровне 0 или 1 – для устройств, характеризующихся булевыми переменными. Подобным образом описывают состояния и процессы в цифровых устройствах управления, в других средствах цифровой информационной и вычислительной техники, называемых *конечными автоматами*. При этом переходные процессы в реальном устройстве, связанные с изменениями его логических переменных с одного допустимого значения на другое, не принимаются во внимание.

Математическим аппаратом исследования дискретных состояний и процессов в таких устройствах и системах является математическая логика, оперирующая с логическими переменными, логическими функциями и логическими уравнениями и неравенствами [8, 9], описанными в разделе 2.9.

Типизация математических моделей логических устройств и систем обычно сводится к приведению этих моделей (формул и/или уравнений) к классу совершенных конъюнктивных и совершенных дизъюнктивных нормальных форм.

Применительно к логическим устройствам, используемым в вычислительной технике и автоматике, такое описание характеризует множе-

ства статических состояний, в которых могут находиться эти логические устройства (автоматы).

Часто при формировании математической модели конечного автомата по условиям её последующего использования не требуется учитывать не только переходные процессы, но и временные запаздывания в выполнении логических операций. Автоматы, допускающие подобный способ описания протекающих в них процессов, называют *конечными автоматами без памяти* или *комбинационными автоматами* [9]. Считается, что состояния подобных автоматов характеризуются конечным множеством входных сигналов (входным алфавитом) $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_m)$, конечным множеством выходных сигналов (выходным алфавитом) $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_r)$ и вектор-функцией $h: u \rightarrow y$, отображающей входной алфавит автомата в выходной так, что

$$y = h(u). \quad (6.51)$$

Наряду с конечными автоматами без памяти широко используются и *конечные автоматы с памятью*. Под последними понимают конечные автоматы, для детального описания процессов в которых необходимо использовать наряду с входным алфавитом $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_m)$ и выходным алфавитом также конечное множество внутренних переменных, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, называемых также внутренним алфавитом, внутренним состоянием или просто состоянием автомата, а также вектор-функцию $g: u \times x \rightarrow x$, определяющую отображение множества $u \times x$ на состояние x , и вектор-функцию $h: u \times x \rightarrow y$. Первая из этих функций определяет динамику автомата, а вторая – связь его выходного алфавита y с входным и внутренним алфавитами. Заметим, что входной, внутренний и выходной алфавиты автомата могут по аналогии с терминологией, уже использовавшейся для характеристики обыкновенных инерционных систем, называться, соответственно, входом, состоянием и выходом автомата.

Функционируют конечные автоматы с памятью (КАП) в дискретном автоматном времени, представляющем собой последовательность тактов, т. е. интервалов времени, чаще всего постоянной длительности. Считается, что в пределах каждого такта работы автомата его входной, внутренний и выходной алфавиты (вход, состояние и выход) остаются неизменными. При этом под действием поступившего на вход автомата на такте t сигнала $u(t)$ автомат изменяет свое внутреннее состояние $x(t)$ на новое состояние $x(t+1)$ на следующем такте.

Конечные автоматы с памятью по принципу своей работы делятся на синхронные и асинхронные. В синхронном автомате моменты «считывания» входных сигналов задаются принудительно специально формируемыми синхронизирующими импульсами. В асинхронные автоматы входные сигналы поступают непрерывно. При этом изменения внутренних состояний асинхронных КАП может происходить как за счет изменений уровней входных сигналов, так и из-за инерционности процесса перехода таких автоматов из одного состояния в другое.

Таким образом, отличительной особенностью конечных автоматов с памятью по сравнению с автоматами без памяти (комбинационными автоматами) является характерная для них инерционность, обуславливающая переходные процессы в таких автоматах при изменениях входных сигналов, причем в течение некоторого времени и после прекращения их изменений. В теории систем свойство систем, связанное с изменением их состояний под действием уже исчезнувших входных сигналов (возмущений), принято называть *памятью системы*, и именно это их свойство отражается в названии конечных автоматов с памятью. Очевидно, что чем больше время такой реакции системы (*время памяти системы*), тем сложнее изменять её состояния и выходы желаемым образом.

Если для описания временных процессов в конечных автоматах ввести относительное время t , определяемое как отношение фактического текущего времени к длительности такта работы автомата, и рассматривать только целочисленные значения этого времени, т. е. полагать, что $t \in \mathbb{N}$, то протекающие в конечном автомате переходные процессы при изменениях входных сигналов могут описываться совокупностью логических уравнений:

$$x(t+1) = g[x(t), u(t)]; \quad (6.52)$$

$$y(t) = h[x(t), u(t)]. \quad (6.53)$$

Таким образом, математическая модель процессов в конечных автоматах с памятью имеют ту же форму, что и модель типа «вход-состояние-выход» для обыкновенных непрерывных и дискретных систем, и носит то же название (модель в *BCB*-форме). Поэтому первое из этих уравнений, так же как и для обыкновенных систем, принято называть уравнением динамики автомата, а второе – уравнением выхода.

Установившиеся статические режимы в КАП при этом могут быть описаны математической моделью вида

$$0 = g^{\circ}[x, u]; \quad (6.54)$$

$$y = h[x, u], \quad (6.55)$$

которая получается из (6.52), (6.53) при неучёте в них временных зависимостей входных, внутренних и выходных сигналов. Однако статические состояния в подобных автоматах возможны лишь при условии, что они являются устойчивыми. В противном случае при изменениях входов в КАП могут возникать режимы нежелательных изменений внутренних состояний КАП и генерации выходных сигналов, не соответствующих требуемым.

Для приведения математических моделей логических систем (конечных автоматов) к типовым формам (6.51)–(6.55) необходимо преобразовывать исходные логические уравнения, описывающие состояния и процессы в этих системах, используя формулы, отражающие законы эквивалентных преобразований формул и уравнений булевой алгебры. К сожалению, процессы таких преобразований до сих пор еще не автоматизированы.

6.7. Типизация математических моделей логики-обыкновенных систем

Специфической особенностью логики-обыкновенных систем (ЛОС) является необходимость использования для описания их состояний и протекающих в них процессов различных типов переменных, относящихся к двум различным классам. Часть из них определяется на поле вещественных (реже – целых или комплексных) чисел, а другая часть относится к логическим переменным. Для краткости, как и ранее, далее будем называть первые переменные *обыкновенными*, а вторые – *логическими*.

Вышеуказанная специфика ЛОС не позволяет использовать для отражения их состояний только метрические пространства. Для этих целей необходимо использовать в общем случае топологические пространства $S_4(X, \tau)$ на множестве переменных x , характеризующих одновременно координатное x_k , параметрическое x_{Π} , структурное x_c и алгоритмическое x_a состояние, т. е. топология τ этого пространства

должна включать все эти четыре типа множеств переменных состояний систем [12].

Следует также заметить, что между определениями координат и параметров системы, с одной стороны, и с другой – между понятиями структурного и алгоритмического состояния существуют достаточно прозрачные границы. Действительно, при формализованном определении модели системы ее изменяемые параметры могут быть отнесены к ее координатным переменным, а переалгоритмизация какой-либо части системы в процессе её функционирования может быть отражена в структурной схеме системы включением по установленному правилу одного из параллельно соединенных элементов, отражающих выбранный алгоритм этой части системы. По этой причине с целью упрощения типизированных математических моделей состояния ЛОС можно характеризовать лишь двумя множествами – обыкновенным x_o и логическим x_l состояниями. При этом

$$x_o \triangleq x_k \cup x_{II}; \quad x_l \triangleq x_c \cup x_a. \quad (6.56)$$

Таким образом, применительно к логико-обыкновенным системам пространство состояний может быть определено как топологическое пространство S_2 , состоящее из двух подпространств, одно из которых S_0 – метрическое, в частности эвклидово, определяет обыкновенные переменные состояния систем, а другое – S_l определяется как множество целочисленных элементов булевой (или реже – многозначной) логики и характеризует логические переменные таких систем [9]. Оба эти подпространства предполагаются открытыми и позволяют определять состояния не только ЛОС в целом, но и их отдельных подсистем, а также состояния сугубо обыкновенных и/или чисто логических систем. При этом протекающие в логико-обыкновенных системах процессы будут отражаться не одной, а двумя фазовыми траекториями – в каждом из образующих S_2 подпространств.

С целью использования введенного пространства состояний S_2 для типизации математических моделей логико-обыкновенных систем, структурные схемы последних следует преобразовывать и отображать согласно рис. 6.12.

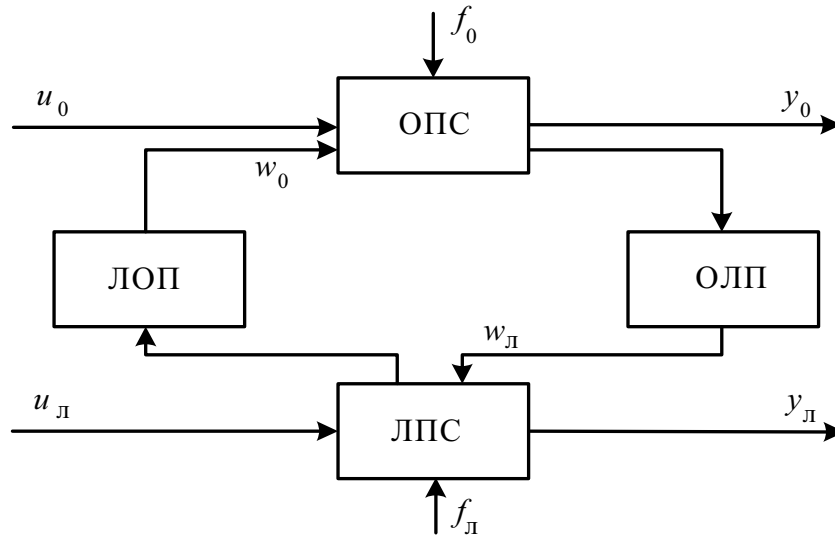


Рис. 6.12. Обобщенная структура логико-обыкновенной системы

Здесь ОПС – *обыкновенная подсистема*; ЛПС – *логическая подсистема* (конечный автомат) логико-обыкновенной системы; ЛОП и ОЛП – соответственно логико-обыкновенный и обыкновенно-логические преобразователи; u_0 и $u_л$ – векторы соответственно координатно-параметрического и структурно-алгоритмических полезных воздействий (управлений) на систему; f_0 и $f_л$ – векторы такого же типа возмущений, действующих на систему; y_0 и $y_л$ – векторы выходов соответственно обыкновенной и логической подсистем. При этом полагаем также, что

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_k^T & x_n^T \end{bmatrix}^T; \quad x_л = \begin{bmatrix} x_c^T & x_a^T \end{bmatrix}^T, \quad (6.57)$$

а характеризующие входы, состояния и выходы системы в целом векторы

$$u = \begin{bmatrix} u_0^T & u_л^T \end{bmatrix}^T; \quad f = \begin{bmatrix} f_0^T & f_л^T \end{bmatrix}^T; \quad x = \begin{bmatrix} x_0^T & x_л^T \end{bmatrix}^T; \quad y = \begin{bmatrix} y_0^T & y_л^T \end{bmatrix}^T. \quad (6.58)$$

При таких обозначениях для логико-обыкновенных систем, структуры которых соответствуют рис. 6.12, в качестве типовой математической модели может быть использована модель вида:

$$\sigma x_0(t) = g_0[x_0(t), u_0(t), f_0(t), w_0(t)]; \quad (6.59)$$

$$y_0(t) = h_0[x_0(t), u_0(t), f_0(t), w_0(t)]; \quad (6.60)$$

$$\sigma x_{\text{л}}(t) = g_{\text{л}}[x_{\text{л}}(t), u_{\text{л}}(t), f_{\text{л}}(t), w_{\text{л}}(t)]; \quad (6.61)$$

$$y_{\text{л}}(t) = h_{\text{л}}[x_{\text{л}}(t), u_{\text{л}}(t), f_{\text{л}}(t), w_{\text{л}}(t)]; \quad (6.62)$$

$$w_{\text{о}}(t) = \xi_{\text{о}}[x_{\text{л}}(t), u_{\text{л}}(t), f_{\text{л}}(t), w_{\text{л}}(t)]; \quad (6.63)$$

$$w_{\text{л}}(t) = \xi_{\text{л}}[x_{\text{о}}(t), u_{\text{о}}(t), f_{\text{о}}(t), w_{\text{о}}(t)]. \quad (6.64)$$

Модель (6.59)–(6.64) описывает и частные варианты систем. В частности, уравнения (6.59), (6.60) представляют собой модель обыкновенной системы в форме «вход-состояние-выход», уравнения (6.61) и (6.62) – аналогичной формы модель для логической системы (конечного автомата с памятью), а уравнения (6.63) и (6.64) – вход-выходную связь в логических устройствах и системах без памяти.

Вышеприведенная модель ЛОС может быть записана и в более сжатом виде, а именно в виде:

$$\sigma x(t) = g[x(t), u(t), f(t), w(t)]; \quad (6.65)$$

$$y(t) = h[x(t), u(t), f(t), w(t)]; \quad (6.66)$$

$$w(t) = \xi[x(t), u(t), f(t), w(t)], \quad (6.67)$$

если воспользоваться принятыми выше обозначениями (6.57), (6.58) и принять

$$w = \begin{bmatrix} w_{\text{о}}^{\text{T}}, w_{\text{л}}^{\text{T}} \end{bmatrix}^{\text{T}}.$$

Модели логико-обыкновенных систем в форме (6.59)–(6.64) или в форме (6.65)–(6.67), особенно для ЛОС с дискретным аргументом t , удобны при расчётах процессов в таких системах на ЭВМ, так как целиком базируются на итеративных алгебраических и логических процедурах. Следует заметить, что применительно к этому классу сложных систем именно моделирование на ЭВМ является основным средством исследования в процессе их проектирования. В то же время процесс формирования таких типовых математических моделей ЛОС не формализован в должной мере и в этой связи требует существенных временных и интеллектуальных затрат.

Контрольные вопросы

1. Приведите уравнения линейных стационарных систем, записанные в форме «вход-выход», «вход-состояние-выход».
2. Приведите уравнения нелинейных стационарных систем, записанные в форме «вход-выход», «вход-состояние-выход».
3. Что понимают под конечным автоматом?
4. Каковы основные разновидности конечных автоматов и их типовые математические модели?
5. Чем отличаются математические модели логико-обыкновенных систем от моделей конечных автоматов и обыкновенных систем?
6. Какова типовая форма математической модели логико-обыкновенной системы?

Библиографический список к главе 6

1. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1994.
2. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. – 6-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
3. *Волков Е. А.* Численные методы. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1987.
4. *Горбатов В. А.* Дискретная математика: учебник. – М.: АСТ: Астрель, 2006.
5. *Денис Дж. мл., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: пер. с англ. – М.: Мир, 1988.
6. *Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч.* Пространство состояний в теории управления. – М.: Наука, 1970.
7. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978.
8. *Корниенко А. В.* Дискретная математика: учебное пособие. – Томск: Издательско-полиграфическая фирма Томского политехнического ун-та, 1996.
9. *Левин В. И.* Введение в динамическую теорию конечных автоматов. – Рига: Зинатне, 1975.
10. *Мальшенко А. М.* Определение матриц состояния, входов и выходов линейных динамических систем по их структурным схемам // Автоматика и телемеханика, 1991, № 4. – С. 42–46.

11. *Мальшенко А. М., Шелков Д. В.* Приведение математических моделей сложных линейных стационарных систем к форме «вход-состояние-выход» на основе матричного способа описания их подсистем // Доклады научн./практ. семинара “Проблемы синтеза и проектирования систем автоматического управления”, Новосибирск, 13–15 июня 2001 г. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001.
12. *Мальшенко А. М.* Системы автоматического управления с избыточной размерностью вектора управления. – Томск: Изд-во Томского политехнического ун-та, 2005.
13. *Мироновский Л. А., Михайлов Н. Л.* Классификация канонических форм линейных многосвязных систем / В кн.: Вычислительные машины, комплексы и сети. Труды ЛИАП, вып. 182. – Л.: Ленинградский ин-т авиационного приборостроения, 1987. – С. 132–136.
14. *Мудров А. Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках БЕЙСИК, ФОРТРАН и ПАСКАЛЬ. – Томск: МП "Раско", 1992.
15. *Самарский А. А.* Введение в численные методы. – 3-е изд. – СПб.: Лань, 2005.
16. *Смагина Е. М.* Вопросы анализа линейных многомерных объектов с использованием понятия нуля системы. – Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1990.
17. Справочник по теории автоматического управления / под ред. *Красовского А. А.* – М.: Наука, 1987.
18. *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. – М.: Наука, 1985.

ТИПОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Для решения практических задач анализа и/или синтеза систем, описываемых линейными математическими моделями с обыкновенными производными и постоянными параметрами (линейных стационарных обыкновенных систем), широко используются такие типовые характеристики динамических свойств подобных систем, как передаточные функции, передаточные матрицы, частотные характеристики, переходные и импульсные переходные (весовые) функции. В данной главе вводятся все эти понятия, описываются способы их аналитического и экспериментального определения.

7.1. Передаточные функции и передаточные матрицы линейных стационарных обыкновенных непрерывных систем

Для линейных стационарных обыкновенных непрерывных систем (далее сокращенно – ЛСОН-систем) математические модели, как уже отмечалось в главе 4, чаще всего записывают в какой-либо типовой форме. При этом наиболее часто используются модели в форме «вход-выход» и «вход-состояние-выход». Первые из них записываются либо непосредственно относительно входной и выходной переменных рассматриваемой системы и их производных по времени, либо в символической форме с использованием для этих целей условного обозначения оператора дифференцирования по времени типа

$$p \triangleq \frac{d}{dt}. \quad (7.1)$$

Оперирование непосредственно с дифференциальными уравнениями при решении практических задач математического моделирования, анализа и синтеза систем не всегда удобно. К тому же решение задач анализа с использованием непосредственно математических моделей, представленных в дифференциальной форме классическим методом, на практике удобно лишь для сравнительно невысокого порядка этих моделей. Более практичным в этом плане является использование опе-

рационального исчисления и представление для этих целей описывающей динамические процессы в рассматриваемой системе математической модели в операторной форме с использованием какого-либо операционного исчисления. В этом случае, как известно, получающаяся после такого преобразования модель состоит только из алгебраических уравнений и поэтому все промежуточные преобразования этих моделей могут выполняться с использованием простых операций линейной алгебры. Все это существенно упрощает подобные преобразования и позволяет находить общие и частные решения относительно интересующих внутренних или выходных переменных для этих моделей с использованием операций обратного преобразования или теории вычетов.

В последнее время для линейных стационарных моделей с обыкновенными производными и непрерывным аргументом – временем t используется операторное преобразование Лапласа, формулы прямого и обратного преобразования которого уже были приведены в главе 2, а используемые при переходе от дифференциальных уравнений к их операторным аналогам правила (теоремы) отражены в приложении 3.

Согласно этим правилам дифференциальное уравнение

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) =$$

(7.2)

$$b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t)$$

при **нулевых начальных условиях** относительно переменных x и y , т. е. при

$$x(0) = \frac{dx(0)}{dt} = \dots = \frac{dx^{m-1}(0)}{dt^{m-1}} = 0$$

и (7.3)

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \dots = \frac{dy^{n-1}(0)}{dt^{n-1}} = 0,$$

записывается в операторной форме с использованием преобразования Лапласа как

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \right) y(s) =$$

$$\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \right) x(s).$$

(7.4)

Здесь

$$x(s) = L[x(t)]; \quad y(s) = L[y(t)] -$$

изображения по Лапласу, соответственно, переменных $x(t)$ и $y(t)$.

Заметим, что эквивалентное дифференциальному уравнению (7.2) операторное уравнение (7.4) по форме записи совпадает с символической формой уравнения (7.2):

$$\begin{aligned} & \left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \right) y(t) = \\ & \left(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 \right) x(t), \end{aligned} \quad (7.5)$$

однако это совпадение имеет место лишь при нулевых начальных условиях (7.3). К тому же, уравнение (7.4) записывается относительно изображений переменных $x(t)$ и $y(t)$, а второе – относительно самих этих переменных.

Если ввести обозначения

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (7.6)$$

и

$$B(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0, \quad (7.7)$$

то уравнение (7.4) запишется в более компактной форме как

$$A(s)y(s) = B(s)x(s). \quad (7.8)$$

Напомним, что операторные уравнения являются алгебраическими и поэтому для нахождения аналитических выражений для изображений интересующих нас переменных можно использовать хорошо известные правила алгебраических преобразований. В частности, из (7.8) следует, что

$$y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot x(s) \triangleq W(s) \cdot x(s). \quad (7.9)$$

Тем самым определяется непосредственная связь изображения $y(s)$ переменной $y(t)$ с изображением $x(s)$ переменной $x(t)$.

Если в описываемом уравнением (7.2) устройстве или системе x – входной сигнал, а y – выходной, то величина

$$W(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (7.10)$$

называется **передаточной функцией** этого устройства или системы.

В общем случае применительно к ЛСОН-системам с одним входом и одним выходом (одномерным по входу и выходу) **передаточной функцией** называют отношение лапласового изображения выходного сигнала к лапласовому изображению входного сигнала при нулевых начальных условиях [1, 3, 4, 7, 8]. Таким образом, передаточная функция $W(s)$ с учетом (7.9) представляет собой обобщенный оператор преобразования изображения входного сигнала $x(s)$ в изображение выходного сигнала $y(s)$. Она отражает взаимную связь между выходным и входным сигналами устройства или системы как в статических, так и в динамических режимах работы.

Если ЛСОН-система имеет несколько входных сигналов и/или несколько выходных (многомерна по входу и/или выходу), то для описания вход-выходного преобразования такой системы в операторной форме необходимо использовать набор передаточных функций типа (7.10), которые характеризуют связи между всеми парами из входных и выходных сигналов. Если при этом вектор входных сигналов (переменных) $x \in R^\mu$ и вектор выходных есть $y \in R^v$, то вышеуказанный набор передаточных функций должен включать в себя все множество:

$$W_{y_i x_j}(s) = \frac{y_i(s)}{x_j(s)}, \text{ где } i \in \overline{1, v}; j \in \overline{1, \mu}. \quad (7.11)$$

Такое множество характеризующих вход-выходные связи передаточных функций обычно записывают в матричном виде. С этой целью используют понятие **передаточной матрицы** системы, под которой для систем рассматриваемого класса понимают

$$W(s) = \left[W_{y_i x_j}(s) \right] = \begin{bmatrix} W_{y_1 x_1}(s) & W_{y_1 x_2}(s) & W_{y_1 x_3}(s) & \dots & W_{y_1 x_\mu}(s) \\ W_{y_2 x_1}(s) & W_{y_2 x_2}(s) & W_{y_2 x_3}(s) & \dots & W_{y_2 x_\mu}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{y_{v-1} x_1}(s) & \dots & \dots & \dots & W_{y_{v-1} x_\mu}(s) \\ W_{y_v x_1}(s) & W_{y_v x_2}(s) & \dots & \dots & W_{y_v x_\mu}(s) \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

В этом случае сохраняется единство вход-выходного описания одномерных и многомерных по входу и выходу систем. В частности, уравнение (7.8) применимо для тех и других систем, если в случае многомерных по входу и выходу систем полагать в нём x и y векторными величинами, а $W(s)$ – передаточной матрицей.

Если исходная математическая модель динамики описываемой многомерной по входу и выходу системы имеет форму «вход-состояние-выход» вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t); \quad (7.13 a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (7.13 b)$$

где $u \in R^m$; $x \in R^n$; $y \in R^r$ – соответственно вход, состояние и выход системы, то для определения передаточных матриц последней необходимо предварительно записать уравнения (7.13) в операторной форме при нулевых начальных условиях $x(0) = y(0) = 0$, а именно, как

$$s x(s) = A x(s) + B u(s); \quad (7.14)$$

$$y(s) = C x(s) + D u(s). \quad (7.15)$$

В этом случае (7.14) может быть представлено в виде

$$(sI - A)x(s) = Bu(s),$$

и, следовательно,

$$x(s) = (sI - A)^{-1} B u(s). \quad (7.16)$$

Подставляя найденное значение $x(s)$ в (7.15), получаем:

$$y(s) = \left[(sI - A)^{-1} B + D \right] u(s). \quad (7.17)$$

Таким образом, передаточная матрица между входом и выходом данной системы

$$W_{yu}(s) = (sI - A)^{-1} B + D. \quad (7.18)$$

Передаточными функциями в линейных стационарных обыкновенных непрерывных системах можно характеризовать не только связи между входами и выходами, но и связи любых внутренних переменных

со входными воздействиями и между собой. В частности, для системы с моделью (7.13) передаточная функция между входом и состоянием

$$W_{xu}(s) = (sI - A)^{-1} B. \quad (7.19)$$

Если описываемая система стационарна и не имеет переменных со смещенными аргументами, то её передаточные функции обычно представляют собой дробно-рациональные выражения, т. е. отношения двух полиномов типа (7.6), (7.7). Если же среди характеризующих динамику такой системы координатных переменных имеются переменные со смещённым аргументом типа $z(t - \tau)$, то часть или же все передаточные функции, описывающие подобную систему, будут трансцендентными выражениями относительно оператора s преобразования Лапласа. Это обусловлено тем, что если $z(t) \doteq z(s)$, то преобразование Лапласа

$$L[z(t - \tau)] = e^{-\tau s} z(s).$$

При определении передаточных функций ЛСОН-систем, имеющих несколько входов, с целью упрощения этой процедуры можно использовать присущий этому классу систем **принцип суперпозиции**, согласно которому реакция таких систем на сумму внешних воздействий равна сумме реакций на каждое из этих воздействий в отдельности. В этой связи при определении передаточных функций относительно какого-либо внешнего воздействия все остальные внешние воздействия могут приниматься равными нулю, т. е. исключаться из рассмотрения. Если при этом ставится задача определения передаточной функции между какой-либо парой внутренних переменных, обнулить следует все внешние воздействия на систему.

Если исходная математическая модель динамики системы данного класса не типизирована, определение передаточных функций системы сводится к следующим процедурам:

- производится операторное преобразование по Лапласу каждого из составляющих модель уравнений;
- из полученной системы уравнений находится изображение той координатной переменной системы, которая принимается за выходную переменную (относительно которой определяются передаточные функции). При этом все входы в систему, относительно которых передаточная функция не определяется, с целью упрощения вычислений предварительно можно обнулить.

Тогда передаточными функциями между выходной переменной и входными воздействиями на систему будут операторные выражения, стоящие перед изображениями этих входных воздействий.

При необходимости определения передаточных функций относительно нескольких внутренних и/или выходных переменных вышеуказанные процедуры, за исключением первой, повторяются.

Передаточную функцию дробно-рационального типа

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (7.20)$$

с полиномами (7.6), (7.7) можно представить в виде

$$W(s) = g \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - s_i)}{\prod_{j=1}^n (s - s_j)}, \quad (7.21)$$

если принять

$$g = \frac{b_m}{a_n}$$

и обозначить через $s_i, i \in \overline{1, m}$ корни уравнения $B(s) = 0$, а через $s_j, j \in \overline{1, n}$ – корни уравнения $A(s) = 0$. Если при этом передаточная функция $W(s)$ связывает вход и выход системы, то множество $s_i, i \in \overline{1, m}$ называют **нулями системы** или передаточной функции $W(s)$, а множество $s_j, j \in \overline{1, n}$ – **полюсами системы** и полюсами этой передаточной функции. Нетрудно убедиться в том, что нули и полюса системы характеризуют ее динамические свойства.

Для одномерной по входу и выходу системы знание ее передаточной функции эквивалентно знанию ее математической модели типа «вход-выход». Аналогично, знание передаточной матрицы многомерной по входу и/или выходу системы эквивалентно знанию ее вход-выходной математической модели. Действительно, из самого определения передаточной функции системы следует, что изображения выхода y и входа x системы связаны между собой равенством

$$y(s) = W(s)x(s).$$

Если при этом $W(s)$ имеет вид (7.20), то вместо последнего равенства получаем операторное уравнение (7.8) и от него легко перейти к записанному в символической форме уравнению динамики системы (7.5). Поэтому можно считать, что передаточная функция (или в общем случае – передаточная матрица), связывающая вход и выход системы, эквивалентна по содержащейся в ней информации при знании принятых обозначений для входов и выходов системы уравнению её динамики, записанному в форме «вход-выход».

В то же время следует иметь в виду, что знание вход-выходной передаточной функции или передаточной матрицы системы не всегда гарантирует определение и "внутренней" динамики системы, т. е. изменений переменных вектора состояния системы $x(t)$ в динамических режимах. Подобная информация по $W(s)$ системы может быть получена только в тех случаях, когда описываемая ими система обладает так называемыми свойствами полной *управляемости* и *наблюдаемости* по состоянию $x(t)$ [2, 6]. Эти свойства детально изучаются студентами в последующем курсе «Теория автоматического управления» [1, 3, 4, 7, 8] и поэтому здесь подробно не определяются. Укажем лишь, что система, математическая модель которой имеет вид (7.13), вполне управляема по состоянию, если и только если

$$\text{rank } K \triangleq \text{rank} \left[B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B \right] = n, \quad (7.22)$$

и вполне наблюдаема, если и только если

$$\text{rank } Q \triangleq \text{rank} \left[C \mid CA \mid CA^2 \mid \dots \mid CA^{n-1} \right] = n. \quad (7.23)$$

В ранговых условиях (7.22) и (7.23) блочные матрицы K и Q – получаются по матрицам A, B, C исходной модели (7.13), а n – порядок системы (размерность её вектора состояния $x(t)$).

7.2. Частотные характеристики линейных стационарных обыкновенных непрерывных систем

Непрерывные переменные, каковыми и являются внутренние и выходные координатные переменные систем рассматриваемого здесь класса, как уже отмечалось в главе 2, характеризуются своими спектральными составами. По этой причине для характеристики вход-выходных связей у этого типа устройств и систем целесообразно

использовать такие характеристики, которые устанавливают взаимосвязь спектров их входных и выходных сигналов. Таковыми являются широко используемые в инженерной практике частотные характеристики.

Для определения основных типов частотных характеристик будем вначале полагать, что имеем дело с одномерной по входу и выходу системой, передаточная функция которой имеет вид (7.20), а входящие в нее полиномы соответствуют (7.6) и (7.7). Будем полагать также, что рассматриваемая система устойчива, т. е. её собственные движения являются затухающими с течением времени к нулю. Данному условию система будет удовлетворять, если все полюса её передаточной функции $W(s)$ будут иметь отрицательные вещественные части. Допустим, что входной сигнал системы $x(t)$ имеет следующий гармонический характер изменения:

$$x(t) = x_m e^{j\omega_0 t}. \quad (7.24)$$

В таком случае выходной сигнал системы y в установившемся режиме будет также гармоническим и изменяющимся с той же частотой ω_0 , но иметь, в общем случае, другую амплитуду и будет сдвинут по фазе относительно $x(t)$. Примем для него следующий вид записи:

$$y_{\text{вын}}(t) = W(j\omega_0) x_m e^{j\omega_0 t}. \quad (7.25)$$

Здесь $W(j\omega_0)$ – неизвестная пока комплексная величина, обеспечивающая правильное определение амплитуды выходного сигнала и его фазового сдвига относительно входного сигнала $x(t)$.

Если (7.25) является установившимся выходным сигналом в системе, т. е. частным решением уравнения динамики этой системы

$$A(p) y(t) = B(p) x(t), \quad (7.26)$$

то значит, будучи подставленным вместе с входным сигналом в виде (7.24) в уравнение динамики системы (7.26), преобразует последнее в тождество

$$\begin{aligned} & \left\{ a_n (j\omega_0)^n + a_{n-1} (j\omega_0)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega_0) + a_0 \right\} \cdot W(j\omega_0) \cdot x_m e^{j\omega_0 t} = \\ & = \left\{ b_m (j\omega_0)^m + b_{m-1} (j\omega_0)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega_0) + b_0 \right\} \cdot x_m e^{j\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Из него после сокращения одинаковых членов в левой и правой части, получаем аналитическое выражение для введенной в (7.25) комплексной величины:

$$W(j\omega_0) = \frac{b_m(j\omega_0)^m + b_{m-1}(j\omega_0)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega_0) + b_0}{a_n(j\omega_0)^n + a_{n-1}(j\omega_0)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega_0) + a_0}. \quad (7.27)$$

Легко заметить, что эта величина связана с передаточной функцией следующим простым соотношением:

$$W(j\omega_0) = W(s)|_{s=j\omega_0} = \frac{B(j\omega_0)}{A(j\omega_0)}, \quad (7.28)$$

т. е. получается заменой в передаточной функции $W(s)$ оператора s мнимой величиной $j\omega_0$. Величину $W(j\omega_0)$ называют **комплексным коэффициентом передачи** (ККП) рассматриваемой системы на частоте ω_0 [1, 3, 4, 7, 8].

Указанная характеристика системы имеет простой физический смысл и поэтому получила широкое применение в инженерной практике. Действительно, из (7.24) и (7.25) следует, что комплексный коэффициент передачи устанавливает следующую пропорциональную взаимосвязь между гармоническим входным сигналом и выходным сигналом системы в установившемся при этом $x(t)$ режиме:

$$y_{\text{вын}}(t) = W(j\omega_0) \cdot x(t). \quad (7.29)$$

Представим (7.25) в несколько ином виде:

$$\begin{aligned} y_{\text{вын}}(t) &= |W(j\omega_0)| \cdot x_m e^{[j\omega_0 t + \arg W(j\omega_0)]} = \\ &= y_m \cdot e^{[j\omega_0 t + \arg W(j\omega_0)]}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Отсюда следует, что в установившемся гармоническом режиме амплитуда выходного сигнала системы равна произведению модуля ККП на данной частоте и амплитуды входного сигнала. Или, иначе говоря, модуль комплексного коэффициента передачи системы на фиксированной частоте ω равен отношению амплитуд выходного и входного сигналов на этой частоте, которые будут у этих сигналов в установившемся режиме.

При этом аргумент комплексного коэффициента передачи определяет фазовый сдвиг в установившемся режиме между гармонически изменяющимися выходным и входным сигналами.

Благодаря столь простому и важному для решения практических задач физическому смыслу, ККП получил широкое применение при анализе ЛСОН-систем различной физической природы. Он существенно упрощает и ускоряет определение выходных сигналов в линейных стационарных обыкновенных непрерывных системах в установившихся режимах при гармонических входных воздействиях по сравнению с решением этих же задач по самим исходным дифференциальным уравнениям системы классическим или операторным методом.

Пример 7.1. Проиллюстрируем это на простом примере. Пусть одномерная по входу и выходу система имеет передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{10(s+1)}{s(0,4s+1)(3s+1)}$$

и её входной сигнал

$$x(t) = 6 \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right).$$

При этом в установившемся режиме выходной сигнал будет меняться с той же частотой $\omega_0 = 2$ (обычно для частот ω используемая размерность – секунды в минус первой степени), его амплитуда будет отличаться от амплитуды входного сигнала в $|W(j2)|$, а фазовый сдвиг по отношению к входному сигналу будет равен $\arg W(j2)$. Таким образом, искомым сигналом

$$y_{\text{вын}}(t) = |W(j2)| \cdot 6 \sin\left[2t + \frac{\pi}{4} + \arg W(j2)\right].$$

Поэтому для определения $y_{\text{вын}}(t)$ необходимо лишь в приведенную выше формулу подставить значения $|W(j2)|$ и $\arg W(j2)$, которые получаются после подстановки в передаточную функцию системы $s = j2$. Эти значения легко вычисляются по правилам определения модуля и аргумента сложных комплексных величин:

$$|W(j2)| = \left| \frac{10(j2+1)}{j2(j2 \cdot 0,4+1)(j2 \cdot 3+1)} \right| = \frac{10\sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{1,64} \cdot \sqrt{37}} ;$$

$$\arg W(j2) = \arctg 2 - \frac{\pi}{2} - \arctg 0,8 - \arctg 6.$$

Этот пример позволяет убедиться в том, что подобный способ определения сигналов в системах рассматриваемого класса при гармонических входных воздействиях намного проще и намного быстрее даёт искомый результат, чем если бы для этих целей использовался переход от заданной передаточной функции к соответствующему дифференциальному уравнению системы в форме «вход-выход» и последующее его решение классическим или операторным методом. К тому же, и при классическом, и при операторном методе дополнительно определялась бы не только вынужденная составляющая выходного сигнала системы, но и свободная составляющая, знание которой не требуется по условиям поставленной задачи.

Если на ЛСОН-систему одновременно воздействует несколько гармонически изменяющихся входных сигналов

$$f_i(t) = f_{i \max} e^{(j \omega_i t + \theta_i)}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (7.31)$$

то установившееся значение любой из внутренних и/или выходных координат $z(t)$ этой системы на основании справедливого для этого класса систем принципа суперпозиции может быть найдено через соответствующие комплексные коэффициенты передачи между этой координатой и входными воздействиями как

$$z_{\text{вын}}(t) = \sum_{i=1}^k |W_{z f_i}(j \omega_i)| \cdot f_{i \max} e^{[j \omega_i t + \theta_i + \arg W_{z f_i}(j \omega_i)]}. \quad (7.32)$$

Аналогичным образом может быть определена любая внутренняя и/или выходная координата $z(t)$ ЛСОН-системы в установившемся режиме и в тех случаях, когда входной сигнал в системе $f(t)$ представляет собой сумму гармонических составляющих (7.31). В этом случае в (7.32) следует лишь вместо $W_{z f_i}(j \omega_i)$ использовать $W_{z f}(j \omega_i)$.

В связи с тем, что входные воздействия на систему могут иметь различный спектральный состав, важно знать значения комплексного коэффициента передачи при всех значениях частот от 0 до ∞ или хотя бы в том диапазоне частот, который соответствует спектру входного сигнала системы. В этой связи ЛСОН-системы характеризуют так назы-

ваемыми **амплитудно-фазовыми частотными характеристиками** (АФЧХ). Для одномерной по входу и выходу системы указанного класса с передаточной функцией $W(s)$ **амплитудно-фазовой частотной характеристикой** называют зависимость $W(j\omega)$ комплексного коэффициента передачи от частоты [1, 3, 5, 7, 8]. Очевидно, что для подобной характеристики многомерных по входу и/или выходу систем необходимо определение всего множества АФЧХ, соответствующих всем передаточным функциям, входящим в передаточную матрицу системы.

Как правило, АФЧХ определяется для всего диапазона частот от 0 до бесконечности. Соответствующее аналитическое выражение для нее, как следует из приведенного выше определения, получается подстановкой в передаточную функцию $s = j\omega$. Заметим при этом, что такая однозначная связь передаточной функции и АФЧХ позволяет не только определять последнюю по передаточной функции, но и, при желании, получать по известной АФЧХ, определенной во всем диапазоне частот от 0 до ∞ , соответствующую ей передаточную функцию а затем и математическую модель системы в форме «вход-выход», т. е. решать задачу идентификации вход-выходной связи системы.

В общем случае АФЧХ представляет собой зависимость от частоты комплексной величины. Поэтому её графическое отображение может быть представлено на комплексной плоскости в виде так называемого **амплитудно-фазового годографа** (АФГ). Под последним понимают множество конечных точек векторов комплексного коэффициента передачи системы при различных значениях частоты ω из диапазона $0 \leq \omega \leq \infty$. Для большинства систем АФГ имеет тенденцию спиралеобразно накручиваться на начало координат комплексной плоскости, как показано на рис. 7.1.

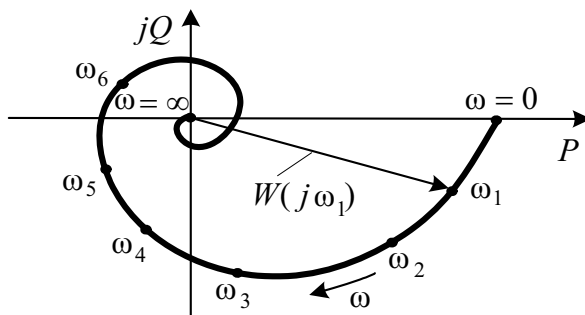


Рис. 7.1. Амплитудно-фазовый годограф

Это обусловлено тем, что с ростом частоты входного сигнала из-за инерционности системы амплитуда выходного сигнала имеет тенденцию уменьшаться, а фазовое отставание выходного сигнала в установившихся режимах от входного – увеличиваться. В то же время на отдельных диапазонах изменения частоты эта тенденция может и не соблюдаться.

В связи с комплексным характером АФЧХ и обусловленными этим неудобствами в инженерной практике используются и другие частотные характеристики. Для их определения представим амплитудно-фазовую частотную характеристику $W(j\omega)$ в других формах, выделив модуль и аргумент:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (7.33)$$

и разложив на вещественную и мнимую части:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (7.34)$$

При этом зависимость модуля комплексного коэффициента передачи от частоты, т.е. $A(\omega)$, называют **амплитудно-частотной характеристикой** (АЧХ), а зависимость аргумента комплексного коэффициента передачи от частоты, т. е. $\varphi(\omega)$, называют **фазовой частотной характеристикой** (ФЧХ) системы. Соответствующую (7.34) зависимость $P(\omega)$ ККП от частоты называют **вещественной частотной характеристикой** (ВЧХ) и зависимость $Q(\omega)$ – **мнимой частотной характеристикой** (МЧХ) системы [1, 3, 4, 7, 8].

Определенные выше частотные характеристики взаимосвязаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \\ &= P(\omega) / \cos \varphi(\omega) = Q(\omega) / \sin \varphi(\omega); \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}; \quad (7.36)$$

$$P(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega); \quad (7.37)$$

$$Q(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (7.38)$$

Из соотношений (7.33)–(7.38) следует, что каждая пара частотных характеристик из семейства $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $P(\omega)$, $Q(\omega)$ несет в себе ту же информацию, что и АФЧХ $W(j\omega)$. Поэтому для определения вход-выходных свойств системы может применяться любая из этих пар. На практике из числа вышеуказанных частотных характеристик наиболее широко используются АЧХ и ФЧХ. Это обусловлено тем, что данные характеристики имеют явно выраженный физический смысл и особенно удобны, как уже было показано выше, в определении выходных сигналов при гармонических входных воздействиях на систему. Первая из них – амплитудно-частотная характеристика определяет при этом зависимость от частоты отношения амплитуд выходного и входного сигналов системы в установившихся режимах и, следовательно, позволяет находить амплитуду выходного сигнала в установившемся гармоническом режиме как произведение амплитуды входного сигнала на значение АЧХ системы на частоте входного сигнала. Фазовая частотная характеристика определяет зависимость от частоты фазового сдвига выходного сигнала системы в установившемся режиме от гармонического по форме входного сигнала.

Для построения частотных характеристик по заданной передаточной функции могут использоваться соотношения (7.33)–(7.38). При этом для определения ВЧХ и МЧХ лучше всего использовать соотношение (7.34), а для определения ФЧХ – первое или второе равенство из (7.36). Следует лишь обратить внимание на то, что вычисление значений ФЧХ по второму из этих равенств должно проводиться с обязательным учетом знаков $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ на той частоте, для которой вычисляется текущее значение $\varphi(\omega)$. В противном случае для любой передаточной функции $W(s)$ диапазон изменения фазовой частотной характеристики будет лежать только в пределах от $-\pi/2$ до $+\pi/2$.

Если передаточная функция, по которой необходимо определить АЧХ и ФЧХ, имеет вид

$$W(s) = \frac{k \cdot \prod_{i=1}^m (1 + T_i s)^{\mu_i}}{s^v \cdot \prod_{j=1}^n (1 + T_j s)^{q_j}}, \quad (7.39)$$

где k , m , n , μ_i , q_j – целые числа, то аналитические выражения для определения АЧХ и ФЧХ могут быть получены подстановкой в (7.39)

$s = j\omega$ и последующим определением модуля $W(j\omega)$ как отношения модулей числителя и знаменателя, каждый из которых определяется произведением модулей образующих их сомножителей. В итоге имеем

$$A(\omega) = \frac{k \cdot \prod_{i=1}^m (1 + T_i^2 \omega^2)^{\mu_i}}{\omega^v \cdot \prod_{j=1}^n (1 + T_j^2 \omega^2)^{q_j}}. \quad (7.40)$$

При этом аналитическое выражение для ФЧХ получается как разность аргументов числителя и знаменателя $W(j\omega)$, которые равны сумме аргументов входящих в них сомножителей:

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot \arctg T_i \omega - v \cdot \frac{\pi}{2} - \sum_{j=1}^n q_j \cdot \arctg T_j \omega. \quad (7.41)$$

Пример 7.2. Если

$$W(s) = \frac{10 \cdot (s + 1)}{s^2 (0,4s + 1)(3s + 1)^3}, \quad (7.42)$$

то согласно (7.40) и (7.41) получаем

$$A(\omega) = \frac{10 \cdot \sqrt{1 + \omega^2}}{\omega^2 \cdot \sqrt{1 + 0,16\omega^2} \cdot (1 + 9\omega^2)^{3/2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \omega - 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \arctg 0,4\omega - 3 \arctg 3\omega.$$

Очевидно, что подобный способ определения АЧХ и ФЧХ, соответствующих передаточным функциям класса (7.39), существенно проще и быстрее дает искомые результаты, чем если бы мы определяли их, предварительно перемножая сомножители в числителе и знаменателе $W(j\omega)$, умножая их на комплексно-сопряжённую знаменателю величину, представляя затем $W(j\omega)$ в виде (7.34) и затем используя формулы (7.35) и (7.36). К тому же при этом нет надобности при определении $\varphi(\omega)$ контролировать знаки $P(\omega)$ и $Q(\omega)$. Заметим также, что неучёт

этих знаков дал бы при применении (7.36) в случае с $W(s)$, соответствующей (7.42), неверный результат, так как в рассматриваемом случае $\varphi(0) = -\pi$ и $\varphi(\infty) = -5\frac{\pi}{2}$, а значит $\varphi(\omega)$ выходит из диапазона $(-\pi/2 \div +\pi/2)$.

Для экспериментального определения вышеуказанных частотных характеристик линейной стационарной обыкновенной непрерывной системы по любому из существующих в ней вход-выходному каналу $x \rightarrow y$ необходимо провести серию экспериментов, включающих следующие процедуры.

1. Подаем на вход системы гармонический сигнал $x(t)$ фиксированной амплитуды x_{m_i} и частоты ω_i .

2. Дожидаемся окончания переходного процесса в системе и после этого измеряем амплитуду y_{m_i} и фазовый сдвиг φ_i между гармониками выходного и входного сигнала. Последний равен значению ФЧХ на данной частоте, т. е. $\varphi(\omega_i)$.

3. Получаем искомое значение АЧХ на частоте ω_i как

$$A(\omega_i) = y_{m_i} / x_{m_i}.$$

4. Прodelываем эти действия при различных значениях ω_i из всего интересующего нас диапазона частот от 0 до ∞ и тем самым получаем АЧХ и ФЧХ для этих диапазонов частот.

Заметим, что признаком линейности системы по каналу $x \rightarrow y$, для которой проводится эксперимент, является независимость получаемых значений $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ от амплитуды входного сигнала $x(t)$.

7.3. Логарифмические частотные характеристики

При построении графиков амплитудных, фазовых, вещественных и мнимых частотных характеристик чаще всего предпочитают использовать логарифмический масштаб для отражения частот. Это связано с тем, что такие характеристики, как правило, приходится строить для всего или значительной части диапазона частот от 0 до ∞ , а это приводит к потере наглядности и/или компактности представления таких графических зависимостей.

Для этих целей частоты ω откладываются по отведённой для них оси либо в декадах, либо (что делают значительно реже) в октавах. *Декадой* принято называть диапазон частот от какой-либо фиксированной частоты ω до её удесятёрённого значения, т. е. до 10ω . *Октавой* называют диапазон частот от какой-либо фиксированной частоты ω до её удвоенного значения, т. е. до 2ω .

Если отсчёт частот при этом производится в декадах, т. е. если по оси частот откладываются значения $\lg \omega$, то по умолчанию началу координат графиков АЧХ, ФЧХ, ВЧХ и МЧХ соответствует частота, равная 1 с^{-1} . В ряде случаев при отображении графических зависимостей указанных характеристик началу координат присваивается значение частоты, отличное от 1 с^{-1} . Например, при отражении таких характеристик для высокочастотных систем началу координат лучше придать значение, существенно большее, например, 1000 Гц или 100 кГц. Тем самым основные изменения $\varphi(\omega)$ будут отражаться вблизи начала координат. В таком случае следует указать на оси частот хотя бы одно значение ω не только в декадах, но и в с^{-1} .

При построении графика ФЧХ значения фазы $W(j\omega)$ откладываются в дуговых градусах. Поэтому график $\varphi(\omega)$ строится фактически в полулогарифмическом масштабе, хотя построенную таким образом фазовую частотную характеристику и называют *логарифмической фазовой частотной характеристикой* (ЛФЧХ).

Следуя сложившимся в электро- и радиосвязи традициям, при построении *логарифмической амплитудно-частотной характеристики* (АЧХ в логарифмическом масштабе) последний используется не только для отображения значений ω , но и модуля комплексного коэффициента передачи, так как последний может меняться в достаточно больших пределах. При этом по оси ординат откладываются значения

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|, \quad (7.43)$$

отсчитываемые в *децибелах* (дБ), т. е. в десятых долях *бела*. Заметим, что *белом* (Б) в теории и технике связи, в других смежных с ней дисциплинах называют единицу измерения усиления по мощности сигнала в 10 раз. Так как $A(\omega)$ характеризует увеличение по амплитуде выходного сигнала по сравнению с входным, то применительно к электрическим сигналам усилению по уровню напряжения выходного сигнала относительно входного в 10 раз, соответствует усиление по мощности в 100 раз. Таким образом, 10-кратному усилению по ампли-

туде выходного сигнала, по сравнению с входным, соответствует усиление по мощности, равное 2 белам, или 20 децибелам. Именно по этой причине при построении АЧХ в логарифмическом масштабе используется значение $20 \lg A(\omega)$, а не просто $\lg A(\omega)$. Такое представление в логарифмическом масштабе амплитудных частотных характеристик (ЛАЧХ) удобно в связи с тем, что позволяет часто достаточно адекватно аппроксимировать их набором прямолинейных отрезков и упрощает процесс их приближенного определения по заданной передаточной функции системы.

Пример 7.3. Покажем это на примере построения ЛАЧХ для системы, передаточная функция которой соответствует (7.39). Соответствующее этой передаточной функции аналитическое выражение ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + \sum_{i=1}^m 20 \mu_i \cdot \lg \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2} - \quad (7.44)$$

$$- 20 \nu \cdot \lg \omega - \sum_{j=1}^n 20 q_j \cdot \lg \sqrt{1 + T_j^2 \omega^2} \triangleq L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega) + L_4(\omega).$$

С этой целью построим ЛАЧХ, соответствующие отдельным составляющим из (7.44). Для составляющей $L_1(\omega) = 20 \lg k$ эта ЛАЧХ имеет вид, представленный на рис. 7.2. Значениям k , большим единицы, будут соответствовать горизонтальные линии, расположенные выше оси частот, а значениям ниже единицы – такие же линии ниже оси частот. ЛАЧХ, соответствующая $k = 1$, совпадает с осью частот.

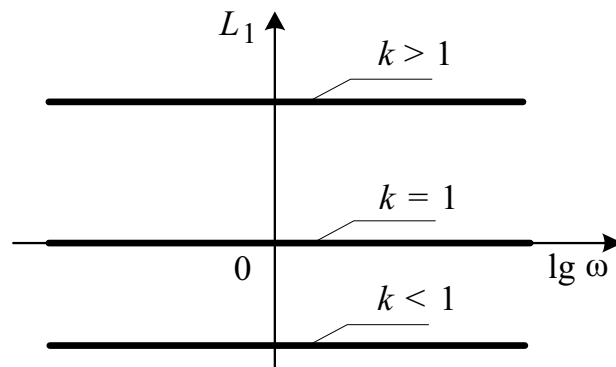


Рис. 7.2. ЛАЧХ $L_1(\omega) = 20 \lg k$

Нетрудно заметить, что третья составляющая в правой части (7.44), то есть $L_3(\omega) = -20 \nu \cdot \lg \omega$, определяет прямолинейную зависимость L_3 от $\lg \omega$. При этом изменение L_3 на одной декаде равняется

$$L_3(10\omega) - L_3(\omega) = [-20\nu - 20\nu \cdot \lg \omega] - 20\nu \cdot \lg \omega = -20\nu \text{ дБ.}$$

Поэтому зависимость $L_3(\omega)$ имеет крутизну, равную -20ν дБ/дек, а соответствующая ей прямая линия пересекает ось частот при $\omega = 1$ 1/с. Если при этом ν – отрицательное целое число, т. е. несокращающийся сомножитель s имеется в числителе передаточной функции (7.39), то крутизна данной зависимости будет равна $+20\nu$ дБ/дек.

График ЛАЧХ для составляющей $L_3(\omega) = -20\nu \cdot \lg \omega$ при $\nu = 1$ представлен на рис. 7.3.

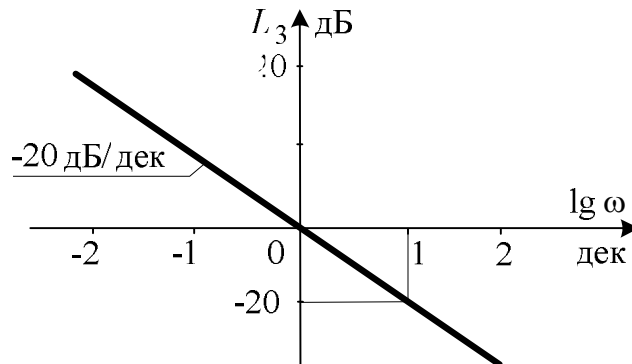


Рис. 7.3. ЛАЧХ $L_3(\omega) = -20\nu \cdot \lg \omega$

Для второй группы составляющих в (7.41), т. е. для

$$L_2(\omega) = 20\mu_i \cdot \lg \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}, \quad (7.45)$$

точная зависимость в функции частоты при $\mu_i = 1$ отражена на рис. 7.4 линией 1.

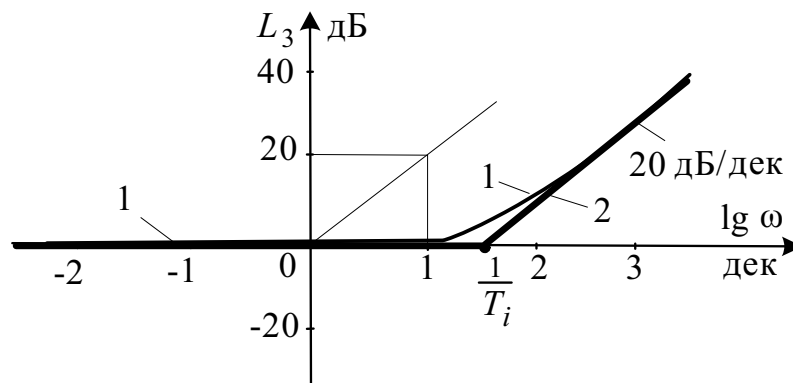


Рис. 7.4. ЛАЧХ $L_2(\omega) = 20\mu_i \cdot \lg \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}$

Она асимптотически приближается при $\omega T_i \ll 1$ ($\omega \ll \frac{1}{T_i}$) к оси частот, а при $\omega T_i \gg 1$ ($\omega \gg \frac{1}{T_i}$) – к прямой линии, пересекающей ось частот при сопрягающей частоте $\omega_c = \frac{1}{T_i}$ и имеющей крутизну 20 дБ/дек. При произвольном μ_i крутизна асимптоты для ЛАЧХ $L_2(\omega)$ при $\omega T_i \gg 1$ будет равна $20\mu_i$ дБ/дек. По этой причине точная ЛАЧХ (7.45), соответствующая данной $L_2(\omega)$, может быть заменена двумя линейными отрезками так, что

$$L_2(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega \ll \omega_{c_i} = \frac{1}{T_i}; \\ 20\mu_i \cdot \lg T_i \omega, & \text{если } \omega \gg \omega_{c_i}. \end{cases}$$

Они сопрягаются в точке с координатами $L_2 = 0$ и $\omega = \frac{1}{T_i}$.

Погрешность такой замены ЛАЧХ, построенной по точному аналитическому выражению (7.44), будет максимальной при сопрягающей частоте ω_{c_i} и равняется $\approx 3\mu_i$ дБ/дек.

Для четвертой составляющей в (7.44), т. е. для

$$L_4(\omega) = -20q_j \cdot \lg \sqrt{1 + T_j^2 \omega^2},$$

ЛАЧХ будет иметь вид, аналогичный $L_2(\omega)$, но иметь противоположный знак и крутизну второго участка аппроксимации, равную $-20q_j$ дБ/дек. Её также можно аппроксимировать двумя прямыми: в диапазоне частот от 0 до $\omega_{c_j} = \frac{1}{T_j}$, совпадающей с осью частот, а в диапазоне от $\omega_{c_j} = \frac{1}{T_j}$ до бесконечности – имеющей крутизну, равную $-20q_j$ дБ/дек.

При замене в $L(\omega)$, определенной по (7.44), точных аналитических зависимостей для входящих в суммы составляющих их вышеуказанными аппроксимациями получаем сумму состоящих из прямолинейных слагаемых функций. В этой связи аппроксимированная ЛАЧХ, соответствующая передаточной функции (7.39), получается как совокупность

прямолинейных отрезков, крутизна которых кратна ± 20 дБ/дек. Она может быть построена по следующему правилу.

1. Определяются все соответствующие данной $W(s)$ сопрягающие частоты:

$$\omega_{c_i} = \frac{1}{T_i}, \quad \omega_{c_j} = \frac{1}{T_j} \quad (7.46)$$

и они отмечаются на оси частот.

2. В системе координат $(20 \lg A, \lg \omega)$ фиксируется точка с координатами $20 \lg k, \omega = 1$ 1/с.

3. Через эту точку проводится прямая линия с наклоном, равным -20ν дБ/дек. Её левая часть до наименьшей из сопрягающих частот во множестве (7.46) соответствует искомой ЛАЧХ.

4. На участке между двумя наименьшими сопрягающими частотами крутизна аппроксимированной ЛАЧХ изменяется на $+20 \mu_i$ дБ/дек, если наименьшая частота сопряжения принадлежит множеству ω_{c_i} , то есть определяется сомножителем $(1 + T_i s)^{\mu_i}$, стоящим в числителе передаточной функции, или на $-20 q_j$ дБ/дек, если наименьшая частота сопряжения соответствует сомножителю $(1 + T_j s)^{q_j}$, стоящему в знаменателе передаточной функции.

5. На каждом последующем (слева направо) участке между двумя рядом расположенными сопрягающими частотами изменение крутизны аппроксимированной ЛАЧХ производится так же, как указано в п. 4, в зависимости от того, полиному числителя или знаменателя соответствует левая сопрягающая частота на этом участке.

Пример 7.4. В качестве примера на рис. 7.5 приведена аппроксимированная ЛАЧХ, соответствующая передаточной функции

$$W(s) = \frac{100 \cdot (s + 1)^2}{s(8s + 1)(0,01s + 1)^3}.$$

В этом случае множество сопрягающих частот состоит из $\omega_{c_i} = \{1\}$ 1/с; $\omega_{c_j} = \{0,01; 8\}$ 1/с и при этом $20 \lg k = 20 \lg 100 = 40$ дБ.

Как видим, подобный способ построения ЛАЧХ существенно быстрее и проще, чем ее построение по точному аналитическому выражения (7.44).

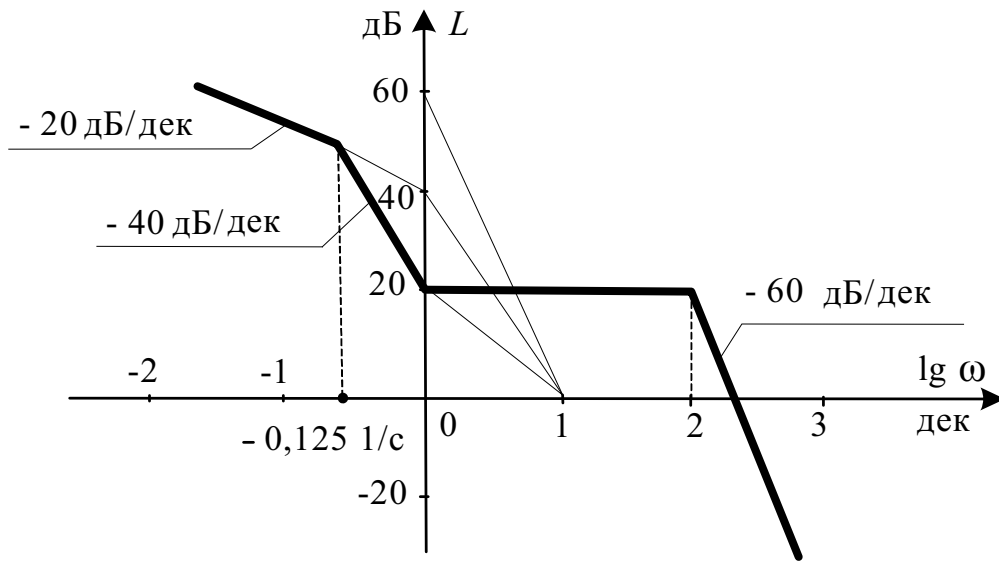


Рис. 7.5.

Обратная задача (по аппроксимированной ЛАЧХ найти соответствующую ей передаточную функцию), не имеет однозначного решения. Действительно, для всех четырех передаточных функций, описываемых как

$$W(s) = (\pm 1 \pm Ts),$$

амплитудно-частотная характеристика будет одной и той же:

$$A(\omega) = \sqrt{1 + T^2 \omega^2}$$

и значит одной и той же будет ЛАЧХ $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$. Следовательно, приведенная, например, на рис. 7.5 ЛАЧХ соответствует всем передаточным функциям из семейства

$$W(s) = \frac{100 \cdot (\pm s \pm 1)^2}{s^2 (\pm 8s \pm 1) (\pm 0,01s \pm 1)^3},$$

а не только (7.42).

В связи с относительной простотой определения аналитических выражений АЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ, соответствующих передаточным функциям класса (7.39), по формулам (7.40), (7.41) и (7.44) на практике предпочитают при необходимости их определения по $W(s)$ представлять последнюю, если это возможно, в виде (7.39) или же в виде

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s),$$

где одна из передаточных функций в правой части имеет вид (7.39), а вторая – дробно-рациональный вид (7.10). При этом соответствующая данной $W(s)$ амплитудно-частотная характеристика определяется как

$$A(\omega) = |W_1(j\omega)| \cdot |W_2(j\omega)|,$$

а фазовая частотная характеристика – как

$$\varphi(\omega) = \arg W_1(j\omega) + \arg W_2(j\omega).$$

Тем самым можно обеспечить меньший объем преобразований при определении аналитических выражений для амплитудной и фазовой частотных характеристик. Это достигается за счёт использования для представленной в форме (7.39) части передаточной функции легко получающихся, согласно (7.40) и (7.41), из $W(s)$ выражений для $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, снижения порядка полиномов в числителе и/или знаменателе передаточной функции, записанной в форме (7.10), а значит и более простого представления соответствующей ей АФЧХ в виде (7.34).

7.4. Типовые статические и временные динамические характеристики линейных стационарных обыкновенных непрерывных систем

Как уже отмечалось ранее, функционирование систем – это их пребывание либо в статических, либо в динамических режимах. Поэтому для характеристики свойств систем необходимы показатели, определяющие поведение систем в подобных режимах.

Статические режимы ЛСОН-систем принято характеризовать статическими коэффициентами передачи как отдельных их устройств, так и систем в целом. Под *статическим коэффициентом передачи* устройства или системы с одним входом x и одним выходом y принято называть коэффициент, устанавливающий связь между значениями выходного и входного сигналов этого устройства или системы в статических режимах:

$$y = k x. \tag{7.47}$$

Если система многомерна по входу и/или выходу, то для отражения вход-выходных связей этой системы в статических режимах необходимо использовать матрицу статических коэффициентов передачи:

$$K = [k_{ij}], \quad i \in \overline{1, n}; \quad j \in \overline{1, m}, \quad (7.48)$$

где m – число входов в системе, n – число ее выходов, а k_{ij} – статический коэффициент передачи системы между i -м выходом и j -м входом.

Статические коэффициенты передачи определяются из уравнений статики системы, которые представляют собой совокупность линейных алгебраических уравнений. С этой целью их необходимо, как и при определении передаточных функций ЛСОН-системы, решить относительно её выходов, исключив при этом все промежуточные переменные.

В случае, когда математическая модель системы представлена в общем виде в дифференциальной форме и отражает не только статические, но и динамические режимы работы системы, для получения модели статики такой системы достаточно в данной математической модели обнулить все производные по времени.

Если математическое описание анализируемой одномерной по входу и выходу системы представлено её передаточной функцией $W(s)$, то для определения статического коэффициента передачи системы достаточно в этой передаточной функции принять $s = 0$. Аналогично для представленной своей передаточной матрицей

$$W(s) = [W_{ij}(s)]$$

многомерной по входу и/или выходу системы матрица статических коэффициентов передачи между входами и выходами системы определяется как

$$K = [k_{ij}] = W(s)|_{s=0} = W(0). \quad (7.49)$$

Таким образом, система, описываемая матричной передаточной функцией вида (7.10), в статике описывается уравнением

$$y = W(0)x.$$

Передаточные функции $W_{ij}(s)$ при $s = 0$ могут принимать различные значения. При этом возможны следующие три варианта.

1. Значение $W_{ij}(0) = \text{const} \neq 0$ или ∞ . В таком случае канал связи между входом x_j и выходом y_i данной системы обычно называют **пропорциональным**.

2. Значение $W_{ij}(0)=0$. Это возможно лишь в том случае, когда в числителе $W_{ij}(s)$ содержится несокращающийся сомножитель s . В таком случае при постоянных по уровню сигналах на входе системы выходной сигнал в статических режимах всегда будет равен нулю. При этом говорят, что система по вход-выходному каналу, определяемому данной передаточной функцией, обладает **дифференцирующим** свойством. Порядок несокращающегося сомножителя s в числителе передаточной функции определяет порядок дифференцирования, которым обладают описываемые этой передаточной функцией устройство или система.

3. Значение $W_{ij}(0)=\infty$. Очевидно, что в этом случае в $W_{ij}(s)$ имеется несокращающийся сомножитель s в её знаменателе. Статический режим работы в такой системе возможен лишь при входном сигнале $x_j(t)\equiv 0$. Если же он отличен от нуля, то выходной сигнал $y_i(t)$ системы после завершения переходного процесса при постоянном по уровню входном сигнале будет нарастать пропорционально t^v , где v – порядок несокращающегося сомножителя s в знаменателе $W_{ij}(s)$. При этом система по данному каналу связи является v -кратно **интегрирующей**.

Таким образом, знание статического коэффициента передачи одномерных по входу и выходу устройств или систем достаточно для того, чтобы определять выходные сигналы в этих устройствах или системах в статических состояниях по уравнению (7.47) при известных уровнях входных сигналов. Аналогично, для определения всех выходных сигналов в статических режимах в многомерных по входу и/или выходу системах достаточно знания их матрицы статических коэффициентов передачи и уровней входных сигналов. В этой связи статические коэффициенты передачи устройств или систем являются для них одними из основных (типовых) показателей.

Для характеристики поведения ЛСОН-систем в *переходных режимах* и сопоставительного анализа однотипных систем по этому признаку чаще всего используют их реакции на типовые сигналы при типовых начальных условиях. При этом за типовые начальные условия, как правило, принимают *нулевые начальные условия* (ННУ), определение которых применительно к обыкновенным динамическим системам было дано уже в главе 6. А в качестве типовых входных сигналов принимают ступенчатый сигнал единичного уровня $1(t)$ и импульсный сигнал, соответствующий функции Дирака $\delta(t)$. Их выбор в качестве

типовых обуславливается тем, что если система удовлетворительно (в плане поведения в переходных режимах) реагирует на такие резко изменяющиеся входные сигналы, то она будет успешно реагировать и на входные сигналы с другими более плавными изменениями во времени.

Для одномерной по входу и выходу ЛСОН-системы реакция системы (то есть её выходной сигнал) на единичное ступенчатое воздействие $1(t)$ при нулевых начальных условиях называется **переходной функцией** данной системы, а её реакция при этих же начальных условиях на входное воздействие типа функции Дирака $\delta(t)$ называется **импульсной переходной**, или **весовой функцией** системы [1, 3, 4, 5, 8].

Если передаточная функция такой системы со входом x и выходом y есть $W(s)$, то связь с последней переходной функцией определяется равенствами:

$$h(s) = W(s) \cdot \frac{1}{s}; \quad h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}. \quad (7.50)$$

Данные равенства достаточно очевидны, так как лапласово изображение выходного сигнала в этом случае и есть лапласово изображение $h(s)$ переходной функции системы, а оно равно произведению передаточной функции системы на изображение единичного ступенчатого сигнала.

Весовая функция системы при этом связана с передаточной функцией соотношением

$$w(t) = L^{-1} \{ W(s) \}, \quad (7.51)$$

то есть весовая функция является оригиналом по преобразованию Лапласа от передаточной функции системы.

Из приведенных соотношений легко устанавливается и связь между переходной и весовой функцией:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (7.52)$$

По этой причине обычно, характеризуя динамические свойства системы, используют одну из этих характеристик. Чаще всего для этих целей используют переходную функцию, которая отражает реакцию системы на достаточно часто встречающийся тип входных воздействий.

Если характеризуемая система линейна стационарна обыкновенна непрерывна и многомерна по входу и/или выходу, то для характеристики динамики ее вход-выходных связей используют матрицы переходных и/или весовых функций, которые определяются через передаточную матрицу системы соответственно по (7.50) или (7.51) для каждого вход-выходного канала $x_j \rightarrow y_i$. По переходной функции $h_{ij}(t)$ этого канала определяется динамическая реакция $y_i(t)$ системы на входной сигнал $x_j(t)$. В свою очередь по этой реакции определяются количественные показатели динамических свойств данного вход-выходного канала системы.

Ниже перечислены основные показатели, используемые для характеристики динамических свойств систем.

1. **Время переходного процесса** $t_{\text{пн}}$. Оно с формальной точки зрения оказывается часто равным ∞ , так как свободная составляющая переходной функции системы с передаточной функцией

$$W_{ij}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (7.53)$$

представляет собой сумму экспонент

$$h_{ij}^{\text{CB}}(t) = \sum_k C_k \cdot e^{s_k t}, \quad (7.54)$$

где s_k – корни характеристического уравнения системы

$$A(s) = 0, \quad (7.55)$$

называемые так же, как уже отмечалось выше, полюсами передаточной функции (7.53) системы.

Так как линейная математическая модель системы обычно характеризует процессы в системе с определенной долей приближения, то время переходных процессов у большинства устойчивых систем конечно. По этой причине на практике время переходного процесса определяется приближенно. При этом его определяют (рис. 7.6) как время от начала переходного процесса до того момента, когда текущее значение рассматриваемого при этом сигнала (в нашем случае – $h_{ij}(t)$) последний раз войдет в полосу $\pm 0,05 [h_{ij}(\infty) - h_{ij}(0)]$, окружающую новое установившееся после переходного процесса значение $y_i(t)$.

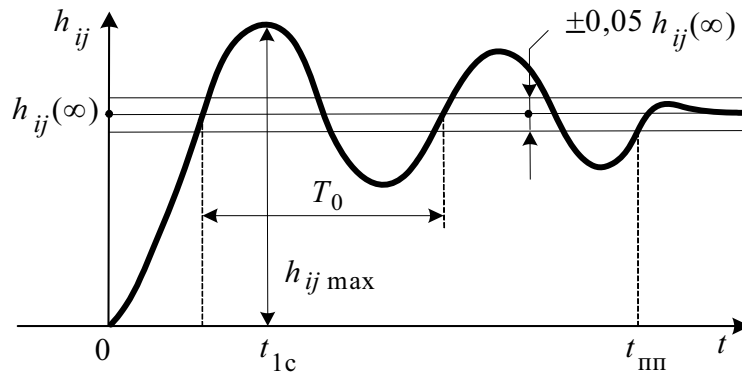


Рис. 7.6

2. **Перерегулирование** σ . Оно определяет в процентах относительный уровень перехода изменяющегося сигнала за новое установившееся значение. Применительно к условным обозначениям, используемым на рис. 7.6, перерегулирование

$$\sigma = \frac{h_{ij \max}(t) - h_{ij}(\infty)}{h_{ij}(\infty)} \cdot 100 \%$$

Если такого перехода за $h_{ij}(\infty)$ нет, то перерегулирование принимается равным нулю.

3. **Время первого согласования** t_{1c} . Это длительность временного интервала от начала переходного процесса до первого совпадения $h_{ij}(t)$ с установившимся значением $h_{ij}(\infty)$. Чем меньше это время, тем меньшей инерционностью характеризуется её канал связи $x_j \rightarrow y_i$.

4. **Период собственных колебаний** T_0 . Этот показатель динамики определяется интервалом времени между двумя однотипными по фазе значениями $h_{ij}(t)$ у склонных к колебаниям систем. Проще всего его можно определить как время между двумя соседними значениями $h_{ij}(t)$, равными $h_{ij}(\infty)$.

5. **Частота собственных колебаний** ω_0 . Она связана с периодом собственных колебаний соотношением

$$\omega_0 = \frac{1}{T_0} \text{ 1/с} \quad \text{или} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \text{ рад/с.}$$

Если подобные колебания отсутствуют, то полагают, что $\omega_0 = 0$.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под передаточной функцией линейной стационарной обыкновенной непрерывной системы?
2. Дайте определение передаточной матрицы системы.
3. В каких случаях передаточная функция системы имеет трансцендентный вид?
4. Каким образом можно определить передаточную функцию системы по математической модели её динамики?
5. Дайте определение полюсов и нулей линейной стационарной обыкновенной непрерывной системы (ЛСОН-системы).
6. Что понимают под комплексным коэффициентом передачи ЛСОН-системы и каков его физический смысл?
7. Дайте определение для амплитудно-фазовой (АФЧХ), амплитудной (АЧХ), фазовой (ФЧХ), вещественной (ВЧХ) и мнимой (МЧХ) частотных характеристик ЛСОН-системы.
8. Запишите уравнения, определяющие взаимосвязь АФЧХ, АЧХ, ФЧХ, ВЧХ и МЧХ.
9. Что понимают под амплитудно-фазовым годографом ЛСОН-системы и как он строится?
10. Как по известной передаточной функции системы построить соответствующие ей логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики?
11. Сформулируйте правило построения аппроксимированных логарифмических амплитудно-частотных характеристик.
12. Что понимается под статическим коэффициентом передачи ЛСОН-системы и как он определяется?
13. Что понимают под переходной и импульсной переходной (весовой) функциями ЛСОН-системы?
14. Перечислите основные показатели динамических свойств систем, определяемые по их переходным функциям.

Библиографический список к главе 7

1. *Алексеев А. А., Имаев Д. Х., Кузьмин Н. Н., Яковлев Б. В.* Теория управления. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 1999.
2. *Воронов А. А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979.

3. *Востриков А. С., Французова Г. А.* Теория автоматического регулирования. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006.
4. *Кориков А. М.* Основы теории управления. – Томск: Изд-во научно-технической литературы, 2002.
5. Математические основы теории автоматического регулирования / под ред. *Б. К. Чемоданова*. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1977.
6. *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. – М.: Наука, 1985.
7. Теория автоматического управления. Ч. 1, 2 / под ред. *А. А. Воронова*. – М.: Высшая школа, 1983.
8. Теория автоматического управления. Кн.1, 2 / под ред. *А. В. Нетушила*. – М.: Высшая школа, 1983.
9. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 5-и т. Том 1. Математические модели, динамические характеристики, анализ систем автоматического управления / под ред. *К. А. Пупкова*. – М.: Изд-во МГТУ, 2004.

**ОПЕРАТОРНО-СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ
И ГРАФЫ СИСТЕМ.
ПРАВИЛА ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

При решении задач анализа и синтеза систем широко используют структурные отображения математических моделей, описывающих процессы в этих системах. Это позволяет более наглядно представлять и определять взаимосвязи между входными, внутренними и выходными переменными систем, решать задачи их модификации. В данной главе приводятся правила построения и преобразований таких структурных отображений математических моделей.

**8.1. Операторно-структурные схемы линейных
стационарных обыкновенных непрерывных систем**

В основе графических отображений, описывающих состояния и процессы в системах математических моделей, лежит понятие оператора и операторного отображения. Напомним, что *оператором* в математике принято называть математический символ, отражающий преобразование множеств одного или нескольких переменных во множество какого-либо другого переменного или во множества других переменных. В этом плане, например, взаимосвязь

$$y(s) = W(s) \cdot x(s) \tag{8.1}$$

изображения $y(s)$ выходного сигнала $y(t)$ одномерной по входу и выходу ЛСОН-системы с изображением (s) входного сигнала $x(t)$ этой системы через передаточную функцию можно характеризовать как отображение $x(s)$ в $y(s)$ через оператор – передаточную функцию $W(s)$. Это отображение и соответствующее ему уравнение (8.1) графически можно представить в виде схемы, приведенной на рис. 8.1.

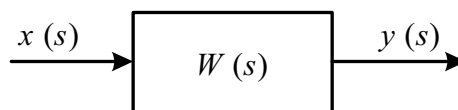


Рис. 8.1. Звено операторно-структурной схемы

Графически можно отображать связь не только входа и выхода систем, описанных передаточной функцией или представленной в дифференциальной форме вход-выходной математической моделью. С таким же успехом производится отображение и более сложных математических моделей систем. Последние отображают либо графами, либо так называемыми структурными схемами.

Наиболее часто для этих целей используются в настоящее время структурные схемы, которые в таких случаях называют *структурными схемами* соответствующих математических моделей или определяемых ими систем, устройств. Подобное название ныне входит в противоречие с определением структурных схем, принятым в действующем государственном стандарте ГОСТ 2.701–76 и стандарте СЭВ 651–77. По этой причине представляется необходимым с целью исключения разночтений данного понятия называть графические отображения математических моделей иначе. В этой связи для обозначения таких схем иногда используются и другие названия. Например, в [2] они называются «алгоритмическими структурными схемами». Ниже подобные схемы будем называть «*операторно-структурными схемами*» (ОСС) и тем самым не только отличать их от уже принятого в вышеуказанных стандартах понятия «структурная схема», но и подчеркивать присущий им операторный характер взаимосвязей входных и выходных сигналов в отдельных их элементах.

Операторно-структурные схемы ЛСОН-систем состоят из следующих типовых для них элементов: звеньев, сумматоров, узлов и линий связи.

Каждое *звено* в ОСС отображается прямоугольником и характеризуется соответствующими ему передаточной функцией, входом и выходом. Его математическая модель в операторной форме имеет вид (8.1), а графический аналог уже представлен на рис. 8.1.

Линиями связи в операторно-структурных схемах обозначаются операторные изображения входных, внутренних и выходных переменных (сигналов) описываемой системы, им обычно приписываются принятые условные обозначения самих этих сигналов без фиксации их операторного представления. Для отражения причинно-следственных взаимосвязей (направлений отражаемых операторных преобразований) сигналов соответствующие каждому из них линии в ОСС снабжаются стрелками, как это показано рис. 8.1.

Сумматоры в ОСС обычно отображаются разделенными на секторы дисками (рис. 8.2). При этом подводимые к сумматору сигналы отражаются линиями со стрелками, направленными к сумматору, а

выходной сигнал с сумматора – линией со стрелкой, направленной от сумматора.

Знак подводимого к сумматору сигнала либо записывают рядом с его входом в сумматор (рис. 8.2, а), либо отражают (что делается значительно чаще) зачернением тех секторов сумматора, к которым подводятся сигналы, вычитаемые из формируемой суммы (рис. 8.2, б). Таким образом, сумматоры отражают алгебраические суммы так, что их выходной сигнал

$$z = \sum_i \lambda_i x_i, \quad (8.2)$$

где $\lambda_i = 1$, если входной сигнал x_i при этом суммируется, и $\lambda_i = -1$, если он в (8.2) вычитается. Например, для приведенных на рис. 8.2 сумматоров имеем $z = x_1 + x_2 - x_3$.

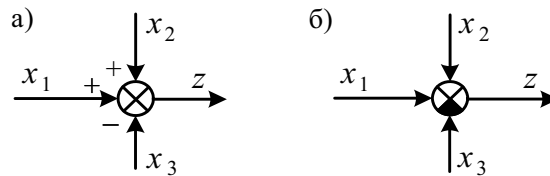


Рис. 8.2

Если число алгебраически суммируемых в одном месте ОСС сигналов больше трех, операцию такого суммирования отображают на ОСС двумя и большим числом последовательно соединенных сумматоров приведенного выше типа (рис. 8.3, а) или как представлено на рис. 8.3, б.

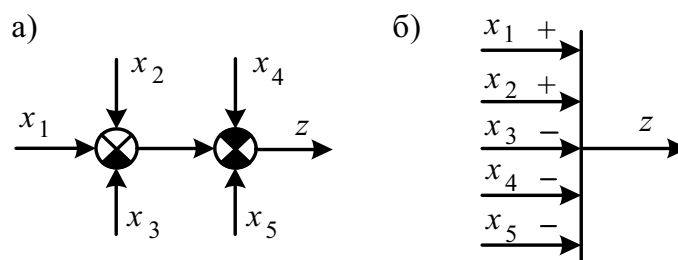


Рис. 8.3

Приведенным на рис. 8.3 схемам соответствует уравнение

$$z = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5.$$

Узлы в операторно-структурных схемах изображаются точками на линиях связей согласно рис. 8.4 и используются для отражения разветвлений в передаче одних и тех же сигналов.

При этом сигналы, подходящие к узлу и отходящие от него, *равны между собой* (в отличие от токов в разветвлениях в электрических цепях).

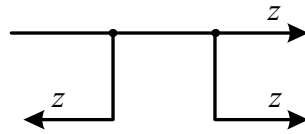


Рис. 8.4

С учётом введенных выше определений основных элементов ОСС графическим отображением операторного уравнения

$$y = W_1(s)x_1(s) - W_2(s)x_2(s)$$

будет операторно-структурная схема, представленная на рис. 8.5.

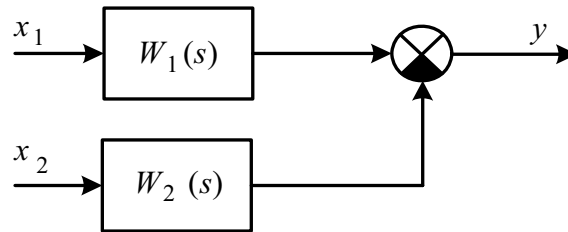


Рис. 8.5

Отображение математического уравнения в виде операторно-структурной схемы далеко не во всех случаях является однозначным. В частности, даже для такого простого уравнения, как

$$A(s)y(s) = B(s)x(s),$$

может быть поставлено в соответствие несколько операторно-структурных схем. Две из них приведены на рис. 8.6, а третьей может быть схема, приведенная на рис. 8.1, если при этом принять

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

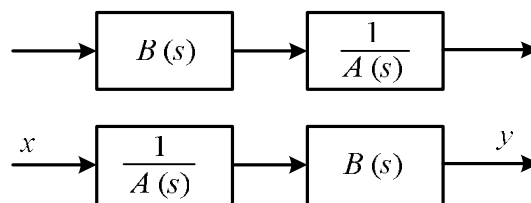


Рис. 8.6

Указанная особенность отображения операторных уравнений схемами указанного типа объясняется тем, что операторные уравнения преобразуемы по правилам алгебры и могут быть записаны различным образом. В общем случае для представления математической модели динамики ЛСОН-системы (и не обязательно с одним входом и одним выходом) следует проделать следующие операции.

1. Перевести исходную математическую модель, записанную с использованием производных и интегралов по времени от каких-либо переменных, в операторную форму, применяя к каждому из входящих в эту модель уравнений преобразование по Лапласу.

2. Построить операторно-структурный аналог (схему) для каждого из полученных уравнений модели таким же образом, как это делалось выше. С целью отражения причинно-следственных связей между координатными переменными системы при этом необходимо в качестве выходных сигналов использовать те переменные, которые по этому уравнению являются следствием, а в качестве входных – те, что могут интерпретироваться как причины.

3. Линии, соответствующие одним и тем же переменным системы в схемах, соответствующих отдельным уравнениям, соединяют между собой. Тем самым фиксируется взаимосвязь отдельных уравнений математической модели системы.

4. Если при этом операторно-структурная схема получается не очень наглядной и удобной для восприятия, её перерисовывают, сохраняя все взаимосвязи в исходной схеме.

Пример 8.1. В качестве примера построим операторно-структурную схему для следующей упрощенной математической модели электродвигателя постоянного тока с постоянным (независимым) возбуждением:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & J \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{д}}(t) - M_{\text{с}}(t); \\
 2) \quad & U(t) = RI(t) + L \frac{dI}{dt} + E(t); \\
 3) \quad & M_{\text{д}}(t) = c_{\text{м}} I(t); \\
 4) \quad & E(t) = c_{\text{е}} \omega(t).
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Здесь ω – угловая скорость вращения ротора двигателя; J – приведенный к валу двигателя момент инерции вращаемого им устройства; U, I, R, L, E – соответственно, напряжение, ток, активное сопротивление, индуктивное сопротивление и противоЭДС якорной цепи двигателя.

ля; M_d – электромагнитный (движущий) момент двигателя; M_c – момент сопротивления на его валу; c_e , c_m – коэффициенты пропорциональности.

Запишем эти уравнения в операторной форме, используя преобразование Лапласа и учитывая ненулевые начальные условия:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & Js\omega(s) - J\omega(0) = M_d(s) - M_c(s); \\
 2) \quad & U(s) = RI(s) + LsI(s) - LI(0) + E(s); \\
 3) \quad & M_d(s) = c_m I(s); \\
 4) \quad & E(s) = c_e \omega(s).
 \end{aligned}
 \tag{8.4}$$

Первые два из этих уравнений перепишем в иной форме, выразив из них изображения для переменных, которые можно интерпретировать как следствия действия остальных переменных в этих уравнениях:

$$\begin{aligned}
 \omega(s) &= \frac{1}{Js} [M_d(s) - M_c(s) + J\omega(0)]; \\
 I(s) &= \frac{1}{R + Ls} [U(s) + LI(0) - E(s)].
 \end{aligned}$$

Построенные по этим и двум последним из (8.4) уравнениям операторно-структурные схемы отражены на рис. 8.7.

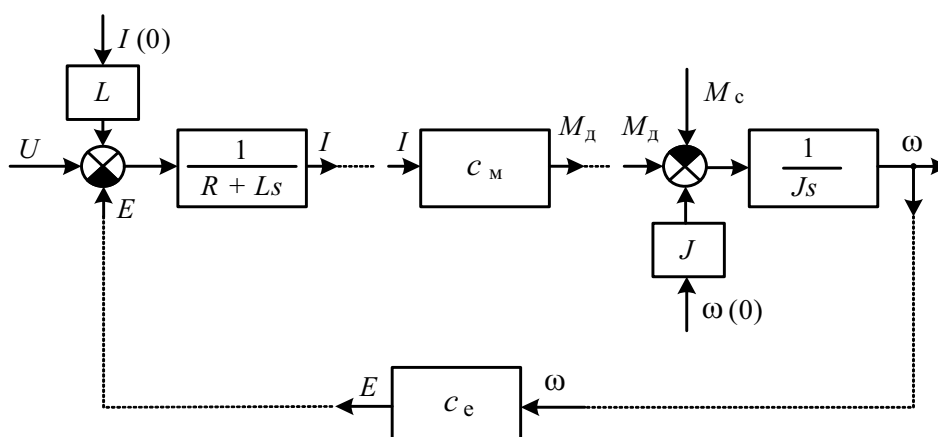


Рис. 8.7. Операторно-структурная схема электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением

Линии, объединяющие одноимённые переменные в соответствующих отдельных уравнениях схемах и связывающие эти схемы в ито-

говую операторно-структурную схему двигателя, указаны на этом рисунке пунктирно. Заметим, что, как и в других ОСС, в этой схеме входные переменные и ненулевые начальные значения отдельных внутренних и/или выходных переменных отражаются линиями со стрелками, направленными «внутри» схемы, а переменные, которые рассматриваются как выходные, – линиями со стрелками, направленными «из схемы».

Как уже отмечалось выше, операторно-структурная схема, построенная по уравнениям (8.4), могла быть представлена и в других видах, но все возможные варианты этих отображений, если они правильно выполнены, взаимно эквивалентны.

В данной схеме вписанные в прямоугольники (звенья) выражения являются передаточными функциями этих звеньев. В приведенной выше схеме в качестве выходного сигнала рассматривается скорость вращения $\omega(t)$. Заметим, что в ОСС в качестве выходного сигнала при желании можно рассматривать и любой внутренний сигнал описываемой системы, изменения которого под действием входных сигналов и/или ненулевых начальных условий желательно проанализировать. Тем самым предоставляется возможность по построенной для системы операторно-структурной схеме анализировать изменения всех её внутренних и выходных переменных.

Отметим также, что во многих случаях операторно-структурные схемы строятся при допущении, что начальные условия в системе нулевые. Это упрощает эти схемы, их последующие преобразования и нахождение по этим схемам передаточных функций системы.

8.2. Правила преобразований операторно-структурных схем линейных стационарных обыкновенных непрерывных систем

Преобразования операторно-структурных схем производятся с целью их агрегирования, трансформации или декомпозиции [2, 5, 7, 10].

Агрегирование ОСС сводится к замене соединений двух и большего числа звеньев в одно более сложное, но эквивалентное им по вход-выходной математической модели звено. Такие преобразования позволяют упростить ОСС описываемой системы и находить передаточные функции между интересующими исследователя сигналами в системе.

Трансформация ОСС обычно осуществляется для более удобного восприятия и/или упрощения схемы. При этом число входящих в ОСС звеньев и сумматоров может и не уменьшаться. Простейшим видом трансформации ОПС является её отображение для большей наглядности

с другим расположением элементов, но с сохранением всех существующих между ними связей.

Декомпозиция операторно-структурных схем преследует противоположные агрегированию цели и сводится к замене звеньев ОСС со сложными передаточными функциями эквивалентными им по математическому описанию соединениями из звеньев с более простыми передаточными функциями.

Приведенные ниже правила преобразований позволяют осуществлять вышеуказанные преобразования ОСС и переходы между различными их отображениями, соответствующими одной и той же математической модели.

Правила агрегирования в ОСС формулируются для типовых соединений звеньев. К числу таких типовых соединений относятся последовательное (рис. 8.8, а), параллельное (рис. 8.8, б) соединения и соединение с обратной связью (рис. 8.8, в).

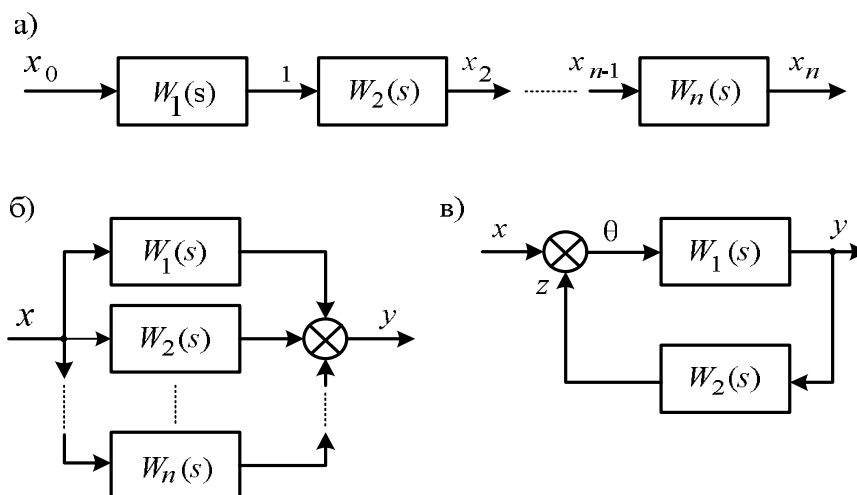


Рис. 8.8. Типовые соединения звеньев

При замене последовательно соединенных звеньев эквивалентным этому соединению звеном передаточная функция последнего находится как произведение передаточных функций всех входящих в данное соединение звеньев, т. е.

$$W_{\text{экв}}(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s) \cdot \dots \cdot W_n(s). \quad (8.5)$$

Это равенство легко получается последовательной подстановкой вместо изображений каждого последующего сигнала в соединении его выражения через изображение предыдущего сигнала и передаточную функцию между ними.

При параллельном соединении звеньев передаточная функция эквивалентного этому соединению звена получается как *алгебраическая сумма* передаточных функций звеньев, входящих в соединение:

$$W_{\text{экв}}(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s). \quad (8.6)$$

Алгебраическое суммирование означает, что в формируемой сумме в (8.6) знак передаточной функции $W_i(s)$ каждого звена берётся такой же, с каким знаком поступает на сумматор выходной сигнал данного звена. При этом порядок записи составляющих в правых частях формул (8.5) и (8.6) может быть произвольным.

Для соединения с обратной связью (рис. 8.8, в) передаточная функция эквивалентного звена

$$W_{\text{экв}}(s) = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_1(s) \cdot W_2(s)}. \quad (8.7)$$

Знак «+» здесь соответствует соединению с отрицательной обратной связью, когда $\theta = x - z$, а знак «-» – с положительной обратной связи, то есть, когда $\theta = x + z$.

Наряду с вышеприведенными правилами при преобразовании операторно-структурных схем широко используются также правила, обеспечивающие трансформацию ОСС. Последняя чаще всего осуществляется с использованием операций переноса сумматоров и узлов через звенья. Приведённые ниже правила описывают такие преобразования ОСС.

Перенос сумматора через звено. Иллюстрирующие данное правило схемы приведены на рис. 8.9 (исходные – слева, преобразованные – справа).

Из рис. 8.9, а следует, что при переносе сумматора через звено по направлению вход-выходного преобразования последнего в цепь подводимого через этот сумматор сигнала следует ввести звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через который делается данный перенос. Знаки поступающих на сумматоры сигналов при этом не меняются.

При переносе сумматора через звено в направлении, противоположном вход-выходному преобразованию этого звена (рис. 8.9, б), в цепь подводимого к данному сумматору сигнала необходимо включить звено с передаточной функцией, обратной передаточной функции звена, через который делается этот перенос.

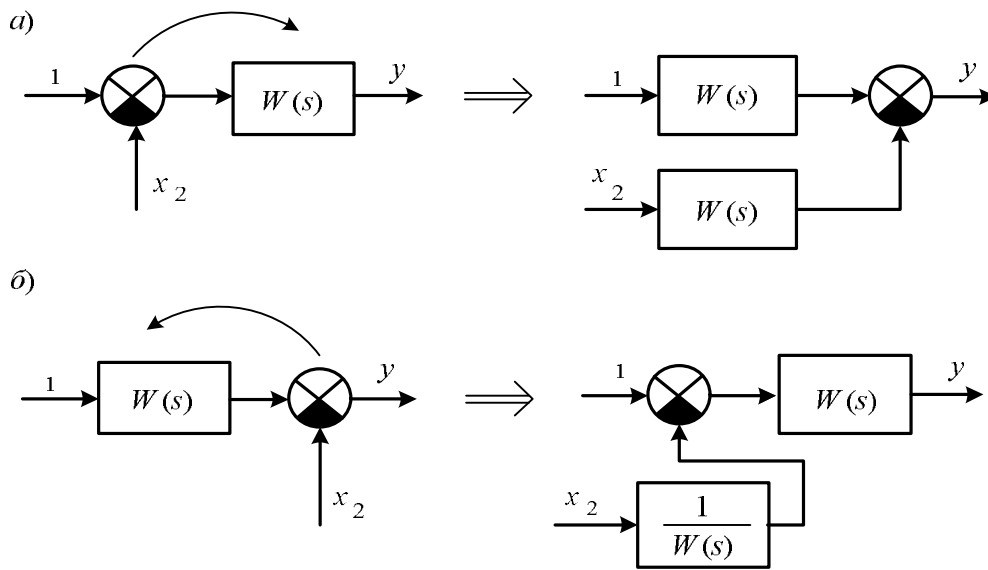


Рис. 8.9. Правила переноса сумматора через звено

Перенос узла через звено. В этом случае также возможны два варианта подобных переносов – по направлению вход-выходного преобразования звена или против него. Если осуществляется перенос узла по направлению вход-выходного преобразования, то в цепь, отводимую от узла, необходимо вставить звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое делается данный перенос (рис. 8.10, а).

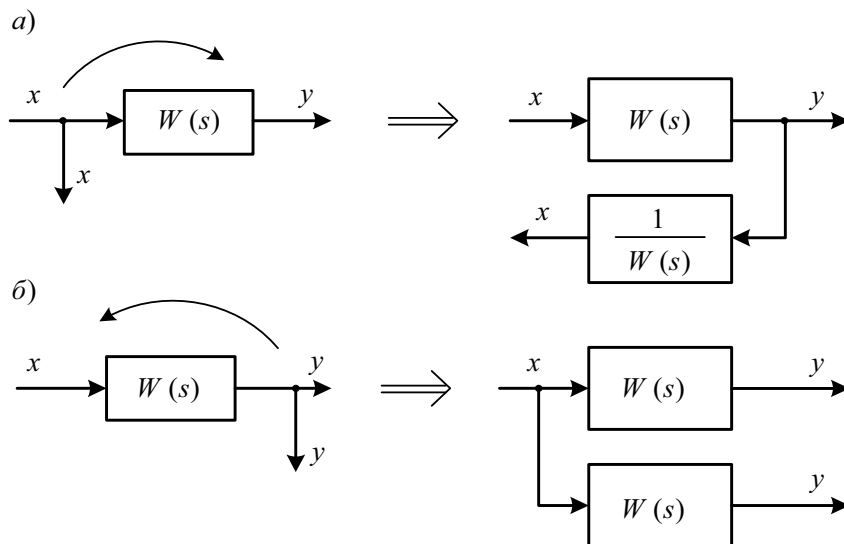


Рис. 8.10. Перенос узла через звено

Если же перенос узла осуществляется против направления вход-выходного преобразования звена (рис. 8.10, б), то в отводимую от узла

цепь вводится дополнительное звено, передаточная функция которого принимается равной передаточной функции звена, через которое делается этот перенос. Заметим, что и на рис. 8.10 слева изображены исходные операторно-структурные схемы, а справа – эквивалентные им преобразованные.

Переносы сумматора через узел. Соответствующие таким переносам схемы приведены на рис. 8.11. Как видно из этого рисунка, такие преобразования относительно сложны и поэтому применяются при преобразованиях ОСС сравнительно редко.

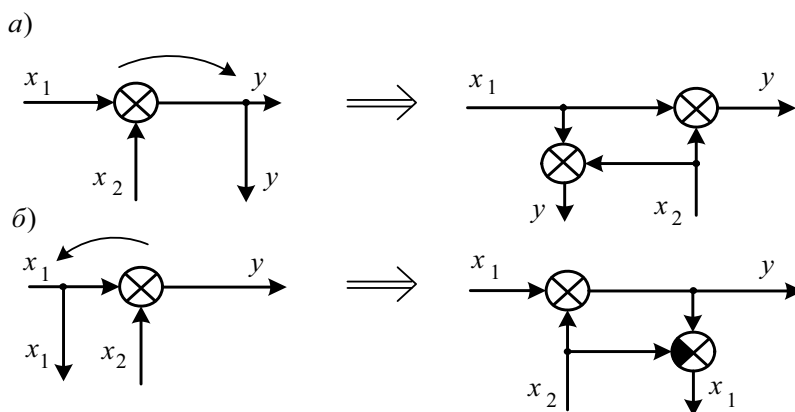


Рис. 8.11. Перенос сумматора через узел

В операторно-структурных схемах довольно часто встречается соединение, которое принято называть соединением звеньев с **перекрестными обратными связями** (рис. 8.12).

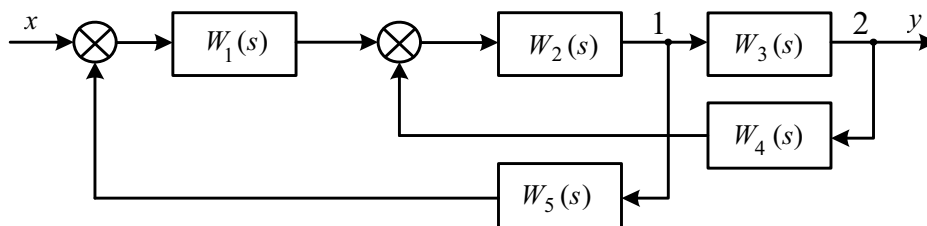


Рис. 8.12. Соединение с перекрёстными связями

Для определения передаточной функции эквивалентного этому соединению звена необходимо предварительно преобразовать данную схему так, чтобы связи в системе были более простыми. Для этого можно воспользоваться одним из вышерассмотренных способов переноса сумматора или узла через звено. В частности, можно перенести узел 1 через звено с передаточной функцией $W_3(s)$, а затем

поменять местами узлы 1 и 2. В итоге получаем эквивалентную изображенной на рис. 8.12 схеме операторно-структурную схему, представленную на рис. 8.13.

Дальнейшие её упрощения и получение соответствующей эквивалентной передаточной функции уже не вызывают затруднений и может быть проведено по ранее рассмотренным правилам преобразования.

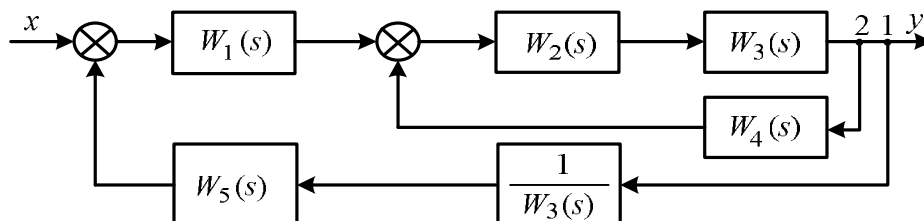


Рис. 8.13

Для получения эквивалентной этой системе передаточной функции $W_{yx}(s)$ объединим вначале последовательно соединенные в ней звенья с передаточными функциями $W_2(s)$, $W_3(s)$ и $W_5(s)$, $1/W_3(s)$. При этом получаем

$$W_6(s) = W_2(s) \cdot W_3(s); \quad W_7(s) = \frac{W_5(s)}{W_3(s)}.$$

После этого может быть заменено эквивалентным звеном с передаточной функцией $W_8(s)$ соединение с обратной связью звеньев $W_6(s)$ и $W_4(s)$ так, что

$$W_8(s) = \frac{W_6(s)}{1 - W_6(s) \cdot W_4(s)}.$$

Последовательное соединение этого звена со звеном с передаточной функцией $W_1(s)$ дает эквивалентное им звено с передаточной функцией

$$W_9(s) = W_1(s) \cdot W_8(s),$$

а объединение в форме обратной связи последнего со звеном с передаточной функцией $W_7(s)$ дает искомую передаточную функцию данного соединения с перекрестными обратными связями (рис. 8.12) в виде

$$W_{yx}(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{W_9(s)}{1 + W_9(s) \cdot W_7(s)}.$$

Принятая здесь индексация итоговой передаточной функции соответствует сложившейся практике: первым указывается условное обозначение того сигнала, который является следствием, а вторым указывается символ входного воздействия на систему, относительно которого определяется вход-выходное отображение системы. Такой способ индексации передаточных функций обычно используется в тех случаях, когда для системы приходится определять несколько передаточных функций между различными парами из входных и внутренних или выходных переменных.

Ранее уже отмечалось, что в силу линейности систем рассматриваемого типа их реакции по каждой из внутренних или выходных переменных на сумму внешних воздействий и ненулевых начальных условий равны сумме подобных реакций на каждое из них в отдельности. Согласно этому свойству, называемому также *свойством суперпозиции*, изображение любой внутренней или выходной переменной y может быть представлено в виде

$$y(s) = \sum_i W_{yx_i}(s) \cdot x_i(s) + \sum_k W_{yz_k}(s) \cdot z_k(0), \quad (8.8)$$

где $W_{yx_i}(s)$ и $W_{yz_k}(s)$ – передаточные функции между переменной y и, соответственно, входным воздействием на систему x_i и ненулевым начальным значением переменной z_k .

В этой связи при определении передаточной функции между каким-либо входом (ненулевым начальным значением какой-либо переменной) и внутренней или выходной переменной, все остальные входы и/или ненулевые начальные значения могут быть приняты равными нулю и исключены из структурной схемы.

Совокупность вышперечисленных правил позволяет проводить структурные преобразования любой степени сложности операторно-структурных схем ЛСОН-систем. В частности, их последовательное применение может обеспечить поэтапное упрощение таких структурных схем и нахождение интересующих нас передаточных функций между внутренними, выходными сигналами систем и входными воздействиями на эти системы.

Пример 8.2. В качестве иллюстрации применения правил структурных преобразований ОСС и нахождения интересующих нас передаточных функций воспользуемся ОСС двигателя постоянного тока, приведенной на рис. 8.7. Определим вначале по этой схеме передаточную функцию двигателя между входным напряжением U и скоростью вращения ω . При этом все остальные входы и ненулевые начальные

условия, как уже отмечалось выше, можно принять равными нулю. Тогда вместо приведенной на рис. 8.7 ОСС можно использовать схему, которая представлена на рис. 8.14.

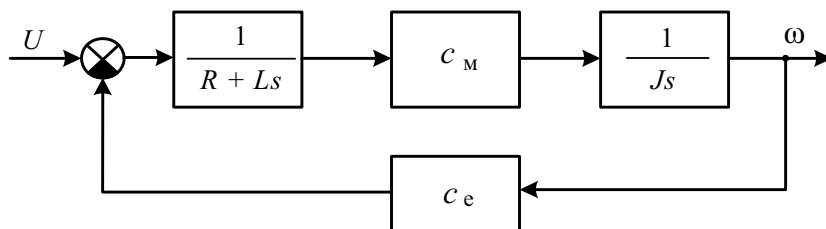


Рис. 8.14

Заменяя в ней последовательно соединенные звенья в прямой цепи одним эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_{\omega}(s) = \frac{c_M}{Js(R + Ls)}$$

и сворачивая в одно звено всю схему, получаем искомую передаточную функцию в виде

$$W_{\omega U}(s) = \frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{c_M}{Js(R + Ls) + c_e c_M}.$$

Если необходимо определить передаточную функцию двигателя между скоростью его вращения ω и моментом нагрузки M_c , то с учётом допустимого при этом обнуления остальных входов (в данном случае – U) и ненулевых начальных условий это можно сделать, перейдя от исходной ОСС двигателя к схеме, которая представлена на рис. 8.15.

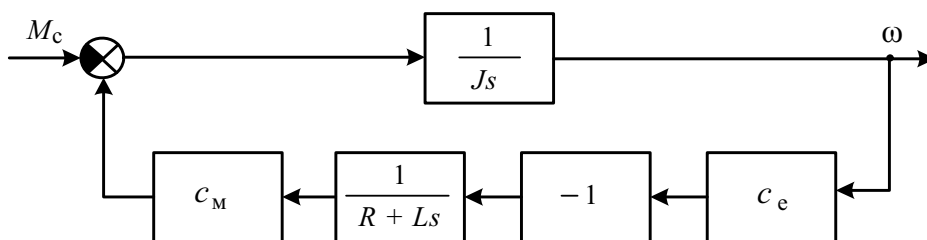


Рис. 8.15

В ней левый сумматор в схеме на рис. 8.7 заменён на звено с передаточной функцией $W(s) = -1$, так как на выход сумматора сигнал, равный противоЭДС E , поступает со знаком «минус». Вместо такой

замены можно было также отрицательный знак от этого сумматора перенести по цепи передачи сигнала в следующий сумматор, т. е. выход звена с передаточной функцией, равной c_M , подать на сумматор в схеме, приведённой на рис. 8.15, со знаком «минус».

После такого упрощения схемы, используя ранее изложенные правила преобразований схемы, приведённой на рис. 8.15, легко установить, что искомая передаточная функция равна

$$W_{\omega M_c}(s) = \frac{\omega(s)}{M_c(s)} = - \frac{R + Ls}{Js(R + Ls) + c_e c_M}.$$

Знак «минус» в этой передаточной функции отражает тот факт, что к сумматору в схеме, приведенной на рис. 8.15, момент M_c подводится с этим знаком и что увеличению момента сопротивления M_c будет соответствовать уменьшение скорости ω электродвигателя.

Определим для двигателя ещё одну передаточную функцию – между моментом нагрузки и его током якоря I . Для этого примем $U = 0$, $I(0) = \omega(0) = 0$ и представим исходную ОСС двигателя с учётом данного допущения в более удобном виде – согласно рис. 8.16.

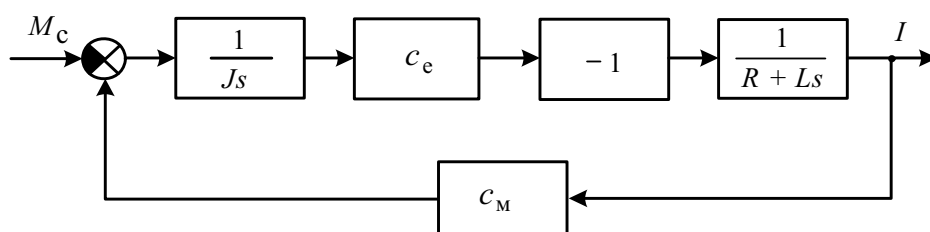


Рис. 8.16

В таком случае искомая передаточная функция получится после свертки последовательно соединенных звеньев и сворачивания полученного соединения с обратной связью в виде

$$W_{IM_c}(s) = \frac{I(s)}{M_c(s)} = \frac{c_e}{Js(R + Ls) + c_e c_M}.$$

Приведенные примеры показывают, что в ряде случаев, с целью упрощения процесса вычисления искомой передаточной функции между входом x и внутренней, или выходной переменной системы y , желательно трансформировать исходную ОСС – представить в ином, более удобном для данного вычисления виде. Для этого обычно отобра-

жают входной сигнал x слева, выходной сигнал y справа, а все остальные элементы системы (звенья, сумматоры, узлы, их взаимосвязи) – в том относительном положении, которое они имеют в исходной ОСС. Это улучшает зрительное восприятие схемы и делает процесс вычисления искомой передаточной функции более удобным.

В тех случаях, когда операторно-структурная схема имеет относительно большое число звеньев и параллельных, обратных связей, для получения искомой передаточной функции системы можно использовать следующую последовательность действий. Вначале заменить все последовательно соединенные звенья в различных частях ОСС эквивалентными им звеньями с передаточными функциями, определенными согласно (8.5). Затем проделать такие же операции агрегирования с параллельно соединенными звеньями, используя для определения передаточных функций эквивалентных им звеньев (8.6) и допустимые операции свертки соединений с обратными связями согласно (8.7). После этого следует повторять вышеуказанную последовательность агрегирования до тех пор, пока не будет выполнена последняя подобная операция и определена искомая передаточная функция.

Для сложных операторно-структурных схем с этой же целью можно использовать общее правило определения передаточной функции между любой парой сигналов в ОСС, которое предложил еще в 1953 году Maison (в отечественной литературе переводят как Мейсон или Мезон).

Согласно этому правилу любая интересующая нас передаточная функция ЛСОН-системы может быть определена по ее ОСС по следующей формуле [1, 10, 11]:

$$W_{yx}(s) = \frac{\left[\left(\sum_{i=1}^r W_{npi}(s) \right) \prod_{j=1}^q (1 \pm W_{pkj}(s)) \right]}{\left[\prod_{j=1}^q (1 \pm W_{pkj}(s)) \right]} \cdot \quad (8.9)$$

Здесь $\sum_{i=1}^r W_{npi}(s)$ – сумма передаточных функций всех r имеющихся в ОСС прямых каналов передачи между сигналами y и x ; $W_{pkj}(s)$ – передаточная функция j -го контура ОСС системы в разомкнутом состоянии. Предполагается, что общее число всех контуров в ОСС равно q . Знак «плюс» в (8.9) ставится перед теми $W_{pkj}(s)$,

которые соответствуют контурам с отрицательной обратной связью, а знак «минус» – перед теми из них, которые соответствуют контурам с положительной обратной связью. Символ "•" указывает на то, что в обозначенных квадратных скобках необходимо исключить все слагаемые, содержащие произведения передаточных функций одних и тех же звеньев, включая звенья с $W(s)=1$.

Пример 8.3. Проиллюстрируем применение этого правила на примере операторно-структурной схемы системы автоматической стабилизации уровней жидкости в двух сообщающихся между собой резервуарах различного объема и с независимыми расходами жидкости [10], которая приведена на рис. 8.17. Её операторно-структурная схема представлена на рис. 8.18.

Здесь y_i, g_i, f_i – соответственно, фактическое и заданное значения уровня, расход жидкости в i -м резервуаре; $W_{y_i u_j}(s)$ – передаточные функции резервуаров относительно управляющих воздействий (притоков жидкости в них); $W_{рег ij}(s)$ – передаточные функции автоматического управляющего устройства; $i \in [1, 2], j \in [1, 2]$.

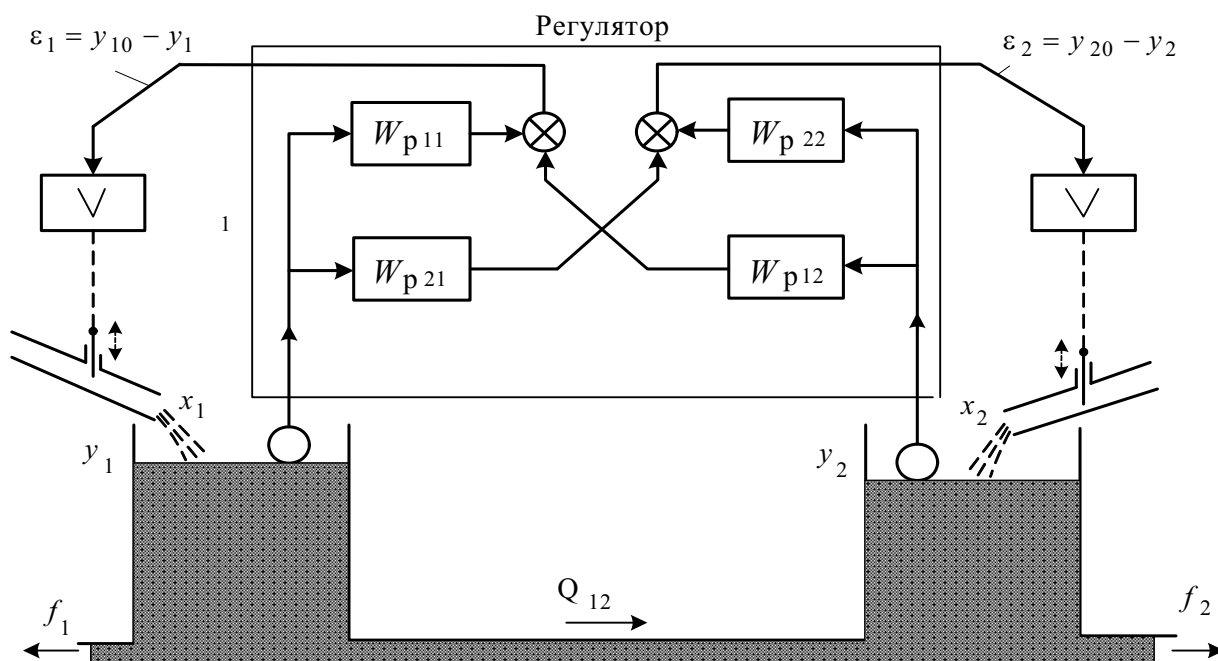


Рис. 8.17. Системы автоматической стабилизации уровней жидкости в двух сообщающихся между собой резервуарах

Определим по этой ОСС передаточную функцию $W_{\varepsilon_1 v_2}(s)$, которая определяет зависимость ошибки регулирования уровня в первом баке $\varepsilon_1 = v_1 - y_1$ от изменений заданного уровня v_2 во втором баке. Между этими величинами имеется два (что соответствует в (8.9) $r = 2$) прямых канала связи, эквивалентные передаточные функции которых $-W_{\text{рег}22}(s) \cdot W_{12}(s)$ и $-W_{\text{рег}12}(s) \cdot W_{11}(s)$.

В данной схеме шесть замкнутых контуров ($q = 6$) с отличающимися эквивалентными передаточными функциями. Все они реализуют отрицательные обратные связи, а их передаточные функции в разомкнутых состояниях:

$$\begin{aligned}
 &W_{\text{рег}11}(s) \cdot W_{11}(s); & W_{\text{рег}22}(s) \cdot W_{22}(s); \\
 &W_{\text{рег}12}(s) \cdot W_{21}(s); & W_{\text{рег}21}(s) \cdot W_{12}(s); \\
 &-W_{\text{рег}11}(s) \cdot W_{21}(s) \cdot W_{\text{рег}22}(s) \cdot W_{12}(s); \\
 &-W_{\text{рег}21}(s) \cdot W_{22}(s) \cdot W_{\text{рег}12}(s) \cdot W_{11}(s).
 \end{aligned}$$

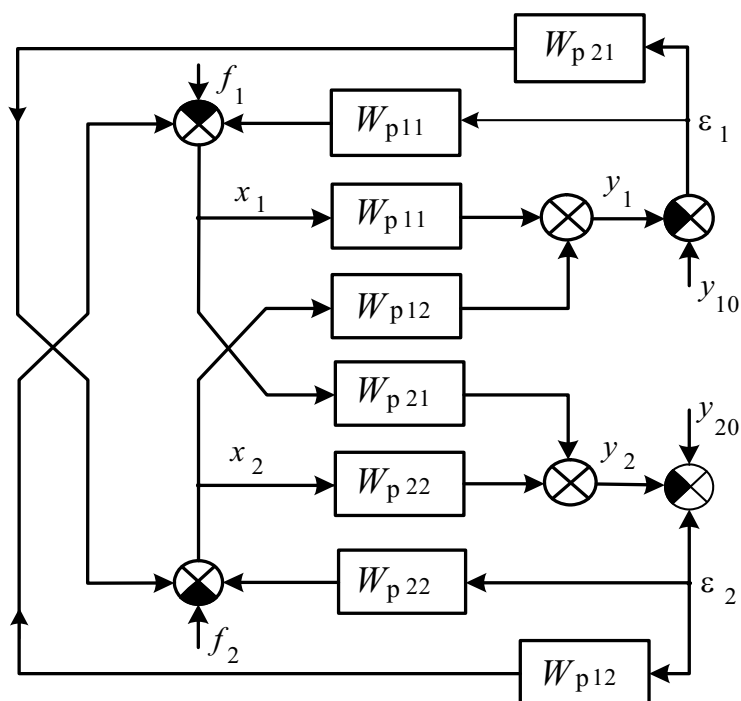


Рис. 8.18. Операторно-структурная схема системы автоматической стабилизации уровней жидкости в двух сообщающихся между собой резервуарах

Таким образом, искомую передаточную функцию, согласно (8.9), можно представить в следующем виде:

$$W_{\varepsilon_1 v_2}(s) = \frac{\left[-\left(W_{\text{рег } 22}(s) \cdot W_{12}(s) + W_{\text{рег } 12}(s) \cdot W_{11}(s) M(s) \right) \right]}{\left[M(s) \right]},$$

где

$$\begin{aligned} M(s) = & \left[1 + W_{\text{рег } 11}(s) \cdot W_{11}(s) \right] \cdot \left[1 + W_{\text{рег } 22}(s) \cdot W_{22}(s) \right] \times \\ & \times \left[1 + W_{\text{рег } 12}(s) \cdot W_{21}(s) \right] \cdot \left[1 + W_{\text{рег } 21}(s) \cdot W_{12}(s) \right] \times \\ & \times \left[1 - W_{\text{рег } 11}(s) \cdot W_{21}(s) \cdot W_{\text{рег } 22}(s) \cdot W_{22}(s) \right] \times \\ & \times \left[1 - W_{\text{рег } 21}(s) \cdot W_{22}(s) \cdot W_{\text{рег } 12}(s) \cdot W_{11}(s) \right]. \end{aligned}$$

После выполнения операций перемножения в этих выражениях и исключения одинаковых произведений передаточных функций получаем

$$W_{\varepsilon_1 v_2}(s) = -\frac{W_{\text{рег } 22}(s) \cdot W_{12}(s) + W_{\text{рег } 12}(s) \cdot W_{11}(s)}{N(s)},$$

где

$$\begin{aligned} N(s) = & 1 + W_{\text{рег } 11}(s) \cdot W_{11}(s) + W_{\text{рег } 22}(s) \cdot W_{22}(s) + \\ & + W_{\text{рег } 12}(s) \cdot W_{21}(s) + W_{\text{рег } 21}(s) \cdot W_{12}(s) + \\ & + \left[W_{\text{рег } 21}(s) \cdot W_{\text{рег } 12}(s) - W_{\text{рег } 11}(s) \cdot W_{\text{рег } 22}(s) \right] \times \\ & \times \left[W_{12}(s) \cdot W_{21}(s) - W_{11}(s) \cdot W_{22}(s) \right]. \end{aligned}$$

Определение той же передаточной функции для ОСС, представленной на рис. 8.9, с использованием ранее описанных правил структурных преобразований, потребовало бы существенных усилий по её отображению в более удобном для этого виде и значительно большего времени на получение нужной передаточной функции. По этой причине формулу (8.9) особенно полезно использовать для определения передаточных

функций по ОСС, отличающихся большим числом звеньев и разнообразными связями между ними.

8.3. Операторно-структурные графы линейных стационарных обыкновенных систем

Для графического отображения математических моделей систем в последние три–четыре десятилетия стали сравнительно широко использовать и ориентированные графы (орграфы) [4, 8], которые по аналогии с рассмотренными выше операторно-структурными схемами далее будем называть *операторно-структурными графами* (ОСГ).

Для линейных стационарных обыкновенных непрерывных математических моделей (систем) каждой дуге (ребру с односторонней стрелкой) ОСГ ставится в соответствие линейное звено так, что дуга определяется его передаточной функцией $W(s)$. Вход этого звена определяет вершина, из которой выходит соответствующая данному звену дуга, а выход – вершина, в которую входит данная дуга. Таким образом, множество дуг ОСГ отражает множество звеньев описываемой им модели (системы), а входящее в него множество вершин определяет всю совокупность входных, внутренних и выходных переменных модели.

От вершины может отходить и несколько дуг. При этом следует считать, что входы всех звеньев модели описываемой системы, которым соответствуют выходящие из этой вершины дуги, одинаковы. Если же к какой-либо вершине подходит несколько дуг, то это означает, что соответствующий данной вершине сигнал в описываемой системе (соответствующая данной вершине переменная математической модели) равен сумме выходных сигналов (переменных) звеньев, описываемых входящими в эту вершину дугами. В этой связи в подобных операторно-структурных графах не требуются специальные элементы для отображения сумматоров и узлов обычных ОСС. Таким образом, для отображения математических моделей ЛСОН-систем операторно-структурными графами достаточно трех элементов – вершин, дуг и наносимых на последние стрелок, которые отражают направленность соответствующих дугам вход-выходных преобразований.

Правила построения и преобразования операторно-структурных графов ЛСОН-систем и отражение их связи с эквивалентными им операторно-структурными схемами иллюстрируются примерами, приведенными в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Примеры операторно-структурных графов и их преобразований

Операторно-структурная схема	Операторно-структурный граф	
	исходный	преобразованный

Для определения передаточных функций систем по их операторно-структурным графам можно также использовать правило Мейсона, описанное в предыдущем разделе. Из приведенных в табл. 8.1 примеров можно сделать заключение, что оба этих способа графического отображения математических моделей систем практически эквивалентны. Возможно, что ОСС более наглядны и практичны при «ручной» обработке содержащейся в них информации или с использованием компьютеров в интерактивном режиме. Они раньше были введены в научные исследования и проектирование систем и в этой связи в настоящее время используются значительно чаще, чем ОСГ.

Операторно-структурные графы более предпочтительны в тех случаях, когда описываемые системы и соответствующие им математические модели слишком сложны или же, когда анализ и/или синтез по ним планируется вести на компьютерах. При этом ОСГ может быть описан сравнительно просто – матрицей смежности своих вершин и набором передаточных функций, соответствующих всем его дугам.

8.4. Операторно-структурные схемы линейных многомерных по входу и выходу систем

В главе 5 уже отмечалось, что линейные многомерные по входу и/или выходу системы чаще всего предпочитают описывать либо передаточными матрицами, либо уравнениями в форме «вход-состояние-выход». В последнем случае уравнения математических моделей систем включают в себя векторные переменные и матрицы, характеризующие взаимосвязи между этими переменными. Графическое представление таких математических моделей, базирующееся на аппарате скалярных переменных и передаточных функций, становится неудобным из-за существенного увеличения числа элементов, необходимых для эквивалентных таким математическим моделям операторно-структурных схем. Чаще всего структурные отображения таких систем проводят с сохранением векторного представления входов, состояний и выходов таких систем. Покажем, как это делается.

Для линейных стационарных и многомерных по входу и/или выходу систем математическая модель в форме «вход-состояние-выход» имеет вид (6.9). Её запись в операторной форме при нулевых начальных условиях с использованием непрерывного преобразования Лапласа для непрерывных по времени t систем или же с использованием z -преобразования для дискретных по t систем принимает вид:

$$\begin{aligned} (qI - A)x(q) &= Bu(q) + Ef(q); \\ y(q) &= Cx(q) + Ff(q), \end{aligned} \quad (8.10)$$

где q означает оператор непрерывного преобразования Лапласа в случае непрерывных систем или оператор z -преобразования для дискретных по t систем, а I – единичная диагональная матрица размерности, равной размерности n вектора состояния x системы.

Структурный аналог модели (8.10) обычно представляют в виде, приведенном на рис. 8.19.

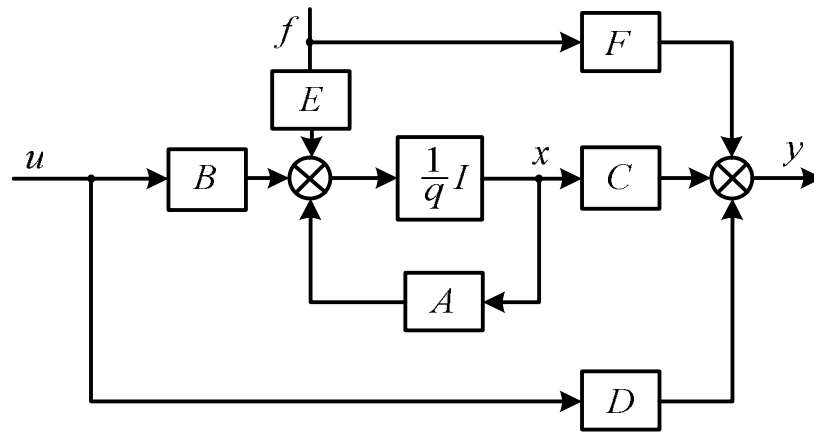


Рис. 8.19. Операторно-структурная схема модели ЛСОН-системы типа «вход-состояние-выход»

Такой класс структурных отображений математических моделей называют либо просто структурными схемами многомерных систем [9], либо структурными схемами многомерных систем, представленными в векторно-матричной форме [11]. По указанной в начале данной главы причине будем их в дальнейшем называть **операторно-структурными схемами векторно-матричного типа**.

В общем случае входы и выходы каждого из приведенных на рис. 8.19 элементов многомерны (векторные переменные) и лишь в частных случаях отдельные из них могут быть скалярными. Каждое из звеньев такой схемы характеризуется передаточной матрицей, роль которой, в частности, выполняют и матрицы A, B, C, D, E, F исходных математических моделей систем.

Передаточная матрица для охваченного обратной связью звена (рис. 8.19) имеет диагональный вид и соответствует объединению n независимых вход-выходных интеграторов. Эквивалентная этому соединению с обратной связью передаточная матрица

$$W(q) = (qI - A)^{-1}.$$

При преобразованиях операторно-структурных схем векторно-матричного типа используются правила, во многом подобные тем, что были описаны в разделе 8.2 и используются для обычных ОСС со скалярными переменными (сигналами). Фактически по тем же правилам осуществляются переносы сумматоров и узлов через звенья и относительно друг друга, объединение параллельно включённых звеньев, только вместо передаточных функций в таких случаях используются передаточные матрицы звеньев. При свертке последовательного соединения двух и большего числа звеньев порядок записи передаточных матриц звеньев соединения в передаточной матрице эквивалентного этому соединению звена должен быть строго фиксированным. В частности, если использовать для такого соединения условные обозначения, соответствующие рис. 8.8, *a*, но заменить оператор *s* на обобщающий непрерывные и дискретные системы оператор *q*, то следует принимать

$$W_{\text{ЭКВ}}(q) = W_n(q) \cdot W_{n-1}(q) \cdot \dots \cdot W_2(q) \cdot W_1(q),$$

то есть записывать в передаточной матрице эквивалентного звена передаточные матрицы входящих в соединение звеньев в порядке следования их от конца соединения к его началу. Тем самым обеспечивается соблюдение допустимых соотношений между размерностями передаточных матриц в производимых с ними операциях перемножения и векторов промежуточных и выходной переменной соединения.

Для соединения с обратной связью в операторно-структурных схемах векторно-матричного типа, соответствующего рис. 8.8, передаточная матрица эквивалентного такому соединению звена определяется по формуле:

$$W_{\text{ЭКВ}}(q) = [I \mp W_1(q) \cdot W_2(q)]^{-1} \cdot W_1(q) \quad (8.11)$$

и лишь при скалярном входе и выходе этого соединения сводится к формуле (8.7). Соотношение (8.11) легко получить, если описать данное соединение операторными соотношениями

$$\varepsilon(q) = x(q) \pm z(q); \quad y(q) = W_1(q) \varepsilon(q); \quad z(q) = W_2(q) y(q)$$

и определить из них методом подстановок отношение изображения $y(q)$ к изображению $x(q)$, используя правила матричных исчислений.

8.5. Операторно-структурные схемы линейных обыкновенных нестационарных непрерывных систем

Математическая модель таких многомерных по входу и выходу систем в форме «вход-выход» может быть представлена в виде

$$A(p, t)y(t) = B(p, t)x(t), \quad (8.12)$$

где $x \in R^k$; $y \in R^l$ – соответственно, вход и выход, $A(p, t)$ и $B(p, t)$ – полиномиальные относительно символа дифференцирования p матрицы. Коэффициенты входящих в эти матрицы полиномов в общем случае меняются с течением времени t .

Графическое отображение математических моделей типа (8.12), по сравнению с моделями линейных стационарных систем, требует дополнительных определений и интерпретаций. Это обусловлено тем, что переход от входящих в (8.12) уравнений к соответствующим им операторным уравнениям связан с преобразованием *свёрток функций* (мультипликативных составляющих) типа $c(t) \frac{d^r z}{dt^r}$. По правилам непрерывного преобразования Лапласа [6, 7] изображение последних, если принять

$$L[c(t)] = c(s), \quad L\left[\frac{d^r z}{dt^r}\right] = Z_r(s)$$

и нулевые начальные условия, имеет вид

$$L\left[c(t) \cdot \frac{d^r z}{dt^r}\right] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} c(q) \cdot Z_r(s-q) dq & \text{для } q > \sigma_1, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} Z_r(q) \cdot c(s-q) \cdot dq & \text{для } q > \sigma_2, \end{cases} \quad (8.13)$$

где σ_1, σ_2 – абсциссы абсолютной сходимости прямого преобразования Лапласа, соответственно, для $c(t)$ и $\frac{d^r z}{dt^r}$.

Столь сложные, как (8.13), выражения для операторных изображений сверток делают крайне сложными и соответствующие структурные отображения моделей вида (8.12) даже для одномерных по входу и выходу систем. При этом теряется наглядность связей входных, внутренних и выходных переменных систем, которая и стимулирует использование отрицательной обратной связи.

По этой причине при анализе или синтезе систем рассматриваемого класса операторно-структурные схемы используют, как правило, лишь в относительно простых случаях, когда математическая модель системы имеет сравнительно малое число переменных параметров. При этом исходная математическая модель системы преобразуется с использованием преобразования Лапласа в совокупность операторных уравнений без учета нестационарности таких параметров. В дальнейшем по полученным уравнениям строится операторно-структурная схема, но в последней в соответствующих передаточных функциях звеньев указывается зависимость от времени этих параметров.

Подобным образом построенные ОСС удобны для решения многих задач анализа и синтеза систем, особенно на аналоговых ЭВМ и на цифровых ЭВМ с использованием специализированных пакетов прикладных программ, ориентированных на ввод математических моделей систем в виде их операторно-структурных схем.

8.6. Операторно-структурные схемы и графы нелинейных систем

Операторно-структурные схемы и графы для систем этого класса так же, как и для нестационарных систем, находят широкое применение обычно для таких математических моделей, в которых число входящих в них нелинейных составляющих относительно невелико и они относятся к числу типовых нелинейностей, описанных в главе 9. В таких случаях ОСС и ОСГ строятся по тем же правилам, что и их аналоги для линейных обыкновенных систем. Отличие состоит лишь в том, что в итоговых ОСС (ОСГ) входящие в них звенья (дуги), отображающие нелинейные компоненты ММ, описываются нелинейными вход-выходными функциями. Линейные составляющие математических моделей систем при этом отображаются соответственно звеньями или дугами, описываемыми передаточными функциями. Если при этом составляется операторно-структурная схема векторно-матричного типа, то её нелинейные компоненты описываются нелинейными вектор-функциями, а линейные – передаточными матрицами.

Основная особенность в преобразованиях таких схем заключается в невозможности их свертки до единственного звена, описываемого только передаточной функцией или передаточной матрицей, или же одного нелинейного звена с нелинейной вход-выходной вектор-функцией или скалярной нелинейной функцией. Для систем рассматриваемого класса обычно в структурных преобразованиях ограничиваются агрегированием (сверткой) по отдельности соединений линейных и нелинейных частей ОСС, причем лишь в тех частях ОСС, в которых присутствуют звенья только одного из этих типов. В итоге максимально агрегированная ОСС нелинейной системы может состоять из нескольких чередующихся между собой линейных и нелинейных звеньев.

Операторно-структурные схемы нелинейных, как и ОСС нестационарных систем, чаще всего используются при моделировании процессов в таких системах на аналоговых ЭВМ и/или ЦВМ с применением специализированных пакетов прикладных программ. Они также применяются при решении задач анализа нелинейных систем, проводимых рядом аналитических методов исследования, например, методами фазового пространства, последовательных приближений, припасовывания, гармонической линеаризации. Эти методы исследований достаточно подробно изучаются в курсе «Теория автоматического управления» [1, 3, 5, 9, 10].

8.7. Операторно-структурные схемы дискретных и дискретно-непрерывных систем

Операторно-структурные схемы широко используются и для представления математических моделей дискретных систем. Исходные математические модели систем этого класса могут быть двух типов:

- содержащие только разностные уравнения;
- содержащие наряду с разностными уравнениями и уравнения с непрерывными координатными переменными.

Первый вариант имеет место в тех случаях, когда описываемая система характеризуется только переменными, квантованными по уровню и по времени (как это имеет место в цифровых системах), или же когда она непрерывна или дискретно-непрерывна по своим переменным, но её математическая модель преобразована к совокупности только разностных уравнений. Со вторым вариантом приходится иметь дело, когда описываемая моделью система дискретно-непрерывна.

Если исходная модель представляет собой совокупность линейных разностных уравнений, то ее операторно-структурное отображение получается по той же «технологии», что и для линейных непрерывных систем. Для этого необходимо применить к этой ММ операцию дискретного преобразования Лапласа или z -преобразования; затем по полученным уравнениям (алгебраическим относительно изображений входных, внутренних и выходных переменных) построить их структурные аналоги и связать их между собой, объединив по одноименным переменным (сигналам). Полученная таким образом ОСС вновь будет состоять (в общем случае) из звеньев, сумматоров, узлов и связывающих их линий, отражающих координатные переменные системы.

Преобразования ОСС вышеуказанного типа также сводятся к их агрегированию, трансформации и/или декомпозиции. Они осуществляются по тем же правилам, что и преобразования ОСС линейных стационарных обыкновенных непрерывных систем, изложенным в разделе 8.2.

Если описываемая система линейна и многомерна по входу и/или выходу и описывается уравнениями типа (6.9), то для таких систем, как и для ЛСОН-систем подобного типа, удобнее использовать операторно-структурные схемы векторно-матричного типа. Их отличие будет заключаться лишь в том, что вместо интеграторов следует вставить звено с передаточной матрицей диагонального типа, элементы которой отражают запаздывание выходного сигнала, по сравнению с входным, на один такт времени.

Если в разностных уравнениях математической модели дискретной системы имеются и нелинейные составляющие, то в получаемую вышеописанном способом ОСС системы включаются нелинейные звенья, соответствующие таким составляющим.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под операторно-структурной схемой системы?
2. Что называют звеном в операторно-структурных схемах систем и чем оно характеризуется?
3. Как отображаются в операторно-структурных схемах сумматоры?
4. Как по исходной математической модели системы построить её операторно-структурную схему?
5. Каковы основные правила преобразований операторно-структурных схем?
6. Как определяются передаточные функции систем по правилу Мезона?

7. Что следует понимать под операторно-структурным графом системы?
8. Каковы основные правила структурных преобразований операторно-структурных графов?
9. Каково структурное отображение математической модели «вход-состояние-выход» линейной стационарной непрерывной многомерной по входу и выходу системы?
10. Чем отличаются операторно-структурные схемы нелинейных систем и каковы правила их преобразований?
11. Каковы особенности операторно-структурных схем дискретных и дискретно-непрерывных систем?

Библиографический список к главе 8

1. *Алексеев А. А., Имаев Д. Х., Кузьмин Н. Н., Яковлев Б. В.* Теория управления. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 1999.
2. *Воронов А. А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979.
3. *Востриков А. С., Французова Г. А.* Теория автоматического регулирования. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006.
4. *Зыков А. А.* Основы теории графов. – М.: Вузовская наука, 2004.
5. *Кориков А. М.* Основы теории управления. – Томск: Изд-во научно-технической литературы, 2002.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения. Теоремы. Формулы. – 6-е изд. – СПб.: Лань, 2003.
7. Математические основы теории автоматического регулирования / под ред. *Б. К. Чемоданова*. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1977.
8. *Оре О.* Графы и их применение: пер. с англ. – 4-е изд. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
9. Справочник по теории автоматического управления / под ред. *А. А. Красовского*. – М.: Наука, 1987.
10. Теория автоматического управления. Кн.1, 2. / под ред. *А. В. Нетушила*. – М.: Высшая школа, 1983.
11. *Топчиев Ю. И.* Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1989.
12. *Трахтман А. М.* Введение в обобщённую спектральную теорию сигналов. – М.: Советское радио, 1972.

ТИПОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ОПЕРАТОРНО-СТРУКТУРНЫХ СХЕМ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И АВТОМАТИЗАЦИИ

В данной главе приводятся сведения о типовых для математических моделей процессов элементах в системах управления и автоматизации. Применительно к операторно-структурным схемам (ОСС) таких систем, соответственно, говорят о типовых звеньях ОСС. Выделение таких элементов и уяснение их свойств полезно при решении задач анализа и синтеза систем, так как позволяет судить о взаимобусловленности входных, внутренних и выходных переменных систем и/или отдельных их устройств.

Под *типовыми элементами математических моделей систем* понимают часто встречающиеся в таких моделях функциональные связи двух (реже большего числа) переменных, описываемые простыми алгебраическими или дифференциальными уравнениями либо одним из этих типов уравнений в сочетании с логическими условиями. В операторно-структурных схемах систем этим элементам соответствуют звенья с типовыми и часто встречающимися вход-выходными отображениями. Ниже приводятся сведения о некоторых из них. Так как подобные выделения элементов математических моделей более часто используются применительно к операторно-структурным схемам систем, то далее будем их называть *типовыми звеньями ОСС*.

В настоящее время нет единой точки зрения на то, какие звенья следует называть типовыми [2, 4, 8, 9]. Чаще всего применительно к ЛСОН-системам к таковым относят звенья, математические модели которых представляют собой линейные алгебраические или дифференциальные уравнения не выше второго порядка [8]. Если рассматривать всё разнообразие математических моделей, используемых для описания процессов в системах управления и автоматизации, то следует говорить о типовых звеньях не только линейных, но и нелинейных систем, а также о типовых звеньях обыкновенных, логических и логико-обыкновенных систем, о безынерционных и инерционных (динамических) звеньях.

Ниже приводятся сведения о наиболее часто встречающихся в технической литературе, посвященной динамике систем, типовых звеньях. Дополнительные сведения о них можно получить в [2, 4, 9].

9.1. Типовые безынерционные звенья

К этой группе типовых звеньев ниже относятся такие звенья, вход-выходные связи в которых безынерционны. Они, как правило, описываются чисто алгебраическими обыкновенными или логическими уравнениями, или совокупностью алгебраических обыкновенных и логических неравенств (уравнений). В частных случаях их уравнения могут быть и дифференциальными, но такими, которые не «вносят» в эти связи инерционность.

В группе типовых безынерционных звеньев следует различать линейные и нелинейные звенья. Последние могут описываться только нелинейными алгебраическими уравнениями или же уравнениями этого типа в сочетании с логическими уравнениями или неравенствами. С учетом ранее введенных определений обыкновенных, логических и логико-обыкновенных математических моделей и систем линейные и нелинейные безынерционные звенья, описываемые только переменными вещественного, комплексного и/или целого типа, далее называются *безынерционными обыкновенными звеньями*. Если для описания вход-выходных связей безынерционного звена требуются обыкновенные алгебраические уравнения и логические неравенства или равенства, то такие звенья далее называются *безынерционными логико-обыкновенными звеньями*.

9.1.1. Типовые линейные безынерционные обыкновенные звенья

Пропорциональное звено

Математическая модель такого звена может быть представлена в виде

$$y(t) = kx(t), \quad (9.1)$$

а передаточная функция

$$W(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = k.$$

Подобные вход-выходные связи характерны, например, для усилительных и измерительных устройств, для делителей напряжения на резисторах, для преобразователей сигналов одной физической природы

в сигналы другой физической природы (в частности, для фотоэлектрических преобразователей).

Очевидно, что пропорциональное звено относится к числу линейных безынерционных звеньев. Его переходная функция

$$h(t) = k \cdot 1(t),$$

а импульсная переходная (весовая) функция

$$w(t) = k \cdot \delta(t).$$

Таким образом, выходной сигнал пропорционального звена изменяется по тому же закону, что и входной сигнал, и отличается от последнего в k раз. В этой связи звенья этого типа некоторые специалисты по системотехнике называют также *масштабными, масштабированными* или *усилительными*. Последнее название вряд ли можно считать удачным, так как величина k может быть и меньше единицы.

Амплитудно-частотная характеристика пропорционального звена $A(\omega) = k$, а фазовая частотная характеристика $\varphi(\omega) = 0$. Следовательно, входные сигналы гармонического типа передаются этим звеном на выход без искажения и фазового сдвига.

В операторно-структурных схемах векторно-матричного типа данному типу звеньев соответствует *многомерное по входу и выходу пропорциональное звено*, математическая модель которого имеет тот же вид (9.1), но

$$x \in R^m, \quad y \in R^n, \quad (9.2)$$

то есть являются переменными векторного типа, а $k \in R^{n \times m}$ – матрица статических коэффициентов передачи по всем вход-выходным каналам звена.

Интегрирующее звено

Звено этого типа описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dy}{dt} = k x(t) \quad (9.3)$$

или, что равносильно, интегральным уравнением

$$y(t) = k \int_0^t x(t) dt + y_0. \quad (9.4)$$

Таким образом, выход интегрирующего звена равен интегралу от его входа, а скорость его изменения меняется мгновенно вслед за

изменениями входного сигнала. Следует при этом заметить, что некоторые специалисты под интегрирующим звеном понимают звено с моделью вида (9.3), но лишь при $k = 1$.

Интегральная связь типа (9.4) имеет место, например, между углом поворота ротора электродвигателя и его скоростью вращения, между уровнем жидкости в резервуаре и давлением её в трубопроводе, по которому она поступает в этот резервуар.

Передаточная функция интегрирующего звена

$$W(s) = \frac{k}{s}.$$

Комплексный коэффициент передачи интегрирующего звена

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = \frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Отсюда следует, что амплитудная и фазовая частотные характеристики соответственно есть

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \quad \text{и} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика в этом случае описывается как

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega.$$

Для $k = 1$ и $k = 10$ она приведена на рис. 9.1.

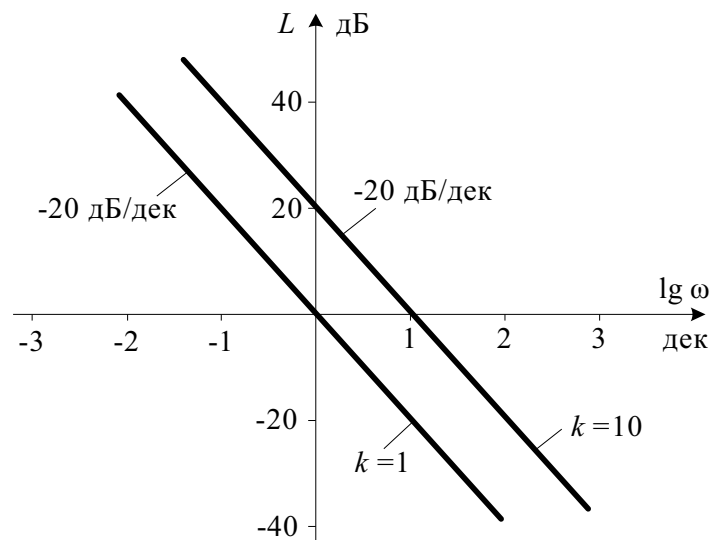


Рис. 9.1. ЛАЧХ интегрирующего звена

Отсюда следует, что с ростом частоты входного гармонического сигнала выходной сигнал интегрирующего звена в установившихся режимах будет уменьшать свою амплитуду обратно пропорционально частоте. Фазовый сдвиг между выходным и входным сигналами при этом остается постоянным и равным $-\frac{\pi}{2}$.

Переходная и весовая функции интегрирующего звена:

$$h(t) = k t \cdot 1(t), \quad w(t) = k \cdot 1(t).$$

Их графики представлены на рис. 9.2.

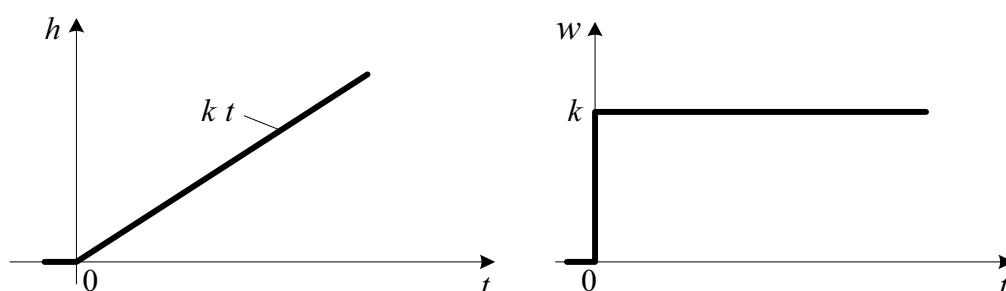


Рис. 9.2. Переходная и весовая функции интегрирующего звена

Идеальное дифференцирующее звено

Математическая модель для звена этого типа может быть записана в виде

$$y(t) = k \frac{dx}{dt}. \quad (9.5)$$

Следовательно, выходной сигнал у идеального дифференцирующего звена прямо пропорционален в любой момент времени производной по времени от входного сигнала $x(t)$.

Из-за несогласованности в используемой терминологии под идеальным дифференцирующим звеном ряд специалистов понимают звено, описываемое уравнением (9.5), но только при $k = 1$. Часто звено данного типа называют просто *дифференцирующим*.

Передаточная функция идеального дифференцирующего звена

$$W(s) = k s.$$

Его амплитудно-фазовый годограф представлен на рис. 9.3. Амплитудно-частотная характеристика идеального дифференцирующего звена $A(\omega) = k\omega$, а фазовая частотная характеристика $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$. Его логарифмическая амплитудно-частотная характеристика представлена на рис. 9.4.

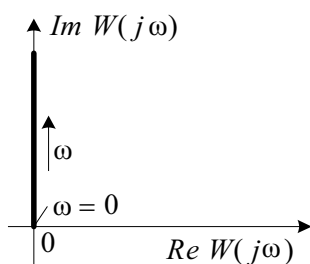


Рис. 9.3

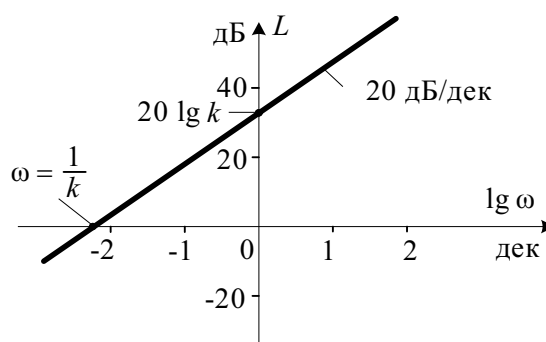


Рис. 9.4.

Переходная функция звена этого типа

$$h(t) = k\delta(t),$$

а весовая функция

$$w(t) = k \frac{d\delta(t)}{dt}.$$

Следует иметь в виду, что точная реализация идеального дифференцирующего звена практически невозможна. Его широкое использование в теории систем обусловлено, прежде всего, удобством графического отображения обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью такого типа звеньев (наряду с некоторыми другими типовыми звеньями).

Пропорционально-дифференцирующее звено

Вход-выходной связи звена данного типа, называемого также часто *форсирующим звеном*, соответствует уравнение

$$y(t) = k \left(1 + T \frac{dx}{dt} \right). \quad (9.6)$$

Подобным образом часто описывают так называемые корректирующие устройства, вводимые в системы с целью обеспечения в них нужного качества переходных процессов.

Передаточная функция звена этого типа

$$W(s) = k(1 + Ts).$$

Аналитические выражения для фазовой, амплитудной и логарифмической амплитудной частотных характеристик пропорционально-дифференцирующего звена (ПД-звена) имеют, соответственно, вид:

$$\varphi(\omega) = \arctg \omega T;$$

$$A(\omega) = k\sqrt{1 + T^2\omega^2};$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}. \quad (9.7)$$

Амплитудно-фазовый годограф и логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики пропорционально-дифференцирующего звена приведены на рис. 9.5.

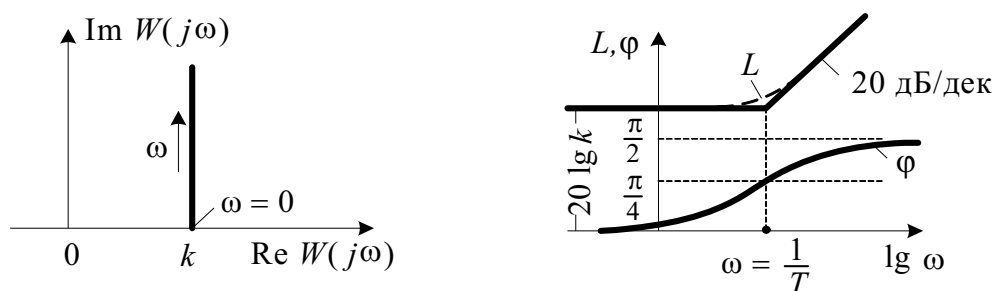


Рис. 9.5

Для этого звена ЛАЧХ часто аппроксимируют двумя прямыми так, как это указано на рис. 9.7. Крутизна правой аппроксимирующей прямой при этом равна +20 дБ/дек. Действительно, в области высоких частот, где $T\omega \gg 1$, согласно (9.7), модуль комплексного коэффициента передачи для данного звена близок к $kT\omega$. Поэтому в этом диапазоне частот можно принять

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg T\omega.$$

При этом

$$L(10\omega) = 20 \lg k + 20 + 20 \lg T\omega,$$

а приращение ЛАЧХ на одной декаде

$$\Delta L(\omega) = L(10\omega) - L(\omega) = 20 \text{ дБ}.$$

Наибольшее значение погрешности такой аппроксимации ЛАЧХ достигает на сопрягающей частоте звена

$$\omega_c = \frac{1}{T}$$

и составляет $10 \lg 2 \approx 3$ дБ.

Очевидно, что реакция звена рассматриваемого типа при нулевых начальных условиях на единичное ступенчатое воздействие, т. е. его переходная функция

$$h(t) = k + kT\delta(t).$$

Следует иметь в виду, что пропорционально-дифференцирующее звено, как и идеальное дифференцирующее, абсолютно точно технически не реализуемо. Его применение в теории систем обусловлено наличием во многих математических моделях систем составляющих, соответствующих модели данного звена (9.6).

Пропорционально-интегрирующее звено

Для этого типа звеньев математическая модель в форме «вход-выход» записывается в виде

$$y(t) = k_1 x(t) + k_2 \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Таким образом, на выходе пропорционально-интегрирующего звена (ПИ-звена) формируется сигнал, складывающийся из двух составляющих: пропорциональной входному сигналу и кратной интегралу от последнего.

Звено этого типа часто называют *изодромным* звеном. Оно имеет передаточную функцию

$$W(s) = k_1 + \frac{k_2}{s}.$$

Её в ряде случаев записывают также в виде

$$W(s) = \frac{k_2 + k_1 s}{s} = \frac{1}{s} \cdot k_2 (1 + Ts),$$

где

$$T \triangleq \frac{k_1}{k_2}.$$

Последняя запись подчеркивает, что данное звено можно представить последовательным соединением идеального интегрирующего и пропорционально-дифференцирующего (форсирующего) звеньев.

ЛАЧХ звена этого типа

$$L(\omega) = 20 \lg k_2 + 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2} - 20 \lg \omega.$$

Она представлена на рис. 9.6.

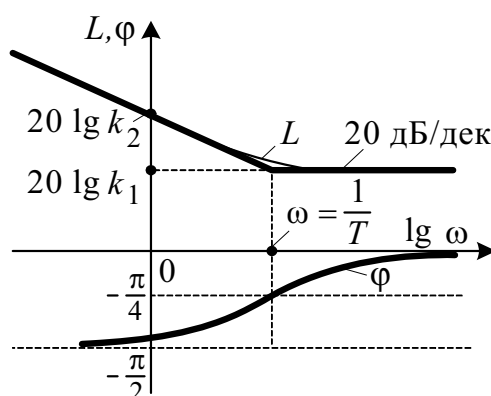


Рис. 9.6. Логарифмические частотные характеристики пропорционально-интегрирующего звена

Из неё следует, что пропорционально-интегрирующее звено в области низких частот приближается по своим свойствам к идеальному интегрирующему звену, а в области высоких частот – к пропорциональному звену.

Пропорционально-интегрально-дифференцирующее звено

Рассматриваемый здесь класс звеньев описывается уравнением

$$y(t) = k_1 x(t) + k_2 \int_0^t x(\tau) d\tau + k_3 \frac{dx}{dt}.$$

Следовательно, выходной сигнал у них равен сумме составляющих, пропорциональных входному сигналу $x(t)$, интегралу и производной от него по времени.

Передаточная функция пропорционально-интегрально-дифференцирующего звена (ПИД-звена)

$$W(s) = k_1 + \frac{k_2}{s} + k_3 s = \frac{k_2}{s} \cdot (1 + T_1 s + T_2^2 s^2),$$

где

$$T_1 = \frac{k_1}{k_2}; \quad T_2^2 = \frac{k_3}{k_2}.$$

Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики этого звена определяются, соответственно, выражениями:

$$L(\omega) = 20 \lg k_2 - 20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2};$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2}.$$

Если параметры ПИД-звена таковы, что

$$1 + T_1 s + T_2^2 s^2 = (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s),$$

то его аппроксимированная ЛАЧХ имеет вид, приведенный на рис. 9.7.

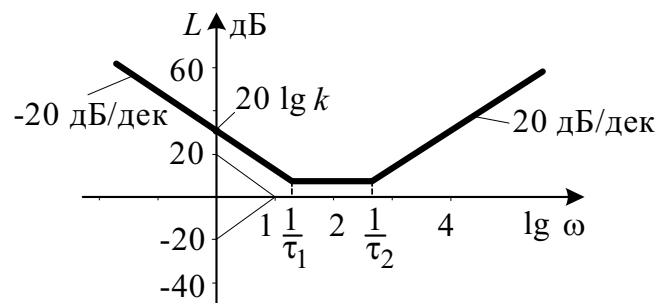


Рис. 9.7. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика пропорционально-интегрально-дифференцирующего звена

Отсюда следует, что в области низких частот это звено приближается по своим свойствам к интегрирующему, на средних частотах – к пропорциональному и на высоких – к дифференцирующему звену.

Два последних из рассмотренных выше типов звеньев довольно часто встречаются в операторно-структурных схемах систем автоматического управления. При этом они отображают регуляторы или корректирующие элементы, специально вводимые в такие системы с целью обеспечения требуемых от этих систем точностных и/или динамических характеристик.

9.1.2. Типовые нелинейные безынерционные обыкновенные звенья

Этот класс звеньев достаточно широк. Ниже приводятся лишь наиболее часто встречающиеся при анализе и синтезе систем автоматизации и управления.

Множительное звено

У звеньев этого типа выходной сигнал

$$y(t) = k \cdot \prod_i x_i(t). \quad (9.8)$$

Чаще всего производится умножение двух входных величин. При этом обычно выходной сигнал множительного звена получается не равным произведению входных сигналов, а пропорционален ему, т. е. $k \neq 1$.

Частным случаем множительного звена, широко встречающимся в инженерной практике, является *квадрирующее звено (квадратор)*, у которого

$$y(t) = k x^2(t).$$

Звенья этого типа нелинейны, то есть имеют нелинейную вход-выходную функциональную связь. Так как последняя является гладкой, однозначной и непрерывной функцией своих аргументов, то множительные элементы для целей приближенного анализа систем, которые они характеризуют, могут быть заменены их линейной моделью, которая получается разложением правой части (9.8) в ряд Тейлора. При этом получаем приближенную для множительного звена линейную модель, записанную в отклонениях от опорного состояния:

$$y_0 = k \cdot \prod_i x_{i0},$$

в виде

$$\Delta y(t) = k \sum_i \lambda_i \cdot \Delta x_i(t),$$

где коэффициенты пропорциональности

$$\lambda_i \triangleq \frac{\partial \left[\prod_j x_j(t) \right]}{\partial x_i}$$

определены при опорном состоянии, т. е. при $x_i = x_{i0}$. Очевидно, что при такой замене множительное звено может быть отражено в ОСС соединением звеньев суммирующего и пропорционального типа.

Множительные звенья имеют место и в операторно-структурных схемах векторно-матричного типа. При этом их математическая модель имеет тот же вид (9.8), но вход и выход являются векторными переменными типа (9.2).

Делительное звено

Для звеньев этого типа выходной сигнал

$$y(t) = k \cdot \frac{x_1(t)}{x_2(t)}.$$

Здесь k – масштабирующий коэффициент, лишь в частном случае равный единице. Частным вариантом звеньев этого типа можно считать также делитель, у которого $x_1(t) = 1$.

Звенья этого типа допускают линеаризацию в опорных состояниях $y_0 = k \cdot x_{10} / x_{20}$, при которых $x_{20} \neq 0$.

9.1.3. Типовые нелинейные безынерционные логико-обыкновенные звенья

Напомним, что математические модели звеньев этого типа состоят из обыкновенных алгебраических уравнений относительно их входов и выходов, включающих вещественные (реже – комплексные или целые) переменные, и алгебраических уравнений или неравенств логического типа.

Звенья релейного типа

В релейных устройствах (РУ) сигнал обычно принимает два или три фиксированных значения. Соответственно, говорят о двух- или трёхпозиционных релейных устройствах (релейных элементах или, просто, реле). В свою очередь, двухпозиционные реле могут быть *неполяризованными* (рис. 9.8, а, б) или *поляризованными* (рис. 9.9).

Для неполяризованного двухпозиционного реле (его можно назвать просто ключом), вход-выходная характеристика которого без учета переходных процессов представлена на рис. 9.8, а, описывается как

$$y = \begin{cases} C, & \text{если } x \leq 0, \\ -C, & \text{если } x \geq a. \end{cases}$$

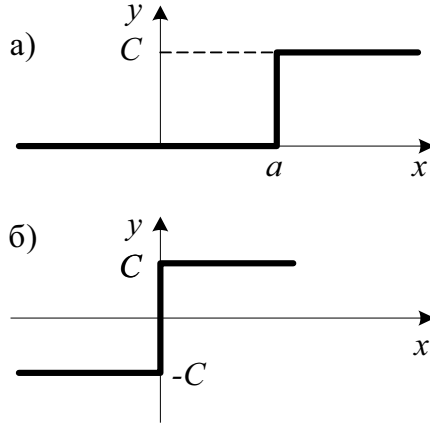


Рис. 9.8

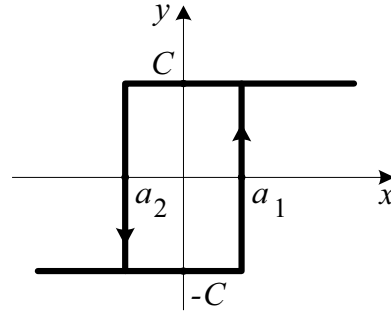


Рис. 9.9

Довольно часто характеристика обыкновенного двухпозиционного реле имеет симметричный вид (рис. 9.8, б) и при этом

$$y = \begin{cases} C, & \text{если } x \geq 0, \\ -C, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Для двухпозиционного поляризованного реле (рис. 9.9) при тех же допущениях

$$y = \begin{cases} C, & \text{если } dx/dt > 0 \text{ и } x \geq a_1 \text{ или } dx/dt < 0 \text{ и } x > a_2 \\ -C, & \text{если } dx/dt > 0 \text{ и } x < a_1 \text{ или } dx/dt < 0 \text{ и } x \leq a_2. \end{cases}$$

Математическая модель трехпозиционного РУ с вход-выходной связью, представленной на рис. 9.10, без учета его инерционности и внутренних переходных процессов, может быть записана в виде

$$y = \begin{cases} C, & \text{если } dx/dt > 0 \text{ и } x \geq a_1 \text{ или } dx/dt < 0 \text{ и } x > \lambda_1 a_1; \\ 0, & \text{если } dx/dt > 0 \text{ и } \lambda_2 a_2 \leq x < a_1 \text{ или } dx/dt < 0 \text{ и } a_2 < x \leq \lambda_1 a_1; \\ -C, & \text{если } dx/dt > 0 \text{ и } x < \lambda_2 a_2 \text{ или } dx/dt < 0 \text{ и } x \leq a_2. \end{cases}$$

Если при этом $\lambda_1 = \lambda_2$ и $a_1 = a_2$, то вход-выходная характеристика трехпозиционного реле называется симметричной, а если $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, то соответствующее релейное устройство обычно называется *идеальным трехпозиционным реле* (рис. 9.11).

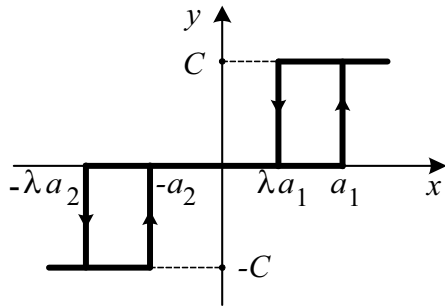


Рис. 9.10

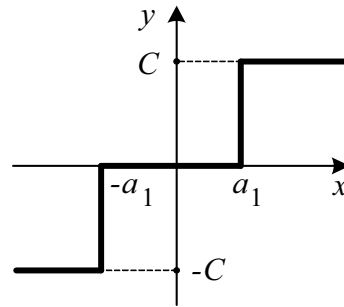


Рис. 9.11

Заметим, что у электромеханических реле коэффициенты возврата λ_1, λ_2 меньше единицы. В то же время в ряде случаев, например в системах автоматического управления, желательно иметь $\lambda > 1$. Для этого релейную характеристику трехпозиционного типа реализуют на средствах вычислительной техники или на электромеханических реле, используя специальные схемотехнические решения.

Звено типа «насыщение»

Большинство физических устройств и систем из-за ограниченной энергоемкости и ряда других факторов имеют статическую вход-выходную зависимость, подобную представленной пунктирной линией на рис. 9.12.

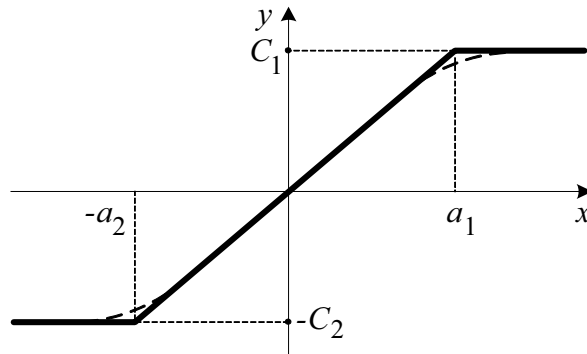


Рис. 9.12. Нелинейность типа «насыщение»

Если же входной сигнал не меняет своего знака, то вход-выходная связь принимает вид, соответствующий зависимости, отраженной на рис. 9.12 в первом квадранте. Подобные зависимости характерны, например, для усилительных и исполнительных устройств систем автоматизации и управления при достаточно больших диапазонах изменения входных сигналов. При исследовании процессов в таких

устройствах и системах с целью упрощения используемых для этих целей математических моделей часто предпочитают заменять подобные зависимости, более простой в математическом описании кусочно-линейной зависимостью, приведенной на рис. 9.12.

Она описывается моделью вида

$$y(t) = \begin{cases} C_1, & \text{если } x > a_1; \\ kx(t), & \text{если } a_2 \leq x \leq a_1; \\ C_2, & \text{если } x < a_2. \end{cases} \quad (9.9)$$

Определяемые моделью типа (9.9) элементы устройств и систем и соответствующие ей звенья в операторно-структурных схемах принято называть *элементами* или *звеньями типа "насыщение"*.

Часто вход-выходные зависимости, представленные на рис. 9.12, симметричны. В подобных случаях принимается

$$C_1 = -C_2 = C; \quad a_1 = -a_2 = a.$$

Звено типа «нечувствительность»

Звено этого типа имеет вход-выходную зависимость, представленную на рис. 9.13. Оно упрощенно описывает связь входного и выходного сигналов, которая характерна, в частности, для многих усилительных устройств, используемых в системах автоматизации и управления, при малых уровнях входных сигналов и отражена на этом рисунке пунктирной линией.

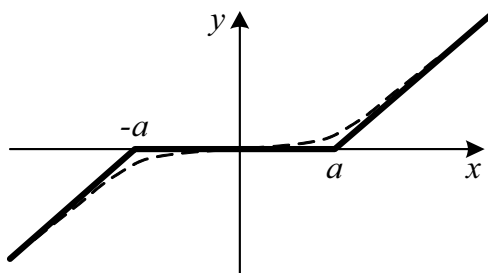


Рис. 9.13. Нелинейность типа «нечувствительность»

Такова же связь выходных сигналов y многих измерительных устройств в их рабочих диапазонах измерений. Характеристика типа «нечувствительность» обычно отображается кусочно-линейной аппроксимацией таких вход-выходных зависимостей, которая на рис. 9.13 показана жирными линиями.

Звено типа «нечувствительность» с симметричной вход-выходной зависимостью описывается совокупностью уравнений

$$y(t) = \begin{cases} k[x(t) - a], & \text{если } x > a; \\ 0, & \text{если } -a \leq x \leq a; \\ k[x(t) + a], & \text{если } x < -a. \end{cases} \quad (9.10)$$

Звено типа «нечувствительность и ограничение»

Звено этого типа отражает одновременно эффекты и насыщения, и нечувствительности, что более точно характеризует вход-выходные зависимости, свойственные многим устройствам автоматизации и управления. Графическое отображение этой аппроксимированной зависимости приведено на рис. 9.14.

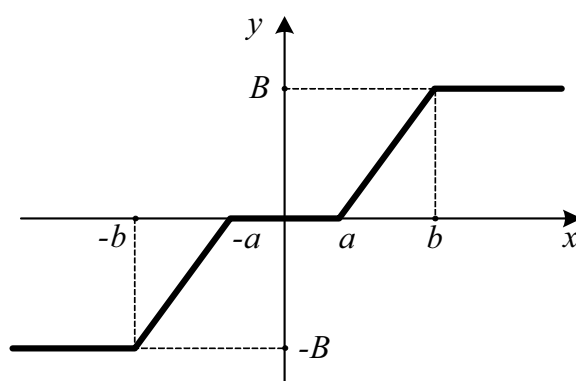


Рис. 9.14. Нелинейность типа «нечувствительность и ограничение»

Представленная на этом рисунке связь входа и выхода звена описывается уравнением:

$$y(t) = \begin{cases} B, & \text{если } x > b; \\ k[x(t) - a], & \text{если } a < x \leq b; \\ 0, & \text{если } -a \leq x \leq a; \\ k[x(t) + a], & \text{если } -b \leq x < -a; \\ -B, & \text{если } x < -b. \end{cases} \quad (9.11)$$

Таким образом, у звена типа «нечувствительность и ограничение» выходной сигнал либо поддерживается на постоянном уровне, равном 0 , B или $-B$, либо изменяется по линейному закону, принимая значения, равные $k(x \pm a)$.

Звено типа «сухое трение»

Математическая модель звеньев этого типа имеет вид:

$$y = y_0 \operatorname{sign} \frac{dx}{dt}. \quad (9.12)$$

Она отражает зависимость, представленную на рис. 9.15.

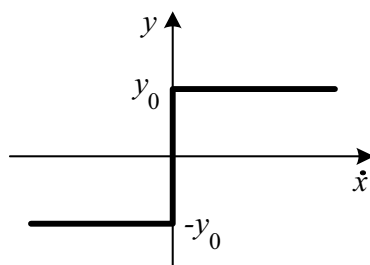


Рис. 9.15. Нелинейность типа «сухое трение»

Таким звеном в операторно-структурных схемах отражают, в частности, зависимость моментов сухого трения на валах вращающихся двигателей и приводимых ими в движение механизмов (отсюда и название этого типа звеньев).

Звено типа «люфт»

Название звеньев этого типа уже подчеркивает факт отражения ими в ОСС люфтов в механизмах передачи, которые обуславливаются наличием зазоров в механических сочленениях (кинематических парах) вращательного (рис. 9.16, А) и поступательного типа. В этом случае зависимость между положением x ведущего звена кинематической пары и положением y ведомого звена (рис. 9.16, Б), а также между их производными по времени \dot{x} и \dot{y} (рис. 9.17) становятся неоднозначными. Её вход-выходные отображения требуют для своего описания не только сведений об уровне входной переменной, но и знания начального состояния звена и скорости изменения входной переменной.

Если оба звена были в движении и после этого происходит смена направления движения ведущего звена, то ведомое звено останавливается и не изменяет своего положения до тех пор, пока не будет выбран люфт, величина которого на рис. 9.16 принята равной $2a$. После этого ведомое звено вновь изменяет свое положение вслед за ведущим. Указанный характер движения отражен, в частности, на рис. 9.16, Б последовательностью переходов из состояния 1 в состояние 4 через состояния 2 и 3. Крутизна наклонных участков вход-выходной зависимости при этом определяется коэффициентом редукции k .

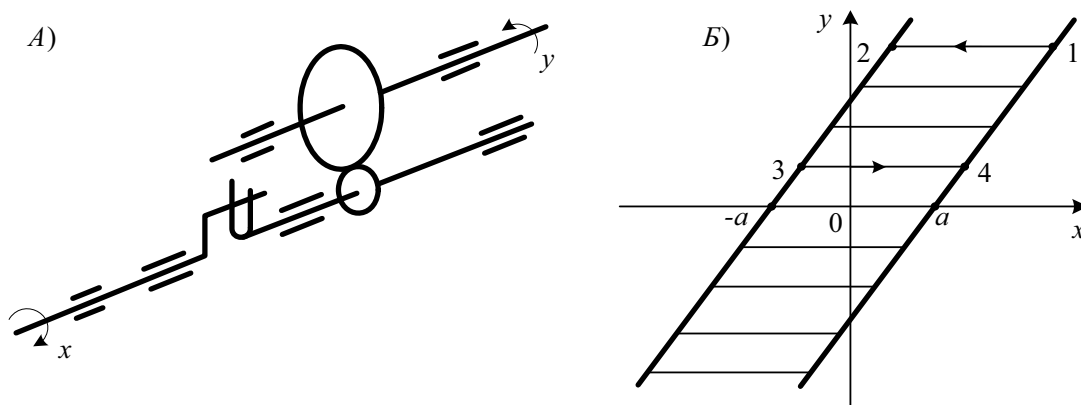


Рис. 9.16. Нелинейность типа «люфт»

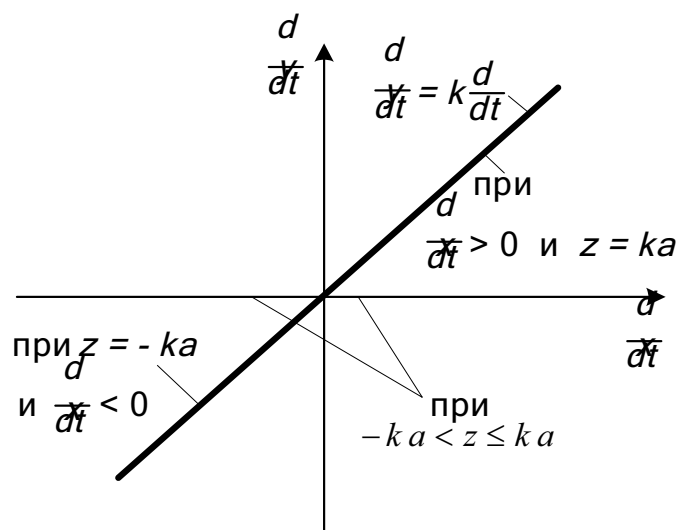


Рис. 9.17. Связь производных входа и выхода у нелинейности типа «люфт»

Математическая модель движений в звене типа «люфт» с учетом (9.16, Б) и (9.17) может быть представлена в следующем виде [9]:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} k \frac{dx}{dt} & \begin{cases} npu \frac{dx}{dt} > 0 \text{ и } z = ka; \\ npu \frac{dx}{dt} < 0 \text{ и } z = -ka; \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} npu \frac{dx}{dt} > 0 \text{ и } -ka \leq z < ka; \\ npu \frac{dx}{dt} < 0 \text{ и } -ka < z \leq ka. \end{cases} \end{cases}$$

Здесь использована вспомогательная переменная $z \triangleq kx - y$.

З в е н о т и п а « у п о р »

Данное звено является часто встречающимся элементом операторно-структурных схем механических передач, в которых угловые или линейные перемещения ведомых механизмов ограничены с одной или (чаще) с двух сторон [9]. Например, перемещения всех звеньев кинематических цепей манипуляторов всегда ограничены. Упоры, в частности, имеют автоматически открывающиеся и закрывающиеся двери, заслонки в трубопроводах. Если в качестве приводного двигателя механизма используется электродвигатель, то при достижении механизмом своего конечного положения, он должен быть остановлен. Возможен и другой вариант защиты электродвигателя от перегрузки при переходе механизма в положение упора: механическая связь его ротора с механизмом разрывается, например, за счет включения между ними фрикционной муфты (муфты сцепления). Тем самым обеспечивается остановка механизма у упора при продолжающем вращаться двигателе. При смене направления вращения двигателя муфта вновь обеспечивает передачу вращающего момента от двигателя к механизму и тот приводится в движение в противоположном предыдущему движению направлении (от упора).

Подобный вариант привода с вращательным движением валов двигателя D и связанного с ним через фрикционную муфту ФМ и рабочего механизма показан на рис. 9.18, *а*. Его вход-выходная характеристика представлена на рис. 9.18, *б*. На рис. 9.18, *в* отражена связь между скоростями изменения во времени входа и выхода такого привода.

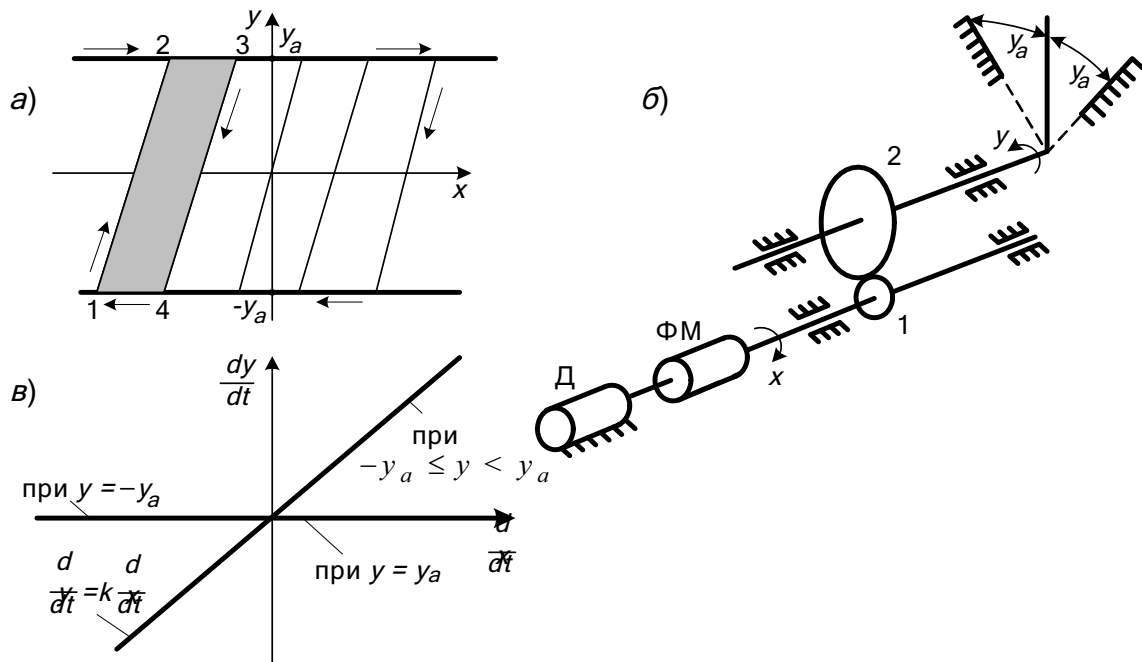


Рис. 9.18. Нелинейность типа «упор»

При этом зависимость угла поворота вала механизма y от угла поворота двигателя x может быть описана следующими соотношениями:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} k \frac{dx}{dt} & \begin{cases} \text{при } \frac{dx}{dt} > 0 \text{ и } -y_a \leq y < y_a; \\ \text{при } x < 0 \text{ и } -y_a < y \leq y_a; \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} \text{при } \frac{dx}{dt} > 0 \text{ и } y = y_a; \\ \text{при } \frac{dx}{dt} < 0 \text{ и } y = -y_a. \end{cases} \end{cases}$$

Они свидетельствуют, что математическая модель упора, как и модель люфта, имеет неоднозначную вход-выходную связь, описываемую с привлечением логических условий.

9.2. Линейные инерционные звенья первого порядка

Звенья этого типа описываются уравнениями, являющимися частными вариантами дифференциального уравнения первого порядка:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t),$$

в которых $a_0, a_1 \neq 0$.

Устойчивое инерционное звено первого порядка

Вход-выходная связь у звена этого типа обычно описывается уравнением

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = k x(t).$$

При этом величину k называют статическим коэффициентом передачи, а величину T – постоянной времени звена.

Передаточная функция при этом будет определяться выражением

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика данного звена

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$$

Его амплитудно-фазовый годограф приведён на рис. 9.19.

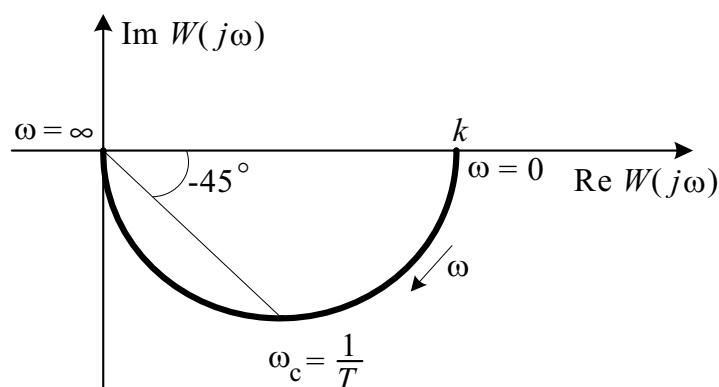


Рис. 9.19. Амплитудно-фазовый годограф устойчивого инерционного звена первого порядка

Годограф представляет собой полуокружность радиуса $k/2$, расположенную в четвертом квадранте.

Амплитудная и фазовая частотные характеристики устойчивого инерционного звена первого порядка в аналитическом виде определяются, соответственно, как

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega T.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика этого звена

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}.$$

Она в аппроксимированном виде представлена на рис. 9.20 совместно с ЛФЧХ данного звена.

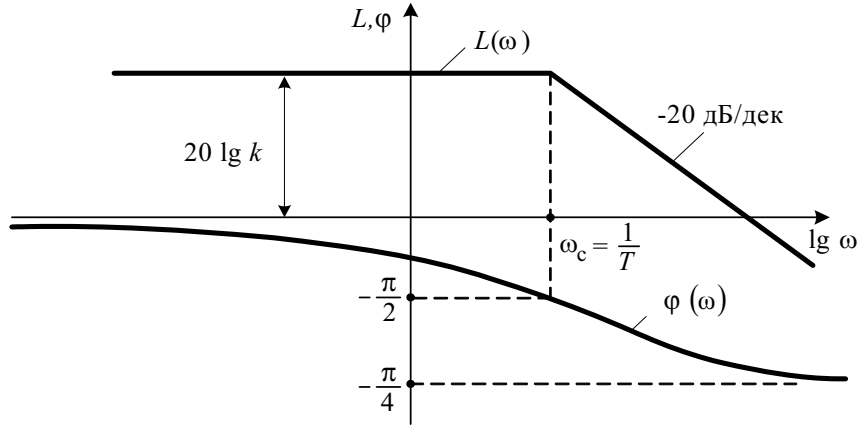


Рис. 9.20. Логарифмические частотные характеристики устойчивого инерционного звена первого порядка

Максимальная ошибка такой аппроксимации достигает значения $20 \lg \sqrt{2} \approx 3$ дБ на частоте $\omega_c = 1/T$, называемой **частотой сопряжения**. Такой уровень погрешности в инженерной практике чаще всего является вполне допустимым.

Переходная функция устойчивого инерционного звена первого порядка определяется как

$$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (9.13)$$

и иллюстрируется рис. 9.21.

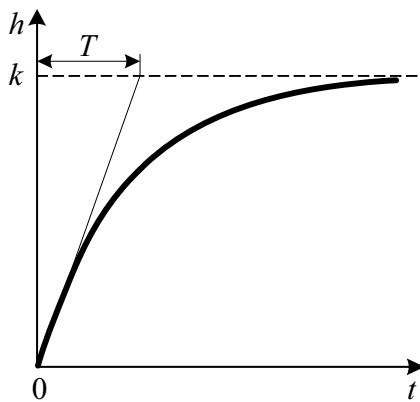


Рис. 9.21

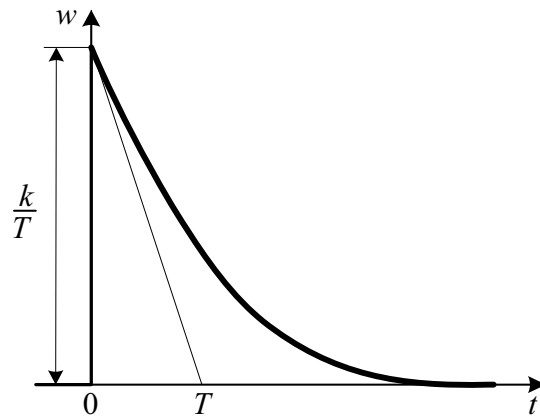


Рис. 9.22

Весовая функция данного звена, являющаяся, по определению, производной по времени от переходной функции

$$w(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

Её графическое отображение представлено на рис. 9.22.

Длительность переходного процесса у звена рассматриваемого типа, имеющего, как следует из (9.13), экспоненциальный характер, обычно принимается порядка $(3 \div 4) T$.

Из приведенных выше частотных и временных характеристик устойчивого инерционного звена первого порядка можно сделать заключение, что чем больше у этого звена постоянная времени T , тем ближе оно по своим свойствам приближается к интегрирующему звену. В этой связи при больших значениях T данное звено иногда называют также **реальным интегрирующим звеном**.

В то же время, звено этого типа часто называют ещё и **инерционным звеном** или **апериодическим** (т. е. неколебательным) **звеном**. Заметим, что такие названия применительно к рассматриваемому типу звеньев не корректны. Прежде всего, потому, что инерционными свойствами, как будет показано далее, обладают не только звенья данного типа и первого порядка. Апериодический (неколебательный) характер переходной функции также не является специфической особенностью только этих звеньев. Именно по этим причинам данный тип звеньев назван **устойчивым инерционным звеном первого порядка**.

Если какое-либо устройство имеет форму реакции на ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях, подобную представленной на рис. 9.21, то параметры его передаточной функции (9.11) и, соответственно, вход-выходное математическое описание (9.10) легко могут быть определены по этой реакции. Статический коэффициент передачи k при этом вычисляется как отношение установившегося значения выходного сигнала устройства к уровню приложенного к нему входного воздействия. Постоянная времени T определяется длиной отрезка на линии установившегося значения выходного сигнала, отсекаемого касательной к графику переходного процесса, соответствующей моменту начала переходного процесса (рис. 9.21).

Если при экспериментальном исследовании устройства (системы) определена его АФЧХ и её амплитудно-фазовый годограф достаточно близок по форме к приведённому на рис. 9.19, то вход-выходную связь этого устройства можно описать уравнением (9.10) или передаточной

функцией (9.11). Параметры k, T для последних определяются при этом по следующему правилу. Для полученного АФГ подбирается достаточно близко аппроксимирующая его полуокружность приведенного на рис. 9.19 вида. Статический коэффициент передачи k принимается равным половине её диаметра. Постоянная времени T находится по формуле

$$T = \frac{1}{\omega_c}.$$

Так как сопрягающей частоте ω_c устойчивого инерционного звена первого порядка согласно (9.12) соответствует $\varphi(\omega) = -45^\circ$, то для её определения достаточно установить по АФГ то значение частоты, которому соответствует фаза, равная -45° .

Подобные способы экспериментального определения математических моделей (*идентификации*) устройств и систем широко используются в инженерной практике. Следует лишь обязательно проверять допустимость представления определяемых вход-выходных зависимостей линейной математической моделью типа (9.10). Для этого необходимо в случае идентификации по реакции на ступенчатое воздействие убедиться в том, что значения параметров этой модели – статического коэффициента k и постоянной времени T не зависят от уровня входного воздействия на систему. При решении задачи идентификации по АФЧХ с этой же целью нужно убедиться в том, что получаемые результаты не зависят от уровня амплитуд подаваемых на вход исследуемого устройства гармонических сигналов. Если в процессе экспериментальных исследований окажется, что такая зависимость достаточно сильна, выбор для описываемого устройства или системы линейной математической модели некорректен.

Инерционно-дифференцирующее звено первого порядка

Звено подобного типа часто называют также ***реальным дифференцирующим звеном***. Вход-выходная математическая модель для этого типа звеньев записывается в виде

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = k \frac{dx}{dt}$$

и определяется передаточной функцией

$$W(s) = \frac{ks}{Ts + 1}.$$

Амплитудно-фазовый годограф инерционно-дифференцирующего звена (рис. 9.23) представляет собой полуокружность, расположенную в первом квадранте комплексной плоскости $W(j\omega)$.

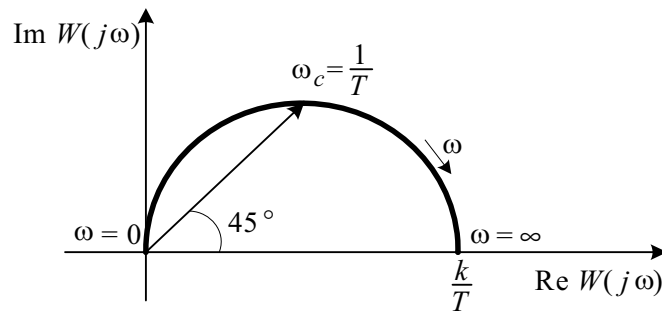


Рис. 9.23. Амплитудно-фазовый годограф инерционно-дифференцирующего звена

При этом амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}},$$

а фазовая частотная характеристика может быть выражена как

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega T.$$

Таким образом, в отличие от идеального дифференцирующего звена, у которого с ростом частоты модуль комплексного коэффициента передачи $W(j\omega)$ неограниченно увеличивался, у инерционного (реального) дифференцирующего звена он ограничен по уровню. Кроме того, в установившемся режиме при гармоническом входном воздействии с ростом частоты последнее опережение по фазе выходного сигнала снижается со значения $\pi/2$ до нуля.

Переходная функция данного звена описывается формулой

$$h(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}},$$

а весовая функция –

$$h(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

Их вид отражен, соответственно, на рис. 9.24 и рис. 9.25.

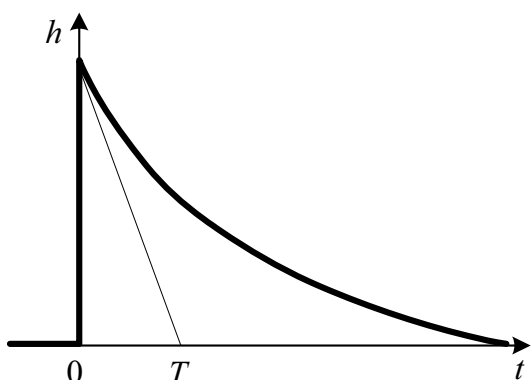


Рис. 9.24

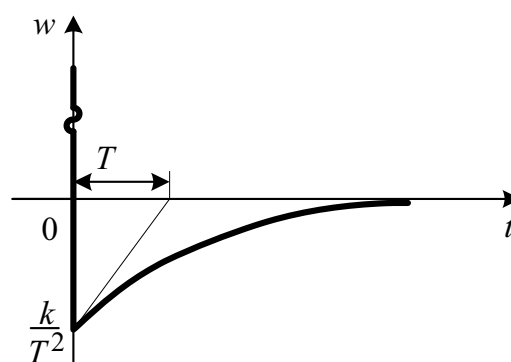


Рис. 9.25

Другие типовые характеристики динамических свойств данного звена легко определить по его передаточной функции.

Упругое звено

Звено этого типа называют также *интегро-дифференцирующим*, или *инерционно-форсирующим* [9]. Его математическая модель имеет вид

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y(t) = k \left[T_2 \frac{dx}{dt} + x(t) \right]. \quad (9.14)$$

Если при этом $T_1 > T_2$, то звено называют *упругим интегрирующим звеном*, а если $T_1 < T_2$, то *упругим дифференцирующим*. Такого рода уточнения обусловлены тем, что в первом случае в звене будет превалировать эффект инерционности и, следовательно, при больших значениях T_1 – эффект интегрирования, а во втором случае – эффект дифференцирования.

В обоих случаях передаточная функция упругого звена

$$W(s) = \frac{k(T_2 s + 1)}{T s + 1}. \quad (9.15)$$

Одинаковыми будут у этого звена и аналитические выражения для всех других основных частотных и временных характеристик. При тех же условных обозначениях, которые были использованы выше для других типов звеньев, имеем:

$$W(j\omega) = \frac{k(1 + j\omega T_2)}{1 + j\omega T_1};$$

$$A(\omega) = \frac{k\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_1;$$

$$h(t) = k \left[1 + \frac{T_2 - T_1}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \right].$$

В то же время, форма графических зависимостей указанных характеристик у упругого интегрирующего звена и у упругого дифференцирующего звена существенно различны (рис. 9.26, 9.27).

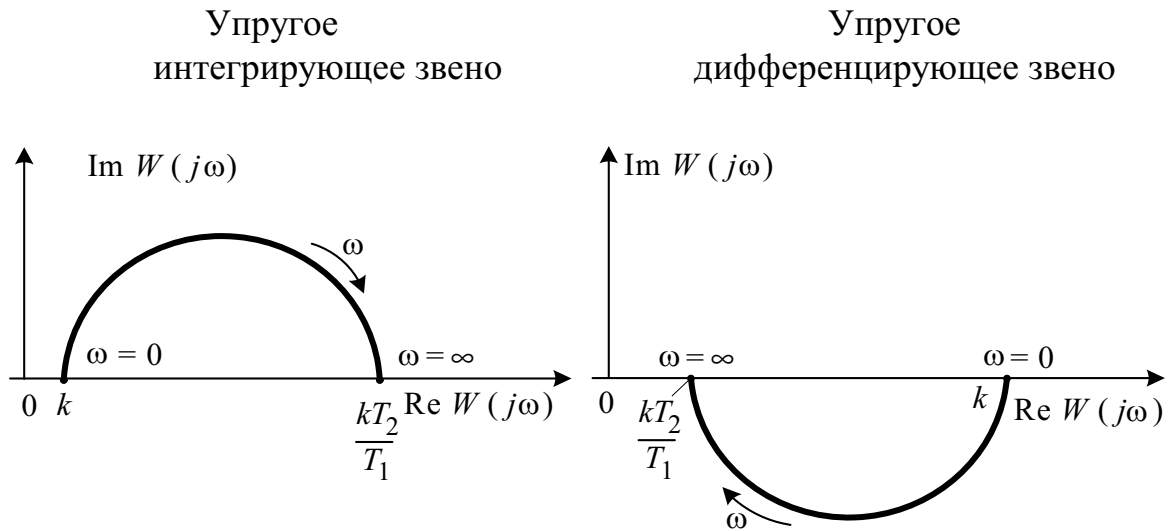


Рис. 9.26. Частотные характеристики упругих звеньев

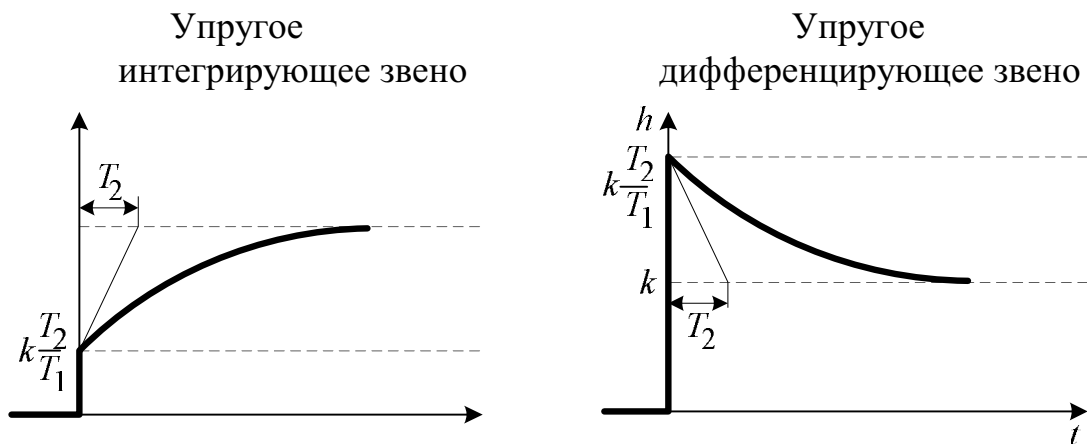


Рис. 9.27. Переходные функции упругих звеньев

Неустойчивое инерционное звено первого порядка

К неустойчивым звеньям первого порядка относятся звенья, у которых вход-выходные математические модели имеют вид

$$T_1 \frac{dy}{dt} - y(t) = k \left[T_2 \frac{dx}{dt} \pm x(t) \right]. \quad (9.16)$$

Определяющим является в данном случае положительное значение корня характеристического уравнения

$$T_1 s - 1 = 0,$$

соответствующего (9.16). Это порождает расходящиеся процессы в устройствах с такой вход-выходной связью при любых входных сигналах, в том числе исчезающих со временем (неустойчивость этих устройств).

Рассмотрим из этого класса звеньев звено, уравнение динамики которого

$$T \frac{dy}{dt} - y(t) = k x(t).$$

Его передаточная функция

$$W(s) = \frac{k}{Ts - 1}. \quad (9.17)$$

АФЧХ такого звена

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{j\omega T - 1} = \\ &= \frac{k \cdot (-j\omega T - 1)}{(j\omega T - 1) \cdot (-j\omega T - 1)} = -\frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, вещественная и мнимая частотные характеристики у данного звена описываются, соответственно, как

$$P(\omega) = -\frac{k}{1 + \omega^2 T^2}; \quad Q(\omega) = -\frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}. \quad (9.18)$$

Они определяют амплитудно-фазовый годограф звена в виде, представленном на рис. 9.28.

При этом его амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$

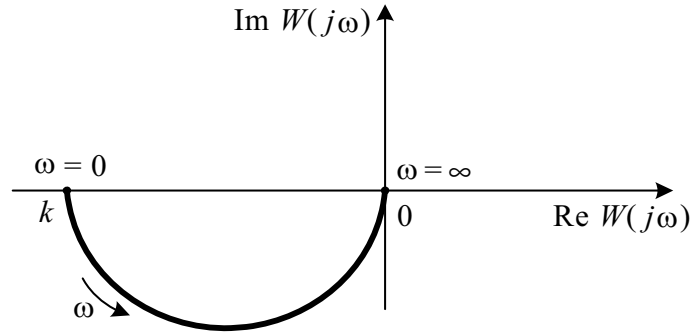


Рис. 9.28. Амплитудно-фазовый годограф неустойчивого звена первого порядка

Определение фазовой частотной характеристики рассматриваемого здесь звена по хорошо известной формуле с использованием аналитических выражений для ВЧХ и МЧХ, т. е. как

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}, \quad (9.19)$$

в данном случае может привести к ошибочным результатам.

Действительно, изменения для $\varphi(\omega)$, вычисляемых по (9.19) при изменении частоты ω от нуля до бесконечности, принадлежат диапазону от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. В то же время, из рис. 9.29 видно, что АФГ звена располагается в третьем квадранте и, следовательно, $\varphi(\omega)$ меняется в иных пределах. Поэтому определять ФЧХ по (9.19) в данном случае нужно с учётом знаков, которые имеют вещественная и мнимая часть комплексного коэффициента передачи.

С учетом расположения АФГ для неустойчивого звена первого порядка получаем:

$$\varphi(\omega) = -\pi + \operatorname{arctg} \omega T.$$

Из изложенного выше следует, что рассматриваемое здесь звено, как и другие типы неустойчивых звеньев первого порядка, относится к классу неминимально-фазовых звеньев.

Переходная функция данного звена (рис. 9.29)

$$h(t) = k \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) \cdot 1(t).$$

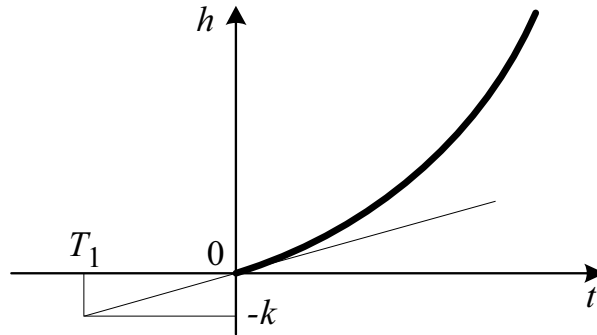


Рис. 9.29. Переходная функция неустойчивого звена первого порядка

Она указывает на отсутствие у описываемого здесь звена установившегося значения выходного сигнала после подачи на его вход ступенчатого воздействия.

9.3. Линейные звенья второго порядка

Из звеньев, описываемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка, к типовым обычно относят лишь те, у которых правая часть не содержит производных от входного сигнала. Математическую модель для них представляют в виде

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t) \quad (9.20)$$

или

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi \omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y(t) = k \omega_0^2 x(t).$$

Здесь T – постоянная времени; k – статический коэффициент передачи; ξ – степень (декремент) затухания; ω_0 – частота собственных колебаний (резонансная частота) звена, связанная с T соотношением

$$\omega_0 = \frac{1}{T}.$$

Соответствующая этому звену передаточная функция

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} = \frac{k \omega_0^2}{s^2 + 2\xi \omega_0 s + \omega_0^2}.$$

Разнообразие свойств линейных звеньев второго порядка определяется тем, какие значения имеют корни их характеристического уравнения

$$T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1 = 0.$$

Эти корни

$$s_{1,2} = \frac{1}{T} \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right). \quad (9.21)$$

Отсюда следует, что определяющим фактором того, какое будет расположение корней характеристического уравнения у звена второго порядка, является его *степень затухания* ξ . Эти корни могут быть:

- 1) вещественными отрицательными (в случае, когда $\xi > 1$);
- 2) комплексными с отрицательной вещественной частью (при этом $0 < \xi \leq 1$);
- 3) чисто мнимыми (в ситуациях, когда $\xi = 0$);
- 4) комплексными с положительной вещественной частью;
- 5) вещественными положительными;
- 6) вещественными с различными знаками.

Соответственно можно различать 6 типовых линейных звеньев второго порядка, описываемых уравнением (9.15). На практике чаще всего говорят лишь о четырех типах звеньев второго порядка, объединяя те, которым соответствуют 4, 5 и 6 варианты корней характеристического уравнения, в один тип звеньев – в ***линейные неустойчивые звенья второго порядка***.

Если у звена второго порядка $\xi > 1$, то оно называется ***устойчивым линейным апериодическим звеном второго порядка***, или чаще просто ***апериодическим звеном второго порядка***. При $0 < \xi \leq 1$ имеем ***линейное колебательное звено второго порядка***. При $\xi = 0$ звено второго порядка называют ***консервативным***.

Рассмотрим все эти типы звеньев более подробно.

Для всех вышеперечисленных звеньев аналитическое выражение для АФЧХ одно и то же, а именно

$$W(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^2 + j2\xi T\omega + 1},$$

но вид амплитудно-фазового годографа существенно зависит от степени затухания. На рис. 9.30 приведены АФГ для апериодического, колебательного и консервативного звеньев.

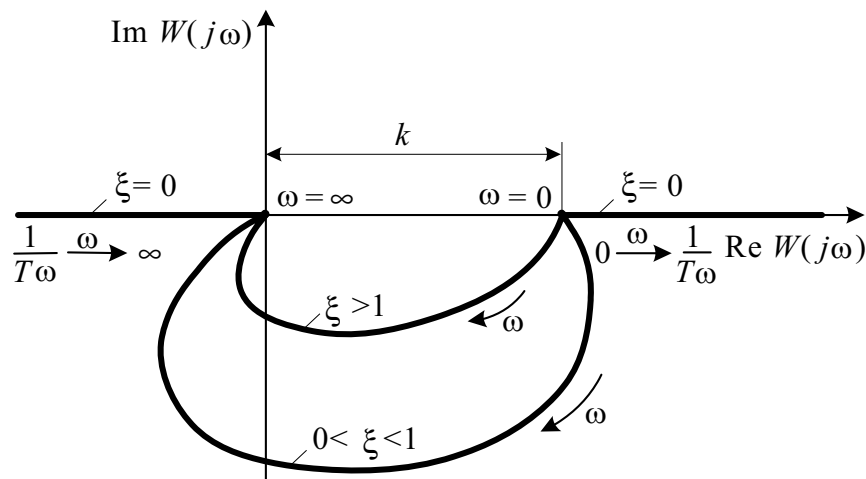


Рис. 9.30. Амплитудно-фазовые годографы звеньев второго порядка

Из этого рисунка следует, что АФГ для всех этих трёх типов звеньев имеет одни и те же начальные и конечные точки: $W(j0) = k$; $W(j\infty) = 0$. При этом у аperiodического звена по мере роста частоты ω от нуля до ∞ модуль $W(j\omega)$ уменьшается, а фаза изменяется от нуля до $-\pi$. У колебательного звена фаза изменяется в тех же пределах, однако модуль комплексного коэффициента передачи может существенно возрасти при промежуточных значениях частоты и чем меньше степень затухания, тем более явно проявляется эта тенденция.

У аperiodического и устойчивого колебательного звеньев второго порядка частоте собственных колебаний ω_0 на АФГ соответствуют точки их пересечения с отрицательной мнимой полуосью. Знание этого факта, как и того, что $W(j0) = k$, полезно для определения параметров передаточных функций для данных типов звеньев по экспериментально определённой АФЧХ.

Предельным случаем для этих типов звеньев является годограф консервативного звена (напомним, что ему соответствует $\xi = 0$). В этом случае АФГ представляет собой два отрезка, совпадающих с вещественной осью. Первый из них соответствует изменениям частоты от нуля до $1/T$, начинается при $W(j0) = k$ и стремится к $+\infty$. Фаза $W(j\omega)$ при этом остается равной $+\pi$. Затем при частоте собственных колебаний $\omega_0 = 1/T$ происходит переход в бесконечности АФГ консервативного звена на отрицательную вещественную полуось. В дальнейшем, по мере роста частоты, модуль АФЧХ уменьшается, фаза при этом

остается постоянной и равной $-\pi$.

Логарифмические амплитудные частотные характеристики для этих же типов звеньев при их статических коэффициентах передачи $k=1$ и собственной частоте $\omega_0=1 \text{ c}^{-1}$ приведены на рис. 9.31.

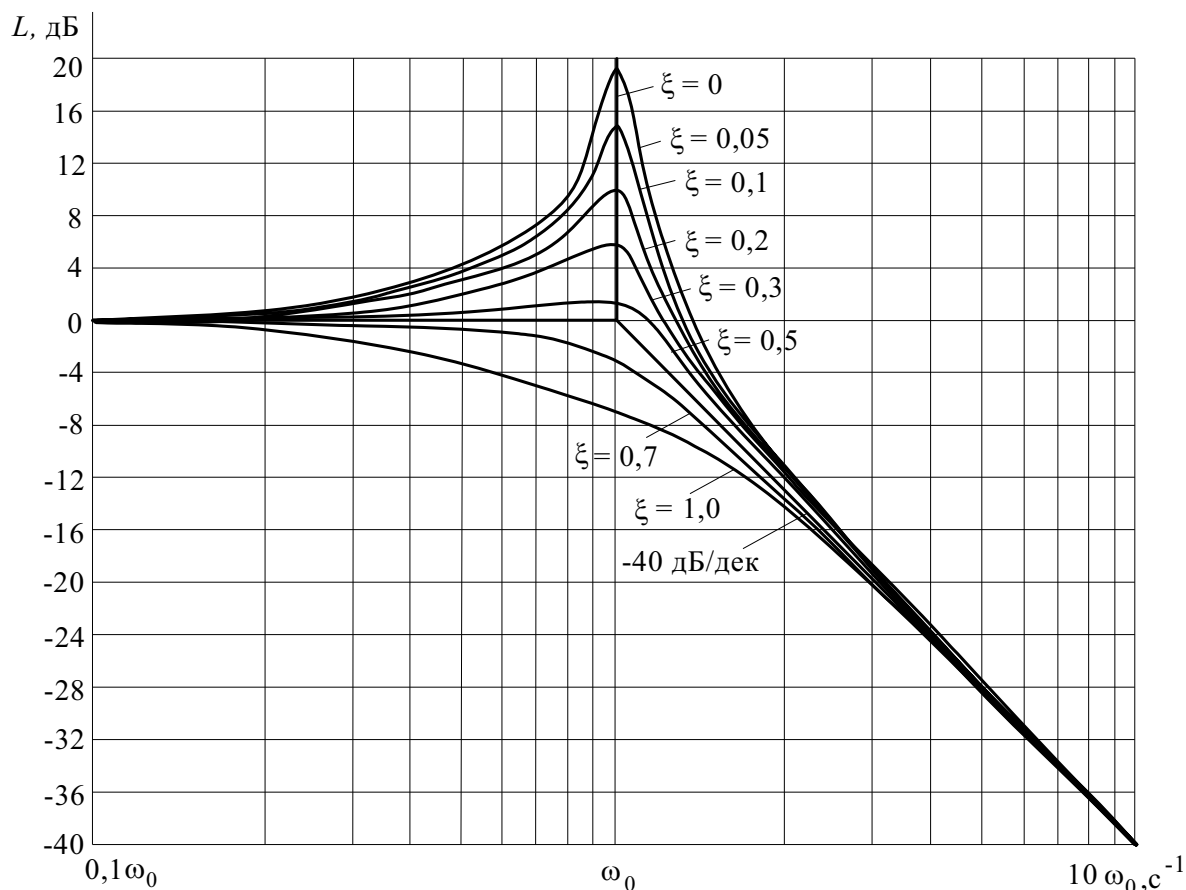


Рис. 9.31. Логарифмические амплитудные частотные характеристики звеньев второго порядка

АЧХ для всех этих трех типов звеньев при малых частотах асимптотически приближаются к оси частот, а при больших значениях частоты ω – к прямой, пересекающей ось частот при частоте $\omega_0 = 1/T$ и имеющей крутизну, равную -40 дБ/дек . При этом, чем меньше степень затухания ξ у звена, тем более явно выражен на АЧХ пик на частоте собственных колебаний ω_0 . У консервативного звена на этой частоте АЧХ имеет вид δ -функции.

Фазовые частотные характеристики для апериодического, устойчивого колебательного и консервативного звеньев приведены на рис. 9.32.

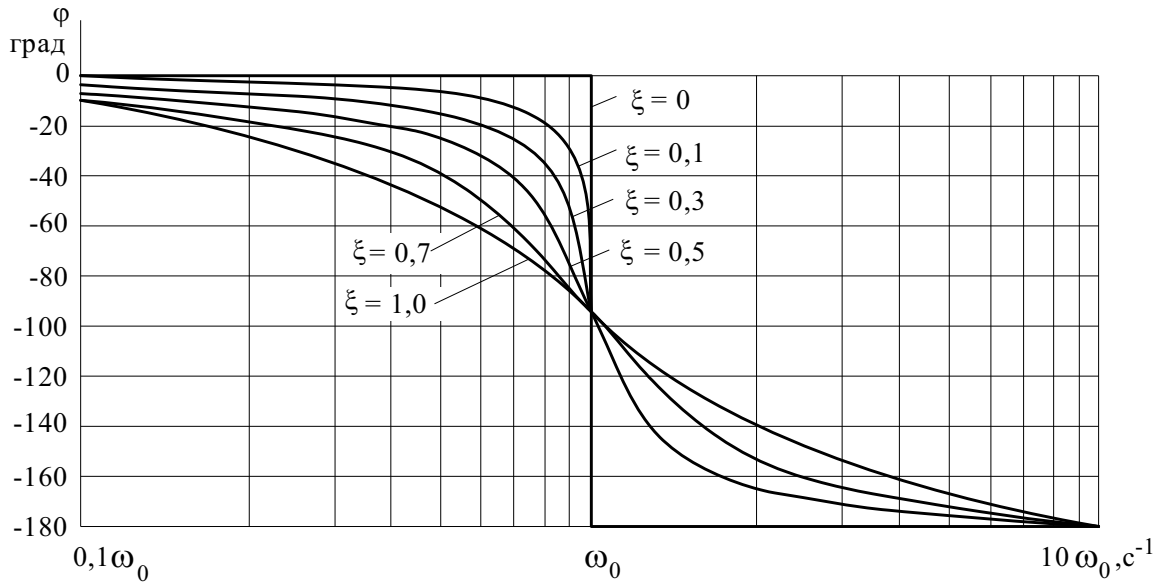


Рис. 9.32. Фазовые частотные характеристики звеньев второго порядка

Как видно из этого рисунка, у устойчивого колебательного и апериодического звеньев второго порядка изменения фазы комплексного коэффициента передачи при изменении частоты от нуля до ∞ происходят в диапазоне от 0 до $-\pi$. На частоте собственных колебаний у этих звеньев $\varphi(\omega_0) = -\pi/2$. У консервативного звена, как уже отмечалось выше, до частоты ω_0 $\varphi(\omega_0) = 0$, а при частотах $\omega \geq \omega_0$ ФЧХ $\varphi(\omega) = -\pi$.

Для определения переходной функции апериодического звена второго порядка представим его передаточную функцию в виде

$$W(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}.$$

Постоянные времени T_1, T_2 этой передаточной функции могут быть найдены из условия равенства знаменателей в (9.17) и (9.20):

$$(T_1s + 1)(T_2s + 1) = T^2s^2 + 2\xi Ts + 1.$$

Из (9.20) следует, что апериодическое звено второго порядка эквивалентно последовательному соединению двух устойчивых (апериодических) звеньев первого порядка с постоянными времени T_1, T_2 . Поэтому для него переходная функция при неравных T_1 и T_2

$$h(t) = k \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right],$$

а весовая

$$w(t) = \frac{k}{T_1 - T_2} \left[e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right].$$

Если у апериодического звена второго порядка $T_1 = T_2$, то его переходная функция

$$h(t) = k \left[1 - \left(1 - \frac{1}{T_1} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} \right].$$

График переходной функции этого звена приведен на рис. 9.33.

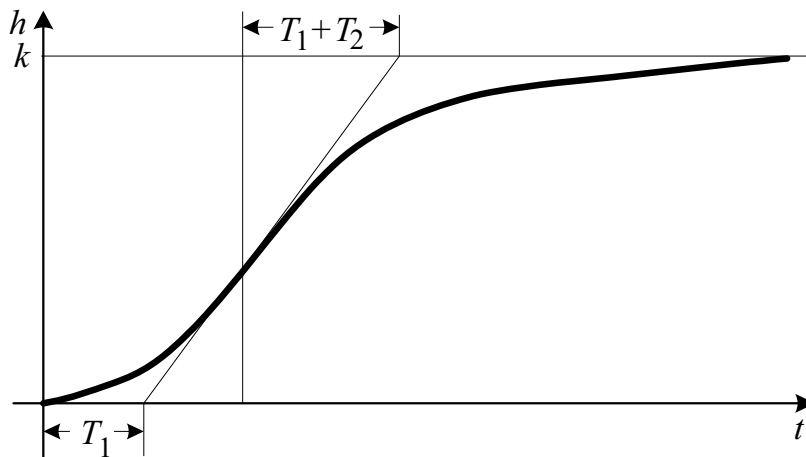


Рис. 9.33. Переходная функция апериодического звена второго порядка

У устойчивого колебательного звена второго порядка переходная функция (рис. 9.34) определяется по формуле:

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right],$$

где

$$\beta = \frac{\xi}{T}; \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Её весовая функция

$$w(t) = \frac{k}{T\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\beta t} \sin \omega_1 t .$$

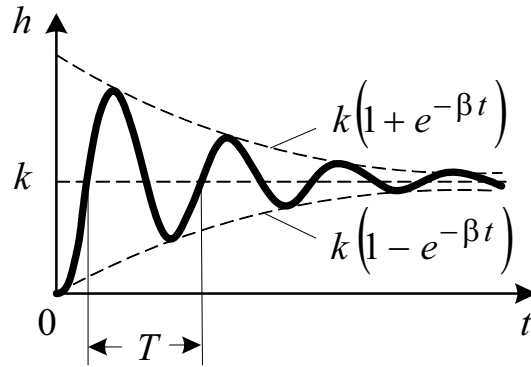


Рис. 9.34. Переходная функция устойчивого колебательного звена второго порядка

Из рис. 9.34 следует, что для определения параметров передаточной функции устойчивого колебательного звена второго порядка по экспериментально снятой переходной функции можно использовать следующие расчётные соотношения:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}; \quad \beta = \frac{1}{T} \ln \frac{A_1}{A_2}; \quad \omega_0 = \frac{1}{T} = \sqrt{\omega_1^2 + \beta^2}; \quad \xi = \frac{\beta}{\omega_0}.$$

Для консервативного звена, степень затухания у которого $\xi = 0$, переходная функция

$$h(t) = k(1 - \cos \omega_0 t).$$

Её графическая зависимость приведена на рис. 9.35.

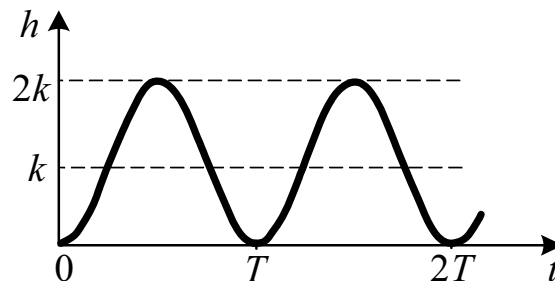


Рис. 9.35. Переходная функция консервативного звена

Группу линейных неустойчивых звеньев второго порядка образуют звенья, у которых либо один или оба корня характеристического уравнения (9.18) вещественные положительные, либо оба комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью. Они описываются передаточными функциями вида

$$W_1(s) = \frac{k}{T^2 s^2 - 2\xi Ts + 1}; \quad W_2(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts - 1};$$

$$W_3(s) = \frac{k}{T^2 s^2 - 2\xi Ts - 1},$$

у которых T и k больше нуля.

У всех звеньев этой группы выходные переменные при любых входных воздействиях неограниченно нарастают с течением времени. Более подробные сведения о них содержатся в [8, 9].

9.4. Звенья с передаточными функциями иррационального и трансцендентного типа

При описании ряда устройств и технических систем, например тепловых объектов, длинных линий электропередачи, трубопроводных линий, получающиеся передаточные функции могут быть иррациональными или трансцендентными относительно своего аргумента – оператора s преобразования Лапласа. В частности, при описании процессов нагрева массивных тел могут быть получены передаточные функции вида

$$W_1(s) = \frac{k}{\sqrt{s}}; \tag{9.22}$$

$$W_2(s) = \frac{k}{1 + \sqrt{Ts}}. \tag{9.23}$$

Звено с передаточной функцией вида (9.22) называют *полуинтегрирующим звеном*, а с передаточной функцией (9.23) – *полуинерционным*. Их типовые частотные и временные характеристики приведены в [9].

Звено чистого запаздывания

Из числа звеньев с трансцендентными передаточными функциями наиболее часто в инженерной практике встречается звено, у которого вход-выходное отображение описывается уравнением

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (9.24)$$

а передаточная функция

$$W(s) = e^{-\tau s}.$$

Это звено называют *звеном чистого запаздывания*, а величину τ – *временем чистого запаздывания*. Последнее определяет время, на которое выходной сигнал у этого звена отстает по отношению к его входному сигналу.

Связи переменных типа (9.24) имеют место, в частности, при математическом описании процессов, протекающих в цифровых и импульсных системах, в системах передачи сигналов на значительные расстояния. Например, передача сигналов на космические аппараты, находящиеся на межпланетных траекториях движения, происходит с большим временным запаздыванием. В инженерной практике для описания процессов в объектах управления с большими постоянными времени используют упрощённые математические модели, которым эквивалентны операторно-структурные схемы, включающие звенья чистого запаздывания.

Звено чистого запаздывания имеет бесконечное множество нулей $s_i = s_m e^{j\psi}$, модули которых $s_m \rightarrow \infty$, а угловое положение на комплексной плоскости удовлетворяет условию: $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$. В этой связи оно является неминимально-фазовым. Его амплитудно-фазовый годограф имеет вид окружности единичного радиуса (рис. 9.36) и начинается в точке с координатами $(1, j0)$. Амплитудно-частотная характеристика звена чистого запаздывания $A(\omega) = 1$, а ФЧХ $\varphi(\omega) = -\omega\tau$. Переходная функция данного звена (рис. 9.37) $h(t) = 1(t - \tau)$, т. е. представляет собой единичную ступенчатую функцию, сдвинутую во времени на τ .

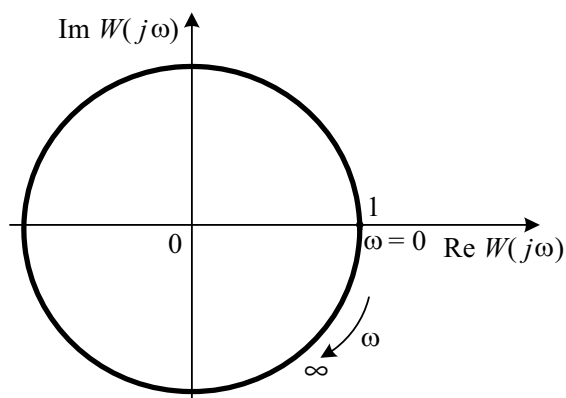


Рис. 9.36

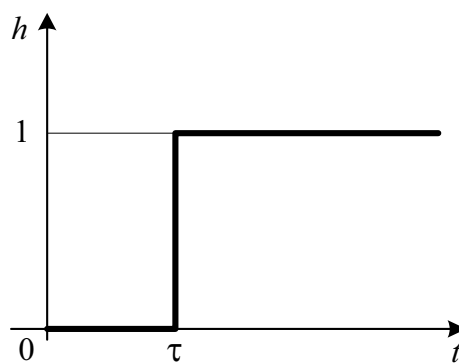


Рис. 9.37

В заключение заметим, что, наряду с понятием « типовые звенья » систем или операторно-структурных схем, часто применительно к линейным обыкновенным системам используется также понятие « элементарные звенья ». При этом нет единой точки зрения на то, какие звенья следует к ним относить. По этой причине в учебниках, учебных пособиях, монографиях и других научных и проектных документах к элементарным звеньям часто относят различные группы из числа вышеописанных линейных звеньев. Пожалуй, более логичным является отнесение к числу элементарных звеньев только масштабного, идеального интегрирующего и идеального дифференцирующего звеньев, как это делается, например, в [8].

Используя только эти звенья в сочетании с сумматорами, можно получить такие их соединения, которые имеют эквивалентные передаточные функции, соответствующие другим типовым линейным звеньям. Например, при охвате единичной отрицательной обратной связью идеального интегрирующего звена с передаточной функцией $W(s) = k_u / s$ получаем соединение, эквивалентная передаточная функция которого

$$W(s) = \frac{k_u / s}{1 + k_u / s} = \frac{k_u}{s + k_u} = \frac{1}{Ts + 1}, \quad \text{где } T = \frac{1}{k_u}.$$

Его последовательное соединение с масштабным звеном даст в итоге соединение, эквивалентное устойчивому инерционному звену первого порядка. Последовательное соединение двух последних эквивалентно аperiodическому звену второго порядка. Легко доказать, что охват идеального дифференцирующего звена отрицательной обратной

связью приводит к соединению, описываемому как инерционно-дифференцирующее (реальное дифференцирующее) звено.

Описанный выше способ воспроизведения операторно-структурных схем и, соответственно, математических моделей сложных систем ограниченным числом типовых звеньев широко используется в аналоговой вычислительной технике для моделирования систем различных типов. В этих случаях нужные для исследования математические модели получают, используя небольшой набор типовых элементов, в число которых входят сумматоры, интеграторы и операционные усилители [3].

Контрольные вопросы

1. Какие звенья относятся к классу безынерционных?
2. Приведите аналитические выражения для передаточных функций пропорционального, интегрирующего и идеального дифференцирующего звеньев.
3. Каковы переходные функции и амплитудно-фазовые годографы у пропорционального, интегрирующего и идеального дифференцирующего звеньев?
4. Каковы аналитические выражения у передаточных функций пропорционально-дифференцирующего, пропорционально-интегрирующего, пропорционально-интегрально-дифференцирующего звеньев?
5. Каковы аппроксимированные логарифмические амплитудно-частотные характеристики у звеньев, указанных в п. 5?
6. Укажите типовые нелинейные безынерционные обыкновенные звенья и их вход-выходные характеристики.
7. Какие звенья относятся к классу типовых нелинейных безынерционных логико-обыкновенных?
8. Приведите математическую модель для трехпозиционного реле с неединичным коэффициентом возврата.
9. Приведите математическую модель вход-выходной связи для звена типа «нечувствительность и ограничение».
10. Перечислите типовые инерционные звенья первого порядка и приведите для них передаточные функции.
11. Приведите графики переходных функций типовых инерционных звеньев первого порядка.
12. Перечислите основные типы линейных звеньев второго порядка.

13. Приведите графики переходных функций линейных звеньев второго порядка.
14. Каковы логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики у устойчивых линейных звеньев второго порядка?

Библиографический список к главе 9

1. *Алексеев А. А., Имаев Д. Х., Кузьмин Н. Н., Яковлев Б. В.* Теория управления. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 1999.
2. *Востриков А. С., Французова Г. А.* Теория автоматического регулирования. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006.
3. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Ч. 1 и 2. – М.: Физматлит, 2004.
4. *Кориков А. М.* Основы теории управления. – Томск: Изд-во научно-технической литературы, 2002.
5. Математические основы теории автоматического регулирования. 2-е изд. / под ред. *Б. К. Чемоданова*. – М.: Высшая школа, 1977.
6. Сборник программированных задач по курсу «Теория автоматического управления» / под ред. *А. М. Малышенко*. Ч. 1, 2. – Томск: Ротапринт Томского политехнического института, 1976, 1978.
7. Справочник по теории автоматического управления / под ред. *Красовского А. А.* – М.: Наука, 1987.
8. Теория автоматического управления. Ч. 1, 2 / под ред. *А. А. Воронова*. – М.: Высшая школа, 1983.
9. Теория автоматического управления. Кн. 1, 2 / под ред. *А. В. Нетушила*. – М.: Высшая школа, 1983.
10. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 5-и т. Том 1. Математические модели, динамические характеристики, анализ систем автоматического управления / под ред. *К. А. Пупкова*. – М.: Изд-во МГТУ, 2004.

УСТАНОВИВШИЕСЯ И ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ

В этой главе описываются широко используемые в инженерной практике и научных исследованиях математические методы анализа установившихся статических и динамических режимов, а также переходных режимов в стационарных обыкновенных непрерывных системах. Она не претендует на полное изложение разработанных для этих целей методов. Более подробные сведения на сей счёт можно получить в специальной математической литературе. Они описаны и в многочисленных монографиях, статьях, посвященных этой проблеме.

10.1. Статические режимы в непрерывных системах

Как уже отмечалось в главе 4, под установившимися режимами в системах понимают такие режимы их функционирования, при которых все переменные, характеризующие состояние системы, и внешние воздействия на неё имеют постоянные значения или установившийся режим изменения во времени. Частным случаем таких режимов являются статические режимы, при которых все параметры системы, переменные её состояния (координатные, параметрические, структурные и алгоритмические) и внешние воздействия на систему остаются неизменными во времени.

Статические режимы в непрерывных системах описываются алгебраическими (рациональными или иррациональными) и/или (реже) трансцендентными уравнениями либо совокупностью подобных уравнений, не содержащих в своем составе интегралов и производных по времени от входящих в уравнения переменных. При наличии в математической модели системы разностных уравнений с решетчатыми функциями последние не должны иметь смещённых относительно друг друга аргументов времени или разностей решетчатых функций. Эти уравнения включают лишь обыкновенные величины. Они могут быть линейными или нелинейными. Существенным при этом является факт, линейны или нелинейны они относительно внутренних и выходных

переменных, а не входных переменных, так как это влечет за собой различные методы их решения.

Напомним, что под *системой n алгебраических уравнений* понимают совокупность уравнений, которая может быть представлена в виде

$$P(x, y, z, \dots) = Q(x, y, z, \dots), \quad (10.1)$$

где n -мерные вектор-функции $P(x, y, z, \dots)$ и $Q(x, y, z, \dots)$ совокупности неизвестных и аргументов x, y, z, \dots рациональны относительно этих неизвестных и аргументов, то есть включают в себя только операции сложения, вычитания, умножения и деления относительно x, y, z, \dots , либо иррациональны (включают их под знаком радикала (корня)). Часть из вектор-функций в (10.1) или соответствующие ей элементы в отдельном уравнении системы (10.1) могут быть постоянной величиной. В частном случае они могут быть равны нулю.

Система уравнений (10.1) называется *трансцендентной*, если хотя бы в одном из входящих в неё уравнений вектор-функция $P(x, y, z, \dots)$ или $Q(x, y, z, \dots)$ трансцендентна. Это значит, что хотя бы одна из их составляющих не может быть представлена алгебраической зависимостью вида

$$\sum a_i x^l y^m z^n \dots = 0. \quad (10.2)$$

Простейшими из трансцендентных функций являются показательные, логарифмические, тригонометрические функции.

Любое алгебраическое уравнение и некоторые из трансцендентных уравнений путём алгебраических преобразований сводятся к *канонической форме* (10.2). По этой причине последняя чаще всего и используется в качестве типовой для данных уравнений. Частными вариантами алгебраических уравнений, представленных в канонической форме, являются уравнения полиномиального вида относительно одной переменной:

$$P(x) \triangleq a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

и линейные алгебраические уравнения, у которых все слагаемые в (10.2) линейны относительно неизвестных, то есть содержат только одну неизвестную в первой степени.

Математические модели для анализа статических режимов в системах или специально формируют именно для этих целей, или же получают из математических моделей, описывающих процессы в системах. В последнем случае, если в ММ системы имеются интеграль-

ные или интегро-дифференциальные уравнения, эти уравнения преобразуются в дифференциальные дифференцированием по времени всех их составляющих столько раз, какова наибольшая кратность входящих в них интегралов. Тем самым математическая модель сводится к совокупности дифференциальных, алгебраических и, возможно, трансцендентных уравнений. После этого для получения модели, описывающей статические состояния в системе, все производные по времени в вышеуказанных уравнениях необходимо принять тождественно равными нулю.

Следует иметь в виду, что часто используемые для характеристики динамических процессов в системе математические модели состоят с определенными допущениями (ограничениями) относительно точности описания этих процессов. Это делается с целью упрощения ММ и проводимого с их помощью анализа. Например, часто такие модели составляют, не учитывая нелинейные эффекты в части элементов и/или подсистем, линеаризуют математические модели, записывая их относительно некоторых опорных состояний. В последнем случае анализ статических состояний в исследуемой системе будет давать приемлемые по точности результаты лишь в той области состояний, которая близка к выбранному при линеаризации опорному состоянию. Если требуется исследовать статические режимы при значительных отклонениях от такого опорного состояния, необходимо более детальное и точное описание взаимосвязей координатных переменных системы в статических состояниях.

В связи с вышеизложенным в абсолютном большинстве случаев при описании статических состояний систем (иногда для краткости говорят – статика систем) приходится иметь дело с нелинейными математическими моделями, т. е. такими моделями, которые представляют собой нелинейные уравнения или сочетания линейных и нелинейных уравнений. Тем не менее, линейные модели также достаточно широко используются при анализе статических состояний систем. Это обусловлено рядом причин. Прежде всего тем, что статические состояния многих систем в довольно широких диапазонах изменения своих внутренних и выходных переменных достаточно точно описываются линейными уравнениями или их совокупностями. Кроме того, линейные модели для указанных целей зачастую используют на этапах предварительного анализа статических состояний систем. Это делается с целью получения необходимых приближенных значений внутренних и выходных переменных систем с меньшими трудозатратами и в более короткие сроки.

10.2. Анализ статических режимов в линейных непрерывных системах

В этом случае математические модели, описывающие статические состояния систем, включают лишь линейные алгебраические уравнения. Для определения любой внутренней x или выходной y координатной переменной системы могут быть использованы различные методы решения таких уравнений. В частности, применительно к относительно простым математическим моделям может быть использован **метод последовательного исключения переменных**. При этом последовательно исключаются все промежуточные переменные так, что в итоге получается формула для определения искомой скалярной переменной $z \in (x, y)$ в виде

$$z = \sum_i k_i g_i.$$

Здесь $g_i \in (u, f)$ – i -е воздействие на систему из числа полезных u или возмущающих f , а k_i – коэффициент передачи между этим воздействием и переменной z .

В случае искомой переменной векторного типа получаем векторно-матричное уравнение:

$$z = K g. \quad (10.3)$$

При этом и искомый набор переменных z , и совокупность входных воздействий на систему могут быть многомерны. В подобных случаях матрицы статических коэффициентов передачи K систем в качестве своих элементов имеют статические коэффициенты передачи между отдельными входами и компонентами вектора z . В частности, ее элемент k_{ij} есть статический коэффициент передачи между искомой переменной z_i и входным воздействием на систему g_j . Заметим, что отдельные статические коэффициенты могут быть равными нулю. В подобных случаях (при $k_{ij} = 0$) говорят, что искомая переменная z_i не зависит от g_j (**астатична** относительно входного воздействия g_j). Если же $k_{ij} \neq 0$, то переменная z_i **статична** относительно этого воздействия. Очевидно, что более предпочтительно, когда полезные выходы системы астатичны относительно возмущающих воздействий на систему.

При относительно большом числе внутренних и выходных координатных переменных в системе её исходную математическую модель

статика записывают в упорядоченной форме и сводят к линейному векторно-матричному уравнению вида

$$Az = Bg + C. \quad (10.4)$$

Здесь под z понимается упорядоченная и представленная в виде вектора совокупность внутренних и выходных переменных системы, матрицы A, B – матрицы соответствующих размерностей, а C – вектор-столбец постоянных величин. При этом элементы A, B, C определяются на поле вещественных, целых и/или комплексных переменных. Последнее имеет место, например, при расчете установившихся значений токов и напряжений в статических режимах в электрических цепях, содержащих наряду с активными также индуктивные и ёмкостные сопротивления. Если используемая для анализа статических режимов математическая модель системы предварительно была линеаризована и записана в отклонениях от опорного состояния системы, то в (10.3) вектор $C = 0$.

Для определения значений компонентов вектора z при известных входах в системе уравнение (10.4) подстановкой значений входных воздействий может быть сведено к виду

$$Az = b, \quad (10.5)$$

то есть, в общем случае, к совокупности неоднородных линейных алгебраических уравнений, или, что эквивалентно, к неоднородному линейному векторно-матричному уравнению. Таким образом, дальнейшие процедуры по определению значений внутренних и выходных переменных системы сводятся к решению уравнения (10.5).

Напомним, что известные методы решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (10.5) делятся на точные и итерационные. Их описание имеется в многочисленной литературе по линейной алгебре и численным методам, в частности в [1–5, 7, 8, 10, 12, 14–19, 21, 22, 24]. Алгоритмы их реализации на ЭВМ, причём с использованием различных языков программирования, также достаточно широко освещены в литературе. В [18] они представлены в реализациях на Бейсике, Фортране и Паскале. Разнообразные методы решения СЛАУ реализованы и в универсальных математических системах, в частности в MathCAD, Mathematica, Matlab и Maple, краткие описания которых приведены в следующей главе. В этой связи при решении задач анализа статических режимов в линейных системах с относительно сложными математическими моделями предпочтение ныне отдаётся расчётам на ЭВМ. Само решение указанных задач при этом сводится к обращению

к каким-либо стандартным программам или процедурам, реализующим тот или иной метод решения СЛАУ.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений изучаются студентами втузов в курсе «Высшая математика». Поэтому ниже остановимся в основном на вопросах, связанных с типичными трудностями, которые могут возникнуть при решении СЛАУ на ЭВМ, и способах их преодоления, а также на сопоставительном анализе различных алгоритмов решения СЛАУ и причинах, порождающих погрешности в определении искоемых переменных.

Погрешности анализа на ЭВМ статических режимов в системах, как и при других численных исследованиях, могут быть следствием ряда причин:

1) из-за несоответствия используемой математической модели анализируемой системе;

2) из-за неточности используемого метода решения (когда используемый метод является по сути приближенным или когда получение точного решения требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций);

3) из-за округления чисел при вводе данных в ЭВМ, выполнении арифметических операций с ними и выводе результатов из ЭВМ.

Соответственно говорят о *погрешности математической модели*, *погрешности метода* и *вычислительной погрешности*.

Погрешности первой группы являются неустранимыми, поэтому анализу системы по той или иной математической модели должна предшествовать оценка её соответствия системе и требуемой точности результатов анализа. Если статические вход-выходные связи в исследуемой системе действительно могут быть с приемлемой точностью описаны линейной моделью, то остается проблема соответствия используемых коэффициентов и свободных членов в модели (10.5) наиболее точному описанию статики системы такой моделью. При этом даже небольшие отклонения в используемых коэффициентах и свободных членах в модели (10.5) от их значений, соответствующих наилучшей по точности (назовем её для краткости – базовой) модели, могут породить недопустимо большие ошибки в определении координатных переменных системы.

Проиллюстрируем вышесказанное на простом примере. Пусть статика системы описывается наиболее точно следующими двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 &= b_1; \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Искомое решение этой системы уравнений соответствует в плоскости (z_1, z_2) точке пересечения Z прямых линий, описываемых указанными выше уравнениями (рис. 10.1).

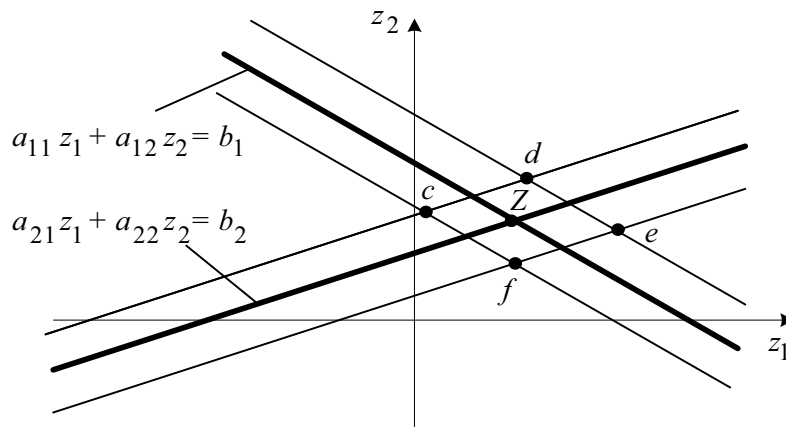


Рис. 10.1. Решения системы уравнений 10.6

Предположим, что коэффициенты при неизвестных вводятся в ЭВМ точно в соответствии с их значениями в (10.6), а свободные члены b_1 и b_2 , из-за неточной оценки уровней входных воздействий на систему, с погрешностями, причем разброс их значений соответствует интервалам

$$b_{11} \leq b_1 \leq b_{12}; \quad b_{21} \leq b_2 \leq b_{22} .$$

При таком разбросе значений свободных членов, входящих в (10.6), уравнениям будут соответствовать линии, параллельные линиям базовой модели, а решения этой системы уравнений образуют совокупность точек, лежащих в параллелограмме $cdef$, образованном пересечением полос из этих линий. При этом наибольшая погрешность решения, определяемая вектором $(\Delta z_1, \Delta z_2)$, будет равна половине длины наибольшей диагонали этого параллелограмма. Её уровень в существенной мере зависит от того, под каким углом пересекаются линии, соответствующие уравнениям модели (10.6). С уменьшением угла пересечения погрешность возрастает и при малых углах может намного превосходить уровень z_1, z_2 , получаемых по базовой модели. В тех случаях, когда неточно определяются и коэффициенты в модели (10.6), область разброса её решений будет более сложной, чем на рис. 10.1, но общий вывод о том, что с уменьшением угла пересечения прямых погрешность решения, обусловленная одним и тем же неточным заданием

коэффициентов и свободных членов уравнений, возрастает, остаётся также справедливым.

Относительное угловое положение прямых, соответствующих отдельным уравнениям из (10.5), в ортонормированном пространстве x зависит от элементов матрицы A . Чем меньше углы относительного положения вышеуказанных прямых, тем хуже, говорят, обусловлена исходная система уравнений и соответствующая ей матрица A . При этом у плохо обусловленной системы даже сравнительно малые изменения коэффициентов и свободных членов могут не только вызвать значительные погрешности в определении z , но и дать качественно неверный результат. Например, для системы уравнений, имеющей единственное решение, может быть получено заключение о том, что она противоречива или имеет бесконечно много решений.

Так как математическое описание состояний и процессов в системах практически всегда производится с некоторой долей приближения и в процессе функционирования системы её параметры могут меняться, анализ статических и динамических режимов в системах должен проводиться с учётом этого обстоятельства. В этой связи при анализе статики систем решение СЛАУ (10.5) должно сопровождаться анализом обусловленности исследуемой системы и оценкой ожидаемого уровня погрешностей в определении искомых переменных системы. Эти вопросы достаточно подробно исследованы и изложены в литературе по линейной алгебре [2]. По этой причине ниже они излагаются без дополнительных разъяснений.

Предположим, что вместо используемой при анализе системы уравнений (10.5), следовало бы использовать более точную базовую модель

$$A_1 z = b_1, \quad (10.7)$$

у которой

$$A_1 = A + \Delta A; \quad b_1 = b + \Delta b. \quad (10.8)$$

Полагаем также, что оценки $\|\Delta A\|$ и $\|\Delta b\|$ нам известны. Обозначим решения (10.5) и (10.7), соответственно, через Z и Z_1 , а их разность $(Z_1 - Z)$ – через ΔZ .

Если подставить (10.8) в (10.7) и вычесть из полученного уравнения (10.5), то получим:

$$A \cdot \Delta Z = \Delta b - \Delta A \cdot (Z + \Delta Z),$$

откуда

$$\Delta Z = A^{-1}(\Delta b - \Delta A \cdot (Z + \Delta Z)).$$

В таком случае оценка погрешности решения СЛАУ

$$\|\Delta Z\| \leq \|A^{-1}\| \cdot (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|Z\| + \|\Delta A\| \cdot \|\Delta Z\|).$$

При малых значениях $\|\Delta A\|$ и $\|\Delta b\|$ величина $\Delta A \cdot (\Delta Z)$ будет иметь более высокий порядок малости и поэтому можно считать, что

$$\Delta Z = A^{-1}(\Delta b - \Delta A \cdot Z),$$

а оценка погрешности решения

$$\|\Delta Z\| \leq \sigma \approx \|A^{-1}\| \cdot (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|Z\|). \quad (10.9)$$

В частных случаях, когда погрешность в определении параметров системы существенно меньше, чем погрешность определения правой части (10.5), погрешность решения этой СЛАУ

$$\|\Delta Z\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|.$$

Оценка погрешности решения (10.11) довольно точна, поэтому при решении практических задач нет смысла пытаться получить решение СЛАУ с погрешностью, меньшей σ .

Для характеристики связи погрешности решения СЛАУ и погрешности задания её правой части вводятся понятия **обусловленности системы** и **обусловленности матрицы параметров системы**, а также меры их обусловленности. При этом в качестве меры обусловленности системы принимается число

$$\tau = \sup_{\Delta b} \left(\frac{\|\Delta Z\|}{\|Z\|} : \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) = \frac{\|b\|}{\|Z\|} \cdot \sup_{\Delta b} \frac{\|\Delta Z\|}{\|\Delta b\|}.$$

Так как в рассматриваемом случае

$$\Delta Z = A^{-1} \cdot \Delta b, \quad \text{то} \quad \sup_{\Delta b} \frac{\|\Delta Z\|}{\|\Delta b\|} = \|A^{-1}\|.$$

Поэтому мера обусловленности системы

$$\tau = \frac{\|b\|}{\|Z\|} \cdot \|A^{-1}\|.$$

При этом связь относительной погрешности определения переменных с мерой обусловленности системы определяется соотношением

$$\frac{\|\Delta Z\|}{\|Z\|} \leq \tau \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}. \quad (10.10)$$

Для более грубой характеристики свойств системы (10.5) часто используют меру (число) обусловленности матрицы A , которую определяют как

$$\nu(A) \triangleq \sup_b \tau = \sup_b \frac{\|b\|}{\|Z\|} \cdot \|\Delta b\|.$$

В таком случае, с учётом (10.10), оценка погрешности решения СЛАУ (10.5)

$$\frac{\|\Delta Z\|}{\|Z\|} \leq \nu(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

В связи с тем, что

$$\sup_b \frac{\|b\|}{\|Z\|} = \sup_b \frac{\|Az\|}{\|z\|} = \|A\|,$$

число обусловленности матрицы A

$$\nu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|. \quad (10.11)$$

С учётом того, что любая норма матрицы не меньше её наибольшего по модулю собственного значения и собственные значения матриц A и A^{-1} взаимно обратны, получаем, что

$$\nu(A) \geq \frac{\max |\lambda_A|}{\min |\lambda_A|} \geq 1.$$

Здесь λ_A – собственные значения матрицы A .

Системы уравнений и матрицы с большими значениями мер обусловленности принято называть *плохо обусловленными*, а с малыми – *хорошо обусловленными*.

Числа обусловленности матриц определяются с использованием различных норм, однако при любых нормах справедливы следующие соотношения:

$$\nu(A) = \nu(A^{-1}); \quad \nu(AB) \leq \nu(A) \cdot \nu(B); \quad \nu(A) \geq \|I\| \geq 1.$$

В последнем неравенстве I – единичная матрица той же размерности, что и A .

Если число обусловленности матрицы A определяется с использованием спектральной нормы матрицы, которая, как известно, равна её максимальному сингулярному числу (корню квадратному из максимального собственного числа матрицы A^*A), то

$$\nu_c(A) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

и называется *спектральным числом обусловленности матрицы A* . Здесь α_1 и α_2 – соответственно, наибольшее и наименьшее сингулярные числа этой матрицы.

Важной особенностью спектральных чисел обусловленности матриц является то, что для ортогональных матриц они равны единице. По этой причине в алгоритмах решения СЛАУ более предпочтительно использовать преобразования, сводящиеся к умножению матрицы A на ортогональные преобразующие матрицы. Кроме того, следует иметь в виду, что

$$\nu_c(A^T A) = [\nu_c(A)]^2.$$

Если в (10.11) используется евклидова норма матрицы A (равная квадратному корню из суммы квадратов её сингулярных чисел), то соответствующее этой норме число обусловленности матрицы $\nu_E(A)$ будет удовлетворять условию

$$\nu_c(A) \leq \nu_E(A) \leq n \cdot \nu_c(A),$$

где n – число строк и столбцов в матрице A .

На практике при необходимости решения СЛАУ важно знать те признаки, которые указывают на возможно плохую обусловленность системы (10.5) и соответствующей ей матрицы A . Таковыми являются, прежде всего, большой разброс по величине элементов матрицы и свободных членов, а также близость к нулю определителя (детерминанта) A . При этом следует иметь в виду, что плохая обусловленность системы не всегда связана с малой величиной детерминанта матрицы A по сравнению с её элементами. Часто он не может рассматриваться как малое число, но при незначительных изменениях даже одного из элементов A может обратиться в нуль. Обладающие таким свойством матрицы принято называть почти вырожденными [3].

В ситуациях, когда СЛАУ плохо обусловлена, для получения решения системы с необходимой точностью следует либо принять меры для того, чтобы была повышена точность определения коэффициентов и свободных членов уравнений системы (если это возможно), либо вернуться к поставленной при анализе задаче. Прежде всего, следует уточнить, действительно ли требуется такая точность решения задачи и нельзя ли её видоизменить так, чтобы устранялась проблема плохой обусловленности соответствующей ей математической модели. Для этого, например, можно изменить или уменьшить набор координатных переменных системы, который подлежит определению.

Следует также учитывать, что информация об обусловленности системы должна быть правильно интерпретирована. В частности, если число обусловленности системы или матрицы A близко к 1, то это подтверждает факт, что малым изменениям коэффициентов и/или свободных членов уравнений системы будут соответствовать малые уровни ошибки в решении. В то же время при больших числах обусловленности уровень возможных ошибок в решении зависит не только от точности используемых в СЛАУ данных, но и от длины машинного слова, используемого для записи чисел. При этом чем больше используемая разрядность машинного слова, тем меньше сказывается на точности решения плохая обусловленность системы. В этой связи для плохо обусловленных систем или же специально с целью повышения точности решения используют машинные слова увеличенной вдвое разрядности (решают задачу с двойной точностью).

В настоящее время имеется большое число методов решения СЛАУ. Все они, как уже отмечалось, могут быть разделены на точные и итерационные. Первые из них без учёта ошибок округления приводят к точному решению после конечного числа арифметических и логических операций. Вторые обеспечивают сходимость к точному решению за неограниченно большое число операций. Можно считать, что ныне область применения точных методов – это системы до порядка 10^4 , а итерационных – системы до порядка 10^7 .

В подавляющем большинстве методы (алгоритмы) решения СЛАУ ориентированы на задачи, в которых матрицы A равномерно заполнены, и все элементы A в процессе решения находятся в оперативной памяти ЭВМ. Внешний накопитель на диске используется лишь в алгоритмах, специально предназначенных для решения СЛАУ очень высокого порядка, что характерно, например, для задач экономического анализа, расчёта сложных инженерных конструкций (мостов, зданий, электрических цепей большой сложности и т. п.). Есть также алгорит-

мы, которые ориентированы на специальные формы матрицы A , в частности на *матрицы разреженного типа*, у которых большинство элементов равны нулю, или на *матрицы ленточного типа*, у которых ненулевые элементы расположены только в ограниченной полосе около главной диагонали. Заметим, что для хранения таких матриц в ЭВМ используются специальные приемы.

Наиболее простым представляется решение СЛАУ (10.5) в виде

$$z = A^{-1}b.$$

На практике такой способ решения не получил сколько-нибудь заметного применения из-за того, что обращение матрицы требует значительно большего времени, чем непосредственное решение этого векторно-матричного уравнения. Исключение составляет лишь случай, когда матрица A ортогональна и, следовательно, $A^{-1} = A^T$.

Классическим точным методом решения СЛАУ, получившим широкое применение, является *метод Крамера*. Напомним, что по методу Крамера [5, 8] любая из составляющих z_i вектора z в (10.5) может быть определена по формуле

$$z_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получающийся заменой в матрице A i -го столбца столбцом правой части уравнения (10.5). Для решения СЛАУ с n неизвестными этим методом необходимо выполнить порядка $n \times n$ арифметических операций. В этой связи требуемый объем вычислений уже при $n = 30 \div 40$ становится практически недоступным для современных ЭВМ. К тому же даже при меньших значениях n из-за большого числа арифметических операций весьма велика вероятность аварийного останова ЭВМ из-за переполнения порядка чисел или накопления недопустимо большой ошибки в расчёте из-за округления чисел в машине. В этой связи предпочтение следует отдавать тем методам решения СЛАУ, которые требуют меньшего числа арифметических операций и оперативной памяти ЭВМ.

Пожалуй, наиболее широко используемым из точных методов решения СЛАУ при порядке системы уравнений до 200 в настоящее время является *метод исключения Гаусса* в различных его реализациях [2, 18]. Он представлен во всех универсальных математических системах и в этой связи доступен для исследователей и разработчиков сис-

использующий её алгоритм – алгоритмом Гаусса с выбором главных элементов.

Таким образом, этап прямого исключения сводится к преобразованию исходной системы уравнений (10.13) к системе уравнений с верхней треугольной матрицей коэффициентов и к определению z_n . Выполняемые при этом операции называют элементарными преобразованиями строк.

Второй этап решения (этап обратной подстановки) сводится к последовательным определениям по уравнениям (10.13) неизвестных, начиная с z_{n-1} и кончая z_1 .

Операции этапа прямого исключения в методе Гаусса сводятся к процедуре факторизации матрицы A и представления её в виде

$$A = LU, \quad (10.14)$$

где L и U – соответственно, нижняя и верхняя треугольные матрицы с единичными элементами на главных диагоналях, причем U совпадает с матрицей в системе уравнений (10.13). Представление квадратных матриц в форме (10.14) называется их ***LU-разложением***. Тем самым уравнение (10.5) сводится к системе двух векторно-матричных уравнений:

$$Ly = b; \quad Uz = y,$$

а процесс решения СЛАУ – к указанному разложению, последующему решению вначале первого из этих уравнений, а затем второго. Заметим, что LU -разложение особенно удобно использовать при неоднократном решении систем линейных уравнений, имеющих одну и ту же матрицу A , например при определении статических состояний системы при различных входах, так как в этом случае требующее наибольшее число операций LU -разложение может выполняться только один раз.

Для решения СЛАУ, наряду с вышеописанным LU -разложением, часто используют так называемое ***QR-разложение*** матрицы A . В этом случае матрица A факторизуется так, что

$$A = QR,$$

причем матрица Q – ортогональна, а матрица R – верхняя треугольная. Это разложение позволяет от (10.5) перейти к эквивалентным ему уравнениям

$$Q^T A z = Q^T b, \quad b = R z$$

и для определения x использовать простое в вычислительном плане уравнение $Rz = Q^T b$, решаемое подобно обратному ходу в методе Гаусса.

Алгоритмы такой факторизации описаны, в частности, в [3, 6, 19, 20], а их программные реализации имеются в универсальных математических системах и в популярном пакете LINPACK [20]. Причём, алгоритмы QR -разложения численно устойчивы и не создают серьёзных проблем, связанных с ошибками округления. Последнее обусловлено тем, что преобразования A при этом таковы, что спектральные числа обусловленности у A и R одинаковы, а у формирующих Q ортогональных матриц, как и у неё самой, они равны единице.

Для реализации QR -разложения используют различные методы. Чаще всего это разложение реализуется методами отражений или вращений [2, 3, 19].

В *методе отражений* исходная матрица A последовательным умножением слева на специальным образом подбираемые ортогональные матрицы U_i , $i = \overline{1, m-1}$ преобразуется к виду $U A_{(m-1)}$, где

$$U \triangleq U_{m-1} U_{m-2} \dots U_2 U_1,$$

а матрица $A_{(m-1)}$ – верхняя треугольная матрица с произвольными по величине элементами главной диагонали. После такого представления A исходная система (10.5), в силу ортогональности U , преобразуется к виду

$$A_{(m-1)} z = U^T b \quad (10.15)$$

и её решение находится, как в обратном ходе метода Гаусса. При этом, если хотя бы один элемент главной диагонали матрицы $A_{(m-1)}$ равен нулю, то делается заключение, что система (10.15) и, соответственно, исходная система вырождены, а их решение без учета ошибок округления чисел в ЭВМ отсутствует.

Матрица преобразований U формируется по следующему правилу. На первом шаге преобразования из элементов первого столбца матрицы A формируется вектор $\rho_1 = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}]^T$. Затем формируется $U_1 = I_n - 2w_1 w_1^T$, где I_n – единичная матрица размера $n \times n$, а вектор w_1 подбирается из условия, что вектор $U_1 \rho_1 = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$. Сово-

купность этих процедур приводит к факторизации матрицы A вида $A = U_1 A_{(1)}$. На следующем шаге вышеуказанные процедуры применяются к матрице $A_{(1)}$, а в дальнейшем – к $A_{(2)}$ и т. д.

Повышенная устойчивость этого метода к вычислительным погрешностям обусловлена тем, что проводимые преобразования матрицы A реализуются умножением на ортогональные матрицы, спектральные числа обусловленности которых, как уже отмечалось выше, равны единице. Следовательно, подобные преобразования A без учёта ошибок округления не порождают ухудшения обусловленности используемой системы (10.15) по сравнению с (10.5).

QR -разложение невырожденной матрицы A размера $n \times n$ методом вращений [3, 19] сводится к последовательным обнулениям отличных от нуля элементов A под главной диагональю вначале поочередно в первом столбце, затем во втором, третьем и так далее вплоть до $(n - 1)$ -го столбца. Это достигается умножением каждый раз полученной на предыдущем этапе матрицы слева на соответствующую ортогональную матрицу вращений. При этом матрица вращений P_i^j для обнуления (i, j) -го элемента формируется из единичной матрицы I_n заменой в ней единиц на $\sin \varphi_i^j$ в позициях (i, i) и (j, j) и нулей – в позициях (j, i) и (i, j) , соответственно, на $\cos \varphi_i^j$ и $-\cos \varphi_i^j$. Величина угла φ_i^j выбирается из условия, что получающийся после умножения на P_i^j (i, j) -й элемент становится равным нулю.

Пример 10.1. Предположим, что для обнуления первого элемента второй строки матрицы A необходимо умножить слева на матрицу вращения P_1^2 , у которой левый диагональный минор

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1^2 & \cos \varphi_1^2 \\ -\cos \varphi_1^2 & \sin \varphi_1^2 \end{bmatrix}.$$

В результате такого умножения второй элемент первого столбца итоговой матрицы будет равен $-a_{11} \cos \varphi_1^2 + a_{21} \sin \varphi_1^2$. Таким образом, для его обнуления нужно выбрать

$$\varphi_1^2 = \operatorname{arctg} \frac{a_{11}}{a_{21}}.$$

На практике чаще применяют модифицированный алгоритм QR -разложения, который предусматривает предварительное приведение матрицы A к верхней треугольной матрице Хессенберга (у которой ниже главной диагонали имеется только одна ненулевая диагональ, непосредственно примыкающая к главной), а затем уже использование основного алгоритма QR -разложения. Это позволяет существенно сократить число необходимых операций для такого разложения.

Для СЛАУ с симметричными положительно определенными и ленточными матрицами используется вариант метода исключения Гаусса, известный как *метод Халесского* [19]. Он предусматривает разложение матрицы A вида

$$A = LL^T,$$

при котором у нижней треугольной матрицы L и транспонированной матрицы L^T элементы главной диагонали не обязательно равны единице. После выполнения такого разложения процедура решения СЛАУ идентична той, что реализуется при использовании LU -разложения.

Анализ статических режимов в линейных системах, описываемых векторно-матричным уравнением (10.5), может быть проведен и с использованием итерационных методов решения этого уравнения. При их применении формируется последовательность решений, теоретически сходящаяся к точному решению. Важно, чтобы скорость такой сходимости была достаточно высокой. В противном случае из-за ошибок округления может быть накоплена недопустимая погрешность решения. Заметим также, что эффективность использования итерационных методов в существенной мере зависит от того, какое начальное приближение для искомого решения принимается. Чем оно ближе к искомому решению, тем быстрее находится искомое решение с заданной точностью приближения.

Наиболее эффективно применение итерационных методов для решения СЛАУ большой размерности, а также в ситуациях, когда матрица A в (10.5) разреженная или ленточного типа. В последних случаях такое строение A не нарушается по мере выполнения итераций, чего нельзя сказать о выше рассмотренных точных методах решения СЛАУ.

Из итерационных методов для решения СЛАУ, пожалуй, чаще всего применяют *метод простой итерации*. Для его использования применительно к (10.5) последнее умножением обеих его частей на невырожденную матрицу H и добавлением в них z преобразуется к виду

$$z = z + H(b - Az).$$

Решение последнего уравнения, а значит и уравнения (10.5), находится по рекуррентной формуле

$$z_{k+1} = z_k + H(b - Az_k). \quad (10.16)$$

Если вместо H в эту формулу подставить τB^{-1} , то получим эквивалентное (10.16) соотношение

$$B \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + Az_k = b, \quad (10.17)$$

которое соответствует расчетной формуле общего неявного метода простой итерации.

Формулам (10.16) и (10.17) можно придать вид

$$z_{k+1} = Pz_k + f, \quad (10.18)$$

если в (10.16) принять $P = I - HA$; $f = Hb$, а в случае (10.17) полагать, что

$$P = I - \tau B^{-1}A; \quad f = \tau B^{-1}b.$$

Сходимость ряда (10.18) при любом z_0 имеет место, если спектральный радиус P меньше единицы, и будет тем выше, чем меньше этот радиус. Очевидно, что если в качестве H мы имели бы возможность использовать A^{-1} , то точное решение было бы получено по (10.18) за одну итерацию. В этой связи в итерационных методах стремятся выбирать величину H , приближающуюся к A^{-1} . Например, в ситуациях, когда матрица A СЛАУ имеет доминирующую главную диагональ $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, реализуют **метод простой итерации Якоби**, принимая $H = D^{-1}$, где $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

С другими вариантами выбора H , например для решения СЛАУ с симметричными матрицами A , можно ознакомиться по книгам [21, 23].

Часто итерационные методы используют совместно с точными для снижения влияния ошибок округления в последних. Например, при решении СЛАУ методом исключения Гаусса из-за ошибок округления неточно выполнена прямая процедура, которая реализует LU -разложение матрицы A . В итоге получаем $LU \neq A$ и неточное решение z_0 . Для уточнения этого решения можно воспользоваться неявным методом простой итерации, приняв $B = LU$ и $\tau = 1$. При близости LU к A сходимость решения будет достаточно высокой, но лишь в том случае, когда вычисления в итерационном процессе будут производиться с

большой точностью, чем при LU -разложении матрицы A . По этой причине такой уточняющий решение итерационный процесс должен осуществляться с удвоенной точностью. Аналогично можно осуществлять уточнение решения СЛАУ после применения других точных способов их решения, например с использованием QR -разложения.

10.3. Динамические режимы в системах

Под *динамическими режимами* в теории систем понимают такие процессы в системах, при которых хотя бы часть их переменных состояния меняется с течением времени. В общем случае могут меняться не только координатные переменные состояния систем, но и их параметрические, структурные и алгоритмические переменные, если таковые используются для описания процессов в этих системах. Состояния систем могут иметь установившийся закон изменения во времени или же неуставившийся. Соответственно, говорят об *установившихся* или *неустановившихся динамических режимах* систем. Последние часто называют также *переходными режимами*. Разновидностью переходных режимов являются собственные движения системы, совершаемые ею при отсутствии внешних воздействий и ненулевых начальных условиях за счет накопленной в системе энергии.

Исследования динамических режимов чаще всего сводятся к установлению характеризующих эти режимы свойств систем и законов изменения координат состояния систем. В этом разделе рассматриваются лишь вопросы, связанные с определением состояний линейных стационарных непрерывных систем в динамических режимах. Изучение свойств систем в динамических режимах не входит в программу данного курса. Они достаточно подробно изучаются в других курсах, в частности в курсах «Теория автоматического управления» [25–27], «Электромеханические системы».

Методология анализа динамических режимов в системах определяется, прежде всего, тем, какие из режимов при этом анализируются, каково исходное математическое описание динамических свойств систем и каков характер воздействий на них внешней среды. Напомним, что динамика системы рассматриваемого класса может быть исследована с помощью её нетипизированной (исходной) или типизированной математической модели, переходной или весовой функции, передаточной функции или передаточной матрицы, а также частотных характеристик системы.

В настоящее время нетипизированными математическими моделями для анализа состояний и процессов пользуются только для относительно простых систем. В этой связи далее основное внимание будет уделено анализу процессов по типизированным моделям. Такими для систем данного класса являются, прежде всего, модели в форме «вход-выход», упорядоченная каноническая форма и модель в форме «вход-состояние-выход» (соответственно (6.4), (6.7) и (6.9) из главы 6). Все эти формы достаточно просто связаны с соответствующими передаточными функциями или передаточными матрицами системы. Действительно, по модели в форме «вход-выход»

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) + C(p)f(t), \quad (10.19)$$

где $y \in R^r$, $u \in R^m$, $f \in R^q$ – соответственно, выход, полезный и возмущающий входы системы, приняв нулевые начальные условия и заменив оператор дифференцирования по времени p на оператор преобразования Лапласа s , а оригиналы y, u, f – на их изображения, получаем операторное векторно-матричное уравнение

$$A(s)y(s) = B(s)u(s) + C(s)f(s),$$

которое можно представить в виде

$$y(s) = W_{yu}(s)u(s) + W_{yf}(s)f(s).$$

В последнем равенстве

$$W_{yu}(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad W_{yf}(s) = \frac{C(s)}{A(s)}$$

– передаточные функции системы между ее выходом и, соответственно, полезным и возмущающим входами (если они все одномерны). Если же y, u, f – многомерные векторы, то передаточные матрицы системы принимают вид

$$W_{yu}(s) = A^{-1}(s) \cdot B(s); \quad W_{yf}(s) = A^{-1}(s) \cdot C(s).$$

Аналогично получают передаточные матрицы системы и из упорядоченной канонической формы уравнений системы, которая отличается от (10.19) лишь тем, что вместо y в ней фигурирует весь вектор внутренних и выходных переменных системы z . Для случая задания математической модели системы в форме «вход-состояние-

выход» вида (6.9) передаточные матрицы

$$W_{yu}(s) = (sI - A)^{-1} B + D;$$

$$W_{yf}(s) = (sI - A)^{-1} E + F.$$

Вместе с тем следует иметь в виду, что аппарат передаточных функций позволяет в полной мере проводить анализ протекающих в ЛСОН-системе процессов только в том случае, когда она полностью управляема и наблюдаема. В противном случае могут оказаться неопределёнными процессы в неуправляемой и/или ненаблюдаемой части системы.

Определение реакций ЛСОН-систем на входные воздействия в случае задания их математической модели в форме уравнений сводится, таким образом, к решению входящих в эту модель уравнений при заданных начальных условиях и внешних воздействиях на систему. Классический способ решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) и образуемых ими систем уравнений для этих целей используется крайне редко. Обычно лишь в тех случаях, когда порядок анализируемой системы не высок, а изменения входных воздействий во времени имеет простой аналитический вид. Это обусловлено сравнительно высокой трудоёмкостью этого способа, а в ряде случаев и его излишней информативностью (как это будет показано ниже при определении установившихся процессов в ЛСОН-системах при гармонических входных воздействиях).

Значительно чаще для решения ЛОДУ применяется операторный метод. При этом, как правило, используется преобразование Лапласа. Так как этот способ решения ЛОДУ достаточно хорошо известен студентам из курса «Высшая математика», его описание здесь приводится лишь в той мере, которая необходима для его непосредственного использования и сопоставительного анализа с другими способами решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Передаточные функции ЛСОН-систем без элементов чистого запаздывания или экстраполяции между отдельными входами и выходами или внутренними переменными системы представляют собой, как правило, дробно-рациональные выражения типа

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (10.20)$$

порядок полиномов в числителе m у которых, в силу условий физической осуществимости, не превышает порядок полиномов знамена-

телей n . При этом даже для относительно несложных систем, порядок n которых относительно невысок, непосредственное определение зависимости искомой переменной $z(t)$ от входного воздействия $g(t)$ по ее изображению $z(s)$ с помощью формулы обратного преобразования Лапласа или с использованием его таблиц, даже при простых изображениях входного воздействия, может оказаться весьма затруднительным. Обычно для этих целей предварительно передаточную функцию между $z(t)$ и $g(t)$ вида (10.20) или (чаще) непосредственно $z(s)$ разлагают на сумму элементарных дробей, для которых в вышеуказанных таблицах имеются аналитические выражения оригиналов. Искомая $z(t)$ при этом определяется как сумма оригиналов для всех составляющих $z(s)$. Процедуры такого разложения достаточно подробно описаны, в частности, в [5, 13]. Количество и вид таких дробей определяются типом и количеством полюсов разлагаемой передаточной функции или изображения искомого сигнала.

Для иллюстрации определим зависимость искомой переменной $z(t)$ системы от изменений входного воздействия $g(t)$ при ненулевых начальных условиях в предположении, что передаточная функция между этими сигналами в системе имеет вид (10.20), а изображение входного воздействия

$$g(s) = \frac{M(s)}{N(s)}.$$

В таком случае изображение искомой переменной

$$z(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot \frac{M(s)}{N(s)} + \frac{D(s)}{A(s)}. \quad (10.21)$$

Здесь $D(s)$ – полином, определяемый ненулевыми начальными условиями и имеющий порядок $(n-1)$. Будем полагать, что дробные выражения в (10.21) несократимы.

Для разложения на элементарные дроби слагаемых в (10.21) следует предварительно определить полюса передаточной функции, то есть корни характеристического уравнения

$$A(s) = 0, \quad (10.22)$$

и полюса изображения $g(s)$ – корни уравнения

$$N(s) = 0. \quad (10.23)$$

В общем случае среди них могут быть совокупности действительных и комплексно-сопряженных корней. Они могут быть простыми или же кратными. Предположим, что среди корней (10.22) и (10.23) имеется r действительных (в том числе нулевых) корней $s_\mu = \alpha_\mu$ и q комплексно-сопряженных $s_\nu = \alpha_\nu \pm j\omega_\nu$. В числе последних могут быть и чисто мнимые корни, у которых $\alpha_\nu = 0$. Кратности вышеуказанных корней примем далее равными, соответственно, m_μ и m_ν .

В таком случае каждому из действительных корней s_μ в разложении первой слагаемой (10.21) будет соответствовать сумма m_μ простых дробей

$$\sum_{i=1}^{m_\mu} \frac{\beta_i}{(s - \alpha_\mu)^i}.$$

Для комплексно-сопряженных корней $s_\nu = \alpha_\nu \pm j\omega_\nu$ кратности m_ν , соответственно, имеем

$$\sum_{j=1}^{m_\nu} \frac{s + d_j}{\left[(s - \alpha_\nu)^2 + \omega_\nu^2 \right]^j}.$$

Аналитические выражения оригиналов для подобных дробно-рациональных изображений дробей легко могут быть определены из таблиц преобразования Лапласа (приложение 2).

В частности, если все эти корни простые (некратные) и действительные, то соответствующие изменения сигнала $z(t)$ при нулевых начальных условиях будут описываться выражением

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_k \frac{B(s_k)M(s_k)}{A(s_k)N'(s_k)} e^{s_k t} + \sum_i \frac{B(s_i)M(s_i)}{A'(s_i)N(s_i)} e^{s_i t} + \\ &= \sum_i \frac{D(s_i)}{A'(s_i)} e^{s_i t}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Здесь s_i и s_k – корни уравнений, соответственно, (10.22) и (10.23), $A'(s_i)$ – значение производной полинома $A(s)$ по s при $s = s_i$. Анало-

гично, $N'(s_k)$ – значение производной полинома $N(s)$ по s при $s = s_k$.

Первую сумму слагаемых в (10.24) называют *вынужденной составляющей* $z(t)$, вторую сумму – ее *собственной составляющей*, а третью – *свободной составляющей*. Если при этом корни s_i и s_k отрицательны, то собственная и свободная составляющие $z(t)$ с течением времени обращаются в нуль, после чего установившиеся изменения $z(t)$ будут определяться видом $g(t)$.

Для каждого действительного корня s_j кратности m_j при разложении будет соответствовать сумма простых дробей

$$\sum_{i=1}^{m_j} \frac{c_{ji}}{(s - s_j)^i}$$

и оригиналов

$$\sum_{i=1}^{m_j} H_{ji} \cdot t^{m_j-i} \cdot e^{s_j t},$$

где $t \geq 0$ и

$$H_{ji} = \frac{1}{(i-1)!(m_j-i)!} \cdot \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[\frac{(s - s_j)^{m_j} P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_j},$$

а $\frac{P(s)}{Q(s)}$ равно $\frac{B(s)}{A(s)} \cdot \frac{M(s)}{N(s)}$ или $\frac{D(s)}{A(s)}$ в зависимости от того,

первая или вторая слагаемая в (10.21) при этом разлагается на элементарные дроби [13].

Если среди корней уравнений (10.9) или (10.23) имеется комплексно-сопряженная пара корней $s_v = \alpha_v \pm j\omega_v$ кратности m_v , то соответствующая им сумма простых дробей имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m_v} \frac{\beta_{vi} (s + d_{vi})}{\left[(s - \alpha_v)^2 + \omega_v^2 \right]^{m_v}}.$$

Коэффициенты β_{vi} , d_{vi} такого разложения действительны, если действительны полиномы в разлагаемом на элементарные дроби выра-

жении. Они могут быть определены, например, методом неопределённых коэффициентов [13]. Соответствующий некротной паре корней $s_v = \alpha_v \pm j\omega_v$ оригинал будет иметь вид

$$A_v e^{\alpha_v t} \sin(\omega_v t + \varphi_v),$$

где

$$A_v = \frac{\beta_v}{\omega_v} \left[(\alpha_v + d_v)^2 + \omega_v^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad \varphi_v = \frac{\omega_v}{\alpha_v + d_v}.$$

Таким образом, после подобного разложения определение искомой переменной $z(t)$ при заданном входном воздействии $g(t)$ может быть проведено с использованием этих разложений и таблиц преобразований Лапласа [9]. Следует также иметь в виду, что в некоторых универсальных математических пакетах, в частности в Mathcad, имеется процедура определения оригиналов по их операторным преобразованиям Лапласа и, следовательно, имеется возможность автоматизировать решение данной задачи.

Если на систему действует одновременно несколько входных воздействий $g_k(t)$ и требуется определить характер изменений какой-либо из внутренних или выходных переменных $z(t)$, то для вычислений последней используют **принцип суперпозиции**, справедливый для линейных систем, согласно которому реакция такой системы на сумму воздействий равна сумме реакций системы на каждое из них в отдельности. Поэтому определение $z(t)$ сводится к определению вышеописанным способом её составляющих, обусловленных каждым из воздействий на систему.

Если анализируемая система многомерна по входам и/или выходу, то для определения изменений её состояния и/или выхода при изменениях входов удобно использовать математическую модель в форме «вход-состояние-выход» вида (6.9). Для непрерывных по времени систем эта модель имеет вид:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + E f(t), \quad (10.25)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) + G f(t), \quad (10.26)$$

где $x \in R^n$, $y \in R^r$, $u \in R^m$, $f \in R^q$ – соответственно, состояние, выход, полезный и возмущающий входы системы.

При отсутствии внешних воздействий и ненулевом начальном состоянии $x(t_0)$ в начальный момент времени t_0 её собственные движения будут описываться уравнением состояния

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

решение которого может быть представлено в виде

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) \triangleq \Phi(t-t_0)x(t_0).$$

Входящая в данное выражение экспоненциальная матрица $\Phi(t) = e^{At}$ называется **фундаментальной матрицей системы**. Она обладает следующими свойствами:

$$\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t),$$

$$\Phi(t+t_0) = \Phi(t)\Phi(t_0), \quad \Phi(t-t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0),$$

и может быть вычислена по её разложению в степенной ряд вида:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Решение неоднородного уравнения (10.25) в таком случае принимает вид

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-t_0)[Bu(t) + Ef(t)]dt. \quad (10.27)$$

После определения состояния системы $x(t)$ согласно (10.27), определение выхода системы $y(t)$ не составляет труда, так как он связан с состоянием и входами системы простым алгебраическим выражением (10.26).

Часто с целью анализа динамических свойств системы, её сопоставления с другими подобными системами, определяют её реакции при типовых начальных условиях на типовые внешние воздействия. В качестве таковых, как уже отмечалось в главе 7, принимаются нулевые начальные условия и воздействия типа δ -функции и единичного ступенчатого скачка $1(t)$. Соответственно, получают весовую или переходную функцию системы по рассматриваемому каналу связи между внутренней или выходной переменной $z(t)$ и входом $g(t)$. Для опре-

деления этих функций можно использовать не только классический или операторный методы решения соответствующего уравнения связи $z(t)$ и $g(t)$, но и частотные характеристики системы по этому каналу взаимосвязи. Если предположить, как и выше, что АФЧХ системы по этому каналу есть

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

то переходная функция, определяющая взаимосвязь $z(t)$ и $g(t)$, может быть представлена [25, 26] в виде

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (10.28)$$

а весовая функция

$$w(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (10.29)$$

Как правило, аналитическое выражение вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ имеет такое дробно-рациональное выражение, которое ввиду сложности не позволяет определять переходную и весовую функции соответственно по (10.28) и (10.29) в строго аналитическом виде. По этой причине на практике эти функции обычно определяют приближенно, заменяя фактическое $P(\omega)$ более простым для вычислений интегралов (10.28), (10.29) выражением или суммой таковых. Наиболее простым вариантом такой аппроксимации является замена исходной ВЧХ набором прямоугольников, заполняющих площадь, определяемую $P(\omega)$. Однако такой вариант является мало практичным из-за необходимости использования для этих целей довольно большого числа таких прямоугольников, если требуется относительно высокая точность определения $h(t)$ или $w(t)$.

Более эффективным в вычислительном плане способом приближенного вычисления переходной функции $h(t)$ по (10.28) является способ, предложенный профессором В. В. Солодовниковым [25]. Он базируется на замене $P(\omega)$ суммой трапеций, число которых, обеспечивающее ту же точность аппроксимации, намного меньше числа прямоугольников. При этом по аналитическому выражению $P(\omega)$ строится её график. По нему подбираются трапеции, в сумме примерно равные исходной зави-

симости $P(\omega)$, так, что

$$P(\omega) \cong \sum_i P_i(\omega).$$

Пример такой замены представлен на рис. 10.2.

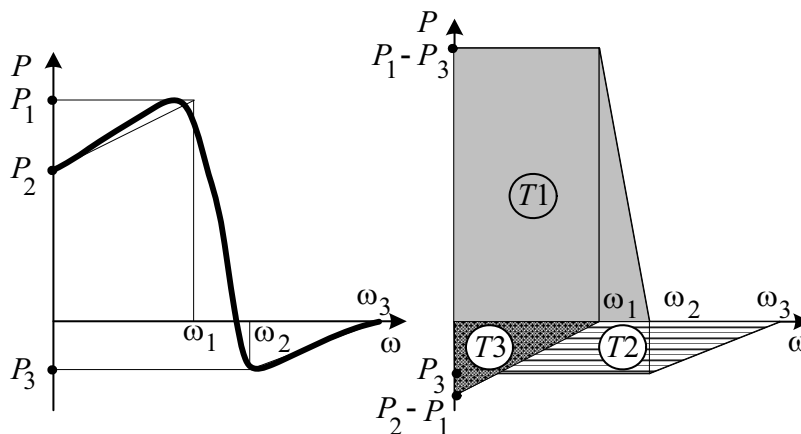


Рис. 10.2. Аппроксимация вещественной частотной характеристики трапециями

Здесь исходная $P(\omega)$ заменена трапециями $T1$, $T2$ и треугольником $T3$, являющимся частным случаем трапеции.

Каждая трапеция (рис. 10.3) характеризуется параметрами P_0 , ω_0 и ω_m .

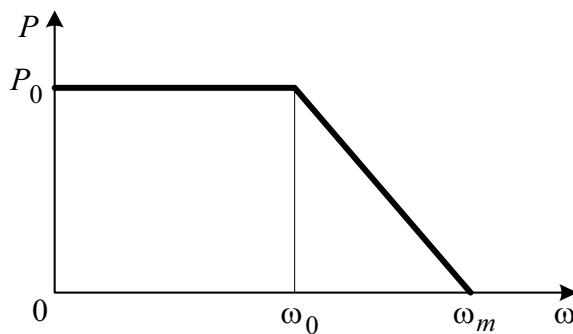


Рис. 10.3

Их значения для использованных при аппроксимации, представленной на рис. 10.2, вещественной частотной характеристики трапеций сведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Трапеция Параметры	$T1$	$T2$	$T3$
P_0	$P_1 - P_3$	P_3	$P_2 - P_1$
ω_0	ω_1	ω_2	0
ω_m	ω_2	ω_3	ω_1

После подобной аппроксимации $P(\omega)$ для каждой из трапеций находится соответствующая ей переходная функция

$$h_i(t) = \int_0^{\infty} P_i(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega .$$

С целью упрощения этого процесса В. В. Солодовниковым была составлена так называемая таблица ***h-функций*** (см. приложение 4), которая содержит вычисленные по (10.28) значения переходной функции $h_{e\alpha}(t)$, соответствующие трапециям с единичными значениями P_0 и ω_m . Единственным, определяющим такие трапеции параметром, является отношение $\alpha = \omega_0 / \omega_m$. Оно может меняться от 0 до 1. В этой связи в таблице *h-функций* приведены $h_{e\alpha}(t)$, соответствующие кратным 0,05 значениям α во всём диапазоне их изменения.

Практическое использование таблицы *h-функций* сводится к следующей последовательности действий.

1. Для каждой трапецеидальной $P_i(\omega)$ по соответствующим ей значениям ω_{0i} и ω_{mi} определяется α_i и ближайшее к нему значение α , кратное 0,05.

2. Затем из таблицы *h-функций* выписываются значения $h_{e\alpha}(t)$, соответствующие данному α .

3. После этого определённая $h_{e\alpha}(t)$ масштабируется (растягивается или сжимается в зависимости от того, больше или меньше единицы величина P_{0i}) по оси h в P_{0i} раз и сжимается по оси времени в ω_{0i} раз. В итоге получают $h_i(t)$, соответствующую $P_i(\omega)$.

4. По полученным подобным образом составляющим $h_i(t)$ определяется искомая переходная функция $h(t)$ их алгебраическим суммированием, т.е. принимается, что

$$h(t) \cong \sum_i h_i(t).$$

Однозначность взаимосвязи переходной функции и вещественной частотной характеристики системы, определяемая (10.28), позволяет сделать заключение, что по виду ВЧХ можно сделать некоторые заключения относительно переходной функции системы без непосредственного её определения. Приведем несколько правил, позволяющих делать оценки по $P(\omega)$ о виде и параметрах переходной функции $h(t)$.

1. Начальное значение $P(\omega)$ равно конечному значению $h(t)$, т.е. $P(0) = h(\infty)$.

2. Конечное значение $P(\omega)$ равно начальному значению $h(t)$. Таким образом, $P(\infty) = h(0)$.

3. Если вещественная частотная характеристика системы $P(\omega)$ – непрерывная и положительная функция ω с отрицательной и монотонно убывающей по абсолютной величине производной $\frac{dP(\omega)}{d\omega}$ (рис. 10.4, а), то переходная функция в системе не имеет перерегулирования и будет монотонной функцией времени, т.е. её производная по времени не будет менять своего знака (рис. 10.4, б).

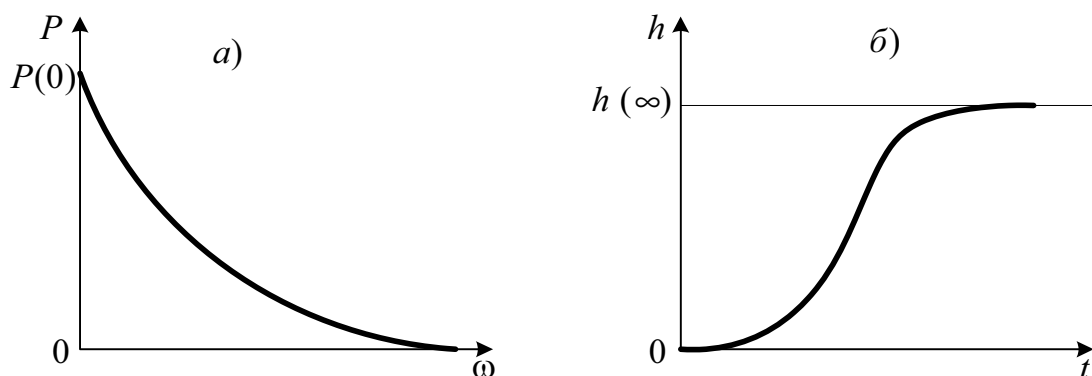


Рис. 10.4

4. Если $P(\omega)$ не удовлетворяет условию $P(\omega) \leq P(0)$, то переходная функция соответствующей данной $P(\omega)$ системы будет иметь перерегулирование.

5. Если условие $P(\omega) \leq P(0)$ выполняется, то перерегулирование в системе не превышает 18 %.

6. Величина перерегулирования в системе зависит от соотношения максимального значения $P(\omega)$ и значения $P(0)$. Оно приближенно может быть оценено величиной

$$\sigma \leq \frac{P_{\max}(\omega) - P(0)}{P(0)} \cdot 18 \text{ \%}.$$

7. Изменение масштаба $P(\omega)$ вдоль оси P в m раз приводит к такому же изменению масштаба в m раз переходной функции $h(t)$ вдоль оси t .

8. Длительность переходного процесса в системе также явно зависит от характера изменения её вещественной частотной характеристики $P(\omega)$. Если первая и вторая системы имеют одинаковые по форме ВЧХ, но различающиеся масштабом по оси частот, как это показано на рис. 10.5, причём $P_2(\omega) = P_1(k\omega)$ и при этом $k > 1$, то длительность переходных процессов во второй системе будет в k раз большей, чем у первой.

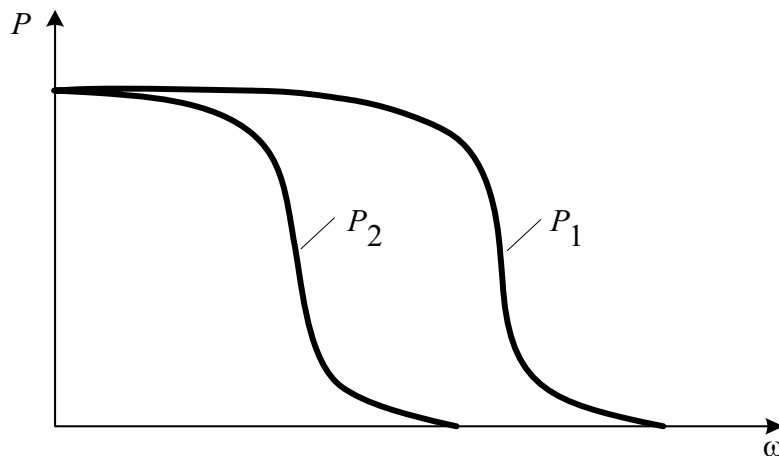


Рис. 10.5

9. Если оценить полосу пропускания системы диапазоном частот от 0 до ω_n , соответствующей значению ВЧХ, равному $0,1P(0)$, то длительность переходного процесса в системе с $P(\omega) \leq P(0)$ будет находиться в пределах $\pi/\omega_n < t_n < 4\pi/\omega_n$.

Все вышеприведенные правила позволяют лишь приближенно оценить переходную функцию системы. Тем не менее, их использование оказывается очень полезным в ситуациях, когда требуется предварительный (хотя бы и приближенный) анализ результатов синтеза системы или свойств исследуемой системы.

Контрольные вопросы

1. Какие режимы называются статическими?
2. Чем отличаются модели статики систем от моделей динамики?
3. Чем отличаются точные методы решения систем линейных алгебраических уравнений от итерационных?
4. В каких случаях система алгебраических уравнений трансцендентна?
5. Следствием каких причин являются погрешности анализа на ЭВМ статических режимов в системах?
6. Как влияют погрешности в определении параметров СЛАУ на точность их решения? В каких случаях эта погрешность может быть особенно большой?
7. Что понимается под обусловленностью системы и от чего она зависит?
8. Что понимается под спектральным числом обусловленности матрицы?
9. Каковы ныне области применения точных и итерационных методов решения СЛАУ (укажите порядок этих систем)?
10. Что понимают под матрицей разреженного типа и матрицей ленточного типа?
11. В чем сущность метода исключения Гаусса, используемого для решения СЛАУ?
12. Чем отличается LU -разложение матриц от QR -разложения и каким образом они используются при решении СЛАУ?
13. В чем сущность используемого для решения СЛАУ метода Халеского?
14. Какова последовательность решения СЛАУ методом простой итерации?
15. Что понимают под динамическими режимами систем?
16. В чем отличие между установившимся динамическим и переходными режимами?
17. В каких случаях решают задачи анализа динамических режимов линейных систем с использованием классического метода решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений?
18. Что называют вынужденной составляющей, собственной составляю-

- щей и свободной составляющей динамического процесса в системе?
19. В каких случаях применим принцип суперпозиции при исследовании процессов в системах?
 20. Что называют фундаментальной матрицей линейной стационарной обыкновенной непрерывной системы и как она связана с матрицей состояния такой системы?
 21. Какова связь между переходной функцией и вещественной частотной характеристикой линейной стационарной обыкновенной непрерывной системы?
 22. Как определяется переходная функция ЛСОН-системы по её вещественной частотной характеристике с использованием метода трапеций и таблицы h -функций?
 23. Какие суждения можно сделать о характере и параметрах переходной функции системы по виду вещественной частотной характеристики системы?

Библиографический список к главе 10

1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа / под ред. А. Д. Бруно. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Регулярная и хаотическая динамика, 1986.
2. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. – 2-е изд. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
3. *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983.
4. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т.2 – 3-е изд. – М.: Наука, 1966.
5. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 15-е изд. – М.: Наука, 1998.
6. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. 3-е изд. – СПб.: Лань, 2006.
7. *Волков Е. А.* Численные методы. – 4-е изд. – СПб.: Лань, 2007.
8. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астраль, 2008.
9. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление: учебное пособие. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1975.
10. *Иванов В. В.* Методы вычислений на ЭВМ. – Киев: Наукова думка, 1984.
11. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978.
12. *Копченова Н. В., Марон И. А.* Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972.

13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения. Теоремы. Формулы. – 6-е изд. – СПб.: Лань, 2003.
14. *Кунцман Ж.* Численные методы: пер. с фр. – М.: Наука, 1979.
15. *Ланс Дж.Н.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин: пер. с англ. – М.: Иностранная литература, 1962.
16. *Мак-Кракен Д., Дорн У.* Численные методы и программирование на Фортране. – 2-е изд. Пер. с англ. – М.: Мир, 1977.
17. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. 3-е изд. – М.: Наука, 1989.
18. *Мудров А. Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках БЕЙСИК, ФОРТРАН и ПАСКАЛЬ. – Томск: МП "Раско", 1992.
19. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1989.
20. *Райс Дж.* Матричные вычисления и математическое обеспечение. – М.: Мир, 1984.
21. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. – М.: Научный мир, 2000.
22. *Туркач Л. И.* Основы численных методов. – М.: Наука, 1987.
23. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1963.
24. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений: пер. с англ. – М.: Мир, 1980.
25. Теория автоматического управления. Кн. 1 / под ред. *А. В. Нетушила.* – М.: Высшая школа, 1983.
26. *Востриков А. С., Французова Г. А.* Теория автоматического регулирования. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006.
27. *Алексеев А. А., Имаев Д. Х., Кузьмин Н. Н., Яковлев Б. В.* Теория управления. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 1999.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ПАКЕТОВ ДЛЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО АНАЛИЗА СОСТОЯНИЙ И ПРОЦЕССОВ В ОБЫКНОВЕННЫХ СИСТЕМАХ

Глава содержит краткие сведения о широко используемых во всем мире универсальных математических пакетах *Mathcad*, *Maple V*, *Matlab*, а также о ряде специализированных пакетов прикладных программ. Даются практические рекомендации по их применению для анализа статических состояний и процессов в обыкновенных системах.

11.1. Математические пакеты семейства MATHCAD

Это семейство разработано и продолжает развиваться корпорацией *MathSoft, Inc.* (Cambridge, Massachusetts, USA). Оно имеет иерархическую структуру и состоит из разных пакетов и версий. Математические пакеты *Mathcad Basic*, *Mathcad Standard* и *Mathcad Plus* ныне имеются в русифицированных вариантах и широко используются в нашей стране. Они адаптированы для всех основных операционных систем – *MS-DOS*, *Windows*, *Mac*, *OS/2*, *Unix*. Наибольшее распространение получили в настоящее время пакеты *Mathcad Plus* версий 8 – 12, а также *Mathcad Plus 6.0 Professional Edition* (PRO) под управлением *Windows*. Ныне среди пользователей ПЭВМ это, пожалуй, самые популярные универсальные математические пакеты (математические системы). У них уже сотни тысяч пользователей среди школьников, технических специалистов, научных работников. Этому способствует и то, что англоязычные версии *Mathcad* распространяются на дешевых CD-ROM, свободно передаются по сети Internet.

Системы *Mathcad* вполне оправдывают свое название, включающее в себя аббревиатуру CAD (Computer Aided Design). Они действительно обладают достоинствами систем автоматизированного проектирования (САПР) и часто используются с другими профессионально ориентированными САПР.

Главное достоинство пакетов *Mathcad* – они очень просты и гибки в использовании, легки для освоения и в то же время позволяют решать практически любые интересующие нас математические задачи, причем как численно, так и символично. К числу основных достоинств пакетов *Mathcad* следует также отнести удобство представления в них математических выражений. Они записываются в привычном для нас виде, как это мы делаем в тетради или на учебной доске и видим в книгах. При этом *Mathcad* предоставляет возможность комбинировать текст, графические изображения и математические выкладки в любом месте экрана монитора и тем самым готовить отчетные документы по результатам расчетов, не выходя из пакета. При желании результаты вычислений могут быть оформлены в виде двух- и трехмерных графиков, трехмерных гистограмм. По ним в *Mathcad* можно построить трехмерные поверхности, линии одинаковых уровней, картины векторных полей. Последние версии *Mathcad* позволяют готовить электронные книги, снабжая их мультимедиа, гипертекстовыми и гипермедиа-ссылками, анимациями, многокрасочными репродукциями, фрагментами видеofilмов и звуковым сопровождением. Сформированные в *Mathcad* рабочие документы можно вывести на печать в режиме WYSIWIG (What you see is what you get), т. е. что Вы видите, это то, что Вы получаете при печати на принтере. Такое объединение внутри *Mathcad* всех основных современных средств создания и оформления документов позволяет с полным основанием называть данные системы универсальными интегрированными математическими системами.

Mathcad имеет обширную справочную систему, электронные книги, которые делают доступными при работе с пакетом множество полезных формул, справочных данных и диаграмм. Он обеспечивает слежение за ошибками в формулах и выдает сообщения в таких случаях, указывая в какой из них имеется ошибка. Редактирование формул при этом можно производить графически, подобно тому, как мы это делаем на аудиторной доске. *Mathcad* обеспечивает при расчётах 15 верных десятичных цифр и точные ответы при символических вычислениях. Он имеет встроенную систему единиц измерений и обеспечивает контроль размерности при расчётах.

Большими возможностями обладают пакеты *Mathcad* в части графического представления результатов вычислений. Графики функций могут быть представлены в декартовых или полярных координатах с координатными сетками, причем как с линейным, так и логарифмическим масштабом отображаемых переменных. Последнее особенно удобно для построения логарифмических частотных характеристик систем, о чем уже говорилось в главе 7. Имеется возможность раскраски

отображений, координатных плоскостей и сетки. Динамические процессы могут отображаться в виде анимаций. Предусмотрен импорт любых графических изображений из других систем (VISIO, AutoCAD, PCAD, TurboCAD и др.).

Mathcad обеспечивает возможность открытия рабочих листов, созданных в этом пакете и находящихся на серверах *Internet*, подключаться к системам, совместимым с *cc:Mail*. Он снабжен системой шпаргалок (*QuickSheets*). Последние удобны для освоения и выполнения часто встречающихся расчётов. Шпаргалки можно использовать в качестве шаблонов для выполнения расчётов и с этой целью переносить в рабочий документ. После этого остается лишь изменять в них исходные данные и получать таким образом искомое решение. Шпаргалки содержат специальные страницы, куда можно внести записи, необходимые для быстрого доступа при последующих обращениях.

Пакеты *Mathcad* поставляются в комплекте с *Электронными книгами*. Одна из них, называемая *Настольным справочником*, содержит часто встречающиеся на практике математические формулы, физические константы, данные о свойствах различных материалов и другую полезную информацию справочного типа. Другие электронные книги ориентированы на специалистов различных профилей и содержат примеры применений *Mathcad* в их профессиональной области. Каждая из книг имеет оглавление, тематический указатель, обеспечивает поиск нужной информации по заданному слову. Информация из электронных книг может копироваться в рабочие документы. Изменения, вносимые в электронные книги, сохраняются на время лишь одного сеанса работы с ними, но при необходимости внесенные изменения могут и сохраняться. При этом остается доступным и первоначальный вариант электронной книги.

Для создания текстовых областей в рабочих документах *Mathcad* имеется мощный редактор, позволяющий оформлять подобные тексты достаточно качественно, с использованием шрифтов различных размеров, гарнитур, начертания и цвета, установленных в операционной системе, под которой работает *Mathcad*. Он обеспечивает вырезку и вставку частей текста, выравнивание и отступы, изменение ширины страницы, использует команды опции «Орфография» для фиксации орфографических ошибок (только на английском языке) путем сравнения текста с имеющимися словами в общем словаре общеупотребительных слов и в личном словаре, создаваемом пользователем. Последний может также изменять шрифт, размер и стиль отображения математических символов и чисел, создавать цветовое выделение их в рабочих документах.

Пакеты *Mathcad* могут обеспечить практически все необходимые расчеты, которые могут потребоваться при анализе или синтезе систем, при изучении их состояний, свойств, характеристик и протекающих в них процессов. Они обеспечивают работу с комплексными числами, функциями и переменными, позволяют осуществлять численно или символично операции дифференцирования и интегрирования, работать с тригонометрическими, гиперболическими, экспоненциальными и другими функциями, производить прямые и обратные интегральные преобразования Фурье, Лапласа и z-преобразования. С их помощью можно решать алгебраические, трансцендентные, дифференциальные уравнения и системы из них, осуществлять разложение выражений на множители и приводить их к простейшему виду, производить типовые операции с булевыми переменными.

Пакеты *Mathcad* предоставляют возможности выполнять типовые операции с векторными переменными и матрицами. В частности, с их помощью можно по массивам данных создавать векторы и матрицы, изменять их размеры, выполнять с ними все основные алгебраические операции, транспонировать и обращать их, определять след, детерминант, ранг, собственные значения и собственные векторы матриц, их различные нормы и меры обусловленности. В *Mathcad Plus* можно осуществлять часто используемые разложения матриц, например разложения Халесского, LU, QR, описанные в главе 10. С помощью дискретных аргументов над векторами и матрицами можно производить многократные вычисления или циклы с повторяющимися вычислениями, осуществлять ввод числовых значений в таблицы и многое, многое другое.

В *Mathcad* удобно проводить статистическую обработку массивов, вычислять по ним средние значения, дисперсию, среднеквадратичные значения, функции распределения и плотности вероятности, определять число случайных величин, попадающих в заданные интервалы. Имеется возможность генерировать случайные величины с различными законами распределения, осуществлять интерполяцию функций многих переменных (линейную и кубическими сплайнами), их аппроксимацию и экстраполяцию, производить сглаживание данных с помощью скользящей медианы, гауссова ядра и адаптивного метода наименьших квадратов.

Достаточно развит в *Mathcad* аппарат спектрального анализа и синтеза, что позволяет успешно решать подобные задачи применительно к динамическим системам, фильтрам, электронным и электрическим цепям. В нём имеется возможность по передаточной функции определять соответствующие ей АЧХ и ФЧХ, переходную функцию. Для