

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

---

**В.А. Сердюцкий**

# **МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия  
Редакционно-издательским советом  
Томского политехнического университета*

2-е издание,  
исправленное и дополненное

Издательство  
Томского политехнического университета  
2008

УДК 537.8(075.8)

ББК 22.313я73

С32

**Сердюцкий В.А.**

С32      Макроскопическая электродинамика: учебное пособие / В.А. Сердюцкий. – 2-е изд., исправл. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 247 с.

ISBN 5-98298-342-X

В пособии рассматриваются основные понятия классической электродинамики конденсированных сред: уравнения Максвелла в средах, электрические и магнитные свойства вещества, распространение электромагнитных волн, излучение заряженных частиц в вакууме и средах, воздействие мощных пучков на конденсированные среды.

Разработано в рамках реализации Инновационной образовательной программы ТПУ по направлению «Атомная энергетика, ядерный топливный цикл, безопасное обращение с радиоактивными отходами и отработанным ядерным топливом, обеспечение безопасности и противодействие терроризму». Предназначено для магистрантов, обучающихся по магистерской программе 510420 «Физика ускорителей», и может быть полезно студентам, обучающимся по другим специальностям.

**УДК 537.8(075.8)**

**ББК 22.313я73**

*Рецензенты*

Доктор физико-математических наук,  
заведующий лабораторией № 10 ФГНУ НИИ ЯФ  
*В.Н. Стибунов*

Доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник ФГНУ НИИ ЯФ  
*Г.А. Науменко*

**ISBN 5-98298-342-X**

© Сердюцкий В.А., 2003

© Сердюцкий В.А., с изменениями, 2008

© Томский политехнический университет, 2003

© Томский политехнический университет,  
с изменениями, 2008

© Оформление. Издательство Томского  
политехнического университета, 2008

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время в различных лабораториях мира работают уникальные установки и приборы, производящие, использующие или регистрирующие те или иные виды излучения. К ним относятся такие излучения, как синхротронное, Вавилова–Черенкова, переходное, излучение при каналировании электронов и позитронов в кристаллах и др. Студенты и магистранты, выбравшие специальности, связанные с эксплуатацией ускорителей и других источников излучения, несомненно должны владеть знаниями теоретических основ и важнейших характеристик этих видов излучения. Они должны быть знакомы с особенностями прохождения пучков заряженных частиц в вакууме, материальных средах и через периодические структуры. Владение основными понятиями и принципами электродинамики позволит им понять требования, предъявляемые к характеристикам пучков частиц в ускорителях, а также творчески участвовать в разработке новых программ и в проведении экспериментов. Данное учебное пособие можно считать введением в указанный круг вопросов. Оно состоит из трёх глав, заданий, тестов и приложений.

В первой главе рассматривается электродинамика в вакууме. Такой порядок изложения материала, когда сначала выводятся уравнения Максвелла для вакуума, позволяет ввести необходимые в дальнейшем понятия и обозначения и подчеркнуть экспериментальную основу уравнений Максвелла. В последующих же главах все изложение проводится с учетом этих уравнений.

Во второй главе на простых моделях показано, как от микроскопических уравнений Максвелла перейти к макроскопическим уравнениям материальных сред: в электростатике – для диэлектриков, когда среда состоит из полярных или неполярных молекул, и в магнитостатике – для магнетиков при объяснении диамагнетизма и парамагнетизма. Далее излагается общий подход усреднения уравнений Максвелла для переменных полей и рассматриваются материальные уравнения, или уравнения связи, без которых система уравнений Максвелла не может считаться полной. На простейших моделях показывается, как можно установить вид диэлектрической проницаемости среды. Выяснению физического смысла диэлектрической проницаемости посвящена значительная часть второй главы. Это связано с важностью указанной величины для решения многих

задач электродинамики сред и прохождения излучения через среды. При рассмотрении электрических и магнитных свойств вещества использованы классические и термодинамические методы. Применение же методов квантовой механики потребовало бы значительного увеличения объёма учебного пособия и должно производиться в специальных курсах.

Третья глава посвящена теории излучения релятивистских заряженных частиц. Приведён вывод запаздывающих потенциалов Лиенара–Вихерта, на основе которых получены формулы для электромагнитных полей ускоренно движущегося точечного заряда. Получены выражения для интенсивности излучения, а также для спектрально-угловых характеристик излучения. Подробно рассмотрено синхротронное и ондуляторное излучение. Синхротронное излучение обладает уникальными свойствами: непрерывным спектром, продолжающимся вплоть до характерных частот гамма-излучения, большой интенсивностью и высокой степенью поляризации. Благодаря этому синхротронное излучение нашло широкое применение в различных областях науки и техники. В третьей главе затронуты вопросы, касающиеся и других видов излучения заряженных частиц: переходного, когерентного тормозного, излучения при каналировании и др. Следует подчеркнуть, что математический формализм и физические понятия, разработанные в теории синхротронного излучения, применимы и при анализе особенностей излучений других видов. Достаточно указать на такие понятия, как зона формирования излучения, или длина когерентности, поляризация излучения, когерентность, возникающая при излучении заряженных частиц, сформированных в пучки, и др. Предполагается, что студенты знакомы со специальной теорией относительности. Поэтому формулы релятивистской механики и релятивистской электродинамики, необходимые для понимания расчётов, вынесены в приложения.

В учебном пособии принята гауссова система единиц, однако задачи и тесты сформулированы таким образом, чтобы студенты использовали международную систему единиц. Переход от одной системы единиц к другой можно осуществить с помощью соответствующих таблиц, данных в приложении. По всем темам курса предлагается 12 заданий, которые состоят из контрольных вопросов, упражнений и задач. Выполнение заданий способствует более глубокому усвоению теоретического материала. С этой же целью приведены по ряду разделов многовариантные тесты.

Настоящее учебное пособие представляет собой второе издание курса «Макроскопическая электродинамика», исправленное и дополненное. От издания 2003 года оно отличается тем, что устранены замеченные опечатки и добавлены задания, тесты и приложения.

# Глава 1

## МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ВАКУУМЕ

### 1. Электростатика в вакууме

#### 1.1. Закон Кулона. Напряженность электрического поля

Одним из важнейших понятий в теории электричества является заряд. Он обладает следующими фундаментальными свойствами: а) электрические заряды могут быть как положительными, так и отрицательными; б) во всякой электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов сохраняется, или, иначе, имеет место закон сохранения электрического заряда; в) заряд тела не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, в которой он измеряется.

Из опытов по взаимодействию зарядов установлено, что сила взаимодействия  $\vec{F}$  между заряженными телами зависит от зарядов  $q$ , размеров и формы тел, их положения в пространстве. Основная задача электростатики – вычисление силы  $\vec{F}$  взаимодействия между заряженными телами. Задача упрощается благодаря тому, что для электромагнитных взаимодействий справедлив принцип суперпозиции, установленный экспериментально:

$$\vec{F}_{A,B+C} = \vec{F}_{A,B} + \vec{F}_{A,C},$$

то есть сила взаимодействия между заряженным телом  $A$  и системой заряженных тел  $B+C$  равна сумме сил, действующих между заряженными телами:  $(A,B)$  и  $(A,C)$ . Силу взаимодействия между любой системой зарядов можно представить в виде векторной суммы сил, действующих между отдельными точечными дискретными зарядами:

$$\vec{F} = \sum_{i,k} \vec{F}_{ik}. \quad (1.1)$$

Пусть  $(q_1, \vec{r}_1)$  и  $(q_2, \vec{r}_2)$  – два точечных заряда, положения которых в выбранной системе координат характеризуются радиусами-векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , соответственно.

Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величинам  $q_1$  и  $q_2$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$\vec{F}_{12} = q_1 q_2 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (1.2)$$

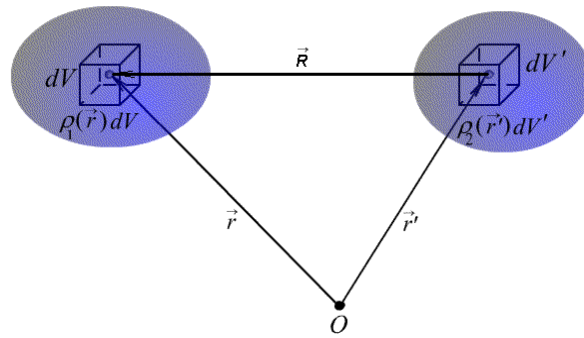


Рис. 1.1. Взаимодействие двух точечных зарядов, заключенных в объемах  $dV$  и  $dV'$

Она является силой притяжения для зарядов противоположного знака и силой отталкивания – для зарядов одинакового знака. Формула (1.2) выражает основной количественный закон электростатики, известный как закон Кулона. При записи закона Кулона (1.2) использована абсолютная, или гауссова, система единиц. В дальнейшем будет удобно перейти к непрерывному распределению зарядов. Для расчета тело разбивают на бесконечно малые объемы (или поверхности и длины) и вводят понятие о плотности зарядов – объемной  $\rho$ , поверхностной  $\sigma$  и линейной  $\lambda$ , причем

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \quad \lambda = \frac{dq}{dl}, \quad (1.3)$$

где  $dq$  – заряд, находящийся, соответственно, в объеме  $dV$  на поверхности  $dS$  и на длине  $dl$ .

Согласно рис. 1.1 и принципу суперпозиции, закон Кулона запишем в виде:

$$\vec{F} = \int_{(1)(2)} \rho_1(\vec{r}) dV \rho_2(\vec{r}') dV' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_{(1)} dV \int_{(2)} dV' \rho_1(\vec{r}) \rho_2(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3}, \quad (1.4)$$

где в выражениях  $\int_{(1)} dV \dots$  и  $\int_{(2)} dV' \dots$  интегрирование проводится по объемам первого и второго тела и  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ .

Введем обозначение:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{(2)} \rho_2(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dV', \quad (1.5)$$

тогда сила  $\vec{F}$  принимает вид:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_{(1)} \rho_1(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) dV, \quad (1.6)$$

и решение задачи находится в два этапа: сначала находят  $\vec{E}(\vec{r})$ , затем  $\vec{F}$ , причем  $\rho_1(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})dV$  – сила, действующая на заряд  $\rho_1(\vec{r})dV$ , а  $\vec{E}$  – сила, действующая на единицу заряда, напряженность электрического поля.

К понятию поля в XIX веке пришел Фарадей. Он утверждал, что действие одного тела на другое может осуществляться либо через соприкосновение, либо через промежуточную среду. Таким образом, он придерживался концепции близкодействия, противоположной концепции дальнего действия, которая была заимствована из закона всемирного тяготения Ньютона и развивалась в трудах Лапласа, Ампера, Пуассона, Гаусса, Грина, Франца Неймана, Карла Неймана, Вебера, Кирхгофа и многих других физиков и математиков.

Интуитивные и качественные доказательства Фарадея обрели строгую математическую форму в теории Максвелла.

Вычислим напряженность  $\vec{E}(\vec{r})$ , создаваемую точечным зарядом  $q_0$ , находящимся в точке  $\vec{r}_0$ . Для этого удобно воспользоваться  $\delta$ -функцией Дирака:

$$\rho(\vec{r}) = q_0 \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (1.7)$$

Согласно (1.5) и свойству  $\delta$ -функции Дирака

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dV' = q_0 \int \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = q_0 \left. \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right|_{\vec{r}' = \vec{r}_0} = q_0 \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}. \quad (1.8)$$

Если имеется дискретная совокупность точечных зарядов, то с помощью  $\delta$ -функции Дирака можно ввести для нее распределение плотности зарядов

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (1.9)$$

которое соответствует  $n$  точечным зарядам, расположенным в точках  $\vec{r}_i$ . Подставляя (1.9) в (1.5) и проводя интегрирование с помощью  $\delta$ -функции, получим

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (1.10)$$

## 1.2. Интегральная и дифференциальная формы теоремы Гаусса

Для расчета электрического поля  $\vec{E}(\vec{r})$  соотношение

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dV' \quad (1.11)$$

не очень удобно.

Значительно больше возможностей открывает другое интегральное соотношение, называемое интегральной теоремой Гаусса – важнейшей теоремой электростатики. В основе теоремы Гаусса лежит одно из основных понятий векторного анализа – понятие потока вектора. Для применения теоремы Гаусса необходима определенная симметрия задачи. Предположим, что точечный заряд  $q$  находится в начале координат (рис. 1.2, рис. 1.3).

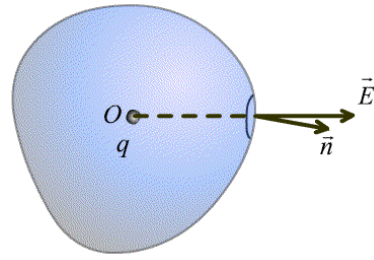


Рис. 1.2. Поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность  $dS$

Проведем замкнутую поверхность  $S$  вокруг заряда; за положительную нормаль к поверхности выберем внешнюю нормаль. Вычислим поток вектора напряженности  $\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS$  через замкнутую поверхность  $S$  произвольного вида. На основании (1.8) напряженность, создаваемая точечным зарядом  $q$  в точке наблюдения  $\vec{r}$ , находящейся на поверхности  $S$ , равна:

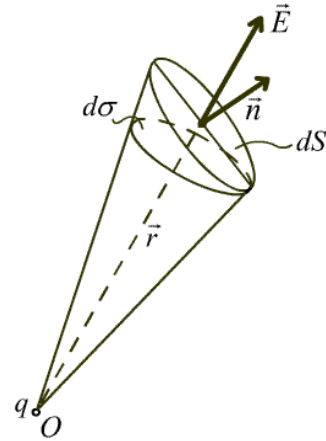


Рис. 1.3. Поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность  $dS$

$$\vec{E} = q \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (1.12)$$

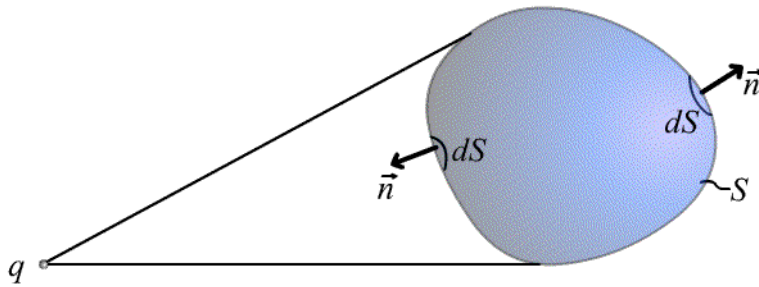


Рис. 1.4. К выводу интегральной формы теоремы Гаусса для случая, когда заряд  $q$  находится вне поверхности  $S$

Рассмотрим участок поверхности  $dS$  (рис. 1.4). Как следует из рисунка,

$$(\vec{E} \vec{n}) dS = \frac{q}{r^3} (\vec{r} \vec{n}) dS = \frac{q}{r^2} \cos(\vec{r} \cdot \vec{n}) dS = \frac{q}{r^2} d\sigma,$$

где  $d\sigma = dS \cdot \cos(\vec{r}, \hat{n})$ .



С другой стороны,  $\frac{d\sigma}{r^2} = d\Omega$  – величина телесного угла, под которым площадка  $d\sigma$  видна из начала координат. В результате получим:

$$\oint \vec{E} \vec{n} dS = 4\pi q. \quad (1.13)$$

Если заряд находится вне поверхности  $S$ , то, как следует из рис. 1.4, ближние и дальние поверхности видны под одним и тем же телесным углом, но  $\cos(\vec{r}, \vec{n})$  для ближней поверхности отрицательный, а для дальней – положительный.

Поэтому

$$\oint (\vec{E} \vec{n}) dS = 0. \quad (1.14)$$

Для нескольких зарядов

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

и

$$\oint (\vec{E} \vec{n}) dS = 4\pi q_{in} = 4\pi \int_V \rho(\vec{r}) dV, \quad (1.15)$$

где  $V$  – объем, ограниченный поверхностью  $S$ ;  $q_{in}$  – алгебраическая сумма всех зарядов, лежащих внутри замкнутой поверхности. Заряды, которые расположены по отношению к этой поверхности во внешнем пространстве, не влияют на величину потока. Соотношение (1.15) называется электростатической теоремой Гаусса.

Теорема Гаусса является следствием закона Кулона, который по форме не отличается от закона всемирного тяготения Ньютона (в том и в другом случае сила взаимодействия изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния). Поэтому теорема Гаусса применима и для гравитационных полей. В этом случае роль заряда играет гравитационная масса, умноженная на гравитационную постоянную.

Применим теорему Остроградского–Гаусса, известную из векторного анализа:

$$\oint_S (\vec{E} \vec{n}) = \int_V \text{div} \vec{E} dV. \quad (1.16)$$

Сравнивая (1.15) и (1.16), получим дифференциальное соотношение

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho, \quad (1.17)$$

известное как дифференциальная теорема Гаусса.

### 1.3. Работа электрических сил. Потенциал

Предположим, что точечный заряд  $q$  находится в начале координат. Внесем в его поле  $\vec{E}(\vec{r})$  пробный единичный заряд. В этом случае напряженность поля, создаваемая точечным зарядом  $q$ ,

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

По определению напряженность поля равна силе, действующей на единичный заряд,

$$\vec{F} = \vec{E},$$

при этом совершается работа

$$d\bar{A} = \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r}. \quad (1.18)$$

Так как

$$\vec{r} d\vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr,$$

то

$$dA = \frac{q}{r^2} dr = -d\left(\frac{q}{r}\right) = -d\varphi(r). \quad (1.19)$$

Силы электростатического центрального поля являются консервативными, т. е. работа сил поля по перемещению единичного заряда по замкнутому пути равна нулю:

$$\oint dA = -\oint d\varphi(r) = 0. \quad (1.20)$$

Величина, введенная в (1.19),

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r} \quad (1.21)$$

называется электростатическим потенциалом поля точечного заряда  $q$ .

Для непрерывного распределения заряда (рис. 1.5)

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.22)$$

Заметим, что потенциал  $\varphi(\vec{r})$  точечного заряда, как следует из (1.19), определен с точностью до аддитивной константы, которая никакой физической роли не играет, и условно её считают равной значению потенциала на бесконечности, которое равно нулю. Из соотношений (1.18) и (1.19) также следует, что

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (1.23)$$

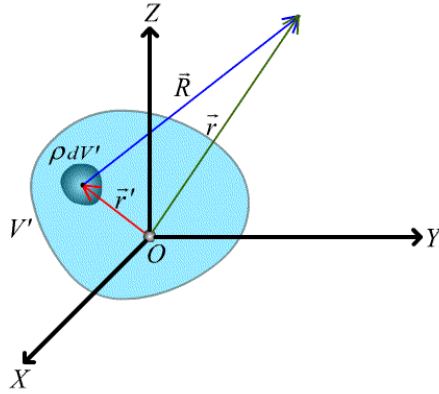


Рис. 1.5. Распределение заряда в объеме  $V'$ . Вектор  $\vec{r}'$  проведен в точку, содержащую точечный заряд  $\rho dV'$ , вектор  $\vec{r}$  – в точку наблюдения  $P$

На основании теоремы Стокса из векторного анализа известно, что циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку вектора через поверхность, натянутую на этот контур (рис. 1.6):

$$\oint_L \vec{E} d\vec{r} = \int_S (\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{E}) dS. \quad (1.24)$$

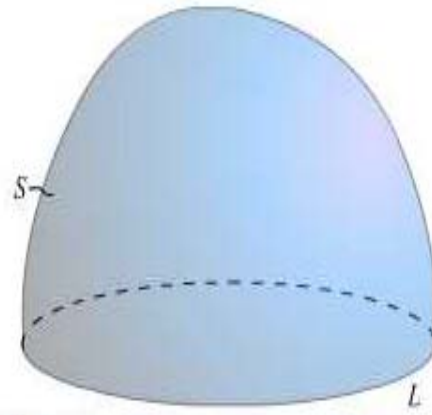


Рис. 1.6. Изображение поверхности  $S$ , натянутой на контур  $L$

Сравнивая (1.23) и (1.24), приходим к дифференциальному соотношению

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (1.25)$$

справедливому для всех точек пространства.

Задача о нахождении сил, действующих между зарядами, сводится, таким образом, к нахождению поля  $\vec{E}(\vec{r})$  из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = 4\pi \rho, \\ \text{rot } \vec{E} = 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

#### 1.4. Уравнения Максвелла в электростатике

Согласно теореме Гельмгольца, любое векторное поле  $\vec{G}(\vec{r})$  может быть найдено, если известны  $div \vec{G}$  и  $rot \vec{G}$ .

Если заданы плотность распределения зарядов  $\rho$  в (1.26), то эти условия выполнены и поле  $\vec{E}(\vec{r})$  может быть определено.

Уравнения (1.26) – это уравнения Максвелла в электростатике. Из второго уравнения следует, что

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \quad (1.27)$$

так как  $rot grad \varphi = 0$ . Из первого уравнения, используя запись

$$div grad = \nabla^2,$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа, обозначаемый иногда  $\Delta \equiv \nabla^2$ , получим уравнение Пуассона:

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho. \quad (1.28)$$

В областях пространства, где отсутствуют заряды, оно превращается в уравнение Лапласа:

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (1.29)$$

Во многих случаях предпочтительнее сначала найти потенциал  $\varphi(\vec{r})$  из уравнения (1.28), а затем по формуле (1.27) определить напряженность поля  $\vec{E}(\vec{r})$ .

Решение уравнения Пуассона имеет вид:

$$\varphi(r) = \int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.30)$$

Если значение  $\rho$  известно, то находим решение для  $\varphi(\vec{r})$  по формуле (1.30), а затем вычисляем:  $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi$ . Таким образом, в электростатике основная задача – нахождение сил, действующих между заряженными телами, решается:

- 1) через закон Кулона;
- 2) уравнения Максвелла (на основании теоремы Гельмгольца).

Отметим некоторые методы решения электростатических задач:

- а) метод, основанный на применении принципа суперпозиции полей;
- б) расчет электрических полей с помощью теоремы Гаусса;
- в) интегрирование уравнений Лапласа и Пуассона;
- г) метод электрических изображений.

## 2. Магнитостатика в вакууме

### 2.1. Законы Био–Савара и Ампера

При изучении магнитных явлений установлены следующие экспериментальные факты, которые лежат в основе современной теории электромагнетизма:

- Сила  $\vec{F}$ , действующая на точечный заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$ , состоит из двух составляющих: электрической и магнитной, и называется силой Лоренца:

$$\vec{F} = q \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}\vec{B}] \right\}, \quad (2.1)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей, соответственно. Формула (2.1) справедлива не только для постоянных, но и переменных электрического и магнитного полей. По действию силы Лоренца на заряд можно определить модули и направления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Поэтому выражение (2.1) можно считать определением электрического и магнитного полей.

- Движущиеся заряды (токи) создают магнитное поле. Опыты по действию магнитного поля на движущиеся заряды проще проводить не с отдельными зарядами, а с токами, представляющими движение многих заряженных частиц.

Пусть имеются два тока  $I_1$  и  $I_2$ , текущие по соответствующим контурам (рис. 2.1). Как известно, они взаимодействуют между собой, и сила взаимодействия зависит от этих токов, их формы, ориентации и т. п.

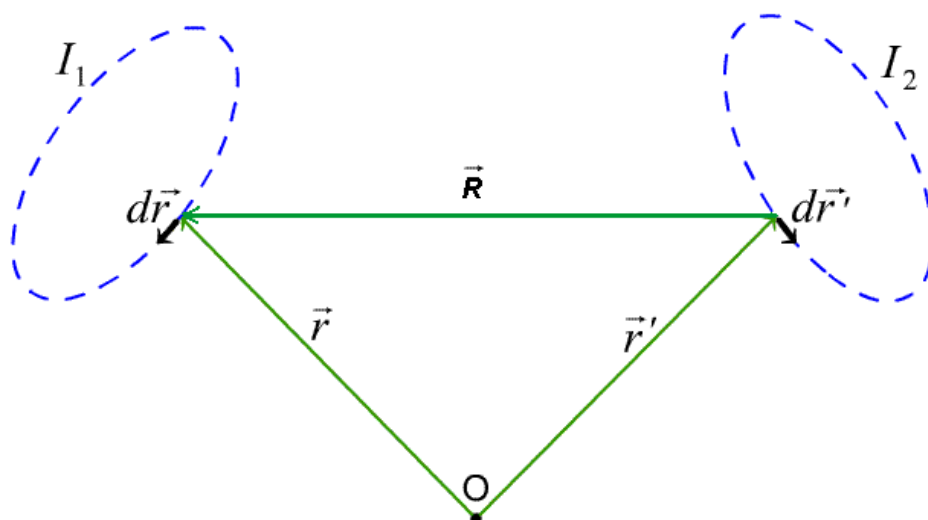


Рис. 2.1. Взаимодействие двух бесконечно малых элементов линейных токов

Основная задача заключается в вычислении силы  $\vec{F}_{12}$  взаимодействия этих токов. Экспериментально установлено, что для магнитных взаимодействий справедлив принцип суперпозиции:

$$\vec{F}_{12} = \oint_{(1)} d\vec{r} \oint_{(2)} d\vec{r}' \dots$$

Аналогичная формула имеется в электростатике для взаимодействия зарядов:

$$\vec{F}_{12} = \int_{(1)} dV \oint_{(2)} dV' \dots$$

Согласно (1.6) и (1.5) в электростатике задача о вычислении  $\vec{F}_{12}$  решалась в два этапа: сначала находилась напряженность  $\vec{E}(\vec{r})$  по формуле (1.5), затем вычислялась сила взаимодействия по формуле (1.6):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{(2)} \rho_2(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dV',$$

$$\vec{F}_{12} = \int_{(1)} \rho_1(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) dV,$$

причем  $\rho_2(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dV' = d\vec{E}$  представляет поле, создаваемое бесконечно малым зарядом  $\rho_2(\vec{r}') dV'$ , а  $\rho_1(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) dV = d\vec{F}$  – это сила, действующая со стороны поля  $\vec{E}(\vec{r})$  на бесконечно малый заряд  $\rho_1(\vec{r}) dV$ .

Итак, для взаимодействия зарядов справедливы соотношения:

$$\vec{F}_{12} = \int_{(1)} d\vec{F}, \quad (2.2)$$

$$d\vec{F} = \rho_1(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) dV \quad (2.3)$$

и

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{(2)} d\vec{E}, \quad (2.4)$$

$$d\vec{E} = \rho_2(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dV'. \quad (2.5)$$

Аналогично, для взаимодействия токов имеем:

$$\vec{F}_{12} = \oint_{(1)} d\vec{F}, \quad (2.6)$$

$$d\vec{F} = \frac{I_1}{c} [d\vec{r}, \vec{B}], \quad (2.7)$$

$$\vec{B} = \oint_{(2)} d\vec{B}, \quad (2.8)$$

$$d\vec{B} = \frac{I_2}{c} \left[ d\vec{r}', \frac{\vec{R}}{R^3} \right], \quad (2.9)$$

где  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ .

Формула (2.7) представляет силу, действующую на линейный элемент тока, и носит название закона Ампера, установленного Ампером. Сила, действующая на провод конечной длины, находится интегрированием по конечной длине провода с помощью формул (2.6) и (2.7). Формулы (2.8) и (2.9) выражают закон Био–Савара для нахождения величины магнитного поля  $\vec{B}$  и  $d\vec{B}$ , создаваемых линейным током  $I_2$ . Линейными токами называются такие токи, поперечное сечение которых мало в сравнении с длиной контура. В случае токов, текущих через конечные сечения, можно применить принцип суперпозиции, разбив их на совокупность «тонких» токов (рис. 2.2). При этом между линейным и объемным элементами тока существует связь:

$$I d\vec{r} = j dS d\vec{r} = \vec{j} dV. \quad (2.10)$$

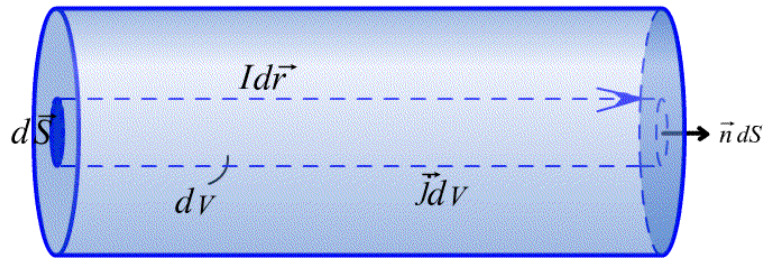


Рис. 2.2. Разложение тока конечного сечения на совокупность «тонких» (линейных) токов

Здесь мы воспользовались тем, что направление плотности тока  $\vec{j}$  совпадает с направлением элемента линейного контура  $d\vec{r}$ . В результате перехода от линейных токов к объемным по формуле (2.10) интегрирование  $\oint d\vec{r}...$  сведется к интегрированию  $\int dV...$  и получим законы Ампера и Био–Савара для объемных токов.

Закон Ампера:

$$\vec{F}_{12} = \int \frac{1}{c} [\vec{j}_1 \vec{B}] dV. \quad (2.11)$$

Закон Био–Савара:

$$\vec{B} = \int \frac{1}{c} \left[ \vec{j}_2 \frac{\vec{R}}{R^3} \right] dV'. \quad (2.12)$$

Согласно (2.12) магнитное поле  $\vec{B}(\vec{r})$  представляет сумму полей, создаваемых отдельными объемными элементами тока  $\vec{j}_2 dV$ .

Рассмотрим выражение

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} [\vec{j} \vec{B}] dV. \quad (2.13)$$

Оно представляет силу, действующую на объемный элемент тока  $\vec{j}_2 dV$ . Если  $\rho$  – плотность зарядов, а  $\vec{u}$  – средняя скорость движения зарядов, то

$$\vec{j} = \rho \vec{u}. \quad (2.14)$$

С другой стороны, плотность зарядов  $\rho$  можно выразить через концентрацию  $n$  и заряд  $e$  носителей тока:

$$\rho = en. \quad (2.15)$$

Тогда получим

$$\vec{u} = \frac{\sum_i \vec{v}_i}{n dV}. \quad (2.16)$$

Подставив в формулу для  $d\vec{F}$  (2.13) выражение для  $\vec{j}$  (2.14) и учитывая (2.15) и (2.16), находим

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} \left[ en \frac{1}{n dV} \sum_i [\vec{v}_i \vec{B}] \right] dV = \sum_i \frac{e}{c} [\vec{v}_i \vec{B}]. \quad (2.17)$$

Сила  $d\vec{F}$  выражается через сумму сил Лоренца, действующих на заряды, движущиеся со скоростями  $\vec{v}_i$  со стороны магнитного поля  $\vec{B}$ :

$$\vec{f}_i = \frac{e}{c} [\vec{v}_i \vec{B}]. \quad (2.18)$$

Таким образом, через закон Ампера, по существу, проявляется действие силы Лоренца на точечные заряды.

## 2.2. Векторный потенциал магнитного поля

Согласно закону Био–Савара магнитное поле  $\vec{B}(\vec{r})$  вычисляется по формуле

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \left[ \vec{j}(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} \right] dV', \quad (2.19)$$

где  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ ; вектор  $\vec{r}$  проведен в точку наблюдения, а  $\vec{r}'$  – в точку элемента объема  $dV'$ , в котором находится объемный ток  $\vec{j}(\vec{r}')$  (рис. 2.3).



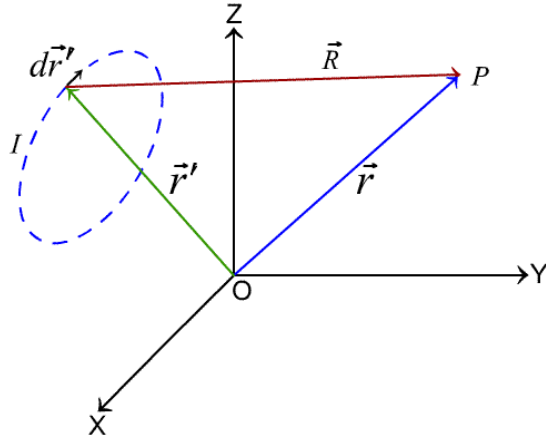


Рис. 2.3. К вычислению в точке  $P$  магнитного поля  $\vec{B}$ , созданного током  $I$

Так как

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad (2.20)$$

то формулу можно упростить, заметив, что

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (2.21)$$

и

$$\left[ \vec{j}(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} \right] = \left[ \nabla \left( \frac{1}{R} \right), \vec{j}(\vec{r}') \right]. \quad (2.22)$$

Вычислим  $\text{rot} \left( \frac{1}{R} \vec{j}(\vec{r}') \right)$ :

$$\text{rot} \left( \frac{1}{R} \vec{j}(\vec{r}') \right) = \left[ \nabla \left( \frac{1}{R} \right), \vec{j}(\vec{r}') \right] + \frac{1}{R} \text{rot} \vec{j}(\vec{r}'). \quad (2.23)$$

Второе слагаемое обращается в нуль, так как вектор  $\vec{j}$  зависит от  $\vec{r}'$ , а не от вектора  $\vec{r}$ , по координатам которого проводится дифференцирование. Из формул (2.22) и (2.23) следует, что

$$\left[ \vec{j}(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} \right] = \text{rot} \left( \frac{1}{R} \vec{j}(\vec{r}') \right) \quad (2.24)$$

и

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot} \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV'. \quad (2.25)$$

Обозначим:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV'. \quad (2.26)$$

Введенная таким образом величина  $\vec{A}(\vec{r})$  называется векторным потенциалом магнитного поля, а поле  $\vec{B}(\vec{r})$  находится по формуле

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot}(\vec{A}(\vec{r})). \quad (2.27)$$

Сначала на основании (2.26) по заданному распределению токов  $\vec{j}(\vec{r}')$  вычисляем векторный потенциал  $\vec{A}(\vec{r})$ , а затем находим поле  $\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot} \vec{A}$ .

Для электростатики вычисления поля также проводились в два этапа:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi,$$

где

$$\varphi = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R},$$

причем скалярный потенциал  $\varphi(\vec{r})$  удовлетворял уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho.$$

Легко убедиться, что векторный потенциал удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (2.28)$$

### 2.3. Уравнения Максвелла для магнитостатики

Основная задача магнитостатики – нахождение силы  $\vec{F}$ , с которой взаимодействуют токи, – решается последовательно. Сначала находят поле  $\vec{B}(\vec{r})$ , затем – силу  $\vec{F}$ . Для нахождения поля  $\vec{B}(\vec{r})$ , согласно теореме Гельмгольца, нужно знать  $\text{div} \vec{B}$  и  $\text{rot} \vec{B}$ . Из закона Био–Савара следует, что  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ . Взяв дивергенцию от вектора  $\vec{B}$ , получим

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (2.29)$$

так как  $\text{div} \text{rot} \vec{A} = 0$ .

Вычислим  $\text{rot} \vec{B}$ :

$$\text{rot} \vec{B} = \text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (2.30)$$

При вычислении  $\vec{B}$  можно заменить  $\vec{A}$  на  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla x$ , где  $x$  – произвольная функция, зависящая от  $\vec{r}$ , так как  $\text{rot} \text{grad} x = 0$ .

Поэтому  $\text{rot} \vec{A}' = \text{rot} \vec{A}$ .

Векторные потенциалы  $\vec{A}$  и  $\vec{A}'$  дают одно и то же поле  $\vec{B}(\vec{r})$ . Можно предположить, что среди множества  $\{\vec{A}'\}$  есть такой потенциал, что  $\text{div} \vec{A}' = 0$ .

В самом деле, если  $\operatorname{div} \vec{A} \neq 0$ , например

$$\operatorname{div} \vec{A} = f(\vec{r}), \quad (2.31)$$

то всегда можно выбрать

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla x, \quad (2.32)$$

где функцию  $x$  в силу произвольности её выбора можно считать удовлетворяющей уравнению

$$\nabla^2 x = -f. \quad (2.33)$$

В этом случае

$$\operatorname{div} \vec{A}' = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \operatorname{grad} x = f(\vec{r}) + \nabla^2 x = 0 \quad (2.34)$$

и уравнение существенно упрощается:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (2.35)$$

В результате мы получим уравнения Максвелла для магнитостатики:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.36)$$

### 3. Электростатические и магнитные поля на большом расстоянии от источников

Как мы установили, электростатическое поле  $\vec{E}$  и магнитное поле  $\vec{B}$  вычисляются в электростатике и магнитостатике, соответственно, в два этапа:

- а) для электростатического поля находим потенциал  $\varphi(\vec{r})$  по формуле (1.22), а затем вычислим напряженность электрического поля  $\vec{E}(\vec{r})$  по формуле (1.27);
- б) для магнитного поля находим векторный потенциал  $\vec{A}(\vec{r})$  по формуле (2.26), а затем вычислим магнитное поле  $\vec{B}(\vec{r})$  согласно (2.27).

1. Если распределение зарядов, создающих поле, известно, то потенциал  $\varphi(\vec{r})$  находится как интеграл (1.22) при условии, что плотность  $\rho(\vec{r})$  отлична от нуля в ограниченной области пространства и достаточно быстро убывает при  $\vec{r} \rightarrow \infty$  по любому направлению. Следует отметить, что интеграл (1.22) берется в аналитическом виде только для сравнительно простой функции  $\rho(\vec{r}')$ . Вид функции  $\varphi(\vec{r})$  с достаточно хорошей точностью может быть установлен для задачи нахождения электростатического поля на больших расстояниях от системы зарядов. Эта ситуация возникает, когда выполняется условие:  $r \gg r'_{\max}$  (рис. 1.5).

Записывая  $R$  в виде

$$R = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = \sqrt{r^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2} = r\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \quad (3.1)$$

и проводя разложение  $R$  как функции малого параметра  $r'/r$  в степенной ряд, получим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} + \frac{3}{2r}\left(\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2}\right)^2 - \frac{\vec{r}'^2}{2r^3} + \dots \quad (3.2)$$

Обозначая координаты  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $z = x_3$  и вводя тензорные обозначения, получим

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{Q_{ij} x_i x_j}{2 r^5}. \quad (3.3)$$

В формуле (3.3)

$$q = \int \rho(\vec{r}') dV' \quad (3.4)$$

– полный заряд системы;

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \quad (3.5)$$

– дипольный момент системы;

$$Q_{ij} = \int \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \quad (3.6)$$

– тензор квадрупольного момента системы зарядов.

Разложение (3.3) называется разложением электростатического потенциала по мультипольным моментам, или по мультиполям. Каждый последующий член разложения является малым в сравнении с предыдущим. Главным членом разложения является потенциал точечного заряда  $\varphi_0 = q/r$ : на больших расстояниях детали распределения заряда оказываются несущественными и система создает потенциал такой же, как и точечный заряд  $q$ , находящийся в начале координат.

Если  $q = 0$ , то в разложении (3.3) наиболее важным членом является второй, содержащий дипольный момент, определяемый для непрерывного распределения зарядов формулой (3.4). В случае системы дискретных зарядов дипольный момент определяется как

$$\vec{p} = \sum_i q_i \cdot \vec{r}_i. \quad (3.7)$$

В частном случае, когда имеется система из двух равных по величине, но противоположных по знаку зарядов, из (3.7) получим

$$\vec{p} = (+q)\vec{r}_+ + (-q)\vec{r}_- = q\vec{l}, \quad (3.8)$$

где

$$\vec{l} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-. \quad (3.9)$$

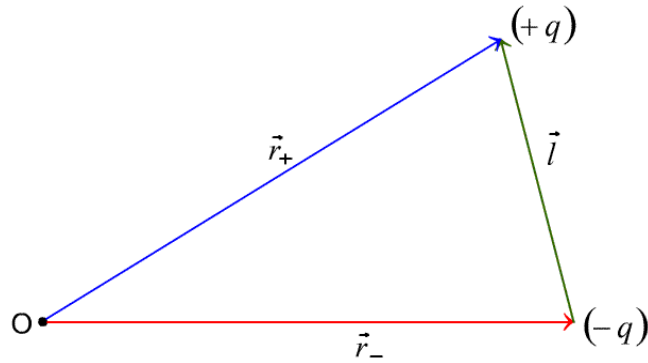


Рис. 3.1. Элементарный диполь

Система, изображенная на рис. 3.1, называется элементарным диполем. Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  вычислим по формуле (1.27):

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = \vec{E}_q + \vec{E}_p, \quad (3.10)$$

где

$$\vec{E}_q = -\nabla \frac{q}{r}, \quad (3.11)$$

$$\vec{E}_p = -\nabla \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}. \quad (3.12)$$

2. Для магнитостатики вычисление поля  $\vec{B}(\vec{r})$  сводится на первом этапе к вычислению потенциала  $\vec{A}(\vec{r})$  на большом расстоянии от системы токов (рис. 2.3).

В этом случае токи можно рассматривать как «тонкие» (линейные). В соответствии с формулой (2.10), связывающей элементы линейных и объемных токов, выражение для  $\vec{A}(\vec{r})$  (2.26) принимает вид

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{J}{c} \oint \frac{d\vec{r}'}{R} \approx \vec{A}_0 + \vec{A}_m. \quad (3.13)$$

Последние два члена  $\vec{A}_0$  и  $\vec{A}_m$  найдем в следующем приближении: когда для величины  $\frac{1}{R}$  берутся первые два члена разложения (3.2). В результате получим

$$\vec{A}_0 = 0, \quad (3.14)$$

так как  $\oint d\vec{r}' = 0$  и

$$\vec{A}_m = \frac{J}{c} \oint d\vec{r}' \frac{(\vec{r} \vec{r}')}{r^3}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим интеграл  $\oint d\vec{r}'(\vec{r} \vec{r}')$ .

Подынтегральное выражение преобразуем следующим образом:

$$d\vec{r}'(\vec{r} \vec{r}') = \frac{1}{2} d\vec{r}'(\vec{r} \vec{r}') + \frac{1}{2} d\vec{r}'(\vec{r} \vec{r}') + \frac{1}{2} \vec{r}'(\vec{r} d\vec{r}') - \frac{1}{2} \vec{r}'(\vec{r} d\vec{r}'). \quad (3.16)$$

Первый и четвертый члены в (3.16) представляют двойное векторное произведение

$$\frac{1}{2} [\vec{r} [d\vec{r}' \times \vec{r}']],$$

а оставшиеся члены сводятся к дифференциалу по координатам вектора  $\vec{r}'$ .

Так как интеграл (3.15) берется по замкнутому контуру, то

$$\oint \frac{1}{2} d' \vec{r}'(\vec{r} \vec{r}') = 0$$

и

$$\vec{A}_m = \frac{J}{2cr^3} \oint [\vec{r} [d\vec{r}' \times \vec{r}']] = \left[ \frac{\vec{r}}{r^3}, -\frac{J}{2c} \oint [\vec{r}' d\vec{r}'] \right]. \quad (3.17)$$

Введем обозначение:

$$\vec{m} = \frac{J}{2c} \oint [\vec{r}' d\vec{r}'] = \frac{1}{2c} \int [\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}')] dV'. \quad (3.18)$$

В формуле (3.18) в последнем выражении мы перешли к объемным токам. Величина  $\vec{m}$ , введенная согласно (3.18), называется магнитным дипольным моментом тока, через который выражается векторный потенциал  $\vec{A}_m$  (3.17) в дипольном приближении:

$$\vec{A}_m = \frac{[\vec{m} \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.19)$$

Напомним, что электростатический потенциал в дипольном приближении имеет вид:

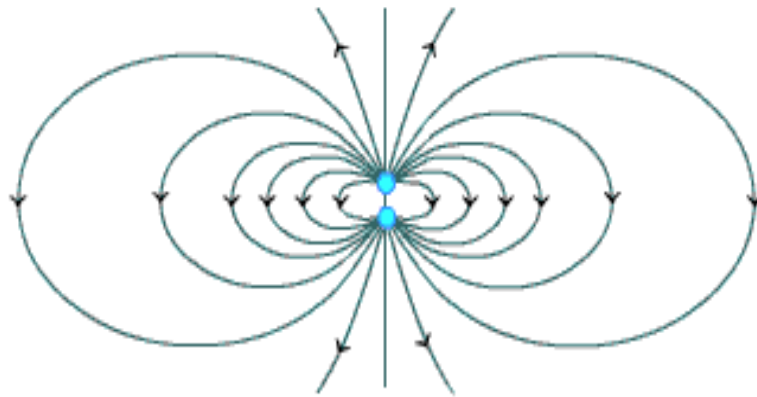
$$\varphi_p = \frac{(\vec{p} \vec{r})}{r^3}.$$

В указанном выше приближении рассчитывается магнитное поле  $\vec{B}(\vec{r})$ :

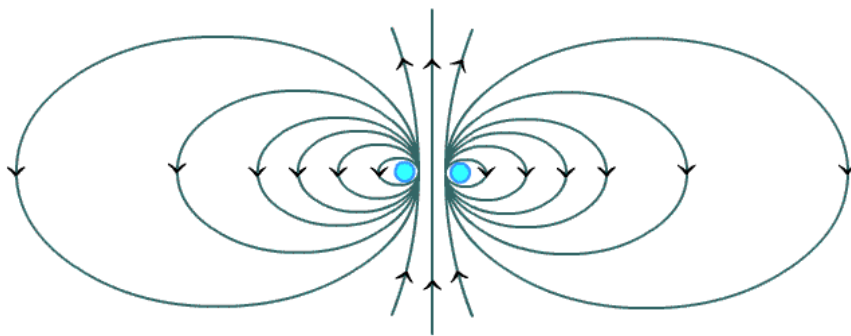
$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot} \frac{1}{r^3} [\vec{m} \vec{r}]. \quad (3.20)$$

Применяя правило вычисления ротора от сложных функций (см. Приложение «Элементы теории поля»), находим

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}(\vec{m} \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}. \quad (3.21)$$



*Рис. 3.2. Электрическое поле пары равных и противоположных по знаку зарядов. На большом расстоянии от кольца оно совпадает с полем электрического диполя*



*Рис. 3.3. Магнитное поле кольца с током. На большом расстоянии от кольца поле совпадает с полем магнитного диполя*

Формула (3.21) с точностью до обозначений совпадает с напряженностью поля электрического диполя (3.12), в которой проведены соответствующие вычисления. Одинакова и форма силовых линий электрического и магнитного диполей (рис. 3.2, рис. 3.3).

### **3.1. Системы зарядов и токов во внешних электрических и магнитных полях**

Пусть имеется система зарядов во внешнем электрическом поле  $\vec{E}(\vec{r})$ , слабо меняющемся в пределах объема  $V$  системы (рис. 1.5).

Силу, действующую со стороны поля  $\vec{E}(\vec{r})$  на заряды, найдем по формуле (1.6):

$$\vec{F} = \int_V \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) dV .$$

Проведем разложение  $\vec{E}(\vec{r})$  в окрестности начала координат в ряд Тейлора:

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \vec{E}(0) + (\vec{r} \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})|_{\vec{r}=0} \quad (3.22)$$

и, подставляя (3.22) в (1.6'), получим

$$\vec{F} = q\vec{E}(0) + (\vec{p} \vec{\nabla}) \vec{E}(0).$$

Если центр облака зарядов находится не в начале координат, а в точке  $\vec{r}$ , то формула (3.22) примет вид

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}) + (\vec{p} \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}). \quad (3.22')$$

Измеряя отклонения частиц, вызванные действием силы (3.22') на систему зарядов, можно найти заряд  $q$  и дипольный электрический момент системы зарядов.

Суммарная сила, действующая на систему зарядов, состоит из отдельных сил  $d\vec{F}$ , действующих на малые части системы, характеризуемые вектором  $\vec{r}$ . Поэтому возникают моменты сил

$$d\vec{N} = [\vec{r} d\vec{F}] \quad (3.23)$$

и суммарный момент

$$\vec{N} = \int_V [\vec{r} \vec{E}] \rho dV. \quad (3.24)$$

Учитывая только первый член разложения (3.22) в (3.24) для  $\vec{E}(\vec{r})$ , находим

$$\vec{N} \approx \int_V [\vec{r} \vec{E}(0)] \rho dV = [\vec{p} \vec{E}(0)] \approx [\vec{p} \vec{E}(\vec{r})]. \quad (3.25)$$

Система зарядов характеризуется дипольным моментом  $\vec{p}$ , который имеет определенную ориентацию по отношению к  $\vec{E}$ . Поэтому на диполь действует не только сила, которая стремится сдвинуть его в пространстве, но и момент сил  $\vec{N}$ , стремящийся ориентировать его по полю.

Аналогичные выводы справедливы и для системы токов, находящихся во внешнем поле  $\vec{B}(\vec{r})$ . В этом случае

$$\vec{F} = (\vec{m} \nabla) \vec{B} \quad (3.26)$$

и

$$\vec{N} = [\vec{m} \vec{B}], \quad (3.27)$$

где  $\vec{m}$  – магнитный дипольный момент системы токов.



### 3.2. Энергия взаимодействия зарядов и токов с внешним полем

Если система зарядов  $\{q_i\}$  находится во внешнем поле  $\vec{E}(\vec{r})$ , то работа, совершаемая полем при бесконечно малом перемещении зарядов, определяется формулой

$$\begin{aligned} dA &= \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i q_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{r}_i = \sum_i q_i \cdot (-\nabla \varphi(\vec{r}_i)) d\vec{r}_i = -\sum_i q_i \cdot d\varphi(\vec{r}_i) = \\ &= -d \sum_i q_i \cdot \varphi(\vec{r}_i) = -dW. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Величина

$$W = \sum_i q_i \cdot \varphi(\vec{r}_i) \quad (3.29)$$

называется энергией взаимодействия системы точечных зарядов  $\{q_i\}$  с внешним полем.

Для непрерывного распределения зарядов

$$W = \int_V \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV. \quad (3.30)$$

Если объем  $V$ , в котором заключены заряды, мал, то можно считать, что потенциал  $\varphi(\vec{r})$  слабо меняется в пределах размера системы. Проводя разложение  $\varphi(\vec{r})$  в ряд Тейлора

$$\varphi(\vec{r}) \approx \varphi(0) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \varphi(0) = \varphi(0) - (\vec{r}, \vec{E}(0)) \quad (3.31)$$

и подставляя (3.31) в формулу (3.30), получим

$$W = q \varphi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0). \quad (3.32)$$

Если центр системы зарядов находится не в начале координат, а в точке  $\vec{r}$ , то

$$W = q \varphi(\vec{r}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}). \quad (3.33)$$

Таким образом, согласно (3.33) энергия взаимодействия  $W$  определяется энергией взаимодействия точечного заряда  $q$  облака и энергией взаимодействия дипольного момента системы с полем  $\vec{E}(\vec{r})$ .

Для токов в магнитном поле

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B}. \quad (3.34)$$

По сравнению с формулой (3.33) здесь отсутствует слагаемое, аналогичное первому члену в (3.33), так как экспериментально не обнаружено существование магнитных «зарядов»-монополей.

## 4. Переменное электромагнитное поле

### 4.1. Закон сохранения электрического заряда

Предположим, что в произвольном объеме  $V$  с поверхностью  $S$ , ограничивающей этот объем, движутся заряды (рис. 4.1), причем плотность распределения зарядов может изменяться с течением времени и к моменту  $t$  суммарный заряд, заключенный в объеме  $V$ , равен:

$$q(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV, \quad (4.1)$$

тогда к моменту времени  $t + \Delta t$  заряд определяется выражением

$$q(t + \Delta t) = \int_V \rho(\vec{r}, t + \Delta t) dV. \quad (4.2)$$

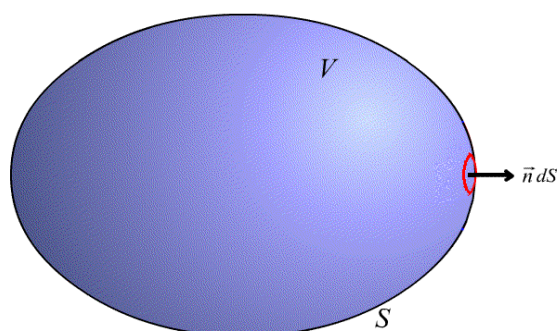


Рис. 4.1. На рисунке показана область  $V$ , ограниченная поверхностью  $S$ , в которой движутся заряды. Для оценки баланса зарядов выделена площадка  $\Delta S$ , через которую заряды входят или выходят за время  $\Delta t$  со скоростью  $\vec{v}$

Оценим баланс зарядов, входящих и выходящих через элемент поверхности  $\Delta S$  за время  $\Delta t$  со скоростью  $\vec{v}$ . Нормаль к элементу поверхности обозначим  $\vec{n}$ . Как видно из рис. 4.2, изменение количества зарядов за время  $\Delta t$  определяется потоком вектора  $\vec{v}$  через поверхность  $\Delta S$  за время  $\Delta t$ .

$$\rho(t) \cdot \Delta S v \Delta t \cdot \cos \alpha = \Delta S \Delta t (\vec{v} \vec{n}), \quad (4.3)$$

а через всю поверхность  $S$ :

$$\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t) = -\Delta t \oint_S \vec{v} \vec{n} \rho(\vec{r}, t) dS. \quad (4.4)$$

Переходя под знаком интегралов (4.1) и (4.2) к пределу

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(\vec{r}, t + \Delta t) - \rho(\vec{r}, t)}{\Delta t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (4.5)$$

получим из формулы (4.4):

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \vec{j} \vec{n} dS, \quad (4.6)$$

где

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (4.7)$$

– плотность электрического тока.

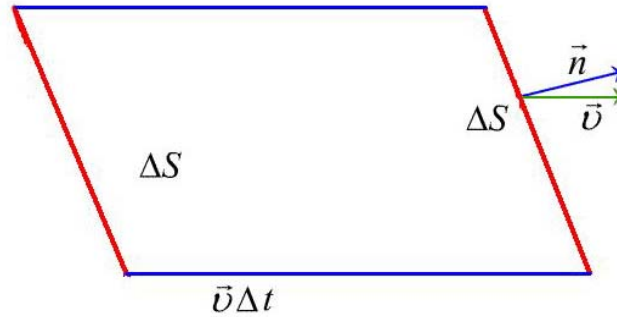


Рис. 4.2. Поток вектора  $\vec{v}$  через элемент поверхности  $\Delta S$

Применяя к правой части (4.6) теорему Остроградского–Гаусса, приходим к дифференциальной форме закона сохранения заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0, \quad (4.8)$$

который справедлив в произвольный момент времени. Уравнение (4.6) представляет интегральную форму закона сохранения заряда.

#### 4.2. Закон электромагнитной индукции

Предположим, что имеется замкнутый проводник, который движется со скоростью  $\vec{V}$  в магнитном поле. Внутри проводника имеются электроны, движущиеся относительно проводника со скоростью  $\vec{v}'$ . Поэтому согласно закону сложения скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}.$$

На электрон с зарядом  $-e$  действует сила Лоренца со стороны магнитного поля  $\vec{B}$ :

$$\vec{f} = -\frac{e}{c} [\vec{v} \vec{B}] = -\frac{e}{c} [\vec{v}' \vec{B}] - \frac{e}{c} [\vec{V} \vec{B}]. \quad (4.9)$$

Первое слагаемое в (4.9) представляет силу, перпендикулярную скорости  $\vec{v}'$ , поэтому величина  $|\vec{v}'|$  не меняется; второе слагаемое ускоряет электрон за счет

$$\vec{E} = \frac{1}{c} [\vec{V} \vec{B}]. \quad (4.10)$$

Вычислим электродвижущую силу (ЭДС), определяемую как циркуляцию вектора  $\vec{E}$  по контуру, роль которого играет проводник:

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} d\vec{r} = \frac{1}{c} \oint_L \left[ \frac{d\vec{l}}{dt} \vec{B} \right] \cdot d\vec{r}. \quad (4.11)$$

Здесь мы использовали выражение для  $\vec{E}$  (4.10) и определение  $\vec{V}$  как скорости изменения положения проводника в магнитном поле:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{l}}{dt}. \quad (4.12)$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в (4.11):

$$[d\vec{l} \vec{B}] \cdot d\vec{r} = [d\vec{r} d\vec{l}] \cdot \vec{B}. \quad (4.13)$$

В формуле (4.13) использовано свойство циклической перестановки векторов в смешанном произведении. Пусть на контур  $L$ , представляющий проводник, опирается поверхность  $S$ .

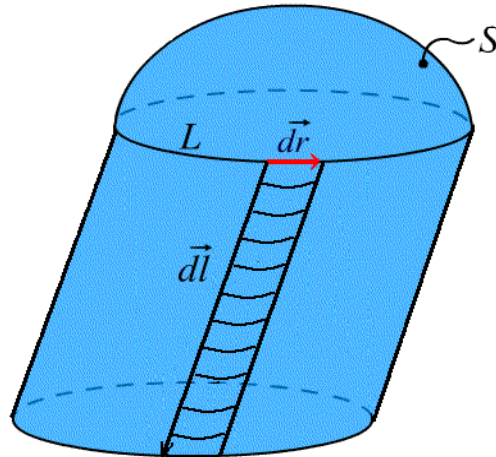


Рис. 4.3. Поступательное движение контура  $L$

Из рис. 4.3 следует, что

$$[d\vec{r} d\vec{l}] = -\vec{n} d\sigma, \quad (4.14)$$

где  $d\sigma$  – величина площади, которую «образует» в пространстве элемент контура  $d\vec{r}$  при смещении на вектор  $d\vec{l}$ , а  $\vec{n}$  – вектор нормали к поверхности.

В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \oint_L \left[ \frac{d\vec{l}}{dt} \vec{B} \right] d\vec{r} &= -\frac{1}{c} \frac{1}{dt} \left\{ \int_{\sigma} (\vec{n} \vec{B}) d\sigma + \int_S (\vec{n} \vec{B}) dS - \int_S (\vec{n} \vec{B}) dS \right\} = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{1}{dt} \left\{ \int_{S+\sigma} (\vec{n} \vec{B}) dS - \int_S (\vec{n} \vec{B}) dS \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В формуле (4.15) мы добавили и вычли интеграл по произвольной поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $L$ .

Поток вектора  $\vec{B}$  через поверхность  $S$  представляет магнитный поток  $\Phi$  через контур  $L$ :

$$\Phi = \int_S (\vec{n} \vec{B}) dS, \quad (4.16)$$

а выражение в фигурных скобках в (4.15) есть неточное, как изменение магнитного потока  $d\Phi$ . Из формул (4.11), (4.16) и (4.15) следует, что

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (4.17)$$

т. е. ЭДС в контуре возникает за счет изменения магнитного потока через контур. Формула (4.17) представляет закон электромагнитной индукции в интегральной форме.

Сформулируем этот закон в дифференциальной форме.

Проводник может оставаться неподвижным, но с течением времени меняется магнитное поле  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , а следовательно, и магнитный поток:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (4.18)$$

Записывая  $\phi(t) = \int \vec{n} \vec{B}(\vec{r}, t) dS$  и  $\phi(t + \Delta t) = \int \vec{n} \vec{B}(\vec{r}, t + \Delta t) dS$ , получим после подстановки этих выражений в (4.18):

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int \vec{n} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS. \quad (4.19)$$

С другой стороны, согласно теореме Стокса,

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} d\vec{r} = \int_S (\vec{n} \text{rot } \vec{E}) dS. \quad (4.20)$$

Из формул (4.17), (4.19) и (4.20) следует закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.21)$$

### 4.3. Уравнения Максвелла для переменного электромагнитного поля

Предположим, что в некоторой области пространства имеется система движущихся зарядов (рис. 4.4). Движущийся электрический заряд является электрическим током. Так как заряд никогда не создается и не исчезает, то плотность заряда  $\rho(\vec{r}, t)$  и плотность тока  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  удовлетворяют закону сохранения заряда в дифференциальной форме, или, иначе, уравнению непрерывности (4.8):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0.$$

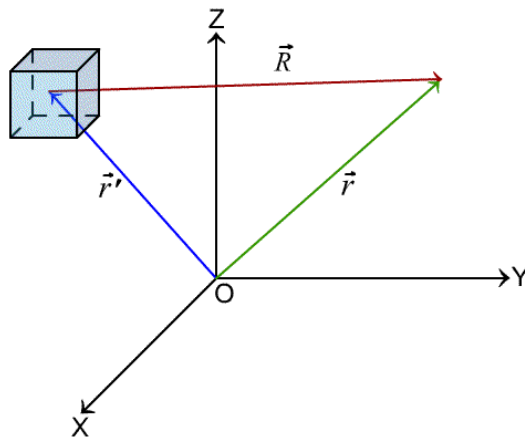


Рис. 4.4. Движение системы зарядов в некоторой области пространства

Кроме того, для движущихся зарядов, как и для неподвижных, справедливо уравнение (1.17):

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho.$$

Отсутствие магнитных зарядов приводит к уравнению (2.29):

$$\text{div } \vec{B} = 0,$$

а согласно закону электромагнитной индукции переменное магнитное поле связано с электрическим, причем эта связь описывается уравнением (4.21):

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Согласно теореме Гельмгольца, для нахождения полей  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  нужно знать дивергенции и роторы этих полей.

В магнитостатике для  $\text{rot } \vec{B}$  справедливо уравнение (2.35):

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j},$$

где  $\vec{j}$  – плотность потока проводимости.

Легко убедиться, что уравнение в виде (2.36б) для меняющихся во времени зарядов и токов не удовлетворяют уравнению непрерывности. В самом деле, взяв  $div$  от обеих частей (2.36б), получим

$$div \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} div j,$$

то есть

$$div \vec{j} = 0.$$

Правильное уравнение для  $\operatorname{rot} \vec{B}$  было предложено Максвеллом. Он исходил из симметрии электрического ( $\vec{E}$ ) и магнитного ( $\vec{B}$ ) полей в уравнениях. Уравнение, содержащее  $\operatorname{rot} \vec{B}$ , он записал в виде

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{cm}), \quad (4.22)$$

добавив в правую часть плотность тока смещения:

$$\vec{j}_{cm} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.23)$$

При этом выполняется закон сохранения заряда (4.8) в дифференциальной форме и уравнения для переменных полей переходят в уравнения магнитостатики и электростатики, если  $\rho$  и  $\vec{j}$  не зависят от времени.

Запишем уравнения Максвелла для переменных полей:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.24a)$$

$$div \vec{E} = 4\pi \rho, \quad (4.24б)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (4.24в)$$

$$div \vec{B} = 0. \quad (4.24г)$$

Гипотеза Максвелла о токах смещения сводится к утверждению, что переменные электрические поля являются источниками магнитных полей. Это открытие целиком принадлежит Максвеллу, и оно аналогично открытию электромагнитной индукции, сущность явления которой состоит в том, что переменные магнитные поля возбуждают электрические поля.

Приведем систему уравнений Максвелла также и в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{r} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (4.25a)$$

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = 4\pi \int \rho dV, \quad (4.25б)$$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left( \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad (4.25в)$$

$$\int_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0. \quad (4.25г)$$

#### 4.4. Решение уравнений Максвелла

В электростатике решение уравнения Максвелла (1.25) находится в виде (1.27)

$$\vec{E} = -\nabla \varphi,$$

где электрический потенциал  $\varphi(\vec{r})$  удовлетворяет уравнению Пуассона (1.28)

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho,$$

имеющему решение (1.30)

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R}.$$

В магнитостатике решением уравнения Максвелла (2.36) является (2.27)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}),$$

а векторный потенциал  $\vec{A}(\vec{r})$  находим из уравнения (2.28)

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

в виде (2.26)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R}.$$

Из фундаментальной системы уравнений Максвелла (4.24) можно также найти поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , выражающиеся через скалярный и векторный потенциалы.

Из уравнения (4.24г) сразу следует, что

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (4.26)$$



Подставляя (4.26) в уравнение (4.24а), находим

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Уравнение удовлетворяется, если

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi.$$

Таким образом, поля выражаются через неизвестные пока потенциалы  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  и  $\varphi(\vec{r}, t)$ :

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (4.27)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (4.28)$$

Найдем  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  и  $\varphi(\vec{r}, t)$ . Подставим (4.27), (4.28) в уравнение (4.24в):

$$\text{rot rot } \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \quad (4.29)$$

Так как

$$\text{rot rot } \vec{A} = \vec{\nabla}(\text{div } \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}, \quad (4.30)$$

то уравнение (4.29) примет вид

$$-\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} + \nabla \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.31)$$

Подстановка полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в уравнение (4.24б) приводит к выражению

$$\text{div} \left( -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 4\pi \rho.$$

Добавим к левой части уравнения и вычтем из него член  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ , после чего получим:

$$-\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 4\pi \rho. \quad (4.32)$$

Оператор  $\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  называется оператором Даламбера:

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

В этих обозначениях уравнения (4.31) и (4.32) принимают вид:

$$-\square \vec{A} + \nabla \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (4.31a)$$

$$-\square \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 4\pi \rho. \quad (4.32a)$$

Уравнения станут значительно проще, если удастся доказать, что

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (4.33)$$

Действительно, выбрав потенциалы

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} x(\vec{r}, t); \quad (4.34)$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla x(\vec{r}, t), \quad (4.35)$$

где  $x(\vec{r}, t)$  – произвольная функция, легко убедиться, что физические поля  $\vec{E}'$  и  $\vec{B}'$ , записанные через новые потенциалы, совпадают с полями  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , записанными через прежние потенциалы, т. е.  $\vec{E}' = \vec{E}$ ,  $\vec{B}' = \vec{B}$ .

На самом деле, существует бесчисленное множество потенциалов, приводящих к одним и тем же полям. Разумно предположить, что среди них будут и такие, что

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Если же

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(\vec{r}, t) \neq 0,$$

то вычисления с потенциалами (4.34) и (4.35) приводят к выражению

$$\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \operatorname{div} (\vec{A} + \nabla x) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial t} \right) = f(\vec{r}, t).$$

Выбрав функцию  $x(\vec{r}, t)$  такой, что выполняется уравнение

$$\square x = -f,$$

приходим к условию:  $\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0$ .

Таким образом, всегда можно считать, что имеют место уравнения Даламбера:

$$\square \varphi = -4\pi\rho, \quad (4.36)$$

$$\square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad (4.37)$$

с дополнительным условием Лоренца

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (4.38)$$

Уравнения (4.36) и (4.37) вместе с условием (4.33) представляют систему уравнений, полностью эквивалентную уравнениям Максвелла.

#### 4.5. Запаздывающие потенциалы

Предположим, что в волновых уравнениях

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho(\vec{r}, t),$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)$$

источники  $\rho$  и  $\vec{j}$  являются произвольными функциями координат и времени и распределены в конечной области пространства. В этом случае можно найти решения неоднородных уравнений (4.36), то есть потенциалы  $\varphi(\vec{r}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , создаваемые этими источниками во всем безграничном пространстве. Несмотря на то, что создаваемые заряженными частицами поля могут влиять на их движение, но часто этим влиянием можно пренебречь. Решение поставленной задачи находят с помощью функции Грина  $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ , определяемой как решение уравнения

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$$

для безграничного пространства.

Тогда решение волнового уравнения (4.37) записывается с помощью функции Грина в виде

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \vec{j}(\vec{r}', t') dV' dt'. \quad (4.39)$$

Подобное выражение записывается и для  $\varphi(\vec{r}, t)$ . Действуя оператором Даламбера на потенциалы, легко убедиться, что уравнение (4.36) удовлетворяется. Тщательный математический анализ показывает, что на самом деле уравнению (4.38) удовлетворяет большой класс функций Грина, при использовании которых получают различные решения для  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ . Чтобы выделить единственное решение, соответствующее поставленной задаче, оказывается достаточным привлечь принцип

причинности. Согласно этому принципу причина (движение зарядов в источнике, приводящее к излучению) предшествует следствию (возбуждению поля в точке наблюдения). Потенциалы, удовлетворяющие этому условию, называют запаздывающими. Не останавливаясь на математически строгом доказательстве единственности этого выбора, который можно найти, например, в монографии Джексона или курсе М.М. Бредова, В.В. Румянцева, И.Н. Топтыгина «Классическая электродинамика». Заметим, что запаздывающая функция Грина имеет вид

$$G^R(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{R} \delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right), \quad (4.40)$$

где  $\vec{R} = |\vec{r} - \vec{r}'|$  и запаздывающие потенциалы можно записать следующим образом:

$$\varphi^R(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV', \quad (4.41a)$$

$$\vec{A}^R(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV'. \quad (4.41b)$$

Из уравнений (4.41) следует, что поле в точке  $\vec{r}$  в момент  $t$  определяется состоянием источников в предшествующий момент времени  $t' = t - \frac{R}{c}$ , который отличается на время распространения электромагнитного возмущения от источника до точки наблюдения.

#### **4.6. Энергия электромагнитного поля. Вектор Умова–Пойнтинга**

Предположим, что заряды, распределенные в пространстве с плотностью  $\rho(\vec{r}, t)$ , движутся в электромагнитном поле  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ . На заряд, находящийся в объеме  $dV$ , действует сила Лоренца:

$$\rho dV \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{B}] \right\}, \quad (4.42)$$

и при перемещении зарядов на пути  $d\vec{r}$  совершается работа

$$\rho dV \left\{ \vec{E} d\vec{r} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{B}] d\vec{r} \right\}. \quad (4.43)$$

Разделив (4.43) на время  $dt$ , получим работу, совершаемую в единицу времени,

$$\rho dV \left\{ \vec{E} \vec{v} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{B}] \cdot \vec{v} \right\} = \vec{j} \vec{E} dV . \quad (4.44)$$

Здесь мы учли, что второй член равен нулю и  $\rho \vec{v} = \vec{j}$ .

Работа, совершаемая полем над всеми зарядами в единицу времени, равна:

$$\frac{dA}{dt} = \int (\vec{j} \vec{E}) dV = \frac{dT}{dt} , \quad (4.45)$$

где  $T$  – кинетическая энергия всех зарядов рассматриваемой системы.

Преобразуем уравнения Максвелла (4.24а) и (4.24в). Умножим скалярно  $\vec{B}$  на  $\text{rot } \vec{E}$  и вычтем  $\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}$ :

$$\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} = \text{div} [\vec{E} \vec{B}] . \quad (4.46)$$

С другой стороны, получим

$$-\frac{1}{c} \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E} ,$$

то есть приходим к соотношению

$$\text{div} [\vec{E} \vec{B}] = -\frac{4\pi}{c} (\vec{j} \vec{E}) - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (B^2 + E^2) ,$$

которое удобно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = -(\vec{j} \vec{E}) - \text{div} \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{B}] . \quad (4.47)$$

Введем обозначения:

$$\omega = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} , \quad (4.48)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{B}] . \quad (4.49)$$

Физический смысл этих величин можно установить, проинтегрировав обе части уравнения (4.47) по пространственным переменным. Сначала проинтегрируем это уравнение по всему бесконечному пространству, то есть  $x, y, z$  меняются от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$\int \frac{\partial \omega}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \int \omega dV \equiv \frac{d}{dt} W , \quad (4.50)$$

где

$$\int \omega dV = W , \quad (4.51)$$

$$\int_{\infty} (\vec{j} \vec{E}) dV = \frac{dT}{dt}, \quad (4.52)$$

$$\int_{\infty} \text{div} \vec{S} dV = \oint_{\infty} \vec{S} \vec{n} dS = 0. \quad (4.53)$$

При записи (4.53) использована теорема Остроградского–Гаусса, которая интеграл от дивергенции вектора  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{B}]$  сводит к потоку вектора  $\vec{S}$  через бесконечную поверхность. Но на бесконечности поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , входящие в выражение для  $\vec{S}$ , равны нулю по физическим соображениям.

В результате приходим к уравнению

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dT}{dt},$$

или

$$\frac{d}{dt}(W + T) = 0. \quad (4.54)$$

Сохраняющаяся величина  $W + T$  представляет суммарную энергию движущихся зарядов  $T$  и энергию электромагнитного поля  $W$ .

Величина  $\omega$  представляет собой плотность энергии электромагнитного поля. Физический смысл вектора  $\vec{S}$  выясним, проинтегрировав уравнение (4.47) по конечному пространству:

$$\frac{d}{dt} W_V = -\frac{dT_V}{dt} - \oint \vec{S} \vec{n} dS. \quad (4.55)$$

Энергия электромагнитного поля расходуется на кинетическую энергию движения зарядов и излучаемую энергию электромагнитного поля через поверхность, охватывающую рассматриваемый объем  $V$ . Поэтому величина  $(\vec{S} \vec{n}) dS$  представляет энергию электромагнитного поля, которая излучается через площадь  $dS$  в единицу времени. Вектор  $\vec{S}$  указывает направление распространения электромагнитной энергии, а  $S = |\vec{S}|$  – количество энергии, проходящей через  $1 \text{ см}^2$  за 1 сек. Величина  $\vec{S}$  называется плотностью потока энергии, или вектором Умова–Пойнтинга. Вектор  $\vec{S}$  зависит от положения в пространстве в данный момент времени:

$$\vec{S} \equiv \vec{S}(\vec{r}, t).$$

Формулы, полученные выше, выражают закон сохранения энергии для зарядов, движущихся в электромагнитном поле, созданном этими зарядами.

## 5. Распространение электромагнитных волн в вакууме и в средах

### 5.1. Волновые уравнения

Из уравнений максвелловской электродинамики следует существование принципиально нового физического явления, открытого самим Максвеллом. Этим физическим явлением являются электромагнитные волны, или возмущения, которые распространяются в пространстве с определенной скоростью. Рассмотрим уравнения Максвелла (4.24), записанные для вакуума в присутствии электрических зарядов с плотностью  $\rho$  и электрических токов с плотностью  $\vec{j}$ . Уравнения не симметричны по отношению к полям  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , и эта асимметрия обусловлена наличием токов и зарядов и отсутствием магнитных зарядов. Положим в этих уравнениях:  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ . Уравнения примут симметричный вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (5.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (5.4)$$

Член уравнения (5.3)  $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , связанный с током смещения, играет здесь первостепенную роль. Наличие его в уравнении (5.3), так же как и подобного ему члена для магнитного поля в уравнении (5.1), означает возможность появления электромагнитных волн. Переменное во времени магнитное поле порождает переменное электрическое поле, последнее порождает, в свою очередь, переменное магнитное поле, которое порождает ... и т. д. (рис. 5.1). Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{k}$ , характеризующие электромагнитную волну, образуют тройку взаимно перпендикулярных векторов. Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  совершают синхронные гармонические колебания в плоскостях  $XY$  и  $ZX$ , соответственно.

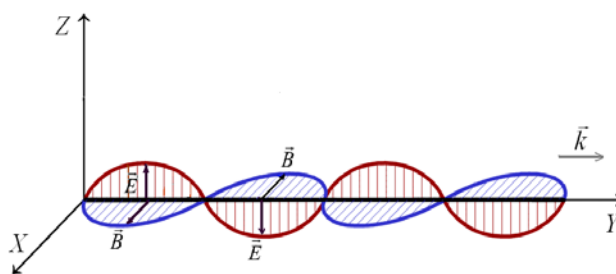


Рис. 5.1. Распространение электромагнитной волны

Одним из величайших открытий Максвелла является установление того факта, что электромагнитные волны могут распространяться на огромные расстояния от источника, где их можно зарегистрировать соответствующим прибором. Развивая математическую теорию электромагнитного поля, Максвелл обнаружил, что электромагнитные волны распространяются со скоростью, равной скорости света, которая в то время уже была известна из измерений О. Рёмера и других ученых. Сопоставление этих фактов, а также понимание того, что и электромагнитное излучение, и свет имеют волновую природу, позволили Максвеллу отнести свет к электромагнитным явлениям. Различные теории света существовали и до Максвелла. Но только электромагнитной теории Максвелла удалось объяснить все известные в то время световые явления. В частности, удалось предсказать, как свет будет вести себя, проходя через различные среды. Как известно, солнечный свет содержит все цвета от красного до фиолетового, в сочетании же они создают ощущение белого света. Иначе, это означает, что белый (солнечный) свет представляет собой комбинацию широкого интервала частот в интервале  $(4 \div 10)^{14}$  Гц. Последующие открытия и изучения свойств ультрафиолетового, инфракрасного, рентгеновского излучения, открытого К. Рентгеном в 1895 г., и жесткого  $\gamma$ -излучения, привели к осознанию того, что все эти виды излучения имеют электромагнитную природу. Спектр электромагнитного излучения простирается в интервале частот  $10^3 \div 10^{23}$  Гц.

Экспериментальное подтверждение существования электромагнитных волн выполнил Генрих Герц, создавший генератор электромагнитных волн (вibrator Герца) и осуществивший их прием с помощью резонатора (резонатора Герца). Передатчик и приемник находились на некотором расстоянии друг от друга. Затем последовали выдающиеся открытия, совершенно преобразившие быт и технологии человеческого общества:

- в 1892 г. Уильям Крукс изобрел беспроводный телеграф;
- в 1894 г. Оливер Джозеф Лодж осуществил передачу электромагнитных волн на короткие расстояния;
- русский ученый А.С. Попов изобрел радио, но не запатентовал это открытие;
- в 1897 г. Гульемо Маркони запатентовал свою идею о передаче электромагнитных волн на далекие расстояния и вскоре осуществил радиопередачу человеческой речи;
- в 1907 г. Ли де Форест изобрел первую электронную лампу и стала возможной передача музыки и речи по радио.



Список открытий и применений электромагнитной теории Максвелла можно было бы продолжать и далее.

## 5.2. Плоские волны

Из уравнений (5.1–5.4) получим уравнения второго порядка для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  по отдельности. Применяя операцию *rot* к уравнению (5.1), получим с использованием уравнения (5.3):

$$\text{rot rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (5.5)$$

Левую часть уравнения запишем:

$$\text{rot rot}\vec{E} = [\nabla[\nabla\vec{E}]] = \nabla(\nabla\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}, \quad (5.6)$$

так как

$$\text{div}\vec{E} = (\nabla\vec{E}) = 0.$$

В итоге приходим к уравнению Даламбера:

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.7)$$

Аналогичное уравнение получаем для поля  $\vec{B}$ :

$$\nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.8)$$

В отсутствие зарядов и токов подобные уравнения имеют место и для скалярного и векторного потенциалов  $\varphi$  и  $\vec{A}$  из уравнений (4.34), полученных при дополнительном условии Лоренца (4.33):

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (5.9)$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.10)$$

Более того, как мы увидим в следующей главе, подобные уравнения справедливы и для электродинамики в непроводящих средах, для которых в уравнения Максвелла входят постоянные диэлектрическая  $\epsilon$  и магнитная  $\mu$  проницаемости.

Любая декартова составляющая векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{A}$  и скалярный потенциал  $\varphi$  удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (5.11)$$

где постоянная

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (5.12)$$

в волновом уравнении (5.11), имеющая размерность скорости, является характеристикой среды. Для вакуума  $v = c$ , где  $c$  – скорость света.

Волновое уравнение (5.11) имеет решение в виде плоской волны:

$$u(\vec{r}, t) = e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}, \quad (5.13)$$

где частота  $\omega$  и модуль волнового вектора  $\vec{k}$  связаны соотношением:

$$k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\omega}{c}. \quad (5.14)$$

Для вакуума

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (5.15)$$

Если рассматривать волны, распространяющиеся в одном направлении, например, вдоль оси  $x$ , то общим решением уравнения (5.11) является:

$$u_k(x, t) = Ae^{ik(x-vt)} + Be^{-ik(x+vt)}. \quad (5.16)$$

Для скорости  $v$ , не зависящей от  $k$  (это имеет место в случае недиспергирующей среды, для которой величина  $\mu\varepsilon$  не зависит от частоты  $\omega$ ), можно воспользоваться разложением функции  $u(x, t)$  в интеграл Фурье и с помощью линейной суперпозиции  $u_k(x, t)$  построить общее решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5.17)$$

в виде

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt), \quad (5.18)$$

где  $f$  и  $g$  – произвольные функции аргументов  $x - vt$  и  $x + vt$ , соответственно.

Можно убедиться, что функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют уравнению вида (5.7). Проверим это для функции  $f(x - vt)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v f', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = +v^2 f'', \quad \frac{\partial f}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f'', \quad (5.19)$$

где  $f'$  – произвольная по аргументу функции.

На основании (5.19) получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Функции  $f(x - vt)$  и  $g(x + vt)$  описывают волны, движущиеся, соответственно, в положительном и отрицательном направлении по оси  $x$ .

Если в некоторый момент  $t$  функция  $f(x - vt)$  представляла некоторую кривую (а), то в момент  $t + \Delta t$  она представляет ту же кривую, сдвинутую в положительном направлении оси  $x$  на  $v\Delta t$ , то есть она представляет собой волну, движущуюся со скоростью  $v$  в положительном направлении по оси  $x$  (рис. 5.1). Функция  $g(x + vt)$  представляет волну, движущуюся со скоростью  $v$  в направлении отрицательных значений оси  $x$ . Отсюда понятен смысл введенного обозначения:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Скорость  $v$  называется фазовой скоростью волны.

Плоские волны, удовлетворяющие скалярному уравнению (5.11), определяются соотношениями (5.13) и (5.14). Электрические и магнитные поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  должны соответствовать действительным частям комплексных величин:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= (\vec{e}_1 E_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}) = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= (\vec{e}_2 B_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}) = \text{Re}(\vec{B}_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}).\end{aligned}\quad (5.20)$$

В другой записи вектор  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_0), \quad (5.21)$$

причем

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_0 e^{i\varphi_0} = \vec{e}_1 E_0. \quad (5.22)$$

Подобные соотношения имеют место и для вектора  $\vec{B}_0$ . Здесь векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  – единичные постоянные векторы, а  $E_0$  и  $B_0$  – комплексные амплитуды, постоянные в пространстве и во времени.

Из уравнений (5.2) и (5.4) следуют соотношения:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{k} = 0 \quad (5.23)$$

и

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{k} = 0, \quad (5.24)$$

которые означают, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  перпендикулярны направлению распространения волны  $\vec{k}$ .

Такие волны называют поперечными.

Из уравнения Максвелла для непроводящей среды без источников в неограниченном пространстве

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

с учетом (5.20) получим

$$i \left\{ \left[ \vec{k} \vec{e}_1 \right] E_0 - \frac{\omega}{c} \vec{e}_2 B_0 \right\} e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} = 0.$$

Последнее соотношение означает, что

$$\vec{e}_2 = \left[ \hat{k} \vec{e}_1 \right] \quad (5.25)$$

и

$$B_0 = \sqrt{\mu \varepsilon} E_0, \quad (5.26)$$

где

$$\hat{k} = \vec{k} / k. \quad (5.27)$$

Таким образом, на основании формул (5.23)–(5.25) следует, что векторы  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{k}$  образуют правую систему ортогональных векторов, а из формул (5.20) заключаем, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  колеблются в фазе и отношение  $\vec{E}$  к  $\vec{B}$  постоянно. В вакууме

$$B_0 = E_0. \quad (5.28)$$

При вычислении средних по периоду поля  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  квадратичных величин удобно пользоваться формулами для комплексных величин:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-i\omega t} \text{ и } \vec{B} = \vec{B}_0 e^{-i\omega t}. \quad (5.29)$$

В этом случае

$$\overline{A^2} = \left[ \operatorname{Re}(\vec{A}_0 e^{-i\omega t}) \right]^2 = |A_0|^2 / 2 = |\vec{A}|^2 / 2, \quad (5.30)$$

$$\overline{AB} = \left[ \operatorname{Re}(\vec{A}_0 e^{-i\omega t}) \right] \cdot \left[ \operatorname{Re}(\vec{B}_0 e^{-i\omega t}) \right] = \frac{1}{4} (\vec{A}_0 \vec{B}_0^* + \vec{A}_0^* \vec{B}_0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{A} \vec{B}^*). \quad (5.31)$$

Так, например, средний по времени поток энергии определяется как

$$\overline{\vec{S}} = \overline{\frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re}[\vec{E} \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}^*] \quad (5.32)$$

и представляет поток (то есть энергию, проходящую в единицу времени через единицу площади), равный

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |E_0|^2 \vec{e}_3, \quad (5.33)$$

где  $\vec{e}_3$  – единичный вектор в направлении  $\vec{k}$ :

$$\vec{e}_3 = \hat{k} = \frac{\vec{k}}{k}. \quad (5.34)$$

Средняя по периоду плотность энергии

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \frac{1}{8\pi} \left( \varepsilon \vec{E} \vec{E}^* + \frac{1}{\mu} \vec{B} \vec{B}^* \right), \quad (5.35)$$

с учетом (5.20), (5.26), равна:

$$\bar{\omega} = \frac{\varepsilon}{4\pi} |E_0|^2. \quad (5.36)$$

Скорость потока энергии определяется как отношение абсолютных величин (5.32) и (5.36) и оказывается равной

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \quad (5.37)$$

Для вакуума  $\mu = \varepsilon = 1$  и  $v = c$ .

### 5.3. Поляризация плоской волны

В этом разделе выясним свойства амплитуды  $\vec{E}_0$  плоской монохроматической волны. Если волна (5.20) описывается с помощью комплексного вектора  $\vec{E}_0$ , то можно разложить  $\vec{E}_0$  на два действительных вектора:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{01} + i\vec{E}_{02}. \quad (5.38)$$

Подставляя (5.20) в систему уравнений (5.1–5.4), получим связь между комплексными амплитудами полей:

$$\vec{B}_0 = [\hat{k} \vec{E}_0], \quad \vec{E}_0 = [\vec{B}_0 \hat{k}], \quad \hat{k} \vec{E}_0 = 0, \quad \hat{k} \vec{B}_0 = 0, \quad (5.39)$$

где в уравнении (5.27)

$$\hat{k} = \frac{\vec{k}}{k} = c \frac{\vec{k}}{\omega}$$

– единичный вектор в направлении распространения волны.

Из условий (5.39) следует, что векторы  $\vec{E}_{01}$  и  $\vec{E}_{02}$  перпендикулярны вектору  $\vec{k}$ , в остальном же их можно считать произвольными. Поэтому выделим из (5.38) фазовый множитель  $e^{i\varphi_0}$  так, чтобы оставшиеся два действительных вектора были взаимно перпендикулярны:

$$\vec{E}_0 = (\vec{\varepsilon}_1 + i\vec{\varepsilon}_2)e^{i\varphi_0}, \quad (5.40)$$

$$\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0. \quad (5.41)$$

Из (5.40) и (5.41) найдем:

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_1 &= \vec{E}_{01} \cos \varphi_0 + \vec{E}_{02} \sin \varphi_0, \\ \vec{\varepsilon}_2 &= -\vec{E}_{01} \sin \varphi_0 + \vec{E}_{02} \cos \varphi_0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

и из условия перпендикулярности (5.41) получим значение фазы  $\varphi_0$ :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}}{E_{01}^2 - E_{02}^2}. \quad (5.43)$$

Тогда вещественную часть  $\vec{E}$ , представляющая наблюдаемое поле, запишем в виде

$$\vec{E} = \vec{\varepsilon}_1 \cos(\vec{k}r - \omega t + \varphi_0) + \vec{\varepsilon}_2 \sin(\vec{k}r - \omega t + \varphi_0). \quad (5.44)$$

Пусть векторы  $\vec{\varepsilon}_1$  и  $\vec{\varepsilon}_2$  направлены по осям  $x$  и  $y$ , соответственно. Тогда уравнение кривой, которой описывает конец вектора  $\vec{E}$ , имеет вид

$$\frac{E_x^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{E_y^2}{\varepsilon_2^2} = 1, \quad (5.45)$$

то есть представляет собой эллипс с полуосями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . В этом случае говорят, что волна имеет эллиптическую поляризацию. Если векторы  $\vec{\varepsilon}_1$ ,  $\vec{\varepsilon}_2$ ,  $\vec{k}$  образуют правую или левую тройку векторов, то направление вращения называется, соответственно, левым или правым. Направления вращения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  совпадают, но вектор магнитного поля описывает эллипс, оси которого повернуты относительно осей вектора  $\vec{E}$  на  $\pi/2$ .

При  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  получается круговая поляризация, которая также имеет два направления вращения. При  $\varepsilon_1 \neq 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$  или  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 \neq 0$  поляризация становится линейной, и электрический и магнитный векторы совершают колебания вдоль определенных взаимно перпендикулярных направлений. Итак, при заданном  $\vec{k}$  возможны две независимые поляризации плоской монохроматической волны – эллиптическая (в частном

случае – круговая) с правым и левым направлением вращения или две линейные поляризации во взаимно перпендикулярных направлениях.

## 6. Излучение нерелятивистской системы заряженных частиц

### 6.1. Электрическое дипольное излучение

В разделе 4.5 получены формулы (4.41) для запаздывающих потенциалов. Задача заключается в следующем: по заданным распределениям источников  $\rho$  и  $\vec{j}$  в некоторой ограниченной области пространства (рис. 6.1) найти сначала потенциалы, а затем с их помощью вычислить поля  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ .

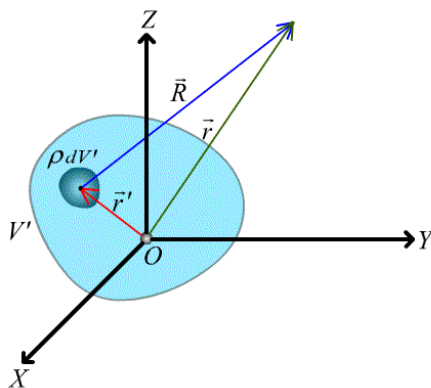


Рис. 6.1. Движение зарядов в некоторой области пространства  $V'$ . Вектор  $\vec{r}'$  проведен в точку, содержащую точечный заряд  $\rho dV'$ , вектор  $\vec{r}$  – в точку наблюдения

Решение задачи значительно упрощается, если время распространения электромагнитных возмущений в пределах излучающей системы зарядов мало, по сравнению с характерным временем движения заряженных частиц в системе:

$$l/c \ll T, \quad (6.1)$$

где  $l$  – линейный размер системы,  $T$  – время, в течение которого распределение зарядов меняется несущественно. Если заряды совершают периодическое движение, то  $T$  – период и неравенство имеет вид

$$l \ll \lambda, \quad (6.2)$$

где  $\lambda = cT$  – длина волны излучения.

Разделив обе части неравенства (6.2) на  $T$ , с учетом того, что характерная скорость частиц  $\frac{l}{T} \approx v$ , приходим к условию

$$v/c \ll 1, \quad (6.3)$$

то есть к требованию, чтобы частицы обладали нерелятивистской скоростью. Кроме того, предполагаем, что размеры системы малы в сравнении с расстоянием до точки наблюдения:

$$l \ll r. \quad (6.4)$$

Область, определяемая условиями  $r \gg l$  и  $r \gg \lambda$ , называется волновой зоной. В этой области запаздывающие потенциалы можно упростить. Рассмотрим сначала запаздывающий потенциал

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{1}{R} \rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right) dV', \quad (6.5)$$

где  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ .

Если  $r$  велико, то

$$R \approx r \left(1 - \frac{\vec{r} \vec{r}'}{r^2}\right) = r - \vec{\Omega} \vec{r}', \quad (6.6)$$

где

$$\vec{\Omega} = \vec{r}/r. \quad (6.7)$$

Представим плотность зарядов, стоящую под интегралом, в виде разложения:

$$\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{\Omega} \vec{r}'}{c}\right) \equiv \rho(\vec{r}'; \tau + \Delta\tau) \approx \rho(\vec{r}'; \tau) + \frac{\partial \rho(\vec{r}'; \tau)}{\partial \tau} \cdot \Delta\tau, \quad (6.8)$$

где

$$\tau = t - \frac{r}{c}, \quad (6.9)$$

$$\Delta\tau = \frac{\vec{\Omega} \vec{r}'}{c}. \quad (6.10)$$

В знаменателе под интегралом (6.5) для  $R$  можно ограничиться нулевым приближением

$$R(r) \approx r \quad (6.11)$$

с точностью  $l/r \ll 1$ .

Подставляя (6.8) в (6.5) и учитывая (6.9) и (6.10), получим

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \int \left\{ \rho(\vec{r}'; \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \rho(\vec{r}'; \tau) \cdot \frac{\vec{\Omega} \vec{r}'}{c} \right\} dV' = \frac{q}{r} + \frac{\vec{\Omega}}{cr} \dot{\vec{p}}(\tau) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{\Omega} \dot{\vec{p}}}{cr}. \quad (6.12)$$

Здесь  $q$  – заряд системы,  $\vec{p}$  – дипольный момент системы, зависящий от  $\tau$ . При вычислении второго интеграла производная по времени  $\tau$  вынесена за знак интеграла. Точкой обозначена производная по  $\tau$ .



$$\dot{\vec{p}} = \frac{\partial \vec{p}(\tau)}{\partial \tau}. \quad (6.13)$$

Для векторного потенциала находим

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}; t - \frac{R}{c})}{R} dV' \approx \frac{1}{cr} \int dV' \left\{ \vec{j}(\vec{r}'; \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \vec{j}(\vec{r}'; \tau) \cdot \frac{\vec{\Omega} \vec{r}'}{c} \right\}.$$

Второй член исчезающе мал, поэтому получим

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}'; t - \frac{\vec{r}}{c}) dV'. \quad (6.14)$$

Воспользуемся далее тождеством

$$\vec{a} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \nabla' (\vec{a} \cdot \vec{r}') = \nabla' \cdot [\vec{j} (\vec{a} \cdot \vec{r}')] - (\vec{a} \cdot \vec{r}') (\nabla' \cdot \vec{j}), \quad (6.15)$$

где  $\vec{a}$  – постоянный вектор, и получим

$$\vec{a} \cdot \int \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{\vec{r}}{c}) dV' = \int \nabla' \cdot [\vec{j} (\vec{a} \cdot \vec{r}')] dV' - \vec{a} \int \vec{r}' \cdot \text{div}' \vec{j} dV'. \quad (6.16)$$

Первый интеграл в правой части равен нулю, следовательно

$$\vec{a} \cdot \int \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{\vec{r}}{c}) dV' = -\vec{a} \int \vec{r}' \cdot \text{div}' \vec{j} dV'. \quad (6.17)$$

Используя уравнение непрерывности

$$\text{div} \vec{j}(\tau) + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0,$$

находим из (6.17) уравнения:

$$\vec{a} \cdot \int \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{\vec{r}}{c}) dV' = \dot{\vec{p}}(\tau) \quad (6.18)$$

и

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{p}}(\tau)}{cr}. \quad (6.19)$$

Формулы (6.12) и (6.19) дают электромагнитные потенциалы на большом расстоянии от системы излучающих зарядов, то есть в дипольном приближении.

Найдем электромагнитные поля в дипольном приближении.

Для этого нужно вычислить:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (6.20)$$

и

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (6.21)$$

Для электрически нейтральных систем ( $q = 0$ ) в формуле (6.12) нет первого члена:

$$\varphi = \frac{\bar{\Omega} \dot{\vec{p}}}{cr}. \quad (6.22)$$

При вычислении полей (6.20) и (6.21) нужно принять во внимание, что  $\dot{\vec{p}} \equiv \dot{\vec{p}}(\tau)$ , где  $\tau = t - \frac{r}{c}$  и  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , то есть время  $\tau$  зависит от координат точки наблюдения.

Вычислим  $\nabla \tau$ :

$$\nabla \tau = -\frac{1}{c} \nabla r = -\frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\bar{\Omega}}{c}. \quad (6.23)$$

Применяя оператор  $\nabla$  к функции  $f(\tau)$ , находим

$$\nabla f = \frac{df}{d\tau} \nabla \tau = -\frac{\bar{\Omega}}{c} \frac{d}{d\tau} f(\tau), \quad (6.24)$$

то есть

$$\nabla = -\frac{\bar{\Omega}}{c} \frac{d}{d\tau}. \quad (6.25)$$

Если имеется векторная функция  $\vec{F}(\tau)$ , то

$$\operatorname{div} \vec{F}(\tau) = (\bar{\nabla}, \vec{F}) = -\frac{1}{c} \left( \bar{\Omega}, \frac{d\vec{F}}{d\tau} \right) = -\frac{1}{c} (\bar{\Omega}, \dot{\vec{F}}) \quad (6.26)$$

и

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\tau) = [\bar{\nabla}, \vec{F}] = -\frac{1}{c} [\bar{\Omega}, \dot{\vec{F}}]. \quad (6.27)$$

Найдем поле  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \frac{1}{cr} \dot{\vec{p}} = \left[ \nabla, \frac{\dot{\vec{p}}}{cr} \right] = \frac{1}{cr} [\nabla, \dot{\vec{p}}] + \left[ \nabla \left( \frac{1}{cr} \right), \dot{\vec{p}} \right].$$

Опуская второе слагаемое  $\sim \frac{1}{r^2}$ , получим

$$\vec{B} = \frac{1}{cr} [\nabla, \dot{\vec{p}}] = \frac{1}{c^2 r} [\bar{\Omega}, \ddot{\vec{p}}] = \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\vec{p}}, \bar{\Omega}]. \quad (6.28)$$

Вычислим поле  $\vec{E}$ .

Найдем  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\dot{\vec{p}}}{cr} = \frac{1}{cr} \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\ddot{\vec{p}}}{cr}. \quad (6.29)$$

Вычислим  $\nabla \varphi$ :

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \nabla \left( \frac{1}{cr^2} (\vec{r} \dot{\vec{p}}) \right) = \frac{1}{cr^2} \nabla (\vec{r} \dot{\vec{p}}) + (\vec{r} \dot{\vec{p}}) \nabla \left( \frac{1}{cr^2} \right) \approx \frac{1}{cr^2} \nabla (\vec{r} \dot{\vec{p}}) = \\ &= \frac{1}{cr^2} \{ [\vec{r}, \text{rot } \dot{\vec{p}}] + (\vec{r} \vec{\nabla}) \dot{\vec{p}} + [\dot{\vec{p}}, \text{rot } \vec{r}] + (\dot{\vec{p}} \vec{\nabla}) \vec{r} \}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Третий член равен нулю, а

$$(\dot{\vec{p}} \vec{\nabla}) \vec{r} = \dot{\vec{p}}, \quad (6.31)$$

$$(\vec{r} \vec{\nabla}) \dot{\vec{p}} = -\frac{1}{c} (\vec{r} \vec{\Omega}) \ddot{\vec{p}}, \quad (6.32)$$

$$[\vec{r}, \text{rot } \dot{\vec{p}}] = [\vec{r} [\vec{\nabla} \dot{\vec{p}}]] = -\frac{1}{c} [\vec{r} [\vec{\Omega} \ddot{\vec{p}}]] = -\frac{1}{c} \vec{\Omega} (\vec{r} \ddot{\vec{p}}) + \frac{1}{c} \ddot{\vec{p}} (\vec{r} \vec{\Omega}). \quad (6.33)$$

Подставляя (6.31)–(6.33) в (6.30), находим

$$\nabla \varphi = \frac{1}{cr^2} \left\{ -\frac{1}{c} \vec{\Omega} (\vec{r} \ddot{\vec{p}}) + \dot{\vec{p}} \right\} = -\frac{1}{cr^2} \vec{\Omega} (\vec{\Omega} \ddot{\vec{p}}) + \frac{\dot{\vec{p}}}{cr^2}.$$

Пренебрегая вторым членом  $\sim \frac{1}{r^2}$ , получим:

$$\nabla \varphi = -\frac{1}{cr^2} \vec{\Omega} (\vec{\Omega} \ddot{\vec{p}})$$

и

$$\vec{E} = \frac{1}{cr^2} \vec{\Omega} (\vec{\Omega} \ddot{\vec{p}}) - \frac{1}{cr^2} \ddot{\vec{p}} (\vec{\Omega} \vec{\Omega}) = \frac{1}{cr^2} [\vec{\Omega} [\vec{\Omega} \ddot{\vec{p}}]] = -[\vec{\Omega} \vec{B}] = [\vec{B} \vec{\Omega}].$$

Таким образом, получим выражения для полей в дипольном приближении:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\vec{p}}, \vec{\Omega}], \\ \vec{E} &= [\vec{B} \vec{\Omega}]. \end{aligned}$$

Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{\Omega}$  взаимно перпендикулярны друг другу, причем векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения электромагнитной волны (рис. 5.1). Величины векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  равны:  $E = B$ .

## Глава 2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

### 7. Электростатика в диэлектриках

Вещество состоит из атомов, атомы – из заряженных частиц. Атом нейтрален, но в электрическом поле заряды смещаются, что приводит к важным эффектам: возникновению электрического тока в проводниках, поляризации диэлектрика. Такое вещество создает свое поле, которое складывается с внешним полем.

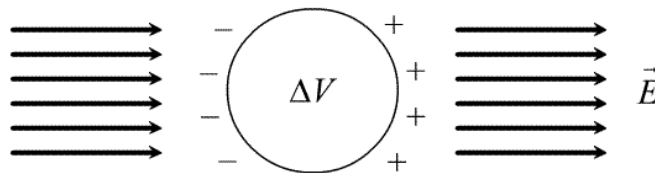
#### 7.1. Вектор поляризации

В электрическом поле заряды смещаются, и в выделенном объеме  $\Delta V$  нарушается нейтральность. Связанный заряд  $\sum_i q_i \neq 0$  и  $\sum_i q_i \vec{r}_i \neq 0$ . Если в объеме  $\Delta V$  электрический дипольный момент  $\Delta \vec{p} \neq 0$ , то диэлектрик поляризован.

Величину

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \quad (7.1)$$

называют вектором поляризации.



*Рис. 7.1. Поляризация диэлектрика  
в выделенном объеме  $\Delta V$  при наличии поля  $\vec{E}$*

#### 7.2. Поляризация неполярных молекул

Неполярные молекулы – это такие молекулы, у которых центры распределения положительных и отрицательных зарядов совпадают. Поле смещает их на некоторую величину. В равновесии внутреннее поле молекулы  $\vec{E}_{in}$  равно внешнему полю  $\vec{E}_{out}$ . Для вычисления  $\vec{E}_{in}$  проведем сферу через точку наблюдения и воспользуемся интегральной теоремой Гаусса–Остроградского:

$$\oint_S (\vec{E}\vec{n}) dS = \int_V 4\pi \cdot \rho \cdot dV, \quad (7.2)$$

где  $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ ,  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\frac{\vec{r}}{r}$  – сферически симметричное поле.

$$E(r)4\pi r^2 \approx 4\pi \cdot \rho(0)\frac{4}{3}\pi r^3. \quad (7.3)$$

Из соотношения

$$E(r) = 4\pi \cdot \rho(0)\frac{r}{3} \quad (7.4)$$

следует, что смещение равно:

$$r_0 = \frac{3E}{4\pi\rho(0)}, \quad (7.5)$$

где  $E = E_{out}$ .

Электрический момент молекулы равен:

$$\vec{p} = \frac{3Z_e}{4\pi\rho(0)} \vec{E} \equiv \beta \vec{E}. \quad (7.6)$$

Коэффициент пропорциональности  $\beta$  между  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$  называется поляризуемостью молекулы.

Вектор поляризации единицы объема вещества получаем при умножении электрического момента молекулы на концентрацию  $n_0$ :

$$\vec{P} = n_0 \beta \vec{E} = \alpha \vec{E}, \quad (7.7)$$

где  $\alpha$  – коэффициент поляризуемости диэлектрика. Вектор поляризации  $\vec{P}$  создает собственное поле. Как следует из эксперимента, существует пропорциональность  $P \sim E$ , которая наблюдается для изотропного и однородного диэлектрика. Таким образом, если неполярное вещество поместить в электрическое поле, то оно поляризуется и вектор  $\vec{P}$  создает собственное поле.

### 7.3. Ориентационная поляризация

В природе существуют и полярные молекулы, которые с самого начала являются диполями, например NaCl. Эти молекулы обладают электрическим дипольным моментом, однако без поля они ориентированы хаотически и сумма электрических моментов  $\vec{P} = 0$ . Действие поля проявляется в том, что диполи стремятся ориентироваться в направлении поля, но тепловое движение разрушает ориентацию ( $\vec{P} \neq 0$ ), так как в равновесии есть избыток ориентированных по полю молекул.

Для подсчета числа ориентированных в данном направлении молекул проведем в веществе сферу единичного радиуса; разметим ее парал-

лелями и меридианами на клетки с одинаковой площадью  $\Delta S$ , то есть так, чтобы телесный угол, под которым видна площадка, был один и тот же.

Рассмотрим  $\Delta V$ .

Пусть  $dN(\theta, \varphi)$  – число молекул, приходящееся на телесный угол  $d\Omega = \frac{dS}{R^2}$ .

Если внешнего поля нет, то все молекулы  $dN(\theta, \varphi)$  одинаковы, то есть

$$dN = C_0 d\Omega. \quad (7.8)$$

Интегрируя обе части формулы (7.8), найдем

$$C_0 = \frac{N}{4\pi},$$

то есть  $C_0$  не зависит от углов  $\theta$  и  $\varphi$ .

Таким образом,  $dN = \frac{N}{4\pi} d\Omega$ . Тепловое движение меняет ориентацию, но любое  $dN$  остается неизменным.

В поле  $\vec{E}$  диполь обладает потенциальной энергией  $W = -(\vec{p}\vec{E})$ . Диполь старается занять состояние с минимальным значением  $W$ , но тепловое движение мешает этому.

В состоянии термодинамического (теплового) равновесия справедливо распределение Больцмана:

$$dN = C_E e^{-W/kT} d\Omega = C_E e^{\vec{p}\cdot\vec{E}/kT} d\Omega,$$

где константа  $C_E$  при наличии поля находится из условия

$$N = C_E \int e^{-W/kT} d\Omega.$$

Здесь интегрирование проводится по телесному углу

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Если ось  $z$  направлена по  $\vec{E}$ , то

$$\vec{p}\vec{E} = pE \cos \theta,$$

и мы находим, что

$$dN = \frac{N}{2\pi} \frac{a}{e^a - e^{-a}} e^{a \cos \theta}. \quad (7.9)$$

В формуле (7.9) введено обозначение:

$$a = \frac{pE}{kT}. \quad (7.10)$$

Вычислим

$$\Delta \vec{P} = \sum_{i=1} \vec{P}_i = \sum_k N_k \vec{p}_k. \quad (7.11)$$

Переходя к непрерывному распределению моментов, находим

$$\Delta \vec{P} = \int \vec{p} dN = p \int \vec{n} \left( \frac{dN}{d\Omega} \right) d\Omega. \quad (7.12)$$

Найдем  $\Delta P$ , то есть проекцию  $\Delta \vec{P}$  на ось  $0z$ . Пусть  $n_0$  – концентрация молекул.

Так как  $N = n_0 \Delta V$ , то для вектора поляризации находим

$$P = n_0 p \left( \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right). \quad (7.13)$$

Из формулы (7.13) видно, что  $P \rightarrow n_0 p$  при  $E \rightarrow \infty$  ( $a \rightarrow \infty$ ).

При малых значениях поля  $E$  получим

$$P = \frac{n_0 p^2}{3kT} E = \alpha E, \quad (7.14)$$

где

$$\alpha \cong \alpha(T) = \frac{n_0 p^2}{3kT}. \quad (7.15)$$

Поляризованный диэлектрик создает собственное поле, которое складывается с внешним полем. Это результирующее поле и нужно найти.

#### 7.4. Потенциал поля в диэлектрике

В электрическом поле диэлектрик поляризуется. При не очень большом поле  $\vec{P} = \alpha \vec{E}$ , то есть создается дополнительное поле (будем считать  $\alpha$  известной величиной). Если диполь находится в начале координат, то электрический потенциал, создаваемый диполем в точке  $\vec{r}$ , равен  $\varphi_p(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3}$ ; если он находится в точке  $\vec{r}'$  (рис. 7.2), то

$$\varphi_p(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'.$$

Поляризованный диэлектрик разобьем на области  $dV'$ .

Электрический момент в целом нейтрального элемента объема  $dV'$  равен:

$$\vec{P} dV' = \sum_{dV'} q_i \vec{r}_i = \sum_{dV'} \vec{p},$$

где суммирование идет по зарядам (или соответственно по всем молекулам), находящимся в объеме  $dV'$ .

По определению  $\vec{P}$  – вектор поляризации единицы объема, то есть

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta V},$$

ПОЭТОМУ МОЖНО ЗАПИСАТЬ:

$$\vec{P}dV' = \vec{P}(\vec{r}')dV'$$

$$\text{и } \varphi_p(\vec{r}) = \int \frac{\vec{P}\vec{R}}{R^3} dV'. \quad (7.16)$$

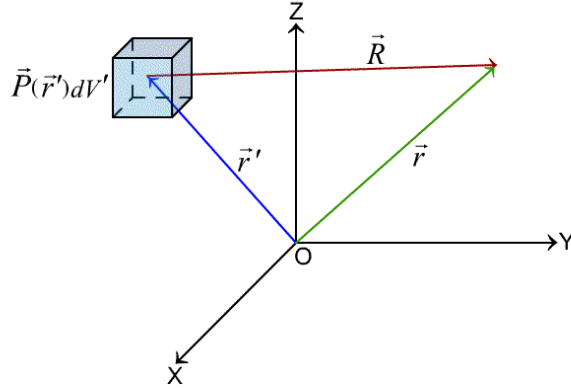


Рис. 7.2. К вычислению потенциала, создаваемого связанными зарядами в диэлектрике, помещенном в однородное поле  $\vec{E}$ :  
 $\vec{P}(\vec{r}')$  – вектор поляризации единицы объема диэлектрика

Можно убедиться, что

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = \nabla' \frac{1}{R}, \quad \text{div}' \frac{\vec{P}}{R} = \frac{1}{R} \text{div}' \vec{P} + \vec{P} \nabla' \frac{1}{R}, \quad (7.17)$$

где штрихи у операторов  $\nabla'$  и  $\text{div}'$  означают, что дифференцирование ведется по координатам вектора  $\vec{r}' = (x', y', z')$ , входящего в  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ .

Подынтегральные выражения можно представить в виде:

$$\frac{\vec{P}\vec{R}}{R^3} = \vec{P} \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = \text{div}' \frac{\vec{P}}{R} - \frac{1}{R} \text{div}' \vec{P}, \quad (7.18)$$

$$\varphi_p(\vec{r}) = \int \text{div}' \frac{\vec{P}}{R} dV' - \int \frac{\text{div}' \vec{P}}{R} dV'. \quad (7.19)$$

По теореме Остроградского–Гаусса, переходя предварительно к интегрированию по бесконечному контуру, находим

$$\int_{\infty} \text{div}' \frac{\vec{P}}{R} dV' = \oint \frac{\vec{n}\vec{P}}{R} dS = 0. \quad (7.20)$$

Здесь учтено, что  $\vec{P}(\infty) = 0$ . В результате получим

$$\varphi_p(\vec{r}) = - \int \frac{\text{div}' \vec{P}(\vec{r}') dV'}{R}. \quad (7.16')$$

Сравним полученное выражение с выражением для потенциала  $\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho \cdot dV'}{R}$ . Роль плотности связанных зарядов играет величина  $-\text{div}' \vec{P}(\vec{r}')$ :



$$- \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}') = \rho_{\text{связ}}(\vec{r}'). \quad (7.21)$$

В результате находим суммарное поле свободных и связанных зарядов:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho - \operatorname{div}' \vec{P}(\vec{r}') dV'}{R} = \int \frac{(\rho - \rho_{\text{связ}})}{R} dV'. \quad (7.22)$$

Таким образом, появление поляризации в диэлектрике приводит к возникновению суммарного поля.

### 7.5. Уравнения Максвелла в диэлектрике

Для нахождения суммарного поля  $\vec{E}$  по теореме Гельмгольца нужно знать  $\operatorname{div} \vec{E}$  и  $\operatorname{rot} \vec{E}$ .

Как известно, скалярный потенциал

$$\varphi = \int \frac{\rho \cdot dV}{R}$$

является решением уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho.$$

В диэлектрике

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi(\rho - \operatorname{div} \vec{P}), \quad (7.23)$$

где

$$\nabla^2 \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\operatorname{div} \vec{E}, \quad (7.24)$$

$$\operatorname{div}(\vec{E} + 4\pi \cdot \vec{P}) = 4\pi\rho \quad (7.25)$$

и величина, определяемая как

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad (7.26)$$

называется вектором электростатической индукции.

Используя соотношение  $\vec{P} = \alpha \cdot \vec{E}$ , найдем

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\alpha\vec{E} = \vec{E}(1 + 4\pi\alpha) = \varepsilon\vec{E}, \quad (7.27)$$

где  $\alpha$  – диэлектрическая восприимчивость,  $\varepsilon$  – диэлектрическая постоянная, называемая относительной диэлектрической проницаемостью, или просто диэлектрической проницаемостью.

В электростатике  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  и  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ . Учитывая это и соотношения (7.25), (7.27), получим уравнения Максвелла в диэлектрике:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \vec{D} &= \varepsilon\vec{E}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

## 8. Постоянный электрический ток

### 8.1. Потенциал и поле при наличии проводников

В качестве простейшей модели проводника можно представить следующую: имеется кристаллический остов из ионов и находящиеся внутри него слабо связанные электроны. Носителями электричества являются электроны, а не ионы. Приведем результаты некоторых экспериментов.

**Опыт Рике.** В течение года пропускался электрический ток через три поставленных друг на друга цилиндра – медный, алюминиевый и медный. После завершения опыта не было обнаружено проникновения металла в металл.

**Опыт Толмена и Стюарта.** В эксперименте было достигнуто возбуждение тока в металлах силами инерции.

Катушка из металлической проволоки приводилась в быстрое вращение вокруг оси. Магнитное поле Земли в пределах катушки было тщательно скомпенсировано с помощью неподвижных катушек с электрическим током, и при равномерном движении ток не возникал. При быстром же торможении возникал ток, вызванный движением отрицательных зарядов. Удельный заряд  $\frac{e}{m}$  в пределах ошибок измерений оказался таким же, как и у электронов, возникающих в опытах с катодными лучами.

В постоянном поле ток прекращается (в проводнике  $\vec{E} = 0$ ), то есть дополнительное поле от перераспределения зарядов компенсирует внешнее поле.

Если  $\vec{E} = 0$ , то  $\oint (\vec{E}\vec{n})dS = 0$  (интегрирование ведется по всем внутренним поверхностям) и  $q = 0$ . Внутри проводника нескомпенсированных зарядов нет. Заряд располагается по поверхности, что характерно и для свободных зарядов.

Если  $\vec{E} = 0$ , то это значит, что  $\varphi_{in}(\vec{r}) = const = V$ . Величина  $V$  представляет потенциал проводника. Перераспределение свободного заряда под действием поля называется электростатической индукцией.

Нужно найти  $\varphi_{out}(\vec{r})$  (с учетом электростатической индукции) и измененное электрическое поле.

#### Общая постановка задачи

Пусть имеются: заряд  $q$  (в том числе на проводнике); проводники, часть из них с заданным потенциалом  $V$ . Нужно найти  $\varphi_{out}$  от всех проводников.

### Метод решения

Найти решение уравнения Пуассона  $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$  с граничным условием  $\varphi|_{r\in S} = V$ . Находим  $\varphi$ , затем  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ .

Ограничимся простым случаем, когда заряды расположены только на проводнике или проводник подключен к батарее. Если найдем  $\varphi_{out}(\vec{r})$ , то можно найти  $\vec{E}(\vec{r})$  и  $\sigma(\vec{r})$  – поверхностную плотность заряда.

На поверхности проводника выделим площадку  $\Delta S$  и окружим ее замкнутой поверхностью параллелепипеда (рис. 8.1). По теореме Гаусса  $\oint \vec{E}\vec{n}dS = 4\pi q$ .

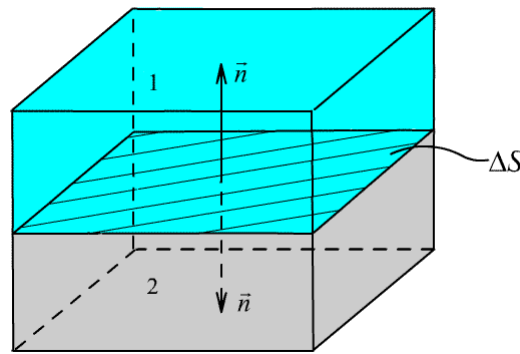


Рис. 8.1. К решению уравнения Пуассона с заданным граничным условием для потенциала  $\varphi$  на поверхности проводника.

Площадка  $\Delta S$  выделена на поверхности проводника и окружена замкнутой поверхностью прямоугольного параллелепипеда

Если высота параллелепипеда стремится к нулю, то

$$\oint E_n dS = (E_n(1) + E_n(2))\Delta S = E_n(1)\Delta S, \quad (8.1)$$

так как  $\vec{E}_{in} = 0$ .

С другой стороны, по теореме Остроградского–Гаусса,

$$\oint E_n dS = 4\pi q = 4\pi\sigma\Delta S,$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда. Это означает, что  $E_n(\vec{r}) = 4\pi\sigma(\vec{r})$ , причем точка  $\vec{r}$  находится на поверхности проводника.

Из уравнения  $E = -\nabla\varphi$  получим  $E_n = -(\nabla\varphi)_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ , то есть

$$\sigma(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial n} \quad (8.2)$$

и

$$q = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS. \quad (8.3)$$

Вместо граничного условия  $\varphi|_{r \in S} = V$  иногда используют

$$-\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = q. \quad (8.4)$$

## 8.2. Электрический ток в металлах. Законы Ома и Джоуля–Ленца в интегральной форме. Напряжение

Если в источнике поддерживается между концами проводника разность потенциалов, то по проводнику течет ток. Сила тока (количество электричества за секунду) прямо пропорциональна разности потенциалов.

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \quad (8.5)$$

где  $R$  – сопротивление.

С другой стороны, для разности потенциалов находим:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = - \int_1^2 d\varphi = - \int_1^2 (\nabla \varphi, d\vec{r}) = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = \varepsilon_{12}, \quad (8.6)$$

где  $\varepsilon_{12}$  – напряжение.

Формула

$$IR = \varepsilon_{12} \quad (8.7)$$

представляет закон Ома. Он справедлив и в нестационарном случае, когда нет понятия потенциала.

Рассмотрим проводник с током.

Вычислим работу по перемещению заряда под действием поля  $\vec{E}$  из точки (1) в точку (2):

$$A = \int_1^2 q \vec{E} d\vec{r} = -q \int_1^2 (\nabla \varphi d\vec{r}) = -q \int_1^2 d\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)q. \quad (8.8)$$

Из механики известно, что если  $\vec{F}$  действует на тело, то оно ускоряется. Изменяется скорость  $v$  и, следовательно, кинетическая энергия. В проводнике эта энергия переходит в тепловую:

$$Q = I(\varphi_1 - \varphi_2) = I\varepsilon_{12} = I^2 R. \quad (8.9)$$

Это закон Джоуля–Ленца в интегральной форме.

## 8.3. Плотность тока. Законы Ома и Джоуля–Ленца в дифференциальной форме

Разобьем проводник на тонкие трубки с током (рис. 2.2). В этом случае для трубки тока («тонкого» тока) можно записать:

$$IR = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r}.$$

Выразим  $I$  через плотность тока:

$$I = j\Delta S, \quad R = \rho \frac{\Delta l}{\Delta S}.$$

Величина  $R$  называется сопротивлением. Она связана с удельным сопротивлением  $\rho$ .

Тогда получим:

$$j\Delta S \cdot \rho \frac{\Delta l}{\Delta S} = E\Delta l, \quad j\rho = E, \quad \vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}.$$

Введем также проводимость:  $\frac{1}{\rho} = \sigma$ .

В результате получим выражение

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \tag{8.10}$$

которое представляет закон Ома в дифференциальной форме, справедливый в фиксированной точке пространства.

Для трубки тока («тонкого» тока) получим:

$$Q = I^2 R = j^2 \Delta S^2 \rho \frac{\Delta l}{\Delta S} = j^2 \rho \Delta V. \tag{8.11}$$

Обозначим количество тепла в единице объема:  $\frac{Q}{\Delta V} = \tilde{q}$ . Из формулы (8.11) следует:

$$\tilde{q} = j^2 \rho = \frac{j^2}{\sigma} = jE = \vec{j} \vec{E}, \tag{8.12}$$

что представляет собой закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме.

Отличие стационарного поля, созданного постоянными токами от поля электростатического состоит в том, что для поддержания тока нужна непрерывная трата энергии, которая должна использоваться, чтобы компенсировать потерю энергии в форме джоулева тепла за счет других видов энергии – механической (динамомашин), химической (гальванические элементы, аккумуляторы), тепловой. Нужно, чтобы в определенных участках цепи действовала ЭДС неэлектростатического происхождения (сторонние ЭДС).

В сосуде (рис. 8.2), содержащем воду и кислоту, идет диффузия, причем в растворе  $HCl \rightarrow H^+ + Cl^-$ . Подвижность ионов  $H^+$  больше, они движутся вверх быстрее, то есть возникает ток без электрического поля (нет  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ) от сил неэлектростатической природы. Обозначим  $\vec{E}_{стор}$  такое поле, которое способно вызвать точно такой же ток, какой образуется от диффузии:

$$\vec{E}_{\text{стоп}} = \frac{1}{\sigma} \vec{j}_{\text{стоп}}. \quad (8.13)$$

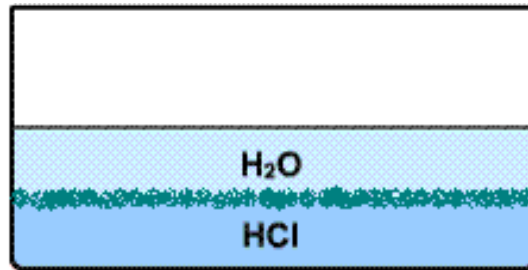


Рис. 8.2. К механизму возникновения тока в электролите

Из этого следует, что

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стоп}}). \quad (8.14)$$

Поле  $\vec{E}_{\text{стоп}}$  возникает при контакте металл-электролит за счет разной подвижности положительных и отрицательных ионов при контакте двух металлов с разной электронной структурой.

Запишем закон Ома в интегральной форме:

$$I = \frac{1}{R} \left\{ \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{стоп}} d\vec{r} \right\}. \quad (8.15)$$

Для замкнутого контура  $\int_1^2 \rightarrow \oint$ . В этом случае первый интеграл равен нулю, так как  $\vec{E} d\vec{r} = -d\phi$ ,  $\oint d\phi = 0$ , поэтому  $IR = \oint \vec{E}_{\text{стоп}} d\vec{r}$  — электродвижущая сила, ЭДС =  $\varepsilon$  и закон Ома принимает следующий вид:

$$IR = \varepsilon. \quad (8.16)$$

## 9. Магнитостатическое поле в магнетиках

Вещество, помещенное в поле  $\vec{B}$ , намагничивается, то есть каждый элемент  $dV$  приобретает магнитный момент. Существует три типа веществ, у которых механизмы намагничивания разные: диамагнетики, пара- и ферромагнетики. Если  $\vec{m}_i$  — магнитный момент атома, то  $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V} = \vec{M}$  — вектор намагниченности.

Намагниченное тело создает свое магнитное поле, которое складывается с внешним: поле в присутствии вещества становится другим. Это поле и нужно найти.

### 9.1. Теорема Лармора. Механизм намагничивания диамагнетиков

Электрон на орбите создает круговой ток. Он обладает магнитным моментом

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r} \vec{j}] dV = -\frac{e}{2c} [\vec{r}_e \vec{v}_e] \frac{m_e}{m_e} = -\frac{e}{2m_e c} \vec{L} = g \vec{L},$$

где  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ ,  $\rho = -e \delta(\vec{r} - \vec{r}_e(t))$ . Вектор  $\vec{r}_e(t)$  характеризует положение электрона в момент времени  $t$ .

Магнитный момент вращающегося электрона прямо пропорционален механическому моменту, а множитель пропорциональности  $g$  называется гиромагнитным отношением:

$$g = -\frac{e}{2m_e c}. \quad (9.1)$$

Для получения магнитного момента атома суммируются магнитные моменты отдельных электронов, при этом суммарный магнитный момент либо равен нулю, либо не равен нулю. Если  $\sum_i \vec{m}_i = \vec{m}_{am} = 0$  (без поля), то такое вещество является диамагнетиком. У парамагнетиков и ферромагнетиков в отсутствие внешнего поля  $\vec{m}_{am} \neq 0$ . При наличии внешнего поля все меняется. В поле  $\vec{B}$  на каждый магнитный момент  $\vec{m}$  действует момент  $\vec{N} = [\vec{m} \vec{B}]$ , который стремится повернуть магнитный момент по полю.

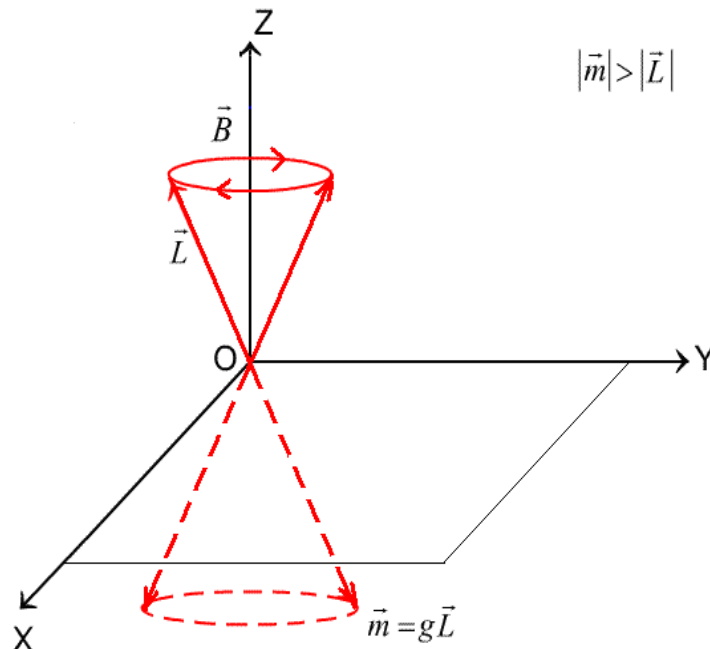


Рис. 9.1. Прецессия магнитного момента вокруг направления магнитного поля

Но  $\vec{m} = g\vec{L}$ , а  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$ , поэтому

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = g[\vec{L}\vec{B}]. \quad (9.2)$$

Пусть ось  $OZ$  совпадает с  $\vec{B}$ . Тогда

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = g \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}. \quad (9.3)$$

где

$$\dot{L}_1 = gBL_2, \quad \dot{L}_2 = -gBL_1, \quad \dot{L}_3 = 0. \quad (9.4)$$

Обозначим:  $gB = -\omega_L$ . Тогда  $\dot{L}_1 = -\omega_L L_2$ ,  $\dot{L}_2 = \omega_L L_1$ ,  $\dot{L}_3 = const$ .

$\ddot{L}_1 = -\omega_L \dot{L}_2 = -\omega_L^2 L_1$ . Это означает, что

$$\ddot{L}_1 + \omega_L^2 L_1 = 0. \quad (9.5)$$

Решением уравнения является

$$L_1 = A \cos(\omega_L t - \alpha). \quad (9.6)$$

Из первого уравнения

$$L_2 = -\frac{1}{\omega_L} \dot{L}_1 = A \sin(\omega_L t - \alpha).$$

Следовательно,  $L_1^2 + L_2^2 = const$ , но и  $L_3 = const$ , то есть  $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = const$ . Так как длина остается постоянной, то меняется направление вращения, а так как проекция на ось  $OZ$  постоянна, то вектор  $\vec{L}$  процессирует вокруг  $\vec{B}$  с угловой скоростью  $\omega_L$ , где  $\omega_L$  – частота ларморовской прецессии.

Прецессия – это дополнительное вращение. Возникает дополнительный момент. Магнитный момент параллелен или антипараллелен  $\vec{B}$  у каждого электрона атома. Без поля  $\vec{m}_{am} = 0$ , в поле магнитный момент атома

$$\vec{m}_{am} = \sum_{i=1}^z \Delta \vec{m}_i \text{ и ориентирован либо по направлению } \vec{B}, \text{ либо против } \vec{B}.$$

Возникновение магнитного момента атома за счет прецессии во внешнем поле и объясняет явление диамагнетизма.

Если прецессируют все электроны атома, то  $\vec{v}_L(\vec{r}) = [\vec{\omega}_L \vec{r}]$ , и возникает ток  $\vec{j}_L = \rho \vec{v}_L$ .



Величина магнитного момента атома определяется через плотность тока  $\vec{j}_L$ :

$$\vec{m}_{am} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r} \vec{j}_L] dV. \quad (9.7)$$

В результате

$$\vec{m}_{am} = \alpha \vec{B}, \quad (9.8)$$

причем для диамагнетиков всегда  $\alpha < 0$ .

## 9.2. Природа парамагнетизма

Если в отсутствие магнитного поля  $\vec{m}_{am} \neq 0$ , то такие вещества называют парамагнетиками.

В таком случае в поле  $\vec{B}$  магнитный момент  $\vec{m}$  обладает потенциальной энергией  $W = -(\vec{m} \vec{B})$  и стремится ориентироваться по полю  $\vec{B}$ , но этому мешает тепловое движение. В состоянии теплового равновесия (как и с полярными молекулами) число атомов, у которых магнитный момент ориентирован в пределах телесного угла  $d\Omega$ , равно:

$$dN = \frac{N}{2\pi(e^a - e^{-a})} e^{a \cos \theta} d\Omega, \quad (9.9)$$

где

$$a = \frac{mB}{kT}, \quad (9.10)$$

то есть имеет место распределение Больцмана.

Снова, как и в электростатике, имеем для вектора намагничивания:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta V}, \quad (9.11)$$

$$\Delta \vec{M} = m \int \vec{n} \left( \frac{dN}{d\Omega} \right) d\Omega, \quad (9.12)$$

$$\Delta \vec{M} = \vec{e}_3 M, \quad (9.13)$$

$$\Delta \vec{M} = m \int \cos \theta \frac{dN}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (9.14)$$

где

$$N = n_0 \Delta V. \quad (9.15)$$

Поэтому, вычисляя интеграл в выражении для  $\Delta M$  (9.14), с учетом (9.9) получим

$$M = n_0 m \left( \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right). \quad (9.16)$$

С ростом поля  $\vec{B}$  происходит насыщение, то есть при  $B \rightarrow \infty$  ( $a \rightarrow \infty$ ) намагниченность стремится к максимальному значению:  $M \rightarrow n_0 m \equiv M_\infty$ .

При малом  $\vec{B}$

$$\vec{M} = \alpha \vec{B}. \quad (9.17)$$

Выражение

$$\alpha = \frac{n_0 m^2}{3kT} \quad (9.18)$$

представляет закон Кюри.

Здесь вектор  $\vec{M}$  параллелен полю  $\vec{B}$  и слабый диамагнитный эффект подавлен. Парамагнитные соли используют для получения низких температур  $T$ : соль охлаждают и намагничивают до насыщения, затем производят медленное адиабатическое размагничивание.

Если поле  $\vec{B}$  меняет направление, то и  $\vec{M}$  меняет направление, то есть магнитный момент  $\vec{m}$  поворачивается, но при этом энергия  $W$  возрастает. При постоянной энергии это означает уменьшение  $T_{\text{кин}}$ . Таким образом, получают температуры  $T \sim 10^{-3} \text{ K}$ . Затем получают  $T \sim 10^{-6} \text{ K}$  за счет адиабатического размагничивания магнитных моментов ядер.

### 9.3. Ферромагнетизм

У ферромагнетиков  $\vec{m}_{\text{ам}} \neq 0$ , но при этом  $\vec{m}$  соседних атомов сильно взаимодействуют. Истинную природу ферромагнетизма объясняет квантовая механика, доказывающая необходимость учета обменных сил между электронами атома. Однако многие свойства ферромагнетиков объяснимы в классической механике, если предположить, что на магнитный момент  $\vec{m}$  атома действует поле:

$$\vec{B}_{\text{eff}} = \vec{H} + b\vec{M}, \quad (9.19)$$

где  $b$  – постоянная, характеризующая свойства данного ферромагнетика, называемая постоянной Вейсса.

В этом случае потенциальная энергия равна:

$$W = -(\vec{m}, \vec{H} + b\vec{M}), \quad (9.20)$$

и даже без внешнего поля ферромагнетику атома выгодно энергетически, чтобы магнитные моменты выстраивались по полю  $\vec{M}$ , то есть

происходит самопроизвольное намагничивание (домены). Здесь  $b\vec{M}$  – молекулярное поле Вейсса.

Далее расчет проводится так же, как и для парамагнетиков. Полагая, что в формуле (9.16)

$$a = \frac{m(H + Mb)}{kT}, \quad (9.21)$$

получим

$$M = n_0 m \left\{ \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right\}, \quad (9.22)$$

но  $a = a(M)$  и формулу нельзя записать в виде  $M = f(B)$ .

Выясним, при каких условиях решение существует.

Предположим, что в формуле (9.21) полем  $H$  можно пренебречь по сравнению с молекулярным полем  $bM$ . В этом случае

$$a \approx \frac{mbM}{kT} \frac{n_0}{n_0} = \frac{M_\infty bM}{n_0 kT} = \frac{M_\infty bM}{n_0 kT} \frac{M_\infty}{M_\infty} = \left( \frac{bM_\infty^2}{n_0 kT} \right) \frac{M}{M_\infty} = \frac{3\theta}{T} \frac{M}{M_\infty}, \quad (9.23)$$

где

$$M_\infty = n_0 m$$

и

$$\theta = \frac{bM_\infty^2}{3n_0 k}. \quad (9.24)$$

Из (9.23) следует, что

$$\frac{M}{M_\infty} = a \frac{T}{3\theta}. \quad (9.25)$$

Из уравнения (9.22) находим

$$\frac{M}{M_\infty} = ctha - \frac{1}{a} \equiv L_\infty(a), \quad (9.26)$$

где  $L_\infty(a)$  – функция Ланжевена в классическом пределе.

Приравнивая правые части уравнений (9.25) и (9.26), получим

$$a \frac{T}{3\theta} = ctha - \frac{1}{a}. \quad (9.27)$$

Графики пересекутся, если

$$\frac{d}{da} \left( ctha - \frac{1}{a} \right)_{a=0} > \frac{T}{3\theta}. \quad (9.28)$$

Зависимость  $\frac{M(a)}{M_\infty}$  изображена на рис. 9.2.

Разложив функцию  $\left( ctha - \frac{1}{a} \right)$  в ряд, причем в разложении нужно удерживать 4 члена, получим

$$\frac{d}{da} \left( ctha - \frac{1}{a} \right) \cong \frac{d}{da} (\dots) = \frac{1}{3}. \quad (9.29)$$

Это уравнение можно решить графически.

Пересечение функции Ланжевена  $y = L_\infty(x)$  с прямой  $y = \frac{T}{3\theta}x$  произойдет, если выполнится неравенство  $\frac{1}{3} > \frac{T}{3\theta}$ , то есть  $T < \theta$ , где  $\theta$  – точка Кюри. Например,  $\theta = 372^\circ$  для Ni и  $\theta = 758^\circ$  для Fe.

Если  $T < \theta$ , то вещество является ферромагнетиком, при  $T > \theta$  это парамагнетик.

#### 9.4. Уравнения Максвелла в магнетиках

Выделим некоторый объем  $dV'$  в магнетике.

В магнитном поле  $\vec{B}$  вещество намагничивается, возникает вектор намагниченности  $\vec{M}(r)$  и создает собственное поле, которое складывается с  $\vec{B}$ . Если «магнитный» момент  $\vec{m}$  находится в начале координат, тогда  $\vec{A}(\vec{r}) = \left[ \vec{m} \frac{\vec{r}}{r^3} \right]$ , а если он находится в точке  $\vec{r}'$ , то  $\vec{A}(\vec{r}) = \left[ \vec{m} \frac{\vec{R}}{R^3} \right]$ .

Вычислим векторный потенциал, обусловленный вектором намагниченности  $\vec{M}(r)$ :

$$\vec{A}_M(\vec{r}) = \int \left[ \vec{M}(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} \right] dV'. \quad (9.30)$$

Заметив, что

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = \nabla' \left( \frac{1}{R} \right), \quad (9.31)$$

и используя соотношение

$$\text{rot}' \left( \frac{\vec{M}}{R} \right) = \frac{1}{R} \text{rot}' \vec{M} + \left[ \nabla' \left( \frac{1}{R} \right), \vec{M} \right], \quad (9.32)$$

получим

$$\left[ \vec{M} \frac{\vec{R}}{R^3} \right] = \frac{1}{R} \text{rot}' \vec{M} - \text{rot}' \frac{\vec{M}}{R} \cdot \left[ \vec{M} \frac{\vec{R}}{R^3} \right] = \frac{1}{R} \text{rot}' \vec{M} - \text{rot}' \left( \frac{\vec{M}}{R} \right). \quad (9.33)$$

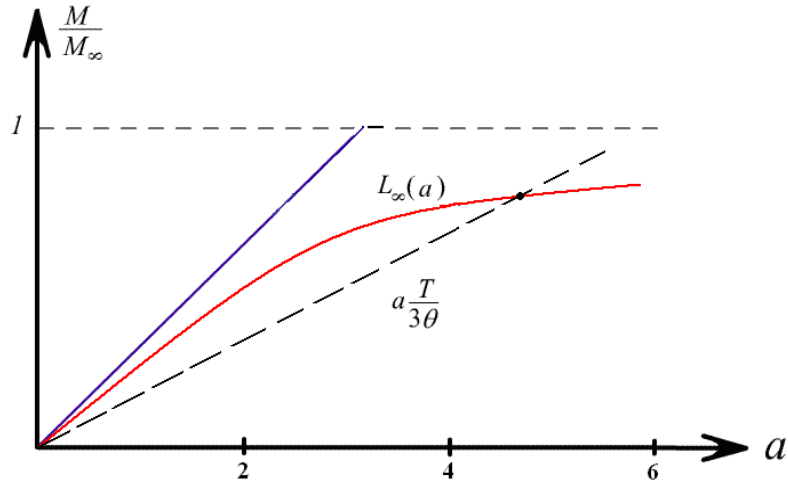


Рис. 9.2. Величина спонтанной относительной намагниченности ферромагнетика  $M/n_0 m$  (при  $H = 0$ ) находится в классической теории графически как пересечение кривой Ланжевена  $M/M_\infty = L_\infty(a)$  и прямой  $M/M_\infty = (T/3\theta)a$

По аналогии с теоремой Остроградского–Гаусса существует теорема Гаусса:

$$\int_V \text{rot} \vec{A} dV = \oint [\vec{n} \vec{A}] dS, \quad (9.34)$$

где  $\vec{n} dS = d\vec{S}$  и  $\vec{n}$  является вектором нормали к поверхности  $dS$ .

Для бесконечно удаленной поверхности

$$\oint_{\infty} [\vec{n} \vec{A}] dS = 0 \quad (9.35)$$

и

$$\vec{A}_M(\vec{r}) = \int \frac{\text{rot} \vec{M}}{R} dV', \quad (9.36)$$

в то же время

$$\vec{A}_j = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV'. \quad (9.37)$$

Суммарный потенциал представляется формулой

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} + c \text{rot} \vec{M}}{R} dV', \quad (9.38)$$

причем

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

Как известно, формула для  $\vec{A}_j$  получена из системы уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \text{div}\vec{B} = 0, \end{cases}$$

следовательно в магнетике

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + c \cdot \text{rot}\vec{M}), \\ \text{div}\vec{B} = 0, \end{cases} \quad (9.39)$$

или

$$\begin{cases} \text{rot}(\vec{B} - 4\pi\vec{M}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \text{div}\vec{B} = 0, \end{cases} \quad (9.40)$$

где  $\vec{B} - 4\pi\vec{M} = \vec{H}$  – напряженность магнитного поля,

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \quad (9.41)$$

Ранее было показано, что  $\vec{M} \sim \vec{B}$ , поэтому  $\vec{H} \sim \vec{B}$ , следовательно

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad (9.42)$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость.

Можно записать уравнение, связывающее поля  $\vec{M}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{M} = \kappa\vec{H}, \quad (9.43)$$

в котором величина  $\kappa$  называется магнитной восприимчивостью.

Окончательно система уравнений Максвелла в магнитостатике в присутствии магнитных веществ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \text{div}\vec{B} = 0, \end{cases} \quad (9.44)$$

причем для парамагнитных и диамагнитных сред векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  связаны соотношением

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad (9.45)$$

которое называется уравнением связи.

Если известны величины  $\vec{j}$  и  $\mu$ , то возможно вычислить  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ .

### 9.5. Классификация магнетиков

Среды, у которых магнитная проницаемость  $\mu \neq 1$ , называют магнетиками. В таких средах магнитное поле  $\vec{H}$  и магнитная индукция  $\vec{B}$  не совпадают друг с другом, причем связь между ними может быть нелинейной, как в ферромагнетиках. Помимо магнитной проницаемости  $\mu$  используют другую характеристику магнетиков – магнитную восприимчивость  $\kappa$ . Она связывает плотность магнитного момента вещества  $\vec{M}$  (вектора намагниченности) с напряженностью поля  $\vec{H}$ :

$$\vec{M} = \kappa \vec{H}.$$

Магнитная восприимчивость соотносится с  $\mu$ :

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa. \quad (9.46)$$

Величина  $\kappa$  может быть положительной или отрицательной. Если  $\kappa > 0$ , то вещества называют парамагнетиками. К ним относятся, например, кислород, алюминий, платина, щелочные металлы. Значения величины молярной магнитной восприимчивости для различных веществ лежат в интервале:

$$\kappa \approx 10^{-3} \div 10^{-6}. \quad (9.47)$$

Таблица

*Значения молярной диамагнитной восприимчивости инертных газов и некоторых ионов в кристаллах*

Вещество	He	Ne	Ar	Cr	Xe	F <sup>-</sup>	Li <sup>+</sup>	Ca <sup>2+</sup>	Ba <sup>2+</sup>	Г
$\kappa \cdot 10^{-6}$ см <sup>3</sup> /моль	-1,9	-7,2	-19,4	-28	-43	-9,4	-0,7	-10,7	-29	-50

Парамагнетизм обусловлен ориентацией магнитных моментов отдельных структурных элементов, из которых состоит вещество, под действием внешнего магнитного поля. Эти магнитные моменты существуют вне зависимости от внешнего магнитного поля, в том числе и в его отсутствие.

Вещества, у которых  $\kappa < 0$ , называют диамагнетиками. Для них  $\kappa \sim 10^{-6}$ . Примерами диамагнетиков являются инертные газы. Диамагнетизм присущ всем телам без исключения. В таблице приведены значения молярной диамагнитной восприимчивости инертных газов и некоторых ионов в кристаллах.

Более сильный парамагнетизм обычно преобладает над диамагнетизмом, поэтому непосредственно явление диамагнетизма наблюдается

для тех молекул, у которых  $\vec{H} = 0$ . К ферромагнетикам относятся железо кобальт, никель, а также многие их сплавы. При низких температурах ферромагнитные свойства имеются у некоторых элементов, принадлежащих к группе редких земель (гадолиний, тербий, диспрозий, гольмий, эрбий, тулий).

## 10. Макроскопическая электродинамика

(электродинамика поляризующихся и намагничивающихся сред)

### 10.1. Микроскопический и макроскопический подходы к описанию электромагнитных явлений в средах

В микроскопическом подходе для расчета полей нужно было бы написать уравнения для электромагнитных полей, создаваемых отдельными движущимися зарядами – электронами и ядрами, из которых состоит вещество, и к ним добавить квантово-механические уравнения движения для микрочастиц. Решение этих уравнений и решало бы поставленную задачу. Таким образом, микроскопический подход учитывает процессы атомного масштаба.

Микроскопические уравнения Максвелла, сформулированные ранее, справедливы также и тогда, когда наряду с электромагнитным полем и создающими его зарядами (токами) имеется взаимодействующее с этим полем вещество. Под действием электромагнитного поля имеющиеся в среде заряды будут двигаться, в среде создаются токи (плотности зарядов и токов, зависящих от напряженностей полей, обозначим, соответственно,  $\rho$  и  $\vec{j}$ ). Существуют заряды и токи, не зависящие от напряженностей полей, их называют сторонними:  $\rho_{ext}$  и  $\vec{j}_{ext}$ . Итак, основу электродинамики сред составляют микроскопические уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{h} &= \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{ext}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{h} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{e} &= 4\pi(\rho + \rho_{ext}). \end{aligned} \quad (10.1)$$

При микроскопическом подходе к ним следовало бы добавить уравнения механики, например Ньютона:

$$m\ddot{\vec{r}} = e \left( \vec{e} + \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{h} \right) + \vec{f}_{ext}, \quad (10.2)$$

где  $\vec{f}_{ext}$  – сила неэлектромагнитного происхождения.



Такой детальный подход нельзя реализовать из-за огромного числа уравнения типа (2), так как эти уравнения следовало бы записать для каждой частицы, однако такое детальное описание и не нужно.

Свойства вещества, проявляющиеся в конкретном виде  $\rho$  и  $\vec{j}$ , следует описывать статистически (то есть усреднить уравнения Максвелла по статистическому ансамблю). Иногда этого оказывается достаточно, но чаще приходится усреднять (1) по физически малым объемам  $\Delta V$  и промежуткам времени  $\Delta t$ .

Если среда состоит из нейтральных атомов, то значение измеренного (или вычисленного) электрического микроскопического поля в отдельных точках в фиксированные моменты времени будет наиболее сильным ( $\sim 10^{16}$  в гауссовой системе) в областях с размерами  $\sim 3 \cdot 10^{-13}$  см, занятыми атомными ядрами. При удалении от ядра поле ослабевает и становится очень малым на расстояниях, больших характерного размера электронной оболочки. Затем при попадании в область, занятую другим атомом, происходит резкое возрастание поля. Кроме того, быстрые временные флуктуации поля происходят из-за движения атомов. Эти флуктуации происходят в плазме, кристаллах и других средах на расстояниях, соотносимых с расстояниями между соседними частицами.

## 10.2. Усреднение уравнений Максвелла

Введем физически малый объем среды  $\Delta V$ , в котором находится большое число частиц среды, но область усреднения мала по сравнению, например, с длиной электромагнитной волны (если в среде есть электромагнитные волны). Будем проводить усреднение и по времени  $\Delta t$ , которое много больше характерного периода движения зарядов в  $\Delta V$ .

Усредним уравнения (1) по  $\Delta V$  и  $\Delta t$ .

Определим среднее значение любой компоненты электромагнитного поля  $g(\vec{r}, t)$ :

$$g(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int_{(\Delta V)} d^3 \xi \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} d\tau g(\vec{r} + \vec{\xi}, t + \tau), \quad (10.3)$$

где  $d^3 \xi$  – элемент объема  $\Delta V$  с центром в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}$ .

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int_{(\Delta V)} d^3 \xi \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} d\tau \frac{dg(\vec{r} + \vec{\xi}, t + \tau)}{\partial x}, \quad (10.4)$$

то есть

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial g}{\partial x}}, \quad (10.5)$$

где  $x$  – соответствующая переменная  $\{x : x, y, z, t\}$ .

Те же средние значения получаются и при усреднении по ансамблю

$$g(\vec{r}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{g'(\vec{r}, t) + g''(\vec{r}, t) + \dots}{N}, \quad (10.6)$$

где  $g'$ ,  $g''$  – микроскопические значения поля, соответствующие разным системам ансамбля.

Снова

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial g}{\partial x}}.$$

Таким образом,

$$\overline{rot \vec{e}} = rot \bar{\vec{e}}, \quad \overline{div \vec{h}} = div \bar{\vec{h}}, \quad \frac{\partial \bar{\vec{h}}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}}. \quad (10.7)$$

Получим в результате усреднения:

$$\begin{aligned} rot \bar{\vec{e}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\vec{h}}}{\partial t}, \quad rot \bar{\vec{h}} = \frac{4\pi}{c} (\bar{\vec{j}} + \bar{\vec{j}}_{ext}) + \frac{\partial \bar{\vec{e}}}{\partial t}, \\ div \bar{\vec{h}} &= 0, \quad div \bar{\vec{e}} = 4\pi (\bar{\rho} + \bar{\rho}_{ext}). \end{aligned} \quad (10.8)$$

В макроскопической электродинамике  $\bar{\vec{e}} = \vec{E}$ ,  $\bar{\vec{h}} = \vec{B}$  (вектор магнитной индукции). Обычно опускают черту у величин  $\bar{\vec{j}}, \bar{\vec{j}}_{ext}, \bar{\rho}, \bar{\rho}_{ext}$ , понимая под  $\vec{j}, j_{ext}, \rho, \rho_{ext}$  усредненные (макроскопические) значения этих величин:

$$\begin{aligned} rot \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad rot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{ext}) + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ div \vec{B} &= 0, \quad div \vec{E} = 4\pi (\rho + \rho_{ext}). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Уравнения (10.9) сохраняют свой вид независимо от величины области усреднения, выбираемой в зависимости от специфики задачи, экспериментальной методики усреднения полей и др.

Но система уравнений не является полной, пока не установлена взаимосвязь между

$$(\vec{E}, \vec{H}) \Leftrightarrow (\rho, \vec{j}) \quad \text{либо} \quad (\rho, \vec{j}) \Leftrightarrow (\rho_{ext}, \vec{j}_{ext}).$$

Для установления такой связи привлекают статистические представления о движении частиц в веществе – вводят в рассмотрение функцию распределения  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  частиц в исследуемом электромагнитном поле, а при квантовом описании – матрицу плотности.

Так,  $f(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3 r d^3 p$  – среднее число частиц, координаты которых лежат в физически малом объеме  $dV = d^3 r$ , а компоненты импульсов – в объеме  $d^3 p$  импульсного пространства.

Находим наведенные заряды и токи:

$$\rho(\vec{r}, t) = e \int f(\vec{r}, \vec{p}) d^3 p, \quad (10.10)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = e \int \vec{v} f(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3 p. \quad (10.11)$$

Функция распределения находится из решения кинетического уравнения.

Кинетический подход к описанию электромагнитных свойств среды является наиболее подробным, но очень сложным, так как нужна подробная информация о структуре среды. Недостаток такой информации приводит к необходимости вводить либо феноменологические модели, либо использовать экспериментальные зависимости между  $(\rho, \vec{j})$  и  $(\vec{E}, \vec{B})$ .

Часто используют закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{– для изотропных сред,} \quad (10.12)$$

либо

$$\vec{j}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} \vec{E}_\beta \quad \text{– для анизотропных сред} \quad (10.13)$$

(для полей слабых по сравнению с атомными), где  $\sigma$  – макроскопическая характеристика вещества и не зависит от  $\vec{E}$ .

Для сильных полей и в анизотропных средах

$$\vec{j}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} \vec{E}_\beta + \gamma_{\alpha\beta\gamma} \vec{E}_\beta \vec{E}_\gamma + \xi_{\alpha\beta\gamma} \vec{E}_\beta \vec{E}_\gamma \vec{E}_\delta. \quad (10.14)$$

Плотность наведенного тока может определяться не только  $\vec{E}$ , но и градиентом поля

$$\vec{j}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} \vec{E}_\beta + \xi_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \vec{E}_\beta}{\partial x_\gamma}. \quad (10.15)$$

В сверхпроводниках

$$\text{rot} \vec{j} = -\Lambda \vec{B}. \quad (10.16)$$

Решения уравнений электродинамики в средах отличаются исключительным многообразием, обусловленным различием свойств сред (лабораторная и космическая плазма; сходные в некоторых отношениях металлы, полуметаллы и полупроводники; непроводящие среды: твердые и жидкие диэлектрики; разнообразные магнетики и др.).

## 11. Уравнения электромагнитного поля в средах

Установим связь наведенных зарядов и токов с удельными дипольными моментами.

В уравнениях (10.3)  $\rho_{ext}, \vec{j}_{ext}$  задаются внешними условиями и могут рассматриваться как неоднородные члены уравнения. Величины  $\rho$  и  $\vec{j}$  заранее не известны, их необходимо выразить через некоторые макроскопические параметры вещества, зависящие от напряженности электромагнитного поля. Можно записать их по типу зависимости  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , однако удобнее выразить  $\rho$  и  $\vec{j}$  через плотности  $\vec{P}$  и  $\vec{M}$  макроскопических электрического и магнитного дипольных моментов среды:

$$\vec{P} = \left( \sum_{(\Delta V)} \vec{p}_i \right) \frac{1}{\Delta V}, \quad (11.1)$$

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{(\Delta V)} \vec{m}_i, \quad (11.2)$$

где  $\vec{p}_i, \vec{m}_i$  – дипольные моменты отдельных микрочастиц, из которых состоит вещество,  $\Delta V$  – макроскопически малый объем.

Выразим  $\rho$  через  $\vec{P}$ .

Рассмотрим произвольное электронейтральное тело и потребуем выполнения очередного равенства

$$\int \vec{P} dV = \int c \vec{r} dV. \quad (11.3)$$

Интегрирование идет по всем объему тела.

Умножим на постоянный вектор  $\vec{a}$  обе части (11.3) и воспользуемся тождеством

$$\vec{a} \cdot \vec{P} = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla})(\vec{a} \cdot \vec{r}), \quad (11.4)$$

$$\int \rho(\vec{a} \cdot \vec{r}) dV = \int (\vec{P} \cdot \vec{\nabla})(\vec{a} \cdot \vec{r}) dV = \int_V \nabla [\vec{P}(\vec{a} \cdot \vec{r})] dV - \int (\vec{a} \cdot \vec{r}) \operatorname{div} \vec{P} dV, \quad (11.5)$$

где

$$\int_V \nabla [\vec{P}(\vec{a} \cdot \vec{r})] dV = \int_S \vec{n} [\vec{P}(\vec{a} \cdot \vec{r})] dS = 0, \quad (11.6)$$

так как  $\vec{P}$  вне тела равен нулю.

Отсюда ввиду произвольности  $\vec{a}$

$$\int \rho \vec{r} dV = - \int \vec{r} \operatorname{div} \vec{P} dV, \quad (11.7)$$

$$\rho = - \operatorname{div} \vec{P}, \quad (11.8)$$

при этом выполняется условие электронейтральности:  $\int \rho dV = 0$ .

Выразим  $\vec{j}$  через векторы электрической и магнитной поляризации. Используем уравнение непрерывности для наведенных зарядов и токов:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0. \quad (11.9)$$

Подставив  $\rho = -\text{div} \vec{P}$ , получим:

$$\text{div} \left( \vec{j} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) = 0, \quad (11.10)$$

$$\vec{j} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \text{rot} \vec{M}. \quad (11.11)$$

При этом  $\text{rot} \vec{M}' \neq 0$ , как и  $\vec{P}$ , только в объеме  $V$ .

Ток  $\vec{j}$  представляется в виде суммы двух токов: тока поляризации  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ , так как этот ток связан с перетеканием зарядов, составляющих электродинамический момент вещества, и тока  $\text{rot} \vec{M}'$ , который обусловлен замкнутыми микротоками в веществе, не связанными с макроскопическим электрическим полем.

Рассмотрим ток  $\vec{j}$  сначала при отсутствии электрического поля  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0$ .

$\vec{j} = \text{rot} \vec{M}'$  тогда обладает свойством:

$$\int \vec{j} dS = 0, \quad (11.12)$$

то есть полный ток через любое сечение среды равен 0,

$$\frac{1}{2c} \int \vec{r} \cdot \vec{j} dV = \int \vec{M} dV, \quad (11.13)$$

где  $\int \vec{M} dV$  – полный магнитный момент тела.

Пусть  $\vec{a}$  – произвольный постоянный вектор; умножим скалярно  $\vec{a}$  на обе части (11.13):

$$\frac{1}{2c} \int \vec{a} \cdot [\vec{r} \cdot \vec{j}] dV = \int \vec{a} \cdot \vec{M} dV, \quad (11.14)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{j}) = \vec{a} [\vec{r} \cdot \text{rot} \vec{M}'] = [\vec{a} \cdot \vec{r}] \text{rot} \vec{M}' = [\vec{a} \cdot \vec{r}] \left[ \nabla \cdot \vec{M}' \right].$$

Обозначим  $\vec{f} = [\vec{a} \cdot \vec{r}]$  и рассмотрим

$$\begin{aligned} \text{div} [\vec{M}' \cdot \vec{f}] &= \nabla [\vec{M}' \cdot \vec{f}] = \nabla \left[ \vec{M}' \cdot \vec{f} \right] + \nabla \left[ \vec{M}' \cdot \vec{f} \right] = \vec{f} [\nabla \cdot \vec{M}'] - \vec{M}' [\nabla \cdot \vec{f}] = \\ &= \text{div} [\vec{M}' [\vec{a} \cdot \vec{r}]] + \vec{M}' \text{rot} [\vec{a} \cdot \vec{r}] = \text{div} [\vec{M}' [\vec{a} \cdot \vec{r}]] + 2(\vec{a} \cdot \vec{M}'). \end{aligned} \quad (11.15)$$

Подставляя (11.15) в (11.16) и используя теорему Остроградского–Гаусса, а также учитывая произвольность вектора  $\vec{a}$ , находим:

$$\vec{M}' = c \cdot \vec{M}. \quad (11.16)$$

Таким образом, в отсутствие электрического поля

$$\vec{j} = c \cdot \text{rot} \vec{M}, \quad (11.17)$$

кроме того, используя теорему Стокса, можно показать:

$$\int \vec{j} dS = 0. \quad (11.18)$$

Выражение (11.17) справедливо и для статического электрического поля. При наличии переменного электромагнитного поля, когда  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \neq 0$ , величина  $\frac{\vec{M}'}{c}$  не совпадает с вектором намагниченности  $\vec{M}'$ . Однако формула

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \cdot \text{rot} \vec{M} \quad (11.19)$$

справедлива, если  $\vec{M}'$  не считать плотностью магнитного момента.

Подставим в систему уравнений (10.9) соотношения (11.8) и (11.9) для плотностей наведенных зарядов и токов.

Получим:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div}(\vec{E} + 4\pi \vec{P}) = 4\pi \rho_{\text{ext}}, \\ \text{rot}(\vec{B} - 4\pi \vec{M}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + 4\pi \vec{P}), \\ \text{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (11.20)$$

## 12. Уравнения Максвелла в средах, уравнения связи

Система (11.20) наиболее похожа на систему уравнений в вакууме. Если ввести два новых вектора поля:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}; \quad (12.1)$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}, \quad (12.2)$$

то система уравнений (11.20) примет вид:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{D} = 4\pi \rho_{\text{ext}}, \\ \text{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{B} = 0. \end{aligned} \quad (12.3)$$

В отличие от систем уравнений Максвелла в вакууме, в систему уравнений в среде (12.3) входят четыре вектора:  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ , поэтому система уравнений (12.3) не замкнута, и ее следует дополнить уравнениями, устанавливающими дополнительные связи между четырьмя векторами поля.

До сих пор мы рассматривали уравнения Максвелла в средах, разделяя заряды на связанные ( $\rho = \bar{\rho}_{связ}$ ) и сторонние ( $\rho_{ext}$ ). При плотности токов  $\overrightarrow{\rho v}_{связ} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot} \vec{M}$  и ( $\vec{j}_{ext}$ ), причем  $\vec{P}$  и  $\vec{M}$  сами зависят от  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Если рассматривать проводники, где наряду со связанными зарядами имеются и свободные, то в этом случае под действием приложенного поля в них возникает макроскопическое движение свободных зарядов, то есть электрический ток. Такой ток называется током его проводимости:

$$\overline{\rho v}_{своб} = \vec{j}. \quad (12.4)$$

С учетом связанных зарядов и тока проводимости для средней плотности макроскопического тока имеем:

$$\overline{\rho v} = \overline{\rho v}_{связ} + \overline{\rho v}_{своб} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot} \vec{M}. \quad (12.5)$$

В этом случае средняя плотность микроскопических зарядов (вместо (11.8)  $\rho = -\text{div} \vec{P}$ ) составляет:

$$\bar{\rho} = \rho - \text{div} \vec{P}, \quad (12.6)$$

где

$$\rho = \overline{\rho}_{своб} + \overline{\rho}_{связ}. \quad (12.7)$$

Нужно убедиться, что выполняется условие

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0, \quad (12.8)$$

тогда уравнения (10.9) принимают вид:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{ext}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \text{div} \vec{B} = 0, & \text{div} \vec{D} = 4\pi (\rho + \rho_{ext}), \end{cases} \quad (12.9)$$

где

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}, \quad (12.10)$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}. \quad (12.11)$$

В отличие от системы (12.11) уравнения связи не являются универсальными, они определяются конкретными свойствами рассматриваемой

мой среды. Далее получим уравнения связи для наиболее простых по свойствам сред. Сейчас же предположим, что

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon} \vec{E}, \quad (12.12)$$

$$\vec{B} = \hat{\mu} \vec{H}, \quad (12.13)$$

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E}. \quad (12.14)$$

Под  $\hat{\varepsilon}$ ,  $\hat{\mu}$  и  $\hat{\sigma}$  понимаются некоторые операторы: они могут быть тензорами 2-го ранга, дифференциальными или интегральными операторами, а для медленно меняющихся в пространстве и во времени полей их действие сводится к умножению компонент полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на алгебраические (или тензорные) величины.

Соотношение  $\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E}$  выражает дифференциальный закон Ома, где  $\sigma$  – проводимость металла (вещества).

Операторы  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\mu}$  – операторы диэлектрической и магнитной проницаемости. По своим свойствам к микроскопическим напряженностям  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  ближе всего находятся макроскопические векторы напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$ . Именно они определяют силу, действующую на внесенный в среду заряд:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]). \quad (12.15)$$

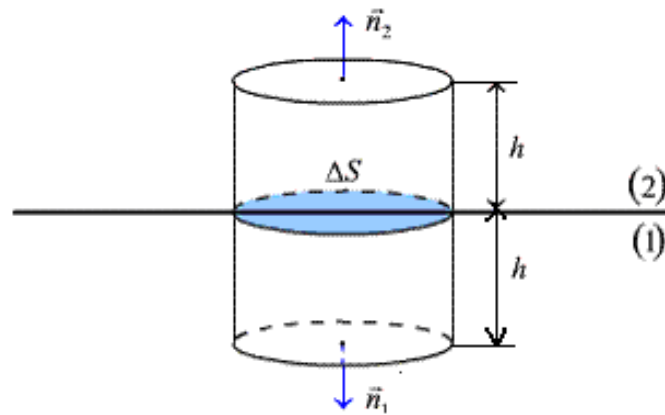


Рис. 12.1а. К выводу граничных условий для полей  $\vec{B}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{H}$ . На границе двух сред (1) и (2) выделим цилиндр с основанием  $\Delta S$  и высотой  $2h$

На поверхности среды, где свойства среды меняются скачком, дифференциальные уравнения (12.9) теряют силу и заменяются граничными условиями:

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = \frac{4\pi}{c}i_v, \quad (12.16)$$



где  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$  – тангенциальные и нормальные компоненты векторов, ток  $i_v$  определен как  $\lim_{h \rightarrow 0} \vec{v} \cdot \vec{h}$  и представляет проекцию на направление  $\vec{v}$  поверхностного тока. Ток  $i$  лежит в касательной плоскости к поверхности  $\Sigma$  и отличен от нуля, если ток конечной силы течет в тонком поверхностном слое. Векторы  $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{v})$  образуют тройку взаимно ортогональных ортов. Цифры 1 и 2 показывают, по какую сторону поверхности берутся векторы.

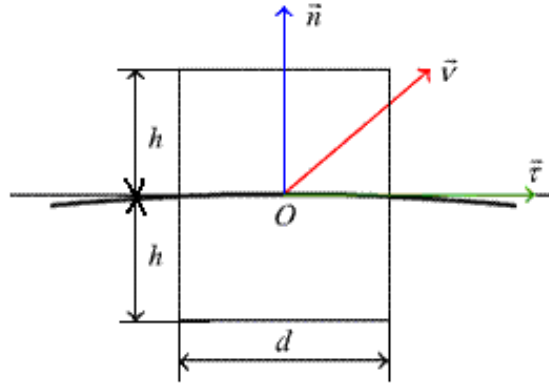


Рис. 12.1б. То же, что и на рис. 12.1а. Вид сбоку. Векторы  $\vec{n}, \vec{v}, \vec{\tau}$  образуют правую тройку векторов

Вычислим  $i_v$  и  $\sigma$  – плотности поверхностного тока и заряда, соответственно:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Delta v} (\rho + \rho_{ext}) dv = \int \sigma dS, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int (\vec{j} + \vec{j}_{ext}) d\vec{S} = i_v.$$

В частном случае изотропных сред компоненты тензоров в уравнениях (12.12 – 12.14) принимают вид:  $\epsilon_{ik} = \epsilon \delta_{ik}$ ,  $\mu_{ik} = \mu \delta_{ik}$ ,  $\sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik}$ , а сами уравнения становятся следующими:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (12.17)$$

На рис. 12.2 показано поведение некоторой физической величины при переходе из среды (1) в среду (2).

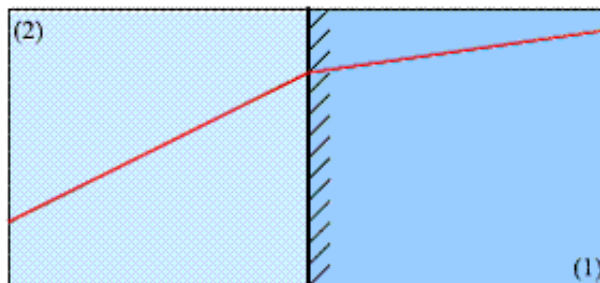


Рис. 12.2. Пример поведения некоторой физической величины при переходе из среды (1) в среду (2)

### 13. Закон сохранения энергии в макроскопической электродинамике

Запишем уравнения макроскопической электродинамики, считая, что нет сторонних токов и зарядов:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (13.1a)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad (13.1б)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (13.1в)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (13.1г)$$

Из уравнений 13.1в и 13.1а следует, что

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div} [\vec{E} \cdot \vec{H}].$$

Кроме того, учтем материальные уравнения:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (13.2)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (13.3)$$

В итоге получим

$$-\operatorname{div} [\vec{E} \cdot \vec{H}] = \frac{1}{c} \left\{ \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (13.4)$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B} \} = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{D} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (13.5)$$

Выразим  $\vec{D} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  через  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\varepsilon$ ,  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \vec{D} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \vec{D} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \right) + \vec{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\vec{B}}{\mu} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \left[ -\frac{\vec{D}^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\vec{B}^2}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right] = \\ &= \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \left[ \vec{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Таким образом, из (13.5) и (13.6) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B} \} = 2 \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{D} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \left[ \vec{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial t} \right].$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{D} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{ \vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B} \} + \frac{1}{2} \left[ \vec{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial t} \right] - \operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] = \\ &= \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \{ \vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B} \} + \frac{1}{2c} \left[ \vec{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial t} \right] + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Если  $\varepsilon$  и  $\mu$  не зависят от времени, то получим:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}] &= \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \{\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}\vec{E}, \\ -\operatorname{div} \frac{c[\vec{E}\vec{H}]}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\{\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\}}{8\pi} + \vec{j}\vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Введем обозначения:

$$\omega = \frac{1}{8\pi} \{\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\} = \frac{1}{8\pi} \{\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2\}, \quad (13.9)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}], \quad (13.10)$$

где  $\omega$  – плотность энергии электромагнитного поля в веществе;  $\vec{S}$  – вектор Умова–Пойнтинга. Уравнение (13.8) примет вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} + \vec{j}\vec{E} = 0. \quad (13.11)$$

Это означает, что уменьшение с течением времени плотности энергии электромагнитного поля в некоторой точке, согласно закону сохранения энергии (13.11), приводит к появлению отличной от нуля дивергенции вектора Пойнтинга и к совершению полем работы над свободными зарядами:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \omega dV = \int dV \operatorname{div} \vec{S} + \int dV \vec{j}\vec{E}. \quad (13.12)$$

Учитывая, что для покоящегося вещества  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt}$ , запишем интегральный закон сохранения энергии в макроскопической электродинамике:

$$-\frac{d}{dt} \int \omega dV = \oint \vec{n}\vec{S} dS + \int_V \vec{j}\vec{E} dV. \quad (13.13)$$

Уменьшение энергии электромагнитного поля в некотором объеме  $V$  равно сумме потока его энергии через поверхность, ограничивающую данный объем, и работе поля, совершаемой в единицу времени над свободными зарядами, содержащимися в объеме  $V$ .

## 14. Быстропеременные поля в веществе

### 14.1. Частотная дисперсия диэлектрической проницаемости

Рассмотрим поля

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}, \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (14.1)$$

При этом частота  $\omega$  не является малой по сравнению с характерными частотами среды. Предполагая, что сторонние заряды и токи отсутствуют, пренебрегаем и магнитными свойствами среды ( $\mu = 1$ ):

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}, t), \quad (14.2)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon \cdot \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (14.3)$$

тогда система уравнений Максвелла примет вид:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c} \vec{H}, \\ \text{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{i\omega\varepsilon}{c} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{i\omega}{c} \vec{D}, \\ \text{div} \vec{B} = \text{div} \vec{H} = 0, \end{cases} \quad (14.4)$$

а уравнения связи запишем:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (14.5)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (14.6)$$

где  $\sigma$  и  $\varepsilon$  зависят от  $\omega$ ,

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{H}, \\ \text{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - i \frac{\omega}{c} \vec{D}, \\ \text{div} \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (14.7)$$

Уравнение

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - i \frac{\omega}{c} \vec{D}$$

можно переписать иначе:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} - i \frac{\omega}{c} \varepsilon \vec{E} = -i \frac{\omega}{c} \left( \varepsilon + \frac{4\pi\sigma}{c} i \right) \vec{E}.$$

Не имеет смысла разделять заряды и токи на свободные и связанные, так как под действием быстропеременного поля и те и другие осциллируют в пространстве, а следовательно, могут быть описаны единым образом. Одно слагаемое в правой части учитывает вклад связанных электронов, а второе  $-\left(\frac{4\pi\sigma}{c} i\right)$  – вклад электронов проводимости.

Удобно ввести единую эффективную диэлектрическую проницаемость среды

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (14.8)$$

Вводя индукцию

$$\vec{D} = \tilde{\varepsilon} \vec{E}, \quad (14.9)$$

запишем:

$$\text{rot} \vec{H} = -\frac{i\omega}{c} \vec{D}. \quad (14.10)$$

Величина  $\varepsilon$ , входящая в  $\tilde{\varepsilon}$ , может быть комплексной. Далее значок  $\sim$  следует опускать, в связи с тем, что учитываются как связанные, так и свободные электроны.

$$\text{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{H}, \quad (14.11)$$

$$\text{rot} \vec{H} = -i \frac{\omega}{c} \vec{D}, \quad (14.12)$$

$$\text{div} \text{rot} \vec{H} = -\frac{\omega}{c} \text{div} \vec{D} = 0, \quad (14.13)$$

то есть  $\text{div} \vec{D} = 0$  и  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ .

Итак, уравнения, представляющие быстропеременные поля в веществе, запишем следующим образом:

$$\text{rot} \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \vec{H},$$

$$\text{rot} \vec{H} = i \frac{\omega}{c} \vec{D},$$

$$\text{div} \vec{D} = 0, \quad (14.14)$$

а уравнение связи:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (14.15)$$

Формально, благодаря гармонической зависимости полей от времени, оператор  $\partial/\partial t$  сводится к замене в уравнениях:  $\partial/\partial t \rightarrow -i \cdot \omega$ .

Если в (14.14) произвести замену:

$$\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad (14.16)$$

то уравнения будут иметь смысл для произвольной зависимости напряженности поля от времени, но это уже будут сложные операторные уравнения, не дифференциальные в общем случае.

В самом деле, уравнение связи

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

для произвольной зависимости от времени означает интегральную связь между индукцией  $\vec{D}$  в момент  $t$  и напряженностью  $\vec{E}$  во все предыдущие моменты времени:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + \int_{-\infty}^t f(t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' = E(\vec{r}, t) + \int_0^{\infty} f(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t-\tau) d\tau. \quad (14.17)$$

Здесь использованы принципы причинности: индукция может зависеть только от напряженности поля в предыдущие моменты времени. Физически это значит, что для быстропеременных полей установление поляризации среды не успевает мгновенно следовать за изменением напряженности. Функция  $f(\tau)$  определяет «память» системы о том поле, которое существовало в предыдущие моменты времени. Формально

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon} \cdot \vec{E},$$

где  $\hat{\varepsilon}$  – линейный интегральный оператор.

Разложим  $\vec{D}(t)$  и  $\vec{E}(t)$  в интеграл Фурье:

$$\int \vec{D}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} dt = \int \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(\tau) \int E(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega(t-\tau)} dt.$$

При этом получим соотношение:

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \vec{E}(\vec{r}, \omega) \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \vec{E}(\vec{r}, \omega) \left[ 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right] = \varepsilon \vec{E}(\vec{r}, \omega),$$

то есть

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon(\omega) \vec{E}, \quad (14.18)$$

где

$$\hat{\varepsilon} \cong \varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (14.19)$$

Запишем  $\varepsilon$  как комплексную величину:

$$\varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega) = \varepsilon(\omega). \quad (14.20)$$

Из (14.19) и (14.20) следуют формулы:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega\tau, \quad (14.21)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \int_0^{\infty} df(\tau) \sin \omega\tau, \quad (14.22)$$

причем

$$\varepsilon_1(-\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) \cos(-\omega\tau) = \varepsilon_1(\omega), \quad (14.23)$$

$$\varepsilon_2(-\omega) = -\varepsilon_2(\omega). \quad (14.24)$$

Соотношения четности для

$$\varepsilon_{1,2}(-\omega) = \pm \varepsilon_{1,2}(\omega) \quad (14.25)$$

можно объединить, если записать:

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon(\omega)^* \quad (14.26)$$

О зависимости диэлектрической проницаемости от частоты говорят, как о частотной дисперсии диэлектрической проницаемости.

### 15. Поведение диэлектрической проницаемости при малых и больших частотах

При малых частотах  $\varepsilon(\omega)$  можно разложить в ряд по степеням  $\omega$ . Разложение  $\varepsilon_1(\omega)$  держит лишь четные степени  $\omega$ , а  $\varepsilon_2(\omega)$  – нечетные. В пределе  $\omega \rightarrow 0$  в диэлектрике  $\varepsilon(\omega)$  стремится к  $\varepsilon(0)$  – статическому значению диэлектрической проницаемости:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon(\omega) = \varepsilon(0). \quad (15.1)$$

Проведем разложение  $\varepsilon(\omega)$  в ряд Маклорена:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(0) + \frac{\partial \varepsilon(\omega)}{\partial \omega^2} \omega^2 + \dots + i \left( \varepsilon'(0)\omega + \frac{\varepsilon''(\omega)\omega^3}{3!} + \dots \right), \quad (15.2)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(0) \equiv \varepsilon(0).$$

В проводниках, с учетом того, что теперь в  $\varepsilon$  включена и проводимость  $\sigma$ , при  $\omega \rightarrow 0$  диэлектрическая проницаемость имеет полюс:

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (15.3)$$

где  $\sigma$  – обычная проводимость для постоянного тока.

Возникает вопрос, существует ли вообще область частот, где уже существенны дисперсионные явления, но еще допустимо макроскопическое описание. Нужно посмотреть, совместимы ли условия – дисперсия, существенная для  $\omega \geq \frac{1}{t_{\text{пер}}}$ , и  $t_{\text{пер}}$  установления электрической поляризации (наиболее быстрый – электронный механизм).

Очевидно, что

$$t_{\text{пер}} \sim \frac{a}{v}, \quad \omega \geq \frac{v}{a}, \quad (15.4)$$

где  $a$  – атомные размеры;  $v$  – характерная скорость электрона.

Сформулируем условие применимости макроскопического описания: длина волны  $\lambda$ , на которой существенно меняется напряженность поля, должна быть больше  $a$ . Циклическая частота  $\omega$  связана с линейной частотой  $\nu$  соотношением

$$\omega = 2\pi\nu,$$

поэтому условие

$$\lambda = cT \gg a \text{ означает: } \frac{c}{\nu} \gg a \text{ или } \frac{2\pi c}{\omega} \gg a,$$

или

$$\omega \ll \frac{c}{a}. \quad (15.5)$$

Так как  $\frac{\nu}{c} \sim \frac{1}{137}$ , то неравенства  $\omega \geq \frac{\nu}{a}$  и  $\omega \ll \frac{c}{a}$  могут одновременно выполняться, и указанная область частот существует.

При больших частотах для всех веществ  $\varepsilon \rightarrow 1$ .

Это следует из того, что при достаточно быстром изменении напряженности процессы, приводящие к установлению отличной от  $\vec{E}$  индукции  $\vec{D}$ , не успевают происходить. Если  $\omega$  больше всех характерных частот среды, то можно найти предельный вид функции  $\varepsilon(\omega)$ , справедливый для любых веществ.

### 15.1. Нахождение предельного вида $\varepsilon(\omega)$ . Плазменная частота

Итак, пусть  $\omega$  достаточно велико, то есть превышает все характерные частоты среды. Тогда при вычислении плотности дипольного момента вещества электроны можно рассматривать как свободные, так как нас интересуют времена, эквивалентные  $\frac{1}{\omega}$ . Путь, пройденный электроном за это время, составит  $\frac{\nu}{\omega} < \frac{c}{\omega}$ , то есть он меньше пути, на котором существенно меняется напряженность поля. Поэтому при определении смещения электрона под действием поля можно считать это поле однородным.

Запишем уравнение движения

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}, \quad (15.6)$$

где

$$\vec{E} = \vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}. \quad (15.7)$$

Решение найдем в виде

$$\vec{r}(t) = \vec{a}e^{-i\omega t}. \quad (15.8)$$

Подставляя (15.8) в (15.6), получим соотношение

$$\ddot{\vec{r}} = -\vec{a}\omega^2 e^{-i\omega t} = \frac{e}{m}\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}, \quad (15.9)$$

из которого следует, что



$$\vec{a} = -\frac{e}{m\omega^2} \vec{E}(\omega), \quad (15.10)$$

$$\vec{r}(t) = -\frac{e}{m\omega^2} \vec{E}.$$

Если умножим  $\vec{r}(t)$  на  $N \cdot e$ , где  $N$  – концентрация электронов, то получим

$$\vec{P} = -\frac{Ne^2}{m\omega^2} \vec{E}. \quad (15.11)$$

Так как индукция  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ , то

$$\vec{D} = \left(1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}\right) \vec{E} = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \vec{E}, \quad (15.12)$$

где

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m}}. \quad (15.13)$$

Величину  $\omega_p$  называют плазменной частотой.

С другой стороны,  $\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E}$ ,

то есть 
$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (15.14)$$

Итак, для описания быстропеременных полей в веществе для произвольной зависимости напряженности от времени используется уравнение связи вида

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = E(\vec{r}, t) + \int_0^\infty f(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau, \quad (15.15)$$

а вместо уравнений

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{H}, \\ \text{rot} \vec{H} = -\frac{i\omega}{c} \vec{D} \end{cases} \quad (15.16)$$

используются уравнения:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \text{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{cases} \quad (15.17)$$

## 16. Комплексная диэлектрическая проницаемость разреженного нейтрального газа

Рассмотрим задачу о прохождении электромагнитной волны в разреженном газе. Напряженности полей изменяются по гармоническому закону:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.\end{aligned}\quad (16.1)$$

Под действием электромагнитной волны возникает переменный дипольный момент  $\vec{P} = \vec{P}(t)$ , функционально зависящий от полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  волны и свойств атомов среды.

Обозначим электрический дипольный момент одного атома  $\vec{d}(t)$ . Если в единице объема среды находится  $N$  атомов, то

$$\vec{P} = N\vec{d}(t).\quad (16.2)$$

Поэтому для монохроматической волны (в отсутствие дисперсии)

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E}$$

и

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi N\vec{d}(t).\quad (16.3)$$

Таким образом, для нахождения  $\varepsilon(\omega)$  нужно знать явную зависимость  $\vec{d}$  от  $\vec{E}$ . В классической теории такую зависимость получают на основе осцилляторной модели атома, в которой атом рассматривается как неподвижное ядро с движущимися вокруг него точечными нерелятивистскими электронами.

Пусть  $m$ ,  $e$  – масса электрона и заряд, соответственно;  $\gamma$  – коэффициент, характеризующий при  $\gamma > 0$  затухание (или, по другому, диссипативные свойства осциллятора), при  $\gamma < 0$  – антидиссипативные свойства осциллятора,  $\vec{R}_0$  – радиус-вектор электрона в отсутствие возмущающей силы (ее роль играет электромагнитная волна),  $\vec{R}(t)$  – радиус-вектор электрона при наличии возмущения,  $\omega_0$  – собственная частота осциллятора.

$$\text{Квазиупругая сила равна: } -\kappa(\vec{R} - \vec{R}_0) = -\frac{\kappa}{m}m(\vec{R} - \vec{R}_0) = -\omega_0^2 m(\vec{R} - \vec{R}_0).$$

Уравнение движения осциллятора под действием возмущающей силы запишем в виде

$$m\ddot{\vec{R}} + m\gamma\dot{\vec{R}} + m\omega_0^2(\vec{R} - \vec{R}_0) = \vec{F},\quad (16.4)$$

где

$$\vec{F} = e\left\{\vec{E}_0 + \frac{1}{c}\left[\dot{\vec{R}}\vec{H}_0\right]\right\}e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{R})}\quad (16.5)$$

называется силой Лоренца электромагнитной волны.

Так как вектор смещения электрона  $\vec{r}$  относительно положения равновесия равен  $(\vec{R} - \vec{R}_0)$ , то

$$m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} + m\omega_0^2\vec{r} = e\left\{\vec{E}_0 + \frac{1}{c}\left[\dot{\vec{R}}\vec{H}_0\right]\right\}e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (16.6)$$

где

$$\vec{E}_0 = \tilde{E}e^{i\vec{k}\vec{R}_0}, \quad \vec{H}_0 = \tilde{H}e^{i\vec{k}\vec{R}_0}. \quad (16.7)$$

Уравнение (16.6) нелинейное и в общем виде не решено. Его линеаризуют, используя малость входящих в него параметров. В нерелятивистском случае (а электрон в атоме как раз нерелятивистский)  $\frac{g}{c} \ll 1$ , кроме того в электромагнитной волне  $|\vec{E}_0| \sim |\vec{H}_0|$ , поэтому магнитной частью силы Лоренца можно пренебречь. Учтем также, что смещение  $|\vec{r}| \ll a$ , где  $a$  – межатомное расстояние, и в связи с этим с точки зрения микроскопичности электродинамики можно считать  $\vec{k}\vec{r} = 0$  и  $e^{i\vec{k}\vec{r}} = 1$ . Тогда

$$m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} + m\omega_0^2\vec{r} = e\vec{E}_0e^{-i\omega t}. \quad (16.8)$$

Умножим уравнения (16.8) на  $e$  и учтем, что  $\vec{d} = e\vec{r}$ , где  $\vec{d}$  – дипольный момент:

$$\ddot{\vec{d}} + \gamma\dot{\vec{d}} + \omega_0^2\vec{d} = \frac{e^2}{m}\vec{E}_0e^{-i\omega t}. \quad (16.9)$$

Вообще говоря, решением уравнения (16.9) является сочетание общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Решением однородного уравнения является линейная комбинация двух независимых решений, константы при которых определяются из начальных условий. Необходимо учитывать, что при любых начальных условиях эти решения стремятся к нулю за счет  $e^{-\gamma t}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Из этого вытекает, что решение уравнения (16.9) будем искать как частное решение неоднородного уравнения.

Итак, решение найдем в виде

$$\vec{d} = \vec{d}_0e^{-i\omega t}. \quad (16.10)$$

Подставим выражения для  $\vec{d}$  в (16.9):

$$[\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega]\vec{d} = \frac{e^2}{m}\vec{E}_0e^{-i\omega t} = \frac{e^2}{m}\vec{E},$$

откуда находим:

$$\vec{d} = \frac{e^2\vec{E}}{m[\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega]} = \frac{e^2}{m} \frac{\vec{E}[\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (16.11)$$

Колебания векторов  $\vec{d}$  и  $\vec{E}$  происходят не в фазе. Действительно, представим величину

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} = \rho e^{i\psi} \quad (16.12)$$

как

$$z = a + ib = |z|e^{i\psi}, \quad (16.13)$$

где

$$|z| \equiv \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \psi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \psi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (16.14)$$

как видно из рис. 16.1.

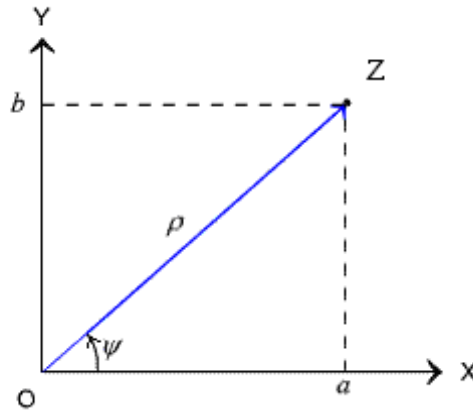


Рис. 16.1. Формы представления комплексного числа

В результате находим

$$\cos \psi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \frac{1}{\sqrt{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^2}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \quad (16.15)$$

и

$$\sin \psi = \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}.$$

Из выражения для  $d$  (16.11) и формул (16.12–16.15) видим, что

$$\vec{d} = \frac{e^2 \vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} = \frac{e^2 \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \psi)}}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}. \quad (16.16)$$

Сравнив с  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ , убеждаемся, что разность фаз  $\psi$  между колебаниями векторов  $\vec{d}$  и  $\vec{E}$  зависит как от частоты падающей волны, так и от характеристик атома  $\gamma$  и  $\omega_0$ .

Исследуем зависимость разности фаз  $\psi$  от частоты

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Очевидно, что

$$\begin{cases} 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} & \text{— при } \omega < \omega_0, \\ \psi = \frac{\pi}{2} & \text{— в резонансе,} \\ \frac{\pi}{2} < \psi \leq \pi & \text{— при } \omega_0 < \omega < \infty. \end{cases} \quad (16.17)$$

Найдем вектор поляризации среды с учетом (16.11):

$$\vec{P} = N\vec{d} = \frac{e^2 N \vec{E} [\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega]}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (16.18)$$

Зная вектор поляризации среды, найдем выражение для вектора индукции:

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} \left[ 1 + \frac{4\pi e^2 N [\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega]}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right]. \quad (16.19)$$

Обычно вводят обозначение:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \quad (16.20)$$

где  $\omega_p$  — плазменная частота (частота плазменных колебаний или ленгмюровская частота), поэтому в уравнении связи

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E}$$

диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  зависит от частоты и имеет вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2 [\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (16.21)$$

Как следует из формулы (16.21),  $\varepsilon(\omega)$  зависит не только от среды (через  $\gamma$  и  $\omega_0$ ), но и от частоты  $\omega$  падающего электромагнитного излучения и, в общем случае, оказывается комплексной величиной

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'', \quad (16.22)$$

$$\varepsilon' = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad (16.23)$$

$$\varepsilon'' = \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (16.24)$$

Колебания вектора индукции  $\vec{D}$  происходят за счет комплексности  $\varepsilon(\omega)$  не в фазе с  $\vec{E}$ :

$$\vec{D} = (\varepsilon' + i\varepsilon'') \vec{E} = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \eta)}, \quad (16.25)$$

$$\eta = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \operatorname{arctg} \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2 \right] + \omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (16.26)$$

Проанализируем зависимость  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon''$  от частоты. Вся область частот может быть разделена на три области, в зависимости от знака производной  $\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega}$  (рис. 16.2).

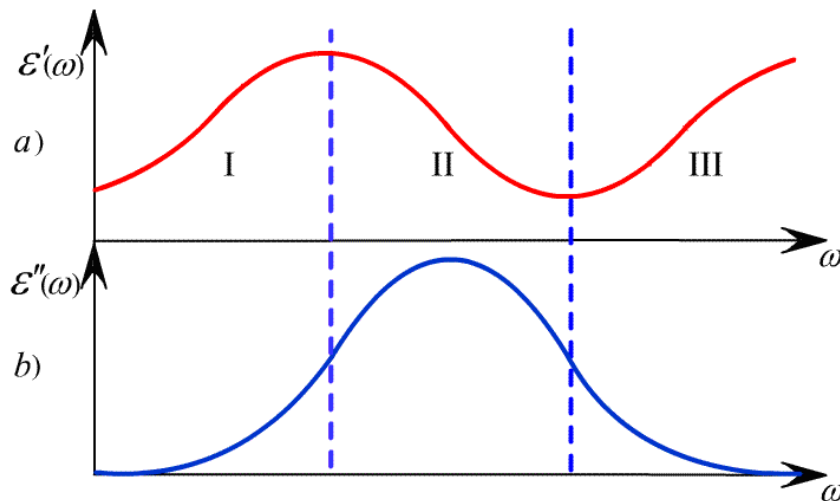


Рис. 16.2. Графики зависимости вещественной и мнимой части диэлектрической проницаемости от частоты  $\omega$ :  
 а – вещественная часть  $\varepsilon'(\omega)$ ; б – мнимая часть  $\varepsilon''(\omega)$ .

Области I и III, где  $\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} > 0$ , – области нормальной дисперсии;

область II, где  $\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} < 0$ , – область аномальной дисперсии

Значения  $\varepsilon''(\omega)$  значительно больше в области II, чем в областях I и III.

Мнимая часть диэлектрической проницаемости, то есть  $\varepsilon''$ , связана с диссипационным членом ( $\sim \gamma$ ). Поэтому в области II поглощение энергии электромагнитной волны средой много больше, чем в областях I и III с нормальной дисперсией.

Сравнительно большим значениям  $\varepsilon''$  соответствует область непрозрачности, а малым – области прозрачности.

Важным частным случаем выражения (16.21) является диэлектрическая проницаемость плазмы и плазмopodobных сред. В таких средах электроны и ядра не связаны в атомы, следовательно квазиупругая (возвращающая) сила равна 0 ( $\omega_0 = 0$ ). Тогда при отсутствии поглощения ( $\gamma = 0$ )

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (16.27)$$

Это означает, что при совпадении частоты вынуждающих колебаний с плазменной частотой диэлектрическая проницаемость плазмopodobных сред равна 0.

## 17. Физический смысл мнимой части $\varepsilon$

Для макроскопической электродинамики из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (17.1)$$

и материальных уравнений:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (17.2)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (17.3)$$

можно получить закон сохранения энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} + \vec{j} \vec{E} = 0, \quad (17.4)$$

где

$$\omega = \frac{1}{8\pi} \{ \vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B} \} = \frac{1}{8\pi} \{ \varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2 \} \quad (17.5)$$

– плотность энергии электромагнитного поля в веществе, а  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$  – вектор Умова–Пойнтинга.

Интегральный закон сохранения энергии имеет вид

$$-\frac{d}{dt} \int \omega dV = \oint \vec{n} \vec{S} dS + \int \vec{j} \vec{E} dV, \quad (17.6)$$

а в отсутствие свободных зарядов закон представляется как

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \oint_S \vec{n} \vec{S} dS. \quad (17.7)$$

То есть уменьшение энергии электромагнитного поля в некотором объеме среды  $V$  равно сумме потока его энергии через поверхность, ограничивающую данный объем  $V$ .

В предыдущем разделе мы установили связь мнимой части диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega)$  с диссипацией (или антидиссипацией) энергии электромагнитных волн, распространяющихся в нейтральном разреженном газе:

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (17.8)$$

Из этого выражения следует, что

$\gamma > 0$  – соответствует затуханию или диссипативным свойствам осциллятора;  
 $\gamma < 0$  – соответствует антидиссипации, например для лазерных сред.

Это свойство присуще и другим материальным средам. Наличие  $\varepsilon''(\omega) \neq 0$  у комплексной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega)$  означает, что среда либо поглощает энергию электромагнитного поля, переводя ее в другие виды энергии (тепло, например), либо передает запасенную в ней энергию электромагнитной волне (антидиссипирующие среды, лазерные среды).

Если  $\Pi \equiv \oint_S \vec{n} dS < 0$ , то происходит диссипация энергии, если  $\Pi > 0$ , то энергия, например, возбужденных электронов, находящихся на метастабильных уровнях атомов лазерных сред, при прохождении электромагнитного излучения переходит в электромагнитную энергию, увеличивая поток энергии выходящих электромагнитных волн.

Рассмотрим задачу: определить, как знак потока  $\Pi$  связан с выражением  $\text{Im} \varepsilon(\omega) \equiv \varepsilon''(\omega)$ .

По определению

$$\Pi = \oint_S \vec{n} dS = \int_V \text{div} \vec{S} dV, \quad (17.9)$$

где вторая часть равенства записана на основании теоремы Остроградского–Гаусса, причем

$$\text{div} \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \text{div} [\vec{E} \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} \{ \vec{H} \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} \vec{H} \}. \quad (17.10)$$

Из уравнений Максвелла:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (17.11)$$

следует, что



$$\operatorname{div} \vec{S} = \frac{c}{4\pi c} \left\{ -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\}. \quad (17.12)$$

Вообще говоря, векторы  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  должны быть вещественными, и если мы хотим оставить комплексное представление векторов, то в  $\operatorname{div} \vec{S}$  нужно брать их вещественные части:

$$\operatorname{div} \vec{S} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \operatorname{Re} \vec{H} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \vec{B} + \operatorname{Re} \vec{E} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \vec{D} \right\}. \quad (17.13)$$

Так как  $\operatorname{Re} \vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{A}^*)$ , то

$$\operatorname{div} \vec{S} = -\frac{1}{16\pi} \left\{ (\vec{H} + \vec{H}^*) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} + \vec{B}^*) + (\vec{E} + \vec{E}^*) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} + \vec{D}^*) \right\}. \quad (17.14)$$

Допустим, что волна является монохроматической, то есть  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ . То же относится и к полям  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{D}$ .

Для производных от полей по времени получим

$$\frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t} = +i\omega \vec{B}^* \text{ и т. д.}$$

Выражение для дивергенции вектора Умова–Пойнтинга принимает вид

$$\operatorname{div} \vec{S} = -\frac{i\omega}{16\pi} \left\{ (\vec{H} + \vec{H}^*) (\vec{B} - \vec{B}^*) + (\vec{E} + \vec{E}^*) (\vec{D} - \vec{D}^*) \right\}. \quad (17.15)$$

Воспользуемся далее уравнениями:

$$\begin{aligned} \vec{D}(\omega) &= \tilde{\varepsilon}(\omega) \vec{E} = (\varepsilon' + i\varepsilon'') \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \\ \vec{D}^* &= (\varepsilon' - i\varepsilon'') \vec{E}^*, \quad \vec{B}^* = \mu \vec{H}^*, \end{aligned} \quad (17.16)$$

после чего формула (17.15) преобразуется в следующую:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{S} &= \frac{i\omega}{16\pi} \left\{ \mu (\vec{H}^2 - \vec{H}^{*2}) + (\vec{E} + \vec{E}^*) \left[ (\varepsilon' + i\varepsilon'') \vec{E} - (\varepsilon' - i\varepsilon'') \vec{E}^* \right] \right\} = \\ &= \frac{i\omega}{16\pi} \left\{ \mu (\vec{H}^2 - \vec{H}^{*2}) + \varepsilon' (\vec{E}^2 + \vec{E}^{*2}) + i\varepsilon'' (\vec{E}^2 + 2\vec{E}\vec{E}^* + \vec{E}^{*2}) \right\}. \end{aligned} \quad (17.17)$$

Это выражение не удобно для анализа, так как содержит быстро осциллирующие члены  $\vec{H}^2$ ,  $\vec{E}^2$ ,  $\vec{H}^{*2}$ ,  $\vec{E}^{*2}$  с частотой  $2\omega$ :

$$\vec{H}^2 = (\vec{H}_0 e^{-i\omega t})^2 = \vec{H}_0^2 e^{-2i\omega t}. \quad (17.18)$$

Усредним выражение  $\vec{\Pi}$  по периоду волны:  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c}$ ,

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_V \operatorname{div} \vec{S} dV dt = \int dV \overline{\operatorname{div} \vec{S}}, \quad (17.19)$$

где

$$\overline{\operatorname{div} \vec{S}} = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{div} \vec{S} dt. \quad (17.20)$$

При усреднении квадратов полей возникает интеграл:

$$\int_0^T dt e^{-2i\omega t} = \int_0^T dt e^{2i\omega t} = 0,$$

и величины  $\vec{H}^2$ ,  $\vec{E}^2$ ,  $\vec{H}^{x2}$ ,  $\vec{E}^{x2} \sim e^{-2i\omega t}$  будут отсутствовать в выражении для  $\overline{\operatorname{div} \vec{S}}$ .

В итоге получим

$$\overline{\operatorname{div} \vec{S}} = -\frac{\omega \varepsilon''}{8\pi} \vec{E} \vec{E}^x = -\frac{\omega \varepsilon''}{8\pi} |\vec{E}|^2. \quad (17.21)$$

Так как  $\omega |\vec{E}|^2 > 0$ , то знак  $\overline{\operatorname{div} \vec{S}}$ , а следовательно, и знак  $\bar{\Pi}$  зависят от знака  $\varepsilon''$ .

Если  $\varepsilon'' > 0$ , то  $\overline{\operatorname{div} \vec{S}} < 0$  в каждой точке объема  $V$ , а следовательно, и  $\bar{\Pi} < 0$ .

Итак,  $\varepsilon'' \neq 0$  является прямым следствием диссипационных свойств этой среды.

По определению,  $\Pi = \oint_S \vec{S} \vec{n} dS$  представляет поток энергии через поверхность  $S$ , внутри которой заключен выделенный объем  $V$  среды.

Осциллирующие слагаемые описывают обмен энергией между полем и средой: поле, ускоряя заряды, отдает им свою энергию, заряды же, двигаясь ускоренно (в том числе и при торможении), излучают, и в результате энергия переходит к полю.

В среднем же этот процесс не влияет на обмен энергией между средой и полем. На обмен оказывают влияние только слагаемые, не зависящие от времени.

В состоянии термодинамического равновесия среда всегда поглощает излучение и  $\varepsilon'' > 0$ . Однако можно создать и такое состояние среды, при котором  $\varepsilon'' < 0$  и происходит усиление проходящей электромагнитной волны.

При некоторых значениях частоты  $\varepsilon'' = 0$  среда становится прозрачной для излучения с такой частотой. Области частот, при которых значения  $\varepsilon''$  достаточно малы, называются областями прозрачности вещества.

## 18. Дисперсионные соотношения Крамерса–Кронига

Даже для простейшей материальной среды разреженного нейтрального газа колебание вектора  $\vec{P}$  под действием внешней электромагнитной волны запаздывает по фазе по сравнению с колебаниями  $\vec{E}$ :

$$\vec{P} = N\vec{d} = \frac{Ne^2 \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \psi)}}{m\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 \omega^2}}, \quad (18.1)$$

$$\psi = \text{arctg} \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (18.2)$$

то есть вектор  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$  в каждый фиксированный момент времени определяется не только значением  $\vec{E}$ , взятым в тот же момент  $t$ , но и значениями поля в предыдущие моменты времени.

$$D(t) = \vec{E}(t) + 4\pi \int_0^t f(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau, \quad (18.3)$$

где функция  $f(\tau)$  зависит от свойств среды и отражает влияние поля  $\vec{E}$  в предшествующие моменты времени на состояние  $\vec{D}$  в данный момент  $t$ . Очевидно,  $f(\tau)$  – ограниченная функция при всех  $\tau$  и достаточно быстро и гладко стремится к 0 при  $\tau \rightarrow \infty$ . Разложим (18.3) в интеграл Фурье по времени:

$$\vec{D}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \vec{D}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (18.4)$$

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (18.5)$$

Подставляя (18.4) и (18.5) в (18.3), получим

$$\vec{D}(\omega) = \vec{E}(\omega) \left\{ 1 + 4\pi \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right\}. \quad (18.6)$$

Для изотропных сред связь между  $\vec{D}$  и  $t$  при каждом фиксированном значении  $\omega$  имеет вид:

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega). \quad (18.7)$$

Сравнивая (18.6) и (18.7), получим

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (18.8)$$

Это соотношение получено без какой-либо детализации свойств среды, а только исходя из принципа причинности. Поэтому оно должно быть справедливым для широкого класса материальных сред.

Используя соотношение (18.8), выясним свойства  $\varepsilon(\omega)$ .

Так как функция вещественная, а

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega), \quad (18.9)$$

то получим

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (18.10)$$

$$\varepsilon''(\omega) = 4\pi \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (18.11)$$

Из соотношений (18.10) и (18.11) следует:

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega), \quad (18.12)$$

$$\varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega). \quad (18.13)$$

В соотношении (18.8) перейдем к комплексным значениям

$$\omega \rightarrow z = x + iy, \quad (18.14)$$

где  $z$  – комплексная частота,

$$\varepsilon(z) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{iz} d\tau. \quad (18.15)$$

В отличие от (18.8) мы переопределим функцию  $f(\tau)$ :

$$4\pi f(\tau) \rightarrow f(\tau), \quad (18.16)$$

что, очевидно, не влияет на свойства  $\varepsilon$ .

Запишем (18.5) в виде

$$\varepsilon(z) \equiv \varepsilon(x + iy) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\tau x} e^{-\tau y} d\tau. \quad (18.17)$$

Интеграл (18.17) сходится при всех  $y > 0$ , так как функция  $f(\tau)$  является ограниченной. Кроме того, в случае диэлектрических сред функция  $f(\tau)$  быстро стремится к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ , поэтому интеграл сходится и при  $y = 0$ . Это значит, что функция  $\varepsilon(z)$  не имеет никаких особенностей в верхней полуплоскости, в том числе и на вещественной оси, то есть при  $y = 0$ , за исключением начала координат, где для проводников имеется простой полюс.

Рассмотрим в качестве среды диэлектрики.

С учетом сказанного, интеграл  $I$  по замкнутому контуру  $C$  (рис. 18.1) равен 0:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{\varepsilon(z) - 1}{z - \omega} dz \equiv \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \omega} dz = 0, \quad (18.18)$$

где

$$f(z) = \varepsilon(z) - 1. \quad (18.19)$$

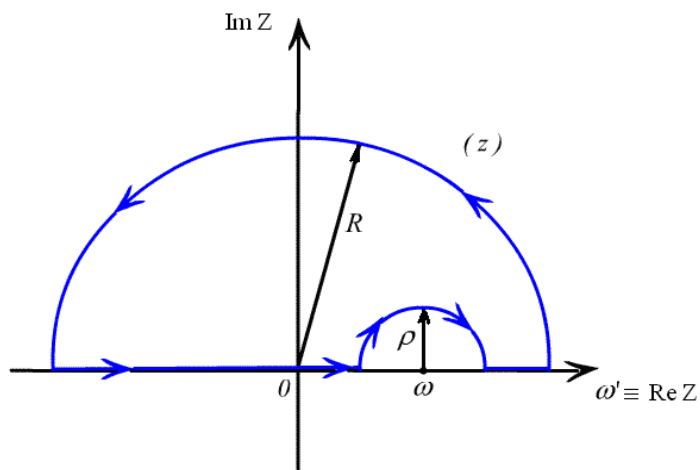


Рис. 18.1. Вид замкнутого контура  $\Gamma$  в комплексной плоскости переменной  $z = \omega' + i\omega''$  при вычислении интеграла 18.18

В соответствии с интегральной формулой Коши интеграл по замкнутому контуру  $\Gamma$ , ограничивающему область, внутри которой некоторая функция  $f(z)$  аналитична, сводится к функции  $f$ , взятой в некоторой точке  $\omega$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - \omega} = \begin{cases} f(\omega), & \text{если } \omega \text{ находится внутри контура,} \\ 0, & \text{если } \omega \text{ находится вне контура.} \end{cases} \quad (18.20)$$

Если точка  $\omega$  лежит на контуре интегрирования, формула Коши имеет вид:

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(z) dz}{z - \omega}. \quad (18.21)$$

Интеграл по действительной оси с исключительной особой точкой  $\omega$  вычисляется в смысле главного значения:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\omega - \rho} \frac{f(x)}{x - \omega} dx + \int_{\omega + \rho}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \omega} dx \right\} = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - \omega} dx, \quad (18.22)$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0, \quad (18.23)$$

где введены обозначения для интегралов:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\omega - \rho} \frac{\varepsilon(x) - 1}{x - \omega} dx, \quad I_3 = \int_{\omega + \rho}^{\infty} \frac{\varepsilon(x) - 1}{x - \omega} dx, \\ I_2 = \int_{C_\rho} \frac{\varepsilon(z) - 1}{z - \omega} dz, \quad I_4 = \int_{C_R} \frac{\varepsilon(z) - 1}{z - \omega} dz. \quad (18.24)$$

и символ  $P$ , стоящий перед интегралом, означает, что интеграл берется в смысле главного значения.

Интеграл  $I_4$  по контуру  $C_R$  равен 0, так как на дуге большого радиуса подынтегральное выражение при  $|z| \rightarrow \infty$  стремится к нулю быстрее, чем  $\frac{1}{|z|}$ . Этот вывод следует из вида функции  $\varepsilon(\omega)$  при больших частотах:  $\varepsilon(\omega) - 1 \sim -\frac{\omega_P^2}{\omega^2}$ , и того факта, что подынтегральное выражение на участке контура  $C_R$  при  $|z| \rightarrow \infty$  ведет себя как  $\frac{1}{|z|^3}$ :

$$I_4 = 0, \quad (18.25)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (I_1 + I_3) = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(x) - 1}{x - \omega} dx, \quad (18.26)$$

и символ  $P$ , стоящий перед интегралом, означает, что интеграл берется в смысле главного значения. Ниже мы будем опускать этот символ.

Вычислим  $I_2$ .

Перейдем от переменной  $z$  к углу  $\varphi$ :

$$z = \omega + \rho e^{i\varphi}, \quad dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi,$$

$$z - \omega = \rho e^{i\varphi},$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{C_{\rho \rightarrow 0}} \frac{[\varepsilon(\omega + \rho e^{i\varphi}) - 1]}{\rho e^{i\varphi}} i\rho e^{i\varphi} d\varphi = i \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 [\varepsilon(\omega + \rho e^{i\varphi}) - 1] d\varphi = \\ &= i \int_{\pi}^0 [\varepsilon(\omega) - 1] d\varphi = -\pi i [\varepsilon(\omega) - 1], \end{aligned}$$

то есть получим

$$I_2 = -\pi i [\varepsilon(\omega) - 1]. \quad (18.27)$$

Так как  $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ , то

$$\varepsilon(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(x) - 1}{x - \omega} dx. \quad (18.28)$$

Под интегралом переменная  $x \equiv \omega'$  пробегает все значения действительной оси, кроме  $\omega$ , то есть

$$\varepsilon(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (18.29)$$

$$\varepsilon(\omega) - 1 = -\frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (18.30)$$

$$\varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) - 1 = -\frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') + i\varepsilon''(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (18.31)$$

Выделим действительную и мнимую части в (18.31):

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (18.32a)$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (18.32b)$$

Формулы (18.32) называются соотношениями Крамерса–Кронига.

Зная  $\varepsilon''(\omega)$  в достаточно широком интервале  $\omega$  (по измерению поглощения электромагнитных волн в среде, так как поглощение связано непосредственно с  $\varepsilon''(\omega)$  – мнимой частью  $\varepsilon(\omega)$ ), проведем интегрирование в первом выражении (18.32) и определим  $\varepsilon'(\omega)$ .

Для проводников формулы Крамерса–Кронига содержат еще в  $\varepsilon(\omega)$  добавку  $i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ , то есть  $\varepsilon(\omega)$  имеет особенность в точке 0. Поэтому нужно в интеграле  $I$  обходить контур вокруг точки  $\omega = 0$  в верхней полуплоскости. Это приводит к соотношению

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (18.33)$$

Придадим соотношениям Крамерса–Кронига другой вид. Учтем свойства:

$$\begin{aligned} \varepsilon'(-\omega) &= \varepsilon'(\omega), \\ \varepsilon''(-\omega) &= -\varepsilon''(\omega). \end{aligned} \quad (18.34)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) - 1 &= \frac{1}{\pi} \left[ P \int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + P \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right] = \\ 1) \quad &= \frac{1}{\pi} P \int_0^{+\infty} d\omega' \left[ -\frac{\varepsilon''(-\omega')}{\omega' + \omega} d\omega' + \frac{\varepsilon''(-\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_0^{+\infty} d\omega' \varepsilon''(\omega') \left[ \frac{1}{\omega' + \omega} + \frac{1}{\omega' - \omega} \right]. \end{aligned} \quad (18.35)$$

Таким образом, получим

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \varepsilon''(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}, \quad (18.36)$$

или

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \varepsilon''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'; \quad (18.37)$$

$$\begin{aligned}
2) \quad \varepsilon''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \left[ P \int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon'(\omega')-1}{\omega'-\omega} d\omega' + P \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega')-1}{\omega'-\omega} d\omega' \right] = \\
&= -\frac{1}{\pi} \left[ -P \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon'(-\omega')-1}{\omega'+\omega} d\omega' + P \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega')-1}{\omega'-\omega} d\omega' \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ P \int_0^{\infty} (\varepsilon'(\omega')-1) \left[ \frac{1}{\omega'-\omega} + \frac{1}{\omega'+\omega} \right] d\omega' \right].
\end{aligned} \tag{18.38a}$$

Принимая во внимание, что при замене  $\omega' \rightarrow -\omega$  выполняется равенство

$$\varepsilon'(-\omega') = \varepsilon'(\omega'),$$

получим соотношение

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega')-1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \tag{18.38б}$$

Для большинства материальных сред функция  $\varepsilon''(\omega)$  имеет один или несколько резких максимумов в окрестности некоторых характерных частот и достаточно быстро спадает к нулю при  $\omega \rightarrow \infty$  и  $\omega \rightarrow 0$ .

Это свойство  $\varepsilon''(\omega)$  позволяет изучить поведение  $\varepsilon'(\omega)$  в области малых и больших частот. Предположим, что  $\varepsilon''(\omega')$  принимает достаточно большие значения лишь в области  $0 < \omega_1 < \omega' < \omega_2$  и стремится к 0 ( $\varepsilon''(\omega') \rightarrow 0$ ) вне этого интервала.

Тогда можно записать:

$$\varepsilon'(\omega) \approx 1 + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\omega' \varepsilon''(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \tag{18.39}$$

При  $\omega \gg \omega_2$  в подынтегральном выражении и  $\omega \gg \omega'$

$$\frac{1}{\omega'^2 - \omega^2} = -\frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}} = -\frac{1}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{\omega'^2}{\omega^2} \right], \tag{18.40}$$

$$\varepsilon'(\omega) \approx 1 - \frac{A_1}{\omega^2} - \frac{A_2}{\omega^4}, \tag{18.41}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega' \varepsilon''(\omega') d\omega', \\
A_2 &= \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega'^3 \varepsilon''(\omega') d\omega'.
\end{aligned} \tag{18.42}$$



Опытные данные говорят, что эта формула хорошо описывает качественное поведение  $\varepsilon'(\omega)$  в области больших частот.

Другой предельный случай:  $\omega \ll \omega_1$ .

В этом случае  $\omega \ll \omega'$ , так как  $\omega' > \omega_1$ :

$$\frac{1}{\omega'^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega'^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2}} = \frac{1}{\omega'^2} \left[ 1 + \frac{\omega^2}{\omega'^2} \right], \quad (18.43)$$

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + B_1 + B_2 \omega^2, \quad (18.44)$$

где

$$B_2 = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega' \varepsilon''(\omega')}{\omega'^3}. \quad (18.45)$$

Используя соотношения, полученные выше, можно убедиться, что выражения (18.41) и (18.44) правильно передают качественное поведение  $\varepsilon'(\omega')$  при наличии простейшей материальной среды – разреженного нейтрального газа.

## 19. Свойства диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$

Диэлектрическая проницаемость представляет комплексную величину

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega), \quad (19.1)$$

причем

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'(-\omega); \quad \varepsilon''(\omega) = -\varepsilon''(-\omega). \quad (19.2)$$

В изотропной и не обладающей магнитными свойствами среде ( $\mu = 1$ ), находящейся в термодинамическом равновесии, величина  $\varepsilon''(\omega)$  имеет свойства:

$$\varepsilon''(\omega > 0) > 0, \quad \varepsilon''(\omega < 0) < 0. \quad (19.3)$$

В диэлектриках при малых частотах

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0. \quad (19.4)$$

В проводящих средах обобщенный вектор индукции

$$\vec{D}(\omega) = \vec{E}(\omega) \left( 1 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega} \right) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega). \quad (19.5)$$

При  $\omega \rightarrow 0$ , величина  $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg 1$ , поэтому

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon(\omega) = \frac{4\pi i \sigma}{\omega}, \quad (19.6)$$

где  $\sigma$  – проводимость, совпадающая при низких частотах со статической проводимостью.

Высокочастотная асимптотика  $\varepsilon(\omega)$  (в отличие от асимптотики  $\varepsilon(\omega)$  при малых  $\omega$ , которая изменяется в различных средах) одинакова для всех сред:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (19.7)$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi Ne^2/m}$  – плазменная частота,  $N$  – концентрация заряженных частиц.

Вид функции (19.7) изображен на рис. 19.1.

При характерной для твердых тел концентрации электронов  $N \sim 10^{22} \div 10^{23} \frac{1}{\text{см}^3}$  для плазменной частоты получим оценку  $\omega_p \sim 10^{16} \frac{1}{\text{с}}$  (ультрафиолетовая часть спектра).

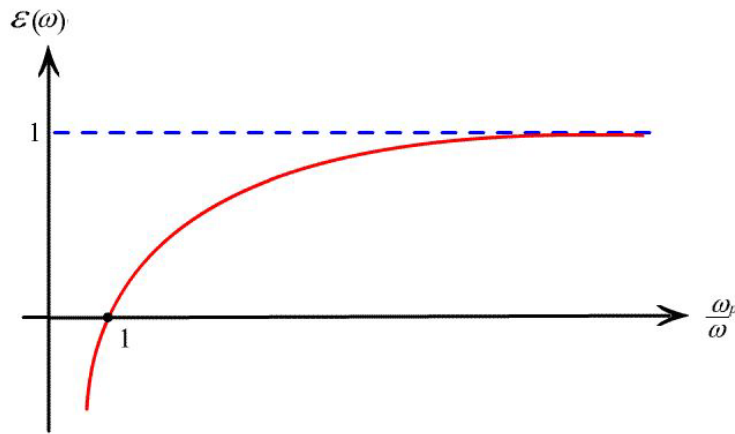


Рис. 19.1. Высокочастотная асимптотика диэлектрической проницаемости

В других средах она может быть значительно меньше.

При характерных для полупроводников концентрациях носителей заряда в зоне проводимости  $\omega_p$  лежит в инфракрасной области. Для лабораторной плазмы  $\omega_p$  находим в СВЧ-диапазоне.

Рассмотрим этапы получения формулы  $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ .

Запишем уравнение движения частицы в высокочастотном поле:

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (19.8)$$

Отсюда находим скорость:

$$\vec{v} = i \frac{e\vec{E}_0}{m\omega} e^{-i\omega t}. \quad (19.9)$$

Зная концентрацию и скорость заряженных частиц, найдем плотность тока:

$$\vec{j} = eN\vec{v} = i \frac{e^2 NE_0 e^{-i\omega t}}{m\omega}. \quad (19.10)$$

Так как в знаменатель входит масса, то достаточно учитывать только легкие частицы (электроны).

Далее можно найти вектор электрической индукции:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad (19.11)$$

где

$$\vec{P} = \int_0^t \vec{j} dt, \quad (19.12)$$

$$\vec{P} = -\frac{e^2 N}{m\omega^2} \vec{E}, \quad (19.13)$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \left(1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}\right) \vec{E}. \quad (19.14)$$

Отсюда находим, согласно формуле  $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ , вид  $\varepsilon(\omega)$ :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (19.15)$$

Учет диссипации (то есть потери энергии, обусловленной столкновениями частиц) означает добавление силы трения в уравнения движения:

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} - \gamma \cdot \dot{\vec{r}}. \quad (19.16)$$

Решая уравнение (19.16), находим выражение для скорости  $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v}$ , а затем – для плотности тока:

$$\vec{j} = \frac{ie^2 \omega N \vec{E}}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)}. \quad (19.17)$$

Для диэлектрической проницаемости в данном случае получим

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\left(\omega + i\frac{\gamma}{2}\right)}. \quad (19.18)$$

Об аналитических свойствах функции  $\varepsilon(\omega)$  мы говорили раньше: для этой функции характерно отсутствие нулей в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\omega = \omega' + i\omega''$  (то есть при  $\omega'' > 0$ ). При  $\omega = 0$  функция  $\varepsilon(\omega)$  имеет полюс, который при вычислении интеграла  $\oint \frac{\varepsilon(z)-1}{z-\omega} dz$  обходится по контуру, указанному на рис. 19.2.

Существование временной дисперсии диэлектрической проницаемости обусловлено тем, что реакция среды запаздывает и определяется полем не только в данный момент  $t$ , но и во все предыдущие моменты времени. Параметром, позволяющим оценить существенность временной дисперсии, является отношение  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , то есть отношение частоты поля к характерным собственным частотам движения зарядов в среде. Частот  $\omega_0$  у среды может быть несколько. Важнейшая из них – частота движения электронов на длинах атомного масштаба

$$\omega_0 \sim (10^{15} \div 10^{16}) \frac{1}{c}. \quad (19.19)$$

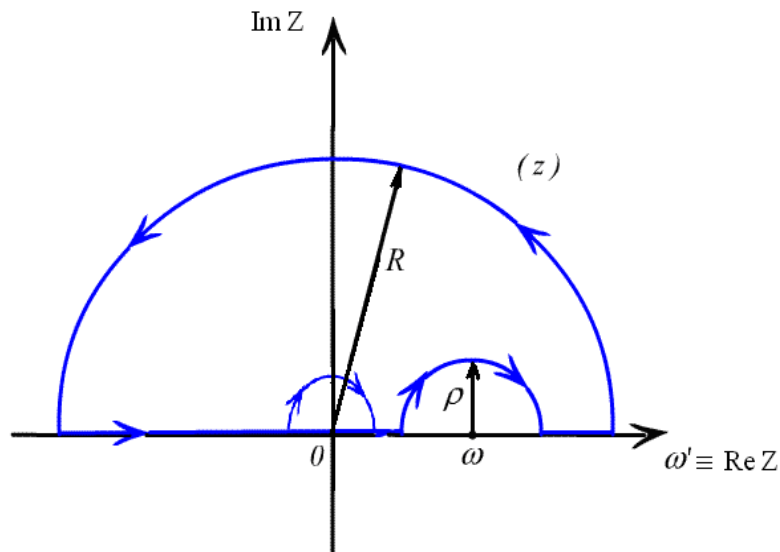


Рис. 19.2. Обход контура при вычислении интеграла 18.8, когда функция  $\varepsilon(z)$  имеет полюс при  $\omega' = 0$

Дисперсия важна для  $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$  (это оптические частоты и ультрафиолетовое излучение).

Далее обратимся к характерной частоте движения атомных ядер в кристаллической решетке, где

$$\omega_0 \sim 10^{13} \frac{1}{c}, \text{ т. е. соответствует инфракрасной области.} \quad (19.20)$$

Характерной частотой может быть и частота коллективных движений электронов. Кроме того, порядок характерных частот зависит от концентрации вещества (в плазме, например) и может меняться в больших пределах.

Совсем низкими являются собственные частоты, описывающие характерное движение в хороших магнетиках.

Диэлектрическую проницаемость часто выражают через диэлектрическую восприимчивость:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi' + i\chi'' \equiv \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \equiv 1 + \chi(\omega), \quad (19.21)$$

$$1 + \chi'(\omega) = \varepsilon'(\omega), \quad (19.22)$$

$$\chi''(\omega) = \varepsilon''(\omega). \quad (19.23)$$

Согласно результатам квантовой теории рассеяния фотонов диэлектрическую восприимчивость однородного (изотропного) вещества выражают через амплитуду рассеяния на нулевой угол атомом вещества  $f(0)$ :

$$\chi(\omega) = \frac{4\pi N_0}{\omega} f(0), \quad (19.24)$$

где  $N_0$  – число атомов в единице объема.

Мнимая часть восприимчивости  $\chi''(\omega)$  определяет поглощение фотонов и может быть выражена, согласно оптической теореме, через сечение поглощения  $\sigma(\omega)$ :

$$\chi''(\omega) = \frac{N_0}{\omega} \sigma(\omega). \quad (19.25)$$

Поэтому, если использовать дисперсионное соотношение Крамерса–Кронига, получим связь действительной части восприимчивости  $\chi'(\omega)$  с мнимой частью  $\chi''(\omega)$ :

$$\chi'(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (19.26)$$

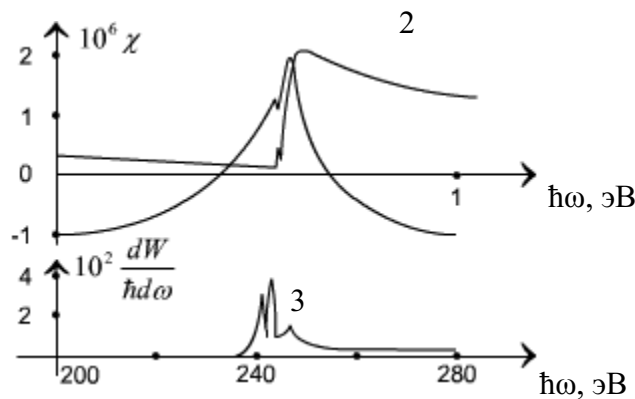


Рис. 19.3. Зависимость диэлектрической восприимчивости и спектральной плотности энергии излучения электрона в углероде вблизи L-края фотопоглощения от частоты: 1 –  $\chi'(\omega)$ ; 2 –  $\chi''(\omega)$ ; 3 – детали спектра [18]

Таким образом, используя подробные экспериментальные данные о сечениях фотопоглощения как функции энергии фотона, можно вычислить  $\chi'(\omega)$  для ряда веществ. Такие вычисления были выполнены в ряде

работ, при этом интегрирование проводилось от первого порога ионизации атома (фотоэффект) до порога образования  $e^+e^-$ -пар (см. например: В.А. Базылев, Н.К. Жеваго «Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях», § 3.8 Рентгеновское черенковское излучение).

Максимальные значения  $\chi'(\omega)$  невелики и для газообразных веществ при нормальном давлении составляют от  $5 \cdot 10^{-7}$  для Ne ( $\omega = 870$  эВ) до  $10^{-5}$  для Ar ( $\omega = 250$  эВ), а для твердых веществ от  $10^{-2}$  для углерода с плотностью  $\rho = 1,5 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  ( $\omega = 284$  эВ) до  $5 \cdot 10^{-7}$  для Al ( $\omega = 73$  эВ).

## 20. Электромагнитные волны в изотропных средах

Рассмотрим сначала электромагнитную волну в вакууме:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t), \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t). \quad (20.1)$$

Если электрическое и магнитное поля удовлетворяют уравнениям

$$\square \vec{E} = 0, \quad \square \vec{H} = 0, \quad (20.2)$$

$$\square = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (20.3)$$

то в результате получим

$$\left( -\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) = 0. \quad (20.4)$$

Таким образом, для вакуума  $\omega = c|\vec{k}|$ , а амплитуды  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  электромагнитного поля взаимно ортогональны вектору  $\vec{k}$ . Это видно из подстановки  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t)$  и  $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t)$  в уравнения Максвелла при  $\rho = 0, j = 0$ :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (20.5)$$

$$\text{div} \vec{E} = 0, \quad \text{div} \vec{H} = 0,$$

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = [\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0] \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) = i[\vec{k} \cdot \vec{E}_0] \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t), \quad (20.6)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \vec{H}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t). \quad (20.7)$$

Из равенства

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

следует:

$$i[\vec{k} \cdot \vec{E}_0] \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) = i \frac{\omega}{c} \vec{H}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) = i|\vec{k}| \vec{H}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t), \quad (20.8)$$

то есть

$$\vec{H}_0 = \left[ \frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{E}_0 \right] = \vec{n} \cdot \vec{E}_0, \quad (20.9)$$

$$\vec{H}_0 = [\vec{n} \cdot \vec{E}_0], \quad (20.10)$$

где

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{c\vec{k}}{\omega}. \quad (20.11)$$

Из уравнения  $rot\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  следует, что  $i[\vec{k} \cdot \vec{H}_0] = -i|\vec{k}| \vec{E}_0$ , или

$$[\vec{H}_0 \cdot \vec{n}] = \vec{E}_0, \quad (20.12)$$

из уравнения  $div\vec{E} = 0$  следует  $\vec{n}\vec{E}_0 = 0$ , (20.13)

из уравнения  $div\vec{H} = 0$  следует  $\vec{n}\vec{H}_0 = 0$ , (20.14)

где  $\vec{n}$  – единичный вектор в направлении распространения волны.

Векторы  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$ ,  $\vec{n}$  образуют тройку взаимно перпендикулярных векторов (рис. 20.1), причем  $|\vec{E}_0| = |\vec{H}_0|$ .

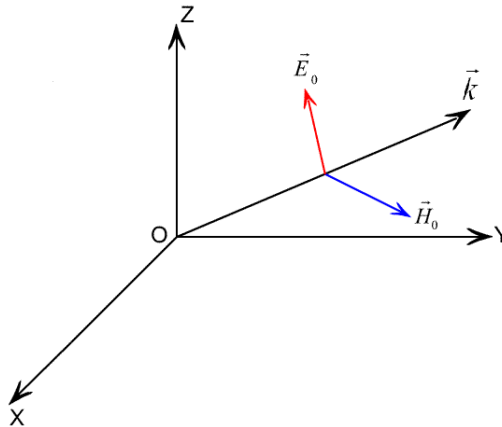


Рис. 20.1. Распространение плоской электромагнитной волны в пространстве

Какие соотношения возникают между характеристиками плоской электромагнитной волны при ее распространении в веществе? Считаем, что  $\mu = 1$ , вещество однородное и изотропное.

В этом случае для вектора электрической индукции имеем:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t),$$

причем между  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  устанавливается связь

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E},$$

где  $\varepsilon(\omega)$  – комплексная диэлектрическая проницаемость.

Поскольку у векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$  координаты и время входят только в экспоненту, то легко устанавливается эквивалентность следующих операций:

$$\text{rot}\vec{H} \rightarrow i[\vec{k} \cdot \vec{H}], \quad (20.15)$$

$$\text{div}\vec{D} \rightarrow i(\vec{k}\vec{D}) = i\varepsilon(\omega)(\vec{k}\vec{E}), \quad (20.16)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \rightarrow -i \frac{\omega}{c} \vec{D} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E}. \quad (20.17)$$

Тогда уравнения для быстропеременных полей преобразуются следующим образом:

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \rightarrow [\vec{k} \cdot \vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E}, \\ \text{div}\vec{D} = 0 & \rightarrow \varepsilon(\omega)(\vec{k}\vec{E}) = 0, \\ \text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \rightarrow i \frac{\omega}{c} \mu \vec{H} = \frac{\omega}{c} \vec{H} = i[\vec{k} \cdot \vec{E}], \\ \text{div}\vec{B} = 0 & \rightarrow i\vec{k}\mu\vec{H} = 0, \quad (\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0. \end{cases} \quad (20.18)$$

Запишем получившуюся систему уравнений:

$$\begin{cases} [\vec{k}, \vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E}, \\ \varepsilon(\omega)(\vec{k}, \vec{E}) = 0, \\ [\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{H}, \\ (\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0, \end{cases} \quad (20.19)$$

так как векторы  $\vec{k}$  и  $\vec{H}$  взаимно ортогональны.

Предположим, что  $\varepsilon(\omega) \neq 0$ . Тогда и векторы  $\vec{k}$  и  $\vec{E}$  также взаимно перпендикулярны и из первых двух уравнений следует ортогональность  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Таким образом, как и в вакууме, электромагнитные волны являются поперечными.

Подставляя  $\vec{H} = \frac{c}{\omega} [\vec{k}, \vec{E}]$  в выражение  $[\vec{k}, \vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E}$ , получим

$$\frac{c}{\omega} [\vec{k} [\vec{k}\vec{E}]] = \frac{c}{\omega} [\vec{k}(\vec{k}\vec{E}) - \vec{E}\vec{k}^2] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E}, \quad (20.20)$$

то есть

$$\left( \vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right) \vec{E} = 0. \quad (20.21)$$

Из уравнения 20.21 следует, что электромагнитные волны могут распространяться в среде, если их волновой вектор связан с частотой соотношением



$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega), \quad (20.22)$$

где  $k = |\vec{k}|$ .

В прозрачном для волны веществе (при  $i\varepsilon''(\omega) = 0$ ), когда

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) = \varepsilon'(\omega), \quad (20.23)$$

получим

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}. \quad (20.24)$$

Для волн оптического диапазона величина  $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon'}$  является показателем преломления вещества. При  $\varepsilon'' \neq 0$  волновой вектор  $\vec{k}$  становится комплексным:

$$\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}'', \quad (20.25)$$

где  $\vec{k}'$  и  $\vec{k}''$  – вещественные величины.

Возводя в квадрат обе части равенства (20.25) и учитывая (20.24) и (20.23), получим:

$$\vec{k}^2 = \vec{k}'^2 - \vec{k}''^2 + 2i\vec{k}'\vec{k}'' = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)), \quad (20.26)$$

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'(\omega), \\ 2\vec{k}'\vec{k}'' = \varepsilon''(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}. \end{cases} \quad (20.27)$$

Вообще, для двух векторов имеется всего лишь два уравнения, и есть свобода в выборе этих векторов. Если векторы  $\vec{k}'$  и  $\vec{k}''$  направлены одинаково, то соотношения (20.27) однозначно определяют модули этих векторов.

Пусть

$$\vec{k}' = \vec{e}k', \quad \vec{k}'' = \vec{e}k'', \quad (20.28)$$

тогда найдем

$$2\vec{k}'\vec{k}'' = 2\vec{k}'k'' \varepsilon''(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (20.29)$$

Пусть

$$\vec{k} = \vec{e}k, \quad (20.30)$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} (n + ix). \quad (20.31)$$

С другой стороны,

$$\vec{k} = \vec{e}(k' + ik''). \quad (20.32)$$

Из равенства

$$\vec{k}^2 = k^2, \text{ где } k^2 = \left[ \frac{\omega}{c}(n + ik) \right]^2,$$

находим

$$\frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - x^2 + 2inx) = k'^2 - k''^2 + 2ik'k'' = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(\omega) + 2i\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon''(\omega). \quad (20.33)$$

Отсюда получим:

$$n = \sqrt{\frac{|\varepsilon| + \varepsilon'}{2}}, \quad (20.34)$$

$$x = \sqrt{\frac{|\varepsilon| - \varepsilon'}{2}}, \quad (20.35)$$

где

$$|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}.$$

При  $\varepsilon'' = 0$  получим для  $n$  обычный показатель преломления:

$$n = \sqrt{\varepsilon} \equiv \sqrt{\varepsilon'}.$$

Если  $\varepsilon(\omega)$  – комплексная величина, то  $k$  – коэффициент поглощения среды.

Что же будет, если при некотором значении  $\omega = \omega_0$  диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(\omega_0) = 0$ ?

Из системы уравнений 20.19 при условии  $\varepsilon(\omega_0) = 0$  возможно решение, при котором  $\vec{H} = 0$  и  $\vec{E} \parallel \vec{k}$ . Следовательно в среде могут существовать чисто электрические переменные поля, называемые продольными волнами.

В данном случае не отмечается никакой связи между волновым вектором  $\vec{k}$  и частотой  $\omega_0$ , однако такая связь возникает, если наряду с частотной дисперсией диэлектрической проницаемости учитывать еще и пространственную дисперсию. Тогда

$$\varepsilon = \varepsilon(\vec{k}, \vec{\omega}), \quad (20.36)$$

и условие  $\varepsilon(\omega_0) = 0$  превратится в условие

$$\varepsilon(\vec{k}, \omega_0) = 0, \quad (20.37)$$

откуда и следует связь частоты и волнового вектора в продольной волне.

## 21. Электромагнитное поле быстрой заряженной частицы в среде. Излучение Вавилова–Черенкова

Пусть быстрая частица с зарядом  $e$  движется с постоянной скоростью, близкой к скорости света, в прозрачной изотропной среде. Частица при движении, конечно, теряет энергию (на возбуждение, ионизацию атомов среды, излучение и т. п.), но в первом приближении ее движение можно считать равномерным. Таким образом, электромагнитное поле создается равномерно движущимся сторонним зарядом:

$$\begin{aligned}\rho_{cm} &= e\delta(\vec{r} - \vec{v}t), \\ \vec{j}_{cm} &= e\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{v}t).\end{aligned}$$

Уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho_{cm}, \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{cm}, \\ \operatorname{div}\vec{H} = 0, \end{cases} \quad (21.1)$$

причем

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \mu = 1, \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}.$$

Для нахождения характеристик электромагнитного поля разложим напряженности  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  и другие величины в интеграл Фурье:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \vec{E}(\vec{k}, \omega), \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \vec{H}(\vec{k}, \omega), \\ \vec{D}(\vec{r}, t) &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \vec{D}(\vec{k}, \omega), \\ \rho_{cm}(\vec{r}, t) &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \rho_{cm}(\vec{k}, \omega), \\ \vec{j}_{cm}(\vec{r}, t) &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \vec{j}_{cm}(\vec{k}, \omega).\end{aligned}$$

Для фурье-образов плотностей сторонних зарядов и токов получим:

$$\begin{aligned}\rho_{cm}(\vec{k}, \omega) &= \int d\vec{r} \int dt e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \rho_{cm}(\vec{r}, t) = e \int d\vec{r} \int dt e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \delta(\vec{r} - \vec{v}t) = \\ &= e \int dt e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{v}t - \omega t)} = 2\pi e \delta(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}),\end{aligned} \quad (21.2)$$

$$\vec{j}_{cm}(\vec{k}, \omega) = 2\pi e \vec{v} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}). \quad (21.3)$$

Из первого уравнения системы уравнений (21.1) следует соотношение

$$\vec{H}(\vec{k}, \omega) = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \vec{E}(\vec{k}, \omega)]. \quad (21.4)$$

Беря фурье-образ от третьего уравнения системы (21.1) и учитывая выражение (21.3), получим

$$i [\vec{k} \vec{H}(\vec{k}, \omega)] = -\frac{i\omega}{c} \vec{D}(\vec{k}, \omega) + \frac{8\pi^2 e \vec{v}}{c} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}), \quad (21.4')$$

или

$$\omega \vec{D}(\vec{k}, \omega) = -c [\vec{k} \vec{H}(\vec{k}, \omega)] - 8\pi^2 e i \vec{v} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}). \quad (21.5)$$

Используя уравнения связи

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E},$$

получим для фурье-образов

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \varepsilon \vec{E}(\vec{k}, \omega), \quad (21.6)$$

а из уравнения  $\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho$  найдем

$$\varepsilon (\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega)) = -8\pi^2 e i \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}),$$

или

$$(\vec{k}, \vec{D}(\vec{k}, \omega)) = -8\pi^2 e i \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}).$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (21.5):

$$[\vec{k} \vec{H}(\vec{k}, \omega)] = \frac{c}{\omega} [\vec{k} [\vec{k} \vec{E}(\vec{k}, \omega)]] = \frac{c}{\omega} \{ \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \vec{k}^2 \}. \quad (21.7)$$

Скалярное произведение векторов  $(\vec{k}, \vec{E})$ , входящее в (21.7), имеет вид

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} (\vec{k} \cdot \vec{D}) = -\frac{8\pi^2 e i \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}{\varepsilon}. \quad (21.8)$$

Из выражения (21.4) – (21.8) непосредственно следует:

$$\varepsilon \omega \vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \{ \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \vec{k}^2 \} = -\frac{c^2}{\omega} \left\{ -\frac{8\pi^2 e i \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}{\varepsilon} \vec{k} - \vec{E} \vec{k}^2 \right\} - 8\pi^2 e i \vec{v} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}).$$

После простых преобразований:

$$\begin{aligned} \varepsilon \omega \vec{E} &= \frac{c^2}{\omega} \vec{k}^2 \vec{E} + 8\pi^2 e i \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \left[ -\vec{v} + \frac{c^2}{\omega \varepsilon} \vec{k} \right], \\ \left( \varepsilon \omega - \frac{c^2 \vec{k}^2}{\omega} \right) \vec{E} &= -8\pi^2 e i \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \left[ \frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \frac{\vec{k}}{\varepsilon} \right] \frac{c^2}{\omega}, \end{aligned}$$

$$\frac{c^2}{\omega} \left( \vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) \vec{E} = \frac{c^2}{\omega} 8\pi^2 e i \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \left[ \frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \frac{\vec{k}}{\varepsilon} \right]$$

для  $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$  окончательно получим:

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = 8\pi^2 e i \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \left[ \frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \frac{\vec{k}}{\varepsilon(\omega)} \right] \frac{1}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)}. \quad (21.9)$$

Фурье-образ напряженности магнитного поля, согласно формуле (21.4), связан с  $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ :

$$\vec{H}(\vec{k}, \omega) = \frac{c}{\omega} [\vec{k}, \vec{E}(\vec{k}, \omega)].$$

Используя преобразования Фурье, найдем координатную зависимость полей.

Полученные выражения применимы для нахождения потери энергии на черенковское излучение. Излучение Вавилова–Черенкова возникает при прохождении быстрой заряженной частицы в прозрачной среде со скоростью  $v > \frac{c}{n}$ , где  $n = \sqrt{\varepsilon}$  – показатель преломления среды. Это излучение есть не что иное, как излучение атомов среды, поляризованных проходящей частицей, и не связано с ускорением самой частицы, как, например, при тормозном излучении, а следовательно, не зависит от массы частицы и определяется ее скоростью  $\vec{v}$ , зарядом  $e$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (то есть свойствами среды).

Обычно рассчитывают асимптотические выражения для  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{H}(\vec{k}, \omega) = \frac{c}{\omega} [\vec{k}, \vec{E}(\vec{k}, \omega)]$ , строят вектор Умова–Пойнтинга и по нему находят интенсивность черенковского излучения.

Здесь же приведем другой вывод.

Потери энергии частицы определяются работой силы, совершаемой при ее действии на частицу со стороны индуцируемого ею поля. Выберем ось по направлению  $\vec{v}$ .

Тогда потери энергии на единицу пути

$$\frac{dW}{dz} = -e E_z(\vec{r} = \vec{v}t, t), \quad (21.10)$$

причем напряженность берется в точке нахождения частицы.

Из фурье-преобразования

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

и выражения для фурье-образа

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = 8\pi^2 i e \left( \frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \frac{\vec{k}}{\varepsilon(\omega)} \right) \frac{\delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)}$$

находим

$$\frac{dW}{dz} = -8\pi^2 i e^2 \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\omega v}{c^2} - \frac{k_z}{\varepsilon(\omega)} \right] \frac{\delta(\omega - k_z v)}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)}. \quad (21.11)$$

При выражении интегралов в трехмерном пространстве волновых векторов перейдем к цилиндрическим координатам:

$$k_x = q \cos \varphi, \quad k_y = q \sin \varphi, \\ k_z = k_z.$$

В результате получим:

$$d\vec{k} \equiv d^3 k = dk_z q d\varphi dq, \\ k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_z^2 + q^2.$$

Формула (21.11) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= -8\pi^2 i e^2 \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int q dq \int \frac{dk_z}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\omega v}{c^2} - \frac{k_z}{\varepsilon(\omega)} \right] \frac{\delta(\omega - k_z v)}{\left( q^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right)} = \\ &= -\frac{i e^2}{\pi} \int d\omega \int q dq \left[ \frac{\omega v}{c^2} - \frac{\omega}{v \varepsilon} \right] \frac{1}{v \left( q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) + \frac{\omega^2}{v^2} \right)} = \\ &= \frac{i e^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int q dq \left[ \frac{\omega}{v^2 \varepsilon(\omega)} - \frac{\omega}{c^2} \right] \frac{1}{\left( q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - \frac{c^2}{v^2} \right)}. \end{aligned} \quad (21.12)$$

Здесь мы использовали свойство  $\delta$ -функции

$$\int f(x) \delta(ax) dx = \frac{1}{|a|} f(0),$$

которое в другой записи означает:

$$\int f(x) \delta(ax - b) dx = \frac{f(b)}{|a|}.$$

Последнее соотношение позволяет вычислить интеграл с переменной интегрирования  $k_z$ :

$$\int f(k_z) \delta(k_z v - \omega) dk_z = \frac{f(k_z)}{v}.$$

Мы интересуемся не просто потерей энергии на единицу пути за счет черенковского излучения, а потерей энергии в единичный интервал частот в окрестности данного значения частоты  $\omega$ , т. е. величиной  $\frac{d^2W(\omega)}{d\omega dz}$ ,

причем

$$\frac{dW}{dz} = \int_0^{\infty} d\omega \frac{d^2W(\omega)}{d\omega dz} d\omega. \quad (21.13)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d^2W(\omega)}{d\omega dz} d\omega &= \frac{ie^2}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 d\omega \cdot \omega \left( \frac{1}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right) \int \frac{qdq}{\left[ q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left( \varepsilon(\omega) - \frac{c^2}{v^2} \right) \right]} + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\infty} d\omega \cdot \omega \left( -\frac{1}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right) \int \frac{qdq}{\left[ q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left( \varepsilon(\omega) - \frac{c^2}{v^2} \right) \right]} \right\} = \\ &= -\frac{ie^2}{\pi c^2} \left\{ \int_0^{\infty} d\omega \cdot \omega \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right) \int \frac{qdq}{\left[ q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left( \varepsilon(\omega) - \frac{c^2}{v^2} \right) \right]} - \right. \\ &- \left. \int_0^{\infty} d\omega \cdot \omega \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(-\omega)} \right) \int \frac{qdq}{\left[ q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left( \varepsilon(-\omega) - \frac{c^2}{v^2} \right) \right]} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d^2W(\omega)}{d\omega dz} &= -\frac{ie^2}{\pi c^2} \left\{ \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right) \int \frac{qdq}{\left[ q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left( \varepsilon(\omega) - \frac{c^2}{v^2} \right) \right]} - \right. \\ &- \left. \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(-\omega)} \right) \int \frac{qdq}{\left[ q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left( \varepsilon(-\omega) - \frac{c^2}{v^2} \right) \right]} \right\}. \end{aligned} \quad (21.14)$$

Среда считается прозрачной, то есть  $\text{Im } \varepsilon(\omega)$  достаточно мала. В множителях перед интегралами можно поставить  $\text{Re } \varepsilon(\omega)$  вместо  $\varepsilon(\omega)$  и воспользоваться соотношением

$$\text{Re } \varepsilon(\omega) = \text{Re } \varepsilon(-\omega) = n^2(\omega). \quad (21.15)$$

Что же касается подынтегрального выражения, то если пренебречь  $\text{Im } \varepsilon$ , тогда подынтегральное выражение будет иметь особую точку

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( n^2 - \frac{c^2}{v^2} \right) \quad (21.16)$$

при

$$\varepsilon(\omega) = n^2 > \frac{c^2}{v^2}. \quad (21.17)$$

Если же условия  $n^2 > \frac{c^2}{v^2}$  не выполнено, то особой точки нет, слагаемые в фигурных скобках сокращаются и  $\frac{d^2 W}{d\omega dz} = 0$ , то есть черенковское излучение отсутствует.

Условие (21.17), или эквивалентное ему условие

$$v > \frac{c}{n}, \quad (21.18)$$

играет роль порогового условия для возникновения черенковского излучения.

В состоянии термодинамического равновесия среда всегда поглощает и  $\text{Im } \varepsilon(\omega) \equiv \varepsilon''(\omega) > 0$  (вспомним, что при  $\varepsilon'' > 0$   $\text{div } \bar{S} = -\frac{\omega \varepsilon''}{8\pi} |\bar{E}|^2 < 0$ ).

Пусть условие  $n^2 > \frac{c^2}{v^2}$  выполнено.

Результат зависит от того, как совершается обход особой точки, лежащей на пути интегрирования. В нашем случае особая точка первого члена подынтегральной функции не лежит на вещественной оси, а смещена вверх (так как  $\text{Im } \varepsilon(\omega) > 0$ ), следовательно можно принять:

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( n^2 - \frac{c^2}{v^2} \right) + i\delta,$$

где

$$\delta = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon''(\omega).$$

Введем новую переменную  $x$  вместо  $q$ :

$$x = q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left( n^2 - \frac{c^2}{v^2} \right), \quad (21.19)$$



$$q dq = \frac{dx}{2},$$

$$\frac{d^2 W}{d\omega dz} = -\frac{ie^2 \omega}{2\pi c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2}\right) \left\{ \int \frac{dx}{x - i\delta} - \int \frac{dx}{x + i\delta} \right\}. \quad (21.20)$$

Воспользуемся известным соотношением

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{x - a \pm i\delta} = \mp i\pi \delta(x - a) + \frac{P}{x - a}. \quad (21.21)$$

Это операторное тождество нужно понимать так:

$$\int \frac{dx}{x - a \pm i\delta} = P \int \frac{dx}{x - a} \mp i\pi \int dx \delta(x - a) = P \int \frac{dx}{x - a} \mp i\pi. \quad (21.22)$$

При  $a = 0$  из (21.22) получим:

$$\int \frac{dx}{x \pm i\delta} = P \int \frac{dx}{x} \mp i\pi. \quad (21.23)$$

Здесь  $P \int$  – интеграл в смысле главного значения.

Выражение в фигурных скобках (21.20) легко вычисляется:

$$\left\{ \int \frac{dx}{x - i\delta} - \int \frac{dx}{x + i\delta} \right\} = \left( P \int \frac{dx}{x} + i\pi \right) - P \left( \int \frac{dx}{x} - i\pi \right) = 2i\pi,$$

и окончательно получим

$$\frac{d^2 W}{d\omega dz} = \frac{e^2 \omega}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2}\right). \quad (21.24)$$

Из формулы (21.24) следует, что интенсивность излучения не зависит от массы пролетающей частицы, а определяется только ее скоростью и зарядом, а также оптическими свойствами среды. Излучение, возникающее в данной точке траектории, распространяется под углом  $\theta$  по отношению к скорости частицы, где

$$\cos \theta = \frac{c}{nv}. \quad (21.25)$$

Это вытекает из того, что модуль  $|\vec{k}|$  в выражении (21.17)  $\varepsilon(\omega) = n^2 > \frac{c^2}{v^2}$  определяется особой точкой знаменателя в выражении (21.11):

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} n^2, \quad (21.26)$$

$$k = \frac{\omega}{c} n, \quad (21.27)$$

а значение  $k_z = k \cos \theta$  находится из  $\delta$ -функции

$$\delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) = \delta(\omega - k_z v) \quad (21.28)$$

и равно:

$$k_z = \frac{\omega}{v}. \quad (21.29)$$

Поэтому найдем  $\frac{c}{nv}$ , используя соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{c}{n} &= \frac{\omega}{k}, \\ v &= \frac{\omega}{k_z}, \\ \frac{c}{nv} &= \frac{\omega}{k} \frac{k_z}{\omega} = \frac{k_z}{k} = \cos \theta. \end{aligned} \quad (21.30)$$

Интенсивность излучения на единицу пути примет вид

$$\frac{d^2 W}{d\omega dz} = \frac{e^2 \omega}{c^2} \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 n^2} \right) = \frac{e^2 \omega}{c^2} (1 - \cos^2 \theta). \quad (21.31)$$

Условие  $v > \frac{c}{n}$  означает, что скорость движения частицы превышает фазовую скорость распространения электромагнитных возмущений в среде. Частица как бы отрывается от создаваемого ею поля, порождая свободное электромагнитное поле-излучение. Условие возникновения черенковского излучения может быть выполнено, если  $\varepsilon(\omega) = n^2 > \frac{c^2}{v^2}$ , или  $n(\omega) > 1$ . Поэтому оно приходится на видимую и ультрафиолетовую части спектра, так как именно для этих частот  $n(\omega) > 1$ .

Особые свойства черенковского излучения привели к созданию детекторов быстрых частиц – черенковских счетчиков, которые позволяют определить модули, направленные скорости быстрых частиц и их заряд.

Если частицы с данной скоростью проходят через среду с известной  $\varepsilon$ , то свет будет испускаться под черенковским углом  $\theta_{ch}$ :

$$\cos \theta_{ch} = \frac{c}{nv} = \frac{1}{\beta \sqrt{\varepsilon}}. \quad (21.32)$$

Измерение угла  $\theta_e$  позволяет определить скорость  $v$ .

Так как диэлектрическая проницаемость зависит от частоты  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ , то световое излучение разной длины волны (частоты) будет испускаться под несколько различающимися углами.

Приведем типичную кривую дисперсии  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$  с областью аномальной дисперсии в интервале больших частот (рис. 16.2).

Условие возникновения черенковского излучения:

$$\varepsilon(\omega) = n^2 > \frac{c^2}{v^2}, \quad (21.33)$$

или

$$\varepsilon(\omega) > \frac{1}{\beta^2}. \quad (21.34)$$

Дело в том, что в области аномальной дисперсии диэлектрические среды обладают сильным поглощением. Поэтому максимум черенковского излучения лежит несколько ниже резонансной частоты  $\omega_0$ . Для выделения малого интервала частот и, тем самым, повышения точности измерения скорости применяют узкополосные фильтры. Для узкой части  $\beta \leq 1$  в качестве среды можно использовать газ, тогда диэлектрическая проницаемость мало отличается от 1. Величину  $(\varepsilon - 1)$  можно менять в широких пределах, изменяя давление газа. Счетчики, использующие черенковское излучение, нашли широкое применение в экспериментальной физике. В физике частиц они служат измерителями скорости, а в сочетании с устройством для определения импульса работают в качестве масс-спектрометров. Они служат также дискриминаторами, позволяющими определять нежелательные медленные частицы.

## 22. Потенциалы Лиенара–Вихерта и поле точечного заряда

Задача нахождения переменного электромагнитного поля в вакууме по заданному распределению зарядов  $\rho(\vec{r}, t)$  и токов решается с помощью нахождения запаздывающих потенциалов:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV', \quad (22.1)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV', \quad (22.2)$$

где  $\vec{R} = |\vec{r} - \vec{r}'|$ ;  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения,  $\vec{r}'$  – радиус-вектор источника поля,  $dV'$  – элемент объема источника поля.

Можно ввести четырехмерные обозначения:

$$j_\mu = (\vec{j}, ic\rho), \quad (22.3)$$

$$A_\mu = (\vec{j}, ic\rho), \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (22.4)$$

$$c\beta_\mu = (\vec{v}, ic) = (c\vec{\beta}, i). \quad (22.5)$$

В случае точечного заряда  $e$ , находящегося в точке  $\vec{r}(t')$  и движущегося со скоростью  $c\vec{\beta}(t')$ , плотность тока имеет вид

$$\vec{j}_\mu(\vec{r}', t') = ec\beta_\mu(t')\delta(\vec{r}' - \vec{r}(t')). \quad (22.6)$$

Четырехмерный потенциал

$$A_\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \iint \frac{j_\mu(\vec{r}', t')}{R} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) d\vec{r}' dt', \quad (22.7)$$

где

$$\vec{R} = \vec{r}(t) - \vec{r}'(t'), \quad (22.8)$$

в этом случае после проведения интегрирования по объему с помощью  $\delta(\vec{r}' - \vec{r}(t'))$  равен

$$A_\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\beta_\mu(t')}{R(t')} \delta\left(t' + \frac{R(t')}{c} - t\right) dt', \quad (22.9)$$

где

$$R(t') = |\vec{r}(t) - \vec{r}'(t')|. \quad (22.10)$$

Интегрирование по  $dt'$  можно провести, воспользовавшись свойствами  $\delta$ -функции:

$$\int g(x)\delta[f(x) - \alpha]dx = \left[ \frac{g(x)}{\left| \frac{df}{dx} \right|} \right]_{f(x)=\alpha}. \quad (22.11)$$

Введем функцию

$$f(t') \equiv t' + \frac{R(t')}{c}. \quad (22.12)$$

Тогда

$$\frac{df}{dt'} \equiv \kappa = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}, \quad (22.13)$$

где  $c\vec{\beta}(t')$  – мгновенная скорость частицы;  $\vec{n} = \frac{\vec{R}(t')}{R(t')}$ .

В результате получим

$$A_\mu(\vec{r}, t) = \left[ \frac{e\beta_\mu}{\kappa R} \right]_{t'+R(t')/c=t} \equiv \left[ \frac{e\beta_\mu}{\kappa R} \right]_{\text{запазд}}. \quad (22.14)$$

Из формулы (22.14) следует, что

$$\varphi(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{1}{\kappa R} \right]_{\text{запазд}}. \quad (22.15)$$

Потенциалы (22.15) называются потенциалами Лиенара–Вихерта.

Для нерелятивистского случая  $\beta \rightarrow 0$  и  $\kappa \rightarrow 1$  получим обычные нерелятивистские формулы.

Для вычисления полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  воспользуемся формулой (22.9):

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (22.16)$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (22.17)$$

При вычислении полей координаты точки наблюдения входят только в  $R$ , поэтому

$$\text{grad} = \text{grad}R \frac{\partial}{\partial R} = \vec{n} \frac{\partial}{\partial R}. \quad (22.18)$$

В результате получим:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e \int \left[ \frac{\vec{n}}{R^2} \delta(f-t) + \frac{1}{cR} (\vec{\beta} - \vec{n}) \delta'_{f-t}(f-t) \right] dt', \quad (22.19)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = e \int [\vec{n} \vec{\beta}] \left\{ -\frac{\delta(f-t)}{R^2} + \frac{1}{cR} \delta'_{f-t}(f-t) \right\} dt'. \quad (22.20)$$

Интегрируя по частям слагаемые с  $\delta'_{f-t}$ , получим:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{\vec{n}}{\kappa R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left( \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{запазд}}, \quad (22.21)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{[\vec{\beta} \vec{n}]}{\kappa R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left( \frac{[\vec{\beta} \vec{n}]}{\kappa R} \right) \right]_{\text{запазд}}. \quad (22.22)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{c} \frac{d\vec{n}}{dt'} = \frac{[\vec{n} | \vec{n} \vec{\beta}]}{R}, \quad (22.23)$$

и проведя дифференцирование вектора  $\vec{n}$  по  $dt'$  в (22.21) и (22.22) (там, где он явно входит), получим:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{\vec{n}}{\kappa^2 R^2} + \frac{\vec{n}}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left( \frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{\vec{\beta}}{\kappa^2 R^2} - \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left( \frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{запазд}}, \quad (22.24)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = e \left[ \left\{ \frac{\vec{\beta}}{\kappa^2 R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left( \frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \right) \right\} \vec{n} \right]_{\text{запазд}}. \quad (22.25)$$

Из соотношений (22.24) и (22.25) следует, что

$$\vec{B} = [\vec{n} \vec{E}], \quad (22.26)$$

причем обе части берутся с учетом запаздывания.

Используя

$$\frac{d}{dt'} \vec{\beta} \equiv \dot{\vec{\beta}}, \quad (22.27)$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt'} (\kappa R) = \beta^2 - \vec{\beta} \cdot \vec{n} - \frac{R}{c} \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}, \quad (22.28)$$

после некоторых преобразований получим:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right]_{\text{запазд}} + \frac{e}{c} \left[ \frac{\vec{n}}{\kappa^3 R} \times \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right\} \right]_{\text{запазд}}, \quad (22.29)$$

$$\vec{B} = [\vec{n} \vec{E}]. \quad (22.30)$$

Выражение для  $\vec{E}$  состоит из части, содержащей лишь скорость  $\vec{\beta}$ , и части, зависящей от ускорения. Первая часть – статическая, убывает  $\sim \frac{1}{R^2}$ , вторая является полем излучения, причем  $\vec{E} \perp \vec{B}$ , и эта часть  $\sim \frac{1}{R}$ .

### 23. Полная мощность, излучаемая ускоренно движущимся зарядом. Формула Лармора и ее релятивистское обобщение

Пусть ускоренно движущийся заряд наблюдают в системе отсчета, в которой его скорость мала по сравнению со скоростью света. При  $\beta \ll 1$  напряженность электрического поля, определяемая формулой (22.29), равна:

$$\vec{E}_a = \frac{e}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{R} \right]_{\text{запазд}}, \quad (23.1)$$

так как  $\kappa \sim 1$ .

При изучении углового распределения излучения в релятивистском случае следует различать понятия интенсивности и мощности излучения. Интенсивность излучения  $dI$  в телесный угол  $d\Omega$  вычисляется через вектор Умова–Пойнтинга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{B}] = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_a|^2 \vec{n} \quad (23.2)$$

и равна:

$$dI = R^2 (\vec{S} \cdot \vec{n}) d\Omega = \frac{c}{4\pi} R^2 |\vec{E}_a|^2 d\Omega. \quad (23.3)$$

Величина  $dI/d\Omega$  представляет поток электромагнитной энергии внутри единичного телесного угла, измеряемый наблюдателем в неподвижной системе координат. Можно убедиться, что она не равна скоро-

сти потерь энергии частицы за счет излучения в единичный телесный угол в данном направлении  $-\frac{d^2\varepsilon}{dt'd\Omega}$ , где  $dt'$  – интервал запаздывающего времени. За время  $dt$  наблюдатель регистрирует энергию  $\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)dt$ , которая, очевидно, равна энергии, испущенной частицей за время  $dt'$ :

$$-\frac{d^2\varepsilon}{dt'd\Omega} = \left(\frac{dI}{d\Omega}\right)dt. \quad (23.4)$$

Величина потерь энергии частицей в единицу времени называется мощностью излучения

$$W = -\frac{d\varepsilon}{dt'}. \quad (23.5)$$

Между мощностью и интенсивностью излучения в единичный телесный угол имеется, таким образом, связь

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{dI}{d\Omega} \frac{dt}{dt'} = (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}(t')) \frac{dI}{d\Omega} \equiv \kappa \frac{dI}{d\Omega}. \quad (23.6)$$

В отличие от интенсивности мощность излучения является инвариантной величиной, то есть имеет один и тот же вид в различных инерциальных системах отсчета.

Из инвариантности величины  $-\frac{d\varepsilon}{dt'}$  следует то, что

$$-\frac{d\varepsilon}{dt'} = -\frac{d\varepsilon_0}{d\tau}, \quad (23.7)$$

где  $d\varepsilon_0$  представляет энергию в сопутствующей системе координат, где частица покоится;  $d\tau$  – интервал собственного времени. В общем случае интервалы времени  $dt'$  и  $d\tau$  связаны соотношением

$$dt' = \frac{d\tau}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad (23.8)$$

а так как в сопутствующей системе координат  $v = 0$ , то  $dt' = d\tau$ .

Используя формулы (23.6) и (23.7), находим

$$W \equiv -\frac{d\varepsilon}{dt'} = \int \frac{dI_0}{d\Omega} d\Omega. \quad (23.9)$$

Соотношение (23.9) также означает, что

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{dI_0}{d\Omega}.$$

Из формулы (23.3) находим:

$$\frac{dI_0}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} R^2 |\vec{E}_a|^2, \quad (23.10)$$

где напряженность электрического поля в сопутствующей системе определяется (23.1) и зависит только от ускорения. Обозначая через  $\theta$  угол между векторами  $\dot{\vec{v}}$  и  $\vec{n}$ , получим из формулы (3.10) выражение для излучаемой мощности в единицу телесного угла:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \theta, \quad (23.11)$$

причем, как следует из формулы (23.1), излучение поляризовано в плоскости векторов  $\dot{\vec{v}}$  и  $\vec{n}$ . Полную мгновенную мощность излучения найдем, проведя интегрирование в (23.9) по телесному углу.

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}. \quad (23.12)$$

Таким образом, получена известная формула Лармора для нерелятивистской частицы с зарядом  $e$ , движущейся с ускорением.

Формулу Лармора можно записать еще и таким образом:

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right), \quad (23.13)$$

где  $m$  – масса,  $\vec{p}$  – импульс заряженной частицы.

Обобщим формулу Лармора, записав ее в релятивистски-инвариантном виде.

Если  $d\tau = \frac{dt'}{\gamma}$  – приращение собственного времени, то релятивистское обобщение формулы Лармора выглядит как

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{dp_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dp_\mu}{d\tau} \right), \quad (23.14)$$

где

$$\left( \frac{dp_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dp_\mu}{d\tau} \right) = \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c} \left( \frac{d\varepsilon}{d\tau} \right)^2 = \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \beta^2 \left( \frac{dp}{d\tau} \right)^2. \quad (23.15)$$

При записи (23.15) были использованы соотношения:  $p = mc\beta\gamma$ ,  $\varepsilon = \gamma mc^2$  и  $\varepsilon^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$ .

После нахождения производных

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (\gamma m \vec{v}) = mc \frac{d}{d\tau} (\gamma \vec{\beta}) \quad (23.16)$$



и

$$\frac{dp}{d\tau} = mc \frac{d}{d\tau}(\gamma\beta), \quad (23.17)$$

с учетом того, что

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta^2 = \vec{\beta}^2 \text{ и } \beta\dot{\beta} = \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}, \quad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt'},$$

и соотношения

$$\left[ \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right]^2 = \left[ \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right] \cdot \left[ \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right] = \vec{\beta}^2 \dot{\vec{\beta}}^2 - \left( \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right)^2, \quad (23.18)$$

получим:

$$\left( \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} \right) = \gamma^6 m^2 c^2 \left\{ \dot{\vec{\beta}}^2 - \left( \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right\}, \quad (23.19)$$

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^6 m^2 c^2 \left\{ \dot{\vec{\beta}}^2 - \left( \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right\} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \gamma^6}{c} \left[ \dot{\vec{\beta}}^2 - \left( \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right]. \quad (23.20)$$

Это релятивистское обобщение формулы Лармора, полученное в 1898 году Лиенаром.

Рассмотрим задачу о движении заряженной частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$  во внешнем электрическом и магнитном поле. Частица движется ускоренно под действием силы

$$\vec{F} = e \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right\} \quad (23.21)$$

и в результате излучения теряет энергию

$$\Delta\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} W dt, \quad (23.22)$$

где мощность излучения  $W$  дается формулой

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^6 m^2 c^2 \left\{ \dot{\vec{\beta}}^2 - \left[ \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right]^2 \right\} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 \left\{ \dot{\vec{v}}^2 - \left[ \vec{v} \times \dot{\vec{v}} \right]^2 \right\}. \quad (23.23)$$

Удобно так преобразовать формулу для интенсивности, чтобы в нее входили внешние поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

С этой целью запишем закон движения релятивистской частицы под действием силы:

$$\vec{F} = e \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right\}. \quad (23.24)$$

В последующих вычислениях нам понадобятся релятивистские соотношения для полной энергии и импульса частицы:

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma mc^2, \quad (23.25)$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m\vec{v} \quad (23.26)$$

и

$$\varepsilon^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (23.27)$$

где  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  и  $\beta = v/c$ .

Умножая скалярно вектор скорости  $\vec{v}$  на обе части (23.17), получим

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} \cdot \vec{v}). \quad (23.28)$$

Дифференцируя обе части соотношения (23.20) по времени, находим

$$\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} = c^2 \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (23.29)$$

или

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\gamma m \left( \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right)} = \frac{e}{\gamma} (\vec{E} \cdot \vec{v}), \quad (23.30)$$

где последняя часть равенства получена с использованием закона движения (23.24), формулы  $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$  и равенства (23.28).

Возведем обе части равенства (23.24) в квадрат:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 &= e^2 \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right\}^2 = \left( \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)^2 = \\ &= m^2 \gamma^4 \left\{ \dot{v}^2 (1-\beta^2) + \frac{(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})^2}{c^2} + \gamma^2 \frac{(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})^2}{c^2} \right\}. \end{aligned} \quad (23.31)$$

Получим еще одно полезное соотношение.

Из формулы (23.18) после дифференцирования по времени находим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ mc^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right] = \gamma^3 m (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}). \quad (23.32)$$

Из сравнения (23.23) и (23.25) заключаем, что

$$(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) = \frac{e(\vec{E} \cdot \vec{v})}{\gamma^3 m}. \quad (23.33)$$

Согласно формуле (23.31), запишем:

$$\dot{\vec{v}}^2(1-\beta^2) + \frac{(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})^2}{c^2} = \frac{e^2}{m^2 \gamma^4} \left\{ \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right)^2 - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{v})^2}{c^2} \right\}. \quad (23.34)$$

Легко убедиться, что левая часть (23.34) есть в точности выражение

$$\left\{ \dot{\vec{v}}^2 - \frac{[\vec{v} \times \dot{\vec{v}}]^2}{c^2} \right\},$$

входящее формулу (23.23) для мощности  $W$ , поэтому

$$W = \frac{2e^4 \gamma^2}{3m^2 c^3} \left\{ \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right)^2 - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{v})^2}{c^2} \right\}. \quad (23.35)$$

Пусть частица движется в циклическом ускорителе в постоянном магнитном поле  $B$ . В этом случае  $\vec{E} = 0$ ,  $\vec{v} \perp \vec{B}$  и можно записать:

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^4 \gamma^2 v^2 B^2}{m^2 c^5}. \quad (23.36)$$

В нерелятивистском случае ( $\gamma \approx 1$ ) угловая частота равна:

$$\omega = \frac{eB}{mc} \quad (23.37)$$

и радиус  $\rho \equiv R_0$  равен:

$$R_0 = v/\omega = \frac{mcv}{Be} = \frac{mc^2 \beta}{Be}. \quad (23.38)$$

Выражая из (23.38) магнитное поле через радиус орбиты  $R_0$ , получим классическую формулу Лармора:

$$W_{\text{Лармор}} = \frac{2}{3} \frac{e^2 c \beta^4}{R_0^2} \equiv W_{\text{нерел}}. \quad (23.39)$$

В релятивистском случае

$$\omega = \frac{eB}{mc} \sqrt{1-\beta^2} = \frac{ecB}{\varepsilon} = \frac{eB}{\gamma mc}, \quad (23.40)$$

$$R_0 = \frac{\gamma mc^2 \beta}{Be}, \quad (23.41)$$

и в результате получим релятивистскую формулу Лиенара для интенсивности излучения быстрой частицы, движущейся в постоянном магнитном поле:

$$W_{\text{Лиенар}} = \frac{2}{3} \frac{e^2 c \beta^4 \gamma^4}{R_0^2} \equiv W_{\text{нерел}} \gamma^4 \equiv W_{\text{кл}}. \quad (23.42)$$

Из формулы Лиенара следует, что происходит быстрый рост энергетических потерь электрона, движущегося по окружности: мощность излучения  $W$  пропорциональна четвертой степени энергии.

## 24. Применение релятивистской формулы для мощности излучения к расчету потерь энергии в ускорителях заряженных частиц

Из соотношения (23.7) следует, что при заданной внешней силе (данной скорости изменения импульса)  $W \sim \frac{1}{m^2}$ , то есть влияние радиационных эффектов наиболее существенно для легких частиц. Далее рассмотрим только излучение электронов.

### Излучение в линейном ускорителе

Принципиальная схема ускорения заряженных частиц в линейном ускорителе показана на рис. 24.1,а.

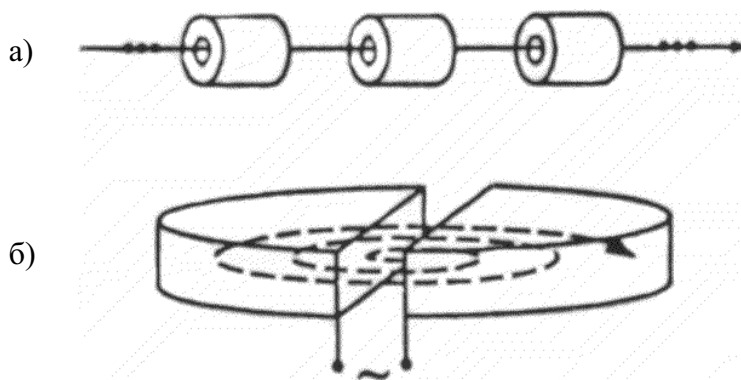


Рис. 24.1. Ускорители частиц: а) линейный ускоритель; б) циклотрон

Движение одномерное, и из формул (23.7) и (23.8) следует:

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left[ \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \beta^2 \left( \frac{dp}{d\tau} \right)^2 \right] = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 (1 - \beta^2) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{d\vec{p}}{dt'} \right)^2. \quad (24.1)$$

Так как скорость изменения импульса равна изменению энергии на единицу пути, то

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dp}{dt'}.$$

Это легко показать, записывая выражение:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dp} \frac{dp}{dx} = \frac{dE}{dp} \frac{dp}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dp} \frac{dp}{dt'} = \frac{dp}{dt'}.$$

Таким образом, в одномерном случае

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{dE}{dx} \right)^2. \quad (24.2)$$

Но  $\frac{dE}{dx}$  зависит только от внешних сил,  $W$  не зависит от  $E$  или  $p$ .

Найдем отношение интенсивности (мощности) излучения к мощности, поступающей от внешних источников:

$$\begin{aligned} \frac{W}{dE/dt'} &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{dE}{dx} \frac{dE}{dx} \cdot \frac{1}{dE/dt'} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{1}{v} \frac{dE}{dx} = \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right) \frac{1}{\beta} \frac{dE}{dx} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{2}{3} \frac{r_e}{mc^2} \frac{dE}{dx}, \end{aligned} \quad (24.3)$$

где  $r_e = 2,82 \cdot 10^{-13}$  см.

Потери энергии на излучение малы, если прирост энергии  $\Delta E$  на расстоянии  $\Delta x = r_e$  не превышает  $mc^2 = 0,511$  МэВ, то есть если прирост менее  $2 \cdot 10^{14}$  МэВ/м. Обычно приращение энергии в линейном ускорителе  $\Delta E \leq 10$  МэВ/м. Таким образом, потери энергии на излучение в линейном ускорителе пренебрежимо малы.

### Излучение в циклических ускорителях

Принципиальная схема ускорения заряженных частиц в циклическом ускорителе показана на рис. 24.1,б; 24.2,а; 24.2,б.

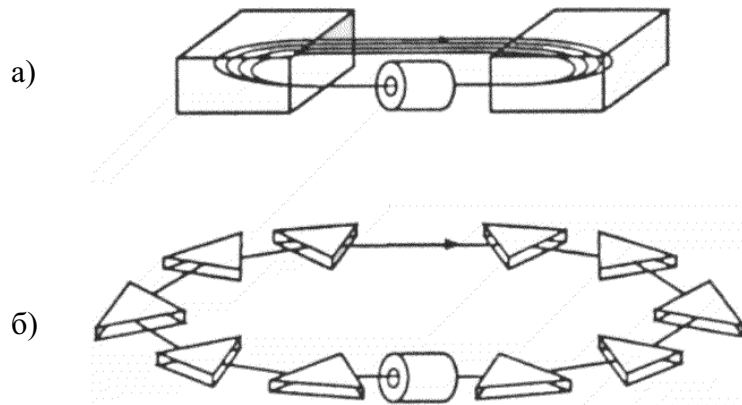


Рис. 24.2. Ускорители частиц: а) микротрон; б) синхротрон

В этих установках при движении частицы по орбите направление импульса  $\vec{p}$  быстро меняется, а изменение энергии за оборот мало.

$$\left| \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right| = \gamma \omega |\vec{p}| \gg \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}, \quad (24.4)$$

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \omega^2 |\vec{p}|^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{\rho^2} \beta^4 \gamma^4, \quad (24.5)$$

причем  $\omega = \frac{c\beta}{\rho}$ ,  $\rho$  – радиус орбиты.

Потери энергии на излучение за один оборот составляют:

$$\delta E = \frac{2\pi\rho}{c\beta} W = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{\rho} \beta^3 \gamma^4. \quad (24.6)$$

При  $\beta \approx 1$  можно пользоваться расчетной формулой

$$\delta E(\text{МэВ}) = 8,85 \cdot 10^{-2} \frac{[E(\text{ГэВ})]^4}{\rho(\text{м})}.$$

Для расчета мощности излучения в циклических ускорителях удобна формула

$$W(\text{Вт}) = \frac{10^6}{2\pi} \frac{\delta E(\text{МэВ})}{\rho(\text{м})} J(A). \quad (24.7)$$

В крупнейших электронных ускорителях мощность (интенсивность) излучения составляет 0,1 Вт на 1 мкА тока пучка. Излучение может быть легко обнаружено (синхротронное излучение).

## 25. Угловое распределение излучения ускоренно движущегося заряда

В нерелятивистском случае для ускоренно движущейся заряженной частицы электрическое поле зависит от ускорения:

$$\vec{E}_a = \frac{e}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{R} \right]_{\text{запазд}}, \quad (25.1)$$

где обозначение «запазд» у скобки указывает на то, что поле вычисляется в момент  $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ . Поток энергии, определяемый вектором Умова–Пойнтинга,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_a|^2 \vec{n}, \quad (25.2)$$

внутри телесного угла  $d\Omega$  на больших расстояниях от частицы равен:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \vec{S} \cdot \vec{n} R^2 = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_a|^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{\vec{v}}^2 \sin^2 \theta, \quad (25.3)$$

где  $\theta$  – угол между ускорением  $\dot{\vec{v}}$  и вектором  $\vec{n}$ , направленным в точку наблюдения. Таким образом, угловая зависимость излучения описывается простой зависимостью  $\sin^2 \theta$ .

Рассмотрим поле релятивистской частицы на больших расстояниях от ускоренно движущегося заряда. В этом случае в выражении для напряженности электрического поля

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right]_{\text{затаяд}} + \frac{e}{c} \left[ \frac{\vec{n}}{\kappa^3 R} \times \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right\} \right]_{\text{затаяд}} \quad (25.4)$$

можно оставить только второй член.

Первый член представляет квазистационарное поле, не содержащее ускорение  $\dot{\vec{\beta}}$  и пропорциональное  $1/R^2$ . Поток энергии этого квазистационарного поля внутри телесного угла  $d\Omega$  с ростом  $R$  убывает как  $1/R^2$ .

Поток энергии в единицу телесного угла для второго члена равен:

$$\frac{dI}{d\Omega} = (\vec{S} \cdot \vec{n}) R^2 = \frac{e^2}{4\pi c} \left[ \frac{1}{\kappa^6} \left| \vec{n} \times \left[ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right|^2 \right]_{\text{затаяд}} \quad (25.5)$$

и зависит от  $R$  только через временный аргумент  $t' = t - R(t')/c$ . Другими словами, поток энергии через площадки  $R^2 d\Omega$  внутри выбранного телесного угла  $d\Omega$ , которые находятся на разных расстояниях от частицы, будет одним и тем же в соответствующие моменты времени (учитывая конечную скорость переноса энергии), и электромагнитное поле распространяется от породившей его частицы на бесконечность.

В этих условиях возникает поле излучения, которое отрывается от своего источника. В случае же квазистационарных полей такого не происходит: квазистационарное поле остается постоянно связанным с частицей и не издает потока, распространяющегося на бесконечность.

Анализируя формулу (25.5), замечаем, что релятивистские эффекты обязаны двум факторам: первый связан с взаимным расположением векторов  $\vec{\beta}$  и  $\dot{\vec{\beta}}$ ; второй связан с переходом от системы координат, где покоится частица, к лабораторной системе координат, в результате чего в знаменателе появляются степени:

$$\kappa = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt} = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}.$$

Для ультрарелятивистских частиц угловое распределение определяется именно зависимостью от  $\kappa$ .

Придадим формуле (25.5) несколько иной вид. Возводя

$$\left| \vec{n} \times \left[ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right|^2$$

в квадрат и проводя необходимые вычисления с помощью векторной алгебры, получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \left\{ \frac{2(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})}{\kappa^5} + \frac{\dot{\vec{\beta}}^2}{\kappa^4} - \frac{(1 - \beta^2)(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})}{\kappa^6} \right\}. \quad (25.6)$$

### Рассмотрим некоторые частные случаи

1. Нерелятивистская частица,  $\beta \ll 1$ . Пренебрегая членами порядка  $\beta$ , получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \theta, \quad (25.7)$$

где  $\theta$  – угол между ускорением и направлением  $\vec{n}$  в точку наблюдения. Излучение распределено симметрично относительно направления  $\dot{v}$  и максимально в направлении, перпендикулярном направлению  $\dot{v}$ .

2. Ультрарелятивистская частица,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \gg 1$ , ускорение  $\dot{v}$  и скорость параллельны:  $\dot{v} \parallel \vec{v}$ . Обозначим угол между  $\vec{n}$  и  $\vec{v}$  как  $\theta$ .

Из (25.6) получим в этом приближении

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^6}. \quad (25.8)$$

Если  $\cos \theta \approx 1$ , то знаменатель при этом условии мал, и почти все излучение сосредоточено в области малых  $\theta$ , хотя  $\frac{dI}{d\Omega}(\theta = 0) = 0$ .

Если при малых углах ограничиться разложениями  $\sin^2 \theta \approx \theta^2$ ,  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  и учесть, что  $v \sim c$ , то получим:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{16e^2 \dot{v}^2 \gamma^{10} (\gamma \theta)^2}{\pi c^3 (1 + \gamma^2 \theta^2)^6}. \quad (25.9)$$

Излучение сосредоточено в конусе с углом раствора порядка  $\gamma^{-1}$ .

3. Ультрарелятивистская частица, ускорение перпендикулярно скорости:  $\dot{v} \perp \vec{v}$ . Из формулы (25.6) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi c} \left\{ \frac{\dot{\beta}^2}{\kappa^4} - \frac{(1-\beta^2)(\vec{n} \cdot \dot{\beta})}{\kappa^6} \right\} = \\ &= \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^6} \right\}. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Здесь  $\theta$  – угол между  $\vec{n}$  и  $\vec{v}$ ,  $\varphi$  – азимутальный угол вектора  $\vec{n}$  с плоскостью, в которой находятся векторы  $\vec{v}$  и  $\dot{v}$ . Интенсивность симметрична лишь относительно плоскости  $(\vec{v}, \dot{v})$  и обращается в нуль в двух направлениях этой плоскости, которые образуют угол  $\theta$ , равный  $\arccos(v/c)$ , со скоростью  $\vec{v}$ .



Распределение (25.10), так же, как и (25.8), сконцентрировано в направлении вперед и при малых  $\theta$  имеет вид:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{4e^2 \dot{v}^2 \gamma^8}{\pi c^3 (1 + \gamma^2 \theta^2)^4} \left[ 1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \varphi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right]. \quad (25.11)$$

Произведение  $\vec{S} \cdot \vec{n}$  представляет поток энергии за единицу времени через единичную площадку, причем этот поток генерирован излучением заряда в момент  $t' = t - R(t')/c$  и регистрируется в точке наблюдения в момент  $t$ . Если нужно определить энергию, излученную за конечное время ускорения от  $t' = T_1$  до  $t' = T_2$ , то следует провести интегрирование:

$$W = \int_{t=T_1 + \frac{R(T_1)}{c}}^{t=T_2 + \frac{R(T_2)}{c}} (\vec{S} \cdot \vec{n}) dt = \int_{t'=T_1}^{t'=T_2} (\vec{S} \cdot \vec{n}) \frac{dt}{dt'} dt'. \quad (25.12)$$

В связи с этим интересно знать величину

$$(\vec{S} \cdot \vec{n}) \frac{dt}{dt'}, \quad (25.13)$$

представляющую мощность, излучаемую через единичную поверхность за единицу собственного времени заряда. Интенсивность излучения в единицу телесного угла определяется соотношением

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= R^2 (\vec{S} \cdot \vec{n}) \frac{dt}{dt'} = \kappa R^2 (\vec{S} \cdot \vec{n}) \equiv R^2 (\vec{S} \cdot \vec{n}) (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) = \\ &= (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) \frac{dI}{d\Omega}. \end{aligned} \quad (25.14)$$

Если заряд ускоряется лишь в течение такого короткого промежутка времени, за который  $\vec{\beta}$  и  $\dot{\vec{\beta}}$  существенно не изменяются по направлению и величине, и если, кроме того, точка наблюдения столь далека, что  $\vec{n}$  и  $R$  меняются за это время пренебрежимо мало, то величина  $\frac{dI(t')}{d\Omega}$  будет пропорциональна угловому распределению излученной энергии:

$$\frac{dI(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\left| \vec{n} \times \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right\} \right|^2}{\kappa^5}. \quad (25.15)$$

а) Рассмотрим частный случай прямолинейного движения ( $\dot{\vec{v}} \parallel \vec{v}$ ). Из формулы (25.15) получим:

$$\frac{dI(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{v}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (25.16)$$

При  $\beta \ll 1$  это соотношение сводится к формуле Лармора (25.7):

$$\frac{dI(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \theta.$$

Зависимость интенсивности излучения от угла представлена на рис. 25.1 для нерелятивистского ( $\beta \approx 0$ ) и ультрарелятивистского ( $\beta \approx 1$ ) случая.

На рис. 25.2 схематически представлено возникновение и распределение синхротронного излучения для нерелятивистской частицы, движущейся в линейном ускорителе. Никакое излучение не испускается вдоль направления ускорения. На рис. 25.3 также схематически представлено возникновение и распределение синхротронного излучения для релятивистской частицы, движущейся в циклическом ускорителе.

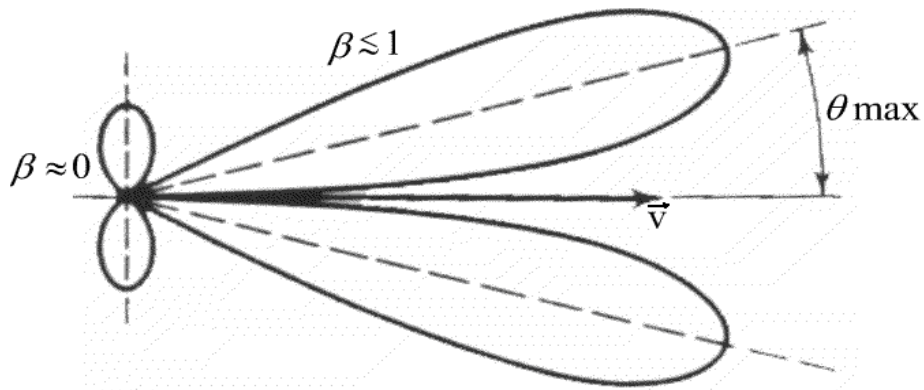


Рис. 25.1. Распределение интенсивности излучения заряда, испытывающего ускорение в направлении движения

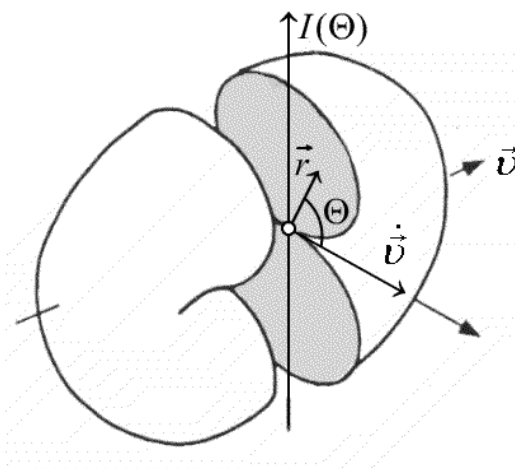


Рис. 25.2. Распределение интенсивности излучения медленной нерелятивистской частицы, движущейся в линейном ускорителе

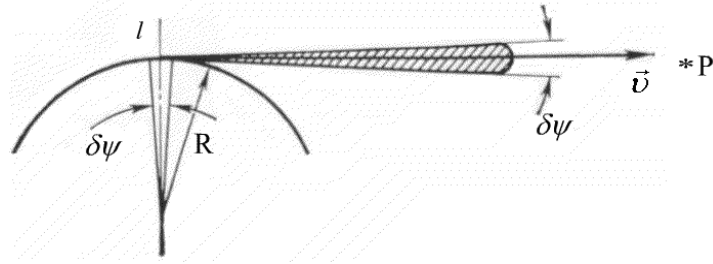


Рис. 25.3. Схема возникновения и регистрации синхротронного излучения

Угол, для которого интенсивность излучения максимальна, равен:

$$\theta_{\max} = \arccos \left[ \frac{1}{3\beta} (\sqrt{1+15\beta^2} - 1) \right].$$

В пределе  $\beta \rightarrow 0$   $\theta_{\max} \rightarrow \frac{1}{2\gamma}$  и интенсивность  $\left. \frac{dI}{d\Omega} \right|_{\max} \sim \gamma^8$ . При  $\beta = 0,5$  (это соответствует  $T_e \sim 80$  кэВ) получаем  $\theta_{\max} = 38,2^\circ$ . Для релятивистских частиц угол  $\theta_{\max} \sim \frac{mc^2}{E}$ , т. е. очень мал. Поэтому все излучение сосредоточено в очень узком конусе вдоль направления движения. В этом случае из (16) получаем приближенную формулу (используя разложения  $\sin^2 \theta \approx \theta^2$ ,  $\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^5 \approx \frac{\gamma - 10}{32} [1 + \theta^2 \gamma^2]^5$ ):

$$\frac{dI(t')}{d\Omega} \approx \frac{8}{\pi} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3} \gamma^8 \frac{(\gamma \theta)^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5}. \quad (25.17)$$

Величину  $\gamma^{-1}$  используют как естественную единицу измерения углов.

На рис. 25.4 изображена угловая зависимость мощности излучения (25.17), для которой углы выражены в единицах  $\gamma^{-1}$ . Максимум распределения находится так:  $\theta = \frac{1}{2} \gamma^{-1}$ , а половине интенсивности соответствуют:  $\theta = 0,23 \gamma^{-1}$  и  $\theta = 0,91 \gamma^{-1}$ .

В релятивистском предельном случае ( $\beta \rightarrow 1$ ) среднеквадратичное значение угла равно:

$$\sqrt{\langle \theta \rangle^2} = \gamma^{-1} = mc^2/E. \quad (25.18)$$

Угловое распределение мощности излучения, приведенное на рис. 25.4, является типичным, независимо от ориентации векторов  $\vec{\beta}$  и  $\dot{\vec{\beta}}$ .

Полную интенсивность излучения найдем по формуле:

$$\begin{aligned} I &= \int \left( \frac{dI(t')}{d\Omega} \right) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \left[ \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \right] \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2 \gamma^6. \end{aligned} \quad (25.19)$$

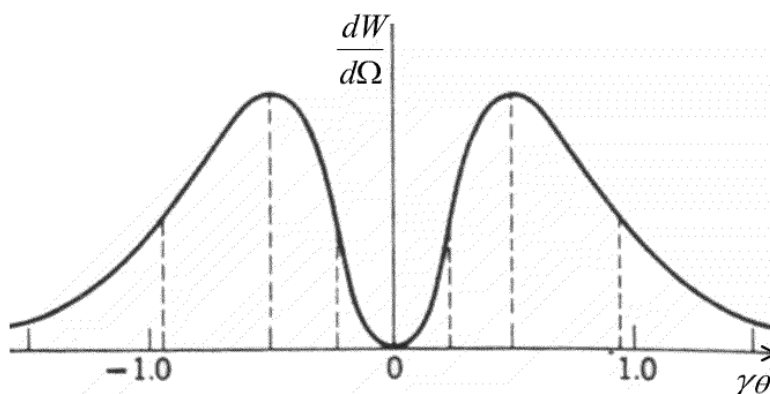


Рис. 25.4. Угловое распределение мощности излучения для релятивистской частицы

б) Выведем формулу для углового распределения излучения при мгновенном движении заряда по окружности ( $\dot{\vec{\beta}} \perp \vec{\beta}$ ).

Начало системы координат свяжем с движущейся частицей, причем направление мгновенной скорости  $\vec{\beta}$  совпадает с направлением оси  $z$ , а направление ускорения  $\dot{\vec{\beta}}$  – с направлением оси  $x$  (рис. 25.5).

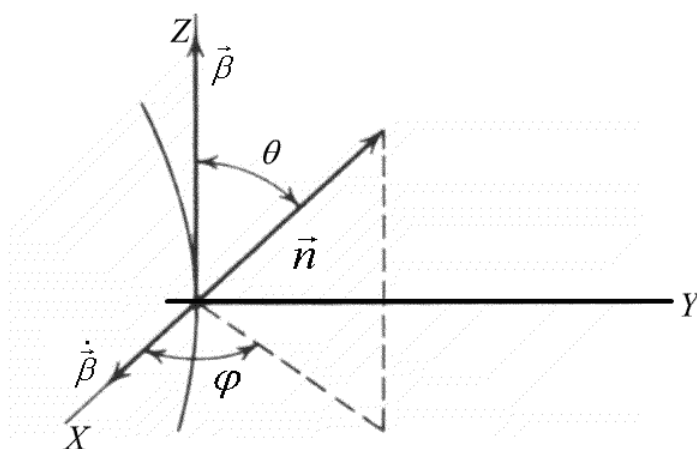


Рис. 25.5. Положение движущейся частицы в выбранной системе координат

Единичный вектор  $\vec{n}$ , направленный в точку наблюдения, характеризуется в сферической системе координат углами  $\theta$  и  $\varphi$ .

Из формулы (25.10) с учетом того, что  $\frac{dI(t')}{d\Omega} = (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) \frac{dI}{d\Omega}$ , для углового распределения получим:

$$\frac{dI(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[ 1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (25.20)$$

Как и в предыдущем случае, рассмотренном в п. а), снова имеется характерная релятивистская концентрация излучения в направлении движения.

Считая угол  $\theta$  малым и  $\gamma^{-1} \ll 1$ , можно провести разложение в ряд Тейлора по  $\theta$  и  $\gamma^{-2}$ :

$$\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^3 \approx \left[1 - \left(1 - \frac{\gamma^{-2}}{2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right]^3 \approx \left[\frac{\gamma^{-2}}{2} + \frac{\theta^2}{2}\right]^3 \approx \frac{\gamma^{-6}}{8} [1 + \theta^2 \gamma^2]^4,$$

$$\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2 \approx \frac{\gamma^{-4}}{4} [1 + \theta^2 \gamma^2]^2,$$

и угловое распределение интенсивности излучения представить приближенно:

$$\frac{dI(t')}{d\Omega} \approx \frac{2}{\pi} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3} \gamma^6 \frac{1}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \varphi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2}\right]. \quad (25.21)$$

Полная интенсивность получается, если проинтегрировать (25.20) по всем углам:

$$I(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3} \gamma^4. \quad (25.22)$$

При движении по окружности (когда скорость перпендикулярна ускорению)  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m \dot{\vec{v}}$ . Поэтому формула (25.22) запишется в виде:

$$I_{\text{круг}}(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2 \gamma^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2.$$

В линейном ускорителе движение прямолинейно и интенсивность излучения равна:

$$I_{\text{прямол}}(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2.$$

Так как изменение импульса равно силе, то при заданной величине приложенной силы находим, что излучение при поперечном ускорении в  $\gamma^2$  раз больше излучения для случая прямолинейного движения.

## 26. Излучение заряда при произвольном ультрарелятивистском движении

Излучение ускоренно движущейся ультрарелятивистской заряженной частицы в произвольный момент времени можно считать когерентной суперпозицией излучений, обусловленных компонентами вектора ускорения, параллельной и перпендикулярной скорости:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{dI_{\perp}}{d\Omega} + \frac{dI_{\parallel}}{d\Omega}, \quad (26.1)$$

где  $\frac{dI_{\perp}}{d\Omega} \sim \dot{v}_{\perp}^2$ ,  $\frac{dI_{\parallel}}{d\Omega} \sim \dot{v}_{\parallel}^2$  и  $\dot{v} = \dot{v}_{\perp} + \dot{v}_{\parallel}$ .

Однако, как было установлено выше, если продольная и поперечная силы, вызывающие, соответственно, ускорения  $\dot{v}_{\parallel}$  и  $\dot{v}_{\perp}$ , одного порядка, то интенсивность излучения определяется лишь поперечной компонентой ускорения  $\dot{v}_{\perp}$ .

Можно сказать, что в каждый момент времени излучение совпадает с излучением заряда, движущегося по дуге окружности, имеющей мгновенный радиус кривизны:

$$\rho = \frac{v^2}{\dot{v}_{\perp}} \approx \frac{c^2}{\dot{v}_{\perp}}. \quad (26.2)$$

Угловое распределение излучения при этом описывается формулами и в произвольный момент времени представляет излучение, вытянутое в виде иглообразного конуса, с осью симметрии, представляющей касательную к траектории, и вектор мгновенной скорости в точке, где находится в этот момент частица.

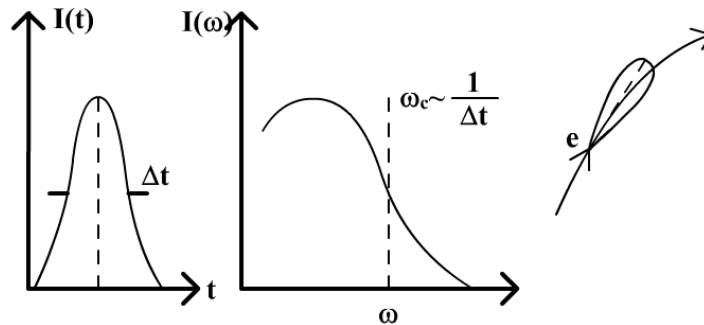


Рис. 26.1. Временные и частотные характеристики движущейся частицы

На детектор  $D$  излучение частицы попадает в течение времени  $\Delta t$ , поэтому в спектре излучения будут представлены частоты вплоть до предельной частоты  $\omega_c \sim \frac{1}{\Delta t}$ .

Наблюдатель регистрирует излучение в виде вспышки, когда вектор мгновенной скорости направлен на него (детектор), или в виде последовательности вспышек, если движение частицы периодическое, как например в синхротроне (рис. 26.1).

При угловом растворе луча порядка  $\gamma^{-1}$  путь, пройденный частицей за время  $\Delta t'$ , составляет  $v \Delta t' \sim c \Delta t' = \rho \gamma^{-1}$  (рис. 26.2), где  $\rho$  – мгновенный радиус кривизны, а следовательно,

$$\Delta t' \sim \frac{\rho}{c\gamma}, \quad (26.3)$$

а для наблюдателя интервал времени наблюдения равен:

$$\Delta t \sim \left\langle \frac{dt}{dt'} \right\rangle \Delta t'. \quad (26.4)$$

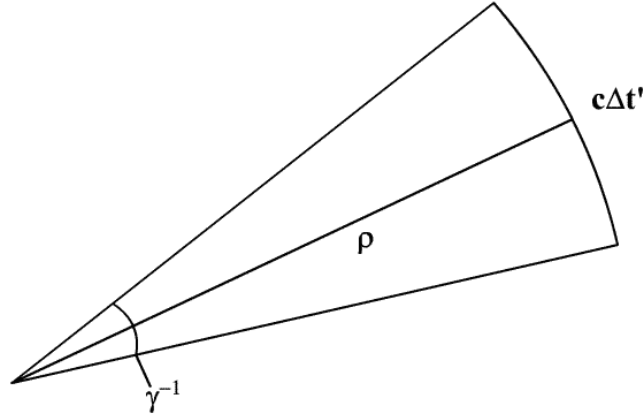


Рис. 26.2. К выводу формулы 26.3

Поскольку

$$\left\langle \frac{dt}{dt'} \right\rangle = \langle \kappa \rangle \sim \frac{1}{\gamma^2}, \quad (26.5)$$

то длительность вспышки излучения, которое регистрирует детектор, составляет

$$\Delta t \sim \gamma^{-3} \frac{\rho}{c}. \quad (26.6)$$

Из свойств интеграла Фурье, применяемого для анализа импульсов или волновых пакетов конечных размеров, следует, что в импульсе длительности  $\Delta t$  будут представлены спектральные компоненты, вплоть до критической частоты  $\omega_c$  (рис. 26.1):

$$\omega_c \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \left( \frac{c}{\rho} \right) \gamma^3. \quad (26.7)$$

Если частица совершает круговое движение, как в циклическом ускорителе, то величина  $c/\rho$  равна угловой частоте  $\omega_0$ . При произвольном движении она также является характерной частотой движения. При ультрарелятивистском движении частицы  $E \gg mc^2$  спектр излучения простирается вплоть до частоты, которая равна:

$$\omega_c \cong \omega_0 \gamma^3, \quad (26.8)$$

т. е. намного больше (в  $\gamma^3$  раз) основной частоты  $\omega_0$ . Так для синхротрона на 200 МэВ  $\gamma_{\max} \sim 400$  и  $\omega_c = 6 \cdot 10^7 \omega_0$ . Основная частота составляет  $\omega_0 = 3 \cdot 10^8$  Гц, или соответствующая длина волны равна  $1000 \text{ \AA}$ . Поэтому,

хотя основная частота лежит в области  $\sim 100$  МГц, спектр излучения распределяется в видимую область. Дальше мы изучаем характер углового распределения излучения для различных спектральных компонент, а также зависимость полной энергии излучения от частоты.

## 27. Спектральное и угловое распределение энергии, излучаемой ускоренно движущимися зарядами

Полная энергия, излучаемая в единицу телесного угла, определяется как

$$\frac{dQ}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{f}(t)|^2 dt, \quad (27.1)$$

где

$$|\vec{f}(t)|^2 = \left| \sqrt{\frac{c}{4\pi}} (R\vec{E}) \right|_{\text{здесь}}^2 = \frac{dI(t)}{d\Omega} \quad (27.2)$$

и  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля, измеряемого на далеких расстояниях от ускоренно движущегося заряда, так что область, в которой происходит ускорение, видна под малым телесным углом. Здесь мы рассматриваем мгновенную мощность или интенсивность излучения в единицу телесного угла, зависящую от времени в лабораторной системе, т. е.  $\frac{dI(t)}{d\Omega}$ , в отличие от величины  $\frac{dI(t')}{d\Omega}$ , рассмотренной в п. 25.

Необходимость такого рассмотрения вызвана тем, что часто нужно знать спектр излучения с точки зрения наблюдателя. Кроме того, будем считать, что полная излученная энергия конечна. Предположение о наблюдении на далеких расстояниях позволяет учитывать в выражении для напряженности  $\vec{E}$  только часть, связанную с ускорением, опуская часть, связанную с равномерным движением заряда:

$$\vec{E} \approx \vec{E}_a = \frac{e}{c} \left[ \frac{\vec{n}}{R^3} \times \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right\} \right]_{t'}, \quad (27.3)$$

где индекс  $t'$  у скобки  $[ ]_{t'}$  означает, что величина вычисляется для момента

$$t = t' + \frac{R(t')}{c}.$$

Выражение (27.1) можно записать с помощью преобразования Фурье как интеграл по частотам.

Для этого введем амплитуду  $\vec{f}(\omega)$  функции  $\vec{f}(t)$ :

$$\vec{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(t) e^{i\omega t} dt \quad (27.4)$$

и обратное преобразование



$$\vec{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (27.5)$$

С учетом произведенных операций формулу (27.1) можно представить в виде

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \vec{f}^*(\omega') \cdot \vec{f}(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t}. \quad (27.6)$$

Используя интегральное представление  $\delta$ -функции Дирака

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega' - \omega)t} dt = \delta(\omega' - \omega), \quad (27.7)$$

приведем выражение (27.6) к виду

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\omega. \quad (27.8)$$

Так как отрицательные частоты не имеют физического смысла, то в (27.8) нужно проводить интегрирование по положительным частотам. Это означает, что

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = |\vec{f}(\omega)|^2 + |\vec{f}(-\omega)|^2. \quad (27.9)$$

Если  $\vec{f}(t)$  действительная величина, то

$$\vec{f}(-\omega) = \vec{f}^*(\omega), \quad (27.10)$$

как это следует из (27.2) и (27.5), поэтому

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = 2|\vec{f}(\omega)|^2. \quad (27.11)$$

Величина  $\frac{dI(\omega)}{d\Omega}$  равна энергии, излучаемой в единицу телесного угла в единичном интервале частот, или спектральной интенсивности излучения в единичный телесный угол. Таким образом, установлена связь между измерением энергии излучения во времени и ее частотным спектром.

Из формул (27.2–27.4) находим

$$\vec{f}(\omega) = \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t'} \left( \frac{\vec{n} \times \left[ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right]}{K^3} \right)_{t'} dt'. \quad (27.12)$$

Перейдем к переменной  $t'$ , используя формулу

$$t = t' + \frac{R(t')}{c}.$$

При этом

$$dt = \left( \frac{dt}{dt'} \right) dt' = \left( 1 + \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt'} \right) dt' = (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) dt' = \kappa dt' \quad (27.13)$$

и формула (27.12) приобретает вид

$$\vec{f}(\omega) = \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega \left( t' + \frac{R(t')}{c} \right)} \left( \frac{\vec{n} \times \left[ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right]}{\kappa^3} \right)_{t'} \frac{dt}{dt'} dt'. \quad (27.14)$$

Так как предполагается, что точка наблюдения достаточно удалена от области, где движется заряженная частица (рис. 27.1), то можно считать, что единичный вектор  $\vec{n}$  не меняется со временем, а

$$R(t') \cong (r - \vec{n} \cdot \vec{r}'(t')). \quad (27.15)$$

Если опустить в (27.14) постоянный фазовый множитель  $e^{i\omega r/c}$ , возникающий после подстановки (27.15) в (27.14) и не играющий роли, так как  $dI(\omega)/d\Omega \sim |\vec{f}(\omega)|^2$ , то с учетом полученных выше соотношений и опуская штрихи для упрощения записи, получим

$$\vec{f}(\omega) = \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega \{ t - \vec{n} \cdot \vec{r}(t)/c \}} \frac{\vec{n} \times \left[ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right]}{\kappa^2} dt. \quad (27.16)$$

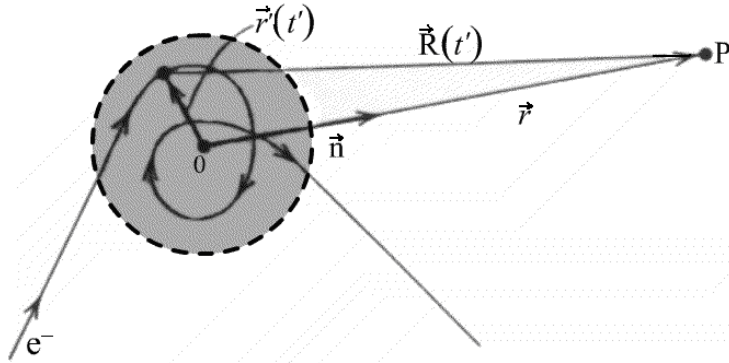


Рис. 27.1. Положение движущейся частицы и точки наблюдения P по отношению к началу координат O

Если задан закон движения заряда, то известна зависимость  $\vec{r}(t)$ , а также можно найти  $\vec{\beta}(t)$  и  $\dot{\vec{\beta}}(t)$ , поэтому интеграл в (27.16) вычисляется как функция частоты  $\omega$  и направления в точку наблюдения  $\vec{n}$ .

Подставляя (27.16) в (27.11), находим:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{n} \times \left[ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} e^{i\omega \{ t - \vec{n} \cdot \vec{r}(t)/c \}} dt \right|^2. \quad (27.17)$$

Выражение (27.17) удобно тем, что интегрирование ведется фактически лишь по тому интервалу времени, где ускорение  $\dot{\vec{\beta}} \neq 0$ .

Более простое выражение получается, если использовать соотношение

$$\frac{\vec{n} \times \left[ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right]}{\kappa^2} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{\kappa} \right], \quad (27.18)$$

которое доказывается непосредственным дифференцированием по времени величины

$$\frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{\kappa}. \quad (27.19)$$

В таком случае множитель перед экспонентой в (27.17) является полным дифференциалом. Проводя интегрирование по частям и считая, что  $\dot{\vec{\beta}}$  обращается в нуль в начале и конце интегрирования, получим для спектральной интенсивности:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{\beta}] \exp \left\{ i\omega \left[ t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c} \right] \right\} dt \right|^2. \quad (27.20)$$

Заметим, что в выражениях (27.17) и (27.20) поляризация излучения определяется направлением векторного интеграла. Для определения интенсивности излучения с заданной поляризацией нужно до вычисления квадрата модуля найти скалярное произведение интеграла на единичный вектор данной поляризации.

## 28. Спектральное и угловое распределение излучения для непрерывного распределения движущихся зарядов и моментов

В предыдущем разделе было получено выражение для спектрального и углового распределения энергии, излучаемой ускоренными зарядами:

а) для одиночного заряда:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = 2 \left| \vec{f}(\omega) \right|^2 = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c} \right)} \left\{ \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) \right\} dt \right|^2; \quad (28.1)$$

б) для группы  $N$  ускоренно движущихся зарядов (с произведением замены):

$$\vec{\beta} e^{-i\frac{\omega}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}(t)} \rightarrow \sum_{j=1}^N e_j \vec{\beta}_j e^{-i\frac{\omega}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}_j(t)}; \quad (28.2)$$

в) в предельном случае непрерывного распределения зарядов:

$$\sum_j^N e_j \beta_j e^{-i\frac{\omega}{c}\vec{n}\cdot\vec{r}_j(t)} \rightarrow \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}, t) e^{-\frac{\omega}{c}\vec{n}\cdot\vec{r}}, \quad (28.3)$$

где  $\frac{\omega\vec{n}}{c} = \vec{k}$  – волновой вектор;  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  – плотность тока.

В итоге получим:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3r \{ \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{j}(\vec{r}, t)) \} e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} \right|^2. \quad (28.4)$$

### Излучение движущегося момента

Воспользуемся тем, что ротор вектора намагниченности  $\vec{M}(\vec{r}, t)$  связан с током:

$$\vec{j}_M = c \operatorname{rot} \vec{M}(\vec{r}, t). \quad (28.5)$$

Покажем, что после подстановки (28.5) в (28.4) можно получить соотношение для  $\frac{dI(\omega)}{d\Omega}$  в виде

$$\frac{dI_M(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3r [\vec{n} \times \vec{M}(\vec{r}, t)] e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} \right|^2. \quad (28.6)$$

Для этого заметим, что

$$\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{J}_M(\vec{x}, t)] e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{c}\right)} = c \left\{ \vec{n} \times \left[ \vec{n} \times \left[ \vec{\nabla} \times \vec{M} \right] \right] e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{c}\right)} \right\}.$$

Здесь оператор  $\vec{\nabla}$  действует на  $\vec{M}$ .

Если использовать тензорные обозначения для векторного произведения двух векторов:

$$[\vec{A}\vec{B}] = \vec{e}_i A_j B_k \varepsilon_{ijk},$$

где  $\vec{e}_i$  – единичные орты,  $\varepsilon_{ijk}$  – антисимметричный тензор 3-го ранга, то выражение (28.6) можно записать в виде:

$$\frac{dI_M(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| c \int_{-\infty}^{+\infty} dt \prod_{r=1}^3 \int dx_r R_{jS} \left( \nabla_j \vec{M}_S \right) e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{c}\right)} \right|^2 \quad (28.7)$$

в силу тождества

$$\begin{aligned} \nabla_j \left( R_{jS} M_S e^{i\omega \left( t - \frac{n_r x_r}{c} \right)} \right) &= R_{jS} \left( \nabla_j M_S^\downarrow \right) e^{i\omega \left( t - \frac{n_r x_r}{c} \right)} + \\ &+ R_{jS} M_S \left( \nabla_j e^{i\omega \left( t - \frac{n_r x_r}{c} \right)} \right) \end{aligned} \quad (28.8)$$

и обобщенной теоремы Гаусса:

$$\begin{aligned} \prod_{r=1}^3 \int dx_r \nabla_j \left\{ R_{jS} M_S e^{i\omega \left( t - \frac{n_r x_r}{c} \right)} \right\} &= \\ = \prod_{r=1}^3 \int dx_r \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ R_{jS} M_S e^{i\omega \left( t - \frac{n_r x_r}{c} \right)} \right\} &= \\ = \prod_{r=1}^3 \delta_{rj} R_{jS} M_S e^{i\omega \left( t - \frac{n_r x_r}{c} \right)} \Big|_{x_r=-\infty}^{+\infty} &= 0, \end{aligned} \quad (28.9)$$

а также

$$\begin{aligned} \nabla_j \left( R_{jS} M_S e^{i\omega \left( t - \frac{n_r x_r}{c} \right)} \right) &= \\ = R_{jS} \left( \nabla_j M_S^\downarrow \right) e^{i\omega \left( t - \frac{n_r x_r}{c} \right)} + R_{jS} M_S \left( \nabla_j e^{i\omega \left( t - \frac{n_r x_r}{c} \right)} \right), \end{aligned} \quad (28.10)$$

получим

$$R_{jS} \left( \nabla_j M_S^\downarrow \right) e^{i\omega \left( t - \frac{n_r x_r}{c} \right)} = -R_{jS} M_S \left( \nabla_j e^{i\omega \left( t - \frac{n_r x_r}{c} \right)} \right) = -i R_{jS} M_S \frac{n_j \omega}{c} e^{i\omega \left( t - \frac{n_r x_r}{c} \right)}. \quad (28.11)$$

В приведенных выше формулах тензор  $R_{jS}$  имеет вид  $\varepsilon_\alpha n_p n_m \varepsilon_{\alpha\beta e} \varepsilon_{emn} \varepsilon_{njS}$  и не меняется со временем на достаточно больших расстояниях точки наблюдения от области, где находятся частицы, обладающие магнитным моментом  $\vec{M}$ . Замечая, что

$$R_{jS} M_S n_j = \vec{n} \times [\vec{n} \times [\vec{n} \times M]] = -[\vec{n} \times \vec{M}],$$

получим

$$R_{jS} M_S n_j = i \frac{\omega}{c} \left[ \vec{n} \times \vec{M}(\vec{r}, t) e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c} \right)} \right], \quad (28.12)$$

и формула (28.7) с учетом (28.8 – 28.12) принимает вид

$$\frac{dI_M(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3 r [\vec{n} \times \vec{M}(\vec{r}, t)] e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c} \right)} \right|^2.$$

Таким образом, соотношения (28.4) и (28.6) эквивалентны, если

$$\vec{j} \equiv \vec{j}_M = c \operatorname{rot} \vec{M}(\vec{r}, t).$$

## 29. Спектр излучения релятивистской заряженной частицы при мгновенном движении по окружности

Как было установлено ранее, ультрарелятивистская частица при произвольном ускоренном движении излучает так же, как заряд, движущийся с постоянной скоростью  $v$  по окружности с радиусом  $\rho$ , равным мгновенному радиусу кривизны:

$$\rho = \frac{v^2}{\dot{v}}.$$

Для сравнения вспомним известную формулу для центростремительного ускорения частицы, движущейся по окружности постоянного радиуса  $\rho$ :

$$a = \dot{v} = \frac{v^2}{\rho},$$

когда вектор  $\vec{v}$  меняет направление, но не меняется по величине.

Излучение распространяется в узком конусе, ось которого направлена вдоль вектора  $\vec{v}$  и регистрируется наблюдателем как короткий импульс излучения, возникающий при прохождении иглообразного луча через точку наблюдения. Для определения распределения энергии по частотам и углам нужно вычислить интеграл в выражении для спектральной интенсивности:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c} \right)} dt \right|^2.$$

Так как длительность импульса излучения

$$c\Delta t' \sim \rho \sin \theta \sim \rho \gamma^{-1},$$

$$\Delta t' \sim \rho / c\gamma$$

очень мала, то необходимо знать скорость  $\vec{\beta}$  и положение  $\vec{r}(t)$  частицы на малой дуге траектории, на которой касательная приблизительно направлена в точку наблюдения.

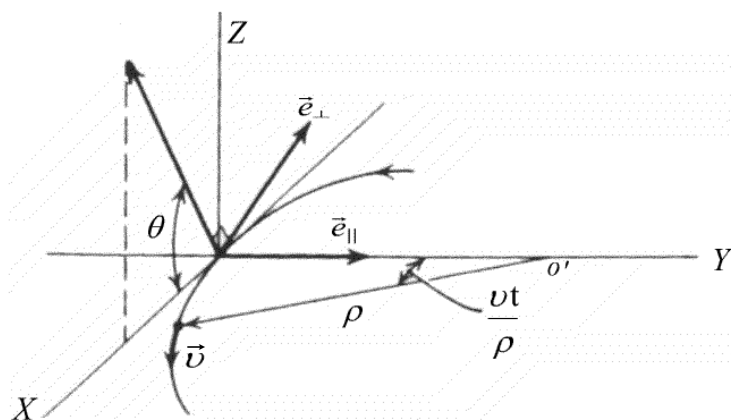


Рис. 29.1. Положение отрезка траектории и мгновенного радиуса кривизны ускоренно движущейся релятивистской заряженной частицы в выбранной системе координат

На рис. 29.1 показана выбранная система отсчета.

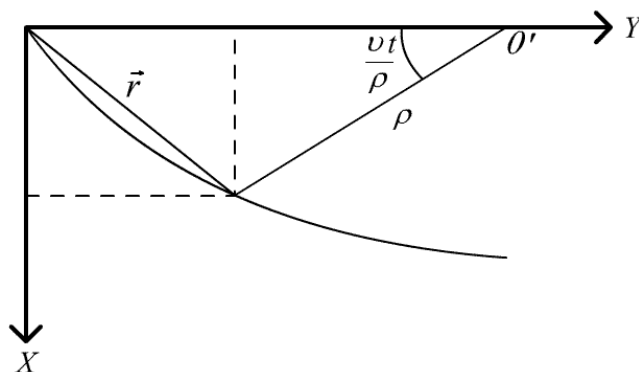


Рис. 29.2. Положение траектории частицы в плоскости XOY

Отрезок траектории и мгновенный радиус кривизны  $\rho$  лежат в плоскости XOY (рис. 29.2), вектор  $\vec{n}$  расположен в плоскости XOZ,  $\vec{e}_{\parallel}$  – единичный вектор в направлении оси OY ( $\vec{e}_{\parallel} = \vec{e}_2$ ),  $\vec{e}_{\perp} = \vec{n} \times \vec{e}_2$  – вектор нормальной поляризации, приблизительно соответствующий поляризации, перпендикулярной плоскости орбиты.

Последнее утверждение справедливо лишь для малых углов  $\theta$ , но именно для таких углов интенсивность излучения имеет заметную величину. Напомним, что вектор  $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$  направлен в точку наблюдения из точки, где расположен заряд. В известной книге Helmut Wiedemann «Particle Accelerator Physics» в главе, посвященной синхротронному из-

лучению, вектор  $\vec{R}$  направлен от наблюдателя в точку, где находится заряд. Поэтому вектор  $\vec{n}$  в этой книге имеет противоположный знак.

Предположим, что в момент времени  $t = 0$  частица находилась в начале координат. Вычисляя двойное векторное произведение в подынтегральном выражении, получим:

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) = \beta \left\{ -\vec{e}_{\parallel} \sin\left(\frac{vt}{\rho}\right) + \vec{e}_{\perp} \cos\left(\frac{vt}{\rho}\right) \sin \theta \right\}. \quad (29.1)$$

Здесь использованы выражения:

$$\vec{n} = \vec{e}_1 n_x + \vec{e}_3 n_z, \quad (29.2)$$

$$\vec{\beta} = \vec{e}_1 \beta \cos\left(\frac{vt}{\rho}\right) + \vec{e}_2 \beta \sin\left(\frac{vt}{\rho}\right), \quad (29.3)$$

причем

$$n_x = \cos \theta, \quad n_z = \sin \theta, \quad (29.4)$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_{\parallel}, \quad \vec{e}_{\perp} = \vec{n} \times \vec{e}_2. \quad (29.5)$$

Радиус-вектор  $\vec{r}(t)$  проведен из начала координат в плоскости  $XOY$  в точку, где в данный момент находится частица (рис. 29.2), и равен:

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_1 x(t) + \vec{e}_2 y(t). \quad (29.6)$$

Показатель экспоненты в подынтегральном выражении оказывается равным

$$\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c} \right) = \omega \left[ t - \frac{\rho}{c} \sin\left(\frac{vt}{\rho}\right) \cos \theta \right]. \quad (29.7)$$

Так как мы рассматривали мгновенное движение, то можно ограничиться интервалом времени вблизи  $t = 0$  и малыми углами  $\theta$ . Проведя разложения тригонометрических функций в ряд по малым параметрам  $\frac{vt}{\rho}$  и  $\theta$ :

$$\sin\left(\frac{vt}{\rho}\right) \approx \frac{vt}{\rho} - \frac{v^3 t^3}{3! \rho^3}, \quad (29.8)$$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad (29.9)$$

а также, считая, что

$$\beta \approx 1 - \frac{\gamma^{-2}}{2}, \quad (29.10)$$

получим:

$$\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c} \right) \approx \frac{\omega}{2} \left[ t - (\gamma^{-2} + \theta^2) + \frac{v^2 t^3}{3 \rho^2} \right]. \quad (29.11)$$



Используя оценочные соотношения

$$t \sim \rho/c\gamma \text{ и } \theta \sim \langle \theta^2 \rangle^{1/2},$$

можно показать, что неучтенные члены разложения по отношению к оставшимся  $\sim \gamma^{-2}$ .

Далее запишем:

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) = \beta \left[ -\vec{e}_{\parallel} \left( \frac{vt}{\rho} \right) + \vec{e}_{\perp} \theta \right] \approx \left[ \left( \frac{c}{\rho} \right) (-\vec{e}_{\parallel} t) + \vec{e}_{\perp} \theta \right]. \quad (29.12)$$

Подставляя (29.11) и (29.12) в подынтегральное выражение и вводя амплитуды:

$$A_{\parallel}(\omega) \approx \frac{v}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[ (\gamma^{-2} + \theta^2) t + \frac{v^2 t^3}{3\rho^2} \right] \right\} dt, \quad (29.13)$$

$$A_{\perp}(\omega) \approx \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[ (\gamma^{-2} + \theta^2) t + \frac{v^2 t^3}{3\rho^2} \right] \right\} dt, \quad (29.14)$$

находим выражение для углового распределения спектральной интенсивности, представленное в виде разложения по единичным векторам поляризации:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| -\vec{e}_{\parallel} A_{\parallel}(\omega) + \vec{e}_{\perp} A_{\perp}(\omega) \right|^2. \quad (29.15)$$

Мы проводили разложение в ряд по малым временам, а пределы интегрирования распространены до  $\pm \infty$ . Это может показаться противоречащим принятому приближению, однако следует учитывать, что для большинства частот фаза является очень быстро осциллирующей функцией и поэтому подынтегральное выражение будет отлично от 0 лишь в пределах такого интервала времени, который значительно меньше, чем нужно для обоснованности принятия допущений при разложении тригонометрических функций в ряд по времени. Поэтому верхний и нижний пределы интегрирования принимают, соответственно, значения  $\pm \infty$ , не совершая при этом существенной ошибки. Принятое приближение перестает выполняться лишь при частотах  $\omega \sim \omega_0 = \frac{c}{\rho}$ ,

но для релятивистских частиц практически весь спектр излучения соответствует значительно более высоким частотам.

В выражениях (29.13–29.14) перейдем к новой переменной

$$x = \left( \frac{vt}{\rho} \right) \left[ \gamma^{-2} + \theta^2 \right]^{1/2} \quad (29.16)$$

и введем параметр  $\zeta$ .

В этих обозначениях получим:

$$A_{\parallel}(\omega) = \left(\frac{\rho}{\nu}\right) (\gamma^{-2} + \theta^2) \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left\{i \frac{3}{2} \zeta \left(x + \frac{x^3}{3}\right)\right\} dx, \quad (29.17)$$

$$A_{\perp}(\omega) = \left(\frac{\rho}{\nu}\right) \theta (\gamma^{-2} + \theta^2)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i \frac{3}{2} \zeta \left(x + \frac{x^3}{3}\right)\right\} dx. \quad (29.18)$$

Интегралы, входящие в (29.17) и (29.18), выражаются через модифицированные функции Бесселя  $K_{1/3}$  и  $K_{2/3}$ :

$$\int \cos\left[\frac{3}{2} \zeta \left(x + \frac{x^3}{3}\right)\right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\zeta), \quad (29.19)$$

$$\int_0^{\infty} x \sin\left[\frac{3}{2} \zeta \left(x + \frac{x^3}{3}\right)\right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\zeta). \quad (29.20)$$

Поведение этих функций зависит от параметра

$$\zeta = \frac{1}{3} \frac{\omega}{\omega_L} \frac{1}{\gamma^3} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{3/2} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_c} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{3/2}. \quad (29.21)$$

В формуле (29.11) параметр  $\zeta$  выражен через ларморову частоту  $\omega_L = \nu/\rho$ , которая связана с характерным параметром – критической фотонной частотой:

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c \gamma^3}{\rho}, \quad (29.22)$$

определяющей верхнюю границу спектра синхронного излучения.

Функции  $K_{1/3}$  и  $K_{2/3}$  конечны при малых значениях аргумента и экспоненциально убывают при больших значениях аргумента.

### 29.1. Спектральное распределение синхротронного излучения

На основании формул (29.15–29.22) получим следующее выражение для энергии синхротронного излучения, распространяющейся в единицу телесного угла и приходящейся на единичный интервал частот:

$$\begin{aligned} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} &= \frac{3r_c \cdot mc^2 \gamma^2}{4\pi^2 c} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} (1 + \gamma^2 \theta^2)^2 \left[ K_{2/3}(\zeta) + \frac{\gamma^2 \theta^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} K_{1/3}^2(\zeta) \right] = \\ &= \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega \rho}{c}\right)^2 (\gamma^{-2} + \theta^2)^2 \left[ K_{2/3}^2(\zeta) + \frac{\theta^2}{\gamma^{-2} + \theta^2} K_{1/3}^2(\zeta) \right], \end{aligned} \quad (29.23)$$

где в первой части равенства использован для записи классический радиус частицы

$$r_c = \frac{e^2}{mc^2}, \quad (29.24)$$

с энергией покоя  $mc^2$ , и критическая частота спектра излучения  $\omega_c$  (29.22).

Как следует из (29.15) радиальный спектр обусловлен вкладами двух компонент ортогональных поляризацій, одна из которых лежит в плоскости траектории частицы, а другая почти параллельна отклоняющему магнитному полю.

Если обозначить единичные векторы поляризации  $\vec{e}_{\parallel} = \vec{e}_{\sigma}$  и  $\vec{e}_{\perp} = \vec{e}_{\pi}$ , как это принято в литературе, то первое слагаемое в (29.23), пропорциональное  $K_{2/3}^2(\zeta)$ , обусловлено  $\sigma$ -модой, а второе  $\pi$ -модой поляризации.

Излучению, поляризованному в плоскости орбиты, соответствует  $\sigma$ -мода, а излучению, поляризованному перпендикулярно этой плоскости, –  $\pi$ -мода. Для этих двух мод различны не только вклады в спектральную интенсивность, но и распределения в пространстве. На рис. 29.3 приведены диаграммы направленности для  $\sigma$ - и  $\pi$ -мод поляризации.

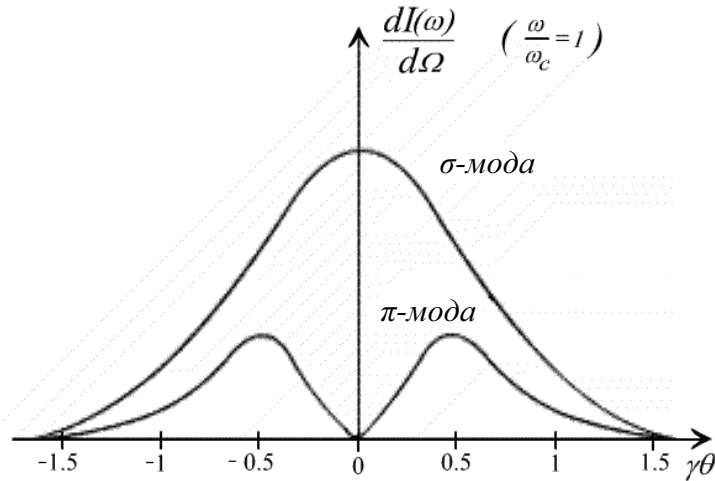


Рис. 29.3.  $\sigma$ - и  $\pi$ -мода поляризации

## 29.2. Угловое распределение синхротронного излучения

Вернемся к выражению (29.23):

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left( \frac{\omega \rho}{c} \right)^2 (\gamma^{-2} + \theta^2)^2 \left[ K_{2/3}^2(\zeta) + \frac{\theta^2}{\gamma^{-2} + \theta^2} K_{1/3}^2(\zeta) \right].$$

Как уже отмечали, первое слагаемое в квадратных скобках соответствует излучению, поляризованному в плоскости орбиты, а второе – перпендикулярно этой плоскости.

Найдем угловое распределение по энергии:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\omega = \frac{7}{16} \frac{e^2}{\rho} \frac{\left[ 1 + \frac{5}{7} \frac{\theta^2}{\gamma^{-2} + \theta^2} \right]}{[\gamma^{-2} + \theta^2]^{5/2}}, \quad (29.25)$$

Если проинтегрировать по всем углам, то можно заметить, что энергия излучения с поляризацией, параллельной плоскости орбитального движения, в 7 раз больше энергии излучения с перпендикулярной поляризацией.

Таким образом, излучение релятивистски движущегося заряда в основном, хотя и не полностью, поляризовано в плоскости движения. Излучение же в случае нерелятивистского движения полностью поляризовано в плоскости движения.

Приведем угловое распределение интенсивности излучения при разных частотах. При частотах порядка  $\omega_c$  излучение сосредоточено в угловой области  $\sim \gamma^{-1}$ . Для  $\omega \ll \omega_c$  размеры угловой области больше, а для больших частот – наоборот, меньше.

Если проинтегрировать выражение (29.23) по углам:  $I(\omega) = \int \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\Omega$ , то получим интенсивность излучения

$$I(\omega) \cong 2\sqrt{3} \frac{e^2}{c} \gamma \frac{\omega}{\omega_c} \int_0^{\infty} K_{5/3}(x) dx. \quad (29.26)$$

Излучение, описываемое соотношениями (29.23) и (29.26), называют синхротронным излучением (оно впервые наблюдалось в электронных синхротронах в 1948 г.). На рис. 29.4 приведена зависимость интенсивности синхротронного излучения (в единицах  $\frac{e^2 \gamma}{c}$  от частоты  $\omega$  (в единицах  $\omega_c$ )).

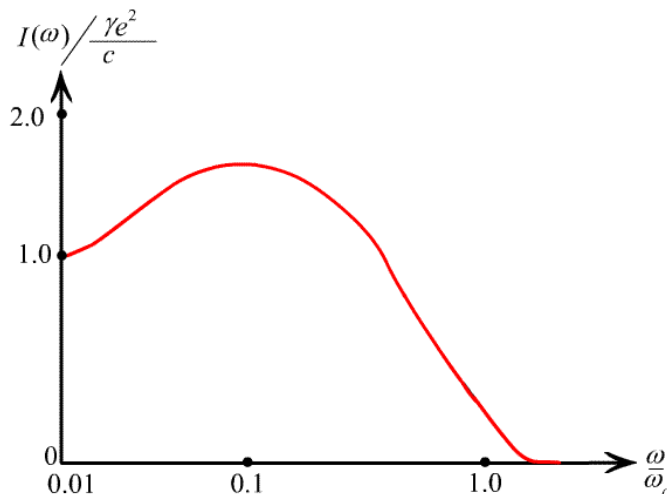


Рис. 29.4. Зависимость интенсивности синхротронного излучения, приходящейся на единичный интервал частот (от  $\omega / \omega_c$ )

При периодическом движении по окружности спектр излучения на самом деле дискретен и состоит из набора частот, кратных основной час-

тоте  $\omega_0 = \frac{c}{\rho}$ . Заряженная частица периодически повторяет свое движение с частотой  $\nu = \frac{c}{2\pi\rho}$  оборотов в секунду, поэтому удобнее говорить об угловом распределении мощности излучения на  $n$ -й гармонике, а не об энергии излучения в единичном интервале частот при пролете частицы.

Соответствующие формулы имеют вид:

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{c}{\rho} \right)^2 \frac{dI(\omega)}{d\Omega} \Big|_{\omega=n\omega_0}, \quad (29.27)$$

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{c}{\rho} \right)^2 I(\omega = n\omega_0). \quad (29.28)$$

Теоретические соотношения были сравнены с экспериментальными данными. Для этого усредняли спектры излучения по периоду цикла ускорения, так как энергия электронов непрерывно возрастает. При максимальной энергии 80 МэВ спектр излучения расположен в области от основной частоты  $\omega_0 \cong 10^9 \text{ Гц}$  до  $\omega_c \cong 10^{16} \text{ Гц}$  ( $\lambda = 1700 \text{ \AA}$ ). Излучение имеет в видимой области голубовато-белый цвет. Результаты измерений согласуются с теорией.

Синхротронное излучение наблюдалось при исследовании солнечных пятен и Крабовидной туманности, спектр излучения которой расположен в пространстве, начинающемся от области радиочастот до далекой ультрафиолетовой области, причем излучение сильно поляризовано. Такое излучение могут давать электроны с  $E = 10^{12} \text{ эВ}$  при движении по круговой или спиральной орбите в магнитном поле  $\sim 10^{-4} \text{ Гс}$ .

## 30. Теория синхротронного излучения

### 30.1. Спектрально-угловое распределение мощности. Формула Шотта

Введем функцию, характеризующую распределение спектральной интенсивности на частоте  $\omega$  и внутри телесного угла  $\frac{dI(\omega, \theta, \varphi)}{d\Omega} \equiv W(\omega, \theta, \varphi)$ , где  $\theta$  и  $\varphi$  – сферические углы единичного вектора, направленные вдоль направления распространения электромагнитной волны. Полная мощность излучения, т. е. энергия, излучаемая электроном в единицу времени, равна:

$$W = \int_0^\infty d\omega \oint d\Omega W(\theta, \varphi, \omega). \quad (30.1)$$

Синхротронное излучение, ввиду его квазидискретности, удобно характеризовать номером гармоники частоты излучения

$$\omega = \nu \omega_0 = \nu e c B / \varepsilon, \quad (30.2)$$

где  $\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$  – полная энергия релятивистского электрона,  $\omega_0$  – циклотронная частота, равная частоте движения электрона в магнитном поле, тогда выражение для полной мощности излучения можно представить в виде суммы по номеру гармоники  $\nu$ :

$$W = \sum_{\nu} \oint d\Omega W_{\nu}(\theta, \varphi). \quad (30.3)$$

Пусть электрон движется в постоянном магнитном поле, направленном по оси  $z$  (рис. 30.1), и движение происходит в плоскости  $XOY$ .

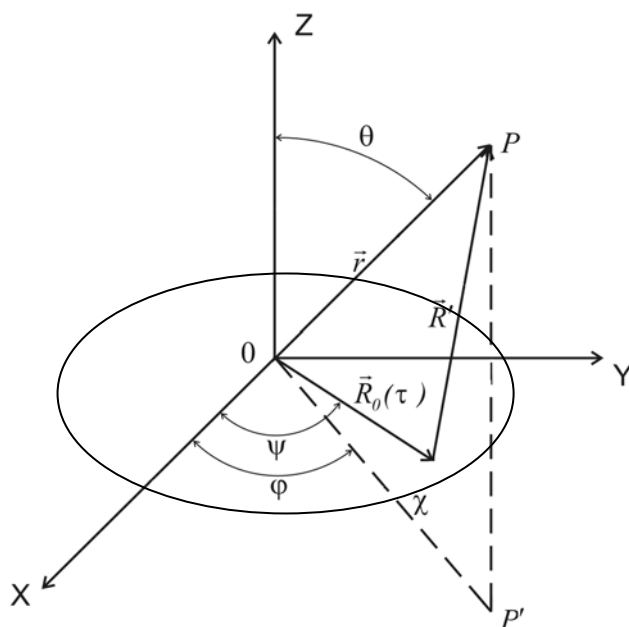


Рис. 30.1. К расчету мощности излучения электрона, движущегося по окружности

Траектория электрона представляет окружность:

$$x = R_0 \cos \psi, \quad y = R_0 \sin \psi, \quad \psi = \omega \tau, \quad (30.4)$$

где  $R_0(\tau)$  характеризует положение электрона на орбите радиусом  $R_0$ ,  $\omega = v/R$  – угловая скорость электрона,  $\tau$  – время.

Если пренебречь силой радиационного трения, считая, что излучение мало влияет на движение электрона, то мощность излучения можно записать через вектор Умова–Пойнтинга, в который входят порождаемые зарядом электромагнитные поля излучения:

$$W = \frac{c}{4\pi} \oint [\vec{E} \vec{B}] dS. \quad (30.5)$$

В формуле (30.5)  $\vec{E} \cong \vec{E}_{\text{rad}}$ ,  $\vec{B} = \vec{B}_{\text{rad}}$ .

Поля излучения определим в момент  $t$  в точке  $p$  волновой зоны с координатами  $r, \theta, \varphi$ . Обычно волновой зоной считают область, размеры которой намного больше эффективных размеров системы (например радиуса орбиты электрона, вращающегося в магнитном поле). Как мы видели раньше, физически это означает выделение поперечной части электромагнитного поля из общих выражений для полей движущегося заряда. Реально же СИ наблюдается и вблизи плоскости орбиты электрона, которая имеет макроскопические размеры. Анализ понятия волновой зоны в этом случае показал, что волновая зона начинается с расстояний, которые превышают эффективную длину излучения,

$$r \gg \lambda^{\text{eff}} = R_0 (1 - \beta^2)^{3/2} = R_0 \gamma^{-3}, \quad (30.6)$$

и поэтому СИ можно наблюдать для углов  $\gamma \ll 1$  и на расстояниях, которые меньше радиуса орбиты.

Электрические и магнитные поля определяются через векторный потенциал  $\vec{A}$ :

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad |\vec{E}| = |\vec{B}|. \quad (30.7)$$

Граничное условие в точке наблюдения задается как обычное условие излучения Зоммерфельда, описывающего расходящиеся от источника волны, т. е. в качестве решения волнового уравнения берется запаздывающий потенциал:

$$\vec{A} = \frac{e}{c} \cdot \int \frac{\vec{v}(\tau)}{R'} \delta\left(\tau - t + \frac{R'}{c}\right) d\tau, \quad (30.8)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}_0(r)}{d\tau}, \quad \vec{R}' = \vec{r} - \vec{R}_0(\tau).$$

В волновой зоне

$$|\vec{R}'| = r \sqrt{1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{R}_0}{r^2} + \frac{R_0^2}{r^2}} \cong r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}_0}{r} = r - R_0 \sin \theta \cos \chi, \quad (30.9)$$

где  $\chi = \omega r / c - \varphi$ .

Для векторного потенциала получим приближенное выражение:

$$\vec{A} = \frac{e}{cr} \int \vec{v}(\vec{r}) \delta\left(\tau - t + \frac{r}{c} - \frac{R_0 \sin \theta \cos \chi}{R_0}\right) d\tau. \quad (30.10)$$

Разложим  $\delta$ -функцию в ряд Фурье

$$\delta(\tau) = \frac{\omega}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\omega\tau}. \quad (30.11)$$

Учитывая, что интегрирование должно быть ограничено периодом движения электрона, получим

$$\vec{A} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \vec{A}(\nu) e^{-i\nu\varphi}. \quad (30.12)$$

С фурье-компонентой  $\vec{A}(\nu)$  это выражение приобретает вид:

$$\vec{A}(\nu) = \frac{e}{cr} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{v} e^{i(\nu\alpha - \nu\beta \sin\theta \sin\alpha)} d\alpha. \quad (30.13)$$

В выражениях (30.12) и (30.13) использованы обозначения:

$$\varphi = \omega t - \frac{\omega r}{c} - \varphi + \frac{\pi}{2} \quad \varphi = \omega t - \frac{\omega r}{c} - \varphi + \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \chi + \frac{\pi}{2}. \quad (30.14)$$

Записывая проекции скорости в сферической системе координат, получим:

$$\begin{aligned} A_{\varphi}(\nu) &= \frac{e}{r} i\beta J'_{\nu}(v\beta \sin\theta), \\ A_{\theta}(\nu) &= -ctg\theta J_{\nu}(v\beta \sin\theta), \end{aligned} \quad (30.15)$$

где  $J_{\nu}(x)$ ,  $J'_{\nu}(x)$  – функция Бесселя и ее производная по  $x$ , причем

$$J_{\nu}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\nu\alpha - x \sin\alpha)} d\alpha. \quad (30.16)$$

В результате определяются компоненты полей в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} E_{\theta} = H_{\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta}) = -\frac{2\beta e}{rR_0} ctg\theta \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu J_{\nu}(v\beta \sin\theta) \sin \nu\varphi, \\ -E_{\varphi} = H_{\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}) = \frac{2\beta^2 e}{rR_0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu J'_{\nu}(v\beta \sin\theta) \cos \nu\varphi. \end{aligned} \quad (30.17)$$

Из определения мощности через интеграл от вектора Пойнтинга найдем угловое распределение мощности излучения

$$\frac{dW}{d\Omega} = r^2 \frac{c}{4\pi} (E_{\varphi}^2 + E_{\theta}^2). \quad (30.18)$$

Усредним это выражение по периоду вращения электрона, используя соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \cos \nu\varphi \cos \nu'\varphi dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin \nu\varphi \sin \nu'\varphi dt = \frac{1}{2} \delta_{\nu,\nu'}, \\ \frac{1}{T} \int_0^T \sin \nu\varphi \cos \nu'\varphi dt &= 0. \end{aligned} \quad (30.19)$$



В результате усреднения получается формула Шотта:

$$W(v, \theta) = \frac{e^2 c \beta^2}{2\pi R_0^2} v^2 \left\{ \text{ctg}^2 \theta J_v^2(v\beta \sin \theta) + \beta^2 J_v'^2(v\beta \sin \theta) \right\}, \quad (30.20)$$

которая представляет спектральное и угловое распределение мощности СИ. Полная мощность находится в виде

$$W = \sum_{v=1}^{\infty} \oint d\Omega W(v, \theta). \quad (30.21)$$

### 30.2. Поляризационные свойства СИ

Формула Шотта была получена как точное решение задачи об излучении заряда, движущегося по окружности, методами классической электродинамики, в которой излучение рассматривается как непрерывное испускание электромагнитных волн ускоренно движущимся зарядом. В квантовой теории СИ формула Шотта должна быть заменена другой, учитывающей квантовые поправки в сверхсильных магнитных полях и для больших значений энергии электрона. Поляризационные свойства СИ также были учтены позднее при создании квантовой теории СИ. Для описания двух независимых состояний линейной поляризации СИ раскладывают векторный потенциал  $\vec{A}$  по единичным векторам поляризации  $\vec{e}_\sigma$  и  $\vec{e}_\pi$ , ортогональным друг другу и единичному волновому вектору  $\hat{k}$ , совпавшему с направлением вектора Умова–Пойнтинга.

Полную мощность излучения можно представить в виде:

$$W = W_\sigma + W_\pi. \quad (30.22)$$

Для описания круговой поляризации СИ векторный потенциал записывают следующим образом:

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}_{(1)} + A_{-1} \vec{e}_{(-1)} \quad \vec{A} = A_1 \vec{e}_{(1)} + A_{-1} \vec{e}_{(-1)}, \quad (30.23)$$

причем комплексные векторы  $\vec{e}_{(l)}$  ( $l = \pm 1$ ) связаны с единичными векторами  $\vec{e}_\sigma$  и  $\vec{e}_\pi$  формулами

$$\vec{e}_{(l)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_\sigma + i l \vec{e}_\pi). \quad (30.24)$$

Значение  $l = 1$  соответствует левой, а  $l = -1$  – правой круговой поляризации. Полная мощность излучения равна:

$$W = W_1 + W_{-1}. \quad (30.25)$$

Обобщение формулы Шотта с учетом поляризационных свойств СИ дается формулой

$$W_i(v, \theta) = \frac{e^2 c \beta^2}{2\pi R^2} v^2 \left\{ l_\sigma \beta J_v'(v\beta \sin \theta) + l_\pi \text{ctg} \theta J_v(v\beta \sin \theta) \right\}^2, \quad (30.26)$$

причем мощность  $\sigma$ -компоненты линейной поляризации при  $l_\sigma = 1$ ,  $l_\pi = 0$  равна:

$$W_\sigma(v, \theta) = \frac{e^2 c \beta^2}{2\pi R^2} v^2 \beta^2 J'^2(v\beta \sin \theta), \quad (30.27)$$

а мощность  $\pi$ -компоненты при  $l_\sigma = 0$ ,  $l_\pi = 1$  равна:

$$W_\pi(v, \theta) = \frac{e^2 c \beta^2}{2\pi R^2} v^2 \operatorname{ctg}^2 \theta J_v^2(v\beta \sin \theta). \quad (30.28)$$

Для нахождения мощности циркулярно поляризованного излучения нужно взять  $l_\sigma = l_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  для правой круговой поляризации и  $l_\sigma = -l_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  для левой.

При фиксированном номере гармоники отношение амплитуд, характеризующих линейную поляризацию, равно:

$$W_\sigma / W_\pi = \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta J_v^2(v\beta \sin \theta)}{\beta^2 J_v^2(v\beta \sin \theta)}. \quad (30.29)$$

При  $\theta = \pi/2$  излучение полностью линейно поляризовано и вектор электрического поля  $\vec{E}$  совершает колебания в плоскости орбиты, а компонента  $W_\pi$  равна 0.

Схема расположения векторов  $\vec{E}_\sigma$  и  $\vec{E}_\pi$  компонент линейной поляризации представлена на рис. 30.2.

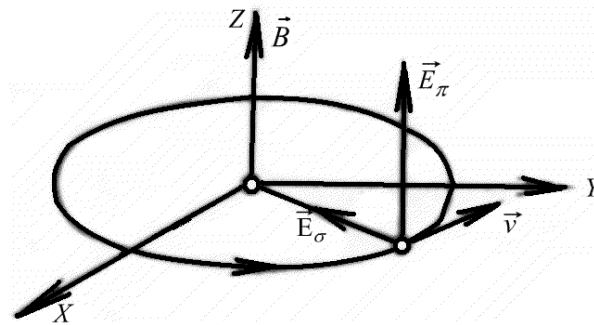


Рис. 30.2. Схема расположения векторов  $\vec{E}_\sigma$  и  $\vec{E}_\pi$ , которые являются компонентами линейной поляризации

Над плоскостью орбиты (при  $0 < \theta < \pi/2$ ) синхротронное излучение обладает левой эллиптической поляризацией, а под плоскостью орбиты (при  $\pi/2 < \theta < \pi$ ) – правой. Полная мощность излучения может быть найдена, если суммирование в (30.27) и (30.28) провести по номеру гармоники и проинтегрировать по телесному углу:

$$W_{\sigma,\pi} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \oint d\Omega W_{\sigma,\pi}(\nu, \theta). \quad (30.30)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} W_{\sigma} &= \frac{6 + \beta^2}{8} W, \\ W_{\pi} &= \frac{2 - \beta^2}{8} W, \end{aligned} \quad (30.31)$$

причем

$$W = W_{\sigma} + W_{\pi} = \frac{2}{3} \frac{e^2 c \beta^4}{R^2 (1 - \beta^2)^2} = \frac{2}{3} \frac{e^2 c \beta^4}{R^2} \gamma^4. \quad (30.32)$$

В ультррелятивистском случае движения электрона СИ обладает сильно выраженной линейной поляризацией. При  $\beta \rightarrow 1$

$$W_{\sigma} = \frac{7}{8} W, \quad W_{\pi} = \frac{1}{8} W. \quad (30.33)$$

В нерелятивистском случае при  $\beta \rightarrow 0$  СИ также поляризовано:

$$W_{\sigma}^{\text{нерел}} = \frac{3}{4} W^{\text{нерел}}, \quad W_{\pi}^{\text{нерел}} = \frac{1}{4} W^{\text{нерел}}, \quad (30.34)$$

где

$$W^{\text{нерел}} = \frac{2}{3} \frac{e^2 c \beta^4}{R^2} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2 \quad (30.35)$$

и представляет собой известную формулу Лармора для дипольного излучения.

### 30.3. Особенности углового распределения мощности СИ

Просуммируем в формулах (30.26) по номеру гармоники  $\nu$ . Это можно сделать, воспользовавшись соотношениями:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 J_{\nu}^2(\nu x) &= \frac{x^2 (4 + x^2)}{16(1 - x^2)^{7/2}}, \\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 J_{\nu}^{\prime 2}(\nu x) &= \frac{4 + 3x^2}{16(1 - x^2)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (30.36)$$

В итоге получается:

$$W_i(\theta) = \frac{e^2 c \beta^4}{32\pi R^2} F_i(\theta), \quad (30.37)$$

где

$$F_{\sigma}(\theta) = \frac{4 + 3\beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{5/2}}, \quad F_{\pi}(\theta) = \frac{\cos^2 \theta (4 + \beta^2 \sin^2 \theta)}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{7/2}}, \quad (30.38)$$

и полная мощность равна:

$$W = \sum_i \oint d\Omega W_i(\theta) = \oint d\Omega \frac{e^2 c \beta^4}{32\pi R^2} F_0(\theta), \quad (30.39)$$

где

$$F_0 = F_\sigma + F_\pi = 4 \frac{1 + \cos^2 \theta - (1 + 3\beta^2) \sin^4 \theta \beta^4 / 4}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{7/2}}. \quad (30.40)$$

Угловое распределение для полной мощности в нерелятивистском пределе равно:

$$W_0 = \frac{e^2 c \beta^4}{8\pi R^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (30.41)$$

и является характерным для нерелятивистских частиц распределением мощности излучения. При  $\beta \rightarrow 1$ ,  $1 - \beta^2 \ll 1$  максимальное значение мощности лежит в плоскости орбиты электрона:

$$\frac{W_0(\theta = \pi/2)}{W_0(\theta = 0)} = \frac{4 + 3\beta^2}{8(1 - \beta^2)^{5/2}}. \quad (30.42)$$

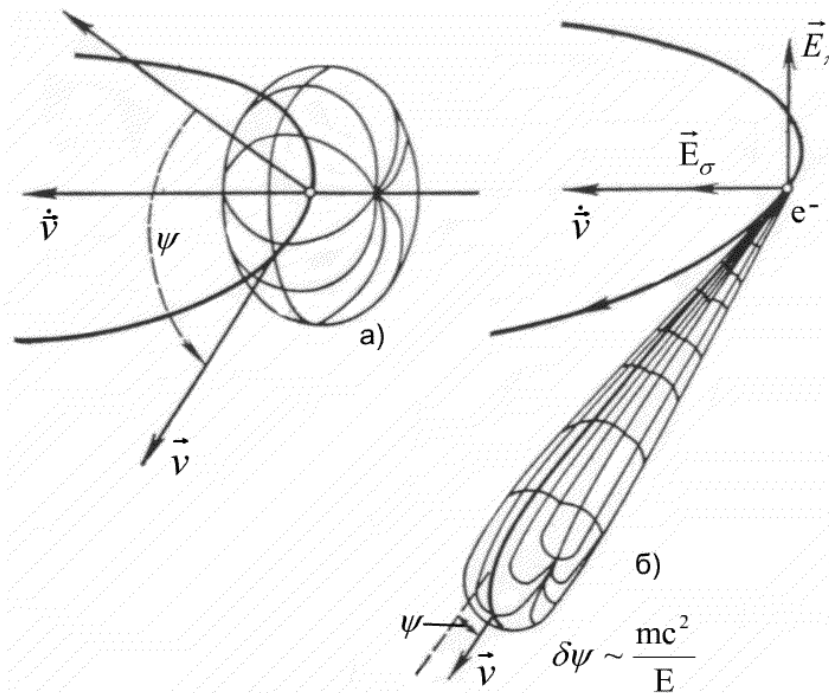


Рис. 30.3. Схема углового распределения мощности СИ:  
а) нерелятивистское движение; б) релятивистское движение

На рис. 30.3 показана схема углового распределения мощности СИ в нерелятивистском и релятивистском случае. При этом раствор угла  $\gamma$ , внутри которого практически происходит все излучение, мал:

$$\delta\psi \sim \sqrt{1-\beta^2} = \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right) = \gamma^{-1}. \quad (30.43)$$

В этом можно убедиться, получая в знаменателе (17):

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \delta\psi, \quad (30.44)$$

$$1 - \beta^2 \sin^2 \theta = 1 - \beta^2 \cos^2 \delta\psi \cong 1 - \beta^2 + (\delta\psi)^2. \quad (30.45)$$

Это означает, что

$$\delta\psi \sim \sqrt{1-\beta^2}. \quad (30.46)$$

Форма углового распределения может быть понята на основании релятивистской формулы преобразования углов:

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{1-\beta^2} \sin \psi'}{1 + \beta \cos \psi'}, \quad (30.47)$$

где  $\psi'$  – угол между направлением излучения и вектором скорости частицы в системе  $K'$ , в которой покоится частица, а  $\psi$  – угол, под которым наблюдается излучение в лабораторной системе  $K$ . Для максимума дипольного излучения  $\psi' = \pi/2$ . В итоге получим:

$$\sin \psi \sim \delta\psi = \sqrt{1-\beta^2} = \left(\frac{mc^2}{E}\right) = \gamma^{-1}. \quad (30.48)$$

Угол конуса, в котором сосредоточено излучение, очень мал. Например, для синхротрона с энергией 300 МэВ скорость  $v$  равна  $0,9999987 c$  ( $c$  – скорость света) и  $\delta\psi = 0,1^\circ$ .

Если представить поляризационные компоненты  $W_{\sigma,\pi}$  в виде

$$W_i = \frac{e^2 c \beta^4}{32\pi R^2 (1-\beta^2)^{5/2}} \oint f_i(\zeta_1) d\Omega, \quad (30.49)$$

где

$$\zeta_1 = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (30.50)$$

и

$$f_i(\zeta_1) = \frac{7l_\sigma^2}{(1+\zeta_1^2)^{5/2}} + \frac{5\zeta_1^2}{(1+\zeta_1^2)^{7/2}} + \frac{64\zeta_1 l_\sigma l_\pi}{\pi \sqrt{3}(1-\zeta_1^2)^3}, \quad (30.51)$$

то зависимость линейной и круговой поляризации СИ от угла (от параметра  $\zeta_1$ ) представлена на рис. 30.4.

Здесь индекс  $i$  принимает значения:  $i = \sigma$  ( $l_\sigma = 1, l_\pi = 0$ ),  $i = \pi$  ( $l_\sigma = 0, l_\pi = 1$ ) – компоненты линейной поляризации;  $i = \pm 1$

$(l_\sigma = l_\pi = 1/\sqrt{2} \quad l_\pi = -l_\sigma = 1/\sqrt{2})$  – компоненты правой и левой круговой поляризации. Полная мощность излучения получается при суммировании:

$$f_0 = f_\sigma + f_\pi = f_1 + f_{-1}.$$

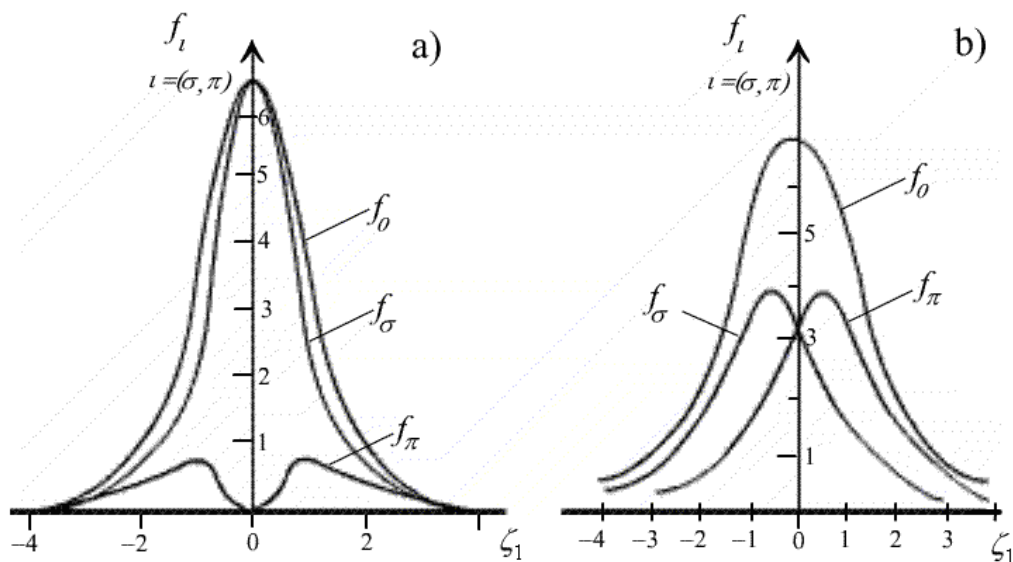


Рис. 30.4. Зависимость линейной (а) и круговой (б) поляризации СИ от параметра  $\zeta_1$  ( $\zeta_1 = \cos \theta / \sqrt{1 - \beta^2}$ )

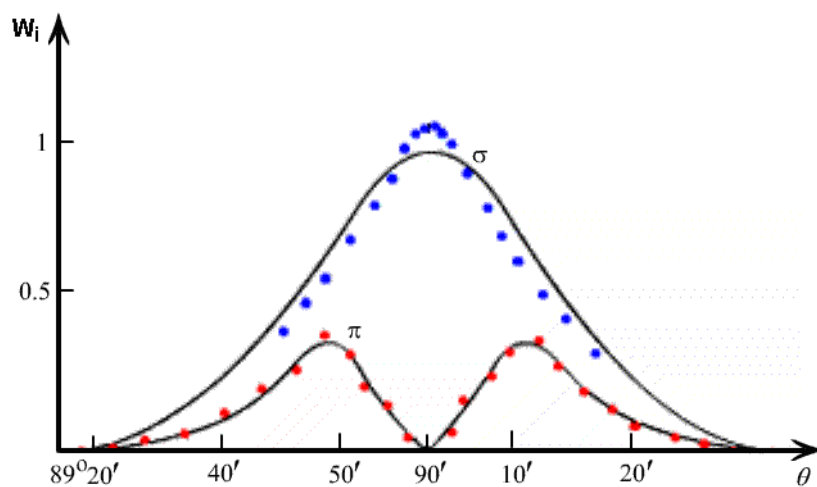


Рис. 30.5. Сравнение экспериментальных данных с теоретическими расчетами для углового распределения мощности СИ  $W_i (i = \sigma, \pi; \lambda = 408 \text{ nm}; E = 250 \text{ MeV})$

Угловые зависимости  $W_\sigma$  и  $W_\pi$  в сравнении с экспериментальными данными показаны на рис. 30.5.

На рис. 30.6 и рис. 30.7 представлены мгновенные распределения полной мощности СИ (в разрезе) и  $W_\pi$ .

Как видно из рис. 30.4,  $\sigma$  – компонента линейной поляризации – имеет максимум в плоскости орбиты вращения электрона (при  $\zeta_1 = 0$ ),

а  $\pi$ -компонента в этом случае обращается в нуль.  $\pi$ -компонента имеет максимум при  $\zeta \approx 2/5$ . Компоненты круговой поляризации имеют максимум при  $\zeta_1 = \pm 0,34$ . Итак, в плоскости орбиты вращения СИ полностью линейно поляризовано. Эксперимент, проведенный на синхротроне ФИАН (рис. 30.5), подтверждает хорошее согласие с теорией СИ, хотя при  $\theta = \pi/2$ , мощность излучения  $\pi$ -компоненты СИ не обращается в нуль. Это обусловлено тем, что вектор мгновенной скорости электрона испытывает отклонения от плоскости орбиты за счет бетатронных колебаний.

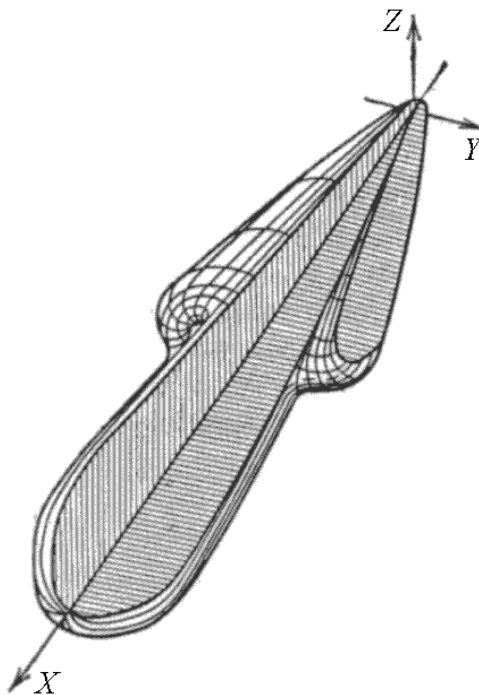


Рис. 30.6. Мгновенное распределение мощности СИ (в разрезе)

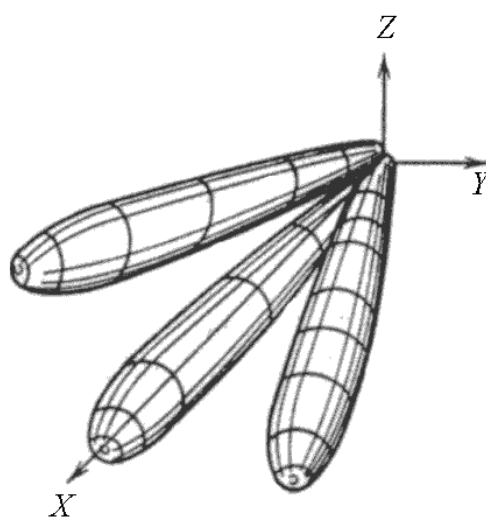


Рис. 30.7. Мгновенное распределение  $\pi$ -компоненты мощности СИ (четвертый пик не изображен)

### 30.4. Спектральное распределение СИ

Проинтегрируем формулу Шотта  $W(v, \theta)$  по углу  $\theta$ . В результате получим

$$W(v) = \frac{e^2 c \beta v}{R^2} \left\{ 2\beta^2 J'_{2v}(2v\beta) - (1 - \beta^2) \int_0^{2v\beta} J_{2v}(x) dx \right\}. \quad (30.52)$$

Эта формула демонстрирует зависимость от номера гармоники, т. е. соответствует наблюдению СИ на частоте  $\omega = v \omega_0$ .

В нерелятивистском случае ( $\beta \rightarrow 0$ ) с учетом асимптотических выражений для функций Бесселя

$$J_{2v}(2v\beta) \cong \frac{(v\beta)^{2v}}{(2v)!}, \quad J'_{2v}(2v\beta) \cong \frac{(v\beta)^{2v-1}}{(2v-1)!} \quad (30.53)$$

получим

$$W^{\text{нерел}}(v) = 2 \frac{e^2 c}{R^2} \beta^{2v+2} \frac{v^{2v+2}}{(2v+1)} v+1. \quad (30.54)$$

Это означает, что максимум излучения приходится на основную гармонику:  $v = 1$  (дипольное излучение).

В релятивистском случае ( $\beta \rightarrow 1$ ) из свойств функций Бесселя  $J_n(z)$  при  $n \gg 1$  и  $n \sim z$  имеет максимум в точке  $n = z + 0,8z^{1/3}$ , т. е. функция  $J_{2v}(2v\beta)$  максимальна в точке

$$2v = 2v\beta + 0,8(2v\beta)^{1/3},$$

что соответствует

$$2v(1 - \beta) \approx (1 - \beta^2) = 0,82^{1/3} v^{1/3},$$

или

$$v^{-2/3} \sim 1 - \beta^2,$$

поэтому

$$v_{\text{max}} \approx (1 - \beta^2)^{-3/2} = \left( \frac{\varepsilon}{mc^2} \right) = \gamma^3. \quad (30.55)$$

Впервые эта особенность СИ была отмечена Л.А. Арцимовичем и И.Я. Померанчуком.



## 30.5. Когерентность СИ

### 30.5.1. Когерентность СИ

#### при равномерном распределении электронов по окружности

Классическая теория СИ, некоторые результаты которой были изложены выше, относится к излучению одного электрона, движущегося по круговой орбите в магнитном поле.

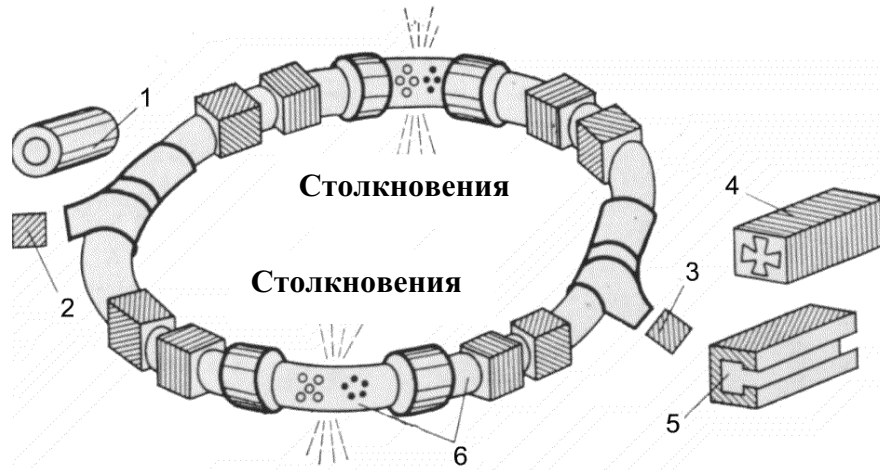


Рис. 30.8. Основные элементы накопительного кольца:

1 – ВЧ-элемент; 2 – инжектор  $e^-$ ; 3 – инжектор  $e^+$ ; 4 – фокусирующий магнит; 5 – дефокусирующий магнит; 6 – вакуумная камера

На практике в ускорителях и накопительных кольцах (рис. 30.8) находится одновременно  $10^{12} - 10^{13}$  электронов, причем они либо заполняют всю орбиту, как в бетатроне, либо сформированы в отдельные сгустки, как в синхротроне. В этом случае мощность излучения уже зависит от интерференции волн, испускаемых отдельными электронами, и возникает когерентное синхротронное излучение, когда мощность излучения  $N$  электронов не равна сумме мощностей излучения каждого электрона в отдельности.

Пусть излучают  $N$  электронов, которые распределены по орбите произвольным образом и движутся с одной и той же скоростью. Согласно формулам для электрического и магнитного векторов поля излучения заряда в волновой зоне, когда происходит вращение по окружности  $N$  электронов, получим

$$E_\varphi = H_\theta = \frac{2e\beta^2}{rR} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N \nu J'_\nu(\nu\beta \sin \theta) \cos \nu(\phi + \psi_j), \quad (30.56)$$

где  $\psi_j$  – начальная фаза  $j$ -го электрона.

Тогда мощность излучения  $N$  электронов для гармоники  $\nu$  отличается от  $W(\nu)$  фактором когерентности  $S_N$ :

$$W_N(\nu) = W(\nu)S_N, \quad (30.57)$$

где

$$S_N = N + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{j'=1 \\ (j \neq j')}}^N \cos \nu(\psi_j - \psi_{j'}). \quad (30.58)$$

При беспорядочном распределении электронов по орбите значение суммы равно нулю и излучение электронов происходит некогерентно, т. е. оно не зависит от излучения других частиц. В этом случае

$$S_N = N, \quad (30.59)$$

и энергия излучения  $N$  электронов равна сумме энергий, излучаемых отдельными частицами:

$$W_N(\nu) = NW(\nu). \quad (30.60)$$

Предположим, что частицы расположены по окружности равномерно, причем угол между соседними электронами равен  $2\pi/N$ . Тогда получим

$$S_\nu = N \left\{ 1 + \sum_{j=1}^N \cos 2\pi j \frac{\nu}{N} \right\} = N(-1)^\nu \frac{\sin \nu\pi}{\operatorname{tg} \nu\pi/N}. \quad (30.61)$$

Если  $\nu/N = S$ , то фактор когерентности не равен нулю лишь тогда, когда  $S$  – целое число, т. е. если номер гармоники кратен числу электронов. В этом случае получим

$$S_N = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-1)^\nu N \frac{\sin \nu\pi(1+\varepsilon) \cos S\pi(1+\varepsilon)}{\sin S\pi(1+\varepsilon)} = N^2. \quad (30.62)$$

В этом случае мощность излучения

$$W_N(\nu) = N^2 W(\nu). \quad (30.63)$$

Полная мощность

$$W = \sum_{S=1}^{\infty} W_S, \quad (30.64)$$

где

$$W_S = \frac{e^2 c \beta}{R^2} N^3 S \left\{ 2\beta^2 J'_{2SN}(2SN\beta) - (1-\beta^2)^{2SN} \int_0^{2SN\beta} J_{2SN}(x) dx \right\}. \quad (30.65)$$

Анализ этой формулы, основанной на аппроксимации функции Бесселя, для малых значений аргумента в нерелятивистском случае ( $\beta \rightarrow 0$ ) приводит к формуле:

$$W_{S=1} = \frac{2e^2 c \beta^2 N^3 (N+1)(N\beta)^{2N}}{R^2 (2N+1)(2N)!}, \quad (30.66)$$

из которой следует, что излучение максимально только для случая движения одного электрона ( $N = 1$ ), вклад же остальных электронов приводит к сильному подавлению общей мощности. Таким образом, в нерелятивистском случае когерентное излучение сильно подавлено по сравнению с излучением одного электрона.

В ультрарелятивистском случае, при котором  $1 - \beta^2 \ll 1$ , анализ показывает, что когерентность может иметь место для не очень больших  $N$  ( $N \sim \gamma^3$ ), то есть для длинноволновой части спектра.

В предельном случае больших концентраций электронов для  $N \sim \gamma^3$ , когда число частиц имеет порядок номера критической гармоники, все излучение оказывается подавленным.

Здесь уместно вспомнить, что круговой ток, который можно считать движением по окружности электронов с  $N \rightarrow \infty$ , не излучает.

Возникает ли явление когерентности СИ в случае движения отдельных сгустков электронов, которые заполняют не всю орбиту, а только ее часть?

### 30.5.2. Когерентность СИ в случае движения отдельных сгустков электронов

Пусть электроны заполняют только часть орбиты, то есть рассмотрим движение электронов, образующих в пространстве некоторый сгусток.

Запишем фактор когерентности  $S_N$  в виде

$$S_N = N + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{j'=1 \\ (j' \neq j)}}^N \cos v(\psi_j - \psi_{j'}) = N + N(N-1)f_v = N^2 f_v, \quad (30.67)$$

где

$$f_v = \sum_{\substack{j, j'=1 \\ (j' \neq j)}} \cos v(\psi_j - \psi_{j'}). \quad (30.68)$$

Предполагая, что все электроны независимы и в сгустке распределены симметрично по отношению к некоторому среднему положению (на азимуте, равном нулю), можно получить

$$f_v = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos v\varphi \omega(\varphi) d\varphi \right]^2. \quad (30.69)$$

Здесь  $\omega(\varphi)$  – вероятность того, что электроны находятся на орбите в интервале углов от  $\varphi$  до  $\varphi + d\varphi$ . Далее рассмотрим два вида распределения:

а) равномерное распределение на некотором интервале  $\alpha$  :

$$\omega(\varphi) = \begin{cases} 1/\alpha, & -\alpha/2 \leq \varphi \leq \alpha/2 \\ 0, & \text{если } \varphi \text{ вне этого интервала } i \end{cases}, \quad (30.70)$$

б) гауссовское распределение

$$\omega(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\varphi^2/2\alpha^2}. \quad (30.71)$$

Для случая а) получим

$$f_v = \left| \frac{\sin \alpha v/2}{\alpha v/2} \right|^2, \quad (30.72)$$

для случая б) получим

$$f_v = e^{-2(v\alpha/2)^2}. \quad (30.73)$$

В том и другом случае мощность излучения сгустка равна сумме некогерентной и когерентной части:

$$W_N(v) = W^{\text{неког}}(v) + W^{\text{ког}}(v) = W(v)N + W(v)N^2 f(v). \quad (30.74)$$

Полную мощность излучения можно найти, просуммировав выражения для  $W_N(v)$  по всем гармоникам  $v$ .

Из вида зависимости  $f_v$  от номера гармоники на примерах равномерного и гауссовского распределений можно заключить, что максимум когерентного излучения сгустка приходится на область длин волн порядка размеров сгустка (это область низких гармоник). Полная мощность, проинтегрированная по спектру, для двух рассматриваемых случаев равномерного и гауссовского распределений электронов по азимуту в пределах сгустка приводит к следующим выражениям:

$$W_{\text{равн}}^{\text{ког}} = N^2 \frac{e^2 c}{R^2} \left( \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \right)^{4/3} = 2,1 N^2 \frac{e^2}{R^2} \alpha^{-4/3}, \quad (30.75)$$

$$W_{\text{гаусс}}^{\text{ког}} = N^2 \frac{e^2 c}{R^2} \left( \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \right)^{4/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\pi \sqrt{3} 2^{1/3}} = 0,56 N^2 \frac{e^2}{R^2} \alpha^{-4/3}. \quad (30.76)$$

Оказывается, что мощность когерентного излучения не очень чувствительна к виду форм-фактора когерентности  $f_v$ , описывающему распределение заряда в сгустке. В области длинноволнового излучения мощность когерентного излучения сгустка, который имеет угловые размеры  $\alpha$ , пропорциональна  $\alpha^{-4/3}$  и не зависит от энергии частицы.

Следует отметить, что на когерентное синхротронное излучение сильное влияние оказывают расположенные параллельно пучку проводящие экранирующие поверхности. Физически это объясняется интер-

ференцией и взаимным ослаблением электромагнитных полей, создаваемых частицей и ее изображением в проводящих поверхностях.

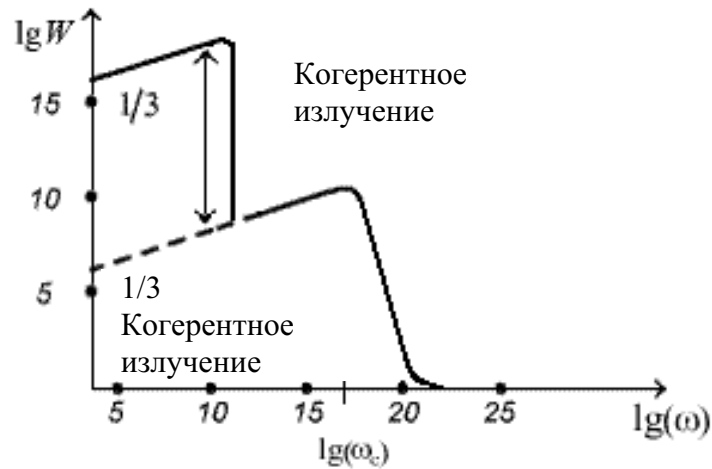


Рис. 30.9. Спектральное распределение мощности СИ с учетом когерентной части излучения

На рис. 30.9 приведено спектральное распределение мощности СИ с учетом когерентной части излучения, причем видно, что в области высоких частот излучение некогерентное и имеет максимум вблизи

$$\omega = \omega_{\parallel p} \cong \gamma^3. \quad (30.77)$$

Этой частоте соответствует рентгеновское излучение с длиной волны  $\sim 0,2$  нм. В длинноволновой части спектра длина волны становится сравнимой с размерами сгустка и все электроны излучают когерентно. Изображенная на рис. 30.9 мощность излучения в зависимости от частоты соответствует гауссовскому распределению по азимуту вблизи  $\varphi = 0$ ; в сгустке находится  $N = 10^{11}$  электронов.

Явление когерентного излучения проявляется не только в синхротронном, но и других видах излучения. Общим для всех видов когерентного излучения является то, что сгусток электронов с протяженностью, меньшей, чем длина излучаемой волны, излучает когерентно. Такой сгусток излучает как единое целое и мощность излучения представляется формулой

$$W_{\text{сгустка}}^{\text{ког}} = N_e^2 W, \quad (30.78)$$

где  $W$  – мощность излучения одного электрона. Если в выражение для  $W$  входит квадрат заряда электрона  $e^2$ , то в выражение для  $W_{\text{сгустка}}^{\text{ког}}$  входит  $N_e^2$ . Если электроны не сгруппированы в сгустки, то они излучают независимо, имеют случайные фазы, и поля излучения за счет интерференции от отдельных электронов взаимно гасят друг друга. В этом случае

$$W_{\text{сгустка}}^{\text{неког}} = N_e W . \quad (30.79)$$

Если учесть, что в цикле ускорения участвует  $N_e \sim 10^{11}$  частиц, то за счет фактора когерентности при том же токе ускорителя возможно огромное увеличение излучаемой мощности. Непременным условием должно быть следующее: частицы должны быть сгруппированы в сгустки на расстояниях, меньших, чем длина излучаемой ими волны. В этом смысле возлагаются надежды на ондулятор как источник большой мощности излучения за счет создания таких сгустков электронов.

Но для миллиметровых и субмиллиметровых длин волн создание таких когерентных сгустков представляет сложную задачу, тем более казалась неразрешимой задача для оптических длин волн.

Исследования показали, что при движении в ондуляторе электронов, которые одновременно подвергаются воздействию полем световой волны (лазером), возникает явление самомодуляции, т. е. продольной группировки электронов, приводящее к образованию когерентных сгустков, протяженностью порядка длины оптической волны. Более того, группировка электронов может возникнуть и тогда, когда нет воздействия внешней электромагнитной волны, то есть когда нет резонатора, но есть «затравочная» волна спонтанного излучения, что возможно при использовании однопроходного лазера.

Явление самоусиления спонтанного излучения обязано свойствам ондулятора: при прохождении электронами длинного ( $\sim$  десятков метров) ондулятора электроны сначала излучают некогерентно и мощность излучения равна:

$$W^{\text{неког}} = N_e \cdot W . \quad (30.80)$$

За счет механизма группировки возникает корреляция фаз – это означает, что случайные начальные поля спонтанного излучения усиливаются за счет интерференции и полная мощность излучения становится когерентной:

$$W^{\text{полн}} = N_e^2 \cdot W . \quad (30.81)$$

Механизм самоусиления спонтанного излучения лежит в основе сильного источника – ондулятора большой длины, который находится в специальном канале накопительного кольца.

### 30.5.3. Когерентная длина излучения

В теории излучения релятивистских частиц важную роль играет понятие «длина формирования излучения», или «когерентная длина». Понятие когерентной длины используется при качественном анализе различных видов излучения. Спектрально-угловая плотность энергии

$W$ , излучаемая частицей с зарядом  $e$  за все время движения по траектории  $\vec{r}(t)$  со скоростью  $\vec{v}(t)$  в вакууме, может быть записана в виде

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \left| \vec{e} \cdot \vec{j}(\vec{k}, \omega) \right|^2, \quad (30.82)$$

где  $\omega$  и  $\vec{k}$  – частота и волновой вектор излучаемых электромагнитных волн  $\left(k = \frac{\omega}{c}\right)$ ;  $\vec{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  – единичный вектор поляризации, имеющий две компоненты, ортогональные волновому вектору  $\vec{k}$ ;  $d\Omega$  – телесный угол, в который направлено излучение;  $\vec{j}(\vec{k}, \omega)$  – фурье-компонента тока частицы

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = e \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v}(t) \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] dt. \quad (30.83)$$

Приведенные выше формулы можно получить, вычисляя поток вектора Пойнтинга через сферу, достаточно удаленную от заряда. Это расстояние должно быть таким, чтобы поле заряда в каждой точке сферы можно было рассматривать как плоскую волну излучения. Однако, для релятивистских частиц это расстояние должно быть больше не только длины волны  $\lambda$ , но и величины, называемой когерентной длиной

$$l_{\text{ког}} = \lambda \gamma^2, \quad (30.84)$$

где

$$\gamma = (E/mc^2). \quad (30.85)$$

Выражение для когерентной длины волны можно получить, руководствуясь следующими соображениями. Если происходит излучение релятивистской частицей, то это совершается не мгновенно: частица и волна должны разойтись, по крайней мере, на расстояние порядка длины волны. Так как  $v \sim c$ , то излучение происходит преимущественно вперед, по направлению движения частицы. Поэтому частица успевает пройти расстояние

$$l_{\text{ког}} \approx vt_{\text{ког}}. \quad (30.86)$$

Время когерентности определим следующим образом. Согласно (30.83) ток частицы является источником элементарной волны с фазой  $\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}(t)$ . Поле излучения можно считать результатом интерференции таких волн. Разность фаз элементарных волн не превышает  $\pi$ , если они испускаются частицей в направлении  $\vec{k}$  за время когерентности:

$$t_{\text{ког}} = \frac{\pi}{\omega} - \vec{k} \cdot \vec{v}, \quad (30.87)$$

которое находится из соотношения

$$\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}(t) = (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})t. \quad (30.88)$$

Полагая в (30.88), что  $\varphi = \pi$  и  $t = t_{\text{коз}}$ , получим формулу (30.87). За время  $t_{\text{coh}}$  частица пройдет путь, согласно (30.86) и (30.87),

$$l_{\text{коз}} = \frac{v\pi}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}}. \quad (30.89)$$

Считая  $\vec{k}$  близким к направлению  $\vec{v}$ , имеем

$$l_{\text{коз}} \approx \frac{v\pi}{\omega - kv} = \frac{v\pi}{2\pi c/\lambda - 2\pi/\lambda v} = \frac{\lambda v}{c} \frac{1}{1 - v/c} = \frac{\lambda \beta}{1 - \beta} \cong \frac{\lambda \beta}{1 - 1 + 1/2\gamma^2} \cong \lambda \gamma^2. \quad (30.90)$$

Таким образом, в релятивистском случае когерентная длина

$$l_{\text{коз}} = \lambda \gamma^2. \quad (30.91)$$

### 31. Характеристики излучения в виглерах и ондуляторах

Монохроматичность и спектрально-угловую плотность энергии синхротронного излучения можно существенно повысить, если использовать периодическое в пространстве магнитное поле. В этом случае электрон движется по периодической траектории, например по синусоиде. Для СИ эффективной длиной формирования излучения является малый участок траектории  $l = R\delta\psi \cong R\gamma^{-1}$ . В ондуляторе при однократном прохождении электрона длина дуги формирования излучения имеет порядок периода поля.

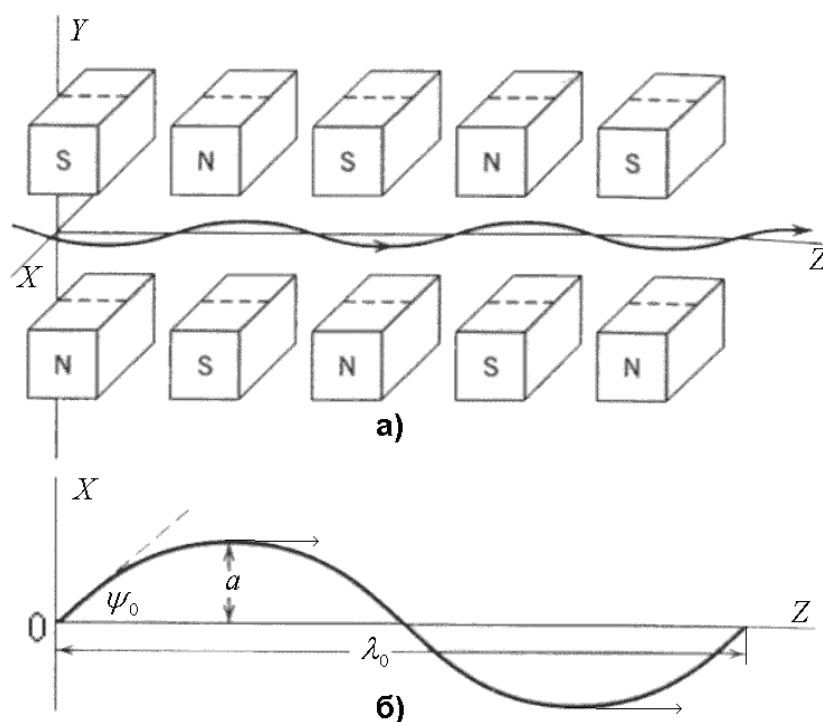


Рис. 31.1. Схема плоского ондулятора



При изменении магнитного поля по синусоидальному закону траектория электрона в плоском ондуляторе близка к синусоиде, а в спиральном – электрон движется по спирали.

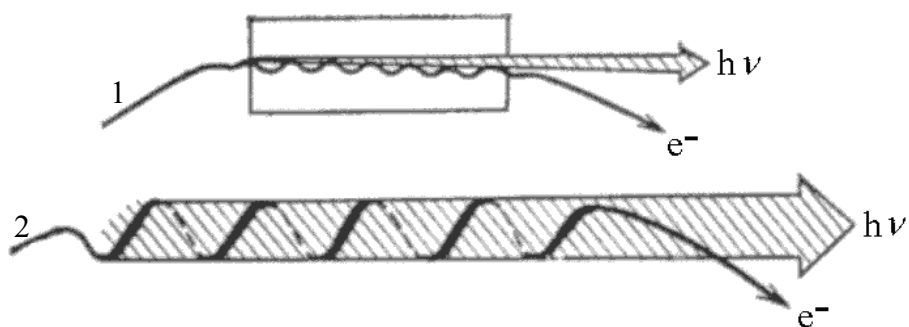


Рис. 31.2. Схема спирального ондулятора:  
1 – пучок электронов; 2 – ондуляторное излучение

При движении по синусоиде вдоль оси  $Ox$  с продольной скоростью  $\vec{\beta}_{\parallel}$  электрон излучает поле  $\vec{E}_1(\vec{k})$  на 1-ом периоде,  $\vec{E}_2(\vec{k})$  – на втором.

Пусть  $d$  – период изменения магнитного поля в пространстве. Угол между волновым вектором  $\vec{k}$  и скоростью  $\vec{\beta}_{\parallel}$  обозначим  $\theta$ . Время прохождения электроном через первый период составляет:

$$\Delta t_1 = \frac{d}{\beta c}, \quad (31.1)$$

а время прохождения фронта электромагнитной волны от первого периода до начального положения фронта волны от второго периода равно:

$$\Delta t_2 = \frac{d \cos \theta}{c}. \quad (31.2)$$

Разность фаз двух волновых пакетов обозначим  $\varphi$ :

$$\varphi = \omega(\Delta t_1 - \Delta t_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \beta c \left( \frac{d}{\beta c} - \frac{d \cos \theta}{c} \right) = 2\pi \frac{d}{\lambda} (1 - \beta \cos \theta). \quad (31.3)$$

Поэтому можно записать:

$$\vec{E}_2(\vec{k}) = \vec{E}_1(\vec{k}) \exp(i\varphi). \quad (31.4)$$

Аналогично,

$$\vec{E}_3(\vec{k}) = \vec{E}_2(\vec{k}) \exp(i\varphi),$$

.....

$$\vec{E}_n(\vec{k}) = \vec{E}_{n-1}(\vec{k}) \exp(i\varphi) = \vec{E}_1(\vec{k}) \exp(i(n-1)\varphi). \quad (31.5)$$

Найдем суммарное поле от периодической структуры, содержащей  $N$  элементов:

$$\vec{E}(\vec{k}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{k}) = \vec{E}_1(\vec{k}) \{1 + \exp(i\varphi) + \exp(i2\varphi) + \dots + \exp[i(N-1)\varphi]\}, \quad (31.6)$$

то есть

$$\vec{E}(\vec{k}) = \vec{E}_1 \frac{1 - \exp(iN\varphi)}{1 - \exp(i\varphi)}. \quad (31.7)$$

Спектрально-угловое распределение интенсивности излучения от полей, создаваемых на  $N$ -периодах, равно:

$$\frac{d^2W_N}{d\omega d\Omega} = G |\vec{E}(\vec{k})|^2 = G |\vec{E}_1(\vec{k})|^2 \frac{|1 - \exp iN\varphi|^2}{|1 - \exp i\varphi|^2} = \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} F_N, \quad (31.8)$$

где  $G$  – множитель пропорциональности в выражении для распределения интенсивности.

Очевидно, что

$$G |\vec{E}_1(\vec{k})|^2 = \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \quad (31.9)$$

представляет спектрально-угловое распределение интенсивности излучения, создаваемого на одном периоде.

Оценим резонансный фактор  $F_N$ :

$$F_N = \frac{|1 - \exp iN\varphi|^2}{|1 - \exp i\varphi|^2} = \frac{4 \sin^2 N\varphi/2}{4 \sin^2 \varphi/2}. \quad (31.10)$$

Излучение максимально, когда  $\varphi/2 \rightarrow 0$  и

$$\lim_{\varphi/2 \rightarrow 0} \frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2} = N, \quad (31.11)$$

$$F_N \rightarrow N^2. \quad (31.12)$$

Таким образом, при выполнении условия резонанса

$$\varphi = 2\pi \frac{d}{\lambda} (1 - \beta \cos \theta) = 2\pi m, \quad (31.13)$$

где  $m$  – целое число; спектрально-угловая плотность излучения возрастает в  $N^2$  раз по сравнению с одним периодом.

В теории излучения электронами в периодических структурах фундаментальную роль играет параметр  $K$ , который представляет собой отношение максимально малого угла  $\psi$  отклонения скорости от оси  $Ox$  к эффективному углу излучения  $\gamma^{-1}$ :

$$K = \psi \gamma. \quad (31.14)$$

Угол  $\psi$  – это максимальный угол между касательной к траектории и средней скоростью частицы  $\langle \vec{\beta} \rangle$ .

Для ондулятора

$$K = \psi \gamma = \gamma \frac{d}{R} = \gamma \frac{\beta e}{\beta \varepsilon} d. \quad (31.15)$$

Для синусоидальной траектории

$$\beta_z = \beta_\perp = \beta \frac{K}{\gamma} \sin\left(\frac{2\pi}{d} x\right), \quad (31.16)$$

$$\beta_x = \beta_\parallel = (\beta^2 - \beta_\perp^2)^{1/2}, \quad (31.17)$$

причем  $\beta = const$ .

Усредняя по периоду колебаний, находим:

$$\langle \beta_\perp^2 \rangle = \frac{1}{2} \beta^2 \psi^2 = \frac{K^2}{2\gamma^2}, \quad (31.18)$$

$$\langle \beta_\parallel \rangle = \beta^2 - \langle \beta_\perp^2 \rangle = 1 - \gamma^{-2} - \frac{K\gamma^{-2}}{2} = 1 - \frac{1 + K^2/2}{\gamma^2}. \quad (31.19)$$

В ондуляторах в системе отсчета  $K'$ , где средняя по периоду скорость частицы равна нулю, частица совершает колебания с нерелятивистской  $K \ll 1$  или слаборелятивистской ( $K \sim 1$ ) скоростью. Поэтому в системе  $K'$  частица может излучать электромагнитные волны лишь с частотой  $\omega'$ , равной частоте колебаний  $\omega'_0$ . Так как все процессы в системе  $K'$  идут медленнее, чем в лабораторной системе, то

$$\omega'_0 = \omega_0 \gamma^{-1}, \quad (31.20)$$

где  $\omega_0 = 2\pi/T$  – частота колебаний в системе  $K$ . Регистрируемая вследствие эффекта Доплера частота излучения зависит от угла  $\theta$  между направлением наблюдения и осью  $Ox$ , вдоль которой частица движется со скоростью  $\langle \beta_\parallel \rangle$ :

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{1 - \langle \beta_\parallel \rangle \cos \theta}. \quad (31.21)$$

Для релятивистского случая

$$\omega_L(\theta) = \frac{\omega_0}{1 - \left[1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2}\right] \left[1 - \frac{\theta^2}{2}\right]} = \frac{2\gamma^2 \omega_0}{1 + \gamma^2 \theta^2 + K^2/2}. \quad (31.22)$$

Отсюда для длины волны при  $\theta = 0$  получим:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_L} = \frac{dK^2/2}{2\gamma^2}. \quad (31.23)$$

При  $K = 10, \gamma = 10^3$  и  $d = 4$  см получим  $\lambda = 10^{-4}$  см, т. е. электрон испускает в ондуляторе видимый свет.

В зависимости от величины параметра  $K$  ( $K \ll 1, K \approx 1$  или  $K \gg 1$ ) могут существенно изменяться угловые и спектральные характеристики ондуляторного излучения.

Устройства, в которых  $K \leq 1$  и число периодов  $N \sim 10 \div 10^2$ , называют ондуляторами, а устройства, в которых  $K \gg 1$ , а число периодов  $N = 1 \div 3$ , называют виглерами. Эти названия происходят от английских слов (undulate – волнистый и to wiggle – извиваться).

Далее приведем некоторые формулы и оценки характеристик излучения в виглерах и ондуляторах, взятые из работы [18].

Как и в работе [18], используется естественная система единиц:  $\hbar = 1, m = 1, c = 1$ . Здесь  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $m$  – масса частицы,  $c$  – скорость света.

Кроме того,  $\frac{e^2}{137} = \frac{1}{137}$ , где  $e$  – заряд электрона. Единицей длины является

$\frac{\hbar}{mc}$ , единицей времени  $\frac{\hbar}{mc^2}$ , единицей энергии  $mc^2$ , единицей частоты

излучения  $\frac{mc^2}{\hbar}$ , единицей магнитного и электрического поля  $\frac{m^2 c^{5/2}}{\hbar^{3/2}}$ .

Для получения формул в обычных единицах нужно предварительно перейти к безразмерным величинам.

На основании формулы

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \langle v_z \rangle \cos \theta} \quad (31.24)$$

можно заключить, что в бесконечном ондуляторе с гармоническим полем при условии  $K \ll 1$  и при фиксированном значении угла  $\theta$  к оси ондулятора излучается определенная частота.

Для реального ондулятора длиной  $L$  линия излучения имеет конечную ширину

$$\Delta\omega \cong \omega \frac{d}{L} = \frac{\omega}{N}, \quad (31.25)$$

где  $d$  – период и  $N$  – число периодов поля. В ондуляторе может быть излучение не только с частотой (31.24), но и на других гармониках, кратных основной частоте.

Поэтому спектр излучения при этом состоит не из одной, а из ряда эквидистантных линий. При числе периодов  $N \approx 10^2$  в ондуляторе можно получить излучения с естественной шириной линии:

$$\Delta\omega^{(1)} \cong \omega^{(1)}/N, \quad (31.26)$$

где индекс 1 относится к первой гармонике.

Это излучение направлено в телесный угол

$$\Delta\Omega \cong \frac{2\pi}{\gamma^2 N}. \quad (31.27)$$

Для среднего числа фотонов  $dN_\gamma/dt$ , испускаемых в единицу времени с частотами от  $\omega_{\max}^{(1)}/2$  до  $\omega_{\max}^{(1)}$ , можно получить приближенное выражение, если мощность излучения

$$d\varepsilon/dt = -\frac{2}{3}e^2 \frac{1}{T} \int_0^T B_z^2(x) dx, \quad (31.28)$$

где

$$B_z(x) = B \sin \frac{2\pi x}{T}, \quad (31.29)$$

разделить на среднюю энергию фотона

$$\langle \omega \rangle \approx \frac{\omega_{\max}^{(1)}}{2}. \quad (31.30)$$

Полное число фотонов, испускаемых одним электроном в ондуляторе, получим, если величину  $dN_\gamma/dt$  умножим на время пролета ондулятора ( $\tau = TN$ ):

$$N_\gamma \approx \frac{2}{3} \pi e^2 K^2 \left(1 + \frac{K^2}{2}\right) N. \quad (31.31)$$

Разделив выражение (31.31) на  $\langle \omega \rangle$ , получим среднюю спектральную плотность излучения  $dN_\gamma/dt$ . Разделив же  $dN_\gamma/dt$  на телесный угол (31.27), получим следующее приближенное выражение для спектрально-угловой плотности энергии излучения:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \sim \frac{1}{3} e^2 K^2 \gamma^2 N^2. \quad (31.32)$$

При значении  $K \gg 1$  движение в системе  $K'$  становится ультрарелятивистским и максимум излучения сдвигается на более высокий номер гармоники.

Частота  $\omega^{(1)}$  при  $K \gg 1$  в  $K^2/2$  раз меньше, чем та же частота в ондуляторе с  $K \approx 1$ . Можно сделать вывод, что в виглере максимальная плотность интенсивности излучения соответствует частотам

$$\omega^{(1)} \sim \sqrt{2}\omega_0\gamma^2 K = \frac{eB}{\sqrt{2}}\gamma^2, \quad (31.33)$$

которые не зависят от периода магнитной структуры и совпадают с частотами синхротронного излучения в постоянном магнитном поле, равном  $\sim B/\sqrt{2}$ . Дело в том, что в виглере, как и в синхротроне, излучение формируется на длине  $l_{\text{коз}}$ , которая намного ( $\sim$  в  $n_{\text{eff}}$  раз) меньше, чем период магнитной структуры (а для СИ – радиус кривизны орбиты).

В виглерах под определенным углом  $\theta$  излучается относительно большое число линий, соответствующих гармоникам  $n$ , таким, что

$$\omega^{(n)} \sim \sqrt{2}\omega_0\gamma^2 K = \frac{eB}{\sqrt{2}}\gamma^2. \quad (31.34)$$

Каждая линия имеет ширину

$$\Delta\omega^{(n)} \approx \omega^{(n)} / nN,$$

где

$$\omega^{(n)} = \omega^{(1)} n, \quad (31.35)$$

и для релятивистской частицы, излучающей под малыми углами к оси ондулятора, формула для  $\omega^{(1)}$  имеет вид

$$\omega^{(1)} = \frac{2\omega_0\gamma^2}{1 + (\theta\gamma)^2 + K^2/2}. \quad (31.36)$$

Если разделить мощность излучения (31.28) на характерную энергию фотона  $\hbar\omega^{(n)}$  (31.34), то получим среднее число фотонов, испускаемых в единицу времени,  $dN_\gamma/dt$  с энергией в пределах  $\hbar\Delta\omega^{(n)}$ . Умножая  $dN_\gamma/dt$  на время пролета виглера  $\tau = TN$ , получим полное число фотонов  $N_\gamma$ , излучаемых одним электроном в виглере с  $N$  периодами в интервале:

$$N_\gamma \sim \frac{\sqrt{2}}{3} \pi e^2 KN. \quad (31.37)$$

Релятивистская частица излучает в пределах угла  $\gamma^{-1}$ . Если говорить об излучении в виглере в плоскости, перпендикулярной плоскости колебаний частицы, то эффективный угол, в котором сосредоточено это излучение, равен:

$$\chi_{\text{eff}} \sim \gamma^{-1}. \quad (31.38)$$

В плоскости колебаний излучение в виглере находится в пределах угла

$$\psi = K\gamma^{-1}. \quad (31.39)$$

Спектрально-угловое распределение энергии излучения одним электроном в виглере дается формулой, как следует из предыдущих соотношений:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \sim \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} e^2 \gamma^2 N. \quad (31.40)$$

Если сравнить (31.40) с соответствующим выражением для СИ, то величина, определяемая формулой (31.40), оказывается в  $2N$  раз больше. Такое увеличение достигается за счет перекрытия конусов излучения от разных участков орбиты частицы.

Приведем в заключение некоторые формулы, выведенные в строгой теории ондуляторного излучения.

Для плоского ондулятора с синусоидальным полем излучаются только нечетные гармоники под углом  $\theta = 0$  к оси ондулятора. В этом случае спектрально-угловая плотность интенсивности дается выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{d^2I}{d\omega d\Omega} \Big|_{\theta=0} &= \frac{e^2 \omega_0 \gamma^2}{2} \frac{K}{(1+K^2/2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \times \\ &\times \left[ J_{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{np^2}{4(1+p^2/2)} \right) - J_{\frac{n+1}{2}} \left( \frac{np^2}{4(1+p^2/2)} \right) \right]^2 \frac{\sin^2 N \bar{\zeta}_n}{\pi N \bar{\zeta}_n^2}, \end{aligned} \quad (31.41)$$

где

$$\zeta_n = \frac{\omega T}{4\gamma^2} \left[ 1 + (\theta\gamma)^2 + K^2/2 \right] - \pi n, \quad (31.42)$$

$$\bar{\zeta}_n \equiv \zeta_n(\theta=0). \quad (31.43)$$

и штрих у суммы означает, что суммирование ведется только по нечетным гармоникам  $n$ . Спектральное распределение излучения в синусоидальном магнитном поле имеет вид

$$\frac{dI}{d\zeta} = \bar{I} f(\zeta), \quad (31.44)$$

где

$$f(\zeta) = \frac{3}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 N\pi z\zeta}{\pi N(z\zeta-1)} \frac{1}{z^2} \left( 1 - \frac{2}{z} + \frac{2}{z^2} \right) dz; \quad (31.45)$$

$\zeta = \omega/2\gamma^2 \omega_0$ ;  $\bar{I} = e^4 \gamma^2 B^2/3$  – мощность излучения (формулы (5) и (6)).

Для бесконечного ондулятора ( $N \rightarrow \infty$ )

$$f(\zeta) = 3(1 - 2\zeta + 2\zeta^2). \quad (31.46)$$

Численным интегрированием по телесным углам выражения  $d^2I/d\omega d\Omega$  получают выражения:

$$dI/d\omega = 2e^2 \omega_0 F(\zeta); \quad (31.47)$$

$$\zeta = \frac{2\gamma^2 \omega_0}{1 + K^2/2}. \quad (31.48)$$

При  $K = 0,5$  спектр излучения по форме мало отличается от дипольного приближения. Для увеличения  $K$  спектр приближается к спектру синхротронного излучения.

Спектрально-угловая плотность интенсивности излучения электроном в спиральном магнитном поле имеет вид

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{\pi^2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{K^2}{2\gamma^2} J_n^2(n\aleph) + \frac{\left(1 - (\theta\gamma)^2 + \frac{K^2}{2}\right) J_n^2(n\aleph)}{(2\theta\gamma^2)^2} \right] \frac{T \sin^2 NJ_n}{NJ_n^2}, \quad (31.49)$$

где введены обозначения:

$$J_n = \omega \frac{T}{4\gamma^2} \left[ 1 + (\theta\gamma)^2 + \frac{K^2}{2} \right] - n\pi, \quad K = \frac{eBT}{\sqrt{2}\pi}, \quad \aleph = \sqrt{2}K\gamma\theta \left/ \left[ 1 + (\theta\gamma)^2 + \frac{K^2}{2} \right] \right. \quad (31.50)$$

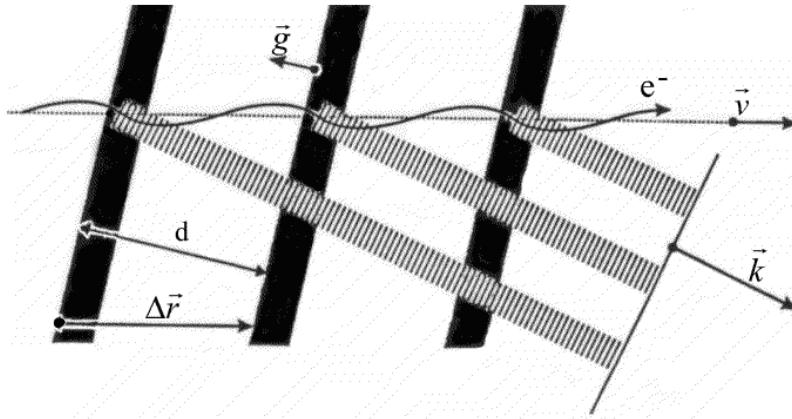


Рис. 31.3. Когерентные волны, излучаемые электроном при прохождении периодических структур (ондуляторы, кристаллы и т. д.)

Вдоль оси спирального ондулятора ( $\theta = 0$ ) излучается только первая гармоника ( $n = 1$ ) со спектрально-угловой плотностью интенсивности



$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega_0 \gamma^2}{2} \frac{K^2}{(1 + K^2/2)^2} \frac{\sin^2 N \tilde{\zeta}_1}{\pi N \tilde{\zeta}_1^2}, \quad (31.51)$$

где  $\tilde{\zeta}_1 = \zeta_1(\theta = 0)$ .

Отметим поляризационные характеристики излучения в ондуляторах. Излучение в ондуляторе с синусоидальным полем под фиксированным углом  $\theta$  к оси ондулятора является полностью плоскополяризованным. В спиральном ондуляторе в общем случае поляризация эллиптическая, а при  $\theta = 0$  она становится круговой.

### 32. Краткий обзор источников излучения, использующих релятивистские электроны

После открытия синхротронного излучения началось интенсивное изучение и других радиационных эффектов, вызванных взаимодействием релятивистских электронов со средой.

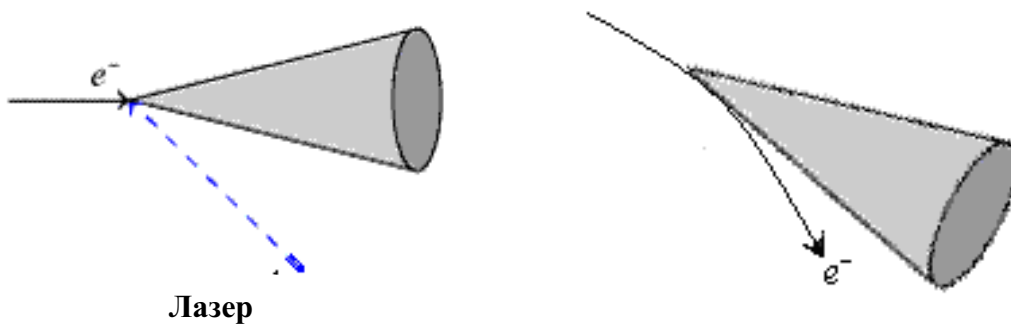


Рис. 32.1. Комптоновское рассеяние Рис. 32.2. Синхротронное излучение

Несмотря на детальное теоретическое и экспериментальное исследование этих явлений, рассматриваться как источники излучения они стали сравнительно недавно. Это относится и к хорошо известному комптоновскому рассеянию, схематически указанному на рис. 32.1. Комптоновское рассеяние электронов, благодаря созданию электронов с высокой интенсивностью и мощных лазеров, становится интересным новым источником пульсирующего рентгеновского излучения. Другие эффекты, основанные на взаимодействии со средой, могут быть разделены условно на два класса. К первому классу относятся явления, которые могут быть рассмотрены по аналогии с синхротронным излучением (рис. 32.2) и близко связанным с ним ондуляторным излучением.

Излучение возникает при прохождении электрона через кристалл в поле плоскостей и осей кристалла. В этом случае периодическое пересечение электроном кристаллографических плоскостей приводит к воз-

мущению траектории и испусканию когерентного тормозного излучения (coherent bremsstrahlung, CB), схематически указанного на рис. 32.3.

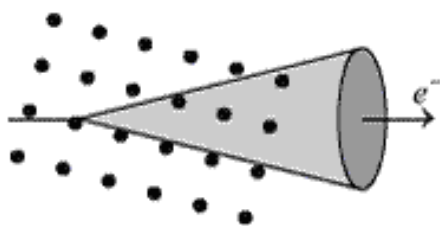


Рис. 32.3. Когерентное тормозное излучение

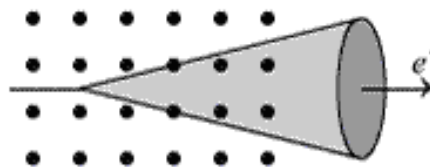


Рис. 32.4. Излучение при каналировании

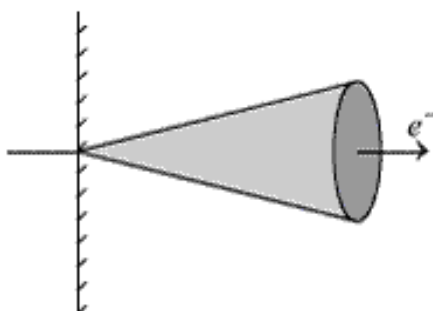


Рис. 32.5. Переходное излучение

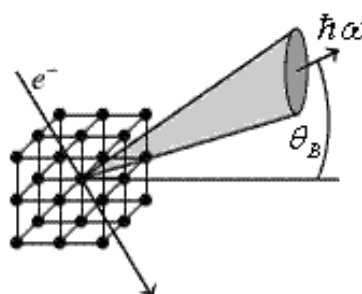


Рис. 32.6. Параметрическое рентгеновское излучение

Если частица движется почти параллельно такой оси или плоскости, она может быть даже захвачена в режим стабильной ондуляторной траектории вдоль этой оси или плоскости, и в результате возникает излучение частиц при каналировании (emission of channelling radiation, CHR), как схематически показано на рис. 32.4.

Ко второму классу относятся излучения в среде, вызванные электрическим полем частицы. По своей природе они близки к эффекту Вавилова–Черенкова.

Переходное излучение (transition radiation, TR) возникает при пересечении движущейся заряженной частицей границы двух сред с различными диэлектрическими или магнитными свойствами (рис. 32.5).

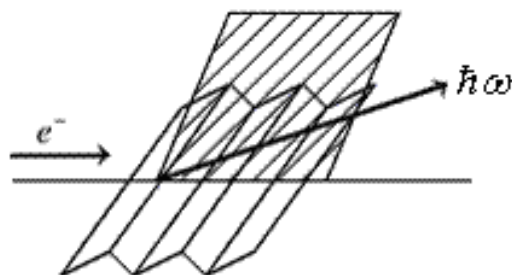


Рис. 32.7. Излучение Смита–Парселла

Подобным образом параметрическое рентгеновское излучение (parametric X-rays, PXR) (рис. 32.6) можно рассматривать как комбинацию переходного излучения, образующегося при пересечении частицей поверхности кристалла и отраженного кристаллографическими плоскостями под углами Брега, и излучения, испущенного внутри кристалла.

Эффект Смита–Парселла (рис. 32.7) заключается в том, что излучение возникает при прохождении заряженной частицы вблизи и параллельно поверхности металлической дифракционной решетки. Излучение Смита–Парселла также принадлежит ко второму классу, хотя его можно объяснить, применяя классическую дифракционную теорию к дифракции быстро убывающих с расстоянием волн, связанных с кулоновским полем релятивистской заряженной частицы.

### **32.1. Излучение при каналировании**

Излучение при каналировании возникает, когда заряженная частица проходит через кристалл вдоль оси симметрии. Каналирование может быть аксиальным (вдоль атомной цепочки) или плоскостным (между атомными плоскостями). Основная идея при теоретическом рассмотрении явления каналирования состоит в том, что истинный потенциал атомов кристалла заменяется потенциалом, усредненным по координатам атомов в кристаллографической оси или плоскости (говорят соответственно об осевом и плоскостном каналировании). Такое приближение наиболее приемлемо, если частица падает на ось или плоскость под малым углом. Так как силы притяжения атомами (а для положительно заряженной частицы – силы отталкивания) направлены в одну сторону, то происходит плавное изменение направления импульса частицы за счет столкновения с большим числом атомов оси или плоскости. В случае электронов потенциал цепочки атомов является притягивающим и частица либо пересекает цепочку, либо (когда энергии ее поперечного движения не хватает для преодоления потенциального барьера) совершает колебания около цепочки и, следовательно, проходит через область тепловых колебаний атомов цепочки. Благодаря возможности столкновения частицы с атомом, отклонившимся от положения равновесия, возникает сильная неустойчивость ее движения в непрерывном потенциале. Если частица имеет, например, первоначальный орбитальный момент относительно оси  $z$ , то она какое-то время будет удерживаться за пределами области  $\rho < u$  (за счет действия центростремительного барьера). При этом неустойчивость движения в непрерывном потенциале проявляется лишь при учете неупругого рассеяния на электронах кристалла. Для идеального кристалла (атомы – расположенные строго периодически неподвижные центры статического силового поля)

частица, движущаяся под малым углом к цепочке, не «ощущает» влияния отдельных атомов, и потенциал цепочки можно усреднить по продольной координате  $z$ . Усредненный потенциал имеет вид

$$V(\rho) = \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz, \quad (32.1a)$$

где  $\varphi(r)$  – потенциал отдельного атома,  $d$  – расстояние между атомами.

Точно так же можно поступить, когда частица падает под малым углом на кристаллографическую плоскость.

Положительно заряженные частицы отражаются потенциалом плоскости, усредненным по координатам  $y$  и  $z$  этой плоскости:

$$V(x) = \frac{1}{S} \iint \varphi(\sqrt{x^2 + \rho^2}) d^2 \rho, \quad (32.1б)$$

где  $S$  – площадь, приходящаяся на один атом в плоскости  $\rho = \{y, z\}$ .

Отрицательно заряженные частицы совершают колебания около плоскости, и их движение по равновесным траекториям в потенциале  $V(x)$  менее устойчиво по сравнению с движением положительно заряженных частиц, которые колеблются между соседними плоскостями. Дело в том, что позитроны не подходят близко к колеблющимся атомам плоскости.

Приближение непрерывного потенциала стало общим методом исследования прохождения через кристаллы быстрых частиц, у которых де-Бройлевская волна меньше расстояния между атомами.

На движение каналированных частиц и их излучение влияют форма непрерывных потенциалов, глубина потенциальных ям и высота барьеров, ограничивающих их поперечное движение. В основе расчетов непрерывных потенциалов лежат известные приближения для изолированных атомов: приближения Томаса–Ферми, Томаса–Ферми–Дирака, Хартри–Фока с различными аналитическими аппроксимациями (по Мольеру, по Фирсову и др.).

Все выражения, которые получаются с помощью указанных выше приближений и аппроксимаций, оказываются очень сложными для того, чтобы использовать их в аналитических расчетах спектров и других характеристик при каналировании.

Во многих случаях их можно с достаточной точностью ( $\leq 25\%$ ) заменить простыми модельными потенциалами.

Так, для плоскостного каналирования позитронов непрерывный потенциал имеет вид параболы почти всюду в пределах канала:

$$V(x) = m_e \Omega_0^2 x^2 / 2. \quad (32.2a)$$

Для электронов усредненный потенциал плоскости может быть представлен в виде потенциала Пешля–Теллера:

$$V(x) = -V_0 ch^{-2} x/b, \quad (32.2б)$$

где потенциал кристалла

$$V_0 = 10 \div 10^3 \text{ эВ.}$$

В классическом подходе задача об излучении электронов и позитронов при их рассеянии на кристаллических осях сводится к задаче о движении частицы в двумерном кулоновском потенциале

$$V(\rho) = \mp \alpha / \rho. \quad (32.2в)$$

На расстояниях же  $\rho$  от оси, меньших амплитуды тепловых колебаний, усредненный потенциал может быть представлен параболическим потенциалом

$$V(\rho) = \beta \rho^2. \quad (32.2г)$$

Для каналирования необходимо, чтобы частицы были ориентированы по отношению к оси кристалла в пределах угла, меньшего, чем угол Линдхарда

$$\theta_L = \sqrt{\frac{V_0}{E_e}}, \quad (32.3)$$

примерно на порядок.

Критический угол определяется значением потенциального барьера  $V_0 \approx 10 \div 10^3 \text{ эВ}$ , а оно ограничено из-за тепловых колебаний. Обычно величина  $V_0$  порядка 100 эВ для средних и легких элементов и 1000 эВ для тяжелых.

Для того чтобы каналирование наблюдалось при  $E_e = 1 \text{ МэВ}$ , необходимо чтобы кристалл был ориентирован относительно пучка с точностью до  $1^\circ$ .

Каналирование не периодически по отношению к решетке, периодичность зависит от глубины потенциала.

Излучение при каналировании подобно ондуляторному излучению с малыми значениями параметра  $K$  и имеет спектр:

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{3I_0\omega}{\omega_{\max}^2} \left( 1 - 2 \frac{\omega}{\omega_{\max}} + 2 \frac{\omega^2}{\omega_{\max}^2} \right), \quad (32.4)$$

$$\omega < \omega_{\max},$$

где

$$\omega_{\max} = 2\Omega_0 n\gamma^{3/2}, \quad (32.5)$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{2V_0}{m_e r_s^2}} \quad (32.6)$$

– частота колебаний и  $n$  – номер гармоники;  $r_s$  – минимальное расстояние, на котором электрон проходит от оси кристалла, или радиус экранирования.

$I_0$  зависит от того, происходит ли плоскостное или аксиальное каналирование и от вида частицы – позитрона или электрона. Интенсивность излучения имеет ту же самую угловую зависимость, что и ондуляторное излучение:

$$\omega(\theta) = \frac{2\gamma^2 \omega_{\max}}{1 + \theta^2 \gamma^2}. \quad (32.7)$$

Излучение при каналировании перспективно как объект научного исследования, оно должно учитываться при решениях прикладных задач.

- Спектр излучения содержит информацию о некогерентном рассеянии электронов в кристаллической решетке, что представляет интерес для электронной микроскопии, рентгеноскопических методов исследования кристалла и др.
- По спектрам излучения с точностью до 1 % определяют потенциалы взаимодействия электронов и позитронов с решеткой (для кремния, алмаза и др.).
- Можно получить сведения об электронной плотности различных кристаллических структур, о фононном спектре.
- С помощью излучения при каналировании экспериментально исследованы анизотропия тепловых колебаний и их корреляция.
- При каналировании можно изучать дефекты в кристаллах, например дислокации; определять не только концентрацию, но и вид дефектов, их форму, причем неразрушающим методом исследования, в отличие от методов ионных пучков.
- Излучение в рентгеновском диапазоне позволяет проводить исследования ультракоротких процессов ~ десятков пикосекунд.
- Возможно создание мощного узконаправленного источника излучения в рентгеновском и гамма-диапазонах.
- При оптимальном выборе толщины кристалла и определенной энергии спектр позитронов обладает высокой моноэнергетичностью, что представляет интерес для ядерной спектроскопии и медицины. Так, изменяя энергию фотонов, варьируя энергию позитронов и выбирая тот или иной кристалл, можно облучать различные участки тела больного на разных глубинах.
- Излучение можно применить для детектирования частиц сверхвысоких энергий.

### 32.2. Когерентное тормозное излучение

Если среда кристаллоподобна, то помимо тормозного излучения, вызванного рассеянием заряженной частицы на ядре среды, периодическая решетка может индуцировать дополнительное когерентное тормозное излучение.

Тогда поперечное сечение для тормозного излучения модифицируется и имеет вид

$$\sigma_{\gamma} = \sigma_0(\gamma) e^{-g^2 a^2} \cdot 8\pi^3 \frac{N}{\Delta} \sum_{\vec{g}} |S_{\vec{g}}|^2 \delta(\vec{k} - \vec{g}), \quad (32.8)$$

где  $\sigma_0(\gamma)$  – сечение тормозного излучения.

Первая экспонента представляет фактор Дебая–Валлера, который отвечает за тепловое движение  $N$  атомов в кристалле;  $a^2$  – среднеквадратичная амплитуда;  $g = \frac{2\pi}{d}$  – период орбитной решетки;  $|S_{\vec{g}}|^2$  – фактор кристаллоподобной структуры;  $\Delta$  – объем элементарной ячейки;  $\vec{k}$  – волновой вектор.

Излучение сильно поляризовано и имеет острый максимум вблизи оси пучка электронов.

### 32.3. Переходное излучение

Переходное излучение возникает при равномерном и прямолинейном движении заряда в неоднородной среде, или же в неоднородной и (или) меняющейся во времени, или когда такая среда распространена вблизи траектории движения заряженной частицы. В общем случае переходное излучение может существовать одновременно и интерферировать с черенковским излучением и излучением, возникающим при ускоренном движении заряда (тормозным, синхротронным и др.). Если частица движется с постоянной скоростью

$$v < \frac{c}{n},$$

то излучение Вавилова–Черенкова не возникает. Если же и  $n = 1$ , то вообще нет никакого излучения. Для появления излучения в вакууме необходимо, чтобы заряд (или мультиполь) ускорился, то есть должен изменяться характеризующий излучение параметр  $v/c$ . Если имеется прозрачная среда, то этот параметр имеет вид  $v/c_{\text{фаз}} = v n/c$  и он равен отношению скорости частицы к фазовой скорости света  $c_{\text{фаз}} = c/n(\omega)$ . Итак, при наличии среды параметр  $v n/c$  может изменяться не только в результате изменения скорости  $v$ , но и за счет изменения вдоль траек-

тории показателя преломления. Даже при  $v = const$  излучение возникает, потому что изменяется показатель преломления  $n$ . Для поглощающей, но немагнитной среды роль показателя преломления  $n$  играет  $\sqrt{\varepsilon} = n + i\kappa$ , где  $\varepsilon$  – комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Простейшей задачей такого типа является пересечение границы раздела двух сред (или границы вакуум-среда). Можно привести наглядное объяснение причины появления переходного излучения при пересечении зарядом границы раздела. Электромагнитное поле в первой среде можно представить себе как поле самого заряда и поле его изображения, движущегося во второй среде навстречу заряду. При пересечении границы заряд и его изображение как бы частично «аннигилируют» или перестраиваются, что приводит к появлению излучения. Если вторая среда является идеальным зеркалом, то заряд и его изображение полностью «аннигилируют» (рис. 32.8).

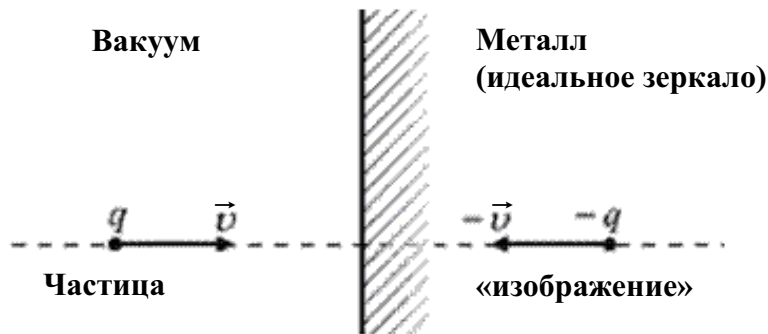


Рис. 32.8. Генерация переходного излучения

Пусть частица с зарядом  $e$  движется из среды с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$  в среду с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2$ . При нормальном падении на плоскую границу (рис. 32.8) задача решается достаточно просто. Как обычно, находится поле  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , представляющее собственное поле частицы и поле излучения. Переход с помощью разложения в интегралы Фурье к фурье-образам полей и тока частицы позволяет стандартным образом вычислить спектрально-угловое распределение излучения  $\frac{d^2W}{d\omega d\Omega}$ . Не останавливаясь на деталях вычислений,

приведем выражение для  $\frac{d^2W}{d\omega d\Omega}$ , представляющее испущенную электроном энергию в расчете на единичные интервалы частот и телесного угла в направлении под углом  $\theta_1$ , по отношению к направлению движения частицы, причем излучение регистрируется в области (1):



$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{r_e m_e c^2 \beta^2}{\pi^2 c} \sqrt{\varepsilon_1} \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 \frac{F_n^2}{F_d^2}, \quad (32.9)$$

где

$$F_n = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left( 1 - \beta^2 \varepsilon_1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \sin^2 \theta_1 \right),$$

$$F_d = (1 - \beta^2 \varepsilon_1 \cos^2 \theta_1) \left( 1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \sin^2 \theta_1 \right) \left( \varepsilon_2 \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 \sin^2 \theta_1} \right). \quad (32.10)$$

Выражение для  $\frac{d^2W}{d\omega d\Omega}$ , представляющее спектрально-угловое распределение излучения в направлении вперед (то есть в области 2), получается из предыдущего выражения с взаимной заменой индексов  $1 \leftrightarrow 2$  и заменой скорости  $\beta$  на  $-\beta$ . Спектр частот лежит от микроволнового диапазона до частоты  $\omega < \gamma c \sqrt{4\pi N Z \tau_e}$ , где  $N$  – плотность атомов среды и  $Z$ -заряд ядра атома. Для перехода из вакуума ( $\varepsilon_1 = 1$ ) в металл ( $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ ) спектрально-угловое распределение имеет вид:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{r_e m_e c^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}. \quad (32.11)$$

Максимум излучения приходится на угол  $\theta = 1/\beta\gamma$ . Интегрируя по телесному углу, получим спектральное распределение излучения

$$dW/d\omega = \frac{r_e m_e c^2}{2\pi \beta c} \left[ (1 + \beta^2) \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 2\beta \right] \approx \frac{2r_e m_e c^2}{\pi \beta c} \ln \gamma \quad (32.12)$$

для  $\gamma \gg 1$ .

## ЗАДАНИЯ

### Задание № 1

**Тема: Математический аппарат теории поля. Векторная алгебра и тензорная алгебра. Векторный анализ**

1. Дать определения вектора, тензора 2-го ранга и тензора  $S$ -го ранга в 3-мерном пространстве.
2. Дать определение полярного и аксиального векторов.
3. Дать определение для полностью антисимметричного единичного тензора 3-го ранга  $\varepsilon_{ijk}$ .
4. Записать выражения для компонент векторного произведения  $[\vec{A}\vec{B}]$  и  $\text{rot } \vec{B}(\vec{r})$  с тензора  $\varepsilon_{ijk}$ . Указать, как преобразуются эти величины при вращениях и отражениях.
5. Доказать равенства:
  - а)  $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$ ;
  - б)  $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{klm} = 2\delta_{im}$ ;
  - в)  $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikl} = 6$ .
6. Записать в инвариантной векторной форме:
  - а)  $\varepsilon_{inl}\varepsilon_{irs}\varepsilon_{lmp}\varepsilon_{stp}a_n a_r b_m c_t$ ;
  - б)  $\varepsilon_{inl} \varepsilon_{krs} \varepsilon_{lmp} \varepsilon_{stp} a_r a'_n b_k b'_i c_t c'_m$ .
7. Доказать тождества с помощью оператора  $\vec{\nabla}$ , пользуясь правилами дифференцирования и умножения векторов и не переходя к проекциям на оси координат. Функции  $\varphi, \psi, \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  являются функциями координат.
  - а)  $\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{grad}\psi + \psi \text{grad}\varphi$ ;
  - б)  $\text{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi \text{div}\vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad}\varphi$ ;
  - в)  $\text{rot}(\varphi\vec{A}) = \varphi \text{rot}\vec{A} - [\vec{A} \text{grad}\varphi]$ ;
  - г)  $\text{div}[\vec{A}\vec{B}] = \vec{B} \text{rot}\vec{A} - \vec{A} \text{rot}\vec{B}$ ;
  - д)  $\text{rot}[\vec{A}\vec{B}] = \vec{A} \text{div}\vec{B} - \vec{B} \text{div}\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B}$ ;
  - е)  $\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = [\vec{A} \text{rot}\vec{B}] + [\vec{B} \text{rot}\vec{A}] + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$ .

8. Доказать тождества:
- $\vec{C} \cdot \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$ ;
  - $(\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) [\vec{A} \vec{B}] = \vec{A} \times (\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{B} \times (\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$ ;
  - $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{B} \text{div} \vec{A}$ ;
  - $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \text{rot} \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{C} - \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{C}$ ;
  - $(\vec{A} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} \times \text{rot} \vec{B} - \vec{A} \cdot \text{div} \vec{B}$ ;
  - $(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \cdot \text{div} \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{A} \times \text{rot} \vec{B} - \vec{B} \times \text{rot} \vec{A}$ .
9. Вычислить  $\text{grad}(\vec{a} \cdot \varphi(\vec{r}) \vec{r})$ ,  $\text{div}(\varphi(\vec{r}) \vec{r})$ ,  $\text{rot}(\varphi(\vec{r}) \vec{r})$ ,  $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})(\varphi(\vec{r}) \vec{r})$ , где  $\vec{a}$  – постоянный вектор.
10. Вычислить  $\text{div}$  и  $\text{rot}$  векторов  $(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{b}$ ,  $(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}$ ,  $[\vec{a} \vec{r}]$ ,  $\varphi(\vec{r}) [\vec{a} \vec{r}]$ ,  $\vec{r} \times [\vec{a} \cdot \vec{r}]$ , где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – постоянные векторы.
11. Вычислить  $\text{grad} \vec{A}(r) \cdot \vec{r}$ ,  $\text{grad} \vec{A}(r) \cdot \vec{B}(r)$ ,  $\text{div} \varphi(r) \vec{A}(r)$ ,  $\text{rot} \varphi(r) \vec{A}(r)$ ,  $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \varphi(r) \vec{A}(r)$ .
12. Вычислить  $\text{grad} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$  и  $\text{rot} \frac{[\vec{p} \vec{r}]}{r^3}$ , где  $\vec{p}$  – постоянный вектор, воспользовавшись выражением для  $\text{grad}$  и  $\text{rot}$  в сферических координатах.

### Список литературы

- Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 456 с.
- Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – М.: Наука, 1970. – 504 с.

### Задание № 2

#### Тема: Электростатика и магнитостатика в вакууме

- В чем состоит основная задача электростатики?
- Записать закон Кулона для малых зарядов.
- Записать силу взаимодействия двух систем зарядов, распределенных с объемной плотностью  $\rho_1(\vec{r})$  и  $\rho_2(\vec{r})$ . Представить эту силу через интеграл от напряженности электрического поля  $\vec{E}(\vec{r})$ , созданного системой (2), и  $\rho_1(\vec{r})$ .
- Вывести уравнения Максвелла для электростатики, используя интегральную теорему Гаусса и теорему Остроградского–Гаусса ( $\text{div} \vec{E} = \dots$ ) и теорему Стокса ( $\text{rot} \vec{E} = \dots$ ).

5. Показать, что из уравнений Максвелла следует уравнение Пуассона  $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$ , причем  $\vec{E} = -grad \varphi$ , где  $\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{R}$ ,  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ .
6. Сформулировать законы Ампера и Био–Савара в дифференциальной форме, объяснить их физический смысл. Записать силу взаимодействия между двумя замкнутыми токами  $I_1$  и  $I_2$ . Перейти к объемным токам.
7. Записать уравнения Максвелла для магнитостатики. Убедиться, что

$$\vec{B} = rot \vec{A},$$

где

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \frac{dV'}{R}$$

и

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

8. Записать потенциалы  $\varphi(\vec{r})$  и  $\vec{A}(\vec{r})$  в дипольном приближении.
9. Найти напряженность  $\vec{E}$  электрического поля, потенциал  $\varphi$  которого равен:
- $\vec{a} \cdot [\vec{b} \vec{r}]$ ;
  - $[\vec{a} \vec{r}] \cdot [\vec{k} \vec{r}]$ ;
  - $(\vec{a} \vec{r}) \cos(\pi \vec{r})$ ;
  - $\frac{\vec{d} \vec{r}}{r}$ .

Векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{k}$ ,  $\vec{d}$  не зависят от координат и времени.

10. Можно ли создать в пространстве электростатическое поле с напряженностью

$$\vec{E} = \vec{a} \times \vec{b},$$

где  $\vec{a}$  – постоянный вектор?

11. Вычисляя ротор и дивергенцию магнитного поля  $\vec{B}$ , убедиться, что в магнитостатике выражение

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла.

### Список литературы

- Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 456 с.
- Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. – М.: Физматлит, 2002. – 656 с.

### Задание № 3

**Тема: Переменное электромагнитное поле. Закон электромагнитной индукции. Уравнения Максвелла для переменного электромагнитного поля и их решение. Запаздывающие потенциалы.**

1. Объясните причину возникновения ЭДС в движущемся проводнике в магнитном поле. Запишите математическую формулировку явления электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной форме. За счет чего возникает ЭДС в замкнутом неподвижном проводнике в магнитном поле?
2. Максвелловский ток смещения. Его физический смысл.
3. Запишите систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме для переменных электрических и магнитных полей. Какие экспериментально установленные законы лежат в основе этих уравнений?
4. Запишите систему уравнений Максвелла для переменных полей в интегральной форме.
5. Как решаются уравнения Максвелла? Запишите уравнения, которым удовлетворяют скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля при дополнительном условии Лоренца, накладываемом на эти потенциалы. Как выглядит это условие?
6. С каким физическим принципом связан выбор электромагнитных потенциалов, удовлетворяющих уравнению Даламбера, в форме запаздывающих потенциалов? Объясните физическую сущность такого выбора.
7. Провод, имеющий форму параболы  $y = kx^2$ , находится в однородном магнитном поле  $\vec{B}$ , перпендикулярном плоскости  $XU$ . Из вершины параболы перемещают поступательно переключку с постоянным ускорением  $a$ , причем начальная скорость  $v_0 = 0$ . Найти ЭДС индукции в образовавшемся контуре как функцию координаты  $y$ .

*Указание*

Обозначим:  $\mathcal{E} = \varepsilon_i$ . Выберем нормаль  $\vec{n}$  к плоскости контура в направлении вектора  $\vec{B}$ . Тогда изменение магнитного потока  $d\varphi$ , с одной стороны, можно связать с изменением потока вектора  $\vec{B}$  через поверхность  $d\vec{S}$ , образованную переключкой и контуром в форме параболы, а с другой – с  $\varepsilon_i$ .

### Список литературы

1. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 703 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. – М.: Физматлит, 2002. – 656 с.

## Задание № 4

### Тема: Релятивистская механика и электродинамика

1. Система  $K'$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $\vec{V}$  вдоль оси  $x$ , измеренной в системе  $K$ . Записать:
  - а) прямое и обратное преобразования Лоренца для координат и времени с помощью матрицы Лоренца;
  - б) релятивистский закон сложения скоростей;
  - в) формулы преобразований Лоренца при произвольном направлении скорости  $\vec{V}$  относительно координатной системы.
2. Показать, что четырехмерный элемент объема  $dx dy dz dt$  инвариантен относительно преобразований Лоренца.
3. Пучок света заключен в элементе телесного угла  $d\Omega$ . Показать, что преобразования Лоренца оставляют инвариантной величину  $\omega^2 d\Omega$ .
4. Записать преобразования Лоренца для импульса и энергии.
5. Пусть частица движется со скоростью  $\vec{v}$ . Введем обозначения:  $\vec{\beta} = \vec{v}/c$  и  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ . В этих обозначениях записать выражения для полной энергии частицы, энергии покоя, импульса частицы. Каким соотношением связаны энергия и импульс релятивистской частицы?
6. В ходе эксперимента были определены импульс и энергия частицы. Найти ее скорость и массу.
7. По какой траектории будет двигаться релятивистская частица (с массой  $m$  и зарядом  $q$ ), влетающая со скоростью  $v$  в поперечное магнитное поле с индукцией  $\vec{B} = const$ ?
8. Записать преобразования Лоренца для полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  (система  $K'$  движется относительно  $K$  со скоростью  $\vec{v} = c\vec{\beta}$ ; релятивистский фактор имеет вид  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ). Считая, что скорость  $\vec{v}$  направлена произвольным образом, записать преобразования Лоренца для  $\vec{E}'_{\parallel}$ ,  $\vec{B}'_{\parallel}$  и  $\vec{E}'_{\perp}$ ,  $\vec{B}'_{\perp}$ , где индексы  $\parallel$  и  $\perp$  означают параллельность и перпендикулярность к скорости  $\vec{v}$ .

### Список литературы

1. Угаров В.А. Специальная теория относительности. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
2. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 400 с.

## Задание № 5

### Тема: Уравнения Максвелла в средах

1. В чем состоят отличия микроскопического и макроскопического подхода к описанию электромагнитных явлений в средах?
2. Записать систему микроскопических уравнений Максвелла.
3. Дать определение физически малого объема  $\Delta V$  и физически малого промежутка времени  $\Delta t$ . Привести примеры.
4. Опишите основные этапы усреднения уравнения Максвелла по физически малым объемам вещества и времени.
5. Записать выражение для среднего значения какой-либо компоненты электромагнитного поля.
6. Как выглядят уравнения Максвелла после усреднения при наличии наведенных и сторонних плотностей зарядов и токов?
7. Установить связь наведенных зарядов и токов с удельными дипольными моментами. Порядок работы следующий:
  - а) покажите, что ток  $\vec{j}$  представляет сумму 2-х токов: тока поляризации  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  и тока  $\text{rot } \vec{M}$ , обусловленного замкнутыми микротоками в веществе;

б) используя формулу для полного магнитного момента тела

$$\int \vec{M} dV = \frac{1}{2c} \int \vec{r} \times \vec{j} dV,$$

где  $\vec{j} = \text{rot } \vec{M}'$  (в отсутствие наведенных зарядов), показать что

$$\vec{M}' = c \vec{M};$$

в) используя формулу

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \cdot \text{rot } \vec{M},$$

получить уравнения Максвелла в виде:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -c \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho_{ext}, \\ \text{rot}(\vec{B} - 4\pi\vec{M}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{ext} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}), \\ \text{div } \vec{B} &= 0; \end{aligned}$$

г) записать уравнения Максвелла, вводя два новых вектора:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \dots \\ \vec{H} &= \dots \end{aligned}$$

- д) записать уравнение Максвелла после усреднения при наличии свободных, связанных и сторонних плотностей зарядов и токов;  
 е) запишите уравнение связи, которыми необходимо дополнить уравнения Максвелла.
8. а) Используя уравнение Максвелла без сторонних токов и зарядов и материальные уравнения (уравнения связи), вывести уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} + \vec{j} \vec{E} = 0,$$

где  $\vec{S}$  – вектор Пойнтинга в макроскопической электродинамике;  
 $\omega$  – плотность энергии электромагнитного поля в веществе.

Обсудить физический смысл этого уравнения.

- б) Записать законы сохранения энергии в макроскопической электродинамике в интегральной форме.

### Список литературы

1. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – С. 190–199.
2. Галицкий В.М., Ермаченко В.М. Макроскопическая электродинамика. – М.: Высшая школа, 1988. – 159 с.
3. Памятных Е.А., Туров Е.А. Основы электродинамики материальных сред в переменных и неоднородных полях. – М.: Наука; Физматлит, 2000. – 240 с.

### Задание № 6

**Тема: Комплексная диэлектрическая проницаемость разреженного нейтрального газа**

1. Рассматривая взаимодействия электромагнитной волны с атомами среды нейтрального газа, можно получить для дипольного момента единицы объема

$$\vec{P} = N\vec{d}(t),$$

где  $\vec{d}(t)$  – дипольный момент атома.

Используя связь

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P},$$

найти  $\varepsilon(\omega)$ , установив сначала зависимость  $\vec{P}$  от  $\vec{E}$ .



Для этого необходимо применить осцилляторную модель, на основании которой можно записать уравнение движения для дипольного момента.

Уравнение движения для дипольного момента имеет вид

$$\ddot{\vec{d}} + \gamma \dot{\vec{d}} + \omega_0^2 \vec{d} = \frac{e^2}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

где  $\vec{d} = e\vec{r}(t)$  – дипольный момент атома и  $\vec{r}(t)$  – вектор смещения электрона относительно поля;  $\omega_0$  – частота осциллятора; член  $\gamma \dot{\vec{d}}$  характеризует затухание колебаний.

2. Обсудить, при каких условиях можно записать уравнение (1).

3. Предполагая, что решение уравнения (1) имеет вид

$$\vec{d} = \vec{d}_0 \cdot e^{-i\omega t},$$

найти это решение в виде

$$\vec{d} = (\dots) \vec{E} = [\dots] \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \psi)},$$

где  $\psi$  – разность фаз между колебаниями векторов  $\vec{d}$  и  $\vec{E}$ , зависящая от  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $\omega_0$ .

Установить вид  $\vec{d}$  и  $\psi$ .

Начертить график зависимости  $\psi$  от  $\omega$  для областей:

а)  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \omega \leq \omega_0;$

б)  $\psi = \frac{\pi}{2}$  в резонансе;

в)  $\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi, \quad \omega_0 \leq \omega \leq \infty.$

4. Записать выражения для векторов

$$\vec{P} = N\vec{d}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

и из сравнения с  $\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E}$  найти выражение для диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega)$ .

5. Полагая, что

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon'',$$

найти вид  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon''$  и начертить графики зависимости  $\varepsilon'(\omega)$  и  $\varepsilon''(\omega)$  от частоты.

Указание: ввести обозначение

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m},$$

где  $\omega_p$  – плазменная частота.

6. Найти вид  $\varepsilon(\omega)$  при  $\omega_0 = 0$  и  $\gamma = 0$ .
7. Используя интегральный закон сохранения энергии, в отсутствие свободных зарядов (атомов) установить, как связан знак полного потока электромагнитной энергии

$$\Pi = \int \operatorname{div} \vec{S} \cdot dV$$

с  $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega) \equiv \varepsilon''(\omega)$ , причем

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi dt,$$

где  $T$  – период электромагнитной волны. Обсудить результат, т. е. установить физический смысл  $\operatorname{Im}[\varepsilon(\omega)] \equiv \varepsilon''(\omega)$ .

### Список литературы

1. Рязанов М.И. Электродинамика конденсированного вещества. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

### Задание № 7

#### Тема: Диэлектрическая проницаемость среды. Дисперсионные соотношения Крамерса-Кронинга

1. Записать интегральное соотношение между вектором индукции  $\vec{D}(t)$  и вектором напряженности поля  $\vec{E}(t)$ . Разлагая поля в интеграл Фурье, получить уравнение связи

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega),$$

где  $\varepsilon(\omega)$  – диэлектрическая проницаемость.

2. Считая, что

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega),$$

установить вид функций  $\varepsilon'(\omega)$  и  $\varepsilon''(\omega)$ , записанных через функцию  $f(\tau)$ . Обсудить физический смысл функции  $f(\tau)$  и ее свойства.

3. Рассмотреть функцию комплексной переменной  $\varepsilon(z)$ . Записать интегральную формулу Коши для функции  $\varepsilon(z) - 1$  и обосновать выбор контура интегрирования для аналитической функции  $\varepsilon(z) - 1$ .
4. Используя интегральную формулу Коши для функции  $\varepsilon(z) - 1$  и свойства четности функции  $\varepsilon'(\omega)$  и  $\varepsilon''(\omega)$ , вывести дисперсионные соотношения Крамерса-Кронинга (в том числе и для сред, являющихся проводниками).

5. Обсудить, как используются соотношения Крамерса–Кронинга для получения сведений о диэлектрической проницаемости веществ.
6. Диэлектрическая проницаемость вещества  $\varepsilon(\omega)$  связана с комплексной восприимчивостью соотношением

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi'(\omega) + i\chi''(\omega).$$

Согласно результатам квантовой теории рассеяния фотонов восприимчивость изотропного вещества выражается через амплитуду рассеяния фотона на нулевой угол на атомах вещества

$$\chi(\omega) = \frac{4\rho N}{\omega} \cdot f(0),$$

где  $N$  – число атомов в единице объема. Используя оптическую теорему, выразите мнимую часть восприимчивости через сечение поглощения фотонов  $\sigma_{\text{tot}}(\omega)$ .

Запишите дисперсионные соотношения Крамерса–Кронинга для восприимчивостей  $\chi''(\omega)$  и  $\chi'(\omega)$ .

7. О зависимости диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  (или  $\chi'$ ) от частоты (или длины волны) прочитайте и законспектируйте в приведенной ниже литературе.
8. Прочитайте и законспектируйте из 7-й главы книги «Введение в физику твердого тела» Ч. Киттеля разделы:

Диэлектрическая поляризуемость (вывести формулу Клаузиуса–Моссотти). Измерение диэлектрической постоянной. Дипольная релаксация и диэлектрические потери. Комплексная диэлектрическая постоянная и угол потерь.

### Список литературы

1. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.И. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 400 с.
2. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. – М.: Наука, 1978. – 792 с.
3. Базылев В.А., Жеваго Н.К. Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
4. Галицкий В.М., Ермаченко В.М. Макроскопическая электродинамика. – М.: Высшая школа, 1988. – 159 с.
5. Денисов В.И. Введение в электродинамику материальных сред: учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 168 с.
6. Рязанов М.И. Электродинамика конденсированного вещества. – М.: Физматлит, 2002. – 320с.

## Задание № 8а

### Тема: Потенциалы Лиенара–Вихерта и поле точечного заряда

1. Задача нахождения переменного электромагнитного поля решается с помощью нахождения запаздывающих потенциалов:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t' - \frac{R}{c}\right) dV'}{R},$$

$$\bar{\varphi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t' - \frac{R}{c}\right) dV'}{R},$$

где  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ ,  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения,  $\vec{r}'$  – радиус-вектор источника поля,  $dV'$  – элемент объема источника поля.

Ввести 4-мерные обозначения для потенциалов, плотности тока и скорости. Записать выражение 4-мерной плотности тока для точечного заряда  $e$ , находящегося в точке  $\vec{r}(t')$  и движущегося со скоростью  $c\vec{\beta}(t')$ . Снимая с помощью  $\delta$ -функции интегрирование по объему, показать, что 4-мерный векторный потенциал имеет вид

$$A_\mu(\vec{r}, t) = e \int \frac{\beta_\mu(t')}{R(t')} \delta\left(t' + \frac{R(t')}{c} - t\right) dt'. \quad (1)$$

2. Записать, используя (1), выражения для векторного и скалярного потенциалов  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  и  $\varphi(\vec{r}, t)$ , соответственно.
3. Используя формулы:

$$\vec{E} = -grad\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

$$\vec{B} = rot\vec{A},$$

и предварительно убедившись, что

$$grad = \vec{n} \frac{\partial}{\partial R},$$

где

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R},$$

получить соотношения:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e \int \left[ \frac{\vec{n}}{R^2} \delta(f-t) + \frac{1}{cR} (\vec{\beta} - \vec{n}) \delta'_{f-t}(f-t) \right] dt', \quad (2)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = e \int [\vec{n} \vec{\beta}] \left[ -\frac{\delta(f-t)}{R^2} + \frac{1}{cR} \delta'_{f-t}(f-t) \right] dt'. \quad (3)$$

Здесь введено обозначение:

$$f(t') = t' + \frac{R(t')}{c}. \quad (4)$$

Обозначим также

$$\frac{df}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} = 1 - \vec{n} \vec{\beta} = k. \quad (5)$$

4. Проводя интегрирование по частям в интеграле, содержащем  $\delta'_{f-t}(f-t)$ , и пользуясь свойством  $\delta$ -функции

$$\int g(x) \delta[f(x) - \alpha] dx = \left[ \frac{g(x)}{df/dx} \right]_{f(x)=\alpha}, \quad (6)$$

записать (2) и (3) в виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{\vec{n}}{kR^2} + \frac{1}{ck} \frac{d}{dt'} \left( \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{kR} \right) \right]_{\text{запазд}}, \quad (2')$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{[\vec{\beta} \vec{n}]}{kR^2} + \frac{1}{ck} \frac{d}{dt'} \left[ \frac{[\vec{\beta} \vec{n}]}{kR} \right] \right]_{\text{запазд}}. \quad (3')$$

5. Убедиться, что

$$\frac{1}{c} \frac{d\vec{n}}{dt'} = \frac{[\vec{n} [\vec{n} \vec{\beta}]]}{R}, \quad (7)$$

и, проведя дифференцирование по  $dt'$  вектора  $\vec{n}$  в (2') и (3') там, где он явно входит, получить:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{\vec{n}}{k^2 R^2} + \frac{\vec{n}}{ck} \frac{d}{dt'} \left( \frac{1}{kR} \right) - \frac{\vec{\beta}}{k^2 R^2} + \frac{1}{ck} \frac{d}{dt'} \left( \frac{\vec{\beta}}{kR} \right) \right]_{\text{запазд}}, \quad (2'')$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = e \left[ \left( \frac{\vec{\beta}}{k^2 R^2} + \frac{1}{ck} \frac{d}{dt'} \left( \frac{\vec{\beta}}{kR} \right) \right) \vec{n} \right]_{\text{запазд}}. \quad (3'')$$

Показать, что

$$\vec{B} = [\vec{n} \cdot \vec{E}].$$

6. Используя обозначение

$$\frac{d}{dt'} \vec{\beta} = \dot{\vec{\beta}}$$

и предварительно убедившись, что

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt'} (kR) = \beta^2 - \vec{\beta} \vec{n} - \frac{R}{c} \dot{\vec{\beta}}, \quad (8)$$

привести после некоторых преобразований формулы (2'') и (3'') к виду

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{k^3 R^2} \right]_{\text{запазд}} + \frac{e}{c} \left[ \frac{\vec{n}}{k^3 R} \times \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right\} \right]_{\text{запазд}} \quad (9)$$

и

$$\vec{B} = [\vec{n} \vec{E}]. \quad (10)$$

Обсудить физический смысл 1-го и 2-го слагаемых в (9).

### Список литературы

1. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 703 с.
2. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 400 с.

### Задание № 86

**Тема: Полная мощность, излучаемая ускоренно движущимся зарядом. Формула Лармора и ее релятивистское обобщение. Потери энергии на излучение в ускорителях**

1. Используя выражение для электромагнитного поля  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , выведенное через потенциалы Лиенара–Вихерта (оставляя при этом только поле излучения ускоренно движущегося заряда), вычислить мгновенный поток энергии  $\vec{S}$  и поток энергии внутри телесного угла  $d\Omega$  на большом расстоянии от частицы

$$dI = \vec{S} \vec{n} R^2 d\Omega.$$

Записать выражение для  $dI$  в нерелятивистском приближении  $\beta \ll 1$  и  $k \sim 1$ , вводя угол  $\theta$  между  $\vec{n}$  и  $\vec{\beta}$ .

Получить формулу Лармора для интенсивности излучения

$$I = \int \left( \frac{dI}{d\Omega} \right) d\Omega = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}. \quad (1)$$

2. Записав формулу (1) в виде

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} \right), \quad (2)$$

можно прийти к ее релятивистскому обобщению:

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{dP_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dP_\mu}{d\tau} \right), \quad (3)$$

где  $\left( \frac{dP_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dP_\mu}{d\tau} \right) = invariant$  и  $\tau$  – собственное время в системе, связанное с частицей.

Используя релятивистские соотношения для импульса  $\vec{p} = m\vec{\beta}c\gamma$ , энергии  $E = \gamma mc^2$  и  $E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$ , покажите, что

$$\left( \frac{dP_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dP_\mu}{d\tau} \right) = \left( \frac{d\vec{P}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dE}{d\tau} \right)^2 = \left( \frac{d\vec{P}}{d\tau} \right)^2 - \beta^2 \left( \frac{dP}{d\tau} \right)^2.$$

После нахождения производных:

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \frac{d}{d\epsilon} (\gamma m \vec{v}) = mc \frac{d}{d\tau} (\gamma \vec{\beta})$$

и

$$\frac{dP}{d\tau} = mc \frac{d}{d\tau} (\gamma \beta),$$

с учетом того, что  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ,  $\beta^2 = \vec{\beta}^2$  и  $\beta\dot{\beta} = \vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}$

$$\left( \frac{d\vec{\beta}}{dt'} = \dot{\vec{\beta}}, \quad d\tau = \frac{dt'}{\gamma} \right), \quad \frac{d\vec{P}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{P}}{dt'},$$

и соотношения

$$\left( \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right)^2 = \left[ \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right] \left[ \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right] = \vec{\beta}^2 \dot{\vec{\beta}}^2 - \left( \vec{\beta} \dot{\vec{\beta}} \right)^2,$$

получить формулу

$$\left( \frac{dP_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dP_\mu}{d\tau} \right) = \gamma^6 m^2 c^2 \left\{ \dot{\vec{\beta}}^2 - \left( \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right\}$$

и формулу Лиенара

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 \left[ \dot{\vec{\beta}}^2 - \left( \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right],$$

являющуюся релятивистским обобщением формулы Лармора.

3. Показать, что интенсивность излучения электронов в линейном ускорителе определяется формулой

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{dE}{dx} \right)^2,$$

где  $E$  – энергия,  $x$  – путь.

4. Потери энергии на излучение в циклическом ускорителе нужно определить по формуле

$$\delta E (\text{МэВ}) = 8,85 \cdot 10^{-2} \frac{[E (\text{ГэВ})]^4}{\rho (\text{м})}.$$

Посчитать  $\delta E$  для синхротрона с  $E_{\text{max}} \sim 5$  ГэВ,  $\rho = 10$  м.

### Список литературы

1. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 703 с.
2. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 400 с.
3. Widemann H., Particle Accelerator Physics Vol. 2, Nonlinear and Higher Order Beam Dynamics, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg, 1999. – 479 p.

### Задание № 9

#### Тема: Угловое распределение ускоренно движущегося заряда

1. Скорость  $\vec{v}$  релятивистской частицы в некоторый момент времени  $t'$  параллельна ее ускорению  $\dot{\vec{v}}$ . Мгновенное распределение интенсивности излучения имеет вид:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^6},$$

где  $\beta = v/c$ ,  $\theta$  – угол между направлением ускорения и направлением излучения.

2. Нарисуйте угловую (полярную) диаграмму излучения для случаев: а)  $v \approx 0$  и б)  $v \neq 0$ .

3. Найдите, под каким углом  $\theta_0$  возникает максимум излучения.

Определите, к чему стремится угол  $\theta_0$ : а) при  $\beta \rightarrow 0$  и б) при  $\beta \rightarrow 1$ .

Под какими углами к направлению скорости происходит излучение в ультрарелятивистском случае?



4. Считая, что  $\theta \ll 1$ , покажите, что формула  $\frac{dI}{d\Omega}$  принимает вид

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2 \theta^2}{2\pi c^3 [\gamma^{-2} + \theta^2]^6},$$

где  $\gamma = mc^2/\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  – полная энергия частицы.

В каком конусе сосредоточено излучение для ультррелятивистской частицы?

5. Определите, чему равна полная интенсивность излучения

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega \text{ и полная скорость потери энергии } -d\varepsilon/dt'.$$

### Список литературы

1. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 703 с.
2. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 400 с.
3. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – М.: Наука, 1970. – 504 с.

### Задание № 10

#### Тема: Синхротронное излучение

1. Опишите основные особенности излучения ультррелятивистской заряженной частицы при движении с постоянной скоростью  $v$  по окружности с мгновенным радиусом кривизны  $\rho$ . Укажите формулу для спектральной интенсивности излучения в единицу телесного угла. Как связана длительность импульса излучения  $\Delta t'$  с мгновенным радиусом кривизны?
2. Пусть плоскость орбиты частицы совпадает с плоскостью  $XOY$  и в момент  $t = 0$  частица проходит через начало координат. Вводя единичные векторы поляризации  $\vec{e}_{\parallel}$  и  $\vec{e}_{\perp}$ , направленные, соответственно, по оси  $OY$  и перпендикулярно плоскости орбиты частицы, показать, что входящее в подынтегральное выражение для  $\frac{dI}{d\Omega}$  двойное векторное произведение векторов имеет вид

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) = \beta \left\{ -\vec{e}_{\parallel} \sin\left(\frac{vt}{\rho}\right) + \vec{e}_{\perp} \cos\left(\frac{vt}{\rho}\right) \sin\theta \right\}.$$

3. Убедиться, что при малом временном интервале вблизи  $t = 0$  и малых углах после разложения тригонометрических функций в ряд по малым параметрам  $v t / \rho$  и  $\theta$ , а также ограничившись

$$\beta \approx 1 - \gamma^{-2} / 2,$$

можно получить выражение для интенсивности излучения в виде разложения по векторам поляризации

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| -\vec{e}_{\parallel} A(\omega) + \vec{e}_{\perp} A(\omega) \right|^2,$$

где  $A_{\parallel}(\omega)$  и  $A_{\perp}(\omega)$  – амплитуды, соответствующие поляризации излучения в плоскости орбиты и перпендикулярные плоскости орбиты, соответственно.

4. Записать выражения для амплитуд  $A_{\parallel}(\omega)$  и  $A_{\perp}(\omega)$  через модифицированные функции Бесселя  $K_{1/3}$  и  $K_{2/3}$  (функции Макдональда) и получить выражение для  $dI(\omega)/d\Omega$  в виде формулы:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left( \frac{\varpi \rho}{c} \right) (\gamma^{-2} + \theta^2) \left[ K_{2/3}^2(\zeta) + \frac{\theta^2}{\gamma^{-2} + \theta^2} K_{1/3}^2(\zeta) \right],$$

где

$$\zeta \cong \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_c} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{3/2},$$

а  $\omega_c = (2/3)c\gamma^3 / \rho$  – предельная фотонная частота.

5. Что можно сказать о поляризации излучения в релятивистском и нерелятивистском случаях? В какой области углов в основном сосредоточено излучение при частотах  $\omega \sim \omega_c$ ?
6. Полученные формулы при периодическом движении частицы по окружности записать с учетом того, что частота излучения  $\omega$  кратна основной частоте  $\omega_0$ :

$$\omega = n \omega_0,$$

в виде интенсивности излучения на  $n$ -й гармонике, т. е. найти

$$\frac{dI_n}{d\Omega} \text{ и } I_n.$$

## Список литературы

1. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1965. – 703 с.
2. Wiedemann H., Particle Accelerator Physics V. 2, Nonlinear and Higher Order Dynamics, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg, 1999. – 479 p.

## Задание № 11

### Тема: Теория синхротронного излучения

В § 30 дана теория синхротронного излучения. В частности, получена формула Шотта для спектрального и углового распределения мощности синхротронного излучения  $W(\nu, \theta)$ , где  $\nu$  – номер гармоники, связывающий частоту излучения  $\omega$  с основной частотой  $\omega_0$ .

1. Покажите, что в релятивистском случае частота обращения электрона в постоянном магнитном поле  $B$  равна  $\omega_0 = ecB\varepsilon /$ , где  $\varepsilon$  – полная энергия электрона.
2. Опишите основные этапы вычислений, приводящие к формуле Шотта. Запишите через формулу Шотта полную мощность излучения.
3. Какой вид имеет полная мощность излучения  $W$  (релятивистское обобщение формулы Лиенара)? Как она связана с нерелятивистской формулой Лармора?
4. Приведите обобщение формулы Шотта, учитывающей поляризационные свойства синхротронного излучения.

Как выглядят  $\sigma$ - и  $\pi$ -компоненты мощности излучения (компоненты линейной поляризации), записанные через полную мощность излучения: а) в нерелятивистском случае; б) в релятивистском случае?

5. Обсудите особенности зависимости линейной и круговой поляризации СИ от угла излучения.
6. На круговой орбите одновременно находится  $N$  электронов. Рассмотреть влияние интерференции полей, создаваемых этими электронами, на интенсивность излучения  $n$ -й гармоники Фурье. Рассмотреть частные случаи:
  - а) совершенно беспорядочного расположения электронов;
  - б) правильного расположения электронов на угловом расстоянии  $2\pi/N$  друг от друга;

в) расположение электронов в виде сгустка, размеры которого малы по сравнению с радиусом орбиты (результат в ряде случаев существенно зависит от отношения длины волны к размерам сгустка).

*Указание:* при решении задачи 6\* нужно предварительно найти компоненты Фурье поля излучения  $\vec{A}_n$ ,  $\vec{B}_n$  заряда  $e$ , движущегося по круговой орбите радиуса  $a$  с релятивистской скоростью  $v$ , и исследовать характер поляризации компонент Фурье.

7. Использование синхротронного излучения в науке, технике и медицине. Привести примеры.

### Список литературы

1. Джексон Д. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 703 с.
2. Тернов И.М., Михайлин В.В. Синхротронное излучение. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 296 с.
3. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по классической электродинамике. – М.: Наука, 1970. – 504 с.
4. Кулипанов Г.Н., Скринский А.Н. Использование синхротронного излучения: состояние и перспективы // УФН, 1977. – Т. 122. – Вып. 3. – С. 369–418.

### Задание № 12

#### Ондуляторное излучение. Другие виды интенсивного электромагнитного излучения релятивистских электронов

1. Принцип действия ондуляторов и виглеров.  
Сравните эффективную длину формирования СИ с соответствующей длиной формирования ондуляторного излучения. Какой вывод из этого следует?
2. Как связаны между собой спектрально-угловые распределения интенсивности излучения от полей, создаваемых на одном и на  $N$  периодах ондулятора? Проработайте более подробно выкладки, приведенные в лекции.
3. Эффективный параметр ондулятора  $K$ . Его связь с частотой излучения и излучаемой длиной волны  $\lambda$ . Выполнить соответствующие расчеты, приведенные в лекции, более подробно.
4. Электрон с импульсом  $p = 500$  МэВ/с движется в плоском ондуляторе в поле  $B = 10$  кГц. Необходимо:
  - а) определить мгновенный радиус орбиты, по которой движется электрон. Убедиться, что  $R_0 = p / 0,3 B$ , где  $R$  берется в см,  $p$  – в МэВ/с и  $B$  – в кГц;

б) найти потери на синхротронное излучение, испускаемое электроном, за один оборот на орбите радиуса  $R_0$ ;

в) найти потери на излучение, испускаемое электроном на дуге  $\psi \sim d/2R_0$ , где период ондулятора  $d=4$  см;

г) оценить потери на ондуляторное излучение за один период  $\Delta t = d/c$ ;

д) найти величину ондуляторного параметра  $K = \gamma\psi$ , где  $\psi \sim d/R_0$  для рассмотренного случая;

е) оценить длину волны ондуляторного излучения, испускаемого под углом  $\theta = 0$  в лабораторной системе (здесь  $\theta$  – угол между направлением продольной скорости  $\vec{\beta}_{\parallel}$  и волновым вектором  $\vec{k}$  электромагнитной волны).

5. Описать кратко характерные особенности следующих видов излучения (рис. 32.1–32.6):

а) комптоновского рассеяния, возникающего при рассеянии электронов с большим числом частиц в пучке, на фотонах от мощного лазера;

б) когерентного тормозного излучения;

в) излучения при каналировании электронов;

г) переходного излучения;

д) параметрического рентгеновского излучения;

е) излучения, называемого в научной литературе эффектом Смита–Парселла.

### Список литературы

1. Тернов И.М., Михайлин В.В. Синхротронное излучение. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 296 с.
2. Базылев В.А., Жеваго Н.К. Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях. – М.: Наука, 1987. – 272 с.
3. Rullhusen P., Artru X., Dhez P. Nolel radiation sources using relativistic electrons. – Series on Synhrotron Radiation Techniques and Applications – Vol. 4. Singapore: World Scientific Publishing, 1998. – 202 p.
4. Wuchao A., Tigner M. Handbook of Accelerator Phusics and Engineering. – World Scientific: Singapore, 1999.

# ТЕСТЫ

## I. Электричество

1. Какими из перечисленных ниже свойств обладает электрическое поле?
  1. Оказывает силовое воздействие на заряженные частицы и тела.
  2. Обладает энергией и инертностью.
  3. Оказывает силовое воздействие на незаряженные материальные тела.
  4. Оказывает силовое воздействие на намагниченные тела.
  5. Обусловлено изменяющимся во времени магнитным полем.
2. Какими из перечисленных ниже свойств обладает электростатическое поле?
  1. Оказывает силовое воздействие на материальные тела.
  2. Оказывает силовое воздействие на заряженные частицы или тела.
  3. Обусловлено изменяющимся во времени магнитным полем.
  4. Оказывает силовое воздействие на проводники с током.
  5. Обладает энергией.
3. Как следует изменить расстояние между точечными зарядами, чтобы сила взаимодействия между ними уменьшилась в 4 раза?
  1. Увеличить в 4 раза.
  2. Уменьшить в 4 раза.
  3. Увеличить в 16 раз.
  4. Увеличить в 2 раза.
  5. Уменьшить в 2 раза.
4. Чем определяется численное значение напряженности в данной точке электрического поля?
  1. Потенциальной энергией, которой обладает единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля.
  2. Потенциальной энергией, которой обладает произвольный «пробный» заряд, помещенный в данную точку поля.
  3. Силой, действующей на единичный положительный заряд в данной точке поля.
  4. Силой, действующей на любой пробный заряд, помещенный в данную точку поля.
  5. Работой, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля.

5. Чем определяется численное значение потенциала в данной точке электростатического поля?
1. Потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в данную точку поля.
  2. Потенциальной энергией любого пробного заряда, помещенного в данную точку поля.
  3. Работой, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля.
  4. Силой, действующей на единичный положительный заряд в данной точке поля.
  5. Силой, действующей на пробный заряд, помещенный в данную точку поля.
6. Чем определяется циркуляция вектора напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура  $L$ ?
1. Линейным интегралом вида  $\oint E dl \cos\left(\hat{\vec{E}} \hat{d\vec{l}}\right)$ .
  2. Силой, действующей на перемещаемый вдоль данного контура единичный положительный заряд.
  3. Линейным интегралом вида  $\oint qE dl \cos\left(\hat{\vec{E}} \hat{d\vec{l}}\right)$ .
  4. Работой, совершаемой полем при перемещении единичного положительного заряда вдоль данного контура.
  5. Работой, совершаемой полем при перемещении произвольного электрического заряда вдоль данного контура.
7. Какое из перечисленных свойств электростатического поля указывает на то, что это поле является потенциальным?
1. Электростатическое поле оказывает силовое воздействие на заряженные частицы или тела.
  2. Работа при перемещении заряда в электростатическом поле вдоль замкнутого контура равна нулю.
  3. Заряд, помещенный в данную точку поля, обладает единственным значением потенциальной энергии.
  4. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура равна нулю.
  5. Электростатическое поле обладает энергией.

## II. Электростатика диэлектриков

1. Как изменится сила взаимодействия двух точечных зарядов при перенесении их из среды с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  в вакууме при фиксированном расстоянии  $r$  между зарядами? Задачу решить в системе СИ.
  1. Увеличится в  $\varepsilon$  раз.
  2. Уменьшится в  $\varepsilon$  раз.
  3. Уменьшится в  $\varepsilon_0 \varepsilon$  раз.
  4. Увеличится в  $\varepsilon_0 \varepsilon$  раз.
  5. Увеличится в  $4\pi \varepsilon \varepsilon_0$  раз.
2. Как изменится сила взаимодействия двух точечных зарядов при перенесении их из вакуума в среду и трехкратном уменьшении расстояния между зарядами?
  1. Увеличится в 27 раз.
  2. Уменьшится в 27 раз.
  3. Увеличится в 9 раз.
  4. Уменьшится в 243 раза.
  5. Уменьшится в 9 раз.
3. Какие из приведенных ниже выражений определяют напряженность электростатического поля точечного заряда (в системе СИ)?
  - 1)  $q/4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2$ ;
  - 2)  $q/4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r$ ;
  - 3)  $q/4\pi r^2$ ;
  - 4)  $-q/4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2$ ;
  - 5)  $-q/4\pi r^2$ .
4. Каково соотношение между напряженностями в точках  $A$  и  $C$  поля точечного заряда  $+q$  ( $OA=AC$ )?
  - 1)  $E_A = E_C$ ;
  - 2)  $E_A = 2E_C$ ;
  - 3)  $E_A = 4E_C$ ;
  - 4)  $E_A = \frac{1}{2}E_C$ ;
  - 5)  $E_A = \frac{1}{4}E_C$ .
5. Укажите ответы, в которые единицы напряженности электрического поля, циркуляции напряженности электрического поля вдоль данного контура, поверхностной плотности заряда, емкости и электрической индукции расположены в соответствующей последовательности:
  1.  $H/Кл$ ; Дж; Кл/м;  $\Phi$ ; В/м.
  2. В/м; В; Кл/м<sup>2</sup>;  $\Phi$ ; Кл/м<sup>2</sup>.
  3. Н; В; Кл; Кл; Кл/м<sup>2</sup>.
  4. Дж;  $\Phi$ ; Кл/м<sup>2</sup>; В; Кл/м.
  5. Н/Кл; В; Кл/м<sup>2</sup>;  $\Phi$ ; Кл/м<sup>2</sup>.



6. Укажите ответ, характеризующий процесс поляризации диэлектриков.
1. Смещение молекулярных диполей внешнего электрического поля.
  2. Смещение молекулярных диполей в направлении градиента потенциала внешнего электрического поля.
  3. Приобретение диэлектриком некоторого заряда в электрическом поле.
  4. Смещение диэлектрика в направлении внешнего электрического поля.
  5. Установление преимущественной ориентации молекулярных диполей в электрическом поле.
7. Каково соотношение между напряженностью  $\vec{E}$  электрического поля в диэлектрике и напряженностью  $\vec{E}_0$  внешнего электрического поля?
- 1)  $|\vec{E}| = |\vec{E}_0|$ ;
  - 2)  $|\vec{E}| > |\vec{E}_0|$ ;
  - 3)  $|\vec{E}| < |\vec{E}_0|$ ;
  - 4)  $\vec{E} = \vec{E}_0$ .
8. Что называют вектором поляризации диэлектрика?
1. Дипольный момент молекулы диэлектрика.
  2. Векторную сумму дипольных моментов молекул всего диэлектрика.
  3. Поверхностный заряд, возникающий при поляризации диэлектрика.
  4. Векторную сумму дипольных моментов молекул диэлектрика, отнесенных к единице его объема.
  5. Векторную сумму дипольных моментов молекул диэлектрика, отнесенную к единице его массы.
9. Что происходит в полярном диэлектрике при внесении его в однородное электростатическое поле?
1. Электризация диэлектрика.
  2. Смещение молекулярных диполей вдоль поля.
  3. Смещение молекулярных диполей против поля.
  4. Ориентация электрических моментов молекулярных диполей против поля.
  5. Ориентация электрических моментов молекулярных диполей вдоль поля.
10. Какая из приведенных ниже особенностей диэлектриков характерна только для неполярных диэлектриков при отсутствии внешнего электрического поля?
1. Суммарный вектор электрических моментов всех молекул диэлектрика равен 0.
  2. Результирующий вектор электрических моментов молекул, содержащихся в единице объема диэлектрика, равен 0.
  3. Электрический момент каждой молекулы равен 0.
  4. Электрический момент каждой молекулы отличен от 0.
  5. Результирующий вектор электрических моментов молекул, находящихся в единице массы диэлектрика, равен 0.

11. Какие из приведенных выражений (в системе СИ) определяют объемную плотность энергии электрического поля?

- 1)  $c\varphi^2/2$ ;    2)  $\frac{1}{2}DE$ ;    3)  $\frac{c\Delta\varphi^2}{2}$ ;    4)  $\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2$ ;    5)  $\varepsilon_0\varepsilon E$ .

### III. Ток в проводниках. Магнитное поле

1. Укажите, от каких из приведенных ниже условий зависит сопротивление проводника:

- 1) от ЭДС источника, к которому подключен этот проводник;
- 2) силы тока в цепи;
- 3) геометрических размеров и материала проводника;
- 4) разности потенциалов на концах провода;
- 5) напряжения на проводе.

2. Укажите ответ, в котором единицы напряжения на участке цепи, плотности тока, удельного сопротивления, ЭДС, проводимости, удельной проводимости расположены в соответствующем порядке:

1.  $V$ ;  $A/m^2$ ;  $Cm/m$ ;  $V$ ;  $Om \cdot m$ ;  $Cm$ .
2.  $V$ ;  $A$ ;  $Om \cdot m$ ;  $V$ ;  $Om$ ;  $Om/m$ .
3.  $V$ ;  $A$ ;  $Om$ ;  $V$ ;  $Om \cdot m$ ;  $Cm$ .
4.  $V$ ;  $A/m^2$ ;  $Om \cdot m$ ;  $V$ ;  $Om^{-1}$ ;  $Om^{-1}m^{-1}$ .
5.  $V$ ;  $A/m^2$ ;  $Om$ ;  $V$ ;  $Om$ ;  $Om/m$ .

3. Чем определяется численное значение магнитного момента контура с током?

1. Произведением силы тока на длину контура.
2. Произведением силы тока на площадь контура.
3. Произведением магнитной индукции поля на площадь контура.
4. Механическим моментом, действующим на контур с током в магнитном поле.
5. Работой, совершаемой при повороте контура с током в магнитном поле.

4. Укажите выражение, определяющее циркуляцию вектора индукции магнитного поля вдоль замкнутого контура  $L$ :

- 1)  $\oint_L B dl \cos\left(\widehat{\vec{B} \vec{dl}}\right)$ ;
- 2)  $\oint_L (\vec{B} \vec{dl})$ ;
- 3)  $\int_S B_n dS$ ;
- 4)  $\int_S B dS_n$ .

5. От каких из перечисленных ниже величин зависит возникающая в замкнутом контуре электродвижущая сила индукции?
- 1) от величины магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную данным контуром.
  - 2) скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную данным контуром.
  - 3) сопротивления контура.
  - 4) величины индукции внешнего магнитного поля.
  - 5) скорости изменения индукции внешнего магнитного поля.

#### IV. Специальная теория относительности

1. По какой формуле определяется скорость света в данной среде?

$$1) v = \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}}; \quad 2) v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}; \quad 3) v = \frac{2\pi R}{T};$$

$$4) v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}; \quad 5) v = \sqrt{k/\rho}.$$

2. Какие из приведенных формул входят в преобразования Лоренца?

$$1) u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}; \quad 2) x = \frac{x' - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad 3) t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

$$4) l' = l\sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad 5) v' = v \frac{c + v}{c - v}.$$

3. Какой из перечисленных фактов постулируется принципами относительности Эйнштейна?

1. Скорость света в вакууме постоянна.
2. Скорость любого движения в данной среде меньше скорости света в этой среде.
3. Законы механики инвариантны в инерциальных системах.
4. Законы механики инвариантны в любых системах.
5. Все физические величины относительны.

4. Какой вид приобретает формула  $t' = \frac{t + xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  для нерелятивистских движений?

$$1) t' = t; \quad 2) t' = t - x/v; \quad 3) t' = t + x/v;$$

$$4) l' = l\sqrt{1 - \beta^2}; \quad 5) l' = \sqrt{l}.$$

6. Какой вид приобретает формула  $l' = l\sqrt{1-v^2/c^2}$  для нерелятивистских движений?
- 1)  $l' = l + vt$ ;                      2)  $l' = l$ ;                                      3)  $l' = l - vt$ ;  
 4)  $l' = l\sqrt{1-\beta^2}$ ;                      5)  $l' = \sqrt{l}$ .
7. Межзвездный корабль движется к звезде, находящейся на расстоянии 4,3 световых года и возвращается назад со скоростью 1000 км/ч. На сколько суток отстанут от земных часов часы на корабле? Ответ, округлив до целых, ввести в ПЭВМ.
5. Какое время пройдет на Земле, если на космическом корабле, движущемся со скоростью 0,99 с относительно Земли, пройдет 10 лет?
- 1) 20 лет;    2) 99 лет;    3) 10,99 года;    4) 71 год;    5) 9,9 года.
6. Электроны, вылетающие из циклотрона, обладают кинетической энергией 0,67 МэВ. Сколько процентов от скорости света составляет скорость электронов?
- 1) 50;                      2) 96;                      3) 90;                      4) 99;                      5) 47.
7. Какие из приведенных формул выражают релятивистский закон сложения скоростей?
- 1)  $v' = v \frac{c+v}{c-v}$ ;                      2)  $v = \frac{v' + V}{1 + vV/c^2}$ ;  
 3)  $v = v' + V$ ;                      4)  $v' = v \frac{1+V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ .

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### П.1. Основные элементы теории поля

#### П.1.1. Формулы векторного анализа

**Первые производные:**

1.  $\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}.$
2.  $\text{grad } f \equiv \vec{\nabla} f = \vec{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial f}{\partial z}.$
3.  $(\vec{A} \cdot \text{grad})f \equiv (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})f = A_x \frac{\partial f}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial z}.$
4.  $\text{div } \vec{A} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$
5.  $\text{rot } \vec{A} = [\vec{\nabla} \vec{A}] = \vec{e}_1 \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_2 \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_3 \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$

**Инвариантные определения дивергенции и ротора:**

6.  $\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint A_n dS.$
7.  $\text{rot } \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint A_t dl.$

**Производные на поверхности:**

8.  $\text{Div } \vec{A} = A_{n_2} - A_{n_1}.$
9.  $\text{Rot } \vec{A} = [\vec{n}(\vec{A}_2 - \vec{A}_1)].$

**Производные произведения функций:**

10.  $\text{grad}(f g) = \vec{\nabla}(f g) = g \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} g = g \text{grad } f + f \text{grad } g.$
11.  $\text{div}(f \vec{A}) = (\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A})) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f) = f \text{div } \vec{A} + \vec{A} \text{grad } f.$
12.  $\text{rot}(f \vec{A}) = [\vec{\nabla}(f \vec{A})] = f[\vec{\nabla} \vec{A}] + [(\vec{\nabla} f) \vec{A}] = f \text{rot } \vec{A} - [\vec{A} \cdot \text{grad } f].$
13.  $\text{div}[\vec{A} \vec{B}] = \vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \vec{B}] = \vec{B} \cdot [\vec{\nabla} \vec{A}] - \vec{A} \cdot [\vec{\nabla} \vec{B}] = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}.$
14.  $\text{rot}[\vec{A} \vec{B}] = [\vec{\nabla}[\vec{A} \vec{B}]] = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = (\vec{B} \text{grad}) \vec{A} - (\vec{A} \text{grad}) \vec{B} + \vec{A} \text{div } \vec{B} - \vec{B} \text{div } \vec{A}.$

**Вторые производные:**

15.  $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$

16.  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f \equiv 0.$

17.  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0.$

18.  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}.$

19.  $\Delta \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}.$

**Двойное векторное произведение:**

20.  $[\vec{A}[\vec{B}\vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}).$

В приведенных выше формулах  $f, g, \vec{A}, \vec{B}$  являются функциями координат:  $f = f(x, y, z), \vec{A}(x, y, z)$  и т. д.

**П.1.2. Основные ортогональные системы ( $u_1, u_2, u_3$ )**

Система	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
Декартовская	$x$	$y$	$z$	1	1	1
Цилиндрическая	$r$	$\theta$	$z$	1	$r$	1
Сферическая	$r$	$\theta$	$\varphi$	1	$r$	$r \sin \theta$

$$d\vec{s} \equiv h_1 du_1 \hat{u}_1 + h_2 du_2 \hat{u}_2 + h_3 du_3 \hat{u}_3,$$

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2,$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3,$$

$$\nabla \psi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \hat{u}_3,$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right],$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \times \left\{ h_1 \hat{u}_1 \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \right] + h_2 \hat{u}_2 \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 A_3) \right] + \right. \\ \left. + h_3 \hat{u}_3 \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_1) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \right].$$

### Цилиндрическая система

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2,$$

$$dV = r dr d\theta dz.$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z},$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) + \hat{\theta} \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \hat{z} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right),$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

### Сферическая система

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \hat{\varphi},$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \hat{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \hat{\theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] + \frac{1}{r} \hat{\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right],$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

### Условия на границе раздела двух сред

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} = \sigma, \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0, \quad (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n} = 0, \quad (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n} = -\vec{J}_\sigma.$$

### Связь между величинами $\beta$ , $cp$ , $T$ , $E$ , $\gamma$ и их производными

	$\beta$	$cp$	$T$	$E$	$\gamma$
$\beta$	$\beta$	$[(E_0/cp)^2 + 1]^{1/2} =$ $= cp/E$	$\sqrt{1 - \left(1 + \frac{T}{E_0}\right)^{-2}}$	$\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$ $= cp/E$	$\sqrt{1 - \gamma^{-2}}$
$cp$	$E_0/\sqrt{\beta^{-2} - 1} =$ $= E\beta$	$cp$	$[T(2E_0 + T)]^{1/2} =$ $= T \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{1/2}$	$\sqrt{E^2 - E_0^2} =$ $= E\beta$	$E_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}$

$E_0$	$cp/\beta\gamma = E(1-\beta^2)^{1/2}$	$cp(\gamma^2-1)^{-1/2}$	$T/(\gamma-1)$	$\sqrt{E^2-c^2p^2}$	$E/\gamma$
$T$	$\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right]E_0$	$\sqrt{E_0^2+c^2p^2}-E_0 = cp\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2}$	$T$	$E-E_0$	$E_0(\gamma-1)$
$\gamma$	$(1-\beta^2)^{-1/2}$	$cp/E_0\beta = \left[1-\left(\frac{cp}{E_0}\right)^2\right]^{1/2}$	$1+T/E_0$	$E/E_0$	$\gamma$

### Первые производные

	$d\beta$	$d(cp)$	$d\gamma = dE/E_0 = dT/E_0$
$d\beta$	$d\beta$	$\left[1+(cp/E_0)^2\right]^{3/2} d(cp)/E_0 = \gamma^{-3} d(cp)/E_0$	$\gamma^{-2}(\gamma^2-1)^{-1/2} d\gamma = \beta^{-1}\gamma^{-3} d\gamma$
$d(cp)$	$E_0(1-\beta^2)^{-3/2} d\beta = E_0\gamma^3 d\beta$	$d(cp)$	$E_0\gamma(\gamma^2-1)^{-1/2} d\gamma = E_0\beta^{-1} d\gamma$
$d\gamma = dE/E_0 = dT/E_0$	$\beta(1-\beta^2)^{-3/2} d\beta = \beta\gamma^3 d\beta$	$\left[1+(E_0/cp)^2\right]^{1/2} d(cp)/E_0 = \beta d(cp)/E_0$	$d\gamma$

### Логарифмические первые производные

	$d\beta/\beta$	$dp/p$	$dT/T$	$dE/E = d\gamma/\gamma$
$d\beta/\beta$	$d\beta/\beta$	$\gamma^{-2} dp/p = dp/p - d\gamma/\gamma$	$[\gamma(\gamma+1)]^{-1} dT/T$	$(\gamma^2-1)^{-1} d\gamma/\gamma = (\beta\gamma)^{-2} d\gamma/\gamma$
$dp/p$	$\gamma^2 d\beta/\beta$	$dp/p$	$[\gamma/(\gamma+1)] dT/T$	$\beta^{-2} d\gamma/\gamma$
$dT/T$	$\gamma(\gamma+1) d\beta/\beta$	$(1+\gamma^{-1}) dp/p$	$dT/T$	$\gamma(\gamma-1)^{-1} d\gamma/\gamma$
$dE/E = d\gamma/\gamma$	$(\beta\gamma)^2 d\beta/\beta = (\gamma^2-1) d\beta/\beta$	$\beta^2 dp/p = dp/p - d\beta/\beta$	$(1-\gamma^{-1}) dT/T$	$d\gamma/\gamma$

## П.2. Элементы специальной теории относительности

### П.2.1. Основные свойства пространства и времени в классической физике

1. Существуют инерциальные системы отсчета, относительно которых свободная частица (материальная точка) движется равномерно



и прямолинейно. Состояние покоя является частным случаем такого движения.

2. В любой инерциальной системе отсчета свободное от материи пространство однородно и изотропно, а время однородно.
3. Любые механические явления при одинаковых начальных условиях протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета (принцип относительности).
4. Взаимодействия между материальными телами и сигналы, с помощью которых передается информация, могут распространяться мгновенно (с бесконечной скоростью).
5. Координаты и время в двух инерциальных системах отсчета связаны преобразованием Галилея.

Пусть система  $K'$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $\vec{V} = const$  вдоль оси  $x$  и в момент  $t = 0$  начала координат  $O$  и  $O'$  совпадают, и соответствующие оси параллельны. Тогда координаты  $x', y', z'$  и время  $t'$  в системе  $K'$  связаны с  $x, y, z, t$  преобразованиями Галилея:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (\text{П.2.1})$$

Время в системах  $K$  и  $K'$  одно и то же, то есть имеет абсолютный характер. Из преобразований Галилея следует закон сложения скоростей: скорость материальной точки  $\vec{v}'$  в системе  $K'$  связана со скоростью этой точки  $\vec{v}$  в системе  $K$  соотношениями:

$$v'_x = v_x - V, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z. \quad (\text{П.2.2})$$

### **П.2.2. Основные свойства пространства, времени и движения в специальной теории относительности (СТО)**

1. В СТО сохраняется постулат 1 классической механики о существовании инерциальных систем.
2. Пределы применимости утверждения об однородности и изотропии свободного пространства и однородности времени распространяются на все физические явления (электромагнитные, тепловые, процессы с участием элементарных частиц и др.).
3. Принцип относительности распространяется на все физические явления.
4. Взаимодействия между телами и сигналы, передающие информацию, не могут распространяться с бесконечной скоростью. Существует предельная скорость, совпадающая со скоростью света в вакууме, причем эта скорость одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источника или прием-

ника света. Совокупность постулатов 3 и 4 называется принципом относительности Эйнштейна.

### **Преобразования Лоренца**

Из постулата Эйнштейна 4 следует, что если в момент  $t = t' = 0$  координатные системы  $K$  и  $K'$  совпадали, то испущенный из начала координат свет наблюдатели в  $K$  и  $K'$  увидят в виде фронта сферической световой волны, описываемого уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (\text{П.2.3})$$

и уравнением

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (\text{П.2.4})$$

Допущение о сферической форме волны в обеих системах кажется противоречивым, но это противоречие устраняется, если принять, что события, одновременные в одной инерциальной системе, необязательно одновременны в другой. Время не является абсолютной величиной, независящей от пространственных переменных и относительного движения со скоростью  $\vec{V}$ . Приняв это, с необходимостью приходим к преобразованиям Лоренца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (\text{П.2.5})$$

Если скорость движения инерциальной системы  $K'$  относительно  $K$  имеет произвольное направление  $\vec{V}$ , то очевидно, что предыдущие соотношения (П.2.3) относятся к составляющим радиус-вектора  $\vec{r}$ , перпендикулярным и параллельным  $\vec{V}$ :

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp}, \quad \vec{r}'_{\parallel} = \frac{\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \vec{V}\vec{r}_{\parallel}/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (\text{П.2.6})$$

### **П.2.3. Релятивистское преобразование скорости**

Пусть в момент  $t$  в системе  $K$  в точке  $(x, y, z)$  находится тело малых размеров, положение его определяется радиус-вектором  $\vec{r}$ . В системе  $K'$  то же тело характеризуется радиус-вектором  $\vec{r}'(t') = (x'(t'), y'(t'), z'(t'))$ . По определению, декартовы компоненты скорости тела в системе  $K$  равны:

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt, \quad (\text{П.2.7})$$

а в системе  $K'$ :

$$v'_x = dx'/dt', \quad v'_y = dy'/dt', \quad v'_z = dz'/dt'. \quad (\text{П.2.8})$$

Продифференцируем (П.2.5) и поделим первые три соотношения на  $dt'$ . Получим релятивистский закон сложения скоростей:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}. \quad (\text{П.2.9})$$

В пределе  $V/c \ll 1$  формулы (П.2.7) переходят в (П.2.8) по закону сложения скоростей в классической механике.

Из преобразований (П.2.5) следует сокращение размеров тела (стержня) в продольном направлении:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (\text{П.2.10})$$

и замедление времени в движущейся системе. Если одни часы покоятся в системе  $K$ , а другие в  $K'$ , то согласно (П.2.5), пока в системе  $K'$  пройдет промежуток времени  $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$ , в системе  $K$  пройдет значительно бóльший промежуток времени:

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (\text{П.2.11})$$

Для дифференциалов получим

$$d\tau = dt \sqrt{1 - V^2/c^2}, \quad (\text{П.2.12})$$

то есть в движущейся системе время течет медленнее. Время, отсчитываемое по часам, неподвижным относительно некоторого объекта, называется собственным временем этого объекта. Собственное время можно определить и для неравномерно движущегося объекта, сохраняя для  $d\tau$  определение (П.2.12), если под  $V$  понимать скорость инерциальной системы, мгновенно сопутствующей данному объекту и которая, в связи с этим, совпадает со скоростью самого объекта.

#### **П.2.4. Четырехмерная формулировка специальной теории относительности. Релятивистская электродинамика**

Координатами в четырехмерном пространстве является совокупность величин  $\{x_\mu\}$ , где  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$  — пространственные координаты и четвертая координата связаны со временем:  $x_4 = ict$ . Преобразование Лоренца записывается с помощью матрицы Лоренца  $L_{\mu\nu}$ :

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{П.2.13})$$

и переводит компоненты  $x_\mu$ , заданные в системе  $K$ , в компоненты  $x'_\mu$  системы  $K'$ .

Предполагается, что по повторяющимся индексам  $\nu$  идет суммирование ( $\nu = 1,2,3,4$ ). Матрица преобразования Лоренца имеет вид

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (\text{П.2.14})$$

где  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ,  $\beta = \frac{V}{c}$  и  $V$  – скорость движения инерциальной системы  $K'$

относительно  $K$  вдоль оси  $x$ , измеренная в системе  $K$ . Обратные преобразования Лоренца сводятся к замене  $\beta \rightarrow -\beta$ . Совокупность четырех величин  $\{A_\mu\}$ , которые преобразуются как координаты, называется компонентами 4-мерного вектора. Ниже приведены примеры 4-мерных векторов:

*4-мерный вектор скорости частицы*

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \left( \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right), \quad (\text{П.2.15})$$

где  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  – скорость частицы,  $d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$  – собственное время частицы, являющееся инвариантом преобразования Лоренца.

*4-мерный вектор энергии-импульса, или 4-мерный импульс*

$$p_\mu = (\vec{p}, i\varepsilon/c), \quad (\text{П.2.16})$$

где

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (\text{П.2.17})$$

– импульс релятивистской частицы;

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4} \quad (\text{П.2.18})$$

– полная энергия, связанная с кинетической энергией  $T$  и энергией покоя  $\varepsilon_0 = mc^2$  соотношением

$$T = \varepsilon - mc^2. \quad (\text{П.2.19})$$

4-мерный волновой вектор

$$k_\mu = (\vec{k}, i\omega/c), \quad (\text{П.2.20})$$

где  $\vec{k}$  – волновой вектор и  $\omega$  – частота в выражении для плоской электромагнитной волны.

4-мерный вектор плотности тока

$$j_\mu = (\vec{j}, ic\rho), \quad (\text{П.2.21})$$

где  $\vec{j}$  – вектор плотности тока,  $\rho$  – плотность зарядов.

4-мерный потенциал

$$A_\mu = (\vec{A}, i\varphi), \quad (\text{П.2.22})$$

где  $\vec{A}$  – векторный, а  $\varphi$  – скалярный потенциалы электромагнитного поля.

4-мерный оператор дифференцирования:

$$\partial/\partial x_\mu = \left( \vec{\nabla}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right). \quad (\text{П.2.23})$$

Если  $A$  и  $B$  – два 4-мерные вектора, то

$$(AB) = A_\mu B_\mu = (A'_\mu B'_\mu) = (A'B') = inv. \quad (\text{П.2.24})$$

Скалярное произведение двух 4-мерных векторов остается инвариантом при преобразовании Лоренца. В частности, длина 4-мерного вектора инвариантна относительно преобразований Лоренца. Инвариантной является величина

$$S_{12}^2 = \left[ (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2 \right], \quad (\text{П.2.25})$$

называемая интервалом между событиями с координатами  $(\vec{r}_1, t_1)$  и  $(\vec{r}_2, t_2)$ . Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется собственным временем данного объекта. Интервал собственного времени  $d\tau$  выражается через промежуток времени  $dt$  системы  $K$  формулой

$$d\tau = dt \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (\text{П.2.26})$$

Если какой-либо стержень в своей системе покоя имеет длину  $l_0$ , то при движении со скоростью  $V$  вдоль своей оси он имеет в системе  $K$  длину

$$l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (\text{П.2.27})$$

Всякий 4-мерный вектор  $A_\mu$  преобразуется по формуле

$$A'_\mu = L_{\mu\nu} A_\nu,$$

где  $L_{\mu\nu}$  – матрица Лоренца.

Компоненты обычной скорости частицы преобразуются по формулам:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}. \quad (\text{П.2.28})$$

Если скорость частицы составляет с осью  $x$  углы  $\theta$  и  $\theta'$  в системах  $K$  и  $K'$ , соответственно, то

$$\text{tg } \theta' = \frac{v \sin \theta \sqrt{1 - V^2/c^2}}{v \cos \theta - V}, \quad (\text{П.2.29})$$

где

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (\text{П.2.30})$$

Четырехмерным ускорением называется 4-мерный вектор

$$w_\mu = \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2}. \quad (\text{П.2.31})$$

Так как волновой 4-мерный вектор  $k_\mu = (\vec{k}, i\omega/c)$ , то фаза  $\varphi = k_\mu x_\mu = inv$ :

$$\vec{k}' \cdot \vec{x}' - \omega' t' = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t, \quad (\text{П.2.32})$$

откуда, с учетом преобразований

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right), \quad (\text{П.2.33})$$

следует:

$$k'_x = \gamma\left[k_x - \left(\frac{V}{c^2}\right)\omega\right], \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z, \quad \omega' = \frac{\omega - V k_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (\text{П.2.34})$$

Полученные соотношения с учетом того, что для световых волн  $|\vec{k}| = \omega/c$ ,  $|\vec{k}'| = \omega'/c$ , можно записать в виде преобразования частоты

$$\omega' = \frac{\omega(1 - V/c \cos \theta)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (\text{П.2.35})$$

(доплеровское смещение с релятивистской поправкой) и

$$\text{tg } \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - V^2/c^2}}{\cos \theta - V/c}, \quad (\text{П.2.36})$$

где  $\theta$  и  $\theta'$  – углы, которые образуют векторы  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$  со скоростью  $\vec{V}$ .  
При  $\theta = \pi/2$  получим

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (\text{П.2.37})$$

(поперечное доплеровское смещение).

### Тензор электромагнитного поля

4-мерный тензор второго ранга есть величина  $A_{\mu\nu}$ , которая при преобразованиях 4-мерных координат

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{П.2.38a})$$

преобразуется следующим образом:

$$A'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} A_{\alpha\beta}. \quad (\text{П.2.38б})$$

Примером 4-мерного тензора является антисимметричный тензор 2-го ранга электромагнитного поля в вакууме, который можно представить через компоненты полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{П.2.39})$$

где

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad (\text{П.2.40})$$

и первый индекс ( $\mu$ ) нумерует строку, а второй ( $\nu$ ) – столбец.  
Уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= 4\pi \rho, \\ \operatorname{rot} B - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \end{aligned} \quad (\text{П.2.41})$$

в ковариантной форме имеют вид

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu. \quad (\text{П.2.42})$$

Уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{П.2.43})$$

сводятся к четырехмерному уравнению

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (\text{П.2.44})$$

где  $\mu, \nu, \alpha$  – произвольная тройка чисел 1, 2, 3, 4.

При переходе от системы  $K$  к системе  $K'$  компоненты поля преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta H_z), & E'_z &= \gamma(E_z + \beta H_y), \\ H'_x &= H_x, & H'_y &= \gamma(H_y + \beta E_z), & H'_z &= \gamma(H_z - \beta E_y). \end{aligned} \quad (\text{П.2.45})$$

При этом величины  $\vec{H}^2 - \vec{E}^2$  и  $\vec{E} \cdot \vec{H}$  являются инвариантами преобразования Лоренца:

$$\vec{H}^2 - \vec{E}^2 = \text{inv}, \quad \vec{E} \cdot \vec{H} = \text{inv}.$$

При общем преобразовании Лоренца от системы  $K$  к системе  $K'$ , движущейся со скоростью  $\vec{V}$  относительно  $K$ , поля преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma\left(\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c}\vec{V} \times \vec{B}\right), & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\vec{B}_{\perp} + \frac{1}{c}\vec{V} \times \vec{E}\right). \end{aligned} \quad (\text{П.2.46})$$

Индексы  $\parallel$  и  $\perp$  указывают на параллельность и перпендикулярность полей к скорости  $\vec{V}$ .

Плотность силы Лоренца

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}, \quad (\text{П.2.47})$$

можно представить в виде 4-мерного вектора

$$f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} j_\nu, \quad (\text{П.2.48})$$

где

$$f_0 = \vec{E} \cdot \vec{J}, \quad (\text{П.2.49})$$

– работа, совершаемая полем над зарядами в единичном объеме в единицу времени. Пространственная же часть  $f_k$  определяет скорость изменения количества движения в единицы объема.

Используя неоднородные уравнения Максвелла, можно записать  $f_\mu$  еще в таком виде:

$$f_\mu = \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha}, \quad (\text{П.2.50})$$



а с помощью электромагнитного тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right), \quad (\text{П.2.51})$$

уравнения (П.2.51) примут форму

$$f_{\mu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}. \quad (\text{П.2.52})$$

Компоненты тензора  $T_{\mu\nu}$  можно связать с полями  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$ . Тензор  $T_{\mu\nu}$  имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -icq_1 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -icq_2 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -icq_3 \\ -icq_1 & -icq_2 & -icq_3 & \omega \end{pmatrix}, \quad (\text{П.2.53})$$

где  $T_{ik}$  – симметричный тензор максвелловских натяжений;

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[ E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2) \right] \quad (\text{П.2.54})$$

и

$$\vec{q} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \quad (\text{П.2.55})$$

– плотность импульса электромагнитного поля, связанная с вектором Пойнтинга  $\vec{S}$ , а

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \quad (\text{П.2.56})$$

– плотность энергии электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла в среде можно записать в ковариантном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} &= \frac{4\pi}{c} j_{\mu}, \\ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{П.2.57})$$

где

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iD_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iD_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iD_3 \\ iD_1 & iD_2 & iD_3 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\text{П.2.58})$$

тензор  $F_{\mu\nu}$  – тот же, что и для электродинамики в вакууме.

### П.3. Симметрия уравнений электростатики и магнитостатики

#### Электростатика

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi \rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0, \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi &= -4\pi \rho, \\ \varphi(\vec{r}) &= \int \rho(\vec{r}') \frac{dV'}{R}, \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \int \rho(\vec{r}') \frac{dV'}{R^3}, \\ \varphi_{dip} &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}, \\ \vec{E}_{dip} &= \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p}) - r^2 \vec{p}}{r^5}, \\ \vec{p} &= \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV', \\ W &= \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV, \\ W &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} V_i V_j, \\ \omega(\vec{r}) &= \frac{1}{8\pi} |E(\vec{r})|^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \int \vec{j}(\vec{r}') \frac{dV'}{R}, \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \int \vec{j}(\vec{r}') \frac{dV'}{R^3}, \\ \vec{A}_{dip} &= \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}, \\ \vec{B}_{dip} &= \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{m}) - r^2 \vec{m}}{r^5}, \\ \vec{m} &= \frac{1}{2c} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV', \\ W &= \frac{1}{2} \int \vec{j} \cdot \vec{A} dV, \\ W &= \sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j, \\ \omega(\vec{r}) &= \frac{1}{8\pi} |B(\vec{r})|^2.\end{aligned}$$

### П.4. Экспериментальная основа уравнений Максвелла

Дифференциальная форма закона Гаусса в электростатике:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho. \quad (\text{П.4.1})$$

Для электростатики имеет место

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0. \quad (\text{П.4.2})$$

Экспериментально наблюдаемое отсутствие магнитных монополей означает, что магнитное поле удовлетворяет уравнению

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (\text{П.4.3})$$

Для магнитостатики выполняется закон Ампера:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (\text{П.4.4})$$

Уравнения (П.4.1) и (П.4.3) справедливы всегда, однако уравнение (П.4.2) должно быть модифицировано в присутствии изменяющегося

во времени магнитного поля (с учетом закона электромагнитной индукции Фарадея) так же, как и дифференциальная форма закона Ампера (П.4.4) должна быть изменена, чтобы удовлетворять уравнению непрерывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (\text{П.4.5})$$

Достигается это заменой уравнения (П.4.2) на

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{П.4.6})$$

и уравнения (П.4.4) на

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \left( \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (\text{П.4.7})$$

где  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  представляет предложенный Максвеллом ток смещения. Таким образом, уравнения, описывающие динамику электромагнитного поля, опираются на 4 экспериментально установленных закона:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad (\text{П.4.8})$$

– закон Гаусса;

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (\text{П.4.9})$$

– модифицированный закон Ампера;

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{П.4.10})$$

– отсутствие монополей;

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{П.4.11})$$

– закон Фарадея.

### П.5. Таблица перевода выражений и формул из гауссовой системы в систему СИ и обратно

Наименование	Гауссова система	Система СИ
Скорость света	$c$	$1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$
Напряженность электрического поля, потенциал	$\vec{E}, \varphi$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} (\vec{E}, \varphi)$
Электрическая индукция	$\vec{D}$	$\sqrt{4\pi / \epsilon_0} \vec{D}$
Заряд, плотность заряда, ток, плотность тока, поляризация	$q, \rho, I, \vec{j}, \vec{P}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} (q, \rho, I, \vec{j}, \vec{P})$

Магнитная индукция, магнитный поток	$\vec{B}, \Phi$	$\sqrt{4\pi / \mu_0} (\vec{B}, \Phi)$
Напряженность магнитного поля	$\vec{H}$	$\sqrt{4\pi\mu_0} \vec{H}$
Магнитный момент, намагниченность	$\vec{m}, \vec{M}$	$\sqrt{\mu_0 / 4\pi} (\vec{m}, \vec{M})$
Электрическая проницаемость, магнитная проницаемость (относительные)	$\epsilon, \mu$	$\epsilon, \mu$
Электрическая поляризуемость, восприимчивость, магнитная восприимчивость	$\alpha, \chi, k$	$\frac{1}{4\pi} (\alpha, \chi, k)$
Удельная проводимость	$\sigma$	$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}$
Сопротивление	$R$	$4\pi\epsilon_0 R$
Емкость	$C$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} C$
Индуктивность	$L$	$\frac{4\pi}{\mu_0} L$

**П.6. Таблица перевода численных значений физических величин из системы СИ в гауссову систему**

Наименование	Обозначение	Система СИ	Гауссова система
Длина	$l$	1 м (метр)	$10^2$ см
Масса	$m$	1 кг (килограмм)	$10^3$ г
Время	$t$	с (секунда)	1 с
Сила	$\vec{F}$	1 Н (ньютон)	$10^5$ дин
Работа, энергия	$A, \epsilon$	1 Дж (джоуль)	$10^7$ эрг
Мощность	$W$	1 Вт (ватт)	$10^7$ эрг/с
Давление	$p$	1 Па (паскаль)	$10$ дин/см <sup>2</sup>

Сила электрического тока	$I$	1 А (ампер)	$3 \cdot 10^9$
Электрический заряд	$q$	1 Кл (кулон)	$3 \cdot 10^9$
Напряженность электрического поля	$\vec{E}$	1 В/м (вольт на метр)	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$
Электрический потенциал	$\varphi$	1 В (вольт)	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$
Поляризация (поляризованность)	$\vec{P}$	1 Кл/м <sup>2</sup> (кулон на квадратный метр)	$3 \cdot 10^5$
Электрическая индукция (электрическое смещение)	$\vec{D}$	1 Кл/м <sup>2</sup> (кулон на квадратный метр)	$12\pi \cdot 10^5$
Электрическая емкость	$C$	1 Ф (фарада)	$9 \cdot 10^{11}$ см
Электрическое сопротивление	$R$	1 Ом (ом)	$(1/9) \cdot 10^{-11}$ с·см <sup>-1</sup>
Удельное электрическое сопротивление	$\rho$	1 Ом·м (ом-метр)	$(1/9) \cdot 10^{-9}$ с
Электрическая проводимость	$\Lambda = 1/R$	1 См (сименс)	$9 \cdot 10^{11}$ см·с <sup>-1</sup>
Удельная электрическая проводимость (удельная проводимость)	$\sigma$	1 См/м (сименс на метр)	$9 \cdot 10^9$ с <sup>-1</sup>
Магнитный поток	$\Phi$	1 Вб (вебер)	$10^8$ Мкс
Магнитная индукция	$\vec{B}$	1 Т (тесла)	$10^4$ Гс
Напряженность магнитного поля	$\vec{H}$	1 А/м (ампер на метр)	$4\pi \cdot 10^{-3}$ Э
Намагниченность	$\vec{M}$	1 А/м (ампер на метр)	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10^4$ Гс
Индуктивность	$L$	1 Г (генри)	$10^9$ см

## П.7. Некоторые физические постоянные

Скорость света в вакууме	$2,997924562 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 2,997924562 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$
Заряд электрона	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЕ}$
Постоянная Планка	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с} = 6,626 \cdot 10^{-27} \text{ эрг}\cdot\text{с}$
Число Авогадро	$6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$1,381 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} = 1,381 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К}$
Газовая постоянная	$8,314 \cdot \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К}) = 8,314 \cdot 10^7 \text{ эрг}/(\text{моль}\cdot\text{К})$
Гравитационная постоянная	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2 = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ дин}\cdot\text{см}^2/\text{г}^2$
Число Фарадея	$9,648 \cdot 10^7 \text{ Кл/кмоль} = 9,648 \cdot 10^3 \text{ СГСМ/моль}$
Масса покоя электрона	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ г} = 0,511 \text{ MeV}/c^2$
Масса покоя протона	$1,6727 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,6727 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 938,27 \text{ MeV}/c^2$
Масса покоя нейтрона	$1,6750 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,6750 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 939,57 \text{ MeV}/c^2$

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

## П.8. Таблицы некоторых постоянных, характеризующих свойства вещества

### П.8.1. Диэлектрические проницаемости

Диэлектрик	$\epsilon$	Диэлектрик	$\epsilon$
Вода	81	Полиэтилен	2,3
Воздух	1,00058	Слюда	7,5
Воск	7,8	Спирт	26
Керосин	2,0	Стекло	6,0
Парафин	2,0	Фарфор	6,0
Плексиглас	3,5	Эбонит	2,7

### П.8.2. Удельные сопротивления проводников и изоляторов

Проводники	Удельное сопротивление (при 20 °С) $\rho$ , нОм·м	Температурный коэффициент $\alpha$ , $кК^{-1}$	Изоляторы	Удельное сопротивление $\rho$ , нОм·м
Алюминий	25	4,5	Бумага	$10^{10}$
Вольфрам	50	4,8	Парафин	$10^{15}$
Железо	90	6,5	Слюда	$10^{13}$
Золото	20	4,0	Фарфор	$10^{13}$
Медь	16	4,3	Шеллак	$10^{14}$
Свинец	190	4,2	Эбонит	$10^{14}$
Серебро	15	4,1	Янтарь	$10^{17}$

### П.8.3. Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

Парамагнетики	$\mu^{-1}$ , $10^{-6}$	Диамагнетики	$\mu^{-1}$ , $10^{-6}$
Азот	0,013	Водород	-0,063
Воздух	0,38	Бензол	-7,5
Кислород	1,9	Вода	-9,0
Эбонит	14	Медь	-10,3
Алюминий	23	Стекло	-12,6
Вольфрам	176	Каменная соль	-12,6
Платина	360	Кварц	-15,1
Жидкий кислород	3400	Висмут	-176

### П.8.4. Показатели преломления $n$

Газы	$n$	Жидкости	$n$	Твердые тела	$n$
Азот	1,00030	Бензол	1,50	Алмаз	2,42
Воздух	1,00029	Вода	1,33	Кварц плавленный	1,46
Кислород	1,00027	Глицерин	1,47	Стекло (обычное)	1,50
		Сероуглерод	1,63		

*Примечание.* Показатели преломления зависят и от длины волны света, поэтому приведенные здесь значения  $n$  следует рассматривать как условные

### П.8.5. Край К-полосы поглощения

$z$	Элемент	$\lambda_k$ , пм	$z$	Элемент	$\lambda_k$ , пм
23	V	226,8	47	Ag	48,60
26	Fe	174,1	50	Sn	42,39
27	Co	160,4	74	W	17,85
28	Ni	148,6	78	Pt	15,85
29	Cu	138,0	79	Au	15,35
30	Zn	128,4	82	Pb	14,05
42	Mo	61,9	92	U	10,75

## П.9. Шкала электромагнитных волн

Тип излучения	Диапазон		Энергия фотонов, эВ
	длин волн	частот, сек <sup>-1</sup>	
$\gamma$ -излучение	$< 10^{-11} \text{ м} = 0,1 \text{ \AA}$	$> 3 \cdot 10^{19}$	$> 10^5$
Рентгеновское	$10^{-11} \div 10^{-8} \text{ м} = 0,1 \div 100 \text{ \AA}$	$3 \cdot 10^{19} \div 3 \cdot 10^{16}$	$10^5 \div 10^2$
Ультрафиолетовое	$10^{-8} \div 4 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 100 \div 4000 \text{ \AA}$	$3 \cdot 10^{16} \div 0,75 \cdot 10^{14}$	$10^2 \div 3$
Видимое	$4 \cdot 10^{-7} \div 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 4000 \div 7500 \text{ \AA}$	$7,5 \cdot 10^{14} \div 4 \cdot 10^{14}$	$3 \div 1,6$
Инфракрасное	$7,5 \cdot 10^{-7} \div 10^{-3} \text{ м}$	$4 \cdot 10^{14} \div 3 \cdot 10^{11}$	$1,6 \div 10^{-3}$
Микроволновое (СВЧ)	$10^{-3} \div 10^{-1} \text{ м} = 0,1 \div 10 \text{ см}$	$3 \cdot 10^{11} \div 3 \cdot 10^9 =$ $= (3 \cdot 10^5 \div 3 \cdot 10^3) \text{ МГц}$	$10^{-3} \div 10^{-5}$
Обычное радиоволновое	$> 10^{-1} \text{ м} = 10 \text{ см}$	$< 3 \cdot 10^9 \text{ (} 3 \cdot 10^3 \text{ МГц)}$	$< 10^{-5}$



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 томах. Т. 2. – М.: Наука, 1988. – 508 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 томах. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 456 с.
4. Джексон Д. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 703 с.
5. Jackson J.D. Classical Electrodynamics. – Wiley, New York, London, 1999. – 795 p.
6. Ryazanov M.I. Introductory Electrodynamics of Condensed Matter. Fizmatlit, Moscow, 2002. – 320 p.
7. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.
8. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 400 с.
9. Рязанов М.И. Введение в электродинамику конденсированного вещества. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
10. Измайлов С.В. Курс электродинамики. – М.: Учпедгиз, 1962. – 400 с.
11. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. – 320 с.
12. Сивухин. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. – М.: Физматлит, 2002. – 656 с.
13. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высшая школа, 1983. – 463 с.
14. Парселл Э. Берклевский курс физики. Т. 2. Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
15. Галицкий В.М., Ермаченко В.М. Макроскопическая электродинамика. – М.: Высшая школа, 1988. – 159 с.
16. Денисов В.И. Введение в электродинамику материальных сред: учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 168 с.
17. Памятных Е.А., Туров Е.А. Основы электродинамики материальных сред в переменных и пространственно-неоднородных средах. – М.: Физматлит, 2000. – 240 с.
18. Базылев В.А., Жеваго Н.К. Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях. – М.: Наука, 1987. – 272 с.
19. Тернов И.М., Михайлин В.В. Синхротронное излучение. Теория и эксперимент. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 296 с.
20. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по классической электродинамике. – М.: Наука, 1970. – 504 с.

21. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. – М.: Наука, 1977. – 320 с.
22. Wiedemann H. Particle Accelerator Physics. Vol. 1. Basic Principles and Linear Beam Dynamics, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1999. – 457 p.
23. Wiedemann H. Particle Accelerator Physics. Vol. 2. Nonlinear and Higher-Order Beam Dynamics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1999. – 479 p.
24. Rullhusen P., Artru X., Dhez P. Novel Radiation. Sources Using Relativistic Electrons From Infrared to X-rays. – Vol. 4. Singapore: World Scientific, 1998. – 207 p.
25. Lopez Davalos A., Zanette D. Fundamentals of Electromagnetism: Vacuum Electrodynamics, Media and Relativity, Berlin, Springer-Verlag, 1999. – 295 p.
26. Теория излучения релятивистских частиц / под ред. Бордовицына. – М.: Физматлит, 2002. – 576 с.
27. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. – М.: Наука, 1978. – 792 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	3
<b>ГЛАВА 1. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ВАКУУМЕ</b> .....	5
1. Электростатика в вакууме .....	5
1.1. Закон Кулона. Напряженность электрического поля .....	5
1.2. Интегральная и дифференциальная формы теоремы Гаусса .....	7
1.3. Работа электрических сил. Потенциал .....	10
1.4. Уравнения Максвелла в электростатике .....	12
2. Магнитостатика в вакууме .....	13
2.1. Законы Био–Савара и Ампера .....	13
2.2. Векторный потенциал магнитного поля .....	16
2.3. Уравнения Максвелла для магнитостатики .....	18
3. Электростатические и магнитные поля на большом расстоянии от источников .....	19
3.1. Системы зарядов и токов во внешних электрических и магнитных полях .....	23
3.2. Энергия взаимодействия зарядов и токов с внешним полем .....	25
4. Переменное электромагнитное поле .....	26
4.1. Закон сохранения электрического заряда .....	26
4.2. Закон электромагнитной индукции .....	27
4.3. Уравнения Максвелла для переменного электромагнитного поля .....	30
4.4. Решение уравнений Максвелла .....	32
4.5. Запаздывающие потенциалы .....	35
4.6. Энергия электромагнитного поля. Вектор Умова–Пойнтинга .....	36
5. Распространение электромагнитных волн в вакууме и в средах .....	39
5.1. Волновые уравнения .....	39
5.2. Плоские волны .....	41
5.3. Поляризация плоской волны .....	45
6. Излучение нерелятивистской системы заряженных частиц .....	47
6.1. Электрическое дипольное излучение .....	47
<b>ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ</b> .....	52
7. Электростатика в диэлектриках .....	52
7.1. Вектор поляризации .....	52

7.2. Поляризация неполярных молекул .....	52
7.3. Ориентационная поляризация .....	53
7.4. Потенциал поля в диэлектрике .....	55
7.5. Уравнения Максвелла в диэлектрике .....	57
8. Постоянный электрический ток .....	58
8.1. Потенциал и поле при наличии проводников .....	58
8.2. Электрический ток в металлах. Законы Ома и Джоуля–Ленца в интегральной форме. Напряжение .....	60
8.3. Плотность тока. Законы Ома и Джоуля–Ленца в дифференциальной форме .....	60
9. Магнитостатическое поле в магнетиках .....	63
9.1. Теорема Лармора. Механизм намагничивания диамагнетиков .....	63
9.2. Природа парамагнетизма .....	65
9.3. Ферромагнетизм .....	67
9.4. Уравнения Максвелла в магнетиках .....	68
9.5. Классификация магнетиков .....	71
10. Макроскопическая электродинамика [Электродинамика поляризующихся и намагничивающихся сред] ....	72
10.1. Микроскопический и макроскопический подходы к описанию электромагнитных явлений в средах .....	72
10.2. Усреднение уравнений Максвелла .....	73
11. Уравнения электромагнитного поля в средах .....	76
12. Уравнения Максвелла в средах, уравнения связи .....	78
13. Закон сохранения энергии в макроскопической электродинамике .....	82
14. Быстропеременные поля в веществе .....	83
14.1. Частотная дисперсия диэлектрической проницаемости .....	83
15. Поведение диэлектрической проницаемости при малых и больших частотах .....	87
15.1. Нахождение предельного вида $\varepsilon(\omega)$ . Плазменная частота .....	88
16. Комплексная диэлектрическая проницаемость разреженного нейтрального газа .....	90
17. Физический смысл мнимой части $\varepsilon$ .....	95
18. Дисперсионные соотношения Крамерса–Кронига .....	98
19. О некоторых свойствах диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ .....	105
20. Электромагнитные волны в изотропных средах .....	110
21. Электромагнитное поле быстрой заряженной частицы в среде. Излучение Вавилова–Черенкова .....	115
22. Потенциалы Лиенара–Вихерта и поле точечного заряда .....	123
23. Полная мощность, излучаемая ускоренно движущимся зарядом. Формула Лармора и ее релятивистское обобщение .....	126

24. Применение релятивистской формулы для мощности излучения к расчету потерь энергии в ускорителях заряженных частиц .....	132
25. Угловое распределение излучения ускоренно движущегося заряда .....	134
26. Излучение заряда при произвольном ультрарелятивистском движении .....	141
27. Спектральное и угловое распределения энергии, излучаемой ускоренно движущимися зарядами .....	144
28. Спектральное и угловое распределение излучения для непрерывного распределения движущихся зарядов и моментов .....	147
29. Спектр излучения релятивистской заряженной частицы при мгновенном движении по окружности .....	150
29.1. Спектральное распределение синхротронного излучения .....	154
29.2. Угловое распределение синхротронного излучения .....	155
30. Теория синхротронного излучения .....	157
30.1. Спектрально-угловое распределение мощности. Формула Шотта .....	157
30.2. Поляризационные свойства СИ .....	161
30.3. Особенности углового распределения мощности СИ .....	163
30.4. Спектральное распределение СИ .....	168
30.5. Когерентность СИ .....	169
30.5.1. Когерентность СИ при равномерном распределении электронов по окружности .....	169
30.5.2. Когерентность СИ в случае движения отдельных сгустков электронов .....	171
30.5.3. Когерентная длина излучения .....	174
31. Характеристики излучения в виглерах и ондуляторах .....	176
32. Краткий обзор источников излучения, использующих релятивистские электроны .....	185
32.1. Излучение при каналировании .....	187
32.2. Когерентное тормозное излучение .....	191
32.3. Переходное излучение .....	191
<b>ЗАДАНИЯ</b> .....	194
<b>ТЕСТЫ</b> .....	214
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b> .....	221
П.1. Основные элементы теории поля .....	221
П.1.1. Формулы векторного анализа .....	221
П.1.2. Основные ортогональные системы $(u_1, u_2, u_3)$ .....	222

П.2. Элементы специальной теории относительности .....	224
П.2.1. Основные свойства пространства и времени в классической физике .....	224
П.2.2. Основные свойства пространства, времени и движения в специальной теории относительности (СТО) .....	225
П.2.3. Релятивистское преобразование скорости .....	226
П.2.4. Четырехмерная формулировка специальной теории относительности. Релятивистская электродинамика .....	227
П.3. Симметрия уравнений электростатики и магнитостатики .....	234
П.4. Экспериментальная основа уравнений Максвелла .....	234
П.5. Таблица перевода выражений и формул из гауссовой системы в систему СИ и обратно .....	235
П.6. Таблица перевода численных значений физических величин из системы СИ в гауссову систему .....	236
П.7. Некоторые физические постоянные .....	238
П.8. Таблицы некоторых постоянных, характеризующих свойства вещества .....	238
П.8.1. Диэлектрические проницаемости .....	238
П.8.2. Удельные сопротивления проводников и изоляторов .....	239
П.8.3. Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков .....	239
П.8.4. Показатели преломления $n$ .....	239
П.8.5. Край К-полосы поглощения .....	239
П.9. Шкала электромагнитных волн .....	240
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>241</b>

Учебное издание

СЕРДЮЦКИЙ Виталий Андреевич

## МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Учебное пособие

Научный редактор  
доктор физико-математических наук,  
профессор

*А.П. Потылицын*

Редактор

*М.В. Пересторонина*

Верстка

*К.С. Чечельницкая*

Дизайн обложки

*О.Ю. Аршинова  
О.А. Дмитриев*

Подписано к печати 14.12.2008. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать XEROX. Усл. печ. л. 14,37. Уч.-изд. л. 13,0.

Заказ 827. Тираж 200 экз.



Томский политехнический университет  
Система менеджмента качества  
Томского политехнического университета сертифицирована  
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.