

Ю.И. Тюрин, И.П. Чернов, Ю.Ю. Крючков

Ф И З И К А

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

*Допущено Научно-методическим Советом по физике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по техническим направлениям подготовки
и специальностям*

2-е издание

Издательство
Томского политехнического университета
2008

УДК 537.8(075.8)
ББК 313я73
Т98

Тюрин Ю.И.
Т98 Физика. Электродинамика: учебник для технических университетов / Ю.И. Тюрин, И.П. Чернов, Ю.Ю. Крючков. – 2-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 292 с.

ISBN 5-98298-265-2

Учебник, представляющий собой курс лекций по физике для студентов технических университетов, читаемый авторами в течение многих лет студентам Томского политехнического университета, посвящен физике электромагнитных взаимодействий. Основное внимание уделено раскрытию физического смысла фундаментальных законов теории электромагнитных явлений и выработке у студентов практических навыков их использования при решении профессиональных задач. Учебник содержит многочисленные примеры, упражнения и задачи.

Учебник разработан в рамках реализации Инновационной образовательной программы ТПУ по направлению «Технологии водородной энергетики, энергоэкономия и возобновляемые источники энергии» и предназначен для преподавателей, студентов, бакалавров, магистров технических университетов.

УДК 537.8(075.8)
ББК 313я73

Рецензенты

Кафедра общей и экспериментальной физики
Томского государственного университета
(зав. кафедрой - доктор физ.-мат. наук, профессор В.П. Демкин)

Кафедра физики
Московского государственного индустриального университета
(зав. кафедрой – доктор физ.-мат. наук, профессор Н.П. Калашников)

ISBN 5-98298-265-2

© Тюрин Ю.И., Чернов И.П., Крючков Ю.Ю., 2007
© Томский политехнический университет, 2008,
аппарат издания
© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

Существует настоятельная потребность в курсе лекций по физике для технических университетов, который бы сочетал разумную глубину и академичность изложения наряду с широтой и практической направленностью включенного в него материала. Выпускник технического университета обязан профессионально владеть одной из основных фундаментальных дисциплин – физикой и твердо усвоить принципы и подходы естественных наук, обеспечившие ускоренное продвижение человечества по пути прогресса на протяжении многих веков.

Успешное применение фундаментальных физических понятий, воспитание уверенности в незыблемости физических законов, в пределах выполнения условий их применимости, понимание принципа преемственности и естественности развития физической науки происходят в процессе творческого развития у студентов практических навыков. Формирование и закрепление практических навыков возможно при пояснении на разнообразных примерах наиболее сложных физических понятий, самостоятельном разборе упражнений и решении задач, ясных и понятных по своей постановке, актуальных по значению и вместе с тем имеющих далеко не очевидные решения. Физика является профессиональным рабочим инструментом в руках инженера. Использование физики в повседневной практической деятельности не только не должно пугать выпускника технического университета, но напротив, должно доставлять ему эстетическую и профессиональную радость творчества и сознание собственной значимости и состоятельности. Достижение этой цели предполагает продолжительный, нелегкий и вдумчивый путь познания. На этом пути студент не только учится ориентироваться в современном мире, но и вырабатывает навык получения новых научных результатов, решения практических проблем и формирует уверенную позицию по отношению к псевдонаучным откровениям.

Решение поставленных проблем в курсе лекций для технических университетов возможно, на наш взгляд, при использовании в нем лучших достижений и находок замечательных учебников физики российских, советских и зарубежных ученых и педагогов, преломленных через призму многолетнего личного опыта преподавания физики и активной творческой научно-практической работы в техническом университете. При написании данного курса физики мы старались использовать интерес-

ные научно-методические результаты известных авторов: Д.В. Сивухина, А.Н. Матвеева, И.В. Савельева, Р. Фейнмана, Дж. Орира, К.А. Путилова, Л.Д. Ландау, Я.Б. Зельдовича и других. Нашей целью была не «патентная чистота» и новизна курса, а его повседневная практическая польза и удобство для преподавателя и студента, возможность выбора для преподавателя и студента в рамках одного учебника различных траекторий обучения в техническом университете. Нам хотелось совместить в учебнике разумную фундаментальность подходов с выработкой практических навыков использования физической теории для решения научно-исследовательских, инженерно-технических и мировоззренческих задач современного мира. По мере возможности мы старались показать ясность и даже очевидность многих физических результатов, но стремились не загромождать пути движения к физически верному результату безукоризненностью терминологии и отточенностью методологии. Это на наш взгляд отличает живую научную дисциплину от начетничества, живую науку – физику от канонизированного подхода. Вначале студент должен понять, о чем идет речь, а затем придет время и строгого доказательного изложения.

Авторы признательны В.М. Толмачеву, взявшему на себя огромный труд по научно-методическому редактированию рукописи, и с пониманием и благодарностью воспримут замечания и предложения, способствующие улучшению курса.

1. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

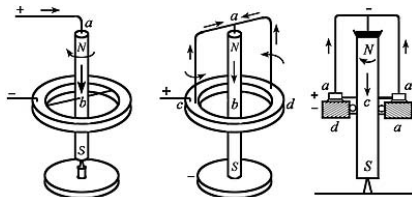
Открытие электромагнитной индукции. Открытие явления электромагнитной индукции – важнейшее открытие в электродинамике. Еще в 1824 г. Араго, пытаясь с помощью магнитной стрелки определить присутствие железа в красной меди, обнаружил, что немагнитные вещества тормозят колебательное движение подвешенной магнитной стрелки. Затем он установил, что при вращении медной пластинки возле подвижного магнита последний стремится вращаться в том же направлении, и, наоборот, если вращать магнит, то пластинка стремится следовать за ним.

Опыт Араго сумел объяснить только великий физик Майкл Фарадей, открывший явление электромагнитной индукции.

Работам Фарадея в области электричества положило начало исследование электромагнитных вращений. Из серии опытов Эрстеда, Араго, Био, Савара, проведенных в 1820 г., стало известно не только об электромагнетизме, но и о своеобразии взаимодействий тока и магнита: здесь действовали не привычные для классической механики центральные силы, а силы иные, стремившиеся установить магнитную стрелку перпендикулярно проводнику. Фарадей поставил перед собой вопрос: не стремится ли магнит к непрерывному движению вокруг проводника с током? Опыт подтвердил гипотезу. В 1821 г. Фарадей дал описание физического прибора. В центре левого сосуда с ртутью находился стержневой постоянный магнит, закрепленный шарнирно в нижней части. При включении тока магнитный полюс вращался относительно неподвижного проводника. В правом сосуде стержень магнита был неподвижен, а проводник с током, свободно подвешенный на кронштейне, скользил по ртути, совершая вращение вокруг полюса магнита. Это было первое электромагнитное устройство с непрерывным движением.



М.Фарадей



Электромагнитные вращения

Именно с этого момента, судя по всему, у Фарадея начинают складываться представления о всеобщей «взаимопревращаемости сил». Получив при помощи электромагнетизма непрерывное механическое движение, Фарадей ставит перед собой задачу обратить явление – превратить магнетизм в электричество. Только абсолютная убежденность в справедливости гипотезы «взаимопревращаемости» может объяснить целеустремленность и настойчивость. Тысячи опытов и 10 лет напряженного труда потребовалось затратить на решение сформулированной задачи. Семнадцатого октября 1831 г. Майкл Фарадей открыл явление электромагнитной индукции. Это был хорошо подготовленный и заранее продуманный опыт.

Вот как об этом писал Фарадей: «Я взял цилиндрический магнитный брусок и ввел один его конец в просвет спирали из медной проволоки, соединенной с гальванометром. Потом я быстрым движением втолкнул магнит внутрь спирали на всю его длину, и стрелка гальванометра испытала толчок. Затем я так же быстро вытащил магнит из спирали, и стрелка опять качнулась, но в противоположную сторону. Эти качания стрелки повторялись всякий раз, как магнит вталкивался или выталкивался. Это значит, что электрическая волна возникает только при движении магнита, а не в силу свойств, присущих ему в покое».

Вслед за открытием электромагнитной индукции Фарадей проверяет новую идею. Если движение магнита относительно проводника создает электричество, то, видимо, движение проводника относительно магнита должно приводить к такому же результату. Значит, есть возможность создать генератор электрического тока, обеспечив непрерывное относительное движение проводника и магнита. Фарадей быстро строит и испытывает новое устройство: между полюсами подковообразного магнита вращается медный диск, с которого при помощи скользящих контактов (один на оси, другой на периферии) снимается напряжение. Это был первый генератор электрического тока!

После открытия электромагнитной индукции внимание ученых в значительной степени переключилось с «гальванических» токов, когда главными объектами исследований были сами гальванические элементы, процессы электролиза, на индукционные токи, в это время наибольший интерес стали вызывать явления электромагнетизма. Так новая форма материи – поле – входила в физику. Фарадей является и навсегда останется творцом того общего учения об электромагнетизме, которое рассматривает с единой точки зрения все явления, изучавшиеся прежде в отдель-

ности, не говоря уже о тех, которые открыл сам Фарадей, следуя своему убеждению о единстве всей науки.

Существенный шаг в направлении детального количественного изучения явления электромагнитной индукции был сделан петербургским академиком Эмилием Христиановичем Ленцем (1804–1865). В 1833 г. Ленц сформулировал правило, названное по его имени, заключающееся в следующем: *если металлический проводник движется вблизи гальванического тока или магнита, то в нем возбуждается ток такого направления, что если бы данный проводник был неподвижным, то ток мог бы обусловливать его перемещение в противоположную сторону; при этом предполагается, что покоящийся проводник может перемещаться только в направлении движения или против него.* Этот принцип раскрыл энергетику индукционных процессов. Сам Ленц вывел из него хорошо известный в электротехнике принцип обратимости для электромагнитных машин: *если вращать катушку между полюсами магнита, она генерирует ток, а если в нее послать ток, то она будет вращаться.* Таким образом, электродвигатель можно обратить в генератор и наоборот. Вскоре на основе указанных открытий появились индукционные машины, которые вырабатывали электрический ток без применения гальванических элементов. Но особенно большой подъем в этой области начался после 1867 г., когда В. Сименс (1816–1892) заменил используемые в индукционных машинах стальные магниты электромагнитами, которые питались вырабатываемым этими машинами током; именно в этом заключается динамоэлектрический принцип.

Теория Максвелла. Создание теории электромагнитного поля и открытие электромагнитных волн.

Дело Фарадея по обоснованию понятия поля продолжил другой величайший английский физик – Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879).

Теорию электромагнитного поля Максвелл начал разрабатывать с 1855 г. на основе анализа работ Фарадея и в окончательном виде оформил в работе «Трактат по электричеству и магнетизму», вышедшей в 1873 г. В своих собственных исследованиях Максвелл предпринял попытку придать идеям и методам Фарадея математическое выражение.



Э. Х. Ленц



Дж.К.Максвелл

Вклад Максвелла сводится к следующему: 1. Максвелл вводит в физику фундаментальное понятие единого электромагнитного поля. С современной точки зрения поле – материальный объект, существующий в пространстве и времени. В дальнейшем, с созданием теории относительности, когда стало возможным устранение гипотезы эфира, поле было признано самостоятельным существующим видом материи, не нуждающимся в особом материальном носителе. Введение понятия поля как основного объекта, обеспечивающего все электромагнитные взаимодействия, делающего акцент не на заряды и токи, а на «порожденное» ими поле означало окончательное утверждение в физике идеи близкодействия. 2. Из теории Максвелла следует конечность скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Сигнал, испущенный источником, распространяется как реальное образование, обладающее энергией, которая, по Максвеллу, сосредоточена в поле. Энергия электромагнитного взаимодействия зависит от параметров поля, а не от энергии зарядов и токов. Но энергия не может быть без материального носителя. Следовательно, поле является объективной реальностью. 3. Теория Максвелла по-новому поставила вопрос о взаимосвязи электричества и магнетизма. Их единство проявляется в том, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное, а изменяющееся магнитное порождает электрическое, т. е. электрические и магнитные поля есть частные проявления единого электромагнитного поля. 4. Максвелл на основе понятия поля свел в единую систему все знания по электричеству и магнетизму. Все законы электрических и магнитных взаимодействий, все законы тока, выведенные раньше, получаются из уравнений Максвелла как следствия. 5. Из решения уравнений вытекает, что электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде волн и скорость электромагнитных волн равна скорости света. Тем самым устанавливается не только существование нового объекта, но и выдвигается идея об электромагнитной природе света, а значит, устанавливается единство оптики и электромагнетизма.

Теория электромагнитного поля Максвелла знаменовала собой начало нового этапа в физике. Именно на этом этапе развития физики электромагнитное поле стало реальностью, материальным носителем взаимодействия. Мир постепенно стал представляться электродинамической системой, построенной из электрически заряженных частиц, взаимодействующих посредством электромагнитного поля.

Как уже говорилось, из теории Максвелла вытекало существование электромагнитных волн. Эти поперечные волны распро-

страняются в бесконечной диэлектрической среде с конечной скоростью, зависящей от свойств среды. В каждый момент энергии электрического поля и энергия магнитного поля в данном объеме диэлектрика оказываются равными. Отсюда Максвелл сделал важный вывод о том, что оптические свойства среды связаны с ее электромагнитными свойствами.

Максвелл также заключил, что электромагнитная волна должна оказывать давление на проводящую поверхность. Максвелл рассчитал величину этого давления, которое для поглощающих поверхностей должно быть равно объемной плотности энергии, а для отражающих – удвоенной величине. Этот вывод Максвелла подвергся критике, однако позднее Бартоли, а затем Больцман вывели из термодинамических соображений существование светового давления, а в 1889 г. П.Н. Лебедев измерил это давление экспериментально и показал, что оно совпадает с теоретическим значением, найденным Максвеллом. Опыты Лебедева рассматривались как триумф теории Максвелла.

Экспериментальная проверка теории Максвелла выпала на долю русских и немецких ученых. Окончательный триумф теории Максвелла пришелся на 1887 г., когда Генрих Герц (1857–1894) экспериментально получил электромагнитные волны.

Герц дальше развил теорию Максвелла, записал ее уравнения в измененной, ныне общепринятой форме, исследовал частное решение этих уравнений для случая так называемого вибратора Герца, когда поле может быть разбито на три области: ближнюю, промежуточную и волновую. В ближней области поле совпадает с квазистатическим полем: электрическое поле – с полем диполя, убывающим обратно пропорционально третьей степени расстояния от центра вибратора, магнитное – с полем элемента тока, определяемым согласно закону Био – Савара, напряженность которого убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра элемента. Большой неожиданностью для Герца было открытие волнового поля, отпочковавшегося от диполя, напряженность которого убывает обратно пропорционально первой степени расстояния от диполя.



Г. Герц



Первый вибратор Герца. Герц использовал два метровых провода, связанных с индукционной катушкой

С 1887 г. Герц начинает ставить свои опыты. Прежде всего, он находит способ генерирования самых высокочастотных в то время колебаний, используя открытый колебательный контур (вibrator Герца). Обладая малой емкостью и индуктивностью, вибратор действительно позволял получать колебания высокой частоты, возникающие при проскакивании искр в разрядном промежутке диполя. Рядом с этим генератором находился незамкнутый виток. Герц обнаружил, что в момент разряда в генераторе происходит проскакивание искры между незамкнутыми концами витка, расположенного рядом с генератором. Это были первые в мире передатчик и приемник. Далее Герц заметил, что влияние генератора на приемник особенно сильно в случае резонанса (частота колебаний генератора совпадает с собственной частотой приемника) Продолжая исследования, Герц при удалении резонатора от вибратора обнаружил, что в большом помещении с увеличением расстояния размер искр не убывает монотонно, а периодически меняется. Он объяснил это тем, что происходит интерференция прямой волны с отраженной. Этот опыт наиболее убедительно доказывал, что электромагнитные волны, предсказанные Максвеллом, действительно существуют. Герц ставит опыты с целью проверки тождества световых и электромагнитных волн. Почти сразу он обнаруживает «тень» – непрозрачность металлических листов для «электрических лучей». Диэлектрики «прозрачны» для волн. Но они должны вызывать преломление. И Герц обнаруживает явление преломления волн в асфальтовой призме весом более чем в тонну, причем отклонение соответствует тому, которое должно быть по Максвеллу. Последующие опыты показали существование отражения волн, а затем и их поляризацию. Герц ставит между генератором и приемником решетку из параллельных проволок, от ориентации которой меняется интенсивность искры в приемнике. Зная период колебаний вибратора и измерив длину волны, Герц вычислил скорость распространения электромагнитных волн, она оказывается равной скорости света. Все это было изложено в работе «О лучах электрической силы», вышедшей в декабре 1888 г. Этот год считается годом открытия электромагнитных волн и экспериментального подтверждения теории Максвелла.

За пять лет до опытов Герца появилась работа Пойнтинга о переносе энергии электромагнитным полем, которая, в свою очередь, была частным случаем общей теории о движении энергии, разработанной в 1873 г. Н. А. Умовым (1846–1915). Герц применил вектор Умова – Пойнтинга к вычислению потока энергии, излучаемой диполем в окружающее пространство, и пока-

зал, что количество энергии, излучаемое вибратором в окружающее пространство, не зависит от расстояния и будет прямо пропорционально квадрату длины диполя и обратно пропорционально кубу длины волны, генерируемой полем. Этот результат явился отправным пунктом в теории антенн. Теоретические основы радиотехники были заложены Герцем.



Н.А. Умов

Герц открыл для физиков новый объект – свободное электромагнитное поле. Задача состояла в том, чтобы научиться генерировать это поле, обнаружить его и управлять им. В год смерти Герца (1894) его опыты были продемонстрированы на IX съезде русских естествоиспытателей П. Н. Лебедевым, который, построив миниатюрные вибратор и резонатор, получил самые короткие для того времени электромагнитные волны длиной в 6 мм. С этими волнами Лебедев не только повторил все опыты по отражению, преломлению, дифракции и интерференции, но и доказал их двойное преломление в кристаллической сере и продемонстрировал поляризационные явления. Синтез электромагнетизма и оптики был представлен с величайшей наглядностью.



П.Н.Лебедев

В 1896 г. индийский физик Дж.Ч. Бозе (1858–1937) в докладе Британской ассоциации сообщил об опытах с короткими ($2\pm 0,6$ см) электромагнитными волнами. Ему удалось передавать сигналы через стены зданий. А.С. Попов (1859–1906) в 1900 г. в своих лекциях по беспроволочной телеграфии воспроизводил опыты Бозе и Лебедева с короткими электромагнитными волнами.



А. С. Попов

Герц относился скептически к мысли об использовании электромагнитных волн для целей телеграфии, размышляя о размерах зеркал, которые понадобились бы для телеграфа, действующего по принципу оптического. Но его подвела аналогия с оптикой. Практика пошла по другому пути, вернувшись к оптической аналогии только в наши дни. Была изобретена антенна (Тесла, Попов), построен достаточно чувствительный детектор – когерер (Бранли, Лодж) и, на-

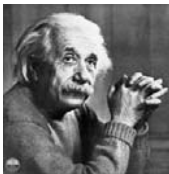


Г. Маркони

конец, А.С. Попов сконструировал практически пригодный приемник радиосигналов (грозоотметчик, 7 мая 1895 г.), а в 1896 г. осуществил первую передачу и прием радиogramм из одного здания в другое.

В том же году начал эксперименты по беспроводной телеграфии Г. Маркони (1874–1937), которому удалось довести дело до промышленных образцов. Радиотехника родилась, а вместе с ней теория Максвелла получила подтверждение практикой.

Специальная теория относительности. В 1895 г. в работе «Опыт теории электрических и оптических явлений в движущихся телах» Лоренц дает систематическое изложение электронной теории, опирающейся, с одной стороны, на теорию Максвелла, а с другой – на представление об атомарности электричества. В начале 90-х гг. XIX в. Лоренц на основе своей электронной теории и гипотезы о неподвижном эфире выводит уравнения электромагнитного поля для движущихся сред. И делает очень важный вывод – никакие оптические и электромагнитные опыты, проведенные в равномерно и прямолинейно движущейся системе отсчета, не в состоянии обнаружить этого движения. Таким образом, Лоренц сформулировал принцип относительности для электромагнитных процессов. В 1904 г., называя принцип относительности в числе основных принципов физики, Пуанкаре отмечает, что «законы физических явлений будут одинаковыми как для покоящегося наблюдателя, так и для наблюдателя, находящегося



А. Эйнштейн

в состоянии равномерного прямолинейного движения, так что мы не имеем и не можем иметь никаких средств, чтобы различить, находимся мы в таком движении или нет». Так, принцип относительности, сформулированный Галилеем для механических явлений, в начале XX в. был распространен на любые физические процессы. Развивая электродинамику и стремясь объяснить опыты, Лоренц и Пуанкаре опирались на концепцию эфира. Подойдя к принципу относительности, они не смогли поставить вопрос о постоянстве и особенно о предельном значении скорости света. Это и было сделано А. Эйнштейном (1879–1955).

Основополагающая работа Эйнштейна по теории относительности называлась «К электродинамике движущихся сред». Она поступила в редакцию журнала «Анналы физики» 30 июня 1905 г. Работа состояла из двух частей. В первой из них были изложе-

ны основы новой теории пространства и времени, во второй – применение этой теории к электродинамике движущихся сред. В основу своей теории Эйнштейн кладет два постулата: 1) принцип относительности – в любых инерциальных системах все физические процессы – механические, оптические, электрические и др. – протекают одинаково; 2) принцип постоянства скорости света – скорость света в вакууме не зависит от движения источника и приемника, она одинакова во всех направлениях, во всех инерциальных системах и равна $3 \cdot 10^8$ м/с.

На статью Эйнштейна обратил внимание редактор журнала «Анналы физики» профессор Макс Планк. Работа Эйнштейна вызвала у него интерес возможностью провести «такое грандиозное упрощение всех проблем электродинамики движущихся тел, что вопрос о допустимости принципа относительности должен ставиться в первую очередь в любой теоретической работе, посвященной этой области».



М. Планк

Эйнштейн окончательно придал электромагнитному полю значение самостоятельной, распределенной в вакууме субстанции, обладающей собственной массой и импульсом. Он же ввел понятие о кванте электромагнитного поля.

Существуют две концепции электромагнитного поля: классическая и квантовая. Макроскопическое (классическое) электромагнитное поле рассматривается как непрерывное силовое поле, обладающее распределенной энергией, массой, импульсом, моментом импульса. В квантовой физике электромагнитное поле интерпретируют как «газ» элементарных частиц – квантов света, фотонов, обладающих энергией $h\nu$ (квант действия $h \approx 6,6 \cdot 10^{-27}$ эрг·с), а распределенные векторные величины, подчиняющиеся уравнениям поля, описывают комплексную амплитуду вероятности обнаружения фотона в данный момент времени в данной области пространства с данным поляризационным состоянием. Согласованность этих двух противоположных на первый взгляд концепций объясняется тем, что кванты электромагнитного поля – фотоны имеют целый *спин* и подчиняются статистике Бозе – Эйнштейна, т. е. способны образовывать конденсат – занимать одно и то же квантово-механическое состояние. Конденсат большого числа фотонов определяет свойства классического электромагнитного поля.

Представление о конденсате пар электронов в твердых телах – куперовских парах позволило в 1957 г. Бардину – Куперу –

Шрифферу построить микроскопическую теорию сверхпроводимости.

Первое представление о существовании квантов электромагнитного излучения – фотонов было высказано в 1900 г. М. Планком, показавшим, что результаты теории согласуются с опытом, если предположить, в противоречии с классической электродинамикой, что атомы испускают электромагнитную энергию отдельными порциями – квантами. Энергия каждого такого кванта прямо пропорциональна частоте, а коэффициентом пропорциональности является квант действия h , получивший впоследствии название постоянной Планка. Дискретность действия – фундаментальный факт, требующий радикальной перестройки как законов механики, так и законов электродинамики. Постоянная Планка – универсальная мировая постоянная, играющая роль масштаба явлений природы. Классические законы справедливы лишь при рассмотрении движения объектов достаточно большой массы, когда величины размерности действия велики по сравнению с h и дискретностью действия можно пренебречь.

В 1905 г. Эйнштейн расширил гипотезу Планка, предположив, что излучаемая порция электромагнитной энергии сохраняет свою индивидуальность – распространяется и поглощается только целиком, т.е. ведет себя подобно частице (позднее она была названа фотоном). На основе этой гипотезы Эйнштейн объяснил закономерности фотоэффекта, не укладывающиеся в рамки классической электродинамики.

Таким образом, на новом качественном уровне была возрождена корпускулярная теория света. Свет ведет себя подобно потоку частиц (корпускул), однако одновременно ему присущи и волновые свойства, которые проявляются, в частности, в явлениях дифракции и интерференции. Следовательно, несовместимые с точки зрения классической физики волновые и корпускулярные свойства в равной мере присущи свету.

Квантование излучения приводило к заключению, что энергия внутриатомных движений также может меняться только скачкообразно. Такой вывод был сделан Н. Бором в 1913 г. К этому времени Э. Резерфорд (1911), интерпретируя результаты своих экспериментов по рассеянию α -частиц веществом, открыл атомное ядро и предложил ядерную (планетарную) модель атома. В атоме Резерфорда движение электронов вокруг ядра подобно движению планет вокруг Солнца. Однако, соглас-



Н. Бор



Э. Резерфорд

но электродинамике Максвелла, такой атом неустойчив: электроны, двигаясь по круговым (или эллиптическим) орбитам, испытывают ускорение, а следовательно, должны непрерывно излучать энергию и в конце концов за время $\sim 10^{-8}$ с упасть на ядро. Чтобы объяснить устойчивость атома и его линейчатый спектр, Бор постулировал, что атомы могут находиться лишь в особых стационарных состояниях, в которых электроны не излучают, и только при переходе из одного стационарного состояния в другое атом испускает или поглощает энергию. В. Паули записал уравнение движения нерелятивистского электрона во внешнем электромагнитном поле с учетом взаимодействия магнитного момента электрона с магнитным полем (Паули уравнение). В 1925 г. Паули сформулировал также так называемый принцип запрета, согласно которому в одном квантовом состоянии не может находиться больше одного электрона (Паули принцип). Этот принцип сыграл важнейшую роль в построении квантовой теории систем многих частиц, в частности, он позволил объяснить закономерности заполнения электронных оболочек и слоев в многоэлектронных атомах и, таким образом, дал теоретическое обоснование периодической системы элементов Менделеева.

Интересное явление, связанное с влиянием вещества на электромагнитное поле, обнаружено в 1934 г. С.И.Вавиловым и П.А.Черенковым. Они наблюдали узкий конус излучения, испускаемого быстрыми электронами в среде, при условии что их скорость превышала фазовую скорость света в среде. Теория излучения Вавилова – Черенкова была создана в 1937 г. И.Е. Таммом и И.М. Франком. В настоящее время излучение Вавилова – Черенкова нашло широкое применение в экспериментальной физике элементарных частиц и космических лучей. Без черенковских счетчиков не обходится практически ни одно исследование в этой области.

Квантовая теория поля (КТП). Следующий этап в развитии квантовой теории – распространение квантовых принципов на системы с бесконечным числом степеней свободы (поля физические) и описание процессов с рождением и превращением частиц



В. Паули



С.И. Вавилов



П.А. Черенков



И.Е. Тамм



И.М. Франк



П.А.М. Дирак



Х. Юкава

– привел к КТП, наиболее полно отражающей фундаментальное свойство природы – корпускулярно-волновой дуализм.

В КТП частицы описываются с помощью квантованных полей, представляющих собой совокупность операторов рождения и уничтожения частиц в различных квантовых состояниях. Взаимодействие квантованных полей приводит к различным процессам испускания, поглощения и превращения частиц. Любой процесс в КТП рассматривается как уничтожение одних частиц в определенных состояниях и появление других в новых состояниях. Например, испускание фотона атомом при переходе электрона из некоторого начального состояния в некоторое конечное на языке КТП представляет процесс исчезновения электрона в начальном состоянии и рождение электрона в конечном состоянии с одновременным рождением фотона, происходящий в результате взаимодействия квантованных полей электронов и фотонов.

Первоначально была построена КТП применительно к взаимодействию электронов, позитронов и фотонов – квантовая электродинамика (Дирак, 1929). В 1928 г. П.А.М. Дирак получил квантовое релятивистское уравнение движения электрона (Дирака уравнение), из которого естественно вытекало наличие у электрона спина. На основании этого уравнения Дирак в 1932 г. предсказал существование позитрона (первой античастицы), в том же году открытого К.Д. Андерсоном в космических лучах.

Взаимодействие между заряженными частицами, согласно квантовой электродинамике, осуществляется путем обмена фотонами, причем электрический заряд частицы представляет константу, характеризующую связь поля заряженных частиц с электромагнитным полем (полем фотонов).

Дальнейшим плодотворным применением идей КТП явилась работа Х. Юкавы (1935), который, развивая идеи И.Е. Тамма и Д.Д. Иваненко, предположил существование взаимодействия между полем нуклонов (протонов и нейтронов) и полем новых частиц – мезонов. Ядерные силы между нуклонами, согласно этой гипотезе,

возникают в результате обмена нуклонов мезонами, а короткодействующий характер ядерных сил объясняется наличием у мезонов сравнительно большой массы покоя. Мезоны с предсказанными свойствами (пионы) были обнаружены в 1947 г., а взаимодействие их с нуклонами оказалось частным проявлением так называемых сильных взаимодействий.

КТП является, таким образом, основой для описания фундаментальных взаимодействий природы: электромагнитных, сильных и слабых. Наряду с этим методы КТП нашли широкое применение и в теории твердого тела, теории плазмы, теории ядра, поскольку многие процессы в этих средах связаны с испусканием и поглощением различного рода элементарных возбуждений – квазичастиц (фононов, спиновых волн и др.).

Очень важную роль играет состояние поля с наименьшей энергией, которое называется вакуумным. Число частиц, например фотонов, в вакуумном состоянии поля равно нулю. Однако существуют нулевые колебания поля флуктуационного характера, энергия которых бесконечна, так как число степеней свободы поля бесконечно велико. Взаимодействие заряженных частиц с флуктуациями вакуумного поля приводит к эффектам, наблюдаемым экспериментально: лэмбовскому сдвигу уровней, аномальному значению собственного (спинового) магнитного момента электрона и др.

Из-за бесконечного числа степеней свободы у поля взаимодействие частиц – квантов поля – приводит к уравнениям, неразрешимым точно. Однако в теории электромагнитных взаимодействий любую задачу можно решить приближенно, так как взаимодействие можно рассматривать как малое возмущение свободного состояния частиц (вследствие малости безразмерной константы $\alpha = e^2/\eta c \approx 1/137$, характеризующей интенсивность электромагнитных взаимодействий).

Основной процесс в квантовой электродинамике – испускание свободным электроном (или позитроном) фотона с последующим его поглощением другим или тем же электроном. Время этого процесса – характерное время электромагнитных процессов – $\sim 10^{-21}$ с. Этот процесс называется виртуальным. В классической физике такой процесс невозможен, так как противоречит закону сохранения энергии. В квантовой теории этот процесс протекать может, так как, согласно соотношению неопределенностей для энергии и времени, неопределенность в



С. Вайнберг

энергии пропорциональна постоянной Планка, деленной на длительность процесса.



Ш. Глэшоу



А. Салам

В конце 60-х гг. С. Вайнберг, Ш. Глэшоу и А. Салам построили объединенную модель слабых и электромагнитных взаимодействий (модель электрослабых взаимодействий), согласно которой, наряду с фотоном – переносчиком электромагнитных взаимодействий – должны существовать переносчики слабых взаимодействий – промежуточные векторные бозоны с массами в несколько десятков протонных масс. Наряду с заряженными (W^+ и W^-) бозонами должны существовать и нейтральные (Z^0). В 1973 г. впервые экспериментально наблюдались процессы, которые можно объяснить существованием нейтральных бозонов (нейтральные токи), а в 1983 г. все промежуточные бозоны были открыты экспериментально. Эти открытия были сделаны на ускорителях со встречными протон-антипротонными пучками, а также на ускорителях со встречными электрон-позитронными пучками.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

2.1. Открытие электромагнитной индукции

После открытия в 1820 г. Эрстедом магнитного действия тока и доказательства, что вокруг проводника с током порождается магнитное поле и на проводник с током действует магнитная сила, многие выдающиеся ученые того времени попытались достичь обратного – превратить магнетизм в электричество. Такую задачу сформулировал для себя в декабре 1821 г. выдающийся английский ученый Майкл Фарадей.

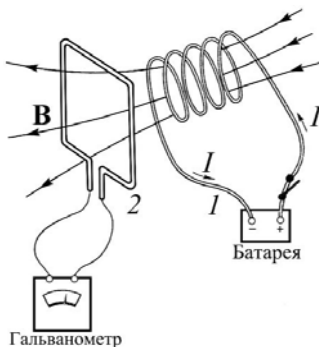


Рис. 2.1. Катушка с током I возбуждает ток в другой катушке 2 при замыкании и размыкании цепи. (Первый опыт М. Фарадея, 1831 г.)

Поставленную задачу М. Фарадей смог успешно решить только через 10 лет напряженных исследований. В первом сообщении 24 ноября 1831 г. в разделе об индукции электрических токов им описан опыт по электромагнитной индукции. В этом опыте вблизи располагались две изолированные друг от друга обмотки (рис. 2.1). Одна из них соединялась с гальваническим элементом, другая с гальванометром. При замыкании и размыкании тока в первой обмотке стрелка гальванометра отклонялась: при замыкании цепи в одну сторону, при размыкании – в противоположную. Это явление Фарадей назвал вольта-электрической индукцией. Индукция усиливалась, если внутри обмоток помещалось железо. Это устройство из двух катушек с металлическим сердечником явилось первым прообразом трансформатора (рис. 1.1). Причем ток во второй катушке появляется не обязательно только при включении и выключении тока в первой катушке, но ток во

второй катушке возбуждается при любом изменении тока в первой катушке.

Затем Фарадей получил индукционные действия с помощью обыкновенных постоянных магнитов. При внесении или удалении постоянного магнита из катушки включенный в цепь гальванометр показывал прохождение электрического тока (рис. 1.2). Направления тока при внесении и удалении магнита были различны. Это явление Фарадей назвал магнитоэлектрической индукцией. Дальнейшие исследования, выполненные Фарадеем, показали, что в замкнутом контуре при любом изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур, возбуждается электрический ток – ток индукции, или индукционный ток. Величина этого тока тем больше, чем выше скорость изменения магнитного потока в замкнутом контуре. Но если магнитный поток, пронизывающий замкнутый проводящий контур, остается постоянным, то никакого электрического тока не наблюдается. Отсутствие тока в проводниках, размещенных в статическом магнитном поле, не позволяло долгое время обнаружить возможность получения с помощью магнитных полей электрического тока.

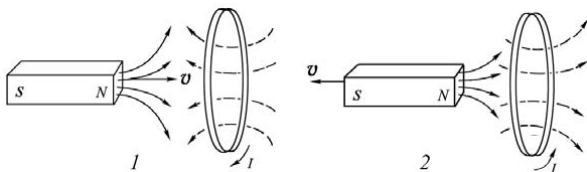


Рис. 2.2. Явление магнитоэлектрической индукции – возбуждение электрического тока в катушке при внесении и удалении из нее постоянного магнита

Если мы начнем вращать рамку с проводом в постоянном магнитном поле и будем при помощи скользящих контактов, чтобы не перекручивался провод, замыкать цепь, то обнаружим, что во внешней цепи и по рамке течет ток, т.е. в цепи поддерживается электродвижущая сила. Таким образом, мы получили генератор переменного электрического тока (рис. 2.3). Фарадей открыл, что величина ЭДС индукции пропорциональна скорости изменения потока вектора магнитной индукции Φ , пронизывающего рамку:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Знак «минус» в этой формуле говорит о том, что ЭДС индукции порождает в замкнутой цепи индукционный ток I , направленный

таким образом, чтобы создаваемый этим током магнитный поток стремился компенсировать изменение внешнего магнитного потока в замкнутом контуре (рис.2.2). Это правило, определяющее знак в формуле для ЭДС индукции и направление индукционного тока, было установлено в 1833 г. петербургским академиком Э. Х. Ленцем и называется правилом Ленца.

Рис. 2.3. Рамка с проводом при вращении в магнитном поле генерирует переменный электрический ток

Явление электромагнитной индукции лежит в основе принципа работы телефона – аппарата, передающего речь на расстоянии. Первоначально телефон состоял из двух одинаковых «слухофонов», соединенных длинными проводами. Принцип устройства состоит в том, что звуковые колебания воздуха передаются металлической мембране, замыкающей полюса магнитов, на которых намотана катушка с проволокой. Движение мембраны под действием волн изменяет величину магнитного поля в сердечнике. В результате в катушке, намотанной на сердечник, возникает ЭДС. Если концы катушки присоединить ко второму точно такому же «слухофону», то в нем электрический ток, являющийся электрическим изображением звука первого «слухофона», будет изменять силу притяжения мембраны к магниту. Она начнет совершать колебания и породит звуковые волны, подобные тем, что заставляли колебаться первую мембрану. Так, человеческий голос был впервые передан Беллом по проводам (рис. 2.4).

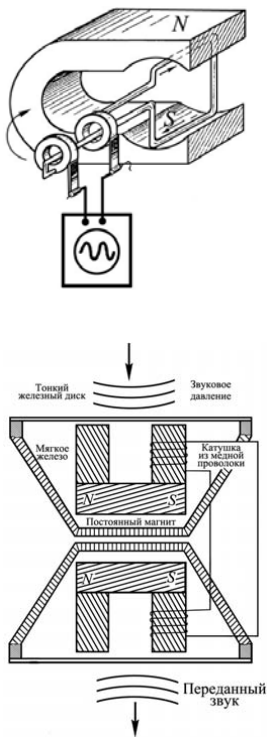


Рис. 2.4. Устройство телефона Белла

В настоящее время в качестве источника звука в телефонах применяется устройство, подобное описанному, а в качестве приемника звука – микрофона используется угольный микрофон, изменяющий сопротивление угольного порошка в месте контакта с угольной мембраной под действием звукового давления, что приводит к изменению тока в цепи, питаемой от внешних батарей.

2.2. Электродвижущая сила индукции

Работа при перемещении контура с током I в магнитном поле равна

$$\delta A = -I d\Phi,$$

где $d\Phi$ – изменение потока магнитной индукции в контуре при его перемещении в магнитном поле. Затрачиваемая работа идет в нашем случае на перемещение зарядов по замкнутому контуру и определяется законом Джоуля – Ленца

$$\delta A = \mathcal{E} I dt,$$

где \mathcal{E} – ЭДС, возбуждаемая в контуре, механически перемещаемом в магнитном поле в течение времени dt , соответствующего изменению потока вектора магнитной индукции на $d\Phi$. Приравняв эти два соотношения, получаем для ЭДС электромагнитной индукции закон Фарадея

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

– ЭДС индукции со знаком «минус» равна скорости изменения магнитного потока в магнитном контуре.

Полученное уравнение для ЭДС индукции справедливо не только при движении замкнутого контура в магнитном поле, но и при любом другом изменении магнитного потока через замкнутый контур (рис. 2.5).

Пусть катушка 1 с постоянным током I создает магнитное поле, в котором движется замкнутый контур 2 со скоростью v . Это относительное движение катушки 2 в магнитном поле катушки 1 сопровождается изменением магнитного потока в катушке 2 и возбуждением ЭДС индукции. Возникновение ЭДС и тока в цепи связано с действием силы Лоренца $\mathbf{F} = e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ на движущиеся заряды в магнитном поле \mathbf{B} и определяется полученной ранее формулой $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$. Пусть теперь катушка 2 покоится, а навстречу ей со скоростью v движется катушка 1 , в которой возбуждено магнитное поле. Поскольку переход из

одной инерциальной системы, связанной с катушкой 1, в другую инерциальную систему, связанную с катушкой 2, не должен сказаться на результате, то ЭДС индукции не должна измениться, поскольку одинаковые условия в катушке 2 не могут приводить к разным результатам.

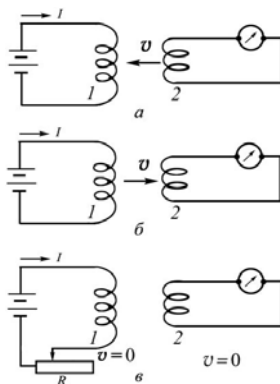


Рис. 2.5. Возникновение ЭДС индукции:

a – при движении свободных зарядов контура 2 в магнитном поле контура 1;

б – при изменении потока вектора магнитной индукции в контуре 2 при движении к нему контура 1. ЭДС индукции не отличается от случая (*a*);

в – ток в контуре 1 нарастает таким образом, чтобы изменение магнитного потока в контуре 2 совпадало со случаем (*a*) и (*б*)

Следовательно, и в этом случае $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$, но смысл этой формулы иной, поскольку в данном случае заряды в катушке 2 неподвижны, а их движение вызвано переменным во времени магнитным полем.

Подобное первым двум случаям изменение потока магнитного поля в катушке 1 может быть достигнуто и при неподвижных контурах 1 и 2. Необходимое изменение в контуре 2 $d\Phi$ может быть достигнуто таким увеличением тока в катушке 1, что оно будет эквивалентно изменению потока в контуре 2 при относительном движении катушек 1 и 2. Поскольку скорость изменения потока в контуре 2 остается прежней, то формула Фарадея оказывается справедливой и в случае неподвижных контуров. Изменение тока в одном контуре должно индуцировать ЭДС в другом контуре.

Теперь покажем, что действительно при перемещении проводника со свободными зарядами в магнитном поле в проводнике возникает ЭДС, определяемая законом Фарадея. Пусть замкнутый металлический проводник движется во внешнем магнитном поле \mathbf{B} со скоростью \mathbf{v} . Допустим, что электроны в проводнике

движутся со скоростью \mathbf{u} (рис. 2.6). Тогда полная скорость электрона относительно проводника равна $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

В результате на электрон будет действовать магнитная составляющая силы Лоренца

$$\mathbf{F}_m = e[(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{B}].$$

Полная магнитная сила, действующая на электрон в проводнике, равна

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp},$$

где $\mathbf{F}_{\parallel} = +e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ – сила, действующая вдоль проводника; $\mathbf{F}_{\perp} = e[\mathbf{u}, \mathbf{B}]$ – сила, действующая перпендикулярно элементу $d\mathbf{l}$ проводника и не участвующая, таким образом, в создании тока в контуре. Работа силы \mathbf{F}_m над электроном за время dt равна

$$\delta A = \mathbf{F}_{\parallel} \mathbf{u} dt + \mathbf{F}_{\perp} \mathbf{v} dt = F_{\parallel} u dt - F_{\perp} v dt,$$

поскольку направления векторов \mathbf{F}_{\parallel} и \mathbf{u} одинаковы, а \mathbf{F}_{\perp} и \mathbf{v} различны. Модули сил равны

$$F_{\parallel} = evB, \quad F_{\perp} = euB.$$

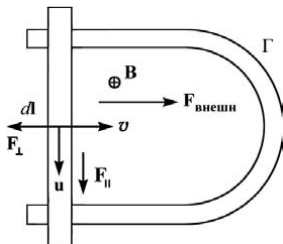


Рис. 2.6. Элемент $d\mathbf{l}$ контура Γ , движущийся со скоростью \mathbf{v} во внешнем магнитном поле \mathbf{B} . Учтено, что заряд электрона отрицателен

Поэтому работа полной магнитной силы равна нулю

$$\delta A = evuBdt - euBvdt = 0,$$

как этого и требует уравнение для магнитной силы, которая всегда перпендикулярна перемещению заряда (скорости) и никакой работы совершить не может. Тем не менее, электрический ток в контуре возникает, и это связано с тем, что на элемент контура $d\mathbf{l}$ действует сила \mathbf{F}_{\perp} , стремящаяся вернуть этот элемент контура в первоначальное положение, и чтобы этого не произошло, а элемент $d\mathbf{l}$ перемещался в магнитном поле с постоянной скоростью \mathbf{v} , мы должны к этому элементу контура приложить равную и противоположную внешнюю силу

$$\mathbf{F}_{\text{вн}} = -e[\mathbf{u}, \mathbf{B}].$$

За счет работы этой внешней силы в замкнутом контуре и будет выделяться в контуре энергия при прохождении индуцированного тока. Работа этой силы при перемещении элемента $d\mathbf{l} = udt$ замкнутого контура Γ в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} равна

$$\delta A = (\mathbf{F}_{\text{вн}}, \mathbf{v} dt) = -e([\mathbf{u}, \mathbf{B}], \mathbf{v} dt) = -e([d\mathbf{l}, \mathbf{B}], \mathbf{v}).$$

Для всего замкнутого контура Γ имеем

$$A = -\oint_{\Gamma} e \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}, [d\mathbf{l}, \mathbf{B}] \right) = -e \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} (d\mathbf{R}, [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]) = -e \frac{d}{dt} \oint B_n dS = -e \frac{d\Phi}{dt}.$$

Здесь $d\mathbf{R}$ – перемещение элемента $d\mathbf{l}$ контура Γ за время dt ; $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$; dS – элемент площади контура Γ ; B_n – проекция вектора \mathbf{B} на направление нормали к dS .

С другой стороны, по определению, ЭДС – это есть работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру, поэтому для ЭДС индукции имеем

$$\mathcal{E} = \frac{A}{e} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

– ранее полученную нами формулу, которая справедлива не только при перемещении контура Γ в магнитном поле, но и при любом другом изменении потока вектора магнитной индукции в контуре Γ , даже если контур и неподвижен.

Если контур, в котором индуцируется ЭДС, состоит не из одного, а из N витков, соединенных последовательно, то полная ЭДС \mathcal{E} в контуре будет равна алгебраической сумме ЭДС, индуцируемых каждым витком в отдельности:

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \Phi_i.$$

2.3. Правило Ленца

Формула, определяющая величину ЭДС индукции, определяет также и направление индукционного тока в замкнутом контуре. Пусть, например, виток Γ расположен в магнитном поле перпендикулярно силовым линиям индукции. Если величина потока Φ_e вектора $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$ через контур возрастает, то в результате в витке возникает ток $I_{\text{инд}}$, текущий по часовой стрелке, поскольку ЭДС отрицательна $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$. Поэтому порождаемое этим током магнитное поле $\mathbf{B}_{\text{инд}}$ будет препятствовать увеличению магнитного потока в контуре (рис.2.7).

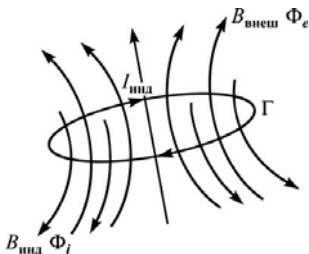
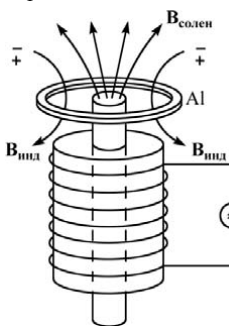


Рис. 2.7. Изменение внешнего магнитного потока Φ_e в замкнутом контуре порождает индукционный ток такого направления, чтобы компенсировать это изменение, – правило Ленца

Если магнитный поток через контур Γ убывает, то ЭДС и ток в контуре изменяют свое направление. В результате в контуре опять порождается магнитный ток, стремящийся скомпенсировать уменьшение магнитного потока в контуре.

Таким образом, индукционный ток в замкнутом контуре всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток. Это правило установлено в 1834 г. Э.Х. Ленцем. Ле Шателье (1850–1936) и Браун (1850–1918) обобщили правило Ленца и распространили его на все физические явления.

Правило Ленца можно продемонстрировать с помощью соленоида с металлическим сердечником, на который надето алюминиевое кольцо (рис. 2.8). Если соленоид подключить к источнику переменного тока, то алюминиевое кольцо зависает над сердечником. Необходимую для этого силу порождают индукционные токи, возбуждаемые в кольце. Тот факт, что кольцо выталкивается с сердечника, говорит о том, что индукционные токи в нем препятствуют изменению магнитного поля, проходящего через кольцо. Кольцо отталкивается от катушки, как отталкиваются одноименные полюса магнитов.



Если в кольце сделать разрез по радиусу, то ток в кольце исчезнет, и кольцо не будет отталкиваться. Этот опыт показывает, что сила отталкивания обусловлена индукционными токами в кольце.

Рис. 2.8. Алюминиевое кольцо зависает над сердечником соленоида, подключенного к генератору переменного электрического тока. Сила отталкивания возникает в соответствии с правилом Ленца – индукционный ток порождает магнитное поле, препятствующее изменению магнитного потока в контуре

Индукционные токи возбуждаются в массивных проводниках, движущихся в магнитных полях. Эти вихревые индукционные токи называются токами Фуко. Если медную пластину отклонить от положения равновесия и отпустить так, чтобы она вошла со скоростью v в пространство между полюсами магнита, то пластина практически остановится в момент ее вхождения в магнитное поле (рис. 2.9). Замедление движения связано с возбуждением в пластине вихревых токов, препятствующих изменению потока вектора магнитной индукции. Поскольку пластина обладает конечным сопротивлением, токи индукции постепенно затухают и пластина медленно движется в магнитном поле. Если электромагнит отключить, то медная пластина будет совершать обычные колебания, характерные для маятника.

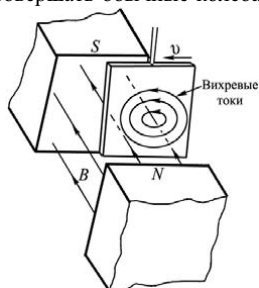


Рис. 2.9. Токи Фуко – возбуждаемые в массивных проводниках при их движении в магнитном поле

Сила и расположение вихревых токов очень чувствительны к форме пластины. Если заменить сплошную медную пластину «гребенкой» – медной пластиной с пропилами, то вихревые токи в каждой части пластины возбуждаются меньшими потоками. Индукционные токи уменьшаются, уменьшается и торможение (рис. 2.10).

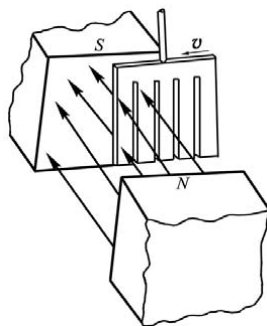


Рис.2.10. Движение медной гребенки в магнитном поле – эффект торможения вихревыми токами уменьшается за счет уменьшения потоков Φ в каждой части пластины

Маятник в виде гребенки колеблется в магнитном поле почти без сопротивления. Этим опытом объясняется, почему сердечники электромагнитов, трансформаторов делают не из сплошного куска железа, а набранными из тонких пластин, наложенных друг на друга. При этом пластины отделены друг от друга очень тонким слоем изоляции. В результате уменьшаются токи Фуко и выделяемое ими тепло.

Если взять медный диск диаметром ≈ 5 см и толщиной ≈ 5 мм и уронить его между полюсами электромагнита, то при выключенном магните диск падает с обычным ускорением. При включении магнитного поля ≈ 1 Тл падение диска резко замедляется и его движение напоминает падение тела в очень вязкой среде.

Тормозящее действие тока Фуко используется для создания магнитных успокоителей – демпферов. Если под качающейся в горизонтальной плоскости магнитной стрелкой расположить массивную медную пластину, то возбуждаемые в медной пластине токи Фуко будут тормозить колебание стрелки. Магнитные успокоители такого рода используются в сейсмографах, гальванометрах и других приборах.

Токи Фуко применяются в электрометаллургии для плавки металлов. Металл помещают в переменное магнитное поле, создаваемое током частотой $500 \div 2000$ Гц. В результате индуктивного разогрева металл плавится, например, при подведенной мощности 600 кВт тонна металла плавится за $40 \div 50$ минут.

Если быстропеременный высокочастотный ток протекает по проводнику, то вихревые токи, индуцируемые в проводнике, препятствуют равномерному распределению плотности тока по поперечному сечению проводника – плотность тока на оси провода оказывается меньше, чем у его поверхности. Ток как бы вытесняется на поверхность провода (рис. 2.11). Это явление называется скин-эффектом (от англ. *skin* – кожа, оболочка). Впервые это явление описано в 1885–1886 гг. английским физиком О. Хевисайдом, а обнаружено на опыте его соотечественником Д. Юзом в 1886 г.

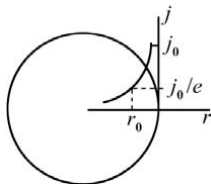


Рис. 2.11. Уменьшение плотности переменного тока при смещении от поверхности в объем проводника – скин-эффект; r_0 – глубина проникновения тока, расстояние, на котором плотность тока уменьшается в e раз

При нарастании тока в проводе ЭДС индукции направлена против тока. Электрическое поле самоиндукции максимально на оси провода, что приводит к неравномерному распределению плотности тока. Плотность тока убывает от поверхности к оси провода примерно по экспоненциальному закону

$$j = j_0 \exp(-\alpha r),$$

где $\alpha = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\sigma \mu \nu}$ – коэффициент затухания; σ – удельная электропроводность образца; μ – магнитная проницаемость провода; ν – частота колебаний электрического тока; c – скорость света.

Например, для меди глубина проникновения тока – расстояние, на котором плотность тока уменьшается в e раз, равна

$$r_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{66}{\sqrt{\nu}} \text{ мм, где частота } \nu \text{ берется в герцах. При частоте}$$

$\nu = 50 \text{ Гц}$ $r_0 = 10 \text{ мм}$ – ток практически равномерно распределен по объему проводов, исключая очень толстые кабели. Но при высокочастотных колебаниях $\nu \approx 100 \text{ МГц} = 10^8 \text{ Гц}$ глубина проникновения равна $r_0 \approx 7 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ – ток почти целиком течет по поверхности провода. По этой причине с целью уменьшения потерь поверхность высокочастотных контуров серебрят. Провода для переменных токов высокой частоты, учитывая скин-эффект, сплетают из большого числа тонких проводящих нитей, изолированных друг от друга эмалевым покрытием – литцендратом.

Если замкнутый проводящий контур сопротивлением R движется в произвольном магнитном поле, то в нем возбуждается индукционный ток

$$I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Если омическое сопротивление витка равно нулю, то для того чтобы в витке не возникали бесконечно большие индукционные токи, необходимо, чтобы $d\Phi/dt = 0$, – поток вектора магнитной индукции Φ , пронизывающий контур из идеального проводника, должен оставаться постоянным. Это сохранение обусловлено индукционными токами, которые, в согласии с правилом Ленца, препятствуют всякому изменению магнитного потока через контур провода. В случае реального проводника из-за тепловых потерь индукционные токи затухают и компенсация изменений не является полной. В идеальном проводнике изменение внешне-

го магнитного потока через контур всегда может полностью компенсироваться потоком, созданным током индукции, так что сумма этих двух потоков – внешнего и созданного током индукции остается постоянной. Это положение называется теоремой о сохранении магнитного потока.

Если в магнитном поле движется идеальная проводящая жидкость, то любой замкнутый контур в такой жидкости обладает постоянным магнитным потоком. При любой деформации жидкого контура магнитные силовые линии также следуют за таким контуром – силовые магнитные линии как бы вморожены в вещество и двигаются за ним.

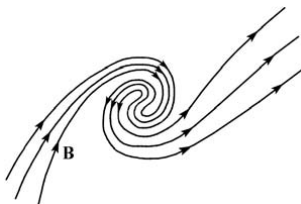


Рис. 2.12. Усиление индукции магнитного поля в солнечной плазме при турбулентном движении

Эффект «вмороженности» магнитного поля в вещество играет важную роль в астрофизических явлениях. Так, американский физик Э. Паркер использовал этот эффект для объяснения происхождения магнитных полей на Солнце – теория солнечных пятен. Согласно этой теории, генерация магнитного поля на Солнце обязана нерегулярному турбулентному движению солнечной плазмы. При этом линии индукции увлекаются средой, сильно закручиваются, что приводит к увеличению интенсивности магнитного поля (рис.2.12).

2.4. Вихревое электрическое поле

Закон Фарадея говорит, что изменение потока вектора магнитной индукции вызывает появление в замкнутом контуре электрического тока. Если контур разомкнут, то в нем возникает ЭДС индукции, т.е. электрическое поле способно перемещать заряды по замкнутому контуру, совершая при этом над ними работу.

Максвелл первым понял, что главное в явлении электромагнитной индукции – это возникновение в пространстве электрического поля под действием переменного магнитного поля. Причем наличие проводников не является для этого обязательным. Переменное магнитное поле может порождать вихревое электри-

ческое поле и в свободном от проводников пространстве, в том числе и в вакууме. Электрическое поле \mathbf{E} , порождаемое переменным магнитным полем \mathbf{B} , является вихревым, поскольку его работа по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру Γ : $\oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l})$ или, иными словами, ЭДС

не равна нулю, а равна со знаком «минус» скорости изменения магнитного потока сквозь этот контур – закон Фарадея. Математически это можно записать в виде уравнения

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}),$$

где S – поверхность, ограниченная замкнутым контуром Γ , а частная производная $\partial/\partial t$ означает, что контур Γ и поверхность S не изменяются со временем.

Последнее уравнение может быть приведено к дифференциальной форме. Для этого воспользуемся теоремой Стокса и преобразуем контурный интеграл от вектора \mathbf{E} к поверхностному:

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \int_S (\text{rot } \mathbf{E}, d\mathbf{S}) = -\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right).$$

Поскольку контур Γ и поверхность S произвольны, то последнее равенство имеет место лишь при условии

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Это соотношение является дифференциальной формой закона электромагнитной индукции и представляет одно из основных уравнений теории электромагнитного поля.

Как мы видели в электростатике, для неподвижных зарядов электрическое поле являлось потенциальным и может быть выражено через энергетическую характеристику электростатического поля – потенциал:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi,$$

и оно не могло обеспечить движение зарядов по замкнутым проводам, поскольку в этом случае

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \int_S \text{rot}(-\text{grad } \varphi) d\mathbf{S} = 0$$

– его работа по перемещению единичного заряда по замкнутому контуру равна нулю.

Но электрическое поле, порождаемое переменным магнитным полем, не потенциально, а является вихревым полем. Оно имеет конечную тангенциальную составляющую при перемещении заряда по замкнутому контуру и способно вызвать непрерывное течение электричества в замкнутых проводниках, т.е. появление индукционных токов.

Если электрическое поле создается одновременно неподвижными зарядами q , для которых

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_q = 0,$$

и переменным магнитным полем \mathbf{B} , в соответствии с уравнением Максвелла,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_B = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

то полное поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_B$ также удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Поскольку изменение со временем вектора \mathbf{B} приводит к появлению вихревого электрического поля, способного вызвать индукционные токи в замкнутых проводниках, то вектор \mathbf{B} и получил название вектора магнитной индукции.



Рис. 2.13. Механический аналог явления электромагнитной индукции – трубка с жидкостью, поворачивающаяся на 180° ; Ω , $\Omega_{\text{жидк}}$, $\Omega_{\text{тр}}$ – угловые скорости вращения Земли, жидкости, трубки

Механическим аналогом явления электромагнитной индукции может служить возникновение вращения жидкости в замкнутом полом кольце при повороте его вокруг диаметра в поле тяжести Земли (рис. 2.13). Если находиться на полюсе с

кольцом радиусом R , то жидкость вместе с трубкой движется со скоростью

$$v_H = \Omega R,$$

где Ω – угловая скорость осевого вращения Земли. Скорость жидкости относительно трубки равна при этом нулю. После поворота кольца с жидкостью на 180° направление движения жидкости будет по инерции продолжаться уже в направлении, обратном вращению Земли, а вращение трубки относительно жидкости изменится на противоположное. Жидкость после поворота кольца на 180° придет во вращение. Если вы находитесь на полюсе, относительная скорость движения жидкости в трубке будет равна

$$v_{\text{отн}} = 2\Omega R.$$

Если находиться не на полюсе, а в точке с географической широтой θ , то $v_{\text{отн}} = 2\Omega R \sin\theta$.

Роль силы Лоренца в этом явлении играет сила Кориолиса $\mathbf{f}_k = 2[\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}]$, действующая на единицу массы жидкости, здесь \mathbf{v} – скорость жидкости относительно Земли, аналогом магнитного поля служит $2\boldsymbol{\Omega}$ – удвоенная угловая скорость вращения Земли. Этот опыт служит доказательством вращения Земли и позволяет определить угловую скорость этого вращения.

2.5. Самоиндукция

Если ток в обмотке катушки или соленоида меняется, то меняется и магнитный поток, пронизывающий каждый виток. Согласно закону Фарадея, в каждом витке обмотки индуцируется ЭДС, во всей катушке величина ЭДС индукции, вызванная изменением тока в этой катушке, – ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

где $\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$ – полный магнитный поток (потокосцепление),

охватывающий всю катушку; N – число витков в катушке. Явление возникновения ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется самоиндукцией. Самоиндукция представляет частный случай электромагнитной индукции.

Направление ЭДС самоиндукции препятствует возрастанию тока в цепи при его увеличении и его убыванию при уменьшении

тока в цепи. Самоиндукция подобна инерции в механическом движении.

Поток вектора магнитной индукции Ψ , посылаемый током I через свой собственный контур, равен

$$\Psi = LI,$$

где L – коэффициент самоиндукции произвольного замкнутого контура с током I , и по определению,

$$L = \frac{\mu\mu_0}{4\pi I^2} \iint_V (\mathbf{j}, \mathbf{j}') \frac{dVdV'}{\Delta R}.$$

В частности, для соленоида с магнитным сердечником

$$L = \mu\mu_0 \left(\frac{N}{l} \right)^2 V,$$

где μ – магнитная проницаемость сердечника; N , l , V – полное число витков, длина и объем соленоида.

Таким образом, ЭДС самоиндукции равна

$$\mathcal{E} = - \frac{d(LI)}{dt}.$$

Если индуктивность контура постоянна, то ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока в цепи

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Величина индуктивности L определяется геометрией контура, числом витков N , магнитными свойствами окружающей среды. За единицу индуктивности в СИ принимается индуктивность такого проводника, у которого при силе тока 1 А возникает связанный с ним магнитный поток Ψ , равный 1 Вб. Эту единицу называют Генри (Гн)

$$1 \text{ Гн } [L] \cdot 1 \text{ А } [I] = 1 \text{ Вб } [\Psi].$$

Рассмотрим сверхпроводящий соленоид длиной $l = 10$ см и площадью сечения $S = 2,0$ см², который имеет $N = 1000$ витков и подключен к батарее с напряжением $V_{\text{прил}} = 12$ В (рис. 2.14). Определим ток спустя $t = 0,01$ с после замыкания ключа.

Вычислим индуктивность по формуле ($V = SI$)

$$L = \mu_0 \left(\frac{N}{l} \right)^2 SI = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{10^3}{0,1} \right)^2 \cdot (2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1) = 2,51 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Согласно закону Ома, полная ЭДС равна $V_{\text{прил}} + V_{\text{самоинд}} = IR$.
Для сверхпроводника $R = 0$, поэтому

$$V_{\text{самоинд}} = -V_{\text{прил}}.$$

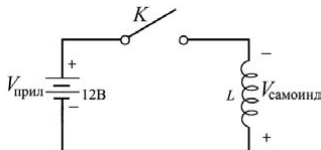
Заменяем $V_{\text{самоинд}}$ на $-Ldl/dt$:

$$\frac{Ldl}{dt} = V_{\text{прил}},$$

$$dl = \left(\frac{V_{\text{прил}}}{L} \right) dt,$$

$$I = \left(\frac{V_{\text{прил}}}{L} \right) t = \frac{12}{2,51 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^{-2} = 47,8 \text{ А}.$$

Рис. 2.14. Ключ замыкается при $t = 0$



Спустя $t = 0,01$ с получаем $I = 47,8$ А. Ток будет продолжать линейно возрастать до тех пор, пока его величина не достигнет предельного значения, при котором сверхпроводимость исчезает. В этот момент времени сопротивление скачком увеличится от нуля до нормального значения.

Явление самоиндукции играет важную роль в электротехнике и радиотехнике. Как мы увидим дальше, благодаря самоиндукции происходит перезарядка конденсатора, соединенного последовательно с катушкой индуктивности, в результате в такой LC-цепочке – колебательном контуре возникают электромагнитные колебания.

1.6. Токи при замыкании и размыкании цепи

В электрической цепи, содержащей постоянную ЭДС, при замыкании цепи сила тока за счет ЭДС самоиндукции устанавливается не мгновенно, а через некоторый промежуток времени. При выключении источника тока, но в замкнутой цепи, ток не прекращается мгновенно. Возникающая при размыкании цепи ЭДС может многократно превышать ЭДС источника тока.

Пусть в цепь с источником постоянного тока \mathcal{E}_0 и полным омическим сопротивлением $R = R_0 + r$, где r – внутреннее сопротивление источника тока, включена катушка индуктивности L . Рассмотрим изменение тока в такой цепи при включении и

выключении источника постоянного тока. При этом цепь всегда остается замкнутой (рис. 2.15).

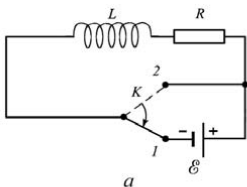
При относительно медленном изменении тока, когда не происходит накопление зарядов на отдельных участках цепи, величина тока, согласно закону Ома, равна

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_L}{R},$$

где \mathcal{E}_L – ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d(LI)}{dt}.$$

Пусть индуктивность L контура при подключении ЭДС остается постоянной, тогда $\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$. Для определения закона



нарастания тока в цепи мы получаем следующее уравнение:

$$IR = \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt},$$

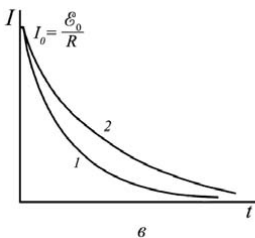
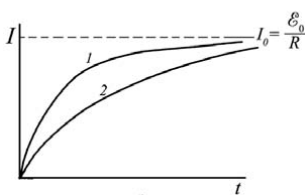
решением которого при нулевом начальном токе в цепи $I(t=0) = 0$, является зависимость

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}),$$

где $\tau = L/R$ – постоянная времени установления тока. Время τ тем меньше, чем меньше индуктивность цепи и выше сопротивление. Стационарное значение тока $I_0 = \mathcal{E}_0/R$ не зависит от индуктивности катушки, а определяется законом Ома, поскольку ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_L при постоянном токе равна нулю.

Рис. 2.15. Изменение тока в цепи (а) при включении источника ЭДС (б) и отключении источника ЭДС (в). В случае (в) ток в цепи поддерживается за счет энергии магнитного поля. Чем больше отношение R/L , тем быстрее происходит

изменение тока в целом $\left(\frac{R}{L}\right)_1 > \left(\frac{R}{L}\right)_2$



Пусть ток в цепи достиг стационарного значения I_0 , источник ЭДС отключили ($\mathcal{E}_0 = 0$), но цепь осталась замкнутой. В этом случае изменение тока в цепи будет описываться уравнением

$$IR_0 = -L \frac{dI}{dt}$$

с начальным условием $I(t = 0) = I_0$, где $I_0 = \mathcal{E}_0/R$. Решением уравнения служит функция

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau_0} \quad \text{или} \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-t/\tau_0}.$$

Ток при отключении источника ЭДС в замкнутой цепи спадает постепенно, с постоянной времени установления $\tau_0 = L/R_0$, где R_0 – сопротивление цепи без учета сопротивления источника ЭДС. Поскольку сопротивление батареи r обычно мало, то можно считать, что $R \approx R_0$. При отключении источника ЭДС величина ЭДС самоиндукции равна

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} = L \frac{I_0}{\tau_0} e^{-t/\tau_0} = L \frac{\mathcal{E}_0}{R} \frac{R_0}{L} e^{-t/\tau_0} = \mathcal{E}_0 \frac{R_0}{R} e^{-t/\tau_0}.$$

В этом случае $\mathcal{E}_L \leq \mathcal{E}$ – ЭДС самоиндукции не превышает ЭДС источника. Но если мы переключаем цепь на очень большое внешнее сопротивление $R_{\text{внешн}}$, например, происходит разрыв цепи, то ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_L может стать огромной, и образуется вольтова дуга между разомкнутыми концами выключателя.

Пусть катушка индуктивности L и сопротивление нагрузки R были подключены параллельно источнику постоянной ЭДС (рис. 2.16). К моменту отключения ЭДС ток в катушке L равен

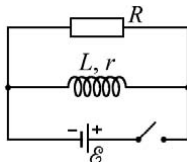
$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r},$$

где r – сопротивление катушки. После отключения ЭДС изменение тока в цепи будет описываться уравнением

$$(r + R)I = -L \frac{dI}{dt}.$$

Рис. 2.16. В момент отключения источника ЭДС \mathcal{E} от катушки индуктивности возникает ЭДС индукции

$\mathcal{E}_L = \mathcal{E} \frac{R+r}{r}$, значительно превосходящая \mathcal{E} при условии $R \gg r$



Откуда получаем

$$I = I_0 e^{-t/\tau},$$

где $\tau = L/(R + r)$.

ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} = L \frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau} = L \frac{\mathcal{E}}{r} \frac{(R+r)}{L} e^{-t/\tau} = \mathcal{E} \frac{(R+r)}{r} e^{-t/\tau}.$$

Если сопротивление цепи R много больше сопротивления катушки индуктивности r , то в момент отключения ЭДС индукции \mathcal{E}_L будет намного превосходить ЭДС батареи \mathcal{E} . Это может служить причиной пробоя в цепях.

2.7. Взаимная индукция. Трансформатор

Пусть рядом находятся две катушки Γ_1 и Γ_2 , состоящие из N_1 и N_2 витков, по которым текут токи I_1 и I_2 (рис. 2.17). Если пространство заполнено однородным магнитным материалом (не ферромагнетиком), то магнитные потоки Ψ_1 и Ψ_2 через контуры Γ_1 и Γ_2 равны

$$\Psi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2, \quad \Psi_2 = L_2 I_2 + L_{21} I_1.$$

Здесь $L_1 I_1$, $L_2 I_2$ – магнитные потоки, созданные токами I_1 и I_2 в контуре Γ_1 и Γ_2 , L_1 и L_2 – индуктивности контуров Γ_1 и Γ_2 ; $\Psi_{12} = L_{12} I_2$, $\Psi_{21} = L_{21} I_1$ – магнитные потоки, созданные токами I_2 и I_1 в контурах Γ_1 и Γ_2 , $L_{12} = L_{21}$ – коэффициенты взаимной индукции, равные, по определению,

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}.$$

В общем случае изменение тока в контуре Γ_1 индуцирует в контуре Γ_2 , помимо ЭДС самоиндукции, дополнительную ЭДС, равную

$$\mathcal{E}_{12} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

Аналогично за счет изменения тока в контуре Γ_2 возникает переменный магнитный поток, индуцирующий в контуре Γ_1 дополнительную ЭДС, равную

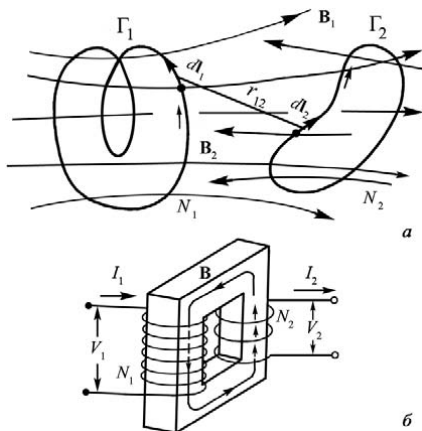
$$\mathcal{E}_{21} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

При наличии магнитного взаимодействия между контурами Γ_1 и Γ_2 контуры Γ_1 и Γ_2 называются связанными, а явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется взаимной индукцией.

Коэффициенты $L_{12} = L_{21}$ называются коэффициентами взаимной индукции или взаимной индуктивностью контуров. В отсутствие ферромагнетиков эти коэффициенты равны. Единицей измерения L_{ik} является Генри (СИ): $[1 \text{ Гн}] = [1 \text{ Вб}] / [1 \text{ А}]$.

Рис. 2.17. Два контура Γ_1 , Γ_2 обладают взаимной индукцией, пропорциональной интегралу от $\frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r_{12}}$, где $r_{12} = |\mathbf{R} - \mathbf{r}|$

(а); явление взаимной индукции используется в трансформаторе для преобразования величины напряжения V_1 в V_2 (б). Отношение напряжений в первичной и вторичной обмотках равно отношению числа витков: $V_1/V_2 = N_1/N_2$ в этих обмотках в режиме холостого хода



Если катушки Γ_1 и Γ_2 намотаны на один общий сердечник, то по теореме о циркуляции имеем для первой и второй катушек

$$B_1 l = \mu \mu_0 I_1 N_1,$$

$$B_2 l = \mu \mu_0 I_2 N_2.$$

Здесь l – длина магнитного сердечника.

Магнитные потоки, созданные первым током через вторую катушку и вторым током через первую катушку, равны

$$B_1 \cdot N_2 \cdot S = \mu \mu_0 I_1 N_1 N_2 \cdot S / l = L_{21} I_1,$$

$$B_2 \cdot N_1 \cdot S = \mu \mu_0 I_2 N_1 N_2 \cdot S / l = L_{12} I_2.$$

Откуда получаем для коэффициентов взаимной индукции двух катушек, намотанных на общий сердечник,

$$L_{12} = L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l^2} V.$$

Здесь $V = Sl$ – объем сердечника.

Полные магнитные потоки через контур Γ_1 и Γ_2 с учетом магнитных потоков, созданных в них токами I_1 и I_2 , равны ($L_{1,2} = \mu\mu_0 N_{1,2}^2 V / l^2$)

$$\Psi_1 = \frac{\mu\mu_0}{l^2} V (I_1 N_1 + I_2 N_2) N_1,$$

$$\Psi_2 = \frac{\mu\mu_0}{l^2} V (I_2 N_2 + I_1 N_1) N_2.$$

Таким образом, если магнитные потоки не рассеиваются, то их отношение пропорционально числу витков в катушках

$$\frac{\Psi_1}{\Psi_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Такое устройство, состоящее из двух или более катушек, намотанных на один общий сердечник, называется трансформатором (рис. 2.17, б). В большинстве трансформаторов вторичная обмотка наматывается поверх первичной обмотки.

Если к первичной обмотке приложить переменное напряжение V_1 , то ток в ней нарастает, пока ЭДС индукции в первичной обмотке не достигнет значения V_1 :

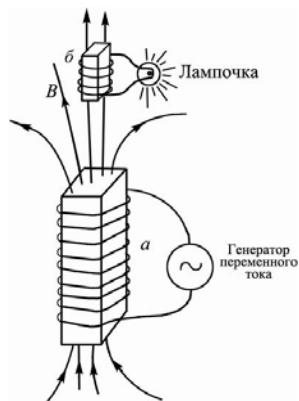
$$V_1 = -\frac{d\Psi_1}{dt}.$$

Величина напряжения во вторичной обмотке равна ($\Psi_2 = \frac{N_2}{N_1} \Psi_1$)

$$V_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} \frac{d\Psi_1}{dt} = \frac{N_2}{N_1} V_1.$$

Полученное соотношение показывает, что переменное напряжение V_1 в первичной обмотке трансформатора индуцирует во вторичной обмотке переменное напряжение V_2 (рис. 2.18). Величину V_2 можно менять, изменяя отношение числа витков в первичной и вторичной обмотках. Это представляет удобный способ трансформации низких напряжений в высокие и наоборот.

Рис. 2.18. Непрерывно меняющийся ток в катушке (а) создает переменное магнитное поле, которое генерирует переменную ЭДС во второй катушке (б)



Возможность трансформации переменного напряжения объясняет его преимущества по сравнению с постоянным, что имеет большое значение при производстве и передаче энергии на большое расстояние. Наиболее экономичные генераторы вырабатывают низкое переменное напряжение. Если линия электропередачи имеет сопротивление R , то потери мощности при передаче энергии равны

$$\delta P = I^2 R,$$

где величина тока определяется передаваемой мощностью P и напряжением U

$$I = \frac{P}{U}.$$

Таким образом, потери уменьшаются

$$\delta P = \frac{P^2}{U^2} R$$

– обратно пропорционально квадрату напряжения на линии электропередачи.

Так, при передаче мощности $P = 10$ МВт в линии передач с сопротивлением $R = 10$ Ом потери равны при напряжении $U = 14 \cdot 10^3$ В $\delta P \approx 5$ МВт, т.е. 50% от P . При $U = 10^5$ В $\delta P = 10^3$ Вт, т.е. 1% от P .

Поэтому с помощью трансформатора с $N_1 \ll N_2$ напряжение, выдаваемое генератором, следует повысить до напряжения больше, чем 20 кВ. На противоположной стороне линии перед подачей электроэнергии потребителю это напряжение следует понизить до безопасных значений. Для этого используется другой трансформатор с $N_1 \gg N_2$.

2.8. Генератор переменного тока

Пусть в постоянном и однородном магнитном поле \mathbf{B} вращается проволочная катушка, подключенная к внешней цепи с помощью скользящих контактов. Возможно также, что вращается постоянный магнит между неподвижными катушками (рис. 1.19). При вращении рамки магнитный поток через катушку непрерывно изменяется

$$\Psi = NBS \cos \omega t.$$

Здесь $\omega t = \alpha$ – угол между нормалью к плоскости катушки и направлением вектора магнитной индукции \mathbf{B} ; ω – угловая скорость вращения катушки; t – время; N – число витков в катушке; S – площадь витка в катушке.

Наводимая ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = NBS\omega \sin \omega t.$$

Разность потенциалов на проводах, подведенных к нагрузке, изменяется периодически по величине и знаку. Такая меняющаяся разность потенциалов называется *переменным напряжением*, а устройство, с помощью которого оно получается, – *генератором переменного тока*.

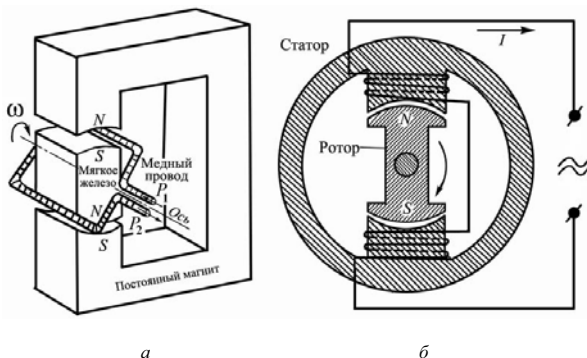


Рис.2.19. Генератор переменного тока: *а* – рамка, вращающаяся в постоянном магнитном поле; *б* – постоянный магнит, вращающийся между катушками

Рассмотрим катушку размером $S = a \times b$ см² с $N = 200$ витками, вращающуюся с частотой $\nu = 50$ об/с в магнитном поле $B = 0,5$ Тл, $a = 7$ см, $b = 10$ см.

Напряжение (в вольтах) на концах катушки равно

$$U(t) = NBS\omega \sin\omega t = 2\pi NBS\nu \sin 2\pi\nu t = U_0 \sin\omega t = 220 \sin\omega t.$$

На рис. 2.20 приведен график напряжения от времени. Такое напряжение используется в России. В Америке напряжение 170 В частотой 60 Гц.

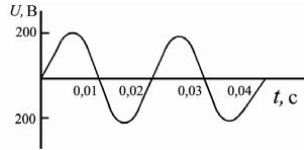


Рис. 2.20. Переменное напряжение частотой 50 Гц и амплитудой $U_0 = 220$ В, создаваемое генератором

Среднеквадратичное значение этого напряжения

$$\sqrt{\langle U^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 156 \text{ В.}$$

При подключении генератора к нагрузке, так что общее сопротивление цепи равно R , по цепи пройдет ток

$$I = \frac{U_0 \sin \omega t}{R} = I_0 \sin \omega t.$$

Величина ЭДС генератора определяет общее количество энергии, поставляемой генератором. Каждый заряд e в проводе получает в единицу времени энергию $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$, где \mathbf{F} – сила, действующая на заряд; \mathbf{u} – скорость его направленного движения. Если число зарядов на единице длины провода n , то мощность, передаваемая в элемент длины провода $d\mathbf{l}$, равна $(\mathbf{u} \parallel d\mathbf{l})$

$$\delta W = (\mathbf{F}, \mathbf{u}) n d\mathbf{l} = nu(\mathbf{F}, d\mathbf{l}).$$

Полная мощность, выделяемая во всей цепи, равна

$$W = nue \oint_{\Gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = I \mathcal{E},$$

здесь $I = nue$ – ток в цепи; $\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{l})$ – ЭДС индукции.

Поскольку по катушке генератора течет ток, то на нее действуют магнитные силы, которые отталкивают рамку с числом

витков N от полюсов магнита. Вращающий момент этих сил равен

$$M = N \cdot |[\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]| = |[ISN \cdot \mathbf{n}, \mathbf{B}]| = ISNB \sin \alpha.$$

При вращении катушки в магнитном поле в единицу времени затрачивается механическая работа

$$W = \frac{\delta A}{dt} = \frac{Md\alpha}{dt} = M\omega = I\mathcal{E}.$$

Видно, что затраты механической работы в единицу времени, необходимые для вращения катушки при действии магнитных сил, в точности равны $I\mathcal{E}$ – электрической мощности, выдаваемой генератором в электрическую цепь.

Если прямоугольную рамку (рис. 2.19, *a*) вращать вручную или каким-либо механическим способом, то мы получаем электрический генератор. Если же, наоборот, через рамку пропускать ток I , то на рамку будет действовать момент сил

$$M = p_m B \sin \theta = ISB \sin \theta.$$

Если ток в рамке протекает от P_1 к P_2 , то момент сил будет вращать рамку по часовой стрелке. Пусть катушка, рассмотренная выше ($S = a \times b = 7 \times 10 \text{ см}^2$, $N = 200$ витков), вращается с частотой $\nu = 50$ об/с под действием протекающего по ней переменного тока с амплитудой 2 А. Определим максимальную мгновенную мощность двигателя.

В случае равномерного движения мощность $W = Fv$. При движении по кругу с радиусом R имеем $W = (FR)(v/R) = M\omega$. Для катушки с N витками момент сил равен $M = NISB \sin \theta$. Таким образом,

$$W = (NISB \sin \theta)\omega.$$

Максимальное значение мощности равно

$$W_0 = NISB\omega.$$

Подставляя в соотношение $N = 200$, $I = 2 \text{ А}$, $S = 70 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $B = 0,5 \text{ Т}$ и $\omega = 100\pi \text{ с}^{-1}$, получаем

$$W_0 = 440 \text{ Вт} \approx 0,6 \text{ л.с.}$$

Пусть r – внутреннее сопротивление генератора, а R – внешнее сопротивление нагрузки, так что общее сопротивление цепи равно $R + r$. Если ЭДС генератора равна \mathcal{E} , то по цепи идет ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи, – полезная мощность – равна

$$W_p = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

Зависимость $W_p(R)$ имеет вид кривой с максимумом. Величина W_p достигает максимума при условии, что сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению генератора ($R = r$). КПД η генератора в таком режиме равен

$$\eta = \frac{W_p}{W} = \frac{\mathcal{E}^2 R}{I \mathcal{E} \cdot (R+r)^2} = \frac{R}{(R+r)} = \frac{R}{2R} = 0,5.$$

– он очень невыгоден экономически, поскольку во внешней цепи выделяется только половина вырабатываемой генератором мощности.

Для увеличения КПД генератора $\eta = W/W_p = R/(R+r)$ следует максимально уменьшить внутреннее сопротивление генератора r ($r \ll R$). В этом случае $\eta \rightarrow 1$, а мощность, отдаваемая во внешнюю цепь, равна $W_p \approx \mathcal{E}^2/R$.

Генератор переменного тока может содержать в статоре не одну, а три катушки, сдвинутые одна относительно другой на 120° (рис. 2.21). При вращении между ними ротора, представляющего постоянный магнит, его полюса будут последовательно проходить мимо каждой катушки, возбуждая в них переменные электромагнитные силы. ЭДС в каждой из катушек отстает от предыдущей на 120° , поэтому

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 120^\circ),$$

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 240^\circ),$$

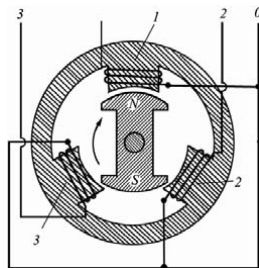


Рис. 2.21. Генератор трехфазного тока

Если соединить начала всех катушек вместе и подсоединить концы всех катушек на равные сопротивления R между концом катушки и началом, то в нулевом проводе – проводе, соединяющем начала всех катушек, ток будет отсутствовать (рис. 2.22):

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = I_0[\sin\omega t + \sin(\omega t - 120^\circ) + \sin(\omega t - 240^\circ)] = 0.$$

Это позволяет просто устранить нулевой провод. Линия электропередачи от трехфазного генератора имеет только три фазовых провода. Напряжение между двумя проводами трехфазной линии равно разности ЭДС, развиваемых катушками генератора – «линейному» напряжению

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2.$$

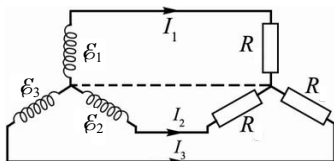


Рис. 2.22. Подсоединение трехфазного генератора «звездой»

Трехфазная система позволяет получить вращающийся магнитный поток. Если подсоединить напряжение от генератора к катушкам двигателя, соединенных так же, как катушки генератора, то в двигателе магнитный поток, оставаясь постоянным по величине, будет вращаться так же, как вращается магнитный поток, создаваемый электромагнитами ротора. Если трехфазный генератор выдает напряжение с частотой $(\omega/2\pi) = 50$ Гц, т.е. делает 3000 об/мин, то с такой же частотой будет вращаться магнитный поток в статоре электромотора.

Поместим в статор электромотора ротор, подобный ротору генератора. Полюса ротора, следуя за вращением поля генератора, создают вращательный момент. Обращенный трехфазный генератор называется синхронным мотором (от греч. *syn* – вместе и *chronos* – время). Это название соответствует тому, что ротор и вращающееся поле делают строго одинаковое число оборотов – они вращаются «синхронно». Поэтому синхронный двигатель при запуске надо предварительно раскрутить до скорости вращения магнитного потока и следить за тем, чтобы механическая нагрузка не превышала вращающиеся возможности магнитного поля, иначе двигатель остановится. Все это ограничивает возможности синхронных двигателей.

Этих недостатков удается избежать в «асинхронном» моторе (рис. 2.23). В отличие от синхронного двигателя, полюсные катушки ротора асинхронного двигателя замкнуты накоротко. Вращающийся магнитный поток наводит в них ЭДС и создает магнитный поток, препятствующий движению потока статора относительно ротора. В результате ротор стремится приобрести скорость вращения, равную частоте вращения магнитного поля статора. При создании тормозящего момента на ось ротора ротор тормозится и не успевает за вращением магнитного поля статора, но при этом в катушках ротора вновь генерируется индукционный ток, величина и частота которого определяется скоростью вращения магнитного поля относительно ротора. Взаимодействие магнитного поля создает вращательный момент двигателя, что позволяет мотору преодолевать тормозной момент и совершать механическую работу.

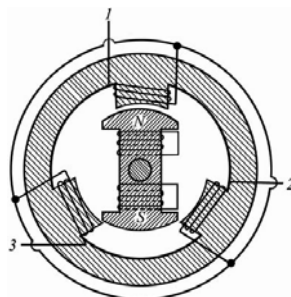


Рис. 2.23. Асинхронный двигатель. Полюсные катушки ротора замкнуты накоротко. Это приводит к возникновению в них индукционных токов, создающих магнитный момент, вращающий ротор относительно статора

Трехфазный ток был впервые получен в 1890 г. выдающимся русским инженером М.О. Доливо-Добровольским.

Им были построены первые генераторы переменного тока, первая линия электропередачи трехфазного тока длиной 175 км, напряжением 25 кВ и первые асинхронные моторы.

Создание генераторов электрического тока, работающих на принципе электромагнитной индукции, позволило перевести использование электричества из области научных исследований в область практического применения. Отличаясь высоким КПД, электрические машины и устройства обладают необходимым запасом мощности в сочетании с компактностью для применения в той или иной производственной технологической цепочке. Это определило те революционные качественные преобразования в промышленности и технологии, которые характерны для современности.

менной цивилизации, обязанной своим быстрым развитием и преобразованием наступившей эре электрических машин и более совершенных их модификаций.

2.9. Индукционный ускоритель электронов – бетатрон

Электродвижущая сила индукции, создаваемая переменным магнитным полем, может существовать и в отсутствие проводников. Энергия, передаваемая вихревым электрическим полем единичному положительному заряду, равна

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = - \frac{d\Phi}{dt}$$

– контурному интегралу по замкнутой траектории Γ от тангенциальной составляющей вихревого электрического поля. Согласно закону Фарадея, этот интеграл равен изменению магнитного потока через замкнутый контур Γ . Вихревое электрическое поле может действовать на ступок электронов, двигающихся в изменяющемся магнитном поле, и ускорять их. При определенных условиях движение электронов происходит в переменном магнитном поле по орбите постоянного радиуса и является устойчивым, причем энергия электронов увеличивается за счет вихревого электрического поля, создаваемого изменяющимся магнитным потоком, пронизывающим орбиту частиц (рис. 2.24). Циклический индукционный ускоритель электронов данного типа называется *бетатроном*.

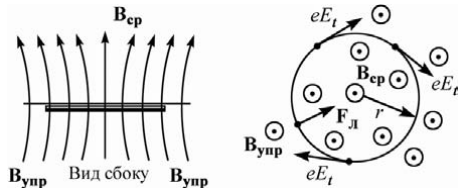


Рис. 2.24. Камера с ускоряемыми электронами в переменном магнитном поле

Переменный центральный магнитный поток B_{cp} создает в бетатроне вихревую ЭДС индукции, ускоряющую электроны. Удержание электронов на стационарной круговой орбите осуществляется управляющим магнитным полем B_{ynp} , определенным образом изменяющимся во времени (рис. 2.25).

Под действием переменного магнитного поля на круговой орбите индуцируется ЭДС индукции, величина которой определяется законом Фарадея

$$\mathcal{E} = E_t \cdot 2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ – поток магнитной индукции через орбиту.

Среднее значение вектора индукции магнитного поля внутри орбиты радиусом r

$$B_{\text{ср}} = \frac{\Phi}{\pi r^2}.$$

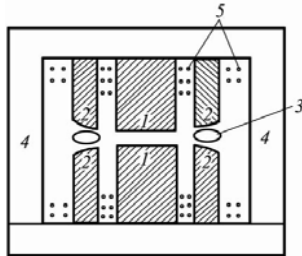


Рис. 2.25. Схематический разрез бетатрона: 1 – центральный сердечник; 2 – полюсные наконечники; 3 – сечение кольцеобразной вакуумной камеры; 4 – ядро магнита; 5 – обмотки электромагнита

Напряженность тангенциальной составляющей вихревого электрического поля равна

$$E_t = \frac{r}{2} \frac{dB_{\text{ср}}}{dt}.$$

Под действием силы $F = eE_t$ меняется импульс электрона

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

Интегрируя равенство

$$\frac{dp}{dt} = \frac{er}{2} \frac{dB_{\text{ср}}}{dt},$$

находим приращение импульса электрона

$$\Delta p = p(t) - p_0 = \frac{er}{2} [B_{\text{ср}}(t) - B_{\text{ср}}(0)] = \frac{er}{2} \Delta B_{\text{ср}},$$

где $\Delta B_{\text{ср}} = B_{\text{ср}}(t) - B_{\text{ср}}(0)$ – приращение средней индукции магнитного поля внутри электронной орбиты. Именно изменение индукции магнитного поля внутри орбиты сопровождается увеличением импульса электрона – ускорением электрона.

Если начальной индукцией и импульсом электрона можно пренебречь, то получим

$$p(t) = \frac{er}{2} B_{\text{cp}}(t).$$

– приобретенный электроном импульс определяется средним значением индукции магнитного поля на орбите.

Найдем величину индукции управляющего магнитного поля $B_{\text{упр}}$, при которой движение электрона будет происходить по орбите постоянного радиуса.

Со стороны $B_{\text{упр}}$ на движущийся со скоростью v электрон действует сила Лоренца $e v B_{\text{упр}}$, обуславливающая движение электрона по окружности радиусом r с центростремительным ускорением v^2/r ,

$$e v B_{\text{упр}} = \frac{m v^2}{r} = \frac{\Delta p v}{r} = \frac{v}{r} \frac{er}{2} [B_{\text{cp}}(t) - B_{\text{cp}}(0)].$$

Откуда получаем

$$B_{\text{упр}}(t) = \frac{1}{2} [B_{\text{cp}}(t) - B_{\text{cp}}(0)].$$

В результате для равновесной орбиты получаем соотношение ($B_{\text{cp}}(0) = 0$):

$$B_{\text{cp}}(t) = 2 B_{\text{упр}}(t).$$

Для работы бетатрона необходимо, чтобы среднее магнитное поле внутри орбиты росло в два раза быстрее магнитного поля на самой орбите.

Это условие

$$\frac{dB_{\text{cp}}(t)}{dt} = 2 \frac{dB_{\text{упр}}(t)}{dt}$$

называют бетатронным условием, условием Видероз или «условием 2:1».

Идея бетатрона была запатентована в 1922 г. Дж. Слепяном. В 1928 г. Р. Видероз сформулировал условие существования равновесной орбиты – орбиты постоянного радиуса. Первый действующий бетатрон был создан в 1940 г. Д. Керстом на основе разработанной им совместно с Р. Сербером теории движения электрона и тщательной отработки конструкции ускорителя. В СССР первые бетатроны были разработаны и созданы учеными Томского политехнического института (ныне университета): профессорами А.А. Воробьевым, Л.М. Ананьевым, В.И. Горбуновым, В.А. Москалевым, Б.Н. Родимовым. В последующие годы в институте интроскопии при ТПУ были разработаны и созданы

малогабаритные переносные бетатроны, применяемые в медицине, дефектоскопии и других прикладных и научных исследованиях (профессор В.Л. Чахлов).

Благодаря простоте конструкции, дешевизне и удобству пользования бетатроны нашли особо широкое применение в прикладных целях в диапазоне энергии 20÷50 МэВ. Используется непосредственно сам электронный пучок или тормозное γ -излучение, энергия которого может плавно изменяться.

2.10. Переменные электрические и магнитные поля

Магнитное поле \mathbf{B} постоянных токов с плотностью \mathbf{j} описывается уравнением

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j},$$

являющимся следствием теоремы о циркуляции :

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu_0 I$$

– циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру Γ равна полному электрическому току, охватываемому данным контуром I , умноженному на μ_0 .

Однако основное уравнение магнитостатики

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} \quad \text{или} \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}$$

требует определенного обобщения на случай переменных электрических и магнитных полей. Действительно, взяв дивергенцию от обеих частей последнего равенства и учитывая, что дивергенция ротора от любой векторной функции всегда равна нулю

$$\operatorname{div} \operatorname{rot}\mathbf{B} = \operatorname{div} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 0,$$

имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0.$$

Последнее условие не согласуется с законом сохранения зарядов

$$\frac{\partial q}{\partial t} + I = 0$$

– изменение заряда под поверхностью S связано только с их вытеканием или втеканием через эту поверхность. Полный заряд под поверхностью S равен

$$q = \int_{(V)} \rho dV$$

интегралу от плотности заряда в объеме V , заключенном под поверхностью S . Ток зарядов, пересекающих поверхность,

$$I = \oint_{(S)} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \int_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{j} dV,$$

откуда следует

$$\frac{\partial q}{\partial t} + I = \int_{(V)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \right) dV = 0.$$

Поскольку поверхность S и объем V произвольные, мы нашли уравнение непрерывности, являющееся следствием экспериментально установленного закона сохранения зарядов:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Поэтому в общем случае из основного уравнения для вектора электромагнитной индукции должно следовать не соотношение $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ для плотности тока, а условие $\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Согласно теореме Гаусса, для вектора электрической индукции справедливо соотношение (п. 3.3)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

Подставив в уравнение непрерывности вместо ρ – плотности заряда дивергенцию вектора электрической индукции, получим соотношение

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

Таким образом, если в правой части уравнения для вектора $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$ напряженности магнитного поля \mathbf{H} вместо \mathbf{j} – плотности электрического тока подставить величину, называемую полным током

$$\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

то мы приходим к следующему уравнению, связывающему переменные электрические и магнитные поля, удовлетворяющему закону сохранения заряда

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Это уравнение впервые получено Максвеллом, его физический смысл сводится к тому, что переменное электрическое поле также является источником вихревого магнитного поля, а не только ток проводимости, как это было установлено в магнито-статике.

Это уравнение описывает своего рода явление магнитоэлектрической индукции – порождение изменяющимся со временем вектором \mathbf{D} вихревого магнитного поля \mathbf{H} даже в отсутствие тока проводимости ($\mathbf{j} = 0$). Это и дало название вектору \mathbf{D} – вектор электрической индукции.

Приведенные соображения в обосновании уравнения для переменного магнитного поля не являются его выводом, а лишь поясняют соображения, позволяющие устранить противоречие между уравнением для напряженности магнитного поля в магнито-статике и уравнением непрерывности.

Слагаемое, добавленное в уравнение для напряженности магнитного поля

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

Максвелл назвал током смещения. «Это смещение, – пишет Максвелл, – не представляет собой постоянного тока потому, что, достигнув определенной величины, оно остается постоянным. Но это есть начало тока, и изменение смещения образуют токи в положительном или отрицательном направлении в зависимости от того, увеличивается смещение или уменьшается».

Из определения вектора электрической индукции

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}\epsilon_0 + \mathbf{P}$$

имеем

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Величина $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ называется плотностью тока поляризации, и он обусловлен движением связанных зарядов

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{(V)} e \mathbf{r}_i = \sum_{(V)} e_i \mathbf{v}_i,$$

здесь \mathbf{v}_i – скорость движения i -го связанного заряда. Суммирование ведется по всем связанным зарядам, находящимся в единице объема. Движение связанных зарядов, например периодическое около положения равновесия, ничем не отличается от движения реальных зарядов, и поэтому естественно, что токи поляризации порождают магнитное поле. Но другое слагаемое в токе смещения $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ не связано с движением каких-либо зарядов. Достаточно

только изменения со временем электрического поля, и тогда даже в вакууме в окружающем пространстве возникает магнитное поле.

Это обстоятельство приводит к определенной симметрии и взаимосвязи электрических и магнитных полей.

Изменение вектора индукции магнитного поля порождает электрическое поле, а переменное электрическое поле создает магнитное поле. Причем этот процесс имеет место и в свободном пространстве.

Вихревое магнитное поле может порождаться не только электрическим током, но и изменяющимся со временем электрическим полем в пространстве, свободном от проводников и зарядов:

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu\mu_0 \oint_{(S)} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) + \mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S})$$

или в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{j} + \mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Вычислим величину индукции магнитного поля B в незаполненном пространстве между обкладками плоского конденсатора с круглыми электродами радиусом R . Конденсатор включен в цепь, по которой течет ток I . Уравнение для вектора \mathbf{H} в пространстве между обкладками конденсатора, где отсутствует ток проводимости ($\mathbf{j} = 0$), примет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \mathbf{n}$$

или в интегральной форме – циркуляция вектора \mathbf{H} по круговому контуру радиусом r равна скорости изменения потока вектора электрической индукции

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \oint_{(S)} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \mathbf{n}, d\mathbf{S} \right) = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2},$$

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = H 2\pi r = \frac{B}{\mu_0} 2\pi r,$$

– поскольку в силу уравнения непрерывности скорость изменения плотности поверхностного заряда σ на всей поверхности пластин конденсатора равна величине тока I , текущего по цепи. В результате получаем для величины вектора индукции магнитного поля на расстоянии r от центра пластин конденсатора (рис. 1.26):

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}.$$

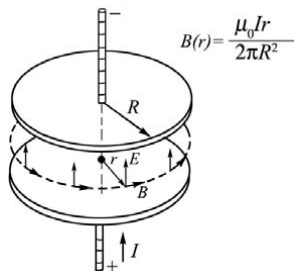


Рис. 2.26. Величина индукции магнитного поля в пространстве между обкладками плоского конденсатора на расстоянии r от центра равна величине индукции магнитного поля на расстоянии r от центра проводника радиусом R , по которому течет ток I

Точно такой же величине равна индукция магнитного поля в металлическом проводнике, по которому течет ток I на расстоянии r от его середины.

Заметим, что правые части для магнитного и электрического полей в отсутствие проводящей среды ($\mathbf{j} = 0$)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

имеют разные знаки.

Обусловлено это отличие тем, что силовые линии магнитного поля \mathbf{H} , возбуждаемого токами смещения $\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, составляют с направлениями этих токов правовинтовую систему, поскольку ток смещения имеет направление, совпадающее с направлением токов проводимости, тогда как векторы \mathbf{E} и $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ составляют левовинтовую систему (рис. 1.27).

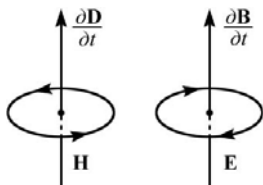


Рис. 2.27. К выбору знаков в уравнениях для электрического и магнитного полей. Векторы $\partial \mathbf{D}/\partial t$ и \mathbf{H} составляют правовинтовую систему, $\partial \mathbf{B}/\partial t$ и \mathbf{E} – левовинтовую

Отметим также, что токи смещения, в отличие от токов проводимости, не выделяют джоулевой теплоты. Для токов смещения в вакууме это очевидно. Оно также строго справедливо для токов смещения в диэлектриках, диэлектрическая постоянная ϵ которых не зависит от температуры. У диэлектриков с постоянными диполями изменение поляризации сопровождается выделением и поглощением теплоты, особенно заметным в высокочастотных полях. Но закономерности этого тепловыделения существенно отличаются от джоулевого.

Заметим, что в металлах величина токов смещения настолько мала

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial \epsilon \epsilon_0 E_0 \sin \omega t}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \omega E_0 \cos \omega t$$

по сравнению с токами проводимости

$$j_{\text{пр}} = \sigma E_0 \sin \omega t$$

при всех частотах $\nu = \omega/(2\pi)$, применяемых в технике ($\epsilon \epsilon_0 \omega \ll \sigma$) $\nu < 10^{14} \text{ c}^{-1}$, что пренебрежение ими при расчетах вполне обосновано. Однако при рассмотрении процессов в непроводящей среде и особенно в случае быстрых электронных колебаний токами смещения пренебречь нельзя.

Основные выводы

При изменении магнитного потока Φ в проводящем контуре возникает ЭДС индукции, величина которой определяется скоростью изменения магнитного потока через этот контур – закон Фарадея

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Знак «минус» в законе Фарадея говорит о том, что ЭДС индукции порождает в замкнутой цепи индукционный ток, направленный таким образом, чтобы препятствовать изменению магнитного потока в замкнутом контуре – правило Ленца. Магнитный поток можно изменять, двигая катушки, магниты или изменяя силу тока в неподвижных катушках.

Если переменный высокочастотный ток протекает по проводнику, то вихревые токи, индуцируемые в проводнике, препятствуют равномерному распределению тока по поперечному сечению проводника – плотность тока на оси провода оказывается меньше, чем у его поверхности – скин-эффект. Плотность тока убывает от поверхности к оси по закону

$$j = j_0 \exp(-\alpha r),$$

где $\alpha = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\sigma \mu \nu}$; σ – удельная электропроводность образца;

μ – магнитная проницаемость провода; ν – частота колебаний электрического тока; c – скорость света.

Переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле и в свободном от проводников пространстве. Работа вихревого поля по замкнутому контуру не равна нулю:

$$\oint_{(\Gamma)} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}),$$

где S – поверхность, ограниченная замкнутым контуром Γ .

В дифференциальной форме:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Явление возникновения ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется самоиндукцией – частный случай электромагнитной индукции. ЭДС самоиндукции определяется выражением

$$\mathcal{E} = -\frac{d(LI)}{dt}.$$

Здесь L – коэффициент самоиндукции, или индуктивность.

$$\Psi = LI.$$

Ψ – полный поток вектора магнитной индукции (потокосцепление), посылаемый током I через свой собственный контур,

$\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$, Φ_i – поток через i -й виток; N – число витков в контуре.

В общем случае

$$L = \frac{\mu\mu_0}{4\pi I^2} \iint_V \int_V \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{j}')}{\Delta R} dV dV'.$$

Для соленоида длиной l , объемом V , содержащим N витков и магнитный сердечник с магнитной проницаемостью μ ,

$$L = \mu\mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 V.$$

Индуктивность определяется геометрией контура, числом витков N , магнитными свойствами окружающей среды.

За единицу индуктивности в СИ 1 Гн [L] принимается индуктивность проводника, у которого при силе тока 1 А [I] возникает связанный с ним магнитный поток в 1 Вб [Ψ]:

$$1 \text{ Гн } [L]; 1 \text{ А } [I] = 1 \text{ Вб } [\Psi].$$

При включении и выключении тока в замкнутой цепи, содержащей индуктивность L и сопротивление R , нарастание и спад тока происходит по закону

$$I(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau}), \quad I(t) = I_0 e^{-t/\tau},$$

где $\tau = L/R$ – постоянная времени установления; $I_0 = \mathcal{E}_0/R$ – стационарный ток в цепи; \mathcal{E}_0 – ЭДС источника.

Явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется взаимной индукцией. ЭДС взаимной индукции равна

$$\mathcal{E}_{12} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_{21} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

Коэффициенты $L_{12} = L_{21}$ называются коэффициентами взаимной индукции или взаимной индуктивностью контуров. Для двух катушек на общем сердечнике

$$L_{12} = L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l^2} V,$$

где N_1, N_2 – число витков первой и второй катушки; l – длина катушек; V – объем сердечника.

Если магнитные потоки не рассеиваются, то в режиме холостого хода отношение напряжения в первичной V_1 и вторичной V_2 обмотках трансформатора пропорционально отношению числа витков в этих оболочках

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

При вращении рамки площадью S , содержащей N витков с угловой скоростью ω в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} ($\mathbf{B} \perp \boldsymbol{\omega}$), в рамке наводится ЭДС

$$\mathcal{E} = NBS\omega \sin\omega t.$$

Данная рамка является прообразом генератора переменного тока.

Приращение импульса электрона в переменном поле

$$\Delta p(t) = \frac{er}{2} \Delta B_{cp}(t)$$

определяется приращением средней индукции магнитного поля ΔB_{cp} внутри электронной орбиты радиусом r и лежит в основе работы индукционного ускорителя электронов – бетатрона.

Для работы бетатрона необходимо, чтобы среднее магнитное поле внутри орбиты росло в два раза быстрее магнитного поля на самой орбите (условие Видероз)

$$\frac{dB_{cp}(t)}{dt} = 2 \frac{dB_{yup}(t)}{dt}.$$

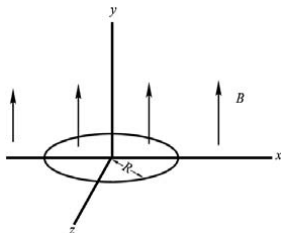
Вихревое магнитное поле может порождаться не только электрическим током, но и изменяющимся со временем электрическим полем в пространстве, свободном от проводников и зарядов:

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu\mu_0 \oint_{(S)} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) + \mu\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S})$$

или в дифференциальной форме

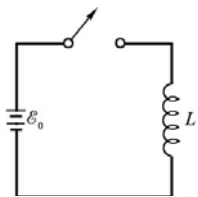
$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{j} + \mu\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Упражнения

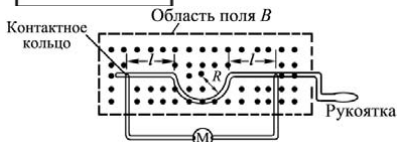


1. Круглая рамка радиусом R находится в однородном магнитном поле \mathbf{B} , направленном вдоль оси y . Первоначально она располагалась в плоскости xz , как показано на рисунке. Чему будет равно среднее значение индуцированной ЭДС, если рамка повернется на $\Delta\varphi = 180^\circ$ вокруг оси z за $t = 0,5$ с?
 Ответ: $\langle \mathcal{E} \rangle = B\pi R^2$.

2. Если бы рамка в упражнении 1 не вращалась, а двигалась в однородном магнитном поле со скоростью v вдоль оси x , то чему была бы равна индуцированная ЭДС? Ответ: $\langle \mathcal{E} \rangle = 0$.
3. Если бы рамка в упражнении 1 была закреплена неподвижно, а внешнее магнитное поле B уменьшалось бы со временем, то каким бы было направление индуцированного тока при наблюдении рамки сверху? Ответ: Против часовой стрелки.



4. На рисунке показана идеальная цепь, состоящая из источника ЭДС \mathcal{E}_0 и катушки индуктивности L . Пусть полное сопротивление цепи равно нулю. Какой ток будет в цепи спустя $t = 1$ с после замыкания ключа, если $L = 0,1$ Гн, $\mathcal{E}_0 = 1,5$ В? Ответ: $I = 15$ А.

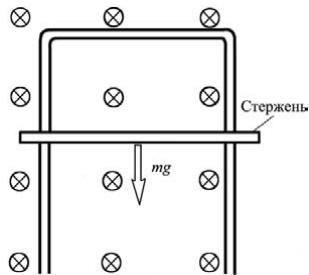


5. Проводник в виде полуокружности радиусом R с помощью рукоятки вращается с частотой f в однородном магнитном поле \mathbf{B} . Поле \mathbf{B} направлено на читателя. Электрический контакт с прибором M осуществляется через контактные кольца.

Каковы амплитуды индуцированного напряжения и тока, если внутреннее сопротивление прибора M равно r , а сопротивлением остальной части цепи можно пренебречь? Ответ: $\mathcal{E}_m = B(\pi R)^2 \nu$; $I_m = B(\pi R)^2 \nu / r$.

6. Проводник в виде стержня длиной $l = 1$ м, весом $mg = 1$ Н и сопротивлением $R = 10$ Ом падает, сохраняя контакт с вертикальными стойками и образуя с ними замкнутый контур. Сопротивление всех деталей, кроме стержня, ничтожно мало. Магнитное

поле B , как видно из рисунка, направлено за плоскость чертежа перпендикулярно этой плоскости и равно 2 Тл. Пренебрегая трением, найдите установившуюся скорость падения стержня, а также направление индуцированного тока.



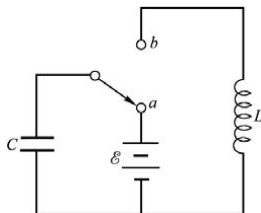
Ответ: $v = mgR / (lB)^2 = 2,5$ м/с;

слева направо.

7. Квадратная рамка со стороной $l = 1$ м и сопротивлением $R = 0,5$ Ом закреплена в однородном магнитном поле B , величина которого линейно растёт со временем со скоростью $0,1$ Тл/с. Направление магнитного поля образует с плоскостью рамки угол $\alpha = 45^\circ$. Найдите мощность W , рассеиваемую в рамке.

Ответ: $W = (dB / dt) \cdot S^2 \cos^2 \alpha / R = dB / dt = 0,1$ Вт.

8. В момент времени $t = 0$ ключ перебрасывается из положения a в положение b (см. рисунок). Выведите формулу для величины заряда конденсатора в зависимости от времени, считая величины \mathcal{E} , C и L известными.



9. Катушка индуктивности L обладает внутренним сопротивлением R . При какой угловой частоте ω переменного напряжения ток будет отставать по фазе от напряжения на угол $\alpha = 45^\circ$? Ответ: $\omega = R/L$.

10. Катушка из $N = 300$ витков с площадью поперечного сечения $S = 100$ см² вращается в магнитном поле величины $B = 0,5$ Тл со скоростью с частотой $n = 1800$ об/мин. Чему равна амплитуда \mathcal{E}_m индуцированной ЭДС? Ответ: $\mathcal{E}_m = 2\pi n N B S = 283$ В.

11. Катушка из $N = 1000$ витков с площадью поперечного сечения $S = 100$ см², расположенная перпендикулярно магнитному полю Земли, поворачивается за $t = 1$ с на угол $\alpha = 90^\circ$. В катушке за $t = 1$ с наводится ЭДС $\langle \mathcal{E} \rangle$ со средним значением $0,6$ мВ. Найдите величину магнитного поля Земли. Ответ: $B = \langle \mathcal{E} \rangle \cdot t / (NS) = 60$ мкТл.

12. Пусть первичная обмотка трансформатора содержит 10 витков, а вторичная – 25 витков. Если к первичной обмотке приложено

переменное напряжение с частотой 60 Гц, то через обе обмотки проходит максимум четыре силовые линии магнитного поля. Чему равны амплитуды напряжения в каждой обмотке?

13. Обобщая теорему о равномерном распределении энергии, можно показать, что средняя плотность энергии магнитного поля в межзвездном пространстве равна средней плотности кинетической энергии частиц, главным образом атомов водорода, которые движутся с тепловой скоростью около 10^3 м/с. Плотность частиц равна примерно 1 см^{-3} . Вычислите среднюю величину магнитного поля.

14. Выходное напряжение в вольтах записывается в виде $V = 220 \cdot \sin \omega t$. Чему равно $V_{\text{ср.кв}}$? Ответ: $V_{\text{ср.кв}} = (220/1,41) = 156 \text{ В}$.

Указание. $V_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\overline{V^2}}$, $\overline{V^2} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T V^2 dt$.

15. Рамка на рис. 11.3 поворачивается за $\Delta t = 0,5$ с на угол от $\theta_1 = 0^\circ$ до $\theta_2 = 180^\circ$. Чему равно среднее значение напряжения? Ответ запишите через величины – площадь рамки S и индукцию поля B . Ответ: $V_{\text{ср}} = 2BS/\Delta t = 4BS$.

16. Повторите упражнение 15 для случая, когда рамка поворачивается от $\theta_1 = 90^\circ$ до $\theta_2 = 270^\circ$. Ответ: $V_{\text{ср}} = 0$.

17. Пусть рамка на рис. 11.3 закреплена в положении, указанном на этом рисунке, а магнитное поле B уменьшается во времени. На какой из клемм потенциал выше? Ответ: $\phi_1 = \phi_2$.

18. Со вторичной обмотки трансформатора на двигатель, который потребляет ток 10 А, подается напряжение 12 В. Используя закон сохранения энергии и считая, что потеря энергии нет, найдите:

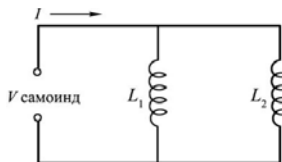
а) мощность двигателя в л.с.;

б) ток, который отбирается от линии передачи с напряжением 120 В. Ответ: а) 0,16 л.с.; б) 1 А.

19. Генератор переменного тока мощностью 100 МВт питает линию передачи сопротивлением 5 Ом. Каким должно быть переменное напряжение, чтобы потери в линии передачи составляли не более 2%? Ответ: $U = 158 \text{ кВ}$.

20. Пусть два соленоида с индуктивностями L_1 и L_2 соединены параллельно, как показано на рисунке. Докажите, что

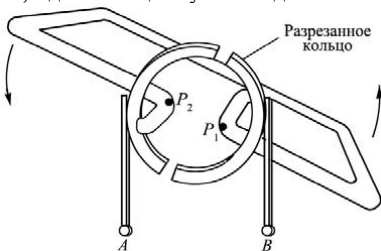
$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}, \text{ где } V_{\text{соленоид}} = L \frac{dl}{dt}.$$



Задачи

1. Пусть в схеме на рис. 11.3 между клеммами генератора подключено сопротивление $R = 10$ Ом. Какой величины заряд пройдет через сопротивление, когда рамка поворачивается от 0° до 180° ? Считайте $S = 10^{-2}$ м² и $B = 1,5$ Тл. (Указание. Используя формулу $I = (1/R)V$, покажите, что $dq = (1/R)d\Phi$). Ответ: $\Delta q = \Delta\Phi/R = B \cdot 2S/R = 3$ мКл.

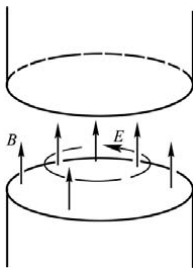
2. Пусть в генераторе (п. 11.8) один конец катушки подключен к одной части разрезанного пополам медного кольца, а другой конец катушки – к другой (см. рисунок). Это разрезанное коллекторное кольцо находится в электрическом контакте с двумя медными щетками. Постройте зависимость выходного напряжения между точками A и B от времени.



Чему равна величина $\langle V \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V dt$? (На этом принципе построен генератор постоянного тока.)

Ответ: $V(t) = BS\omega \sin\omega t$; $\langle V \rangle = 1,41 \cdot BS\omega$.

3. В циклотроне используется магнит с полюсами круглой формы радиусом 50 см (см. рисунок). Вследствие большой индуктивности катушки ток в магните после включения линейно возрастает в течение 2 с и магнитное поле достигает за это время максимального значения 2 Тл. В течение этого времени между полюсами индуцируется поле E (на рисунке показано круговой линией).



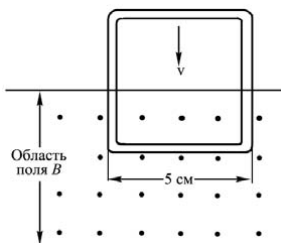
а) Найдите выражение для величины поля E через $\partial B/\partial t$ и r .

б) Какова величина поля E в точке $r = 40$ см?

4. Повторите решение задачи 3(а) для случая, когда r превышает радиус магнита R .

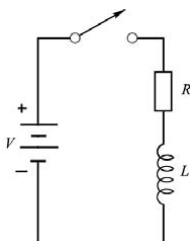
5. Коснувшись клемм батареи низкого напряжения языком,

можно буквально попробовать электричество на вкус. Например, довольно сильное ощущение вызывают 1,5 В при расстоянии между клеммами 6 см. С какой скоростью нужно трести головой между полюсами магнита циклотрона ($B = 2$ Тл.) в задаче 2, чтобы ощутить то же самое?



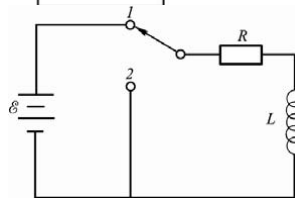
6. Квадратная медная рамка с сопротивлением $R = 0,5$ Ом попадает в область магнитного поля $B = 1,6$ Тл (см. рисунок). Магнитное поле \mathbf{B} направлено перпендикулярно плоскости рисунка, на нас. Масса единицы длины провода равна $\Delta m/\Delta l = 2$ г/м. Действующая на рамку магнитная сила противоположна силе тяжести. Найдите скорость установившегося движения рамки и направление индуцированного в ней тока.

Ответ: $v = mgR/(lB)^2 = 0,31$ м/с



7. Катушка индуктивности и резистор соединены последовательно, как показано на рисунке. В момент времени $t = 0$ замыкается ключ. Докажите, что зависимость тока от времени имеет следующий вид:

$$I = \frac{V}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right].$$



8. Пусть в схеме, показанной на рисунке, ключ находится в положении 1 и в цепи течет постоянный ток.

1) Какая энергия запасается в индуктивности L ?

2) Найдите зависимость падения напряжения на сопротивлении R от времени, после того как ключ

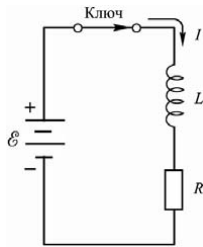
переброшен из положения 1 в положение 2.

3) Найдите полную энергию, рассеиваемую в резисторе в виде

джоулевой теплоты за время от $t = 0$ до $t = \infty$, после того как ключ переброшен из положения 1 в положение 2.

Ответ: 1) $W = L\varepsilon^2/(2R^2)$; 2) $U_R = \varepsilon \exp[-(R/L)t]$; 3) $W = L\varepsilon^2/(2R^2)$.

9. Пусть в схеме, показанной на рисунке, ключ замыкается в момент $t = 0$. Найдите зависимость падения напряжения на сопротивлении ε , L и R известны. (Сумма падений напряжений на элементах этой цепи равна $\varepsilon - L(dI/dt) - IR = 0$.) Ответ: $U = \varepsilon [1 - \exp(-(R/L)t)]$.



10. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,4$ Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной $l = 10$ см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ на концах стержня при частоте вращения $n = 16$ с⁻¹. Ответ: $U = \pi^2 B n l = 201$ мВ.

11. Рамка площадью $S = 200$ см² равномерно вращается с частотой $n = 10$ с⁻¹ относительно оси, лежащей в плоскости рамки, и перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля ($B = 0,2$ Тл). Каково среднее значение ЭДС индукции $\langle \varepsilon_i \rangle$ за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения? Ответ: $\langle \varepsilon_i \rangle = 4nBS = 0,16$ В.

12. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,35$ Тл равномерно с частотой $n = 480$ мин⁻¹ вращается рамка, содержащая $N = 500$ витков площадью $S = 50$ см². Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции ε_{\max} , возникающую в рамке. Ответ: $\varepsilon_{\max} = 2\pi n B N S = 132$ В.

13. Рамка площадью $S = 100$ см² содержит $N = 10^3$ витков провода сопротивлением $R_1 = 12$ Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление $R_2 = 20$ Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле ($B = 0,1$ Тл) с частотой $n = 8$ с⁻¹. Определить максимальную мощность W_{\max} переменного тока в цепи. Ответ: $W_{\max} = (2\pi n B N S)^2 / (R_1 + R_2) = 79$ Вт.

14. Проволочный виток радиусом $r = 4$ см, имеющий сопротивление $R = 0,01$ Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,04$ Тл. Плоскость рамки составляет угол $\alpha = 30^\circ$

с линиями индукции поля. Какое количество электричества q протечет по витку, если магнитное поле исчезнет? Ответ: $q = \pi Br^2 \cdot \sin \alpha / R = 10$ мкКл.

15. Проволочное кольцо радиусом $r = 10$ см лежит на столе. Какое количество электричества q протечет по кольцу, если его повернуть с одной стороны на другую? Сопротивление R кольца равно 1 Ом. Вертикальная составляющая индукции B магнитного поля Земли равна 50 мкТл. Ответ: $q = 3,14$ мкКл.

16. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. По цепи протекло количество электричества $q = 10$ мкКл. Определить магнитный поток Φ , пересеченный кольцом, если сопротивление R цепи гальванометра равно 30 Ом. Ответ: $\Phi = 0,3$ мВб.

17. Между полюсами электромагнита помещена катушка, соединенная с баллистическим гальванометром. Ось катушки параллельна линиям индукции. Катушка сопротивлением $R_1 = 4$ Ом имеет $N = 15$ витков площадью $S = 2$ см². Сопротивление R_2 гальванометра равно 46 Ом. Когда ток и обмотке электромагнита выключили, по цепи гальванометра протекло количество электричества $q = 90$ мкКл. Вычислить магнитную индукцию B поля электромагнита. Ответ: $B = 1,5$ Тл.

18. По катушке индуктивностью $L = 0,03$ мГн течет ток $I = 0,6$ А. При размыкании цепи сила тока изменяется практически до нуля за время $\Delta t = 120$ мкс. Определить среднюю ЭДС самоиндукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, возникающую в контуре. Ответ: $\langle \mathcal{E}_i \rangle = 0,15$ В.

19. С помощью реостата равномерно увеличивают силу тока в катушке на $\Delta I = 0,1$ А в 1 с. Индуктивность L катушки равна $0,01$ Гн. Найти среднее значение ЭДС самоиндукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$. Ответ: $\langle \mathcal{E}_i \rangle = 1$ мВ.

20. Индуктивность L катушки равна 2 мГн. Ток частотой $\nu = 50$ Гц, протекающий по катушке, изменяется по синусоидальному закону. Определить среднюю ЭДС самоиндукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, возникающую за интервал времени Δt , в течение которого ток в катушке изменяется от минимального до максимального значения. Амплитудное значение силы тока $I_0 = 10$ А. Ответ: $\langle \mathcal{E}_i \rangle = 4$ В.

21. Длинный прямой соленоид, намотанный на немагнитный каркас, имеет $N = 1000$ витков и индуктивность $L = 3$ мГн. Какой магнитный поток Φ и какое потокоцепление Ψ создает соленоид при силе тока $I = 1$ А? Ответ: $\Phi = 3$ мкВб; $\Psi = 3$ мВб.

22. Соленоид, площадь S сечения которого равна 5 см², содержит $N = 1200$ витков. Индукция B магнитного поля внутри соленоида при силе тока $I = 2$ А равна $0,01$ Тл. Определить индуктивность L соленоида. Ответ: $L = 3$ мГн.

23. Соленоид содержит $N = 1000$ витков. Площадь S сечения сердечника равна 10 см^2 . По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией $B = 1,5 \text{ Тл}$. Найти среднюю ЭДС индукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, возникающей в соленоиде, если ток уменьшится до нуля за время $t = 500 \text{ мкс}$. Ответ: $\langle \mathcal{E}_i \rangle = NBS/t = 3 \text{ кВ}$.
24. В цепи шел ток $I_0 = 50 \text{ А}$. Источник тока можно отключить от цепи, не разрывая ее. Определить силу тока I в этой цепи через $t = 0,01 \text{ с}$ после отключения ее от источника тока. Сопротивление R цепи равно 20 Ом , ее индуктивность $L = 0,1 \text{ Гн}$. Ответ: $I = 6,75 \text{ А}$.
25. Источник тока замкнули на катушку с сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$ и индуктивностью $L = 1 \text{ Гн}$. Через сколько времени Δt сила тока замыкания достигнет $0,9$ предельного значения? Ответ: $\Delta t = 0,23 \text{ с}$.
26. Цепь состоит из катушки индуктивностью $L = 1 \text{ Гн}$ и сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$. Источник тока можно отключать, не разрывая цепи. Определить время t , по истечении которого сила тока уменьшится до $0,001$ первоначального значения. Ответ: $t = 0,69 \text{ с}$.
27. К источнику тока с внутренним сопротивлением $R_i = 2 \text{ Ом}$ подключают катушку индуктивностью $L = 0,5 \text{ Гн}$ и сопротивлением $R = 8 \text{ Ом}$. Найти время t , в течение которого ток в катушке, нарастая, достигнет значения, отличающегося от максимального на 1% . Ответ: $25,45$.
28. Средняя скорость изменения магнитного потока $(\Delta\Phi/\Delta t)$ в бетатроне, рассчитанном на энергию $T = 60 \text{ МэВ}$, составляет 50 Вб/с . Определить: 1) число N оборотов электрона на орбите за время ускоренного движения; 2) путь l , пройденный электроном, если радиус r орбиты равен 20 см . Ответ: 1) $N = 1,2 \cdot 10^6$ оборотов; 2) $l = 1,51 \cdot 10^6 \text{ м}$.
29. В бетатроне скорость изменения магнитной индукции $dB_{\text{cp}}/dt = 60 \text{ Тл/с}$. Определить: 1) напряженность E вихревого электрического поля на орбите электрона, если ее радиус $r = 0,5 \text{ м}$; 2) силу F , действующую на электрон. Ответ: 1) $E = 12 \text{ В/м}$; 2) $F = 1,92 \text{ аН}$.
30. Электрон в бетатроне движется по орбите радиусом $r = 0,4 \text{ м}$ и приобретает за один оборот кинетическую энергию $T = 20 \text{ эВ}$. Вычислить скорость изменения магнитной индукции dB_{cp}/dt , считая эту скорость в течение интересующего нас промежутка времени постоянной. Ответ: $dB_{\text{cp}}/dt = 40 \text{ Тл/с}$.

3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

3.1. Введение

Обобщая эмпирические закономерности, установленные Ампером, Кулоном, Эрстедом, Фарадеем в 60-х гг. XIX в., английский физик Дж. Максвелл сформулировал фундаментальные уравнения классической макроскопической электродинамики. Эти уравнения описывают электромагнитные явления в любой среде и в вакууме. Особенно велико было влияние на Дж. Максвелла работ М. Фарадея. Максвелл отмечал, что установленные им законы являются «математическим выражением той идеи, которая лежала в основе хода мыслей Фарадея в его экспериментальных исследованиях».

Уравнения Максвелла для электромагнитных явлений аналогичны по своей значимости законам Ньютона в классической динамике. Максвелловская теория электромагнитного поля, или максвелловская электродинамика, «поднимала познание природы на новую, высшую ступень и вместе с тем была более непонятной, абстрактной, чем предшествующие теории». Последнее обстоятельство обуславливало сравнительно долгое неприятие теории Максвелла физиками, и только после опытов Герца с высокочастотными электромагнитными колебаниями и электромагнитными волнами началось ее признание.

Уравнения Максвелла связывают величины, характеризующие электромагнитное поле, с его источниками – распределенными в пространстве электрическими зарядами и токами.

В вакууме электромагнитное поле характеризуется напряженностью электрического поля \mathbf{E} и магнитной индукцией \mathbf{B} – векторными величинами, зависящими от пространственных координат \mathbf{r} и времени t . Эти величины определяют силы, действующие на заряды и токи, распределение которых задается плотностью заряда ρ и плотностью электрического тока \mathbf{j} – плотность сил Лоренца и плотность сил Ампера:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \rho \mathbf{E} + \rho [\mathbf{v}, \mathbf{B}],$$

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = [\mathbf{j}, \mathbf{B}].$$

\mathbf{f} – силы, действующие на элемент объема dV , в котором локализовано поле \mathbf{E} и (или) \mathbf{B} .

Для описания электромагнитных процессов в среде, кроме вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} и вектора магнитной индук-

ции \mathbf{B} , вводятся вспомогательные векторы, зависящие от состояния и свойств среды, – электрическая индукция \mathbf{D} и напряженность магнитного поля \mathbf{H} . Уравнения Максвелла определяют основные характеристики электромагнитного поля $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H})$ как функции координат и времени \mathbf{r}, t , если известны распределения зарядов ρ и токов \mathbf{j} в пространстве и их изменение во времени.

3.2. Уравнения Максвелла в интегральной – дифференциальной формах

Уравнения Максвелла могут быть записаны в интегральной и дифференциальной формах и определяют векторы $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H})$ как функции источников поля – зарядов и токов. Интегральные величины зависят от распределения характеристик поля – циркуляции векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} вдоль произвольных замкнутых контуров и от потоков векторов \mathbf{D} и \mathbf{B} через произвольные замкнутые поверхности. Интегральная форма записи ближе к идее дальнего действия – мгновенное взаимодействие, осуществляющееся через пустое пространство.

Эти две формы записи уравнений Максвелла хотя психологически и философски совершенно противоположны, но математически полностью эквивалентны. Для доказательства этого необходимо уравнение Максвелла в интегральной форме записать для бесконечно малых произвольных контуров и поверхностей, а затем воспользоваться теоремами Стокса и Остроградского для перехода от объемных интегралов к поверхностным и от контурных к поверхностным. В результате из интегральной формы записи уравнений Максвелла перейдем к дифференциальной.

Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \int_{(S)} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = - \int_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad \oint_{(S)} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \int_V \rho dV, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \oint_{(S)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0. \quad (4)$$

Первое уравнение Максвелла является обобщением на случай переменных полей закона Био – Савара, описывающего возбуждения магнитного поля электрическими токами. Максвелл обосновал гипотезу о возможности возбуждения магнитного поля не только токами \mathbf{j} , текущими в проводниках, но и переменными электрическими полями в диэлектриках и вакууме. Величина, пропорциональная скорости изменения электрического поля во времени, была названа Максвеллом током смещения $\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

Полный ток, возбуждающий магнитное поле, равен сумме токов проводимости и смещения. Первое уравнение Максвелла в интегральной форме говорит, что циркуляция вектора \mathbf{H} по произвольному замкнутому контуру Γ равна полному току, проходящему через произвольную поверхность S , ограниченную контуром Γ .

Второе уравнение Максвелла служит математической формулировкой закона электромагнитной индукции Фарадея: циркуляция вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} по произвольному замкнутому контуру Γ равна скорости изменения потока вектора магнитной индукции \mathbf{B} через произвольную поверхность S , ограниченную контуром Γ (п. 2.2).

Третье уравнение Максвелла, обычно называемое теоремой Гаусса, служит обобщением закона Кулона, описывающего взаимодействие неподвижных зарядов: поток вектора электрической индукции \mathbf{D} через произвольную поверхность S равен электрическому заряду, находящемуся в объеме V , ограниченном поверхностью S .

Четвертое уравнение Максвелла говорит о том экспериментальном факте, что свободные магнитные заряды отсутствуют – поток вектора магнитной индукции \mathbf{B} через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю. Этим объясняется и асимметрия уравнений Максвелла – отсутствие магнитных токов во втором уравнении и магнитных зарядов в четвертом. Физический смысл уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах полностью эквивалентен.

Записанные четыре уравнения Максвелла не образуют замкнутой системы, позволяющей рассчитать электромагнитные процессы при наличии материальной среды, поскольку число неизвестных в этих уравнениях больше числа уравнений.

Эти уравнения следует дополнить соотношениями, связывающими векторы \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} и \mathbf{j} . Связь между ними определяется свойствами среды и ее состояниями

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}).$$

Эти уравнения называются уравнениями состояния или материальными уравнениями. Вид этих уравнений определяется электрическими и магнитными свойствами среды.

В вакууме

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}),$$

причем ток проводимости может присутствовать и в вакууме, например в виде тока термоэлектронной эмиссии.

Уравнения поля и уравнения состояния образуют полную систему уравнений.

Для большинства изотропных сред, вплоть до сильных полей, уравнения состояния имеют простую линейную форму

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{стр}}.$$

Здесь ε – диэлектрическая, а μ – магнитная проницаемость среды; σ – удельная проводимость; $\mathbf{j}_{\text{стр}}$ – плотность сторонних токов – токов, поддерживаемых любыми силами, кроме консервативных сил электрического поля, в частности, диффузией, магнитным полем.

Величины ε , μ , σ могут быть найдены экспериментально либо рассчитаны теоретически. В общем случае уравнения состояния очень сложны и нелинейны.

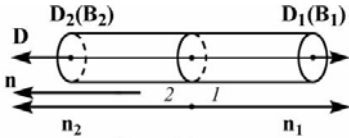
Уравнения Максвелла в интегральной форме справедливы и при наличии поверхностей разрыва – границ сред, на которых свойства среды и полевые характеристики изменяются скачкообразно. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме следует дополнить соответствующими граничными условиями, позволяющими связать величины векторов $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H})$ на границах раздела. Взяв бесконечно малую цилиндрическую поверхность на границе раздела двух сред, по теореме Гаусса получаем для векторов электрической и магнитной индукции (рис. 3.1 а)

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}, \mathbf{D}_2) + (\mathbf{n}, \mathbf{D}_1) &= \sigma_{\text{пов}}, & D_{2n} - D_{1n} &= \sigma_{\text{пов}}, \\ (\mathbf{n}, \mathbf{B}_2) + (\mathbf{n}, \mathbf{B}_1) &= 0, & B_{2n} - B_{1n} &= 0. \end{aligned}$$

Соответственно по теореме о циркуляции для векторов \mathbf{H} и \mathbf{E} получаем (рис. 3.1 б)

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, \mathbf{E}]_2 - [\mathbf{n}, \mathbf{E}]_1 &= 0, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}]_2 - [\mathbf{n}, \mathbf{H}]_1 &= \mathbf{i}. \end{aligned}$$

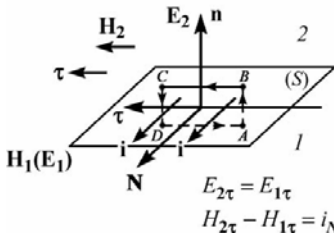
Здесь σ , \mathbf{i} – поверхностная плотность заряда и тока; \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности в направлении от первой сферы ко второй, индексы относятся к разным сторонам границ раздела.



$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

а



б

Рис. 3.1. К выводу граничных условий для уравнений Максвелла в дифференциальной форме: σ – поверхностная плотность свободных электрических зарядов на границе раздела (а); \mathbf{i} – поверхностная плотность тока проводимости на рассматриваемой поверхности S (б). D_{2n} , D_{1n} , B_{2n} , B_{1n} – проекции векторов \mathbf{D}_2 , \mathbf{D}_1 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{B}_1 на нормаль \mathbf{n} . H_{2t} , E_{2t} , H_{1t} , E_{1t} – тангенциальные составляющие векторов \mathbf{H} , \mathbf{E} вдоль нормали к контуру $\mathbf{N} = [\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}]$

В частности, когда на границах раздела нет поверхностных токов и зарядов $i = 0$, $\sigma = 0$, то можем записать

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad B_{1n} = B_{2n},$$

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad H_{1t} = H_{2t}$$

– на границах раздела не изменяются нормальные компоненты векторов индукции и тангенциальные – напряженностей.

В случае стационарных полей $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$ уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений:

электростатики:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

магнитостатики:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}.$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга. Источниками электрических полей являются заряды, магнитных – токи проводимости.

Уравнения Максвелла для поля линейны. Уравнения состояния, в общем случае, нелинейны. Нелинейность уравнений состояния обычно проявляется в сильных полях. В вакууме и линейных средах, удовлетворяющих условиям $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, уравнения Максвелла линейны, и поэтому для них справедлив принцип суперпозиции – при наложении полей они не оказывают влияние друг на друга. Поэтому поле, созданное совокупностью электрических зарядов и токов, равно сумме полей, создаваемых этими зарядами и токами по отдельности.

Как мы увидим в дальнейшем, уравнения Максвелла приводят к фундаментальному выводу о конечности скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Это означает, что при изменении плотности заряда или тока источников электромагнитного поля эти изменения на расстоянии R от источников скажутся лишь спустя конечное время $t = R/v$, где v – скорость распространения электромагнитных полей. Вследствие конечности скорости распространения электромагнитных взаимодействий возможно существование электромагнитных волн, частным случаем которых являются световые волны.

Электромагнитные явления, как и все другие физические явления, должны удовлетворять принципу относительности. В соответствии с этим принципом уравнения Максвелла не должны менять своей формы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Выполнение принципа относительности для электромагнитных процессов оказалось несовместимым с классическими представлениями о пространстве и времени как о независимых понятиях, где реализуется бесконечная скорость передачи взаимодействия. Пересмотр этих представлений привел А. Эйнштейна к созданию специальной теории относительности. Релятивистки инвариантная форма уравнений Максвелла подчеркивает тот факт, что электрическое и магнитное поля образуют единое электромагнитное поле.

Уравнения Максвелла описывают огромную область явлений. Они лежат в основе электротехники и радиотехники и играют важнейшую роль в раскрытии таких актуальных направлений современной физики, как физика плазмы и проблема управляемого термоядерного синтеза, магнитная термодинамика, нелинейная оптика, конструирование ускорителей заряженных частиц, астрофизика и т.п. Уравнения Максвелла неприменимы лишь при очень больших частотах электромагнитных волн, когда становятся

существенными квантовые эффекты, т.е. когда энергия отдельных квантов электромагнитного поля – фотонов – велика и в процессах участвует сравнительно небольшое число фотонов.

3.3. Распространение электромагнитного поля

Уравнения Максвелла намного сложнее уравнений Ньютона и описывают очень широкий круг явлений, особенно интересных в случае переменных электрических и магнитных полей. Начнем рассмотрение следствий, вытекающих из решения уравнений электромагнитного поля в самых простейших случаях. Пусть двумерную область YZ занимает бесконечно большая проводящая плоскость (рис.3.2). Вдоль этой плоскости в направлении оси Y в момент времени $t = 0$ начинает идти ток с линейной плотностью I (А/м) – ток на единицу ширины плоскости.

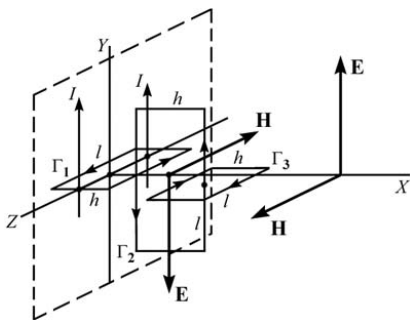


Рис. 3.2. Ток, текущий в направлении Y в плоскости YZ , порождает магнитное поле \mathbf{H} в плоскости XZ ($\mathbf{H} \uparrow Z$) и электрическое поле \mathbf{E} в плоскости YX ($\mathbf{E} \uparrow Y$) и т.д. Поле распространяется вдоль оси X со скоростью v . Векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} , v взаимно перпендикулярны

Появившийся в плоскости YZ ток является источником магнитного поля. Если в плоскости ZX провести контур Γ_1 шириной h и длиной l , то по теореме о циркуляции, учитывая, что токи смещения в металле малы, получаем величину напряженности магнитного поля, связанного током I (А/м):

$$H \cdot 2l = jlh = Il.$$

Таким образом, вблизи от проводящей плоскости в момент времени $t = 0$ возникает магнитное поле, ориентированное вдоль оси Z , напряженностью

$$H = \frac{I}{2}.$$

Но при внезапном появлении вблизи плоскости магнитного поля, согласно второму уравнению Максвелла, должно возникнуть вихревое электрическое поле, удовлетворяющее уравнению

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}),$$

– второе уравнение Максвелла в интегральной форме. Проведем контур Γ_2 в плоскости YX шириной h вдоль оси X и высотой l вдоль оси Y такой, что возникающее вихревое магнитное поле, распространяясь со скоростью v , уже пересекло левую часть контура Γ_2 , ближайшую к плоскости с током, но еще не достигло правой стороны контура. В этом случае имеем

$$E \cdot l = -\frac{\partial}{\partial t} Bl \cdot h = -Blv.$$

Здесь $v = \partial h / \partial t$ – скорость распространения магнитного поля, возникшего у заряженной плоскости, скорость направлена вдоль оси X . Соответственно, напряженность электрического поля, силовые линии которого в контуре Γ_2 направлены вдоль оси $-Y$, равна

$$E = -Bv.$$

Итак, наряду с магнитным полем от плоскости, по которой прошел ток I , оторвалось и электрическое поле, причем его силовые линии ориентированы перпендикулярно силовым линиям вектора \mathbf{B} , ориентированным вдоль оси Z .

Но если у нас в некоторой точке пространства появляется электрическое поле, то его появление, согласно первому уравнению Максвелла, должно возбуждать магнитное поле

$$\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \frac{\partial}{\partial t} \int (\mathbf{D}, d\mathbf{S}).$$

В этом уравнении уже можно отбросить ток проводимости, поскольку поле удалилось от проводящей плоскости. Чтобы найти магнитное поле, порождаемое возбужденным вдоль контура Γ_2 электрическим полем, вновь построим в плоскости ZX контур Γ_3 шириной h такой, что распространяющееся вдоль оси X электрическое поле еще не достигло правой стороны контура, и его движение в пространстве вызывает появление магнитного поля

$$Hl = \frac{\partial}{\partial t} Dlh = Dlv,$$

где $v = \partial h / \partial t$ – скорость распространения электромагнитного поля.

Напряженность магнитного поля, порожденного циркуляцией в контуре Γ_2 электрического поля, равна

$$H = Dv.$$

Из найденных соотношений $E = Bv$, $H = Dv$ в вакууме или однородных диэлектрических и магнитных средах получаем ($D = \epsilon\epsilon_0 E$, $B = \mu\mu_0 H$)

$$EH = BDv^2 = \frac{BD}{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0},$$

откуда находим скорость распространения электромагнитного поля

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}.$$

Если подставить в выражение для c известные значения диэлектрической и магнитной постоянных $\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}\cdot\text{м}^{-1}$, $\mu_0 = 1,256637061 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}\cdot\text{м}^{-1}$, находим $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ – скорость распространения электромагнитного поля в вакууме равна скорости света. Причем электромагнитное поле распространяется в виде периодических изменений векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , которые взаимно перпендикулярны и перпендикулярны вектору скорости \mathbf{v} распространения электромагнитного поля. О таких колебаниях, совершаемых перпендикулярно вектору скорости, говорят, что они являются поперечными. Полученные впервые Максвеллом результаты показали, что в вакууме электромагнитное возмущение распространяется со скоростью света и представляет поперечные колебания. В веществе скорость распространения электромагнитных возмущений меньше в $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ раз. Все это позволило Максвеллу сделать фундаментальный вывод об электромагнитной природе света.

Надо отметить, что во времена Максвелла рассчитанное значение скорости света в вакууме недостаточно точно совпадало с измеренным, но он надеялся, что в дальнейших экспериментах соотношение между обеими величинами будет уточнено. Эта надежда Максвелла вполне оправдалась.

Кроме скорости света, Максвелл получил важнейшее соотношение между показателем преломления n и диэлектрической постоянной ϵ (для оптически прозрачных сред $\mu \approx 1$)

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon}},$$

$$n = \sqrt{\epsilon}.$$

Поскольку значения n и ϵ для многих материалов были измерены, то это позволяло провести еще одну экспериментальную проверку уравнений Максвелла. Но поначалу это вызвало затруднения. Дело в том, что величина ϵ определялась в основном из опытов в постоянных электрических полях, в то время как свет соответствует быстроизменяющимся электромагнитным процессам, и если измерить ϵ в переменных полях, то соотношение $n = \sqrt{\epsilon}$ прекрасно выполняется.

3.4. Электромагнитные волны

Рассмотрим более подробно вопрос о распространении электромагнитных возмущений в вакууме или однородной среде, описываемой постоянными значениями диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостей.

Уравнения Максвелла запишем для случая отсутствия токов и зарядов $\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0.$$

Оказывается, система этих уравнений имеет отличное от нуля решение. А это означает, что электромагнитное поле может существовать и при отсутствии каких бы то ни было проводников и зарядов даже в пустом пространстве.

Если учесть, что для произвольного вектора \mathbf{a} выполняется условие

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = -\Delta \mathbf{a} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a},$$

где $\Delta \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial z^2}$, то из первого уравнения Максвелла получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mu \mu_0 \mathbf{H} = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0.$$

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, то $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$. В результате для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} получаем уравнения

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0,$$

называемые волновыми уравнениями. При их записи учтено, что $v = 1/\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}$.

Рассмотрим частный случай, когда поле зависит от одной пространственной координаты, допустим, x и времени t . Такое поле соответствует плоским волнам. В этом случае уравнения поля приобретают вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} = 0.$$

Решение уравнений может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1(x - vt) + \mathbf{E}_2(x + vt), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_1(x - vt) + \mathbf{H}_2(x + vt). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{E}_{1,2}$ и $\mathbf{H}_{1,2}$ — произвольные функции аргументов $(x - vt)$, $(x + vt)$.

Действительно, для вектора \mathbf{E} имеем (для \mathbf{H} все полностью аналогично)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_2}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2} + v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_2}{\partial t^2},$$

откуда и получаем исходное уравнение.

Пусть, например, $\mathbf{E}_2 = 0$, так что

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1(x - vt).$$

Смысл этого решения состоит в следующем. В каждой плоскости $x = \text{const}$ поле изменяется со временем, и в каждый момент t поле различно для различных x . Но очевидно, что поле имеет одинаковое значение для координат x и моментов времени t , удовлетворяющих соотношению

$$x - vt = \text{const} = c_1.$$

Это соотношение означает, что если в момент времени $t = 0$ поле имело в точке $x_0 = c_1$ значение $\mathbf{E} = \mathbf{E}(c_1)$, то через промежуток времени t то же самое значение \mathbf{E} переносится в точку x_1 , отстоящую на расстоянии vt от x_0 : $x_1 = c_1 + vt_1 = x_0 + vt_1$, поскольку $x_1 - vt_1 = x_0 = c_1$. Можно сказать, что все значения вектора \mathbf{E}_1

распространяются в пространстве вдоль оси x со скоростью $v = 1/\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}$, равной скорости света в веществе (рис. 3.3).

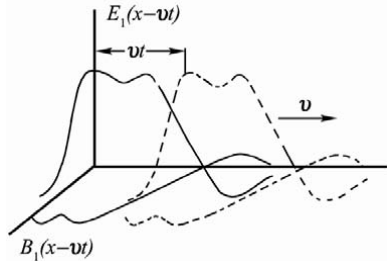


Рис. 3.3. Функция $E_1(x - vt)$ представляет неизменный «контур», перемещающийся в направлении возрастания x со скоростью v

Таким образом, $\mathbf{E}_1(x - vt)$, $\mathbf{H}_1(x - vt)$ представляют плоские волны, бегущие в положительном направлении оси x , а $\mathbf{E}_2(x + vt)$, $\mathbf{H}_2(x + vt)$ в противоположном, отрицательном направлении оси x . Рассмотрим, как расположены вектора \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{v} в плоской волне.

Из условия $\text{div} \mathbf{B} = 0$ следует, что для \mathbf{B} можем записать $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$, поскольку дивергенция ротора всегда равна нулю:

$$\text{div rot } \mathbf{A} = (\nabla, [\nabla, \mathbf{A}]) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель равен нулю как определитель с двумя одинаковыми строками.

Из первого уравнения Максвелла в однородной среде без токов и зарядов имеем

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A}.$$

Меняя местами операции дифференцирования по времени и координатам, получаем

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

В случае плоской волны \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{A} являются функциями $\xi = x - vt$, поэтому

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = v \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi},$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ A_x(\xi) & A_y(\xi) & A_z(\xi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} \xi & \frac{\partial}{\partial y} \xi & \frac{\partial}{\partial z} \xi \\ \frac{\partial A_x}{\partial \xi} & \frac{\partial A_y}{\partial \xi} & \frac{\partial A_z}{\partial \xi} \end{vmatrix}.$$

Здесь \mathbf{i} – единичный вектор вдоль направления распространения волны, параллельный вектору скорости \mathbf{v} ($\mathbf{i} = \mathbf{v}/v$). Таким образом, мы получили

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad (\mathbf{H} = [\mathbf{v}, \mathbf{D}])$$

– в плоской волне все три вектора \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{v} взаимно перпендикулярны. Причем векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} лежат в одной плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны. По этой причине электромагнитные волны называют поперечными. Воспользовавшись последним уравнением, получим соотношение между численными значениями векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в электромагнитной волне

$$\sqrt{\mu\epsilon_0} H = \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E.$$

Это соотношение не зависит от времени, т.е. векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} изменяются в волне синхронно.

Решение трехмерного волнового уравнения

$$v^2 \Delta \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

может быть представлено как суперпозиция уже найденных одномерных решений. Наряду с волнами, распространяющимися в направлении x (вектор \mathbf{E} не зависит от y и z), имеются и другие решения, соответствующие полям, не зависящим от x , z и распространяющимся в направлении y , а также решения, не зависящие от x , y с полями, движущимися в направлении z . Решением трехмерного волнового уравнения могут быть плоские волны, идущие в любом направлении. Поскольку уравнения линейны, то одновременно может быть сколько угодно плоских волн, идущих в любых направлениях. Поэтому общим решением волнового уравнения является суперпозиция плоских волн, распространяющихся во всех возможных направлениях.

В заключение рассмотрим решение волнового уравнения, отвечающего распространению сферических волн, например от пульсирующего сферического заряда, расположенного в начале координат. В этом случае функция, описывающая решение, должна быть сферически симметричной и зависеть от радиального расстояния точки r от начала координат $E(r \pm vt)$, где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Чтобы найти вид этой функции, найдем уравнение, которому она удовлетворяет. Вычислим для этого частные производные по x, y, z от E :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial E}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{\partial E}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right),\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{\partial E}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right) \frac{\partial E}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &= \frac{z^2}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \frac{\partial E}{\partial r}.\end{aligned}$$

Складывая вторые частные производные, находим лапласиан, входящий в волновое уравнение

$$\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 rE}{\partial r^2}.$$

Подставим выражение для ΔE в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 rE}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 rE}{\partial t^2} = 0.$$

В общем случае решением этого уравнения является функция

$$rE(r,t) = E_1(r - vt) + E_2(r + vt)$$

или

$$E(r,t) = \frac{E_1(r - vt)}{r} + \frac{E_2(r + vt)}{r},$$

представляющая сумму расходящихся и сходящихся относительно начала координат сферических волн.

Если считать, что волны всегда бегут от источника, а не к нему, то следует ограничиться только первым слагаемым

$$E(r,t) = \frac{E_1(r - vt)}{r}.$$

Аналогичное решение существует и для магнитного поля

$$H(r,t) = \frac{H_1(r - vt)}{r}.$$

Эти решения соответствуют волне определенной формы, распространяющейся от начала координат со скоростью v , амплитуда которой убывает как r^{-1} , в отличие от плоской волны, амплитуда которой остается постоянной (рис. 3.4).

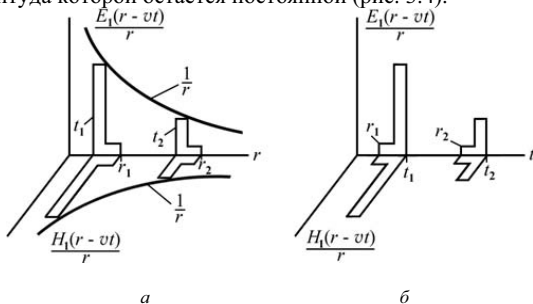


Рис. 3.4. Сферические волны E и H с амплитудой, убывающей $\sim r^{-1}$:

a – зависимость E, H от r при $t = t_1$ и $t = t_2$;

$б$ – зависимость E, H от t при $r = r_1$ и $r = r_2$

Подобная зависимость амплитуды от r соответствует закону сохранения энергии. Энергия, переносимая волной от точечного источника, должна оставаться постоянной

$$W(r_1) = W(r_2).$$

Поскольку площадь поверхности S , через которую проходит волновой фронт, растет пропорционально r^2 , то плотность энергии убывает пропорционально r^{-2} . Плотность энергии электрического и магнитного полей пропорциональна E^2 и H^2 , а поэтому

$$E^2 \sim r^{-2} \quad \text{и} \quad H^2 \sim r^{-2},$$

откуда и следует, что E и H убывают как $1/r$.

3.5. Энергия и импульс электромагнитного поля

Закон сохранения полной механической энергии, как известно, выполняется далеко не всегда. Мы часто видим, как тело с запасом кинетической энергии K останавливается благодаря действию сил трения без увеличения своей потенциальной энергии, так что очевидным образом $K + U$ – сумма потенциальной и кинетической энергий не остается постоянной. Эту трудность удается устранить, учитывая внутренние формы движения атомов и молекул твердых тел. При действии сил трения кинетическая энергия тела переходит во внутреннюю энергию теплового движения атомов и молекул. С учетом тепловых форм движения проблема сохранения энергий при механических и иных формах движения оказывается практически решенной. Но если все же провести точные калориметрические и механические измерения, то полного энергетического баланса в процессах мы не получим, и это нарушение будет, в частности, тем сильнее, чем выше температура вещества. Дело в том, что при тепловом движении заряженные частицы начинают двигаться неравномерно, ускоренно, что приводит в соответствии с законами Максвелла к испусканию зарядами и токами электромагнитных волн – движущихся электрических и магнитных полей. Эти поля, как мы уже не раз видели на примере конденсатора и катушки индуктивности, обладают запасом энергии. Поэтому без учета энергии электромагнитного поля закон сохранения энергии не будет полным. Но, обладая энергией, поле обладает и импульсом, поэтому следует рассмотреть для поля и закон сохранения импульса.

Отметим, что закон сохранения энергии электромагнитного поля должен иметь локальный характер подобно тому, как имеет место в законе сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Он говорит о том, что если заряд исчезает в точке 1, то он появится в точке 2 благодаря току \mathbf{j} , который в точку 2 его принесет. Заряд не может исчезнуть в точке 1 и одновременно

появиться в точке 2, так как, согласно выводам специальной теории относительности, явления, одновременные в одной системе отсчета, но происходящие в разных точках пространства, не обязательно одновременны в другой системе отсчета. Поэтому с точки зрения некоторых наблюдателей при нелокальной форме закона сохранения заряда заряд, исчезнув в точке 1, не сразу появляется в точке 2, и, следовательно, заряд не сохраняется, а это противоречит опыту.

Сохранение энергии оказывается тоже локальным процессом. Существует не только плотность энергии w [Дж/м³] в данной области ΔV , но и вектор \mathbf{S} плотности потока энергии через поверхность [Дж/(м²·с)].

Если мы имеем источник электромагнитных волн, то потери энергии этого источника равны потоку энергии через окружающую его поверхность, что по аналогии с законом сохранения заряда можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} + (\mathbf{E}, \mathbf{j}) = 0.$$

Дополнительное третье слагаемое учитывает энергию, затраченную на совершение полем работы над веществом, – джоулевы потери. Действительно, работа A , совершаемая в единицу времени полем над заряженными частицами, равна (n – концентрация зарядов)

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{(\mathbf{F}_\Lambda, d\mathbf{r})}{dt} = (\mathbf{F}_\Lambda, \mathbf{v}) = (ne\mathbf{v}, (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}])) = (\mathbf{j}, \mathbf{E}),$$

поскольку магнитные силы работы не совершают так как $\mathbf{v} \perp [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$.

Чтобы получить выражения для w – плотности энергии электромагнитного поля и \mathbf{S} – плотности потока энергии электромагнитного поля, воспользуемся уравнениями Максвелла. Из первого уравнения Максвелла имеем

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Подставляя это выражение в скалярное произведение (\mathbf{E}, \mathbf{j}) и учитывая, что $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}$, получаем

$$(\mathbf{E}, \mathbf{j}) = \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{div} [\mathbf{H}, \mathbf{E}] + \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Воспользовавшись вторым уравнением Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$,

получаем

$$(\mathbf{E}, \mathbf{j}) = \operatorname{div}[\mathbf{H}, \mathbf{E}] - \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right).$$

Введем вектор $dW = \mathbf{H}d\mathbf{B} + \mathbf{E}d\mathbf{D}$ – приращение плотности электромагнитной энергии, где сама величина w определяется интегралом

$$w = \int_{(V)} (\mathbf{H}d\mathbf{B} + \mathbf{E}d\mathbf{D}).$$

Для однородных диэлектрических и магнитных сред имеем ($\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$)

$$w = \frac{\mu\mu_0 H^2 + \varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{(\mathbf{H}, \mathbf{B}) + (\mathbf{E}, \mathbf{D})}{2}.$$

Таким образом, выражение для (\mathbf{E}, \mathbf{j}) можно переписать в виде

$$(\mathbf{E}, \mathbf{j}) = \operatorname{div}[\mathbf{H}, \mathbf{E}] - \frac{\partial(\mu\mu_0 H^2 + \varepsilon\varepsilon_0 E^2)}{dt} = -\operatorname{div}\mathbf{S} - \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Теперь если определить \mathbf{S} и w как простейшие из возможных равенств, то будем иметь

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}],$$

$$w = \frac{\mu\mu_0 H^2 + \varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \int_{(V)} (\mathbf{H}d\mathbf{B} + \mathbf{E}d\mathbf{D}).$$

Первым эти результаты получил в 1883 г. Джон Пойнтинг (1852–1914) и доложил их 10 января 1884 г. Лондонскому королевскому обществу. Примерно за десять лет до этой даты понятие о потоке энергии в пространстве было введено русским физиком Н.А. Умовым и конкретизировано для упругих сред и вязких жидкостей. Поэтому закон сохранения энергии в локальной

форме $\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0$ в русской литературе носит название

теоремы Умова – Пойнтинга, а вектор плотности потока энергии также называют вектором Умова – Пойнтинга.

Отметим то важное обстоятельство, что вектор \mathbf{S} выражается только через напряженности полей \mathbf{E} , \mathbf{H} и не содержит никаких величин, относящихся к индивидуальным свойствам среды.

Рассмотрим генератор переменного тока с ЭДС \mathcal{E} , подключенный к большой металлической пластине длиной a и шириной b и создающий в ней поверхностный ток $I = I_g/b$, где I_g – ток генератора, $I = I_0 \cos \omega t$ (А/м). Вследствие непрерывности электрического

поля излучения $E_{\text{изл}}$ в пластине на каждый электрон проводимости действует сила $eE_{\text{изл}}$, где $E_{\text{изл}} = \mathcal{E}/a$. Эта сила обеспечивает передачу энергии от генератора электронам проводимости. Пренебрегая омическими потерями, вычислим мощность, потребляемую от генератора участком пластины площадью 1 м^2 .

Электрическая мощность, приходящаяся на единицу площади, равна

$$\frac{W}{s} = \frac{\mathcal{E}I_g}{ab} = \frac{\mathcal{E}}{a} \cdot \frac{I_g}{b} = E_{\text{изл}} I.$$

Используя выражение $\sqrt{\epsilon_0} E_{\text{изл}} = \sqrt{\mu_0} H_{\text{изл}}$, $B_{\text{изл}} = \mu_0 I/2$, получаем

$$\frac{W}{s} = \frac{E_{\text{изл}} B_{\text{изл}}}{\mu_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I^2}{4}.$$

Эта энергия излучается в виде электрического и магнитного полей. Усредняя полученное выражение по времени, находим, что для бегущей электромагнитной волны

$$\left\langle \frac{W}{s} \right\rangle_t \mathbf{s} = \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{\mu_0},$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{S}/S$ – единичный вектор Пойнтинга.

Полученное выражение для мгновенной мощности может быть записано через эффективное сопротивление R участка пластины единичной площади. Ток, текущий по каждой поверхности металлической пластины, равен $I/2$. Поэтому эффективное сопротивление участка каждой поверхности равно

$$\frac{W}{s} = R \frac{I^2}{4} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I^2}{4},$$

$$R = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ Ом}.$$

Эта величина называется импедансом свободного пространства.

Выражение для плотности энергии электромагнитного поля w совпадает с результатами, полученными для статических полей (п. 4.3, 10.4), когда эта энергия выражается через характеристики поля. Вектор \mathbf{B} позволяет рассчитать энергию, переносимую через элемент поверхности $d\Sigma$ в единицу времени $\mathbf{S} \mathbf{n} d\Sigma$, где \mathbf{n} – вектор, перпендикулярный поверхности ($|\mathbf{n}| = 1$).

Отметим, что в силу найденного ранее (п. 12.4) соотношения

$$\sqrt{\mu\mu_0} H = \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E$$

для величины векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} плотности магнитной и электрической энергии в поле волны равны

$$w_E = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = w_H,$$

$$w = w_E + w_H = \mu\mu_0 H^2 = \epsilon\epsilon_0 E^2.$$

По причине перпендикулярности векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в волне вектор \mathbf{S} всегда направлен параллельно вектору скорости – поток энергии распространяется в направлении движения фронта волны. Причем величина S равна

$$S = EH = E^2 \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} = \epsilon\epsilon_0 E^2 v = wv,$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{S} = w \mathbf{v}$$

– поток энергии, протекающий через единичную площадку за время dt , равен количеству энергии, содержащейся в цилиндре длиной vdt , прилегающем к данной площадке.

Пусть лампа – вспышка мощностью $W = 3$ Вт дает пучок света квадратного сечения размером $a \times a = 10 \times 10$ см² (рис. 3.5).

Этот пучок падает на полированную металлическую пластину и практически полностью отражается от нее. Отраженный свет излучается поверхностным током с плотностью:

$$I = I_0 \cos \omega t, \text{ (А/м)}$$

Найдем амплитуду напряженности электрического поля E_0 , амплитуду индукции магнитного поля B_0 , амплитуду плотности тока I_0 и полный ток I_p , текущий по поверхности пластины.

Пучок сечением a^2 распространяется ежесекундно на расстояние $c \cdot t$, где c – скорость света в вакууме. Энергия пучка U заключена в объеме $V = a^2 \cdot c \cdot t$. Плотность энергии излучения

$$w = \frac{dU}{dV} = \frac{U}{a^2 ct} = \frac{W}{a^2 c} = \frac{3}{0,1^2 \cdot 3 \cdot 10^8} = 10^{-6} \text{ Дж/м}^3.$$

Энергия распределяется поровну между электрическим и магнитным полями, поэтому

$$w_E = \frac{\epsilon_0 \overline{E^2}}{2} = \frac{w}{2}.$$

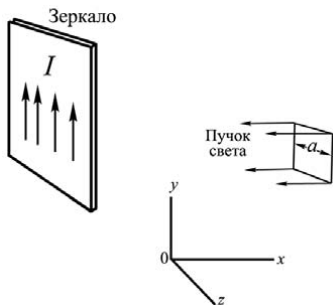


Рис. 3.5. Световой пучок квадратного сечения, падающий на зеркало справа и отражающийся от него. Отраженный пучок создается индуцированным током I

Поскольку $\overline{E^2} = E_0^2/2$, где E_0 – амплитуда напряженности электрического поля,

$$E_0^2 = \frac{2w}{\epsilon_0},$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{2w}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12}}} = 475 \text{ В/м},$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{475}{3 \cdot 10^8} = 1,58 \cdot 10^{-6} \text{ Тл}.$$

Так как у проводящей плоскости

$$B_0 = \frac{\mu_0 I_0}{2},$$

найдем амплитуду плотности тока, индуцированного вспышкой света:

$$I_0 = \frac{2B_0}{\mu_0} = \frac{2 \cdot 1,58 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 2,52 \text{ А/м}.$$

Полный ток

$$I_p = aI_0 = 0,1 \cdot 2,52 = 0,252 \text{ А}.$$

Поскольку электромагнитное поле обладает плотностью энергии w , то в силу соотношения Эйнштейна между энергией и массой $E = mc^2$ электромагнитное поле обладает массовой плотностью

$$\frac{w}{c^2}.$$

Если энергия движется со скоростью \mathbf{v} , то с этим движением связан импульс, величина которого в единице объема равна

$$\mathbf{g} = \frac{w\mathbf{v}}{c^2} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}.$$

Поэтому вектор Пойнтинга определяет не только поток энергии, но и после деления на c^2 плотность импульса. Понятие электромагнитного импульса было введено Максом Абрагамом (1875–1922) еще до создания специальной теории относительности.

В качестве примера применения понятия вектора Пойнтинга \mathbf{S} рассмотрим проводник, по которому течет ток плотностью \mathbf{j} , радиус проводника r , длина l . В каждой точке проводника выполняется закон Ома

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}.$$

Следовательно, векторы плотности тока \mathbf{j} и напряженности поля \mathbf{E} параллельны. Ток, идущий по проводнику, создает магнитное поле \mathbf{H} , касательное к боковой поверхности проводника. По теореме о циркуляции $H \cdot 2\pi r = j\pi r^2$ напряженность магнитного поля равна

$$H = \frac{j r}{2} = \frac{E r}{2\rho}.$$

Поток энергии электромагнитного поля, ежесекундно втекающий через боковую поверхность в объем проводника, равен

$$W = S \cdot 2\pi r \cdot l = E \cdot H \cdot V \cdot \frac{2}{r} = jEV,$$

где $V = \pi r^2 l$ – объем провода.

Величина $(\mathbf{E}, \mathbf{j}) = \frac{1}{\rho} E^2$ равна количеству джоулевой теплоты,

выделяющегося в единице объема в единицу времени. Поэтому равенство

$$W = jEV$$

говорит о том, что энергия, выделяемая в проводниках в виде джоулевой теплоты, поступает в проводник через его боковую поверхность в виде энергии электромагнитного поля. Это несколько не согласуется с нашей интуицией, указывавшей на то, что электрон получает энергию за счет сил электрического поля, толкающего его вдоль провода. Но теория говорит, что на

электрон действует электрическое поле, создаваемое очень далекими зарядами, и электроны черпают энергию, расходуемую на тепло, именно из этих полей (рис.3.6).

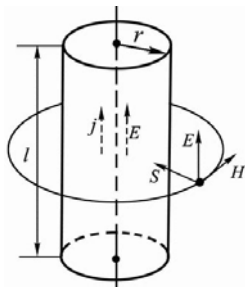


Рис. 3.6. Энергия, выделяемая в проводнике в виде джоулевой теплоты, поступает в проводник через его боковую поверхность в виде энергии электромагнитного поля

В качестве следующего примера рассмотрим, как происходит зарядка конденсатора (рис. 3.7). Пусть конденсатор будет плоский с круглыми пластинами радиусом r , расстояние между которыми равно h . Полная энергия U , заключенная между пластинами конденсатора, равна объему между пластинами конденсатора $\pi r^2 h$, умноженному на плотность энергии электрического поля $w_E = \varepsilon_0 E^2 / 2$:

$$U = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \pi r^2 h.$$

Если напряженность поля изменяется, то изменяется и энергия конденсатора. Конденсатор заряжается со скоростью

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \varepsilon_0 \pi r^2 h E \frac{\partial E}{\partial t}.$$

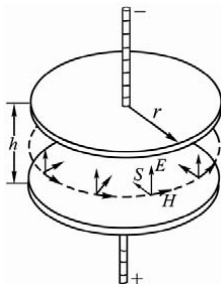


Рис. 3.7. Конденсатор заряжается за счет энергии электромагнитного поля, втекающей в него через боковой зазор между пластинами

С точки зрения, основанной на понятиях тока и зарядов, энергия поступает в конденсатор от проводов, заряжающих конденсатор, но оказывается, это не так, поскольку вектор \mathbf{E} перпендикулярен пластинам, а вектор \mathbf{H} расположен вдоль концентрических окружностей, параллельно им. Поэтому вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ также параллелен пластинам и направлен в объем между пластинами. Рассчитаем скорость подвода энергии конденсатору из электромагнитного поля. Из первого уравнения Максвелла в интегральной форме в пространстве между пластинами конденсатора имеем ($\mathbf{j} = 0$)

$$\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \frac{\partial}{\partial t} \int \varepsilon_0 (\mathbf{E}, d\mathbf{s})$$

или в силу симметрии пластин находим H – величину напряженности магнитного поля на краю конденсатора

$$H \cdot 2\pi r = \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{\partial E}{\partial t}, \quad H = \frac{\varepsilon_0 r}{2} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Полная скорость подвода энергии электромагнитного поля через боковую поверхность между пластинами конденсатора

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\pi r h \cdot S = 2\pi r h \cdot E \frac{\varepsilon_0 r}{2} \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_0 \pi r^2 h E \frac{\partial E}{\partial t}$$

совпадает с найденным выше выражением для скорости зарядки конденсатора.

Таким образом, по краям пластины конденсатора имеется поток энергии $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$, втекающий во время зарядки из окружающего пространства в зазор между пластинами.

В случае когда электромагнитное поле \mathbf{E} и \mathbf{H} статическое, тем не менее во всех точках пространства, где векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} не параллельны (антипараллельны), в них существует поток энергии электромагнитного поля, плотность потока энергии которого постоянна

$\left(\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \right)$, а следовательно, и $\operatorname{div} \mathbf{S} = 0$. Это означает, что

во всех точках пространства в элементарный объем втекает столько энергии, сколько и вытекает. Поскольку с потоком электромагнитной энергии связан электромагнитный импульс и его момент, то такое течение энергии может привести к наблюдаемым физическим эффектам.

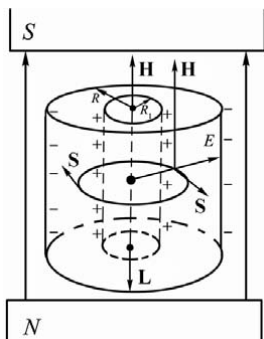


Рис. 3.8. Заряженный конденсатор в однородном магнитном поле обладает нулевым электромагнитным импульсом, но ненулевым моментом этого импульса. При разрядке конденсатор приходит во вращение

Пусть у нас имеется цилиндрический конденсатор длиной h с радиусом внешней обкладки R и внутренней $R_1 \ll R$. Заряд конденсатора Q . Пусть конденсатор помещен в однородное магнитное поле H , направленное вдоль его оси (рис. 3.8).

В этом случае полный электромагнитный импульс системы равен нулю в силу симметрии системы, но момент импульса отличен от нуля – векторы \mathbf{S} и, следовательно, $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$ направлены по касательным к concentрическим окружностям с центром на оси конденсатора.

Момент электромагнитного импульса конденсатора равен ($dV = 2\pi r h dr$)

$$L = \int_{R_1}^R r g dV = \int_{R_1}^R r \frac{EH}{c^2} \cdot 2\pi r h dr.$$

Напряженность электрического поля в цилиндрическом конденсаторе можно вычислить по теореме Гаусса

$$\int (\mathbf{E}, d\mathbf{s}) = E \cdot 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r h}.$$

Подставляя это значение E в выражение для момента импульса, находим

$$L = \int_{R_1}^R \frac{QH}{\epsilon_0 c^2} r dr = \frac{QH}{2\epsilon_0 c^2} (R^2 - R_1^2).$$

Учтем, что $R_1 \ll R$, а момент импульса \mathbf{L} направлен против поля \mathbf{H} :

$$\mathbf{L} = -\frac{QR^2}{2\epsilon_0 c^2} \mathbf{H}.$$

Если заряженный конденсатор медленно разряжать, например, облучая его и ионизируя газ между его обкладками, то после

разрядки $Q = 0$ его электромагнитный момент импульса исчезнет, а конденсатор в силу закона сохранения момента импульса получит такой же по величине, но противоположно направленный механический момент импульса и придет во вращение с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{L}{I},$$

где I – момент инерции конденсатора.

Этот эффект очень мал, но в принципе может наблюдаться. Вращение в обратном направлении можно проследить при зарядке конденсатора.

Наличие у электромагнитного поля импульса должно приводить к эффекту светового давления. Если мы направим электромагнитное поле (свет) на поверхность, то, как известно, импульс p , сообщаемый единице поверхности в единицу времени, равен давлению P на поверхность

$$P = \frac{1}{s_{\text{пл}}} \frac{dp}{dt} = \frac{F}{s_{\text{пл}}}.$$

Импульс, приносимый на поверхность $s_{\text{пл}}$ электромагнитным полем в единицу времени, равен

$$\frac{dp}{dt} = \frac{g \cdot c dt}{dt} \cdot s_{\text{пл}} = gc \cdot s_{\text{пл}}.$$

Если при этом не все фотоны поглощаются, а только их часть, равная $r = \frac{\text{число отраженных фотонов}}{\text{число фотонов, достигших поверхности}}$, r – коэффициент отражения, то полное давление, оказываемое светом на

поверхность, будет равно

$$P = gc + rgc = gc(1 + r) = (1+r) \cdot \frac{S}{c},$$

где S – модуль вектора Пойнтинга (Умова – Пойнтинга).

Давление света и электромагнитный импульс настолько малы, что непосредственное их измерение затруднительно. Так, зеркало, расположенное на расстоянии 1 м от источника света в миллион свечей (кандел), испытывает давление 10^{-7} Н/м². Давление излучения Солнца на поверхность Земли равно $4,3 \cdot 10^{-6}$ Н/м², а общее давление излучения Солнца на Землю равно $6 \cdot 10^8$ Н, что в 10^{13} раз меньше силы притяжения Солнца.

Световое давление было впервые обнаружено и измерено в 1899 г. в Москве П.Н. Лебедевым (1866–1912). Его результаты,

как и более точные измерения последующих исследователей, согласуются с теорией в пределах ошибок опыта – до 2%, (рис.3.9).

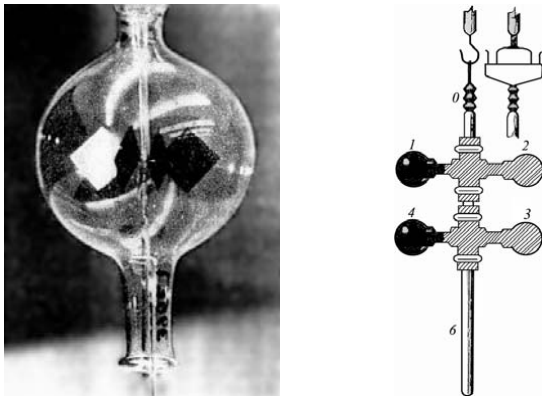


Рис. 3.9. Радиометр. Свет, отраженный посеребренной поверхностью каждой лопасти 2, 3, передает вдвое больший импульс по сравнению со светом, поглощенным зачерненной поверхностью 1, 4. Вследствие этого лопасти на снимке должны вращаться по часовой стрелке. Однако в действительности они вращаются в обратном направлении! Это объясняется тем, что вблизи зачерненной поверхности остаточный газ нагревается больше, что приводит к более высокому давлению на эту поверхность. Если же сосуд откачать до более высокого вакуума, то направление вращения изменится на противоположное

Давление света играет существенную роль в двух противоположных по масштабу областях явлений.

Так, например, гравитационное притяжение верхних слоев звезд к центру в значительной мере уравнивается силой давления светового потока, идущего от центра звезды наружу. В атомных процессах существенной является отдача, испытываемая возбужденным атомом при излучении им света в силу малости массы атома. Световое давление может создавать ускорение атомов до 10^5g , где g – ускорение свободного падения.

Впервые гипотеза о световом давлении была высказана в 1619 году немецким ученым И. Кеплером (1571–1630) для объяснения отклонения хвостов комет, пролетающих вблизи Солнца.

Возможными областями физического применения светового давления могут служить процессы разделения смеси изотопов

газов, ускорение микрочастиц и создание условий для протекания управляемой термоядерной реакции.

3.6. Электромагнитная масса

Подсчитаем энергию и импульс электромагнитного поля заряженной частицы радиусом a и зарядом e , равномерно распределенным по ее поверхности. Если мы перейдем в систему отсчета, где частица неподвижна, то магнитного поля не будет и полная электромагнитная энергия частицы будет равна энергии электрического поля. Поскольку внутри частицы, равномерно заряженной по поверхности, поля нет $E(r < a) = 0$, то

$$U_{\text{эл}} = \int_{\frac{4}{3}\pi a^3}^{\infty} w_{\text{эл}} dV = \int_{\frac{4}{3}\pi a^3}^{\infty} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \int_a^{\infty} \frac{\epsilon_0 e^2}{2 \cdot (4\pi\epsilon_0 r^2)^2} 4\pi r^2 dr = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

Из этого соотношения видно, что заряд не может быть точечным, поскольку при $a \rightarrow 0$ его энергия стремится к бесконечности. Но эту трудность можно обойти, поскольку реально всегда измеряется изменение энергии частицы, и важно, чтобы в наблюдаемых физических эффектах изменение энергии оставалось конечным.

Рассмотрим, как изменяется энергия электромагнитного поля частицы, когда заряд движется. Для этого вычислим импульс электромагнитного поля, связанного с частицей, когда заряд движется со скоростью \mathbf{v} . Будем считать скорость движения заряда много меньшей скорости света

$$\mathbf{p} = \int_{\frac{4}{3}\pi a^3=V_0}^{\infty} \mathbf{g} dV = \int_{V_0}^{\infty} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \frac{1}{c^2} dV.$$

Для равномерно движущегося заряда напряженности электрического и магнитного полей связаны соотношением

$$\mathbf{H} = \epsilon_0[\mathbf{v}, \mathbf{E}].$$

Поскольку

$$[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \epsilon_0[\mathbf{E}, [\mathbf{v}, \mathbf{E}]] = \epsilon_0[E^2\mathbf{v} - (\mathbf{E}, \mathbf{v})\mathbf{E}]$$

и при интегрировании все перекрестные слагаемые дадут нулевой вклад, то получаем (считаем, что \mathbf{v} направлена вдоль оси x)

$$(\mathbf{E}, \mathbf{v})\mathbf{E} = E_x v_x (\mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z) = E_x^2 v_x \mathbf{i} = \frac{E^2}{3} \mathbf{v}$$

$$[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{2}{3} \varepsilon_0 E^2 \mathbf{v}.$$

Поэтому

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3c^2} \mathbf{v} \int_{V_0}^{\infty} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \frac{4\mathbf{v}}{3c^2} U_{\text{эл}}.$$

Подставляя сюда ранее найденное значение энергии $U_{\text{эл}}$, находим

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{ac^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0} \mathbf{v}.$$

Импульс электромагнитного поля, связанного с движущейся частицей, – электромагнитный импульс оказался пропорциональным скорости частицы \mathbf{v} , что имеет место и в выражении для обычного импульса $m\mathbf{v}$, где m – инертная масса заряженной частицы. Поэтому коэффициент пропорциональности в полученном выражении для импульса \mathbf{p} называют *электромагнитной массой*:

$$m_{\text{эл}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}.$$

И даже если тело не обладает никакой иной массой, оказывается, что между импульсом и скоростью заряженной частицы существует соотношение

$$\mathbf{p} = m_{\text{эл}} \mathbf{v}.$$

Это соотношение как бы раскрывает происхождение массы – это электродинамический эффект. Движение заряженной частицы сопровождается возникновением магнитного поля. Магнитное поле сообщает телу дополнительную инертность – при ускорении на создание магнитного поля затрачивается работа, при торможении – на работу против затормаживающих сил индукционного происхождения. По отношению к движущемуся заряду электромагнитное поле является средой, неотделимой от заряда.

В общем случае можно записать, что полный импульс равен сумме механического и электромагнитного импульсов; возможно, что другие поля вносят и иные вклады в полную массу частицы

$$m = m_{\text{мех}} + m_{\text{эл}}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

но определено в полной массе есть электромагнитная часть. Если считать, например, для электрона его массу m_e полностью электромагнитной, то можно оценить радиус электрона

$$a = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e c^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}.$$

Величина $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2 \cdot 4\pi\epsilon_0} \approx 2,82 \cdot 10^{-13}$ см называется классическим радиусом электрона.

Если учесть релятивистские эффекты сокращения длины и преобразования электрических и магнитных полей, то для электромагнитного импульса получается также релятивистски инвариантная формула

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2 \cdot 4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}.$$

Таким же образом изменяется релятивистский механический импульс.

Однако при сведении всей массы электрона к электромагнитной должно выполняться соотношение Эйнштейна между массой и энергией $U = mc^2$. Но тогда электрон должен обладать массой, равной

$$m'_{\text{эл}} = \frac{U_{\text{эл}}}{c^2} = \frac{e^2}{2ac^2 \cdot 4\pi\epsilon_0},$$

не совпадающей с электромагнитной массой

$$m_{\text{эл}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2 \cdot 4\pi\epsilon_0},$$

для которой выполняется соотношение $U_{\text{эл}} = \frac{4}{3} m_{\text{эл}} c^2$, отличающееся от соотношения Эйнштейна $U = mc^2$. Эта проблема не решается простым изменением вида распределения заряда в частице.

Выход из положения, с одной стороны, очень прост, но с другой, он разрушает всю стройную картину электромагнитной природы массы. Еще Пуанкаре заметил, что для самосогласованной теории необходимо введение некоторых сил, удерживающих заряды на сфере от разлета. Подобные связывающие силы и поля необходимо учесть при вычислении энергии и импульса. Эти силы неэлектрического происхождения названы «напряжением Пуанкаре». Если их включить в расчет, то можно согласовать результат с теорией относительности, т.е. масса, полученная из

вычислений импульса, и масса, найденная из вычислений энергии, будут совпадать. Но теперь полная масса состоит из электромагнитной и происходящей от «напряжений Пуанкаре». Таким образом, оказывается невозможным сделать массу чисто электромагнитной, и необходима дополнительно к электродинамике теория, описывающая напряжения и силы, цементирующие электрон от разлета.

Но возможна и другая точка зрения, связанная с исключением возможности для точечного электрона действовать на самого себя в процессе изменения его состояния движения.

В настоящее время не существует самосогласованной классической или квантовой электродинамической теории, которая не давала бы бесконечной собственной энергии электрона или какого-либо другого заряда, и нет удовлетворительной теории, описывающей неточечный заряд.

Тем не менее, экспериментально доказано существование электромагнитной массы и тот факт, что часть массы заряженных частиц является электромагнитной по происхождению.

Если сравнить массы элементарных частиц одного типа, но отличающихся зарядом, то оказывается, что разность их масс имеет порядок нескольких электронных масс, и эта разность масс имеет электромагнитную природу.

3.7. Решение уравнений Максвелла при наличии токов и зарядов

Для того чтобы решить уравнения Максвелла при наличии токов и зарядов, преобразуем их с помощью стандартных математических приемов к более простому виду. Из уравнения Максвелла для индукции $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ следует, что \mathbf{B} есть ротор функции \mathbf{A} , называемой векторным потенциалом $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, поскольку дивергенция ротора всегда равна нулю:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = (\nabla, [\nabla, \mathbf{A}]) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = 0$$

— определитель равен нулю, поскольку в нем имеются две одинаковые строки.

Кроме того, решением будет и любая другая функция

$$\mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi,$$

где ψ – некоторое скалярное поле, поскольку ротор от градиента всегда равен нулю:

$$\text{rot grad}\Psi = [\nabla, \nabla\Psi] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \Psi = 0.$$

В результате \mathbf{B} не изменяется при замене \mathbf{A} на $\mathbf{A} + \text{grad}\psi$:

$$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A} + \text{grad}\psi) = \text{rot}\mathbf{A}.$$

Из закона Фарадея $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$, если в нем заменить \mathbf{B} на $\text{rot}\mathbf{A}$, получаем, поскольку дифференцирование по времени и координатам можно переставлять

$$\text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Если ротор от некоторой функции равен нулю, то сама эта функция есть градиент от некоторого скалярного поля, например, ϕ . В электростатике роль ϕ выполнял скалярный потенциал электростатического поля

$$\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad}\phi.$$

Знак «минус» использован здесь по аналогии с электростатикой, где $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi$. Поэтому из закона Фарадея следует

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\phi.$$

При замене \mathbf{A} на $\mathbf{A} + \text{grad}\psi$ уравнение для \mathbf{E} примет вид

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \phi\right).$$

Для того чтобы оно не изменилось, необходимо при замене \mathbf{A} на $\mathbf{A} + \text{grad}\psi$ заменить ϕ на $\phi - \frac{\partial\Psi}{\partial t}$.

Таким образом, для описания электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{B} нужны четыре потенциальные функции – скалярный потенциал ϕ и векторный $\mathbf{A}(A_x, A_y, A_z)$.

Подставляя в уравнения Максвелла для \mathbf{E} и \mathbf{B} их выражение через φ и \mathbf{A}

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A},$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$

имеем

$$\text{div}\mathbf{E} = \text{div}\left(-\text{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$-\Delta\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\text{div}\mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Это уравнение связывает потенциалы электромагнитного поля φ и \mathbf{A} в случае однородной диэлектрической среды с источником поля ρ – плотностью электрического заряда.

Из уравнения Максвелла для вектора напряженности магнитного поля в однородной магнитной среде $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ следует

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\epsilon\epsilon_0\mathbf{E}}{\partial t}; \quad \text{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\text{rot}\mathbf{B}.$$

Выражая \mathbf{B} и \mathbf{E} через потенциалы $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi$,

находим

$$\text{rot}\text{rot}\mathbf{A} + \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad}\varphi\right) = \mathbf{j}\mu\mu_0.$$

Поскольку $\text{rot}\text{rot}\mathbf{A} = \text{grad}\text{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}$, то

$$-\Delta\mathbf{A} + \text{grad}\left(\text{div}\mathbf{A} + \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{j}\mu\mu_0.$$

Выбор \mathbf{A} неоднозначен, и мы сделаем его таким, чтобы удовлетворялось условие, называемое «калибровкой Лоренца»

$$\left(v^2 = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}\right):$$

$$\text{div}\mathbf{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

В этом случае в предпоследнем уравнении выражение в круглых скобках равно нулю, и оно, и уравнения для \mathbf{A} и φ примут вид

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j},$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Уравнения для всех четырех функций φ , A_x , A_y , A_z идентичны, причем однородные уравнения того же вида

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

для электрического и магнитного полей мы уже решали. Эти решения представляют возмущения электромагнитного поля, распространяющиеся в вакууме или однородной среде в виде плоских или сферических волн, в зависимости от типа источника этих волн. В частности, для точечного источника возмущений решением однородного уравнения

$$\Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

являются сферические волны, потенциал которых везде, кроме начала координат, имеет вид

$$\varphi = \frac{f(t - r/v)}{r}.$$

Для решения неоднородного уравнения разделим все пространство на бесконечно малые участки и определим поле в одном из таких объемов. Вследствие линейности уравнений полное поле будет равно сумме полей, создаваемых такими элементами.

Заряд δe в элементе объема $d^3 r$ является функцией времени и имеет плотность ρ , так что $\int \rho d^3 r = \delta e$.

Для нахождения φ следует решить уравнение

$$\Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Везде, кроме начала координат ($\mathbf{r} = 0$), где локализован заряд δe , можно считать $\rho = 0$.

Решение уравнения при $r \neq 0$ имеет вид сферической волны

$$\varphi = \frac{f(t - r/v)}{r},$$

где f пока произвольна. Ее следует выбрать так, чтобы φ давало верное решение для потенциала и в начале координат. Поскольку при $r \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \infty$, то в уравнении для φ можно пренебречь второй производной по времени по сравнению с $\Delta\varphi$. Но тогда мы получаем уравнение для точечного заряда

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}$$

с известным решением при $r \rightarrow 0$

$$\delta\varphi = \frac{\delta e(t)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Здесь $\delta\varphi$ явно отмечает, что потенциал поля обусловлен зарядом δe . Из полученного решения следует, что $f(t) = \delta e(t)$ при $r = 0$, а следовательно, в общем случае $r \neq 0$ имеем

$$\delta\varphi = \frac{\delta e(t - r/v)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

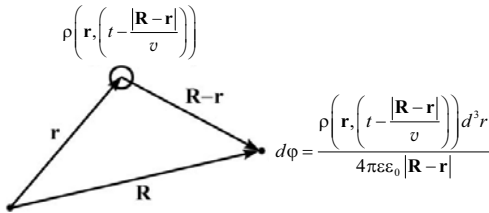


Рис.3.10. Расчет потенциала в точке \mathbf{R} от заряда ρ в момент времени t с учетом запаздывания $\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{v}$

Теперь уже легко перейти к решению для произвольного распределения зарядов ρ . Для этого следует положить $\delta e = \rho d^3 r$ и проинтегрировать $\delta\varphi$ по всему пространству. Поскольку поле в точке \mathbf{R} в момент времени t от источника, расположенного в элементе объема $d^3 r$ вблизи точки с координатой \mathbf{r} , определяется

плотностью заряда в более ранний период времени $\rho\left(\mathbf{r},\left(t-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{v}\right)\right)$, то потенциал от заряда, расположенного в точке \mathbf{r} , в участке пространства с координатой \mathbf{R} (рис. 3.10), оказывается равным

$$d\varphi(\mathbf{R},t)=\frac{\rho\left(\mathbf{r},\left(t-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{v}\right)\right)d^3r}{4\pi\epsilon\epsilon_0|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}.$$

Интегрируя по всему объему, где расположены заряды, находим потенциал в точке \mathbf{R} в момент времени t :

$$\varphi(\mathbf{R},t)=\int\frac{\rho\left(\mathbf{r},\left(t-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{v}\right)\right)d^3r}{4\pi\epsilon\epsilon_0|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}.$$

Аналогичные вычисления можно провести и для каждой из компонент векторного потенциала \mathbf{A} , где источниками будут служить компоненты вектора плотности тока \mathbf{j} ; в результате получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},t)=\int\frac{\mu\mu_0\mathbf{j}\left(\mathbf{r},\left(t-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{v}\right)\right)d^3r}{4\pi|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}.$$

Зная скалярный φ и векторный \mathbf{A} потенциалы электромагнитного поля, в принципе для любого распределения зарядов и токов можно вычислить электрическое и магнитное поля

$$\mathbf{E}=-\text{grad}\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A}.$$

Таким образом, удается не только записать, но и решить уравнения Максвелла для вакуума и однородной диэлектрической и магнитной среды с токами и зарядами.

Потенциалы переменного поля задаются вполне аналогично потенциалам стационарного поля с тем существенным отличием, что потенциалы нестационарного поля в момент времени t на

расстоянии $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|$ от элемента объема d^3r с зарядами и токами определяются плотностью этих зарядов и токов в предшествующий момент времени $t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|/v$. Поэтому потенциалы φ и \mathbf{A} , определяющие решение уравнений Максвелла, называются *запаздывающими потенциалами*. Электромагнитные поля с потенциалами φ и \mathbf{A} от зарядов и токов, сосредоточенных в объеме d^3r , распространяются по всем направлениям со скоростью $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, убывая при этом обратно пропорционально расстоянию $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|$. Эти потенциалы являются энергетическими характеристиками электромагнитного поля.

К полученным решениям неоднородного уравнения для φ и \mathbf{A} можно добавить общее решение однородных уравнений ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$) φ_0 и \mathbf{A}_0 , тогда

$$\varphi = \varphi(\mathbf{R}, t) + \varphi_0,$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) + \mathbf{A}_0.$$

Потенциалы φ , \mathbf{A} определяются так, чтобы удовлетворить условиям задачи. Для этого достаточно задать начальные условия – поля в начальный момент времени. Но обычно задается поле, падающее на систему, и с ним отождествляют φ_0 , \mathbf{A}_0 , а решением являются поля, исходящие от системы в направлении возрастания \mathbf{R} , и с ним отождествляются именно запаздывающие потенциалы.

Основные выводы

Уравнения Максвелла связывают величины, характеризующие электромагнитное поле с его источниками, – распределенными в пространстве электрическими зарядами и токами.

Уравнения Максвелла могут быть записаны в дифференциальной и интегральной формах:

$$1. \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \iint_{(S)} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} \text{ – обобщенный закон}$$

Био – Савара – Лапласа;

$$2. \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\iint_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \text{ – закон Фарадея;}$$

$$3. \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}; \quad \oint_{(S)} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \int_V \rho dV \text{ – теорема Гаусса;}$$

$$4. \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \oint_{(S)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0 \text{ – отсутствие магнитных зарядов.}$$

Эти уравнения следует дополнить уравнениями состояния с материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}).$$

Вид этих уравнений определяется электрическими и магнитными свойствами среды. Для большинства изотропных сред вплоть до сильных полей уравнения состояния имеют простую линейную форму

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{стр.}}$$

Здесь ε – диэлектрическая, а μ – магнитная проницаемость среды; σ – удельная проводимость; $\mathbf{j}_{\text{стр.}}$ – плотность сторонних токов, поддерживаемых любыми силами, кроме консервативных сил электрического поля, в частности диффузией, магнитным полем.

Уравнения Максвелла допускают отличные от нуля решения в пространстве, свободном от токов и зарядов, существующие в виде поперечных электромагнитных волн. Причем все три вектора \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{v} взаимно перпендикулярны. Скорость распространения электромагнитной волны в вакууме совпадает со скоростью света

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

В однородной среде $v = c/n$, $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$.

В электромагнитной волне выполняется соотношение

$$\sqrt{\mu \mu_0} H = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E.$$

Плотность потока энергии, переносимой электромагнитной волной, определяется вектором Умова – Пойнтинга

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = w \mathbf{v} \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right),$$

где

$$w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \left(\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right)$$

– плотность энергии электромагнитного поля.

Импульс единицы объема электромагнитного поля, связанной с движением энергии излучения:

$$\mathbf{g} = \frac{w \mathbf{v}}{c^2} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}.$$

Наличие у электромагнитного поля импульса проявляется в эффектах светового давления. Величина полного давления, оказываемого на поверхность, равна

$$P = (1 + r)gc,$$

где r – коэффициент отражения.

Электромагнитная масса электрона в системе отсчета, где частица неподвижна, обусловлена энергией электрического поля и равна

$$m_{\text{эл}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}.$$

Происхождение массы $m_{\text{эл}}$ – электродинамический эффект. При движении заряженной частицы возникает магнитное поле, сообщающее телу дополнительную инертность при ускорении.

Решения уравнений Максвелла при наличии токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ и зарядов $\rho(\mathbf{r}, t)$ могут быть выражены через скалярный ϕ и векторный \mathbf{A} потенциалы:

$$\phi(\mathbf{R}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}, \left(t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{v}\right)\right) d^3r}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{R} - \mathbf{r}|},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \int \frac{\mu_0 \mathbf{j}\left(\mathbf{r}, \left(t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{v}\right)\right) d^3r}{4\pi |\mathbf{R} - \mathbf{r}|}.$$

С помощью скалярного $\phi(\mathbf{r}, t)$ и векторного $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ потенциалов можно вычислить электрическое \mathbf{E} и магнитное \mathbf{B} поля для любого распределения зарядов ρ и токов \mathbf{j} :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}.$$

Упражнения

1. Запишите уравнения Максвелла в п. 3.2 через магнитный поток Φ_B , электрический поток Φ_E , ток I и заряд q .
2. Укажите в спектре частот электромагнитных волн, каким частотам соответствуют следующие длины волн: 1 м, 1 см, 1 мкм, 0,5 мкм и $1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ м. Ответ: $\nu_1 = 3 \cdot 10^8$ Гц; $\nu_2 = 3 \cdot 10^{10}$ Гц; $\nu_3 = 3 \cdot 10^{14}$ Гц; $\nu_4 = 6 \cdot 10^{14}$ Гц; $\nu_5 = 3 \cdot 10^{18}$ Гц.
3. Предположим, что поле E на рис. 3.2 изменяется по закону $E = E_0 \cos \omega t$ и направлено на читателя из плоскости чертежа. Вычислите интеграл $\int (\partial \mathbf{E} / \partial t) d\mathbf{S}$ по площади прямоугольника, пересекающего линии тока. Ответ запишите через a , b , E_0 и ω .
4. Чему равен $\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l})$ по прямоугольному контуру в упражнении 3?
5. Справедливо ли выражение $E = E(x - vt)$, рис. 3.3, для отрицательных значений x , т.е. для электромагнитной волны, распространяющейся влево от плоскости на рис. 3.3? Если оно не справедливо, то какие нужны изменения, чтобы описать E_y и B_z для отрицательных значений x ? 6. Определите направление вектора $[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$ в случае $E = E(x + vt)$.
7. Синусоидальный поверхностный ток с частотой 100 МГц течет по большой плоскости. Амплитуда излучаемого электрического поля равна 5 В/см.
 - 1) Чему равна амплитуда тока в амперах на метр?
 - 2) Какова амплитуда поля \mathbf{B} в теслах?
8. Найдите расстояние в длинах волн между соседними максимумами интенсивности в электромагнитной волне. Ответ: $\lambda/2$.
9. Чему равны граничные значения длин волн видимого света в ангстремах ($1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ м)? Ответ: $\lambda_{\text{кф}} \approx 3800 \text{ \AA}$; $\lambda_{\text{кр}} \approx 7600 \text{ \AA}$.
10. Пространство между двумя концентрическими металлическими сферами заполнено однородной слабо проводящей средой с удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью ϵ . В момент $t = 0$ внутренней сфере сообщили некоторый заряд. Найти:
 - а) связь между векторами плотностей тока смещения и тока проводимости в произвольной точке среды в один и тот же момент;
 - б) ток смещения через произвольную замкнутую поверхность, расположенную целиком в среде и охватывающую внутреннюю сферу, если заряд этой сферы в данный момент равен q .

11. Плоский конденсатор образован двумя дисками, между которыми находится однородная слабо проводящая среда. Конденсатор зарядили и отключили от источника напряжения. Пренебрегая краевыми эффектами, показать, что магнитное поле внутри конденсатора отсутствует.

12. Доказать с помощью уравнений Максвелла, что:

- а) переменное во времени магнитное поле не может существовать без электрического поля;
 б) однородное электрическое поле не может существовать при наличии переменного во времени магнитного поля.

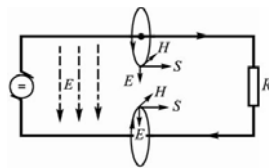
13. Показать, что из уравнений Максвелла следует закон сохранения электрического заряда, т.е. $\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

14. Показать, что уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ и $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ являются совместимыми, т.е. первое из них не противоречит второму.

15. Плоский конденсатор с круглыми параллельными пластинами медленно заряжают. Показать, что поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность конденсатора равен приращению энергии конденсатора за единицу времени. Рассеянием поля на краях при расчете пренебречь.

16. По прямому проводнику круглого сечения течет постоянный ток I . Найти вектор Пойнтинга через боковую поверхность участка данного проводника, имеющего сопротивление R .

17. Нерелятивистские протоны, ускоренные разностью потенциалов U , образуют пучок круглого сечения с током I . Найти модуль и направление вектора Пойнтинга вне пучка на расстоянии r от его оси.

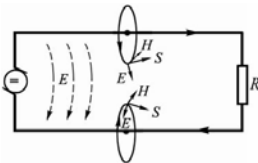


18. Имеется двухпроводная линия из идеального проводника (без тепловых потерь). Одна пара концов линии присоединена к генератору постоянного тока, другая – к некоторому сопротивлению (нагрузке). Показать, что если падения напряжения в проводах не учитывать, то

вектор потока энергии (вектор Умова – Пойнтинга) \mathbf{S} в пространстве между проводами направлен вдоль проводов от генератора к нагрузке. Как изменится картина, если учесть сопротивление проводов?

19. Двухпроводная линия предыдущей задачи присоединена с одного конца к генератору синусоидального тока. Напряжение и сила тока в линии находятся в одной и той же фазе. Показать, что вектор Умова – Пойнтинга \mathbf{S} в пространстве между проводами всегда направлен от генератора к нагрузке.

20. В линии предыдущей задачи ток отстает по фазе от напряжения на 90° . Показать, что вектор Умова – Пойнтинга \mathbf{S} через каждую четверть периода меняет свое направление на обратное и, следовательно, поток энергии за период равен нулю (стоячая волна).



21. Определить давление P солнечного излучения на зачерненную пластину, расположенную перпендикулярно солнечным лучам и находящуюся вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца. Плотность потока энергии от Солнца $C = 1,4 \text{ кВт/м}^2$ (солнечная постоянная). Ответ: $P = 4,6 \text{ мкПа}$.

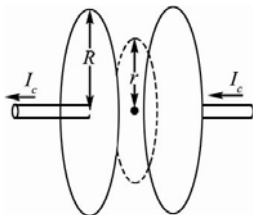
22. Определить поверхностную плотность I потока энергии излучения, падающего на зеркальную поверхность, если световое давление P при перпендикулярном падении лучей равно 10 мкПа . Ответ: $I = 1,5 \text{ кВт/м}^2$.

23. Поток энергии Φ_e , излучаемый электрической лампой, равен 600 Вт . На расстоянии $r = 1 \text{ м}$ от лампы перпендикулярно падающим лучам расположено круглое плоское зеркальце диаметром $d = 2 \text{ см}$. Принимая, что излучение лампы одинаково во всех направлениях и что зеркальце полностью отражает падающий на него свет, определить силу F светового давления на зеркальце. Ответ: $F = 0,1 \text{ нН}$.

24. На зеркальце с идеальной отражающей поверхностью площадью $S = 1,5 \text{ см}^2$ падает нормально свет от электрической дуги. Определить импульс p , полученный зеркальцем, если поверхностная плотность потока излучения ϕ , падающего на зеркальце, равна $0,1 \text{ МВт/м}^2$. Продолжительность облучения $t = 1 \text{ с}$. Ответ: $p = 10^{-7} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$.

25. Спутник в форме шара движется вокруг Земли на такой высоте, что поглощением солнечного света в атмосфере можно пренебречь. Диаметр спутника $d = 40 \text{ м}$. Зная солнечную постоянную ($C = 1,4 \text{ кВт/м}^2$) и принимая, что поверхность спутника, полностью отражает свет, определить силу давления F светового света на спутник. Ответ: $F = 11,2 \text{ мН}$

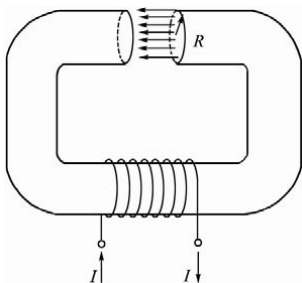
Задачи



1. Через конденсатор с плоскими круглыми пластинами (см. рисунок) за время Δt протекает ток I_c . Вычислите в пространстве между пластинами конденсатора на расстоянии r от его оси поле E и поле B . Ответ запишите через R, r, E и Δt .

- а) поле E и
б) поле B .

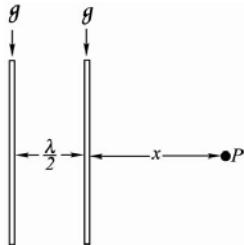
Ответ запишите через R, r, E и Δt .



2. Подковообразный электромагнит (см. рисунок) включается в момент времени $t = 0$. Предположим, что магнитный поток линейно возрастает во времени, т.е. $\Phi = K_1 t$. Каковы величина и направление поля E между полюсами магнита? Ответ запишите через K_1, t, r и R .

3. Предположим, что обмотка электромагнита в задаче 2 содержит N витков. Ток в ней изменяется во времени по

линейному закону: $I = K_2 t$. Чему равна индуктивность обмотки? Ответ запишите через K_1, K_2 и N .



4. Две параллельные пластины расположены на расстоянии $\lambda/2$ друг от друга (см. рисунок), где $\lambda = 2\pi c/\omega$. По каждой из пластин течет поверхностный ток $I = I_0 \cos \omega t$, А/м. Чему равно поле B в точке P и посередине между пластинами? Ответ: 5. Предположим, что на рис. 2.5 металлическое зеркало заменено решеткой из вертикальных проводников (каждый диаметром 0,1 см), находящихся на расстоянии 2 см друг от друга.

- 1) Если на решетку падает волна, описанная на рис. 3.5, то чему равен индуцированный в каждом проводнике ток? Считайте, что $I_{\text{пров}}$ равен произведению I на диаметр проводника.

2) Если проводники медные (удельное сопротивление меди $\rho = 1,72 \cdot 10^{-8}$ Ом·м), то каковы потери мощности в каждом проводнике?

3) Какая доля энергии светового пучка теряется в решетке?

6.* Внутри германиевой пластинки толщиной 1 мм от генератора переменного тока создается электрическое поле $E_{\text{внутр}} = 400 \cos \omega t$, В/м. Частота $\nu = \omega/(2\pi) = 10^9$ Гц. Найдите электрическое поле излучения, если удельное сопротивление германия $\rho = 0,5$ Ом·м. Чему равно отношение поля излучения к полю внутри пластинки?

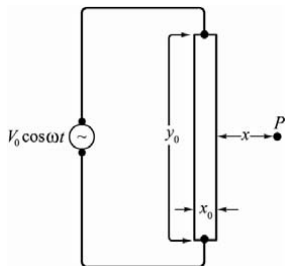
7. Показать, что из уравнений Максвелла следует закон сохранения электрического заряда, т.е. $\text{div } \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$.

8. Показать, что уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ и $\text{div } \mathbf{B} = 0$ являются совместимыми, т.е. первое из них не противоречит второму.

9.* Тонкая пластинка толщиной x_0 , длиной y_0 и шириной z_0 изготовлена из материала с удельным сопротивлением ρ . К пластинке приложено переменное напряжение $V_0 \cos \omega t$. Покажите, что в точке P электрическое поле излучения дается выражением

$$E_{\text{изл}} = \frac{1}{2c\epsilon\epsilon_0 \rho y_0} V_0 \cos(\omega t - kx),$$

$x_0 \ll y_0$ и $x_0 \ll \lambda$.



10.* В условиях задачи 9 найдите среднюю мощность:

- рассеиваемую единицей площади пластинки (Указание: используйте выражение $W = V^2/R$);
- излучаемую единицей площади

(Указание: используйте уравнение $w = \frac{E^2 \epsilon \epsilon_0}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$).

11. Чему равна скорость волны, представляющая собой решение

уравнения $A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$?

12. В некоторой области инерциальной системы отсчета имеется вращающееся с угловой скоростью ω магнитное поле, индукция

* Для решения задач 6, 9 и 10 использовать соотношения между напряженностью поля и величиной тока в пластине.

которого равна \mathbf{V} . Найти $\text{rot}\mathbf{E}$ в этой области как функцию векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{V} .

13. В инерциальной K -системе отсчета имеется однородное чисто магнитное поле с индукцией \mathbf{B} . Найти напряженность электрического поля в K' -системе, которая движется с нерелятивистской скоростью \mathbf{v} относительно K -системы, причем $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$. Для решения этого вопроса рассмотреть силы, действующие на воображаемый заряд в обеих системах отсчета в момент, когда скорость заряда в K' -системе равна нулю.

14. Длинный сплошной алюминиевый цилиндр радиусом $a = 5,0$ см вращают вокруг его оси в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл. Угловая скорость вращения $\omega = 45$ рад/с, причем $\boldsymbol{\omega} \uparrow \uparrow \mathbf{B}$. Пренебрегая магнитным полем возникающих зарядов, найти их объемную и поверхностную плотности.

15. Длинный цилиндр радиусом a из диэлектрика с проницаемостью ϵ вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг своей оси во внешнем однородном магнитном поле. Индукция поля равна \mathbf{B} , причем $\boldsymbol{\omega} \uparrow \uparrow \mathbf{B}$. Найти: а) поляризованность диэлектрика как функцию расстояния от оси цилиндра, $\mathbf{P}(\mathbf{r})$; б) поверхностный связанный заряд λ' на единицу длины цилиндра.

16. Ток, протекающий по обмотке длинного прямого соленоида, достаточно медленно увеличивают. Показать, что скорость возрастания энергии магнитного поля в соленоиде равна потоку вектора Пойнтинга через его боковую поверхность.

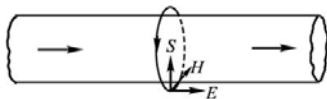
17. На рисунке показан участок двухпроводной линии передачи постоянного тока, направление которого отмечено стрелками. Имея в виду, что потенциал $\varphi_2 > \varphi_1$, установить с помощью вектора Пойнтинга, где находится генератор тока (слева, справа?). Ответ: слева.

18. Энергия от источника постоянного напряжения U передается к потребителю по длинному прямому коаксиальному кабелю с пренебрежимо малым активным сопротивлением. Потребляемый ток равен I . Найти поток энергии через поперечное сечение кабеля. Внешняя проводящая оболочка кабеля предполагается тонкостенной.

19. Показать, что на границе раздела двух сред нормальные составляющие вектора Пойнтинга не терпят разрыва, т.е. $S_{1n} = S_{2n}$.

20. По прямому проводу, обладающему сопротивлением, идет постоянный ток.

- 1) Указать для произвольной точки боковой поверхности провода направление составляющей вектора Умова – Пойнтинга \mathbf{S} , обусловленной тангенциальной составляющей \mathbf{E} .



- 2) Показать, что произведение модуля вектора Умова – Пойнтинга на величину боковой поверхности провода равно мощности, выделяемой током в проводе.

21. Найти плотность тока смещения $j_{\text{см}}$ в плоском конденсаторе, пластины которого раздвигаются со скоростью u , оставаясь параллельными друг другу, если:

- 1) заряды на пластинах конденсатора остаются постоянными;
- 2) разность потенциалов V между пластинами конденсатора остается постоянной. Расстояние d между пластинами конденсатора остается все время малым по сравнению с линейными размерами пластин.
- 3) Что изменится, если пластины конденсатора будут сближаться, а не раздвигаться?

22. Выразите в мегатоннах (мгт) энергию магнитного поля Земли, заключенную во всем пространстве, внешнем по отношению к Земле (1 мгт – энергия, освобождаемая при взрыве 1 млн тонн тринитротолуола, т.е. $4,2 \cdot 10^{15}$ Дж). Предположите, что магнитное поле Земли – это поле диполя с напряженностью на экваторе примерно около $2/3$ Гс. Как вы считаете, может ли водородная бомба 1 мгт, взорванная высоко над поверхностью Земли, существенно исказить магнитное поле Земли? (1 Гс = 10^{-4} Тл). **21.**

Найти плотность тока смещения $j_{\text{см}}$ в плоском конденсаторе, пластины которого раздвигаются со скоростью u , оставаясь параллельными друг другу, если: а) заряды на пластинах конденсатора остаются постоянными; б) разность потенциалов V между пластинами конденсатора остается постоянной. Расстояние d между пластинами конденсатора остается все время малым по сравнению с линейными размерами пластин. Что изменится, если пластины конденсатора будут сближаться, а не раздвигаться?

23. Вычислите поток вектора Пойнтинга \mathbf{S} через поверхность длинного прямолинейного провода, сопротивление единицы длины которого равно ρ . Сравните ваш результат с омическими потерями. **21.** Найти плотность тока смещения $j_{\text{см}}$ в плоском конденсаторе, пластины которого раздвигаются со скоростью u , оставаясь параллельными друг другу, если: а) заряды на пластинах конденсатора остаются постоянными; б) разность потенциалов V между пластинами конденсатора остается постоянной.

Расстояние d между пластинами конденсатора остается все время малым по сравнению с линейными размерами пластин. Что изменится, если пластины конденсатора будут сближаться, а не раздвигаться?

24. Длинный коаксиальный кабель изготовлен из двух идеально проводящих концентрических цилиндров. Один конец кабеля подсоединен к электрической батарее, напряжение на клеммах которой равно V . К другому концу кабеля присоединено сопротивление R . Следовательно, ток, протекающий по кабелю, равен $I = V/R$. С помощью вектора Пойнтинга вычислите скорость потока энергии.

25. Средняя мощность, излучаемая ширококвещательной станцией, составляет примерно 10 кВт.

1) Чему равна величина вектора Пойнтинга на поверхности Земли в точках, удаленных от станции на 10 км? На таком расстоянии излучаемые волны можно считать плоскими. Разумно предположить, что вся мощность излучается $\frac{1}{4} \lambda$ антенной, помещенной над идеально проводящей плоскостью.

2) Найдите максимальные значения напряженностей электрического и магнитного полей.

26. Плоская электромагнитная волна, падая на электрон, заставляет его осциллировать. Найдите отношение энергии, излучаемой электроном в единицу времени, к плотности потока энергии падающей электромагнитной волны. Частота волны предполагается малой. Поэтому влиянием магнитного поля \mathbf{B} волны на движение электрона можно пренебречь.

27. Частица пыли в Солнечной системе испытывает действие двух сил: силы притяжения к Солнцу и планетам и силы светового давления, пропорциональной ее поперечному сечению. Существует такой размер частицы, при котором эти силы уравниваются друг друга. Предполагая, что частица имеет форму шарика и поглощает весь падающий на нее свет, найдите радиус частицы, отвечающий ее равновесию в поле этих двух сил. Объяснение того факта, что «хвосты» комет направлены в сторону от Солнца, покоится на предположении о существовании такого равновесия и о том, что «хвост» кометы состоит из частиц малого размера, возможно, даже из молекул газа. Разумно ли такое объяснение? Мощность, излучаемая Солнцем, равна $4 \cdot 10^{26}$ Вт, его масса $2 \cdot 10^{30}$ кг.

28. На полый торойд, средний радиус которого равен R , а радиус поперечного сечения r ($r \ll R$), намотано N витков проволоки. В

момент времени $t = 0$ по проволоке пропускается ток, сила которого нарастает со временем по линейному закону

$$I(t) = Kt.$$

- а) Найдите магнитное поле и энергию, запасенную в тороиде к моменту времени t .
 - б) Найдите направление и величину вектора Пойнтинга в любой внутренней точке тороида в момент времени t .
 - в) Используя вектор Пойнтинга, найдите скорость изменения со временем энергии электромагнитного поля внутри тороида в произвольный момент времени. Убедитесь в правильности вашего ответа, используя решение задачи (а).
- 29.** Предполагая, что энергия покоя электрона совпадает с его электростатической энергией и что заряд электрона равномерно распределен по объему сферы, вычислите радиус этой сферы. Сравните полученный результат с выражением $U_{эл} = e^2/8\pi\epsilon_0 a$ (п. 2.6).
- 30.** Хорошо известно, что электроны, кроме заряда и массы, обладают еще и собственным моментом количества движения (спином) и магнитным моментом, которые связаны соотношением

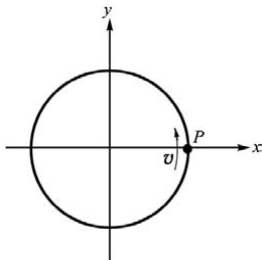
$$\frac{\text{Момент количества движения}}{\text{Магнитный момент}} = \frac{m}{e}.$$

Это соотношение выполняется с точностью до 0,1%. Будем предполагать, что вся масса электрона – электромагнитная, т.е. $m_{эл.м} = 2e^2/(3ac^2 \cdot 4\pi\epsilon_0)$ (п.3.6).

- а) В центре однородно заряженной сферической оболочки радиусом a и с полным зарядом e поместите магнитный диполь с магнитным моментом μ и покажите, что импульс электромагнитного поля равен

$$L = \frac{2}{3} \frac{e\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{a}.$$

- б) Определите отношение момента количества движения к магнитному моменту и сравните это отношение с величиной m/e .
- в) Считая, что μ_z электрона равно $\hbar e/(2m)$, вычислите максимальную скорость, обуславливающую данное значение магнитного момента. Приведите необходимые, с вашей точки зрения, пояснения. Величина $4\pi\epsilon_0 \hbar c^2/e^2 = 1/\alpha$ равна 137.



31. Частица с зарядом e движется по кругу радиусом r со скоростью v .

а) Найдите скалярный потенциал ϕ в центре круга в тот момент, когда частица находится в точке P .

б) Определите векторный потенциал \mathbf{A} в центре круга в тот же момент.

в) Определив потенциал в окрестности центра круга, воспользуйтесь выражениями

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A},$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

и найдите электрическое и магнитное поля в центре. Как ориентирован вектор напряженности электрического поля по отношению к радиус-вектору, проведенному в точку P ?

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. Введение

Для более предметного анализа волновых решений уравнений Максвелла, изучения периодических электромагнитных процессов и устройств для их возбуждения, а также исследования особенностей взаимодействия электромагнитных полей с веществом рассмотрим ряд общих вопросов физики колебаний и волн.

Под колебаниями в физике понимают движения или состояния, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Колебания свойственны всем явлениям природы. Пульсирует излучение звезд, внутри которых идут циклические ядерные реакции. С высокой степенью периодичности вращаются планеты Солнечной системы. При этом всякое вращение можно представить как два одновременных колебания во взаимно перпендикулярных направлениях $x(t) = r \cos \omega t$, $y(t) = r \sin \omega t$ (рис. 4.1), откуда следует

$$x^2(t) + y^2(t) = r^2$$

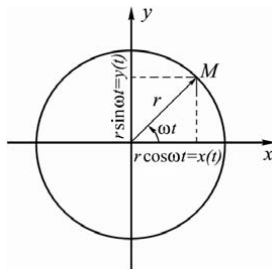


Рис. 4.1. Вращение точки M по окружности радиусом r можно представить как два колебания $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$ во взаимно перпендикулярных направлениях:

$$x^2(t) + y^2(t) = r^2$$

– уравнение окружности, по которой с угловой скоростью ω вращается точка M . К колебательным явлениям можно отнести приливы и отливы на Земле, вызванные периодическим вращением Луны. Ветры возбуждают колебания и волны на поверхности водоемов. Внутри любого живого организма от клетки до высоко развитых популяций непрерывно идут ритмично повторяющиеся процессы – биение сердца, колебания психических состояний и т.д.

В технике колебания либо выполняют определенные функциональные обязанности – колесо, маятник, генератор и т.д., либо возникают как неизбежное проявление физических свойств – вибрации машин и сооружений, неустойчивости и т.д.

В физике особенно выделяют колебания двух видов – механические и электромагнитные и их электромеханические комбинации, поскольку они чрезвычайно актуальны для жизнедеятельности человека. Так, механические колебания плотности воздуха воспринимаются нами как звук, а быстрые электромагнитные колебания – как свет. С помощью звука и света мы получаем основную часть информации об окружающем нас мире. Для колебаний характерно превращение одного вида энергии в другую – кинетической в потенциальную, магнитной в электрическую и т.д.

Колебания могут распространяться и в пространстве, в этом случае мы имеем дело с волнами. Волны – это изменение состояния среды или возмущения, распространяющиеся в этой среде и несущие с собой энергию. Наиболее часто встречающиеся виды волн – упругие, поверхностные, электромагнитные. Частным случаем упругих волн является звук и сейсмические волны, разновидностью электромагнитных волн служат радиоволны, свет, рентгеновские лучи. Основным свойством всех волновых процессов, независимо от их природы, является перенос в этих процессах энергии без переноса вещества. Перенос вещества наблюдается в ряде случаев, но это побочный, а не основной процесс.

Волновые процессы встречаются почти во всех разновидностях физических явлений, и их изучение позволяет вскрыть общие основы многих, внешне качественно различных процессов.

Изучение колебаний и волновых процессов активно стимулировало развитие науки. Так, исследование колебаний маятника (1636 г.) позволило Галилею более точно измерить промежутки времени. Изучение Ньютоном законов периодического обращения планет вокруг Солнца привело к созданию начал классической механики (1686 г.). Дж. Максвелл, связав свойства электромагнитных процессов с характеристиками света, создал электромагнитную теорию света (1864 г.).

Благодаря общности закономерностей колебательных и волновых процессов различной природы оказывается возможным вести их описание на основе единых математических моделей, не интересуясь деталями их поведения. Поскольку одинаковые уравнения имеют одинаковые решения, то результаты, полученные, например, при исследовании механических колебаний, можно перенести в оптику и радиотехнику.

Колебания могут быть самого низкого диапазона частот ν и периодов T . Так, период обращения Солнца вокруг центра Галактики $T \approx 10^{11} \div 10^{12}$ с, обращение Земли вокруг Солнца – $T \approx$

$\approx 3,6 \cdot 10^7$ с, обращение Луны вокруг Земли – лунный месяц – $T \approx 2,4 \cdot 10^6$ с, вращение Земли вокруг своей оси – сутки – $T \approx 9 \cdot 10^4$ с, ветровые волны на море – $T \approx 1$ с, опасные для человека инфразвуки – $0,2 \div 0,1$ с, звуковые колебания, воспринимаемые человеком, – $5 \cdot 10^{-5} \div 5 \cdot 10^{-2}$ с, видимый свет – $T \approx 2,5 \cdot 10^{-14} \div 1,33 \cdot 10^{-14}$ с, короткоживущие частицы – резонансы – $T \approx 10^{-22} \div 10^{-24}$ с.

4.2. Электрический колебательный контур

Изучим возникновение колебаний на примере электрических цепей и покажем, что аналогичные явления могут наблюдаться в механических и других системах.

Рассмотрим электрический контур (рис. 4.2), состоящий из сопротивления R , катушки индуктивности L , конденсатора C и генератора $\mathcal{E}(t)$. Такая схема называется колебательным контуром. Закон Ома для данной цепи

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_L + \mathcal{E}(t)$$

включает наряду с ЭДС генератора также ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_L , а разность потенциалов на обкладках конденсатора равна

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C},$$

где q – заряд; C – емкость конденсатора.

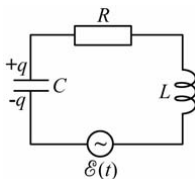


Рис. 4.2. Схема электрического колебательного контура

ЭДС самоиндукции определяется индуктивностью катушки L и скоростью изменения тока в цепи

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}.$$

Ток в цепи равен скорости прохождения заряда в единицу времени

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Процессы в электрическом колебательном контуре описываются уравнением

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t),$$

называемым уравнением колебательного контура.

Подобное уравнение получается при рассмотрении движения тела, подвешенного на пружине, под действием вынуждающей силы $F(t)$ (рис. 4.3). В этом случае на тело действует сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$, направленная всегда против $x(t)$ – смещения тела из положения равновесия, и сила трения $F_{\text{тр}} = -r \frac{dx}{dt}$, пропорциональная скорости движения груза и направленная против скорости движения. Подставляя все эти величины во второй закон Ньютона

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t) + F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}},$$

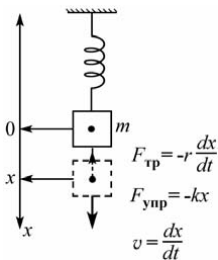


Рис. 4.3. Механический аналог колебательного контура – груз, подвешенный на пружине, двигающийся под действием вынуждающей силы в среде с силами трения

найдем уравнение вынужденных механических колебаний

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F(t).$$

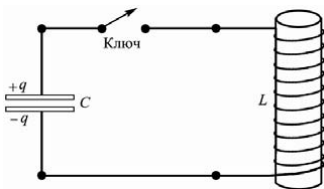
Математически полученные уравнения полностью эквивалентны и имеют одинаковые решения. Как известно из динамики, да и повседневного опыта, отклонение груза от состояния равновесия даже в отсутствие вынуждающей силы $F(t) = 0$ приведет к продолжительным, а при $r = 0$ (в отсутствие силы трения) – незатухающим колебаниям груза, подвешенного на пружине. В этом случае уравнение для механических колебаний упростится

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0.$$

Соответствующий электрический аналог – это колебательный контур без сопротивления $R = 0$ и генератора $\mathcal{E}(t) = 0$, описываемый уравнением (рис. 4.4)

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

Рис. 4.4. Простейший электрический колебательный контур без активного сопротивления $R = 0$ содержит конденсатор C и катушку индуктивности L . Ключ замыкается при $t = 0$, и конденсатор разряжается через катушку индуктивности L



Простейший колебательный контур содержит конденсатор и катушку индуктивности, сопротивлением которой можно пренебречь. В силу совпадения уравнений для механической и электрической систем в простейшем контуре должны возникать периодические колебания заряда и, соответственно, токи и разности потенциалов на обкладках конденсатора. Возникновение колебаний в контуре, состоящем из емкости C и индуктивности L , связано с периодическим превращением энергии электрического поля, сосредоточенного между обкладками конденсатора $\frac{q^2}{2C}$, в энергию магнитного поля $\frac{LI^2}{2}$ и обратно благодаря наличию инерционного элемента – индуктивности и элемента жесткости в механической аналогии – обратной емкости.

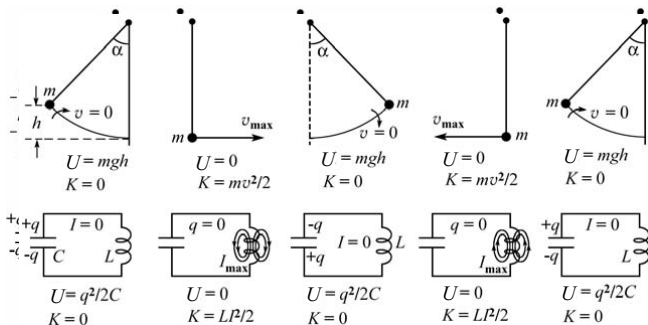


Рис. 4.5. Возможная аналогия между периодическими колебательными процессами в LC -контуре и движением математического маятника

Первоначально локализованный на обкладках конденсатора заряд начинает разряжаться через катушку индуктивности. Благодаря явлению самоиндукции ток в цепи нарастает постепенно до тех пор, пока вся энергия конденсатора не превратится в энергию магнитного поля. В этот момент заряд на обкладках конденсатора станет равным нулю, а ток в катушке индуктивности достигнет максимума. Далее ток, не изменяя направления, начнет убывать, но в силу явления электромагнитной индукции ток не сразу упадет до нуля, а будет спадать постепенно (рис. 4.5). При этом нижняя пластина конденсатора будет постепенно заряжаться положительно, а верхняя отрицательно. Возникающее электрическое поле будет тормозить движение зарядов, и постепенно ток в цепи упадет до нуля. В этот момент заряд на обкладках конденсатора и энергия электрического поля достигнут максимума, а энергия магнитного поля вновь станет равной нулю. Но заряд на обкладках конденсатора уже сменил знак. К этому времени завершится первый полупериод в колебательном контуре. Во время второго полупериода ток течет в обратном направлении, постепенно увеличивая энергию магнитного поля, и после того, как ток достигнет максимума, начнется новая перезарядка конденсатора. Эти процессы перезарядки можно сопоставить с колебаниями маятника, где максимальное отклонение тела от положения равновесия соответствует максимальному заряду конденсатора, а максимальная кинетическая энергия маятника в нижней точке траектории аналогична полному переходу энергии конденсатора в энергию магнитного поля – максимальному току в цепи.

4.3. Незатухающие свободные колебания

Как уже отмечалось в п. 4.2, при отсутствии в цепи омического сопротивления ($R = 0$) процесс изменения заряда со временем в колебательном контуре описывается уравнением

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

Домножив это уравнение на $\frac{1}{L}$ и введя обозначение $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, можно привести его к виду

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решением этого уравнения является функция, которая, будучи дважды продифференцированной, перейдет вновь в себя, изменив знак и приобретя некоторый множитель. Такими функциями являются $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, $A \sin(\omega_0 t + \varphi)$, $A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}$ ($i = \sqrt{-1}$) и их линейные комбинации. Но фактически это все одна функция, поскольку косинус всегда можно свести к синусу

$\cos \alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$, а синус может быть выражен через экспоненты с мнимым показателем: $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$. Постоянные

интегрирования φ и A определяются начальными условиями.

Во многих случаях намного удобнее пользоваться решениями в виде функций комплексного переменного.

Домножим уравнение, описывающее изменение заряда в колебательном контуре, на $\frac{dq}{dt}$ и преобразуем его к виду

$$\frac{dq}{dt} \frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 q^2}{2} \right] = 0.$$

Откуда следует, что величина, стоящая в квадратных скобках, не изменяется со временем:

$$\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 q^2 = \omega_0^2 q_0^2,$$

где q_0 – константа (максимальный заряд на обкладках конденсатора).

Если переписать это уравнение в виде $\left(\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, I = \frac{dq}{dt} \right)$

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} = \text{const},$$

то оно приобретает вид закона сохранения энергии: в колебательном контуре без активного сопротивления сумма энергий электрического $\frac{q^2}{2C}$ и магнитного $\frac{LI^2}{2}$ полей, запасенных в конденсаторе и катушке индуктивности, остается постоянной.

Преобразуем полученное уравнение к виду

$$\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = \pm \omega_0^2 (q_0^2 - q^2),$$

откуда получаем

$$\frac{dq}{\sqrt{q_0^2 - q^2}} = \pm \omega_0 dt.$$

После интегрирования находим

$$\arccos \frac{q}{q_0} = \pm \omega_0 t + \varphi,$$

где φ – новая постоянная.

Решение исходного уравнения, описывающего колебания заряда в LC -контуре, имеет вид

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Постоянные q_0 и φ определяются начальными условиями, например значениями тока и заряда при $t = 0$.

Полученное соотношение описывает и движение груза на пружине

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0,$$

если сопоставить $q \rightarrow x$, $L \rightarrow m$, $1/C \rightarrow k$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$,

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Свободные незатухающие колебания совершаются системой по закону синуса или косинуса – гармонические колебания.

Система возвращается в исходное состояние через минимальное время T_0 – период колебаний

$$q(t + T_0) = q(t).$$

Для гармонических колебаний

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Число колебаний в единицу времени называется частотой колебаний

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

– собственная или резонансная частота колебательного контура.

Единицей измерения частоты колебаний служит Герц [Гц] = $1/[\text{с}]$. Частоте в один герц соответствует частота, при которой за секунду происходит одно полное колебание.

Величина q_0 называется амплитудой, а $\omega_0 t + \varphi$ – фазой колебаний. Постоянная φ – начальная фаза колебаний. Величины q_0 , φ определяются начальными условиями в системе, а величины ω_0 , ν_0 , T_0 зависят от индуктивности L и емкости C колебательного контура, но не зависят от начальных условий.

Период колебаний электрического контура без сопротивления равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Полученная формула для T_0 называется формулой Томсона.

Определим резонансную частоту контура, составленного из катушки индуктивности и конденсатора (рис. 4.6).

Индуктивность соленоида равна

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S_L}{x_L} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-2}} = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}.$$

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{S_C \epsilon_0}{x_C} = \frac{1,6 \cdot 10^{-4} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 5,67 \cdot 10^{-13} \text{ Ф}.$$

Собственная частота колебаний

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{6,28\sqrt{1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 5,67 \cdot 10^{-13}}} = 1,88 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1} = 188 \text{ МГц}.$$

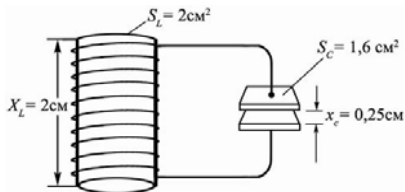


Рис. 4.6. Катушка индуктивности и конденсатор. Число витков провода в катушке $N = 10$

Эта частота соответствует каналу в метровом диапазоне телевидения. Аналогичные колебательные контуры используются для настройки телевизоров на других каналах.

Зная зависимость заряда на обкладках конденсатора от времени $q(t)$, можно найти все характеристики системы – ток, разность потенциалов на обкладках конденсатора, электрическую и магнитную энергии:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta) = \omega_0 q_0 \cos\left(\omega_0 t + \delta + \frac{\pi}{2}\right)$$

– ток опережает заряд по фазе на $\pi/2$.

Разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется в одной фазе с изменением заряда

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C} = \frac{q_0 \cos(\omega_0 t + \delta)}{C}.$$

Электрическая U_q и магнитная U_m энергии в контуре равны

$$U_q = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \frac{1 + \cos(2\omega_0 t + 2\delta)}{2},$$

$$U_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\omega_0^2 q_0^2}{2} \frac{1 + \cos(2\omega_0 t + 2\delta + \pi)}{2}.$$

Изменения электрической и магнитной энергий происходит с удвоенной частотой $2\omega_0$ по сравнению с частотой ω_0 изменения заряда, тока и разности потенциалов (рис. 4.7).

При достижении электрической энергией максимума магнитная энергия равна нулю и наоборот. Говорят, что величины U_m и U_q колеблются в противофазе. Сумма этих энергий постоянна:

$$U_q + U_m = \frac{q_0^2}{2C}.$$

Отметим, что все наши вычисления справедливы лишь при условии, если длина проводов в системе l такова, что нет замет-

ного запаздывания в распространении электрического поля от одной до другой пластин конденсатора за период колебания T_0 , т.е.

$$l \ll cT_0,$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ – скорость света.

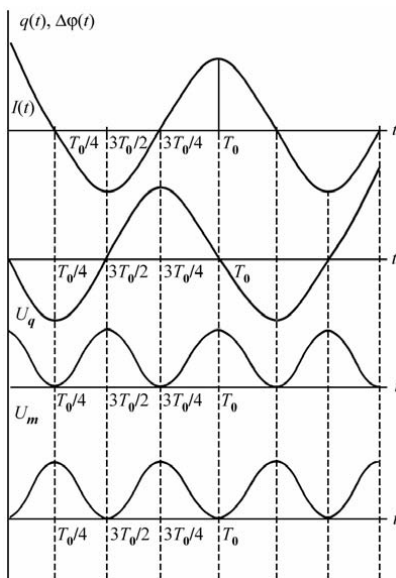


Рис. 4.7. Характер изменения заряда $q(t)$, разности потенциалов $\Delta\varphi(t)$, тока $I(t)$, электрической $U_q(t)$ и магнитной $U_m(t)$ энергий в колебательном контуре без активного сопротивления. Полная энергия в контуре $U_m + U_q$ остается постоянной, так как $R = 0$

Интересным примером возникновения свободных колебаний может служить движение электрона в ионосфере, представляющей собой однородно заряженную плоскую среду, ионизируемую солнечным излучением и космической

радиацией. Сила, действующая на электрон в такой среде, равна

$$F = -eE(x).$$

Напряженность электрического поля в точке, где помещен электрон, равна

$$E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0},$$

где ρ – объемная плотность заряда $\rho = n^+ e$; n^+ – число положительных ионов в единице объема ионосферы.

Уравнение движения в этом случае принимает вид

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{n^+ e^2 x(t)}{\epsilon_0 m_e} = -\omega_0^2 x(t).$$

Таким образом, колебания электрона внутри заряженного слоя будут происходить с частотой

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n^+ e^2}{\epsilon_0 m_e}} \approx 10^4 \sqrt{n^+}, \text{ Гц},$$

где n^+ – концентрация ионов в слое.

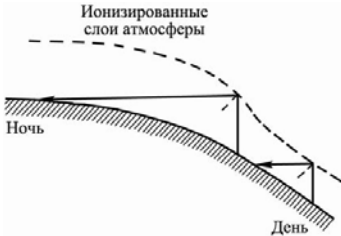


Рис. 4.8. Дальнее распространение коротких волн при их отражении от ионизированных слоев атмосферы

Эту частоту еще называют плазменной частотой. Радиоволны с частотой ниже плазменной отражаются от ионосферы ($\nu \approx 10^7$ Гц = 10 МГц, $\lambda = 30$ м). В этом случае ионосфера ведет себя как проводник. Такое отражение от ионосферы делает возможным распространение радиоволн по всей поверхности Земли (рис. 4.8). Но для связи с космическими кораблями нужно использовать частоты, превышающие плазменную частоту.

4.4. Затухающие колебания

Если подводящие провода и катушка индуктивности собраны не из сверхпроводящих материалов, то колебательный контур всегда обладает сопротивлением R (рис. 4.9). Проходя по такой цепи, ток выделяет джоулево тепло, расходуя энергию, первоначально запасенную в колебательной системе. Колебания в такой системе описываются уравнением, аналогичным незатухающим, но с добавлением слагаемого, описывающего потери энергии на сопротивлении R :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

По мере рассеяния энергии амплитуда колебаний затухает. В этом случае решение уравнения $L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ естественно выбрать с амплитудой, убывающей со временем:

$$q(t) = e^{-\beta t} a(t).$$

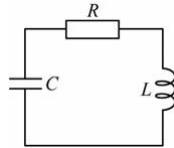


Рис. 4.9. Колебательный контур с сопротивлением. В контуре генерируются затухающие колебания заряда, тока, разности потенциалов

Разделим уравнение на L и введем обозначения

$$2\beta \equiv \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{1}{LC},$$

после чего оно преобразуется к виду

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

Подставив в него $q(t) = e^{-\beta t} a(t)$, приходим к уравнению для переменной $a(t)$:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + a(\omega_0^2 - \beta^2) = 0.$$

Если величина $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$, то решение уравнения совпадает с ранее найденным для незатухающих колебаний:

$$a(t) = q_0 \cdot \cos(\omega t + \delta).$$

Величина заряда на обкладках конденсатора описывается зависимостью

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \delta).$$

Функция $q(t)$ не периодична в смысле $q(t) = q(t + T)$, но она периодически обращается в нуль через равные промежутки времени $T/2 = \pi/\omega$; величину $T = 2\pi/\omega$ называют периодом затухающих колебаний в смысле периодического обращения заряда в нуль

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2/\omega_0^2}} > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Сопротивление цепи понижает частоту колебаний в контуре и увеличивает период колебаний тем сильнее, чем больше отношение

$\frac{\beta^2}{\omega_0^2} = \frac{R^2 C}{4L}$. Периодические колебания возможны при условии

$\beta < \omega_0$ или при $R^2 C / (4L) < 1$.

Множитель $q_0 e^{-\beta t}$ называется амплитудой затухающих колебаний. Амплитуда колебаний при наличии сопротивления экспоненциально убывает со временем. Если сопротивление цепи так велико, что

$\omega_0^2 - \beta^2 \leq 0$ $\left(\frac{R^2 C}{4L} \geq 1 \right)$, то процесс изменения заряда в цепи не будет

колебательным, а станет аperiodическим (рис. 4.10). Подробно рассматривать аperiodическое движение мы не будем.

В случае затухающих колебаний ток на емкости C равен

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 e^{-\beta t} \left[-\beta \cos(\omega t + \delta) - \omega \sin(\omega t + \delta) \right].$$

Домножив это равенство на $\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = 1$ $(\omega^2 + \beta^2 = \omega_0^2)$, полу-

чим

$$I = q_0 \omega_0 e^{-\beta t} \left[-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \delta) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \delta) \right],$$

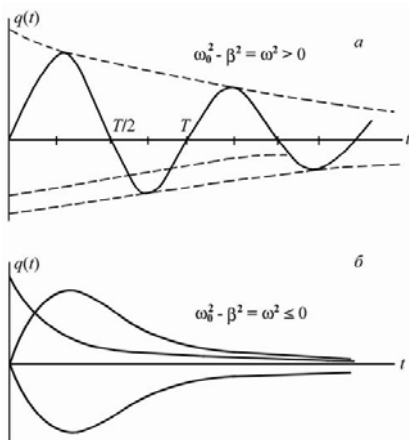


Рис. 4.10. Изменение заряда в колебательном контуре с сопротивлением; *a* – затухающие колебания $\frac{R^2 C}{4L} < 1$; *б* – аperiodическое движение $\frac{R^2 C}{4L} \geq 1$

Введем угол α , определяемый условиями

$$\cos \alpha = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \sin \alpha = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Можем записать ($I_0 = q_0 \omega_0$):

$$I(t) = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta + \alpha).$$

Поскольку $\cos \alpha < 0$, $\sin \alpha > 0$, то $\pi/2 < \alpha < \pi$ – ток опережает по фазе напряжение на конденсаторе в контуре с активным сопротивлением ($R \neq 0$) более чем на $\pi/2$.

Затухание колебаний характеризуется логарифмическим декрементом затухания λ , равным натуральному логарифму отношения амплитуд колебаний, отличающихся по времени измерения на период

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \ln \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T.$$

Здесь $a(t)$ – амплитуда колебаний изучаемой величины, например q , I , U и пр.

Время τ , по истечении которого амплитуда колебаний убывает в e раз, называется временем затухания:

$$\tau = \frac{1}{\beta}.$$

За время τ система совершит N полных колебаний, где

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}.$$

Таким образом, логарифмический декремент затухания связан с числом колебаний N , приводящим к уменьшению амплитуды в e раз соотношением

$$\lambda = \frac{1}{N}.$$

Подставляя в выражение $\lambda = \beta T$ значения $\beta = \frac{R}{2L}$ и $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получаем ($\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$)

$$\lambda = \frac{\pi R}{L\omega_0\sqrt{1 - R^2C/4L}}.$$

Если затухание в системе невелико ($\frac{R^2C}{4L} \ll 1$), то

$$\lambda = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Важнейшей характеристикой колебательного контура является добротность Q , величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N.$$

Чем выше добротность, тем большее число колебаний успеет совершить система, прежде чем амплитуда колебаний уменьшится в e раз ($e = 2,71826$). При слабом затухании

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величину Q можно связать с относительным изменением энергии U в колебательной системе за период. Энергия в контуре пропорциональна квадрату амплитуды тока или заряда $U \sim q^2$ (п. 3.3). Относительное изменение энергии за период равно

$$-\frac{\Delta U}{U} = \frac{U(t) - U(T+t)}{U(t)} = \frac{(1 - e^{-2\beta T})a^2(t)}{a^2(t)} = 1 - e^{-2\beta T}.$$

При слабом затухании $\lambda \ll \beta T \ll 1$, разложив экспоненту в ряд $e^x \approx 1 + x$ и выразив логарифмический декремент $\lambda = \beta T$ через добротность Q , находим $-\frac{\Delta U}{U} = 1 - e^{-2\lambda} \approx 2\lambda = \frac{2\pi}{Q}$:

$$Q = \frac{2\pi}{(-\Delta U/U)}$$

– добротность тем выше, чем меньше относительные потери энергии в контуре за период.

Все математические результаты, полученные для электрических затухающих колебаний, полностью применимы и к механическим затухающим колебаниям, описываемым уравнением

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

и имеющим решение

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta),$$

где $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, $2\beta = r/m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Потери энергии колебаний в механических системах также вызваны её превращением в теплоту вследствие трения.

Системы с затухающими колебаниями применяются в баллистических гальванометрах – устройствах для определения количества заряда, прошедшего при кратковременных импульсах тока.

Прибор состоит из массивной измерительной рамки, представляющей катушку с намотанной тонкой проволокой, закрепленной на оси с возвращающей спиралью (рис. 4.11). Рамка размещена в радиальном магнитном поле. Период свободных колебаний рамки равен $T_0 \approx 10 \div 15$ с. По рамке пропускается импульс тока, длительность которого $\Delta T \approx 0,1$ с много меньше T_0 . При этих условиях оказывается, что первое отклонение стрелки гальванометра – угол поворота – пропорционально количеству заряда, прошедшего через рамку.

Движение рамки описывается уравнением затухающих крутильных колебаний

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + r \frac{d\varphi}{dt} + k\varphi = 0.$$

Здесь J – момент инерции рамки; r – коэффициент трения; k – крутильная жесткость пружины; φ – угол поворота рамки в момент времени t .

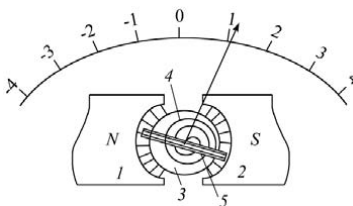


Рис. 4.11. Схема устройства баллистического гальванометра: 1, 2 – полюса магнита; 3 – сердечник из магнито-мягкого железа; 4 – возвращающая спираль; 5 – измерительная рамка

Решением уравнения служит зависимость

$$\varphi(t) = \varphi_a e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Пусть при $t = 0$ $\varphi(0) = 0$, в этом случае $\alpha = \pi/2$, и поэтому

$$\varphi(t) = \varphi_a e^{-\beta t} \sin \omega t.$$

Начальная скорость вращения рамки равна

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=0} = (-\beta \varphi_a e^{-\beta t} \sin \omega t + \varphi_a \omega e^{-\beta t} \cos \omega t)_{t=0} = \omega \varphi_a.$$

В начальный момент времени при прохождении короткого импульса тока I через рамку на нее действуют в магнитном поле силы Ампера, и уравнение движения рамки имеет вид (c – константа)

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = c \cdot I = c \frac{dq}{dt}.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем начальную скорость вращения после прохождения по ней короткого импульса тока

$$J \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=0} = c \cdot q.$$

Начальная скорость вращения рамки связана с максимальным отклонением стрелки гальванометра φ_a :

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=0} = \omega \varphi_a,$$

откуда получаем

$$\frac{J\omega}{c} \varphi_a = q, \quad \varphi_a = Bq$$

– баллистический отброс стрелки гальванометра пропорционален количеству прошедшего электричества. Постоянная B , называемая баллистической постоянной, может быть определена, если

разрядить через гальванометр конденсатор известной емкости, заряженный до определенного потенциала. Измерив при этом отброс гальванометра, можно определить постоянную B данного прибора и применять его для количественных измерений заряда.

Баллистический гальванометр был использован Томсоном и Стюартом в их экспериментах по определению удельного заряда e/m частиц, обеспечивающих электропроводность металлов.

4.5. Вынужденные колебания. Резонанс

Вынужденные колебания в контуре, состоящем из сопротивления R , емкости C , индуктивности L возникают, если эта цепочка подключена к источнику электродвижущей силы $\mathcal{E}(t)$, величина которой меняется со временем t (рис. 4.2). В этом случае уравнение колебаний становится неоднородным, поскольку содержит ненулевую правую часть

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathcal{E}(t).$$

Разделив уравнение на L и вводя прежние обозначения $2\beta = \frac{R}{L}$,

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, приведем его к виду

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}(t)}{L}.$$

Уравнение линейно по q и его производным, но для его решений несправедлив принцип суперпозиции – сумма любых двух его решений не есть снова решение этого уравнения. Однако для него справедлив принцип суперпозиции в следующем смысле: если $\mathcal{E}(t) = \sum_k \mathcal{E}_k(t)$ – первая часть

уравнения представлена как сумма функций $\mathcal{E}_k(t)$ и $q_k(t)$ – решений неоднородного уравнения, где в правой части стоит $\mathcal{E}_k(t)$, то $q(t) = \sum_k q_k(t)$ будет решением уравнения с правой частью $\mathcal{E}(t)$. Это

свойство важно, поскольку, оказывается, каждая функция $\mathcal{E}(t)$ может быть представлена в виде суммы гармонических функций – синусов и косинусов. Такое разложение называется рядом Фурье. Поэтому достаточно решить наше неоднородное уравнение для зависимости $\mathcal{E}(t)$ в виде

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t,$$

где \mathcal{E}_0 , ω – постоянные величины, а величина ω называется частотой внешней вынуждающей силы.

Общее решение неоднородного уравнения

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t$$

можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^2 q_\Delta}{dt^2} + 2\beta \frac{dq_\Delta}{dt} + \omega_0^2 q_\Delta = 0,$$

$$q_\Delta(t) = q_{\Delta_0} e^{-\beta t} (C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t), \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

и любого частного решения $q(t)$ исходного неоднородного уравнения. Периодическую функцию $\cos \omega t$ заменим в этом уравнении на функцию комплексного переменного $e^{i\omega t}$:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} e^{i\omega t},$$

поскольку вещественная часть $e^{i\omega t}$, а только вещественная величина имеет физический смысл, равна $\cos \omega t$.

Будем искать частное решение этого уравнения в виде

$$q(t) = q_0 e^{i\omega t}.$$

Подставив это выражение в неоднородное уравнение, проинтегрировав его по t и сократив на $e^{i\omega t}$, находим

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0 / L}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega}, \quad q(t) = \frac{\mathcal{E}_0 / L}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta i\omega} \cdot e^{i\omega t}.$$

Любое комплексное число представимо в виде $q = a + ib$, а комплексно-сопряженное как $q^* = a - ib$. Вещественная часть $q(t)$ равна

$$q(t) = \frac{q(t) + q^*(t)}{2} = q_a \cos(\omega t - \alpha),$$

где

$$q_a = \frac{\mathcal{E}_0 / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2}}$$

– амплитуда вынужденных колебаний;

$$\cos \alpha = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\epsilon_0} Lq_0, \quad \sin \alpha = \frac{2\omega\beta}{\epsilon_0} Lq_0.$$

Сдвиг фаз вынужденного колебания

$$\alpha = \arctg \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Пусть в примере, изображенном на рис. 4.6 (п. 4.3), конденсатор и катушка индуктивности телевизионного контура подключены к антенне, как показано на рис. 4.12, *а*. В любом из телевизионных каналов амплитуда входного переменного напряжения от антенны равна $\epsilon_0 = 100$ мкВ. Индуктивность катушки $L = 1,26$ мкГн, а ее сопротивление $R = 20$ Ом, емкость конденсатора $C = 0,567$ пФ (пикофарад).

Амплитуда тока в контуре

$$I_a = q_a \omega = \frac{\epsilon_0 \omega / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2}}.$$

На резонансной частоте $\omega = \omega_0$ сопротивление контура чисто активное и равно R , следовательно,

$$I_{a0} = q_a \omega_0 = \frac{\epsilon_0}{R} = \frac{10^{-4}}{20} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ А} = 5 \text{ мкА}.$$

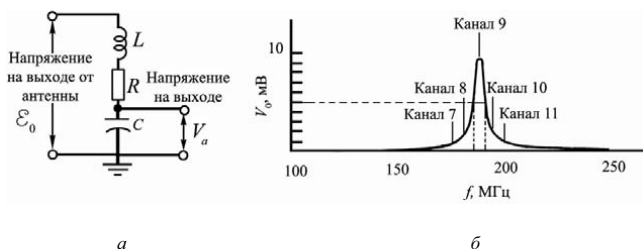


Рис. 4.12. Последовательный резонансный контур (*а*); выходное напряжение на конденсаторе в зависимости от частоты (*б*)

Амплитуда напряжения на конденсаторе на резонансной частоте ($\nu_0 = \omega_0/2\pi = 188$ МГц)

$$V_{a0} = \frac{q_{a0}}{C} = \frac{I_{a0}}{2\pi\nu_0 C} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{6,283 \cdot 1,88 \cdot 10^8 \cdot 5,67 \cdot 10^{-13}} = 7,46 \cdot 10^{-3} \text{ В},$$

$V_{a0} = 7,46$ мВ в 74,6 раз больше, чем \mathcal{E}_0 – напряжение на входе.

На рис. 13.12, б построена зависимость амплитуды выходного напряжения от частоты

$$V_a = \frac{q_a}{C} = \frac{\mathcal{E}_0}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(2\pi\nu RC)^2 + (\nu^2/\nu_0^2 - 1)^2}}.$$

На частоте соседнего канала $\nu = 194$ МГц $V_a = 1,54$ мВ, что в 4,84 раза меньше $V_{a0} = 7,46$ мВ – напряжения на резонансной частоте. Фактор подавления соседнего канала равен 4,8.

Добротность колебательного контура

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 74,6,$$

что совпадает с $\frac{V_{a0}}{\mathcal{E}_0}$, и это не случайно, поскольку $\frac{V_{a0}}{\mathcal{E}_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Необычным и новым в полученных решениях является монотонная зависимость амплитуды колебаний в системе от частоты вынуждающей силы ω .

Особенно ярко это проявляется при отсутствии потерь энергии в системе ($2\beta = R/L = 0$). В этом случае

$$q_a = \frac{\mathcal{E}_0 / L}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

– при приближении частоты вынуждающей силы ω к частоте соответственных колебаний ω_0 амплитуда колебаний начинает очень сильно возрастать – наступает резонанс (франц. *resonance*, от лат. *resono* – откликаюсь) – относительно большой избирательный отклик колебательной системы на периодическое воздействие с частотой, близкой к частоте её собственных колебаний. Резонанс в акустических и механических явлениях впервые был описан итальянским ученым Г. Галилеем, а в электромагнитных системах – на примере колебательного контура в 1868 г. английским ученым Дж. Максвеллом.

Резонанс наступает тогда, когда внешняя периодическая сила (ЭДС) изменяется с частотой ω , близкой к частоте собственных

колебаний ω_0 системы. В ходе раскачки системы она получает за период приращение энергии, пропорциональное размаху колебания, в результате размах колебаний растет от периода к периоду в арифметической прогрессии – линейно.

Реально всегда существуют причины, ограничивающие амплитуду колебаний в условиях резонанса. Это связано с диссипацией энергии ($R \neq 0$) из-за наличия сопротивления и сил трения, с неточным совпадением частот вынуждающей силы и собственной частоты амплитуды, с нелинейностью колебательной системы. При наличии сопротивления в цепи колебания возрастают до тех пор, пока величина внешней ЭДС \mathcal{E}_0 не уравнивается падением напряжения на сопротивлении R .

Резонансная частота для заряда и напряжения на конденсаторе при наличии сопротивления определяется из условия $dq_a/d\omega = 0$ и равна

$$\omega_{q \text{ рез}} = \omega_{\Delta p \text{ рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \leq \omega_0.$$

Подставляя значение резонансной частоты в

$$q_a = \frac{\mathcal{E}_0 / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}},$$

получим, что амплитуда колебаний заряда при резонансе тем больше, чем меньше активное сопротивление R цепи и выше амплитуда переменной ЭДС \mathcal{E}_0 :

$$q_{\text{рез}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2L\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{q_{\text{ст}}\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

здесь $q_{\text{ст}} = C\mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L\omega_0^2}$ – статическое значение заряда при посто-

янной ЭДС ($\omega = 0$).

Отношение максимального значения амплитуды колебаний $q_{\text{рез}}$ к статическому смещению $q_{\text{ст}}$ равно добротности колебательного контура (при условии $\beta^2/\omega_0^2 \ll 1$)

$$Q = \frac{q_{\text{рез}}}{q_{\text{ст}}} = \frac{\pi}{\lambda}; \quad Q = \frac{q_{\text{рез}}/C}{q_{\text{ст}}/C} = \frac{U_{\text{max}}}{U_{\text{ст}}}$$

– чем выше добротность колебательной системы, тем выше амплитуда колебаний при резонансе по сравнению со статическим смещением в системе. Добротность также показывает, во

сколько раз напряжение на конденсаторе при резонансе может превысить приложенное напряжение (рис. 4.13).

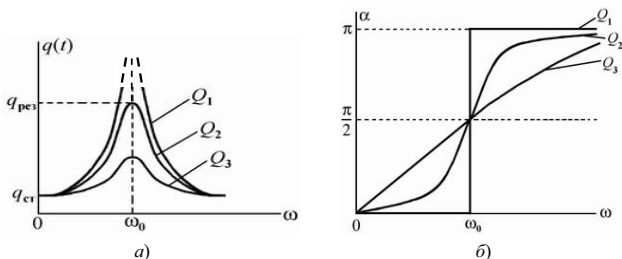


Рис. 4.13. Резонансные кривые колебательного контура при различных добротностях $Q_1 > Q_2 > Q_3$. $q_{\text{ст}}$ – статическое смещение в системе ($\omega = 0$) (а); сдвиг фаз вынужденного колебания как функция частоты вынуждающей силы при различных добротностях колебательного контура ($Q_1 > Q_2 > Q_3$, $Q_1 = \infty$) (б)

Зависимость амплитуды колебания q_a , I_a или U_{max} от частоты ω внешней вынуждающей силы $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ называется резонансной кривой. Важной характеристикой резонансной кривой является ширина резонансной кривой $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, где ω_1 , ω_2 – частоты, при которых энергия колебаний вдвое меньше энергии в максимуме (рис. 4.14).

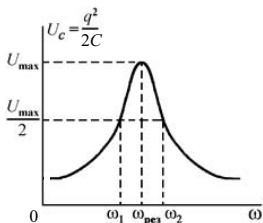


Рис. 4.14. Резонансная кривая для энергии, запасенной конденсатором в колебательном контуре при вынужденных колебаниях. Чем выше добротность контура, тем уже резонансная кривая $Q = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\Delta\omega}$ и выше резонансный максимум ($\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$)

Энергия на конденсаторе пропорциональна квадрату заряда, поэтому для определения частот ω_1 и ω_2 можем записать условие

$$\frac{[q(\omega_{1,2})]^2}{[q(\omega_{\text{рез}})]^2} = 0,5.$$

В этом случае $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q}$ или $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ – чем вы-

ше добротность, тем уже резонансная кривая.

Явление резонанса играет большую роль в природе, науке и технике. Резонанс сооружений и машин при периодических внешних воздействиях может стать причиной катастроф. Чтобы избежать резонансного воздействия, подбирают соответствующим образом свойства системы или используют успокоители колебаний.

В радиотехнике явление резонанса позволяет отделить сигналы одной нужной частоты от всех других.

Например, если к контуру приложено напряжение $\mathcal{E}(t)$, которое всегда можно представить как совокупность периодических напряжений

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{E}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots$$

то, настраивая контур на одну из частот $\omega_1, \omega_2, \dots$, изменяя параметры контура C или L , можно увеличить на конденсаторе напряжение нужной частоты в Q раз, в то время как напряжения остальных составляющих будут слабыми. Такой процесс реализуется при настройке радиоприемных устройств на нужную станцию (рис. 4.12).

Явление усиления напряжений на элементах электрических схем при резонансе необходимо учитывать при их расчете во избежание электрического пробоя и разрушения колебательных систем, а не ограничиваться приближением только статистических полей.

В случае вынужденных механических колебаний уравнение, описывающее поведение колебательной системы, имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F_a \cos \omega t.$$

Общее решение его имеет вид

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \alpha) + e^{-\beta t} (c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t),$$

где

$$A(\omega) = \frac{F_a / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}$$

– амплитуда установившихся механических колебаний под действием периодической силы, действующей с циклической частотой ω и амплитудой F_a .

Постоянные c_1 и c_2 определяются из начальных условий:

$$2\beta = r/m, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Имеет место полная математическая аналогия в результатах рассмотрения электрических и механических колебательных систем.

4.6. Установление колебаний. Биения

Рассматривая вынужденные колебания, мы не изучали переходные процессы установления колебаний, а ограничивались случаем, когда собственные свободные колебания в системе уже полностью затухли. Это возможно, если с начала колебаний прошло время, значительно превышающее время затухания.

Но если колебательная система обладает высокой добротностью Q и, соответственно, большим временем затухания τ по сравнению с периодом T

$$Q = \pi \frac{\tau}{T},$$

то процесс установления колебаний может затянуться и содержать в себе новые интересные физические явления.

Рассмотрим предельный случай, когда в системе можно пренебречь силами трения или сопротивлением $\beta = 0$.

Решение уравнения для вынужденных колебаний будет иметь в этом случае вид

$$x(t) = \frac{F_0 / m}{|\omega^2 - \omega_0^2|} \cos \omega t + c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t.$$

Предположим, что при $t = 0$ тело находится в состоянии покоя и имеет нулевую скорость:

$$x(t) = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = 0.$$

В этом случае

$$c_1 = -\frac{F_0 / m}{|\omega^2 - \omega_0^2|}, \quad c_2 = 0$$

и можно переписать решение в виде

$$x(t) = \frac{F_0 / m}{|\omega^2 - \omega_0^2|} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) = \frac{2F_0 / m}{|\omega^2 - \omega_0^2|} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right).$$

Введем обозначения

$$A(t) = \frac{2F_0 / m}{|\omega^2 - \omega_0^2|} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right).$$

В этом случае решение преобразуется к виду

$$x(t) = A(t) \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right).$$

Если частоты ω и ω_0 близки друг к другу и их полуразность равна $\Delta\omega = (\omega - \omega_0)/2$, то в этом случае система будет совершать под действием вынужденной силы колебания с частотой, близкой к собственной $(\omega + \omega_0)/2 = \omega_0 + \Delta\omega \approx \omega_0$ частоте колебаний в системе, но амплитуда колебаний будет медленно и периодически изменяться со временем. Это явление называется биениями.

Период повторения биений равен $T_\delta = \frac{\pi}{\Delta\omega}$ (рис. 4.15, 4.16).

Рис. 4.15. Возникновение биений при сложении двух незатухающих колебаний одного направления с близкими частотами и равными амплитудами

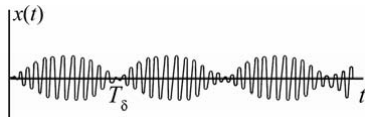
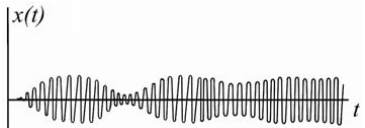


Рис. 4.16. Процесс установления колебаний в системе при наличии сил трения и действии вынуждающей силы



Отдельного рассмотрения требует случай наступления резонанса $\omega \rightarrow \omega_0$. При приближении частоты вынуждающей силы ω_x к собственной частоте колебаний в системе полученных решений

следует раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$:

$$x(t) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{2F_0/m}{\omega - \omega_0} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t.$$

Возникло колебание с частотой ω_0 , амплитуда которого линейно нарастает со временем (рис. 4.17).

$$A(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t.$$

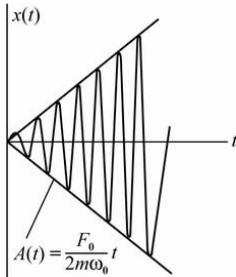


Рис. 4.17. Нарастание амплитуды колебаний при резонансе в отсутствие сил трения или сопротивления в цепи

Нарастание амплитуды будет, конечно, остановлено появлением сил трения, которые растут линейно со временем и нелинейными процессами, проявляющимися в любой физической системе при больших изменениях ее параметров.

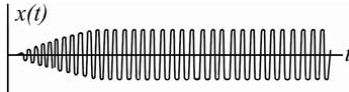


Рис. 4.18. При наличии сил трения вынужденные колебания переходят в колебания постоянной амплитуды

Поэтому, в конце концов, нарастающие колебания перейдут в колебания постоянной амплитуды (рис. 4.18).

4.7. Параметрические колебания

Возбуждение колебаний возможно не только под действием вынуждающей силы, но и при ее отсутствии, если в системе периодически изменять параметры тех элементов колебательной системы, в которых сосредотачивается энергия колебаний.

Возникновение колебаний при изменении параметров системы называется параметрическим, а сами колебания – параметрическими. Параметрические колебания могут возбуждаться в системах различной физической природы. Например, в электрическом колебательном контуре энергоемкими или реактивными параметрами являются емкость и индуктивность, в которых запасена электрическая $q^2/(2C)$ и магнитная $LI^2/2$ энергии. Свободные колебания в такой системе описываются уравнением

$$\frac{d}{dt}LI + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

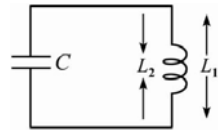
В такой системе можно через равные промежутки времени быстро раздвигать и сдвигать пластины конденсатора или растягивать и сжимать спираль катушки индуктивности колебательно-го контура. Быстро здесь означает, что за время Δt изменения параметров системы заряд конденсатора не успевает измениться. Если $dq/dt \approx 0$, то

$$\Delta\Phi = \int_0^{\Delta t} \frac{q}{C} dt = \text{const}$$

– поток вектора магнитной индукции через катушку остается постоянным.

Рассмотрим колебательный контур, в котором можно быстро изменять индуктивность катушки от L_1 до L_2 и от L_2 до L_1 ($L_1 > L_2$), оставляя емкость неизменной (рис. 4.19). Омическое сопротивление контура пренебрежимо мало.

Рис. 4.19. Возбуждение параметрических колебаний в контуре с переменной индуктивностью и постоянной емкостью за счет механических деформаций катушки индуктивности



В контуре всегда текут токи, вызванные наводками или тепловыми флуктуациями. Пусть при $L = L_1$ ток в катушке максимален

и равен I_{10} , а заряд на обкладках конденсаторов становится равным нулю. В этот момент индуктивность убывает от L_1 до L_2 . Поскольку магнитный поток не изменяется, то ток в цепи увеличивается до

$$I_{20} = \frac{L_1}{L_2} I_{10}$$

и возникают колебания с частотой ω_2 и периодом T_2 :

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{L_2 C}.$$

Через $T_2/4$ – четверть периода ток обратиться в нуль, и в этот момент увеличим индуктивность с L_2 до L_1 . Поскольку при этом тока в цепи нет, то амплитуда колебаний остается прежней, но изменится их частота. Колебания тока будут описываться уравнением

$$I = I_{20} \sin \omega_1 t, \quad \text{где } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}.$$

Через $T_1/4$, когда ток вновь достигнет максимального значения I_{20} , вновь уменьшим индуктивность до L_2 , в результате амплитуда станет равной

$$I_{30} = \frac{L_1}{L_2} I_{20} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 I_{10}.$$

Если всегда уменьшать индуктивность контура, когда ток максимален, и увеличивать, когда ток равен нулю, то в результате амплитуда тока будет нарастать в геометрической прогрессии

$$I = I_{10} \left[1 + \frac{L_1}{L_2} + \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^n \right] = I_{10} \frac{\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{L_1}{L_2}\right) - 1}.$$

При больших n нарастание будет остановлено нелинейными процессами в контуре.

Такое нарастание амплитуды понятно и с энергетической точки зрения. Растягивая спираль – уменьшая индуктивность, когда ток максимален, мы совершаем работу против амперовых сил притяжения между витками и магнитная энергия контура увеличивается. Возвращать L к исходному значению L_1 надо в момент, когда ток в цепи равен нулю, при этом магнитная энергия будет оставаться неизменной

$$\Delta U_m = (LI)^2 \Delta \left(\frac{1}{2L} \right).$$

Емкостная параметрическая машина была создана в 1931–1933 гг. Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси. Конденсатор машины состоит из двух систем обкладок – неподвижной (статор) и подвижной (ротор). Статор изготавливается из 26 алюминиевых пластин с радиальными вырезами, ротор из 25 пластин круглой формы с аналогичными вырезами (рис. 4.20). Мотором ротор раскручивался до 4000 оборотов в минуту. При этом периодически изменялась емкость конденсатора, и возбуждались параметрические колебания тока. Если параллельно конденсатору подключали неоновые лампы, то система становилась нелинейной и получалось устойчивое напряжение 600÷700 В. В отсутствие ламп напряжение не устанавливалось, а нарастало до 2000÷3000 В, пока не начинались пробой между обкладками конденсатора.

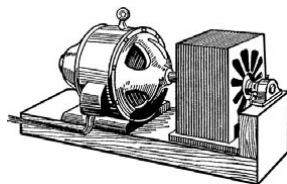


Рис. 4.20. Параметрический емкостный генератор Мандельштама – Папалекси

Практическое применение параметрические устройства получили в 50-е гг. XX в., когда были созданы параметрические полупроводниковые диоды, емкость которых изменялась в зависимости от приложенного напряжения, а также конденсаторы переменной емкости с сегнетоэлектриками, переменные индуктивности с ферритовыми сердечниками. В настоящее время разработаны и нашли широкое применение параметрические усилители, отличающиеся низким уровнем собственных шумов в сочетании с простотой и надежностью конструкции.

4.8. Волны

При рассмотрении вопросов, связанных с распространением электромагнитного поля (п. 4.3), мы ввели понятие электромагнитной волны как изменения некоторой совокупности физических величин, в том числе и полей, способных распространяться от места их возникновения или колебаться в ограниченной области пространства. Как правило, при волновых движениях распространение возмущений не сопровождается переносом среды или вещества, в котором они возникают.

Для механических волновых движений необходима среда переноса, поскольку волна является возмущением этой среды. Но в случае электромагнитных волн в вакууме такая среда отсутствует, поскольку переменное электрическое поле порождает в свободном пространстве переменное магнитное поле, а оно, в свою очередь, вновь создает переменное электрическое поле. Гравитационные волны служат проявлением геометрических свойств пространства-времени.

Важным свойством волновых движений является наличие близкой действующей связи между возмущениями в соседних точках пространства. Так, подъем поверхности воды приводит к нарушению равновесия в соседних областях, а стремление восстановить равновесие в жидкости под действием силы тяжести приводит к возмущению новых частиц жидкости и проявляется как распространение волны.

В электромагнитной волне изменение напряженности электрического поля в одной точке порождает магнитное поле в соседних точках и наоборот.

Понятие волны охватывает разнообразные движения в системах любой природы и является, по существу, первичным понятием. Даже разделение объектов на волны и частицы не абсолютно, поскольку в квантовой физике микрообъекты объединяют в себе свойства частиц и волн, что означает возможность двойного описания их поведения.

Во всем обширном семействе волновых движений можно отметить некоторые общие свойства и понятия, которые не зависят от их физической природы. Эта общность, как можно показать, проявляется, прежде всего, в том, что волновые движения различных физических объектов описываются одинаковыми уравнениями.

4.9. Волновые уравнения

Пусть в момент времени $t_1 = 0$ в точке с координатой x_1 возникло некоторое возмущение – всплеск на воде, удар барабана, переменное электрическое поле и т.д., способное распространяться вдоль оси x вправо со скоростью v . Форма этого возмущения описывается в момент времени $t_1 = 0$ в точке с координатой x_1 функцией $f(x_1)$, где $f(x_1)$ может быть смещением точки из положения равновесия, отклонением давления от среднего значения, напряженностью электрического или магнитного поля и т.д.

Если возмущение распространяется без искажений со скоростью v вправо, то функция f должна таким образом зависеть от x и t , чтобы выполнялись соотношения

$$f(x_1, t_1) = f(x_2, t_2)$$

– возмущение переходит из точки x_1, t_1 в точку x_2, t_2 , не меняя формы, где

$$x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1), \quad t_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v},$$

откуда

$$x_1 = x_2 - v(t_2 - t_1), \quad t_1 = t_2 - \frac{x_2 - x_1}{v}.$$

Оба эти уравнения эквивалентны, поскольку из первого следует второе, а из второго первое. Если возмущение распространяется вправо, то функция f зависит лишь от комбинации аргументов x и t

$$f = f_1(x - vt).$$

Действительно, одному значению аргумента $a = x - vt$ соответствует одно значение функции $f(a)$. Положение координаты $x = a + vt$ этого возмущения распространяется вправо со скоростью

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(a + vt)}{dt}.$$

Если возмущение движется влево, то оно описывается уравнением

$$f = f_2(x + vt),$$

поскольку из условия, что одинаковому значению аргумента a соответствуют равные значения функции, следует $f(x + vt) = f(a)$. Координата этого возмущения смещается влево $x = a - vt$ со скоростью v (рис. 4.21).

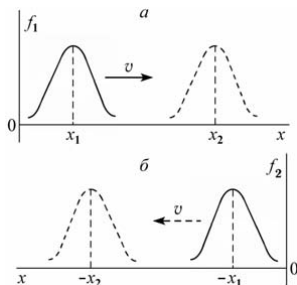


Рис. 4.21. Волновой процесс: a – возмущение f_1 распространяется вправо вдоль оси x со скоростью v и описывается функцией $f_1(x - vt)$; b – возмущение движется влево параллельно оси x со скоростью v и описывается функцией $f_2(x + vt)$

Поскольку вид функций f_1, f_2 определяется только начальными условиями – начальным смещением и скоростью распространения, то вид волнового движения может быть весьма разнообразным.

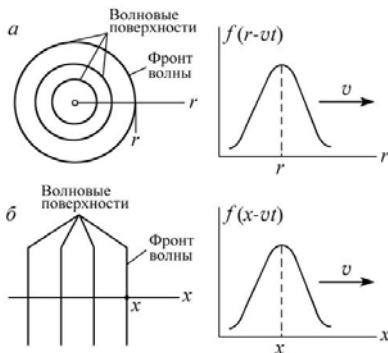


Рис. 4.22. Виды волновых фронтов и волновых поверхностей: a – сферическая волна; b – плоская волна

Геометрическое место точек, до которых доходит возмущение в момент времени t , называется *фронтом волны*. Фронт волны отделяет часть пространства, вовлеченного в волновой процесс, от области, куда возмущение еще не дошло. Распространение волны происходит в направлении нормали к волновому фронту и может рассматриваться как движение волнового фронта (рис. 4.22).

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе или одинаковым образом, называется *волновой поверхностью*. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченную волновым процессом. Волновых поверхностей бесконечно много, в то время как волновой фронт в каждый момент времени существует только один.

Волновые поверхности и волновые фронты могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют вид сферы или плоскости. В этих случаях их называют соответственно сферическими или плоскими волнами (рис. 4.22).

Можно описать распространение возмущения в пространстве при помощи дифференциального уравнения.

В одномерном случае

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют функции $f_1(x - vt)$, $f_2(x + vt)$ и их суперпозиция $f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$. Полученное уравнение называется волновым уравнением. Оно эквивалентно двум дифференциальным уравнениям первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= a \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= b \frac{\partial f}{\partial x},\end{aligned}$$

где a , b – постоянные, $ab = v^2 > 0$.

Впервые такая пара уравнений была записана для передачи сигналов в телеграфных линиях и получила название телеграфных уравнений. Они описывают такую перекачку f и φ друг в друга, при которой изменение во времени одной величины φ или f вызывает изменение в пространстве другой величины f или φ . Этот процесс лежит в основе механизма волнообразования в различных физических ситуациях. При звуковых волнах в газах или жидкостях функции f и φ соответствуют возмущениям давления и скорости, а в случае электромагнитного поля – напряженности электрического $f \rightarrow E$ и магнитного $\varphi \rightarrow B$ полей.

Волновое уравнение может быть обобщено на случай трехмерных возмущений, когда поле f зависит от трех пространственных координат x , y , z . Для этого в волновом уравнении $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ надо

заменить на оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

и оно принимает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \Delta f = 0.$$

В п. 3.3, посвященном распространению электромагнитного поля, мы показали, что одним из решений трехмерного волнового уравнения от точечного сферически симметричного источника, являются сферически расходящиеся и сходящиеся волны:

$$f(r, t) = \frac{f_1(r - vt)}{r} + \frac{f_2(r + vt)}{r}.$$

Особенностью такой волны, в отличие от плоской, является уменьшение амплитуды колебаний $\sim r^{-1}$ при удалении от источ-

ника ($r = 0$). Такая зависимость амплитуды от времени соответствует закону сохранения энергии.

В плоской волне амплитуда колебаний не зависит от x , если волна не поглощается средой. Но если такое поглощение имеет место, то амплитуда волны будет экспоненциально затухать с удалением от источника (расстояние x)

$$f = e^{-\beta x} f_0(x - vt).$$

Коэффициент β называется коэффициентом затухания. Он определяется параметрами среды и частотой колебаний.

4.10. Бегущая гармоническая волна

Частным случаем бегущих волн являются распространяющиеся синусоидальные колебания. Во многих случаях это простейшие волновые движения.

Пусть плоская волна создается гармоническими колебаниями источника, расположенного в начале координат $x = 0$, так что смещение частиц из положения равновесия f описывается в начале координат соотношением

$$f(0, t) = a \cos(\omega t + \delta).$$

Здесь $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота колебаний; δ – начальная фаза колебаний (рис. 4.23).

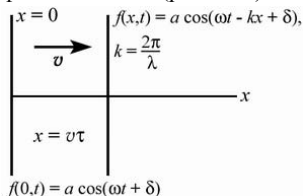


Рис. 4.23. Плоская гармоническая волна, распространяющаяся вдоль оси x

Пусть колебания от источника распространяются вдоль оси x со скоростью v . В этом случае на расстоянии x от источника они распространятся с запаздыванием на время $\tau = x/v$ и смещение частиц среды в точке с координатой x будет описываться зависимостью

$$f(x, t) = a \cos(\omega(t - \tau) + \delta) = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \delta \right].$$

Начальная фаза волны δ определяется начальными условиями – смещением или скоростью волны в момент времени t_0 в точке x_0 . Обычно выбирается так, чтобы $\delta = 0$.

Если зафиксировать некоторое значение фазы волны

$$\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \delta = \text{const},$$

то это условие определяет связь между координатой x и моментом времени t , в котором аргумент гармонической функции имеет данное фиксированное значение фазы. Соотношение dx/dt , вытекающее из этого равенства, определяет скорость перемещения данного значения фазы

$$dt - \frac{dx}{v} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{dx}{dt} = v$$

– скорость распространения волны совпадает со скоростью перемещения фазы, поэтому v называют фазовой скоростью.

Уравнению плоской волны можно придать симметричный вид, если ввести понятие волнового числа:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

В этом случае можем переписать соотношение для $f(x, t)$ в виде

$$f(x, t) = a \cos(\omega t - kx + \delta).$$

Сравнивая эту запись с ранее полученной, мы видим, что должно иметь место равенство

$$kx = \omega \frac{x}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} x,$$

откуда следует, что $\lambda = Tv$ (рис. 4.24). Величина λ – расстояние, которое проходит волна за время, равное периоду колебаний

частиц среды $T = \frac{2\pi}{\omega}$, называется длиной волны. Волновое число

k определяет пространственную периодичность волны.

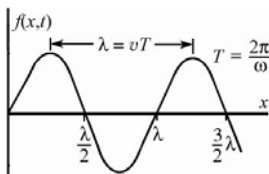


Рис. 4.24. Смещение из положения равновесия точек среды с различными координатами x в плоской гармонической волне в фиксированный момент времени; λ – длина волны – расстояние, проходимое волной за период колебаний

В случае расходящейся гармонической сферической волны

$$f(r, t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \delta).$$

Если мы рассматриваем не только расходящиеся, но и сходящиеся гармонические волны, то выражение для отклонений характеристик от их средних значений следует записывать в виде

$$f(x, t) = a \cos(\omega t - kx + \delta) + b \cos(\omega t + kx + \alpha),$$

$$f(r, t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \delta) + \frac{b}{r} \cos(\omega t + kr + \alpha).$$

Пусть плоская волна распространяется в произвольном направлении, задаваемом единичным вектором нормали \mathbf{n} , проведенным к волновой поверхности. Тогда колебания на волновой поверхности в точке с координатой \mathbf{r} будут отставать от колебаний источника ($\mathbf{r} = 0$) на время $\tau = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{v}$:

$$f(\mathbf{r}, t) = a \cos(\omega(t - \tau) + \delta) = a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \delta),$$

где введено обозначение

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}.$$

Вектор \mathbf{k} , равный по модулю $2\pi/\lambda$, направленный по нормали к волновой поверхности и определяющий направление распространения и пространственный период плоской монохроматической волны, называется волновым вектором. В направлении волнового вектора происходит наибо́льшее изменение фазы волны

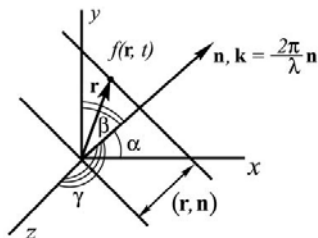
$$\varphi = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \delta.$$

Поэтому $\mathbf{k} = -\text{grad}\varphi$ и направление этого вектора принимается за направление распространения волны (рис. 4.25).

Рис. 4.25. Направление распространения плоской волны в пространстве определяется волновым вектором

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали, проведенный к волновой поверхности. В направлении волнового вектора \mathbf{k} происходит наискорейшее изменение фазы волны φ : $\mathbf{k} = -\text{grad}\varphi$



Компоненты вектора \mathbf{k} можно записать в виде

$$k_x = k \cos \alpha, \quad k_y = k \cos \beta, \quad k_z = k \cos \gamma,$$

где α, β, γ – направляющие углы между единичным вектором нормали \mathbf{n} и единичными векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, направленными вдоль осей x, y, z :

$$\cos \alpha = (\mathbf{i}, \mathbf{n}), \quad \cos \beta = (\mathbf{j}, \mathbf{n}), \quad \cos \gamma = (\mathbf{k}, \mathbf{n}).$$

Рассмотрим распространение бегущих волн на струне. Натяжение струны обозначим через T , а массу струны, приходящуюся на единицу длины, через μ .

Пусть элемент струны Δx образует малые углы α_1, α_2 с осью x (рис. 4.26).

Для малых углов справедливо приближение

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Результирующая сила, действующая на элемент струны в вертикальном направлении f , равна

$$F_{\text{рез}} = T\alpha_1 - T\alpha_2.$$

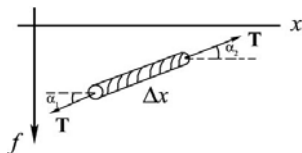


Рис. 4.26. Силы T , действующие на элемент струны Δx

Эта сила равна произведению массы элемента струны $\mu \cdot \Delta x$ на его вертикальное ускорение $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ ($\frac{\partial f}{\partial t}$ – эта запись означает, что

при дифференцировании по времени независимая переменная x остается постоянной, $\frac{\partial f}{\partial t}$ – частная производная)

$$F_{\text{рез}} = T\alpha_1 - T\alpha_2 = T \frac{\partial \alpha}{\partial x} \Delta x = \mu \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Поскольку $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}$, после подстановки получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

– волновое уравнение для струны. Скорость распространения волны по струне

$$v = \sqrt{T/\mu}$$

– волна распространяется по струне со скоростью, не зависящей от амплитуды и частоты волны.

Одним из решений волнового уравнения служит бегущая гармоническая волна

$$f(x, t) = f_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right).$$

Если мы хотим «создать» в струне длиной l требуемую ноту с частотой ν , то поскольку в первой октаве $l = \lambda/2$ то $v = \lambda\nu$ и, соответственно, натяжение струны должно быть равно

$$T = \mu v^2 = \mu(2l\nu)^2.$$

Например, для гитарной струны длиной $l = 30$ см и массой $\mu l = 50$ г, настроенной на частоту $\nu = 262$ Гц (нота «до» первой октавы), $T = 4,1 \cdot 10^3$ Н. Это сильное натяжение для легкой струны – струна должна быть изготовлена из очень прочного материала.

Энергия, сообщаемая одному концу струны, переносится со скоростью волны и может быть принята и поглощена на другом ее конце. Мощность, поглощаемая струной, равна (рис. 4.27)

$$W = (\mathbf{T}, \mathbf{v}) = T \frac{\partial f}{\partial t} \cos(\pi/2 - \alpha) = T \frac{\partial f}{\partial t} \sin \alpha.$$

Здесь $v = \frac{\partial f}{\partial t}$, $\sin \alpha \approx \alpha \approx -\frac{\partial f}{\partial x}$.

Поскольку $f = f_0 \cos(\omega(t - x/v))$, то мгновенное значение переносимой мощности ($x = 0$):

$$W = T f_0^2 \frac{\omega^2}{v} \sin^2 \omega t.$$

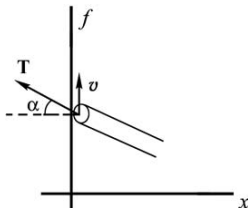


Рис. 4.27. Конец струны совершает перемещение со скоростью v вдоль оси f , чтобы создать бегущую вдоль оси x волну

Среднее значение мощности будет в два раза меньше так как $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$:

$$\langle W \rangle = \frac{T \omega^2}{2v} f_0^2.$$

Среднее значение переносимой мощности называется интенсивностью волны. Интенсивность волны пропорциональна квадрату ее амплитуды. Энергия, переносимая электромагнитной волной, также пропорциональна квадрату напряженности электрического поля E^2 .

4.11. Плоские электромагнитные волны

В п. 3.3 мы уже показали, что уравнения Максвелла могут приводить к волновым уравнениям самого общего вида, и нашли их решения.

В частности, в свободном пространстве без токов и зарядов система уравнений Максвелла принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Пусть векторы поля зависят только от координат x и t . В этом случае систему уравнений можно расписать в виде системы телеграфных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, & \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, & \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned}$$

и уравнений

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0,$$

описывающих статические электрические и магнитные поля вдоль направления x – распространения волны. Эти поля можно не учитывать.

Полученные уравнения распадаются на две группы. В первой переменное магнитное поле с составляющей H_y порождает переменное электрическое поле с составляющей E_z , во второй переменное магнитное поле H_z порождает электрическое поле E_y . Таким образом, в плоской волне векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны (рис. 4.28) и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Из общей теории волновых уравнений следует, что множитель $\mu_0 \epsilon \epsilon_0 = \frac{1}{v^2}$ есть величина, обратная квадрату скорости распространения электромагнитной волны в среде:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

где $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ – скорость распространения света в вакууме. Ещё раз отметим, что этот фундаментальный результат привел Максвелла к заключению, что видимый свет представляет электромагнитную волну достаточно высокой частоты $\nu = c/\lambda = (3,9 \div 7,5) \cdot 10^{14}$ Гц. Длины волн света были определены Т. Юнгом в конце XVIII в. в опытах по интерференции $\lambda = 0,4 \div 0,76$ мкм.

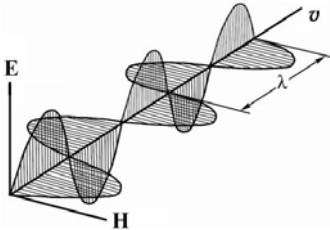


Рис. 4.28. Плоская электромагнитная волна. Векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{v} взаимно перпендикулярны

Как было показано в п. 2.3, векторы \mathbf{H} , \mathbf{E} , \mathbf{v} взаимно перпендикулярны и связаны соотношениями

$$\mathbf{E} = -\mu\mu_0[\mathbf{v}, \mathbf{H}],$$

$$\mathbf{H} = -\varepsilon\varepsilon_0[\mathbf{v}, \mathbf{E}].$$

Одним из возможных решений полученной системы уравнений является синусоидальная гармоническая электромагнитная волна, распространяющаяся от источника в положительном направлении оси x :

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \delta_1),$$

$$H = H_0 \cos(\omega t - kx + \delta_2),$$

где ω – частота; k – волновое число; δ_1 , δ_2 – начальные фазы колебаний; E_0 , H_0 – амплитуды колебаний.

Подставляя решения в исходную систему уравнений, получаем

$$kE_0 \sin(\omega t - kx + \delta_1) = \mu\mu_0\omega H_0 \sin(\omega t - kx + \delta_2),$$

$$kH_0 \sin(\omega t - kx + \delta_2) = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_0 \sin(\omega t - kx + \delta_1).$$

Для того чтобы эта система удовлетворялась, необходимо равенство фаз $\delta_1 = \delta_2$ и выполнение соотношений

$$kE_0 = \mu\mu_0\omega H_0,$$

$$\varepsilon\varepsilon_0\omega E_0 = kH_0.$$

Таким образом, в электромагнитной волне колебания электрического и магнитного полей происходят с одинаковой фазой ($\delta_1 = \delta_2$) и между амплитудами колебаний в вакууме выполняется соотношение (в СИ)

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{12,566 \cdot 10^{-7}}{8,854 \cdot 10^{-12}}} \approx 377 \text{ Ом}.$$

Было также показано (п. 3.3), что электромагнитная волна переносит энергию, плотность потока которой определяется вектором Умова – Пойнтинга

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \text{ [Вт/м}^2\text{]}.$$

Вектор \mathbf{S} может быть записан через удельную плотность энергии w :

$$\mathbf{S} = w\mathbf{v},$$

$$\text{где } w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2}{2} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right].$$

Поскольку энергия и масса связаны соотношением Эйнштейна $E = mc^2$, то электромагнитное поле обладает массой с плотностью w/c^2 и импульсом с плотностью:

$$\mathbf{g} = \frac{w}{c^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$$

Импульс электромагнитных волн проявляется, в частности, в световом давлении

$$P = gc(1+r) = \frac{S}{c}(1+r) \text{ [Па]}.$$

Здесь r – коэффициент отражения, который можно определить как отношение квадратов амплитуд напряженностей электрического поля в отраженной E_0' и падающей E_0 волнах: $r = (E_0'/E_0)^2$ или как отношение потока излучения, отражённого телом, к упавшему на него потоку излучения.

4.12. Стоячие волны

Пусть плоская электромагнитная волна распространяется в направлении x и состоит из двух взаимно перпендикулярных компонент E_y, H_z :

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx).$$

Отражаясь от границы раздела сред, волна начинает двигаться в обратном направлении $-x$:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t + kx),$$

$$H_z = -H_0 \cos(\omega t + kx).$$

Знак «минус» у H_z (или у E_y) в отраженной волне связан с изменением направления переноса плотности потока энергии $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$. Плотность потока должна быть направлена в сторону отраженного луча, в то время как до отражения она была направлена по падающему лучу. Поэтому при отражении вектор \mathbf{E} или \mathbf{H} в падающей волне должен изменить свое направление на обратное.

В результате суперпозиции падающей и отраженной волн получаем стоячую волну

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) + E_0 \cos(\omega t + kx) = 2E_0 \cos kx \cos \omega t,$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx) - H_0 \cos(\omega t + kx) = 2H_0 \sin kx \sin \omega t.$$

В стоячей волне сомножители $2E_0\cos kx$ и $2H_0\sin kx$ можно рассматривать как амплитуду колебаний в точке x . Амплитуда меняется от точки к точке по гармоническому закону.

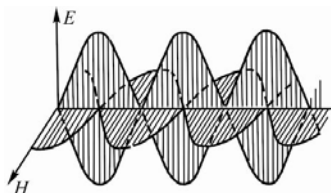


Рис. 4.29. Стоячая электромагнитная волна. Фазы колебаний электрического и магнитного полей сдвинуты в стоячей волне на $\pi/2$

В стоячей электромагнитной волне фазы колебаний электрического и магнитного полей сдвинуты на $\pi/2$ и поля E и H обращаются в нуль с пространственной периодичностью $\lambda/2$. В точках, где векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} равны нулю, вектор Пойнтинга обращается в нуль с частотой 4ω и пространственной периодичностью $\lambda/4$ (рис. 4.29).

В каждой четвертьволновой зоне происходит перекачка электрической энергии в магнитную и обратно. Движение электромагнитной энергии ограничено колебаниями между узлом (пучностью) электрического поля и пучностью (узлом магнитного поля)

$$\mathbf{S} = \mathbf{i}H_0E_0\sin 2kx\sin 2\omega t.$$

Единичный вектор \mathbf{i} направлен параллельно оси x .

В плоской бегущей волне

$$\mathbf{S} = \mathbf{i}E_0H_0\frac{1}{2}[1 + \cos(2\omega t - 2kx)]$$

– вектор \mathbf{S} распространяется вдоль оси x со скоростью v .

Напряженность и индукция поля изменяется с одинаковой частотой ω .

Если стоячие волны создать в фотоэмульсии, то максимальные почернения должны наблюдаться в пучностях стоячей волны. Если фотографическое действие электрического и магнитного векторов одинаково, то и почернение в их пучностях должно быть одинаково, если различно, то и потемнения будут различны (рис. 4.30).

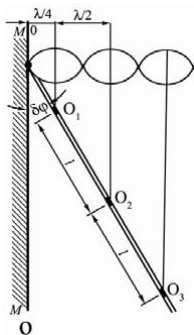


Рис. 4.30. Опыт Винера по наблюдению стоячих электромагнитных волн с помощью тонкого слоя фотоэмульсии $\lambda/20$ O_1O_2 , расположенной под малым углом $\delta\varphi$ к поверхности металлического зеркала MM' ($\delta\varphi \approx 1'$), $l = \lambda/(2\sin\delta\varphi)$

Подобные опыты были проведены в 1890 г. О. Винером, получившим стоячие волны в воздухе отражением от металла. Расстояние между пучностями очень мало ($\approx 0,3$ мкм), но оно может быть увеличено, если расположить фотоэмульсию O_1O_2 под малым углом $\delta\varphi$ к поверхности металлического зеркала MM' , в этом случае расстояние между пучностями в наклонной фотоэмульсии будет равно

$$l = \frac{\lambda}{2 \sin \delta\varphi}.$$

При малых $\delta\varphi$ ($\delta\varphi = 1'$) величину l можно измерить, $l = 1$ мм. Опыты Винера показали, что фотографическое действие обусловлено электрической напряженностью поля \mathbf{E} , а не индукцией \mathbf{B} , поскольку первая темная полоса располагалась не на краю светочувствительного слоя, граничащего с зеркалом, где \mathbf{B} имел максимальное значение, а на расстоянии $\lambda/(4\sin\delta\varphi)$, где располагалась первая пучность электрической световой волны.

4.13. Электромагнитное поле колеблющегося диполя

Пусть имеется сгусток разноименных зарядов, в целом нейтральный, занимающий небольшую область пространства. Сгусток зарядов совершает некоторое перемещение. Эти заряды могут составлять, например, атом. Если расстояние между центрами разноименных зарядов равно l , а величины зарядов q , то такая система обладает дипольным моментом $\mathbf{p} = ql$ (рис. 4.31).

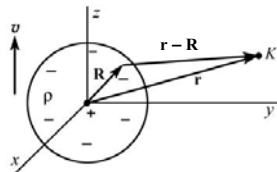


Рис. 4.31. В целом нейтральная система движущихся зарядов с плотностью ρ и дипольным моментом \mathbf{p} создает электромагнитное поле в точке K , характеризующееся векторным потенциалом \mathbf{A} и скалярным φ

Движение такой системы зарядов может быть, например, вынужденным колебательным движением электронов атома в электрическом поле световой волны. Найдем поле, создаваемое такой системой зарядов в точке K , расположенной на расстоянии r , значительно превосходящем размеры системы $R \ll r$. В общем случае мы эту задачу уже решили, вычислив векторный \mathbf{A} и скалярный ϕ потенциалы (п. 12.7). В частности, в вакууме имеем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mu_0 \mathbf{j} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c}, \mathbf{R} \right) d^3 \mathbf{R}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{R}|}.$$

Это соотношение позволяет вычислить индукцию магнитного поля в точке K :

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}.$$

Если размеры сгустка зарядов малы, то можно полагать $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \approx r$ и, кроме того, считать $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, где \mathbf{v} – скорость движения зарядов. В этом случае

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mu_0 \rho \mathbf{v} \left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{R} \right) d^3 R}{4\pi r} = \frac{\mu_0}{4\pi r} q \mathbf{v} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t}.$$

Здесь $q\mathbf{v}$ равно скорости изменения дипольного момента системы $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}$, вычисленной в момент времени $t - \frac{r}{c}$. Слагаемое $-\frac{r}{c}$ учитывает запаздывание в распространении поля от сместившегося заряда до точки наблюдения K . Вычислив $\text{rot} \mathbf{A}$, найдем индукцию магнитного поля от системы движущихся зарядов в точке K :

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial p_x(\tau)}{\partial t} & \frac{\partial p_y(\tau)}{\partial t} & \frac{\partial p_z(\tau)}{\partial t} \end{vmatrix} \Bigg|_{\tau=t-\frac{r}{c}} = \frac{1}{r} = \mu_0 \frac{\left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \frac{r}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}, \mathbf{r} \right]}{4\pi r^3}.$$

При вычислениях учтено, что

$$\frac{\partial p(\tau)}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial p(\tau)}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \tau} \left(-\frac{x}{rc} \right) = -\frac{x}{rc} \frac{\partial p}{\partial t},$$

$$\frac{\partial p(\tau)}{\partial y} = -\frac{y}{rc} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial p(\tau)}{\partial z} = -\frac{z}{rc} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Для кулоновского потенциала можем записать (п. 3.7)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \text{div} \mathbf{A}.$$

Вычисления дивергенции \mathbf{A} приводят к соотношению

$$\text{div} \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{r^3} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \frac{r}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}, \mathbf{r} \right).$$

Интегрирование по t позволяет вычислить φ , для чего надо просто убрать по одной производной $\partial/\partial t$ в выражении для $\text{div} \mathbf{A}$:

$$\varphi = \frac{c^2 \mu_0}{r^3} \left(\mathbf{p} + \frac{r}{c} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}, \mathbf{r} \right).$$

Далее, из условия $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ получаем величину напряженности электрического поля в точке K :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \left(\mathbf{p}, \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r^5} - \frac{1}{r^3} \mathbf{p} \right]_{t-\frac{r}{c}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \left[3 \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}, \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r^4} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right]_{t-\frac{r}{c}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}, \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \right]_{t-\frac{r}{c}}.$$

Индекс $t - \frac{r}{c}$, поставленный внизу скобок, указывает на то, что значения дипольного момента \mathbf{p} и его производных следует брать не в момент времени t , а в более ранний момент времени $\left(t - \frac{r}{c} \right)$ с учетом конечной скорости прохождения электромагнитным сигналом расстояния r .

Первые слагаемые в выражении для \mathbf{B} и \mathbf{E} дают величину индукции магнитного поля и напряженности электрического поля, в точности совпадающие с величинами для статических систем зарядов и квазистационарных токов, и представляют собой законы Био – Савара – Лапласа (если учесть, что $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \mathbf{j}$) и величину поля электрического диполя.

Второе слагаемое в формуле для \mathbf{B} стремится скомпенсировать эффект запаздывания в первом слагаемом, поскольку при $\frac{r}{c} \ll t$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p} - \frac{r}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{p}(t)}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^2} \approx \frac{\partial^2 \mathbf{p}(t)}{\partial t^2}.$$

Но такая компенсация наблюдается только вблизи от заряда $r \ll ct$, когда временное запаздывание несущественно. Для далеких точек поправки, связанные с запаздыванием, становятся определяющими и основной вклад в \mathbf{B} и \mathbf{E} дают слагаемые, убывающие обратно пропорционально первой степени с расстоянием r . Это так называемая волновая зона излучения диполя.

В волновой зоне индукция магнитного поля и напряженность электрического поля равны

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi cr^2} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}, \mathbf{r} \right]_{t-\frac{r}{c}},$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2 r^3} \left[\left[\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}, \mathbf{r} \right], \mathbf{r} \right]_{t-\frac{r}{c}}.$$

Из этих соотношений следует

$$\mathbf{E} = c[\mathbf{B}, \mathbf{n}],$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}[\mathbf{n}, \mathbf{E}],$$

здесь $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ – единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора \mathbf{r} .

Видно, что векторы \mathbf{B} и \mathbf{E} взаимно перпендикулярны и перпендикулярны \mathbf{r} (рис. 4.32). Вектор \mathbf{E} лежит в плоскости меридиана, а \mathbf{B} направлен по параллели. Плотность потока электромагнитной энергии, излучаемой диполем, – вектор Пойнтинга – равен

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{c}{\mu_0} [[\mathbf{B}, \mathbf{n}], \mathbf{B}].$$

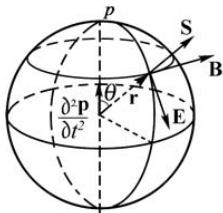


Рис. 4.32. В сферической электромагнитной волне, излучаемой ускоренно двигающимися зарядами, векторы \mathbf{B} направлены по параллелям, векторы \mathbf{E} – по меридианам, поток энергии \mathbf{S} – по нормали \mathbf{n}

Подставляя сюда значение \mathbf{B} в волновой зоне диполя, находим

$$\mathbf{S} = \frac{1}{(4\pi r)^2 \varepsilon_0 c^3} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^2} \right]^2 \sin^2 \theta \cdot \mathbf{n},$$

где θ – угол между векторами $\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}$ и \mathbf{r} .

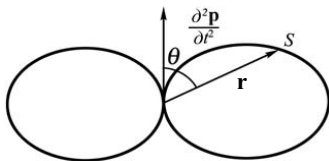


Рис. 4.33. Полярная диаграмма направленности излучения диполя

Таким образом, ускоренно двигающиеся заряды излучают электромагнитную энергию в окружающее пространство. Вектор \mathbf{S} направлен вдоль радиуса \mathbf{r} и убывает обратно пропорционально r^2 . Излучение максимально в направлении, перпендикулярном вектору $\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}$, и отсутствует вдоль вектора $\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}$. «Диаграмма направленности» для диполя имеет вид двух симметричных лепестков (рис. 4.33).

Полная энергия, излучаемая ускоренно двигающимися зарядами в единицу времени, – интегральная мощность излучения W , равна интегралу от модуля \mathbf{S} , умноженному на элемент площади $2\pi r^2 \sin\theta d\theta$ поверхности сферы:

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \int_0 S \cdot 2\pi r^2 \sin\theta d\theta = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{p}(t-r/c)}{\partial t^2} \right]^2.$$

В случае гармонических колебаний диполя ($r = 0$)

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos\omega t$$

имеем

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{p_0^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cos^2(\omega t - kr).$$

После усреднения по времени находим среднюю мощность излучения колеблющегося диполя

$$\left\langle -\frac{\partial U}{\partial t} \right\rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{4p_0^2 \pi^3 \nu^4}{3\epsilon_0 c^3}.$$

Мощность излучения растет пропорционально четвертой степени частоты $\nu = \omega/2\pi$. Для повышения мощности излучения следует увеличивать частоту колебаний в электрическом контуре. При частоте колебаний $\nu_1 = 50$ Гц испускаемая длина волна $\lambda_1 = c/\nu_1 = 6 \cdot 10^6$ м. Такие волны практически не излучаются. Но при увеличении частоты колебаний до $\nu_2 = 3 \cdot 10^8$ Гц ($\lambda_2 = 1$ м) мощность излучения увеличивается в $(\nu_2/\nu_1)^4 = (6 \cdot 10^6)^4 \cong 13 \cdot 10^{26}$ раз.

Точечный диполь, дипольный момент которого быстро изменяется со временем, является простейшей системой излучающей электромагнитные волны. Такой диполь называется диполем Герца по имени Г. Герца, впервые рассчитавшего и изучившего его электромагнитное поле. Важность этого результата, полученного Герцем, состоит в том, что любая реальная излучающая система – антенна с переменным током – может быть разбита на электромагнитные токи, каждый из которых излучает, как диполь Герца. Воспользовавшись принципом суперпозиции, можно найти поле всей излучающей системы.

Если диполь состоит из неподвижного точечного заряда $+q$, находящегося в точке \mathbf{r}_0 , и подвижного отрицательного $-q$, расположенного в точке \mathbf{r} , то дипольный момент такой системы равен $\mathbf{p} = -q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Поскольку $\mathbf{r}_0 = \text{const}$, то

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -q \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = -q \mathbf{v}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} = -q \mathbf{a},$$

где \mathbf{v} – скорость; \mathbf{a} – ускорение заряда $-q$. В этом случае излучаемая мощность равна

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[a \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]^2$$

– ускоренно двигающийся заряд излучает электромагнитную энергию пропорционально квадрату ускорения.

4.14. Опыты Герца с электромагнитными волнами

Электромагнитные волны были впервые получены и исследованы в 1887–1888 гг. немецким ученым Генрихом Рувельтом Герцем. Вибратор Герца имел несколько модификаций. В одной из них он состоял из двух одинаковых металлических стержней, разделенных регулируемым искровым промежутком и соединенных через дроссели с индуктором – источником высокого напряжения (рис.4.34).

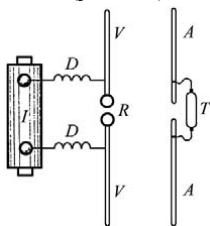


Рис. 4.34. Вибратор Герца V и приемный контур A , применявшиеся Г. Герцем для исследования электромагнитных волн: I – индуктор, D – дроссели, предотвращающие уход высокочастотных токов в индуктор; R – разрядник; T – газоразрядная трубка

Когда напряжение на искровом промежутке достигало пробойного значения, искровой промежуток пробивался электрической искрой, замыкающей обе половины вибратора. В вибраторе возникали затухающие электрические колебания высокой частоты. Максимальной интенсивностью обладали колебания с пучностью тока посередине вибратора и с длиной волны, равной примерно удвоенному расстоянию между концами вибратора. Уходу колебаний в индуктор препятствовали дроссели, соединяющие элементы вибратора с индуктором. Для обнаружения электромагнитных волн Герц использовал резонаторы в виде проволочной рамки и иных форм. Но наиболее простым из резонаторов являлся

резонатор, по форме повторяющий излучающий вибратор, а поэтому имеющий те же собственные частоты колебаний.

Когда электромагнитная волна достигает резонатора, она возбуждает в нем токи. Появление этих токов сопровождалось проскакиванием искры в маленьком зазоре в центре резонатора или возбуждением свечения в небольшой газоразрядной трубке, подключенной к обоим половинкам резонатора.

В ходе своих исследований Герц обнаружил, что если расстояние между вибратором и приемником (резонатором) меньше одного метра, то поле вибратора в этой области соответствует излучению поля диполем и убывает обратно пропорционально кубу расстояния. Однако на расстояниях более трех метров поле убывает значительно медленнее и неодинаково в различных направлениях. В направлении оси вибратора поле практически исчезало на расстоянии четырех метров, а в направлении, перпендикулярном к оси вибратора, достигало расстояния двенадцати метров и более (рис. 4.35).

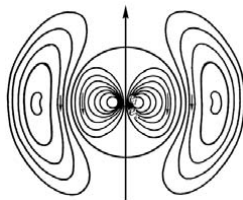


Рис. 4.35. Линии вибратора Герца – поле электрических силовых линий, излучаемых диполем через период колебаний. Заряд на диполе отсутствует

Для объяснения этих результатов Герц теоретически, на основе электродинамики Максвелла, анализирует излучение вибратора. Здесь он впервые получает результат, что волновое поле на дальних расстояниях убывает очень медленно – обратно пропорционально расстоянию, а само поле распространяется со скоростью света. В результате своих исследований Герц дополнил теорию Максвелла теорией электромагнитного излучения, впервые получил электромагнитные волны, предсказанные теорией Максвелла, и показал их тождество с волнами света.

Для исследования свойств электромагнитных волн Герц построил металлические параболические зеркала, призму из твердой смолы – асфальта с основанием 1,2 м и высотой 1,5 м с преломляющим углом 30° (рис. 4.36).

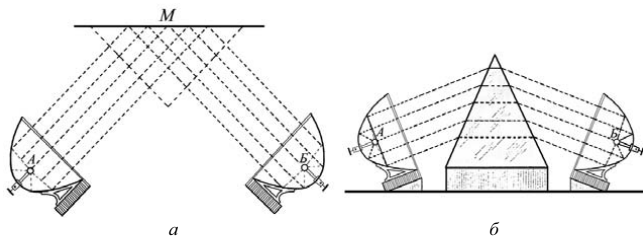


Рис. 4.36. Отражение (а) и преломление (б) электромагнитных волн, полученных с помощью отражения от параболического зеркала

В своих опытах Герц установил полную аналогию электромагнитных и световых волн. Было показано, что для электромагнитных волн справедлив закон отражения и преломления. Отражающими поверхностями для электромагнитных волн служили металлические листы, а закон преломления Снелла был проверен на больших призмах из диэлектриков. Кроме того, опыты Герца подтвердили соотношение $n = \sqrt{\epsilon}$, следующее из теории Максвелла.

Отметим также, что в ходе своих исследований свойств электромагнитных волн Герц сделал еще одно важнейшее открытие – фотоэлектрический эффект. Поскольку искры, возбужденные в приемнике излучения, были очень слабы, то Герц для облегчения их наблюдения поместил приемник в темный футляр. Но оказалось, что максимальная длина искры при этом стала значительно меньше. Удаляя последовательно стенки футляра, Герц заметил, что мешающее действие оказывает стенка, обращенная к искре генератора. Продолжая исследовать эту проблему, Герц показал, что искровой разряд приемника облегчается ультрафиолетовым свечением искры генератора. Тем самым чисто случайно, как пишет сам Герц, был открыт важный факт, не имевший прямого отношения к цели исследования. Но этот факт был не только замечен, но и правильно объяснен Г. Герцем как вырывание электрических зарядов с поверхности металлов под действием света.

Усовершенствовав вибратор Герца и применив свой приемник, профессор Петербургского электротехнического института А.С. Попов 7 мая 1895 г. продемонстрировал модернизированный им радиоприемник. В 1896 г. Попов впервые в мире наладил опытную радиотелеграфную связь сначала на расстоянии 250 м, в

следующем году увеличив его до 5 км, а в 1899 г. довел расстояние беспроводной передачи сигналов до 50 км.

В 1901 г. была осуществлена радиотелеграфная связь через Атлантический океан. Изобретение электронных ламп (1904–1907 гг.) и применение их для генерирования незатухающих колебаний (1913 г.) сделали возможным развитие радиотелеграфии и радиовещания. В 20–30-х гг. весь мир покрылся сетью мощных радиопередающих станций. Человечество вступило в новую эру коммуникационных отношений. Эффективность и невиданная до сих пор скорость прогресса в этой области были обеспечены фундаментальной теоретической базой, созданной Дж. Максвеллом и развитой в исследованиях Г. Герца, А.С. Попова, Г. Маркони и многих других ученых и инженеров.

Основные выводы

Колебания – движения или состояния, обладающие повторяемостью во времени.

Электрический колебательный контур, содержащий индуктивность L , емкость C , сопротивление R и генератор $\mathcal{E}(t)$, описывается уравнением

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t),$$

где $q(t)$ – заряд на обкладках конденсатора; $I = \frac{dq}{dt}$ – ток;

$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C}$ – разность потенциалов на обкладках конденсатора.

Математически полученное уравнение полностью эквивалентно уравнениям, описывающим механические колебания под действием вынуждающей силы:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F(t).$$

Если сопротивлением контура можно пренебречь ($R = 0$) и отсутствует генератор ($\mathcal{E} = 0$), то в контуре могут возникнуть незатухающие колебания. Период собственных колебаний контура (формула Томсона)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Циклическая частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Примером возникновения свободных колебаний служит движение электронов в ионосфере – однородная заряженная среда верхних слоев атмосферы, ионизируемая солнечным излучением и космической радиацией. Частота колебаний электрона внутри заряженного слоя (плазменная частота)

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n^+ e^2}{\epsilon_0 m_e}} \approx 10^4 \sqrt{n^+}, \text{ Гц,}$$

где n^+ – концентрация ионов в слое. Радиоволны с частотой ниже плазменной отражаются от ионосферы ($\nu \approx 10^7$ Гц, $\lambda = 30$ м).

При наличии сопротивления в электрическом колебательном контуре первоначально запасенная энергия расходуется на джоулево тепло и колебания затухают. Величина заряда на обкладках конденсатора

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \delta),$$

где $\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота колебаний в контуре при наличии сопротивления.

Периодические колебания возможны при условии $\frac{R^2 C}{4L} < 1$.

Количественно затухание колебаний характеризуется логарифмическим декрементом затухания

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T,$$

здесь $a(t)$ – амплитуда колебаний изучаемой величины (q, I, u, x и т.д.) в момент времени t .

Если затухание в контуре невелико $\left(\frac{R^2 C}{4L} \ll 1 \right)$, то

$$\lambda = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Добротность колебательного контура

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

тем выше, чем меньше относительные потери энергии в контуре за период.

Если к колебательному контуру подсоединить генератор внешней ЭДС

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t,$$

то в контуре возникнут вынужденные колебания, установившаяся частота которых определяется частотой вынуждающей силы

$$q(t) = q_a \cos(\omega t - \alpha).$$

Амплитуда колебаний q_a тем больше, чем ближе частота вынуждающей силы ω к собственной частоте колебаний ω_0 :

$$q_a = \frac{\mathcal{E}_0 / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}.$$

Увеличение амплитуды колебаний в системе при приближении частоты ω к ω_0 называется резонансом. В радиотехнике явление резонанса позволяет отделить сигналы одной нужной частоты от всех других.

При сложении двух незатухающих (слабозатухающих) колебаний близких частот ω и ω_0 возникают биения – колебания с частотой, близкой к собственной $(\omega + \omega_0)/2 = \omega_0 + \Delta\omega \approx \omega_0$, но с амплитудой, изменяющейся периодически с низкой частотой $(\omega - \omega_0)/2$:

$$x(t) = \left(A_0 \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t \right) \cdot \sin \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t \right).$$

Колебания в системе могут возбуждаться не только под действием вынуждающей силы, но и при ее отсутствии, если в системе изменять периодически параметры тех элементов, в которых сосредотачивается энергия колебаний (индуктивность, емкость) – параметрические колебания.

Электромагнитные поля способны распространяться в пространстве от места их возникновения – источников и колебаться в ограниченной области пространства – обладают волновыми свойствами.

Волновой процесс может быть представлен как суперпозиция функций

$$f(r, t) = f_1(r - vt) + f_2(r + vt),$$

описывающих движение возмущения от источника $f_1(r - vt)$ к источнику $f_2(r + vt)$.

Функция $f(r, t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \cdot \Delta f = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; v – скорость распространения волны.

Бегущая гармоническая волна вдоль оси x описывается решением вида

$$f(x, t) = f_0 \cos(\omega t - kx + \delta).$$

Здесь $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, определяет пространственную

периодичность волны; $v = \frac{\omega}{k}$ – фазовая скорость волны.

Скорость распространения волны в струне

$$v = \sqrt{T/\mu}$$

где T – натяжение струны; μ – масса на единицу длины струны.

Средняя переносимая мощность – интенсивность волны

$$\langle W \rangle = \frac{T\omega^2}{2v} f_0^2.$$

Полная энергия, излучаемая ускоренно движущимися зарядами в диполе в единицу времени, равна

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{p}(t-r/c)}{\partial t^2} \right]^2.$$

Если диполь колеблется гармонически $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t$, то

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{p_0^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cos^2(\omega t - kr)$$

– мощность излучения растет пропорционально четвертой степени частоты.

Средняя мощность излучения колеблющегося диполя

$$\left\langle -\frac{\partial U}{\partial t} \right\rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{4p_0^2 \pi^3 v^4}{3\epsilon_0 c^3}.$$

Ускоренно движущийся заряд q излучает энергию пропорционально квадрату ускорения

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[a \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]^2.$$

Упражнения

1. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами площадью $S = 100 \text{ см}^2$ каждая и катушки с индуктивностью $L = 1 \text{ мкГн}$, резонирует на волну длиной $\lambda = 10 \text{ м}$. Определить расстояние d между пластинами конденсатора. Ответ: $d = 3,14 \text{ мм}$.

2. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 1,2 \text{ мГн}$ и конденсатора переменной емкости от $C_1 = 12 \text{ пФ}$ до $C_2 = 80 \text{ пФ}$. Определить диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре. Активное сопротивление контура принять равным нулю. Ответ: $\lambda_1 = 226 \text{ м}$; $\lambda_2 = 585 \text{ м}$.

3. Струна из материала с линейной плотностью $\mu = 10 \text{ г/м}$ колеблется с частотой $\nu = 30 \text{ Гц}$. Каким должно быть натяжение струны, если длина волны равна $\lambda = 20 \text{ см}$? Ответ: $T = \mu(\lambda\nu)^2 = 0,36 \text{ Н}$.

4. По струне бежит волна $y = \sin(at - bx)$. Найдите выражения для a и b через λ и f . Ответ: $y = \sin[2\pi(\nu t - x/\lambda)]$.

5. Повторите решение упражнения 3 для случая настройки струны на ноту «до» второй октавы: $f = 2 (262) \text{ Гц}$ $\nu = 2 \times 262 \text{ Гц}$. Ответ: $T = \mu(\lambda\nu)^2 = 109,8 \text{ Н}$.

6. В темперированном музыкальном строе каждая октава имеет 12 полутонов, причем отношение частот двух соседних полутонов всегда одинаково. Найдите это отношение.

7. Длинный металлический провод с линейной плотностью $\mu = 4 \text{ г/см}$ характеризуется натяжением $T = 5 \cdot 10^3 \text{ Н}$. К одному из его концов подключен вибратор мощностью $W = 10 \text{ Вт}$, настроенный на «до» первой октавы (частота $\nu = 262 \text{ Гц}$). К другому концу провода присоединен поглотитель энергии, от которого волна не отражается. Определите скорость v и длину волны λ , а также величину максимального поперечного смещения f_0 точек провода. Ответ: $v = (T/\mu)^{1/2} = 111,8 \text{ м/с}$; $\lambda = v/\nu = 0,427 \text{ м}$; $f_0 = (W\nu/T)^{1/2}/(2\pi\nu) = 0,29 \text{ мм}$.

8. Подставьте в волновое уравнение величину $B_z = B_0 \cos(kx - ut)$. Определите, чему должно быть равно отношение ω/k .

9. Подставьте в волновое уравнение выражение $B_z = f(x - ut)$. При каком значении u это выражение будет решением уравнения

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} ?$$

10. Подставьте в волновое уравнение выражение

$$B_z = B_1 \cos \omega_1(t - x/c) + B_2 \cos \omega_2(t - x/u).$$

При каком значении u это выражение будет решением уравнения?

11. Найдите плотность потока энергии, излучаемой диполем с осциллирующим дипольным моментом $p \cos \omega t$.

Примечание. Следует принять во внимание только члены, убывающие с расстоянием по закону $1/r$.

12. Путем интегрирования по поверхности сферы большого радиуса, центр которой совпадает с диполем, покажите, что средняя излучаемая мощность равна $\frac{1}{3} \frac{p^2 \omega^4}{4\pi\epsilon_0 c^2 c}$.

Задачи

1. Катушка индуктивностью $L = 1$ мГн и воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин диаметром $D = 20$ см каждая, соединены параллельно. Расстояние d между пластинами равно 1 см. Определить период T колебаний. Ответ: $T = 33,2$ нс.

2. Конденсатор электроемкостью $C = 500$ пФ соединен параллельно с катушкой длиной $l = 40$ см и площадью S сечения, равной 5 см². Катушка содержит $N = 1000$ витков. Сердечник немагнитный. Найти период T колебаний. Ответ: $T = 5,57$ мкс.

3. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 20$ мкГн и конденсатора электроемкостью $C = 80$ пФ. Величина емкости может отклоняться от указанного значения на 2%. Вычислить, в каких пределах может изменяться длина волны, на которую резонирует контур. Ответ: $\lambda = (2,38 \cdot 10^3 \pm 23,8)$ м.

4. Колебательный контур имеет индуктивность $L = 1,6$ мГн, электроемкость $C = 0,04$ мкФ и максимальное напряжение V_{\max} на зажимах, равное 200 В. Определить максимальную силу тока I_{\max} в контуре. Сопротивление контура ничтожно мало. Ответ: $I_{\max} = 1$ А.

5. Колебательный контур содержит конденсатор электроемкостью $C = 8$ пФ и катушку индуктивностью $L = 0,5$ мГн. Каково максимальное напряжение V_{\max} на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока $I_{\max} = 40$ мА? Ответ: $V_{\max} = 317$ В.

6. Катушка (без сердечника) длиной $l = 50$ см и площадью S_1 сечения, равной 3 см², имеет $N = 1000$ витков и соединена параллельно с конденсатором. Конденсатор состоит из двух пластин площадью $S_2 = 75$ см² каждая. Расстояние d между пластинами равно 5 мм. Диэлектрик – воздух. Определить период T колебаний контура. Ответ: $T = 628$ нс.

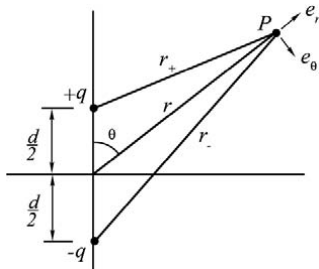
7. Определить добротность Q и логарифмический декремент затухания контура по следующий данным: резонансная частота $\nu_{\text{рез}} = 600$ кГц, емкость $C = 350$ пФ, омическое сопротивление для

частот, близких к резонансной, $R = 15 \text{ Ом}$. Ответ: $\lambda = 2\pi^2 v_{\text{рез}} CR = 0,062$; $Q = \pi/\lambda = 50,7$.

8. В колебательный контур включен источник ЭДС с амплитудой $\mathcal{E}_0 = 5 \text{ В}$. Амплитуда напряжения на конденсаторе при резонансе равна $V_0 = 150 \text{ В}$. Определить добротность Q контура и логарифмический декремент затухания λ . Ответ: $Q = V_0/\mathcal{E}_0 = 30$; $\lambda = \pi/Q = 0,105$.

9. В определенном пункте напряженность электрического поля, создаваемого радиостанцией A , в пять раз больше, чем напряженность электрического поля радиостанции B . Определить добротность контура, с помощью которого можно принимать в данном пункте станцию B без помех со стороны станции A , если для этого необходимо, чтобы амплитуда сигналов станции B в контуре была бы по крайней мере в 10 раз больше амплитуды сигналов станции A . Частота станции A равна 210 кГц , частота станции B равна 200 кГц .

10. С помощью уравнения для $E(\mathbf{r}, t)$ в п. 4.13 можно найти электрическое поле, создаваемое движущимся зарядом. Рассмотрим диполь, образованный положительным и отрицательным зарядами, осциллирующими относительно начала координат вдоль оси z так, что координата положительного заряда меняется со временем по закону $z_+ = (d/2)\cos\omega t$, а отрицательного $z_- = -(d/2)\cos\omega t$.



Дипольный момент такой системы зарядов равен $\mathbf{p} = \mathbf{e}_z d \cos\omega t$. Покажите, что электрическое поле диполя, найденное из упомянутого уравнения, имеет вид

$$E_\varphi = 0,$$

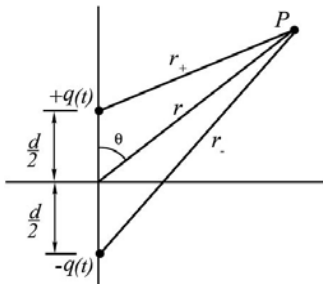
$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{1}{r^3} \right) \cos\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

$$E_r = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \cos\theta \left[\frac{1}{r^3} \cos\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right].$$

При решении задачи считайте, что точка P находится на расстоянии $r \gg d$ от диполя.

Примечание. $\mathbf{e}_{r+} \approx +\mathbf{e}_r$ и $d\mathbf{e}_{r+}/dt$ и $d^2\mathbf{e}_{r+}/dt^2$ — это векторы, направления которых практически совпадают с направлением вектора \mathbf{e}_θ .

11. В задаче 10 диполь состоял из двух зарядов, осциллирующих вокруг начала координат. Диполь, величина которого изменяется со временем по гармоническому закону, можно построить иным способом: взять два проводящих шара, соединить их проводником длиной d и по проводнику пропустить переменный ток. Тогда на концах проводника возникает переменный заряд $\pm q(t)$, а сам проводник остается в целом нейтральным; заряд $q(t)$ можно рассматривать как вещественную часть выражения $q_0 e^{i\omega t}$.



В произвольной точке P на расстоянии $r \gg d$ от диполя интегральное представление для запаздывающего потенциала приводит к точному

выражению для φ (см. рисунок)

$$\varphi = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos \omega(t - r_1/c)}{r_1} - \frac{\cos \omega(t - r_2/c)}{r_2} \right].$$

а) Предполагая $\omega d/(2c) \ll 1$, покажите, что

$$\varphi = \frac{q_0 d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin \left(t - \frac{r}{c} \right) \right].$$

б) Покажите далее, что

$$A_z \approx -\frac{q_0 \omega d \sin \omega(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2}.$$

в) Убедитесь, что из найденных вами потенциалов следуют те же выражения для электрического и магнитного полей.

12. Плоская электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$ распространяется в вакууме. Считая векторы \mathbf{E}_m и \mathbf{k} известными, найти вектор \mathbf{H} как функцию времени t в точке с радиус-вектором $\mathbf{r} = 0$.

13. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_m \cos(\omega t - kx)$, где \mathbf{e}_y — орт оси y , $E_m = 160$ В/м, $k = 0,51$ м⁻¹. Найти вектор \mathbf{H} в точке с координатой $x = 7,7$ м в момент: а) $t = 0$; б) $t = 33$ нс.

14. В вакууме в направлении оси x установилась стоячая электромагнитная волна, электрическая составляющая которой $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos kx \cdot \cos \omega t$. Найти магнитную составляющую волны $\mathbf{B}(x, t)$. Изобразить примерную картину распределения электрической и

магнитной составляющих волны (**E** и **B**) в моменты $t = 0$ и $t = T/4$, где T – период колебаний.

15. Плоский воздушный конденсатор, обкладки которого имеют форму дисков радиуса $R = 6,0$ см, подключен к переменному синусоидальному напряжению частоты $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$. Найти отношение амплитудных значений магнитной и электрической энергий внутри конденсатора.

16. Доказать, что у замкнутой системы заряженных нерелятивистских частиц с одинаковым удельным зарядом дипольное излучение отсутствует.

17. Найти среднюю мощность излучения электрона, совершающего гармонические колебания с амплитудой $a = 0,10$ нм и частотой $\omega = 6,5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$.

18. Найти мощность излучения нерелятивистской частицы с зарядом e и массой m , движущейся по круговой орбите радиусом R в поле неподвижного точечного заряда q

19. В направлении максимального излучения на расстоянии $r_0 = 10$ м от элементарного диполя (волновая зона) амплитуда напряженности электрического поля $E_m = 6$ В/м. Найти среднее значение плотности потока энергии на расстоянии $r = 20$ м от диполя в направлении, составляющем угол $\theta = 30^\circ$ с его осью.

20. Электромагнитная волна, излучаемая элементарным диполем, распространяется в вакууме так, что в волновой зоне на луче, перпендикулярном оси диполя, на расстоянии r от него среднее значение плотности потока энергии равно S_0 . Найти среднюю мощность излучения диполя.

21. Постоянный по модулю электрический диполь с моментом p вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной оси диполя и проходящей через его середину. Найти мощность излучения такого диполя

5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ВЕЩЕСТВОМ

5.1. Поглощение энергии идеальным проводником

Рассмотрим взаимодействие электромагнитной волны с веществом в четырех различных случаях: плохой проводник, хороший проводник, диэлектрик и плазма.

Плохой проводник частично поглощает энергию и импульс волны, и это позволяет оценить количество энергии и импульса, переносимого электромагнитной волной.

Хороший проводник отражает электромагнитную волну со 100%-ной эффективностью.

Через диэлектрик, такой как газ, волна распространяется, не испытывая поглощения, однако распространение волны в этом случае происходит медленнее, нежели в пустоте.

В плазме существуют волны, распространяющиеся быстрее, чем в пустоте. Эти особенности находят свое объяснение при микроскопическом подходе, с учетом атомного строения вещества. Движение заряда в веществе представляет еще одну интересную особенность электромагнитного взаимодействия в случае, если скорость движения заряда превышает фазовую скорость света в среде. При этом возникает новый вид электромагнитного излучения от равномерно движущегося заряда – излучение Вавилова – Черенкова.

В п. 3.5 мы видели, что колебания тока приводят к потерям энергии. Потери энергии в единицу времени на единицу площади составляют $[E, \mathbf{H}]$, где E и \mathbf{H} – поля в излучаемой электромагнитной волне. Эта энергия переносится излучаемыми электрическим и магнитным полями. Если бегущая электромагнитная волна уносит от источника некоторую энергию, то, поставив на пути плоской волны поглощающую пластинку, можно уловить эту энергию. Пусть материал пластинки обладает конечной электропроводностью, это позволит определить полное количество джоулевой теплоты, выделившейся в пластинке. Согласно закону сохранения энергии, полное количество выделившейся теплоты соответствует энергии электромагнитной волны, поглощенной в пластине. Поле само по себе обладает энергией. Плотность энергии

электрического поля равна $\frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}$. Магнитная энергия, запасенная в

единице объема, составляет $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Если энергия заключена в электромагнитном поле, то джоулева теплота, выделившаяся в поглощающей пластинке, должно быть равным сумме этих двух величин.

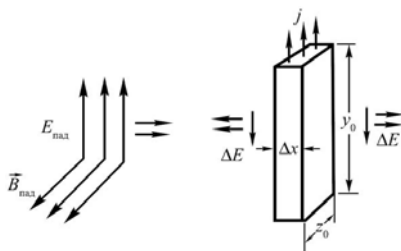


Рис. 5.1 Падающая волна $E_{\text{пад}}$ распространяется вправо и попадает на пластинку, индуцируя в ней ток, который в правую и левую стороны от пластинки излучает свое собственное поле ΔE . Направление поля ΔE и тока j противоположно, поскольку происходит излучение электромагнитных волн

На рис. 5.1 показана электромагнитная волна, падающая на прямоугольный элемент пластинки бесконечных размеров. Плотность индуцированного тока равна j . В прямоугольном элементе наводится ток $I = jz_0\Delta x$. Разность потенциалов между верхним и нижним краями $\Delta\phi = Ey_0$. Энергия, теряемая в единицу времени:

$$\frac{dU}{dt} = I \cdot \Delta\phi = (jz_0\Delta x)(Ey_0) = jE(y_0z_0\Delta x),$$

где $V = y_0z_0\Delta x$ – объем элемента пластинки.

Теряемая в единице объема внутри проводника мощность равна jE . Если на проводящую пластинку падает монохроматическая плоская электромагнитная волна, то при этом выделяется теплота со скоростью jE Вт/м³, индуцированный ток j излучает электромагнитные волны. Пусть ΔE – поле, излучаемое индуцированным током j . На рис. 5.1 показано поле излучения для тонкой пластинки толщиной Δx . Обозначим поле падающей плоской волны через $E_{\text{пад}}$. Эквивалентный поверхностный ток $j\Delta x$. В соответствии с уравнениями Максвелла можем записать

$$\Delta E = -\frac{2\pi k_0}{c} j\Delta x = Bc = -\frac{j\Delta x}{2c\epsilon_0}.$$

Знак «минус» указывает на то, что вне пластинки поле ΔE направленно противоположно току \mathbf{j} , поскольку происходит излучение электромагнитных волн. Пусть ΔS – потери мощности на единицу поверхности. В случае тонкой пластинки толщиной Δx

$$\Delta S = \frac{1}{y_0 z_0} \frac{dU}{dt} = jE\Delta x.$$

Выразим Δx через ΔE и подставим в ΔS

$$\Delta S = -2c\epsilon_0 E\Delta E.$$

Возьмем стопку таких тонких пластинок. Для каждой из них поле ΔE , излучаемое вправо, всегда направлено противоположно результирующему полю, которое порождает излучение, и, таким образом, уменьшает результирующее поле на величину ΔE . Излучаемое влево поле ΔE обусловлено слабым отражением волны. Если электропроводность σ достаточно низка, так что поле E на расстоянии в одну длину волны внутри проводника почти не уменьшается, то отраженные волны компенсируют друг друга. Это объясняется тем, что для любой отраженной волны найдется волна, отраженная от более глубоких слоев, которая на обратном пути окажется сдвинутой по фазе на $\lambda/2$. (Горб одной из волн придется на впадину другой, и результирующая амплитуда окажется всюду равна нулю.) В целом отраженные волны погасят друг друга при условии, что проводник не очень хороший. Это может быть графит или ионизованный газ. Если стопка пластинок бесконечно толстая, то поле $E_{\text{пад}}$ поглотится целиком. Полная мощность, поглощенная единицей поверхности, равна

$$S = -2c\epsilon_0 \int_{E_{\text{пад}}}^0 E dE = c\epsilon_0 E_{\text{пад}}^2 = \frac{E_{\text{пад}} B_{\text{пад}}}{\mu_0}.$$

Поглощаемая единицей поверхности мощность определяется вектором Пойнтинга \mathbf{S} . Направление потока энергии определяется векторным произведением $[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$ и совпадает с направлением вектора скорости распространения волны \mathbf{v} :

$$\mathbf{S} = w\mathbf{v},$$

где w – плотность энергии электромагнитного поля.

Рассмотрим лампу-вспышку мощностью $W = 3$ Вт, дающую пучок света квадратного сечения $a^2 = 10 \times 10$ см². Вычислим среднюю величину вектора Пойнтинга $\langle S \rangle$, а также амплитуду напряженности электрического поля E_0 , для чего воспользуемся

формулой $S = \frac{EB}{\mu_0}$ и соотношением $B = E/c$. Поскольку $\langle S \rangle$ – средняя мощность, приходящаяся на единицу поверхности, то

$$\langle S \rangle = \frac{W}{a^2} = \frac{3}{0,1 \cdot 0,1} = 300 \text{ Вт/м}^2.$$

Заменяя в формуле для S величину B на E/c , находим

$$S = \frac{1}{\mu_0} E \frac{E}{c} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2.$$

Поскольку $\langle E^2 \rangle = E_0^2/2$, мы имеем

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi k_0} E_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2,$$

откуда

$$E_0 = \sqrt{\frac{8\pi k_0}{c} \langle S \rangle} = \sqrt{2 \langle S \rangle \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} = \sqrt{2 \cdot 300 \cdot \sqrt{\frac{12,57 \cdot 10^{-7}}{8,85 \cdot 10^{-12}}}} \approx 475 \text{ В/м}.$$

Полученное соотношение для $\langle S \rangle$ показывает, что количество теплоты, выделяющееся в поглощающей пластинке, численно равно энергии электрического и магнитного полей. О взаимном гашении отраженных волн свидетельствует черный цвет графита (графит не отражает падающее на него электромагнитное излучение). То, что падающая волна поглощается, следует из непрозрачности достаточно толстого слоя графита.

5.2. Импульс излучения

Плоская волна сообщает пластинке толщиной Δx не только энергию, но и импульс. Рассмотрим прямоугольный элемент бесконечной пластинки площадью $y_0 x_0$. (рис. 5.2). Поскольку $jEdt$ – количество джоулевой теплоты, выделяющейся в единице объема за время dt , то количество теплоты, выделяющейся в элементе пластинки объемом $V = y_0 z_0 \Delta x$, равно

$$dU = (jEdt)(y_0 z_0 \Delta x).$$

Заменяем E на cB :

$$dU = cjz_0 \Delta x y_0 B dt.$$

Ток через рассматриваемый элемент пластинки

$$I = j(z_0 \Delta x),$$

поэтому

$$dU = c I y_0 B dt.$$

На элемент тока длиной y_0 , перпендикулярный падающему магнитному полю, действует сила $\mathbf{F}_m = I[\mathbf{y}_0, \mathbf{B}]$ в направлении $[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$, которое совпадает с направлением падающей волны. Заменяя $I y_0 B$ на F_m , получаем

$$dU = c F_m dt.$$

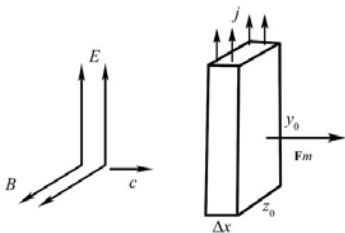


Рис. 5.2. Падающая волна наводит в элементе бесконечной пластинки площадью $y_0 \Delta x$ ток $I = j z_0 \Delta x$. На этот ток действует магнитная сила $\mathbf{F}_m = I[\mathbf{y}_0, \mathbf{B}]$

Импульс, сообщаемый элементу пластинки, $dg = F_m dt$ или

$$dU = c dg,$$

$$dg = \frac{1}{c} dU.$$

Проинтегрировав по толщине пластинки Δx , находим

$$g = U/c.$$

Поле излучения обладает не только энергией, но и импульсом. В любом элементе объема dV поля излучения заключена энергия

$$dU = \epsilon_0 E^2 dV,$$

а его импульс равен энергии, деленной на величину c . Иными словами, элемент объема dV характеризуется вектором импульса (с учетом соотношения $dU = S dV/c$)

$$d\mathbf{g} = \frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{S}}{c} dV \right).$$

Поле излучения, которое испускается движущимся с ускорением зарядом, представляет само по себе физическую реальность. В каждой точке пространства оно имеет энергию и импульс, и их можно измерить. Энергию можно почувствовать, поместив руку в пучок света. Большая часть света поглотится рукой и превра-

тится в теплоту. Из-за малости величины $1/c$ измерить импульс светового пучка довольно трудно.

Предположим, что свет от лампы мощностью $W = 100$ Вт фокусируется на отражающей лопасти радиометра. Найдем силу давления на лопасть. Импульс пучка света дается выражением

$$dg = \frac{1}{c} dU.$$

Поскольку при отражении направление света меняется, передаваемый лопасти импульс оказывается в два раза больше по величине:

$$dg_{\text{лоп}} = \frac{2}{c} dU = \frac{2}{c} W dt.$$

Таким образом, сила давления на лопасть

$$F = \frac{dg_{\text{лоп}}}{dt} = \frac{2}{c} \cdot W = \frac{2}{3 \cdot 10^8} \cdot 100 = 6,67 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

Столь малая сила даже при ничтожном трении с трудом приводит лопасть в движение.

Физическая сущность поля станет еще более реальной при изучении квантовой теории и свойств фотонов, поскольку излучение состоит из квантовых объектов – фотонов, которые столь же реальны, как электроны и протоны. Каждый фотон обладает энергией $U = h\nu$ и импульсом $g = h\nu/c$, где ν – частота волны, а h – очень маленькое число, называемое постоянной Планка.

5.3. Отражение излучения от сверхпроводника

В случае высокой проводимости σ электромагнитная волна поглощается не полностью, а частично отражается. Рассмотрим предельный случай $\sigma = \infty$ (сверхпроводник). Электрическое поле внутри сверхпроводника должно всегда обращаться в нуль (в противном случае неограниченно возрастал бы ток). Индуцированный поверхностный ток оказывается таким, что поле излучения $\Delta E = -E_{\text{пад}}$. При этом внутри пластинки результирующее поле отсутствует $E = E_{\text{пад}} + \Delta E = 0$. Слева от пластинки оно не обращается в нуль, поскольку его существование обусловлено двумя монохроматическими волнами одинаковой интенсивности, бегущими в противоположных направлениях. В этих условиях слева от пластинки (рис. 5.3) образуется стоячая волна с узлами и пучностями (п.4.12).

Величина индуцированного поверхностного тока I_s (А/м), а также величина и направление магнитного поля ΔB , создаваемого

этим током, были найдены в п.5.1:

$$\Delta E = c\Delta B = \frac{1}{2c\epsilon_0} I_s$$

откуда

$$I_s = 2c\epsilon_0 \Delta E = 2c\epsilon_0 E_{\text{пад}}.$$

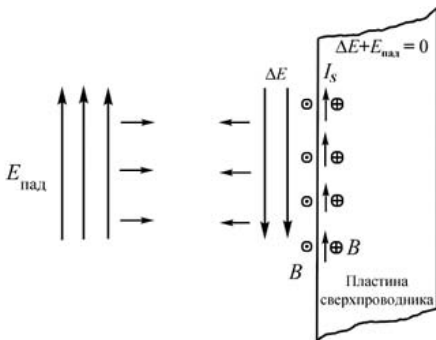


Рис. 5.3. Падающая волна наводит в сверхпроводящей пластинке ток I_s , который излучает поле ΔE , равное по величине $E_{\text{пад}}$

Индукированный поверхностный ток определяется через величину электрического поля падающей волны. Магнитное поле ΔB , создаваемое током I_s , получаем из первого выражения

$$\Delta B = \frac{1}{2c^2\epsilon_0} I_s = \frac{E_{\text{пад}}}{c}.$$

Направление поля ΔB вблизи тока I_s определяется правилом правой руки и показано на рис. 5.3. Справа от тока поле направлено от читателя за плоскость чертежа, слева – на читателя. В обоих случаях векторное произведение $[\Delta E, \Delta B]$, характеризующее направление распространения волны, направлено от тока I_s . Величина I_s совпадает с током в источнике, генерирующем $E_{\text{пад}}$.

5.4. Взаимодействие излучения с диэлектриком

Внешние электроны атомов диэлектрика связаны с атомом не жестко и под влиянием внешнего поля испытывают смещение. Вычислим величину такого смещения.

Воспользуемся моделью атома, принятой в современной квантовой теории. Согласно этой модели, внешний электрон рассматривается в виде шарового облака радиусом R . Мы будем предполагать

плотность заряда постоянной. При смещении распределенного шарового заряда на расстояние y от центра атома возникает возвращающая сила, пропорциональная y и направленная против смещения. Вследствие этого электронное облако совершает гармонические колебания относительно центра атома $y = y_0 \cos \omega_0 t$. В центре атома находится ядро, окруженное облаком внутренних электронов, прочно связанных с ядром. Сила, действующая на внешнее электронное облако, согласно второму закону Ньютона равна

$$F_{\text{атом}} = ma = m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y$$

где $\omega_0/2\pi$ – частота собственных колебаний атомного электрона.

Если на электронное облако действует поле $\Delta E_{\text{пад}}$ падающей волны, то результирующая сила запишется в виде

$$F_{\text{рез}} = F_{\text{атом}} + (-e)E_{\text{пад}},$$

откуда получаем

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y - eE_{\text{пад}},$$

где e – элементарный заряд.

Для обозначения смещения вместо x использована величина y , поскольку рассматривается случай, когда поле $\mathbf{E}_{\text{пад}}$ направлено вдоль оси y . Падающую волну на расстоянии x от источника мы обычно описываем уравнением $E_{\text{пад}} = E_0 \cos \omega(t - x/c)$. Поэтому

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega_0^2 y - \frac{eE_0}{m} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Решением этого дифференциального уравнения служит гармоническая волна с резонансной амплитудой

$$y = -\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Данное решение можно проверить прямой подстановкой в исходное уравнение.

Таким образом, мы нашли, как взаимодействует отдельный атом с излучением. Рассмотрим множество таких атомов, из которых состоит твердая пластинка или слой газа.

5.5. Показатель преломления

Пусть на пластинку толщиной Δx , состоящую из атомов, падает плоская волна. Электрическое поле падающей волны $E_{\text{пад}}$ вынудит атомные электроны совершать гармонические колебания. Любой

колеблющийся электрон должен сам по себе излучать электромагнитную волну. Как и в случае пластинки из проводника, возникают отраженная и прошедшая волны, но потери на джоулеву теплоту в пластинке отсутствуют. Вся энергия сохраняется в форме электромагнитного излучения; таким образом, пластинка оказывается прозрачной. Более того, если заимствовать известный из оптики результат, то окажется, что электромагнитная волна (или свет) распространяется внутри пластинки со скоростью $u < c$. Отношение $c/u = n$ называется показателем преломления. У большинства твердых сред показатель преломления равен приблизительно 1,5; это означает, что скорость света замедляется в них примерно на 33%. В таблице приведены показатели преломления некоторых широко используемых веществ.

Показатели преломления
($\lambda = 5,9 \cdot 10^{-7}$ м – желтая линия натрия)

Вещество	Показатель преломления
Воздух	1,0003
Сероуглерод	1,63
Алмаз	2,42
Стекло (тяжелый флинт)	1,89
Стекло (легкий флинт)	1,58
Стекло (цинковый крон)	1,52
Полиэтилен	1,52
Плавленый кварц	1,46
Сапфир	1,77
Хлористый натрий	1,53
Вода	1,33

Из волновых уравнений Максвелла (п. 3.4) следует, что поля E и B в свободном пространстве описываются волновыми уравнениями, со скоростью волны c – поле излучения движущейся с ускорением отдельно заряженной частицы также распространяется со скоростью света $u = c$. Но поле внутри пластинки не совпадает с полем излучения отдельной частицы (или плоского тока, генерирующего падающую волну). Поле внутри пластинки представляет собой суперпозицию поля падающей волны и полей излучения всех атомных электронов. Каждое из полей в отдельности распространяется со скоростью света $u = c$, но результирующее поле распространяется так, как если бы его скорость уменьшилась. Из решения

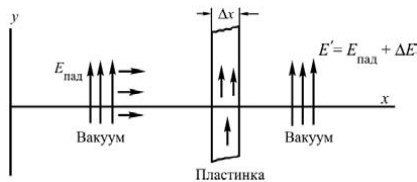
$$y(t) = -\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

следует, что поле излучения каждого из атомных электронов запаздывает по фазе на $\alpha = 90^\circ$ относительно поля падающей волны, которая приводит в движение эти электроны (п. 4.5). В этом случае испущенная результирующая волна будет запаздывать по фазе относительно падающей. Скорость результирующего волнового фронта меньше, чем $u = c$, хотя индивидуальные волны распространяются с $u = c$.

Выведем формулу для показателя преломления в случае пластинки на рис. 5.4. Этот вывод можно выполнить следующим образом:

1. задается электрическое поле падающей волны.
2. Вычисляется скорость, приобретаемая атомными электронами в пластинке под действием электрического поля падающей волны.
3. Используя эту скорость (или плотность электронного тока), рассчитывается испускаемое электронами вторичное излучение.
4. Суммируются падающие и вторичные волны для получения результирующей испускаемой волны.
5. Через фазу испускаемой волны находится показатель преломления.

Рис.5.4. Падающая волна $E_{\text{пад}}$ наводит в пластинке плотность тока j , излучение которого вносит вклад в результирующую волну E'



1. *Падающая волна.* Пусть электрическое поле падающей волны описывается гармоническим законом и распространяется со скоростью света:

$$E_{\text{пад}} = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

2. *Скорость электронов.* Дифференцируя $u(t)$ (п. 5.4) по времени, получаем выражение для скорости слабо связанных внешних электронов

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{eE_0\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega(t - x/c)),$$

где ω_0 – частота собственных колебаний электронов.

Плотность тока в пластинке $j = N(-e)v_y$, где N – число колеблющихся атомных электронов в единице объема. Используя приведенное выше выражение для v_y , находим

$$j = -\frac{Ne^2\omega E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

3. *Излучение, испускаемое атомными электронами.* Поле излучения у пластинки, создаваемое электронами пластинки, запишется в виде (п. 4.1)

$$\Delta E = -\frac{1}{2\varepsilon_0 c} j \Delta x.$$

Знак «минус» указывает на то, что ток j и создаваемое им поле излучения имеют противоположные направления. Подставим сюда выражение для j :

$$\Delta E = -\frac{1}{2\varepsilon_0 c} \left[-\frac{Ne^2\omega E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \Delta x$$

и перепишем его в виде

$$\Delta E = \Delta E_0 \cos \left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2} \right),$$

где

$$\Delta E_0 = \frac{Ne^2\omega}{2\varepsilon_0 cm(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \Delta x.$$

4. *Результирующая волна.* Результирующее электрическое поле испускаемой волны является суперпозицией поля падающей волны и поля, испускаемого атомными электронами:

$$E' = E_{\text{пад}} + \Delta E.$$

Заменяв ΔE найденным выражением, получим

$$E' = E_0 \cos \theta + \Delta E_0 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right).$$

Здесь $\theta = \omega(t - x/c)$. Хотя θ и увеличивается во времени, обе монохроматические волны сохраняют постоянную разность фаз, равную $\pi/2$ радиан. Используя метод фазовых диаграмм, описан-

ный в приложении 1, эти две волны нетрудно сложить. В данный момент времени t первая волна представляет собой проекцию на ось x вектора E_0 (рис. 5.5). Вторая волна является проекцией на ось x вектора ΔE_0 , составляющего угол $-\pi/2$ с первым вектором. Из рис. 4.5, a видно, что результирующий вектор E'_0 сдвинут по фазе относительно падающей волны на угол

$$\varphi = \Delta E_0 / E_0.$$

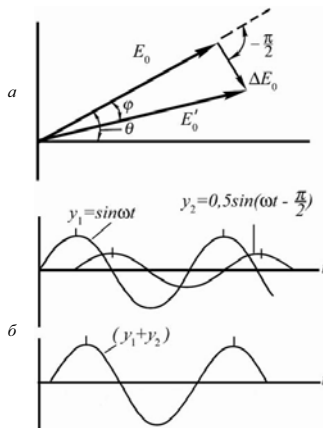


Рис. 5.5. Фазовая диаграмма (a) для случая сложения двух монохроматических волн $E_0 \cos \theta$ и $\Delta E_0 \cos(\theta - \pi/2)$; непосредственное сложение двух монохроматических волн, сдвинутых по фазе на 90° (b)

При выводе этого выражения мы воспользовались малостью углов ($\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$), предположив, что $\Delta E_0 / E_0 \ll 1$.

5. *Соотношение между фазовым сдвигом и показателем преломления.* Падающая волна проходит через пластинку за время $t = \Delta x / c$, а волна, распространяющаяся со скоростью $u = c/n$, затрачивает большее время $t' = n(\Delta x / c)$. Результирующий волновой фронт при прохождении пластинки задержится на $\Delta t = (n - 1)\Delta x / c$. Это соответствует фазовому сдвигу

$$\varphi = \omega \Delta t = \omega(n - 1) \frac{\Delta x}{c}.$$

Поскольку $\varphi = \Delta E_0 / E_0$, то

$$(n - 1) \frac{\Delta x}{c} = \frac{\Delta E_0}{E_0}.$$

Подставляя выражение для ΔE_0 и решая относительно n , находим показатель преломления

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Это показатель преломления пластинки. При выводе зависимости $n(\omega)$ использовано условие, что поле падающей волны меняется слабо, т.е. $(n - 1) \ll 1$. Для больших n поле $E_{\text{пад}}$ внутри пластинки следует заменить на результирующее поле (п. 4.8).

Дисперсия

Полученный результат обеспечивает правильную зависимость показателя преломления от частоты падающего света ω (рис. 5.6). Для типичных атомов $\omega_0 > \omega$, причем ω относится к видимой области спектра. Этому соответствует показатель преломления больше единицы или скорость волны меньше c . Кроме того, при переходе частоты света из красной области спектра в фиолетовую показатель преломления увеличивается и возрастает отклонение светового луча призмой, т.е. имеет место нормальная дисперсия. Именно благодаря этому призма разлагает пучок белого света в спектр.

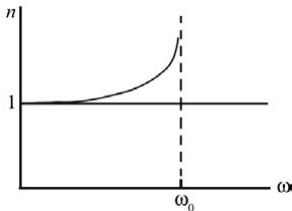


Рис. 5.6. Кривая нормальной дисперсии, построенная в соответствии с формулой

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Используя зависимость $n = n(\omega)$ и данные таблицы (с. 188), вычислим показатель преломления воздуха для ультрафиолетового излучения с $\lambda = 3,0 \cdot 10^{-7}$ м ($\omega_0 = 7,5 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$). Для двух разных частиц имеем

$$\frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} = \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_0^2 - \omega_2^2}.$$

Из таблицы находим для воздуха $n_1 = 1,0003$, причем $\omega_1 = 2\pi c/\lambda_1 = 3,19 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$ ($\lambda_1 = 5,9 \cdot 10^{-7}$ м – желтая линия натрия).

Тогда

$$\omega_2 = \frac{2\pi c}{\lambda_2} = 6,28 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}, \text{ где } \lambda_2 = 3,0 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Таким образом,

$$\frac{n_2 - 1}{1,0003 - 1} = \frac{(7,5 \cdot 10^{15})^2 - (3,19 \cdot 10^{15})^2}{(7,5 \cdot 10^{15})^2 - (6,28 \cdot 10^{15})^2} = 2,74, \quad n = 1,00082.$$

Используя уравнения Максвелла и упрощенную атомную модель проводников и диэлектриков, удастся рассчитать многие из наблюдаемых в природе общих свойств света и электромагнитного излучения.

5.6. Электромагнитное излучение в ионизованной среде

В плазме или ионизованном газе излучение взаимодействует со свободными электронами и $\omega_0 = 0$. При $\omega_0 = 0$ имеем

$$n = 1 - \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m \omega^2}.$$

Эта формула справедлива, если средний свободный пробег электрона превышает величину $y_{\text{макс}} = eE_0/m\omega^2$. Такой случай реализуется при распространении радиоволн в ионосфере и космическом пространстве. Здесь мы имеем $n < 1$ – скорость волны превышает скорость света c . Однако ни сигнал, ни частица не могут распространяться быстрее света. В действительности отдельные частицы света (фотоны) всегда движутся со скоростью $u = c$. Здесь же мы рассматриваем результирующее поле, обусловленное суперпозицией большого числа фотонов, испускаемых многочисленными электронами.

Можно увеличивать и уменьшать амплитуду электромагнитной волны, распространяющейся в ионизованном газе, и создавать тем самым модуляцию электромагнитной волны. С помощью такой модуляции могла бы быть закодирована информация (например, с использованием азбуки Морзе), и тогда сигналы передавались бы быстрее света. Однако модулированная волна уже не будет монохроматической. Эту волну можно было бы разложить по Фурье на группы монохроматических волн с различными частотами. Каждая из монохроматических волн действительно распространяется со скоростью $u > c$, но огибающая сигнала при этом распространяется со скоростью, называемой групповой скоростью v_g (приложение 2), которая может существенно отличаться от скоростей монохроматических состав-

ляющих, и в данном случае $v_g < c$.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad \text{где } k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Используя формулу для v_g , найдем групповую скорость в диэлектрике, для которого получена зависимость $n(\omega)$. Запишем k как функцию от ω :

$$\frac{\omega}{k} = u = \frac{c}{n}, \quad k = \frac{\omega}{c} n.$$

Формулу для $n(\omega)$ представим в виде

$$n = 1 + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \text{где } A \equiv \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}.$$

Тогда

$$k = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \right).$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} + \frac{A}{c} \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

Поскольку

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{v_g},$$

находим

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \left[1 + A \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right].$$

Поэтому v_g всегда меньше c , если только $\omega_0 > \omega$ или $\omega_0 = 0$, например при распространении радиоволн в ионосфере. Групповая скорость меньше скорости света даже в том случае, когда скорость волны превышает c .

Поскольку v_g зависит от частоты ω , то можно, настраивая радиотелескопы на различные частоты, определить расстояние до далеких космических объектов. Такими радиоисточниками космического излучения служат пульсары, излучение которых представляет последовательность импульсов. Периоды следования импульсов заключены в интервале от 1,6 мс до 4,3 с. Пульсары представляют вращающиеся нейтронные звезды с магнитным полем на их поверхности $\approx 10^8$ Тл. Рассмотрим пульсар, который каждые 3,6 с излучает импульс радиоволн. Этот импульс регист-

рируется радиотелескопом. Если радиоприемник быстро пере-
строить с частоты $\nu_1 = 150$ МГц на частоту $\nu_2 = 240$ МГц, то
импульс появиться на 1,3 с раньше, поскольку $v_g = v_g(\omega)$ –
зависит от частоты. Найдем расстояние до этого пульсара, если в
межзвездном пространстве плотность электронов $N = 3 \cdot 10^4 \text{ м}^{-3}$.
Пусть расстояние до пульсара равно D . Разница во времени

$$\Delta t = \frac{D}{v_{g_1}} - \frac{D}{v_{g_2}}.$$

Запишем выражение для величины $1/v_g$ при $\omega_0 = 0$

$$\frac{1}{v_{g_1}} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{A}{\omega_1^2} \right), \quad \frac{1}{v_{g_2}} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{A}{\omega_2^2} \right).$$

Тогда

$$\Delta t = \frac{DA}{c} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right).$$

Отсюда находим время, за которое радиоимпульс от пульсара
дойдет до Земли:

$$\begin{aligned} \frac{D}{c} &= \frac{2\varepsilon_0 m \Delta t}{Ne^2} \cdot \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{2\varepsilon_0 m \Delta t}{Ne^2} \cdot \frac{4\pi^2 \nu_1^2 \nu_2^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2} = \frac{2\pi m \Delta t}{k_0 Ne^2} \cdot \frac{\nu_1^2 \nu_2^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2} \\ \frac{D}{c} &= \frac{2\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,3}{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2} \cdot \frac{(1,5 \cdot 10^8)^2 \cdot (2,4 \cdot 10^8)^2}{(2,4 \cdot 10^8)^2 - (1,5 \cdot 10^8)^2} = \\ &= 3,97 \cdot 10^{10} \text{ с} = 1260 \text{ лет}. \end{aligned}$$

Таким образом, свет от пульсара доходит до Земли за 1260 лет
и расстояние до пульсара составляет 1260 световых лет.

Этот пример иллюстрирует независимый метод определения
астрономических расстояний, но он годится лишь для пульсаров
(вращающихся нейтронных звезд). К счастью, этот метод астро-
номы могут проверить и откалибровать с помощью оптического
метода, поскольку один из пульсаров можно наблюдать визуаль-
но в центральной области Крабовидной туманности.

5.7. Поле излучения точечных зарядов

Найдем поле излучения, испускаемого большим числом заря-
дов, которые совершают совместные колебания, образуя ток. В

единице объема находится N зарядов. Каждый заряд q колеблется по закону $y = y_0 \sin \omega t$, в этом случае плотность тока $j = Nq\omega y_0 \cos \omega t$ и ток в слое толщиной Δx

$$I_s = j\Delta x = (Nq\omega y_0 \Delta x) \cos \omega t.$$

Используя выражение $E = cB = \frac{I_s}{2c\epsilon_0}$, поле излучения можно

записать в виде

$$E_y = \frac{1}{2\epsilon_0 c} Nq\Delta x \omega y_0 \cos(\omega t - kx).$$

Если рассмотреть отдельный заряд q , колеблющийся по закону $y = y_0 \sin \omega t$, то с помощью уравнений Максвелла мы нашли, что на расстоянии r ($r \gg ct$) от заряда q поле излучения дается выражением

$$E = \frac{q\omega^2 y_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin(\omega(t - r/c)) \sin \theta,$$

где θ – угол, который составляет вектор ускорения \mathbf{a} с радиус-вектором \mathbf{r} (рис. 5.7). Замечая, что ускорение $a = -\omega^2 y_0 \sin \omega t$, имеем для излучения точечного заряда, движущегося с ускорением:

$$E = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} a \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta$$

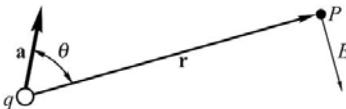


Рис. 5.7. Направление поля излучения \mathbf{E} , создаваемого точечным зарядом q , который движется с ускорением \mathbf{a}

здесь $a(t - r/c)$ – ускорение в момент времени $(t - r/c)$. Вектор \mathbf{E} направлен по нормали к радиус-вектору \mathbf{r} . Полученная формула справедлива не только для колеблющегося заряда, но и для любого движущегося заряда при условии, что его скорость $v \ll c$.

Направление поля \mathbf{B} перпендикулярно \mathbf{E} и \mathbf{r} . Как и прежде, $B = E/c$. Следует заметить, что при вычислении поля на расстоянии r от точечного заряда мы должны использовать значение ускорения в более ранний момент времени $(t - r/c)$. Это значение ускорения обозначается как $a(t - r/c)$. Если бы это было не так, то, измеряя поле в точке P , мы могли бы сказать, что происходит в этот же момент времени с зарядом. Однако это противоречило бы условию, согласно которому сигналы не могут распростра-

няться со скоростью $v > c$. Мы можем судить лишь о состоянии заряда, в котором он находился в более ранний промежуток времени $(t - r/c)$.

Как было показано, заряд q , движущийся с ускорением a , излучает мощность

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[a \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]^2.$$

Средняя мощность, излучаемая диполем, равна

$$-\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{4p_0^2 \pi^3 v^4}{3\epsilon_0 c^3}.$$

При постоянной амплитуде колебаний мощность излучения возрастает пропорционально четвертой степени частоты.

Пусть в точке расположения свободного электрона радиопередатчик, работающий на частоте $\nu = 500$ кГц, создает поле электромагнитного излучения $E_0 = 10$ мВ/см. Найдем амплитуду колебаний, максимальную скорость электрона и среднюю мощность, излучаемую электроном.

Поскольку для свободного электрона $\omega_0 = 0$, амплитуда колебаний

$$y_0 = \frac{eE_0}{m(2\pi\nu)^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,0}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (2\pi \cdot 5 \cdot 10^5)^2} = 1,78 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

В случае простых гармонических колебаний максимальная скорость электрона

$$v_0 = 2\pi\nu y_0 = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 1,78 \cdot 10^{-2} = 5,59 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

Дипольный момент p_0 равен

$$p_0 = ey_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,78 \cdot 10^{-2} = 2,85 \cdot 10^{-21} \text{ Кл}\cdot\text{м}.$$

Средняя мощность излучения

$$-\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{4p_0^2 \pi^3 v^4}{3\epsilon_0 c^3} = 8,79 \cdot 10^{-32} \text{ Вт}.$$

Спектр излучения атома состоит из отдельных линий, сосредоточенных около строго определенных значений частот. Каждая из этих линий излучения не является бесконечно узкой, а имеет свою естественную ширину $\Delta\nu$, определяемую средним временем жизни возбужденного состояния атома τ .

Зная среднюю мощность излучения диполя, оценим время жизни возбужденного состояния атома и определим естественную ширину линии атомного спектра. Воспользуемся приближе-

нием, согласно которому сила, связывающая излучающий электрон с центром атома, аналогична силе, действующей со стороны пружины с коэффициентом упругости $k = m\omega_0^2$. При этом частота излучения $\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$ и дипольный момент $p_0 = ey_0$. Полная механическая энергия колебательной системы $U = ky_0^2/2 = m\omega_0^2 y_0^2/2$, где y_0 – амплитуда колебаний. Средняя мощность излучения (п. 3.13)

$$-\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} (ey_0)^2 \frac{\omega_0^4}{c^3}.$$

В этом случае

$$-\frac{dU}{U} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \omega_0^2}{c^3 m} dt.$$

Интегрируя обе части этого выражения, получаем

$$U = U_0 e^{-t/\tau}, \text{ где}$$

$$\tau = \frac{6\pi mc^3 \epsilon_0}{e^2 \omega_0^2} = \frac{3mc^3 \epsilon_0}{2\pi e^2 \nu_0^2}$$

– среднее время жизни атомного перехода. Для желтого света (желтая линия натрия $\lambda = 5,9 \cdot 10^{-7}$ м, $\nu \approx 5,1 \cdot 10^{14}$ Гц)

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{\pi \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (5,1 \cdot 10^{14})^2} \approx 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ с}.$$

При вычислениях мы пользовались классическим приближением, но полученный результат почти совпадает с правильными квантово-механическими расчетами. Ширина желтой спектральной линии связана с τ (приложение 2):

$$\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau} \quad \text{или} \quad \Delta\nu \approx \frac{1}{2\pi\tau}.$$

Относительная ширина линии

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \approx \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \approx 2 \cdot 10^{-8}.$$

В следующем примере в аналогичных расчетах рассмотрим боровскую модель атома водорода и оценим, сколько времени потребуется электрону, чтобы излучить энергию, сравнимую с его энергией связи.

В боровской модели атома водорода электрон движется по круговой орбите радиусом $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м.

Ускорение электрона найдем с помощью закона Кулона

$$ma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2},$$

$$a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{ma_0^2}.$$

Скорость излучения энергии ускоренно движущегося заряда

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{ma_0^2} \right)^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \frac{e^6}{c^3 m^2 a_0^4} = \frac{2}{3} \frac{k_0^3 e^6}{c^3 m^2 a_0^4} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{(9 \cdot 10^9)^3 (1,6 \cdot 10^{-19})^6}{(3 \cdot 10^8)^3 (9,1 \cdot 10^{-31})^2 (0,53 \cdot 10^{-10})^4} = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ Дж/с} = 2,9 \cdot 10^{11} \text{ эВ/с}.$$

Время, за которое излучается 7 эВ энергии (примерно половина энергии связи электрона в атоме водорода):

$$\Delta t = \frac{U}{-(dU/dt)} = \frac{7}{2,9 \cdot 10^{11}} = 2,4 \cdot 10^{-11} \text{ с}.$$

Согласно классической физике, электрон, ускоренно движущийся по круговой орбите вокруг ядра атома, должен за очень короткое время излучить значительную часть имеющейся у него энергии и упасть на ядро. То есть в рамках классической физики невозможно объяснить устойчивость атома. Современная квантовая механика свободна от этой трудности, поскольку электронное облако стационарно; его ускорение равно нулю.

5.8. Показатель преломления в конденсированных средах

Возникновение показателя преломления связано с тем, что электрическое поле световой волны поляризует молекулы вещества, создавая осциллирующие дипольные моменты. Ускорение осциллирующих зарядов приводит к излучению новых волн поля. Новое поле, интерферируя со старым, изменяет его. Изменение поля эквивалентно сдвигу фазы первоначальной волны. Поскольку сдвиг фазы пропорционален толщине материала, эффект в целом оказывается эквивалентным изменению фазовой скорости света в материале. На осциллятор действует не только падающая волна, но и волны, излученные другими атомами.

Воспользуемся моделью атома или молекулы, к которой электрон привязан силой, пропорциональной его перемещению (как будто он удерживается пружиной). Такая модель атома эквива-

лентна эффективному смещению электронного облака относительно неподвижного ядра. Учет наличие «тормозящей» силы $m\gamma v$ в атомном осцилляторе. Такая сила соответствует сопротивлению при движении, т.е. она пропорциональна скорости электрона ($v = dx/dt$).

Запишем уравнение колебания атома при наличии тормозящей силы

$$F = -eE = m \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x \right),$$

где e – элементарный заряд, x – смещение, антипараллельное направлению поля \mathbf{E} .

Если действующее на атом электрическое поле изменяется со временем синусоидально, то

$$E = E_0 e^{i\omega t}.$$

С той же самой частотой будет осциллировать и смещение

$$x = x_0 e^{i\omega t}.$$

Подставляя $\frac{dx}{dt} = i\omega x$ и $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$, выразим x через E :

$$x = \frac{e/m}{\omega^2 - i\gamma\omega - \omega_0^2} E.$$

Индукцированный дипольный момент атома p равен $-ex$:

$$\mathbf{p} = \frac{e^2/m}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \mathbf{E}.$$

Так как \mathbf{p} пропорционально \mathbf{E} , то

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \alpha(\omega) \mathbf{E},$$

где α – атомная поляризуемость,

$$\alpha = \frac{e^2/(m\epsilon_0)}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}.$$

Подобный же результат для движения электронов в атоме дает и квантовая механика, но с учетом следующих особенностей. У атомов есть несколько собственных частот, каждая из которых имеет свою диссипативную постоянную γ . Кроме того, каждая гармоника имеет еще свою эффективную «силу», выражаемую в виде произведения поляризуемости при данной частоте на постоянную связи f , которая, как ожидается, по порядку величины равна единице. Обозначая каждый из трех параметров ω_0 , γ

и f для каждой из гармоник через ω_{0k} , γ_k и f_k и суммируя по всем гармоникам, находим атомную поляризуемость

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k \omega + \omega_{0k}^2}.$$

Если N – число атомов в единице объема вещества, то поляризация $\mathbf{P} = N\mathbf{p} = \varepsilon_0 N\alpha \mathbf{E}$, т. е. пропорциональна \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 N\alpha(\omega)\mathbf{E}.$$

Другими словами, когда на материал действует синусоидальное электрическое поле, оно индуцирует пропорциональный себе дипольный момент, причем константа пропорциональности α зависит от частоты. При очень больших частотах α мала: реакция материала слабая. А вот при низких частотах реакция может быть очень сильной. Константа пропорциональности, кроме того, еще оказывается комплексной, т. е. поляризация не следует точно за всеми изменениями электрического поля, а сдвинута по фазе.

Рассмотрим электромагнитные волны в диэлектрическом веществе, где есть только связанные в атомах заряды: $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ и

$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$. Уравнения Максвелла примут вид

$$\text{а) } \operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0}, \quad \text{б) } c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} + \mathbf{E} \right),$$

$$\text{в) } \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{г) } \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Ограничимся изотропными диэлектриками, где \mathbf{P} имеет то же направление, что и \mathbf{E} . Найдем решение для плоской волны, движущейся в направлении оси z . Электрическое поле будет изменяться, как $e^{i(\omega t - kz)}$. Пусть волна поляризована в направлении оси x , т. е. электрическое поле имеет только x -компоненту:

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}.$$

Так как для бегущей волны фазовая скорость

$$\frac{\omega}{k} = v_{\text{фаз}} = \frac{c}{n}, \quad \text{то } k = \frac{\omega n}{c}.$$

С учетом этой формулы

$$E_x = E_0 e^{i\omega(t - nz/c)}.$$

Показатель преломления n можно определить, если найти

волновой вектор k , при котором $E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ удовлетворяет уравнениям поля, и затем воспользоваться соотношением

$$k = \frac{\omega n}{c}.$$

В нашем случае в изотропном материале поляризация имеет только x -компоненту; кроме того, \mathbf{P} не изменяется с изменением координаты x , поэтому $\operatorname{div} \mathbf{P} = 0$. Поскольку диэлектрик «линейный» P_x изменяется как $e^{i\omega t}$ и $\partial^2 P_x / \partial t^2 = -\omega^2 P_x$. В результате получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2}$$

или

$$-k^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} P_x.$$

Поскольку \mathbf{E} и \mathbf{P} изменяются синусоидально, то \mathbf{P} можно считать пропорциональной \mathbf{E} :

$$P_x = \epsilon_0 N \alpha E_x.$$

В результате в волновом уравнении E_x сокращается:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + N \alpha).$$

Используя выражение $k = n\omega/c$, находим n :

$$n^2 = 1 + N \alpha.$$

Сравним эту формулу с результатом, полученным для показателя преломления в п. 5.5 при условии, что падающая волна слабо изменяется в веществе:

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \left(\frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2} \right).$$

Формула для n^2 после подстановки атомной поляризуемости α дает

$$n^2 = 1 + \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \left(\frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \right).$$

В этом выражении в знаменателе появилось слагаемое $i\gamma\omega$, учитывающее поглощение энергии в осцилляторах. Слева вместо n теперь стоит n^2 и отсутствует дополнительный множитель $1/2$.

Но если заметить, что при n^2 , близких к единице (как это имело место раньше), $n = \sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$, то оба выражения оказываются идентичными.

Можно предполагать, что новое выражение для n^2 позволит определить показатель преломления и для плотных материалов. Для этого учтем, что поле, действующее на каждый из атомов, – это не только поле E_x , но в плотном материале существуют и другие поля, создаваемые соседними атомами, сравнимые с E_x . Аналогичная задача возникла при изучении статических полей в диэлектрике. Поле, действующее на отдельный атом, который расположен в сферической полости в диэлектрике, увеличивается по сравнению со средним полем \mathbf{E} на величину $\mathbf{P}/3\varepsilon_0$.

Это справедливо и для электрического поля в волне, пока длина волны много больше расстояния между атомами. В этом случае локальное поле

$$\mathbf{E}_{\text{лок}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Именно это локальное поле следует использовать вместо \mathbf{E} в выражении для вектора поляризуемости

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 N \alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \right)$$

или

$$\mathbf{P} = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3} \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Поляризация \mathbf{P} для плотного материала все еще пропорциональна \mathbf{E} (для синусоидального поля). Однако константа пропорциональности будет уже $\varepsilon_0 N \alpha / [1 - (N\alpha/3)]$, а не $\varepsilon_0 N \alpha$, как раньше. Таким образом,

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3}.$$

Более удобно переписать это в виде

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha$$

– формула Клаузиуса – Моссоги.

В плотном материале возникает и другое усложнение. Поскольку атомы расположены слишком тесно, они сильно взаимодействуют друг с другом и внутренние гармоники осцилляций изменяются. Собственные частоты атомных осцилляций разма-

зываются этими взаимодействиями и обычно весьма сильно подавляются ими, а коэффициент трения становится очень большим. Величины ω_0 и γ в твердом веществе оказываются другими, чем у свободных атомов. С этой оговоркой можно приближенно представлять α как сумму по гармоникам:

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k\omega + \omega_{0k}^2}.$$

Еще одно усложнение связано с тем, что плотный материал представляет смесь нескольких компонент. Каждая дает свой вклад в поляризацию. Полная поляризация α представляет сумму вкладов различных компонент смеси.

Если число атомов каждой из компонент смеси в единице объема N_j , то получаем

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum_j N_j \alpha_j,$$

Величина $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ задается комплексной функцией частоты – средней атомной поляризуемостью $\alpha(\omega)$. Точное вычисление $\alpha(\omega)$ (т. е. нахождение f_k , γ_k и ω_{0k}) для плотного вещества – одна из труднейших задач квантовой механики. Это сделано только для нескольких особенно простых веществ.

Поскольку α – комплексное число, то и показатель преломления n тоже оказывается комплексным. В этом случае можно записать n в виде вещественной и мнимой частей

$$n = n_R - in_I,$$

где n_R и n_I – вещественные функции ω . При отрицательном знаке у in_I для обычных оптических материалов n_I будет положительной величиной. Для оптически неактивных материалов γ – положительное число, что делает мнимую часть n отрицательной. Плоская волна запишется через n следующим образом ($i^2 = -1$):

$$E_x = E_0 e^{i\omega(t - nz/c)} = E_0 e^{-\omega n_I z/c} e^{i\omega(t - n_R z/c)}.$$

Множитель $e^{i\omega(t - n_R z/c)}$ задает волну, бегущую со скоростью c/n_R , т.е. n_R будет как раз то, что мы обычно считаем показателем преломления. Но *амплитуда* этой волны $E_0 e^{-\omega n_I z/c}$ с увеличением z экспоненциально убывает. График напряженности электрического поля как функции от z в некоторый момент времени и для $n_I \approx n_R/2\pi$ показан на рис. 5.8. Мнимая часть показателя преломления из-за потерь энергии в атомных осцилляторах

приводит к ослаблению волны. *Интенсивность* волны пропорциональна квадрату амплитуды, так что

$$\text{интенсивность} \sim e^{-2\omega n_I z/c}$$

Часто это записывается как

$$\text{интенсивность} \sim e^{-\beta z},$$

где $\beta = 2\omega n_I/c$ – коэффициент поглощения. В полученном уравнении для n содержится не только теория показателя преломления вещества, но и теория поглощения им света.

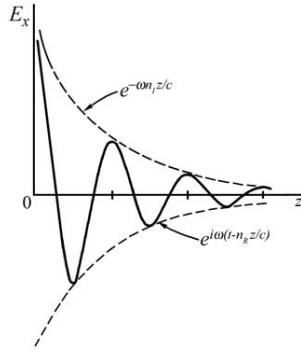


Рис. 5.8. График поля E_x в некоторый момент времени при $n_I \approx n_R/2\pi$

В прозрачных материалах величина $c/\omega n_I$, имеющая размерность длины, оказывается гораздо больше толщины материала.

5.9. Волны в металлах

Результаты, полученные в п.5.8 для твердых материалов, применимы и к хорошим проводникам, например металлам. На электроны проводимости в металлах не действует возвращающая сила, локализирующая их на определенном атоме ($x\omega_0^2 = 0$). Еще одно отличие металлов от диэлектриков обусловлено высокой подвижностью электронов проводимости. В результате локальное поле, действующее на них в среднем, равно среднему полю

$$\mathbf{E}_{\text{лок}} = \mathbf{E},$$

и не надо учитывать эффекты, связанные с поляризацией.

Выражение для показателя преломления в металле должно выглядеть подобно выражению для затухающего осциллятора, в котором $\omega_0 = 0$:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left(\frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega} \right).$$

В n^2 учтен вклад только от электронов проводимости, которые играют в металлах главную роль.

Рассмотрим, чем определяется выбор величины γ . Электроны в металле движутся по ломаному пути от одного соударения до другого. Между столкновениями они ускоряются под действием среднего электрического поля (рис.5.9). Скорость дрейфа электрона равна произведению ускорения eE/m на среднее время между соударениями τ :

$$v_{\text{дрейф}} = \frac{eE}{m} \tau.$$

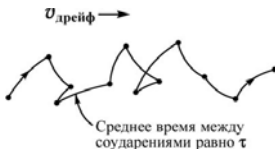


Рис. 5.9. Движение свободного электрона

Поскольку поле E считается постоянным, то и скорость $v_{\text{дрейф}}$ также постоянна. В среднем ускорение отсутствует, и сила торможения равна приложенной силе. Сила торможения равна γmv , поэтому

$$eE = \gamma m \frac{eE}{m} \tau \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{1}{\tau}.$$

Величину τ удастся определить, измеряя проводимость металла. Экспериментально обнаружено, что электрическое поле \mathbf{E} порождает в металлах ток с плотностью \mathbf{j} , пропорциональной \mathbf{E} (закон Ома):

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где σ – удельная проводимость металла.

По определению, плотность тока равна

$$j = Ne v_{\text{дрейф}},$$

тогда

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m} \tau.$$

Поэтому τ и γ связаны с электрической проводимостью. В результате можно переписать формулу для показателя преломления материала в виде

$$n^2 = 1 + \frac{\sigma/\varepsilon_0}{i\omega(1+i\omega\tau)},$$

где

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m\sigma}{Ne^2}.$$

Полученная зависимость $n(\omega)$ для показателя преломления в металлах предсказывает для распространения волн с разными частотами совершенно различные характеристики. Прежде всего, посмотрим, что получается при низких частотах. Если частота ω мала ($\omega \ll 1/\tau$, $\omega \ll \sigma/\varepsilon_0$), то n^2 можно приблизительно записать в виде

$$n^2 = -i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}.$$

Непосредственно легко проверить, что

$$\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

и в области низких частот

$$n = \sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}} (1-i).$$

Вещественная и мнимая части n имеют одну величину. С большой мнимой частью n волны в металлах затухают очень быстро. Амплитуда волны, идущей в направлении оси z , уменьшается как

$$\exp\left[-z\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\varepsilon_0c^2}}\right] = \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right),$$

где δ – это то расстояние, на котором амплитуда волны уменьшается в $e = 2,72$ раза, т.е. приблизительно в 3 раза. Амплитуда затухающей волны, как функция от z , показана на рис.5.10. Поскольку электромагнитные волны проникают в металл только на это расстояние, величина δ называется *глубиной скин-слоя* и определяется выражением

$$\delta = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0c^2}{\sigma\omega}}.$$

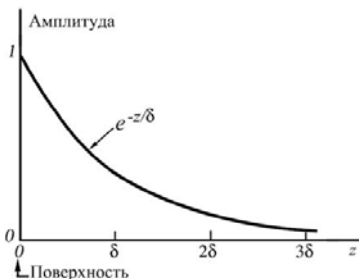


Рис. 5.10. Амплитуда поперечной электромагнитной волны в металле как функция расстояния

Полученное выражение для n применимо, только когда $\omega\tau$ много меньше единицы и когда $\omega\epsilon_0/\sigma$ также много меньше единицы:

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} \quad \text{и} \quad \omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Сделаем оценки ω для типичного металла – меди. Воспользуемся справочными данными: проводимость $\sigma = 5,76 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, молярная масса $\mu = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, плотность $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$, элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

Если на каждый атом приходится по одному свободному электрону, то число электронов в кубическом метре будет равно

$$N = \frac{\rho}{\mu} N_A = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{63,5 \cdot 10^{-3}} = 8,44 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Тогда

$$\tau = \frac{m\sigma}{Ne^2} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,76 \cdot 10^7}{8,44 \cdot 10^{28} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2} = 2,43 \cdot 10^{-14} \text{ с},$$

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} = 4,1 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1},$$

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{5,76 \cdot 10^7}{8,85 \cdot 10^{-12}} = 6,5 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}.$$

Для частот, меньших, чем приблизительно 10^{12} Гц, медь имеет «низкочастотное» поведение. (Это будут волны с длиной, большей 0,3 мм, т. е. очень короткие радиоволны!)

Для таких волн в меди глубина скин-слоя равна

$$\delta = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 c^2}{\sigma \omega}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{5,76 \cdot 10^7 \cdot \omega}} = \sqrt{\frac{0,028}{\omega}} \text{ м.}$$

Для микроволн с частотой 10^4 МГц (3-сантиметровые волны)

$$\delta = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ см,}$$

т.е. волны проникают в металл на очень малое расстояние.

Мы видим, почему серебрение или золочение катушки индуктивности колебательного контура уменьшает потери. Ведь потери происходят благодаря токам, которые ощутимы только в тонком слое, равном глубине скин-слоя.

Для очень высоких частот $\omega \tau \gg 1$ показатель преломления хорошо аппроксимируется следующим выражением:

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0 \omega^2} = 1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega^2 \tau} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2.$$

В области высоких частот $\omega > \omega_p$ величина n^2 в металлах становится чисто вещественной и меньшей единицы. Величина

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}$$

называется плазменной частотой. Эта плазменная частота является своего рода «критической».

При $\omega < \omega_p$ показатель преломления металла имеет мнимую часть, и происходит поглощение волн, но при $\omega \gg \omega_p$ показатель становится вещественным, а металл – прозрачным. Металлы в достаточной мере прозрачны для рентгеновских лучей. Но некоторые металлы прозрачны даже для ультрафиолета. В таблице приведены для некоторых металлов экспериментально наблюдаемые длины волн, при которых эти металлы начинают становиться прозрачными. Во второй графе дана вычисленная критическая длина волны $\lambda_p = 2\pi c / \omega_p$. Поскольку экспериментальная длина волны определена не очень точно, согласие с теорией почти идеальные.

Длины волн (Å), при которых металл становится

Металл	$\lambda_{\text{эксп}}$	$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$	Металл	$\lambda_{\text{эксп}}$	$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$
Li	1550	1550	K	3150	2870
Na	2100	2090	Rb	3400	3220

В данном примере проявляется универсальность явлений физики: нет разницы в том, находятся ли свободные электроны в металле, в плазме, в ионосфере Земли или в атмосфере звезд. Чтобы описать распространение радиоволн в ионосфере, можно воспользоваться тем же выражением при надлежащих значениях величин N и t . Теперь понятно, почему длинные радиоволны поглощаются или отражаются ионосферой, тогда как короткие свободно проходят через нее. (Поэтому для связи с искусственными спутниками Земли должны применяться короткие волны.)

В общем случае показатель преломления будет иметь вещественную и мнимую части и при распространении волн в металлах происходит их поглощение. Очень тонкие слои металла прозрачны даже для обычных оптических частот. Это свойство используется в специальных защитных очках для работающих около высокотемпературных печей. Очки изготавливаются напылением на стекло очень тонкого слоя золота; стекло это достаточно прозрачно для видимого света и на просвет выглядит как зеленое, но сильно поглощает инфракрасные лучи.

5.10. Излучение Вавилова – Черенкова

Излучение света может наблюдаться и при движении заряженной частицы в среде с постоянной скоростью v , но при условии, что скорость частицы превышает фазовую скорость света в этой среде.

В 1934 г. это свечение было обнаружено П.А. Черенковым, в экспериментах, выполнявшихся по инициативе С.И. Вавилова. При этом были выявлены характерные особенности излучения:

- 1) свечение наблюдается у всех чистых прозрачных жидкостей, причём его яркость мало зависит от их химического состава;
- 2) излучение имеет поляризацию с преимущественной ориентацией вектора напряженности электрического поля вдоль направления первичного пучка;
- 3) в отличие от *люминесценции*, не наблюдается ни температурного, ни примесного тушения.

На основании этих данных Вавилов сделал основополагающее утверждение, что обнаруженное явление – не люминесценция, свет же излучают движущиеся в жидкости быстрые электроны, образующиеся при облучении вещества. Излучение Вавилова – Черенкова характерно не только для жидкостей, но и для твердых тел и газов.

Условие возникновения излучения Вавилова – Черенкова и его направленность могут быть пояснены с помощью принципа

Гюйгенса. Каждую точку (A, B, C, D, E на рис. 5.11, 5.12) траектории заряженной частицы следует считать источником волны, возникающей в момент прохождения через нее частицы. В оптически изотропной среде такие парциальные волны будут сферическими, распространяющимися со скоростью $u = c/n$, где n – показатель преломления среды.

Допустим, что частица, двигаясь равномерно и прямолинейно со скоростью v , в момент наблюдения находилась в точке E . За время t до этого она проходила через точку A ($AE = vt$). Волна, испущенная из A , к моменту наблюдения представится сферой радиусом $R = ut$; на рис. 5.11, 5.12 ей соответствует окружность 1, а волнам, испущенным из B, C, D , – окружности 2, 3, 4. По принципу Гюйгенса в результате интерференции парциальные волны гасят друг друга всюду, за исключением их общей огибающей, которой соответствует волновая поверхность света, распространяющегося в среде.

Пусть $v < u$ (рис. 5.11), тогда световые волны будут обгонять частицу на тем большее расстояние, чем раньше они испущены. Общей огибающей парциальные волны при этом не имеют – все окружности 1, 2, 3, 4 лежат одна внутри другой; следовательно, электрический заряд при равномерном и прямолинейном движении со скоростью $v < u$ свет не излучает.

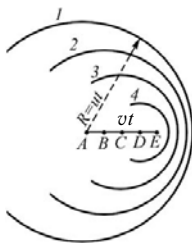


Рис. 5.11. Движение заряженной частицы в среде со скоростью $v < u$. Сферы 1, 2, 3, 4 – положение парциальных волн, испущенных частицей из точек A, B, C, D соответственно

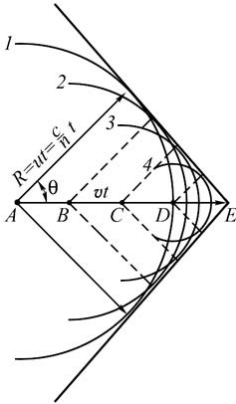


Рис.5.12. Движение заряженной частицы в среде со скоростью $v > u$. Угол между направлениями волнового вектора возникающего излучения и скоростью частицы равен θ

Если же частица движется быстрее, чем распространяются световые волны, т.е. при

$$v > u = c/n \quad \text{или} \quad \beta n > 1$$

(где $\beta = v/c$), то соответствующие волнам сферы пересекаются (рис. 5.12), их общая огибающая (волновая поверхность) представляет собой конус с вершиной в точке E, совпадающей с мгновенным положением частицы, а нормали к образующим конуса определяют волновые векторы, т.е. направления распространения света. Угол θ , который составляет волновой вектор с направлением движения частицы, удовлетворяет отношению

$$\cos \theta = u/v = c/nv = 1/\beta n.$$

Такой же метод рассмотрения можно провести и для оптически анизотропной среды (в частности, для прозрачных кристаллов), в которой парциальные волны не являются сферами. В этом случае обыкновенному и необыкновенному лучам будут соответствовать разные конусы и излучение будет возникать под разными углами θ к направлению распространения частицы, согласно соотношению $\cos \theta = u/v$.

Расчет показывает, что в оптически изотропной среде частица с зарядом e , прошедшая расстояние в 1 см со скоростью $v > u$, излучает энергию, равную потоку вектора Умова – Пойнтинга через боковую поверхность цилиндра радиуса r , осью которого служит траектория заряда:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{v} \frac{dU}{dt} = \frac{cr}{2v} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\alpha} E_z dz = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n(\omega) > 1} \omega \left[1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \right] d\omega$$

($\omega = 2\pi c/\lambda$ – круговая частота света; λ – длина волны излучаемого света в вакууме). Подынтегральное выражение отражает распределение энергии в спектре излучения Вавилова – Черенкова.

В жидкостях и твердых веществах условие $\beta n > 1$ начинает выполняться для электронов уже при энергиях $\approx 10^5$ эВ, для протонов, масса которых примерно в 2000 раз больше электронной, – при энергиях $\approx 10^8$ эВ. На основе излучения Вавилова – Черенкова разработаны широко применяемые экспериментальные методы для регистрации частиц высоких энергий, измерения их скорости. Приборы, применяемые для этой цели, называют черенковскими счетчиками. Эти методы позволяют также рассчитывать массу частиц (что, например, было использовано при открытии антипротона).

Можно полагать, что всякая система частиц, способная взаимодействовать с электромагнитным полем, будет излучать свет за счет своей кинетической энергии, если ее скорость превышает фазовую скорость света.

Основные выводы

Плоская электромагнитная волна, попадая на поверхность проводника, индуцирует в нем поверхностный ток, благодаря которому происходит отражение падающей волны.

Если электромагнитная волна с частотой ω проникает в диэлектрик, то внешние электроны атомов колеблются с той же частотой и испускают вторичные электромагнитные волны, сдвинутые по фазе на 90° относительно падающей волны. Вследствие этого скорость волны в веществе u оказывается меньше, чем c . Показатель преломления определяется как $n \equiv c/u$ и в непроводящей среде (не слишком плотной) дается выражением

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

где ω_0 – частота собственных колебаний атома. Увеличение n с ростом частоты ω называется нормальной дисперсией. Волновой пакет распространяется с эффективной скоростью

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad \text{где } k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

называемой групповой. В среде, обладающей дисперсией, пос-

кольку n зависит от ω , v_g отличается от u . Групповая скорость v_g остается меньше c даже в том случае, когда $u > c$.

Ширина спектральной линии излучения атома $\Delta\omega$ связана со средним временем жизни возбужденного состояния атома τ :

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau}.$$

Показатель преломления в плотном материале (диэлектрике) определяется формулой Клаузиуса – Моссооти

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha,$$

где α – атомная поляризуемость,

$$\alpha = \frac{e^2 / (m\epsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

величина γ – диссипативная постоянная, определяет наличие тормозящей силы $m\gamma v$ в атомном осцилляторе, пропорциональной скорости электрона.

В общем случае показатель преломления вещества с учетом затухания – комплексная величина

$$n = n_R - in_I.$$

Волна в таком материале поглощается и амплитуда колебаний экспоненциально убывает с глубиной проникновения z :

$$E_0 e^{-\alpha n_I z / c}.$$

В хорошо проводящих металлах

$$n^2 = 1 + \frac{\sigma / \epsilon_0}{i\omega(1 + i\omega\tau)},$$

где τ – среднее время жизни между двумя столкновениями электрона проводимости.

Величина τ определяется через диссипативную постоянную γ и может быть вычислена по удельной проводимости металла σ :

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m\sigma}{Ne^2}.$$

В случае низких частот ($\omega \ll 1/\tau$, $\omega \ll \sigma/\epsilon_0$) для металлов

$$n = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0\omega}}(1 - i).$$

Расстояние проникновения электромагнитной волны в металл

– глубина скин-слоя

$$\delta = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 c^2}{\sigma \omega}}.$$

В области высоких частот ($\omega > \omega_p$)

$$n^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$$

здесь ω_p – плазменная частота,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}.$$

При $\omega \gg \omega_p$ показатель преломления становится вещественным, а металл прозрачным.

Отдельный точечный заряд q , движущийся с ускорением $a(t)$, испускает электромагнитную волну

$$E = -k_0 \frac{q}{c^2 r} a \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta.$$

Заряд e , равномерно двигающийся в среде со скоростью v , которая превышает фазовую скорость света в среде ($\beta n > 1$, $\beta = v/c$), также излучает энергию на единицу пути длины

$$\frac{dU}{dz} = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n(\omega) > 1} \omega \left[1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \right] d\omega.$$

Приложение 1. Метод фазовых диаграмм

Рассмотрим метод суммирования двух или нескольких монохроматических волн, имеющих одинаковые частоты и сдвинутых по фазе друг относительно друга. Результирующая волна

$$S(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

также представляет собой монохроматическую волну, имеющую ту же частоту ω :

$$S(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_s).$$

Запишем величины S_0 и φ_s через A_1 , A_2 , φ_1 и φ_2 .

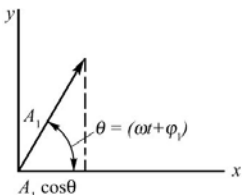


Рис. 5.13. Проекция вращающегося вектора A_1 на ось x представляет собой одну из двух монохроматических волн, которые образуют сумму S

Как видно из рис. 5.13, проекция вектора A_1 на ось x равна $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, т.е. первой из двух волн. Вектор длиной A_1 составляет угол $\theta = \omega t - \varphi_1$ с осью x . С увеличением времени t вектор вращается против часовой стрелки, но в любом случае его проекция на ось x равна $A_1 \cos \theta$. Построим теперь второй вектор длиной A_2 под углом $\theta_2 = \omega t + \varphi_2$. Угол между вторым и первым векторами всегда равен $\varphi_2 - \varphi_1$.

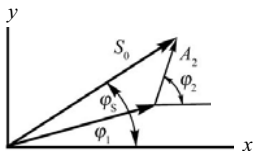


Рис. 5.14. Векторная сумма $S = A_1 + A_2$, определяемая длиной S_0 и углом φ_s

Таким образом, у нас имеется сумма двух проекций на ось x . Чтобы найти решение, заметим, что сумма проекций на ось x равна проекции на эту ось вектора суммы. Длина этого вектора $A_1 + A_2$ определяет амплитуду S_0 результирующей монохроматической волны (рис. 5.14):

$$S_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Угол φ_s между S и осью x будет определяться из условия

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Приложение 2. Волновые пакеты и групповая скорость

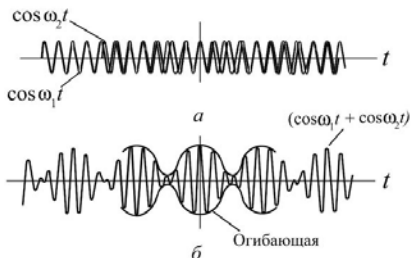
Рассмотрим результат сложения монохроматических волн с различными, но близкими частотами. С течением времени волны с разными частотами будут все больше «разбегаться» по фазе друг относительно друга. Пусть имеется две одинаковые по амплитуде монохроматические волны, частота одной из которых ω_1 , а другой ω_2 (рис.4.15). Обозначим $\bar{\omega} \equiv (\omega_1 + \omega_2)/2$ и

$\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)/2$. Тогда сумма

$$S(t) = \cos(\bar{\omega} + \Delta\omega)t + \cos(\bar{\omega} - \Delta\omega)t = 2 \cos(\Delta\omega t) \cos \bar{\omega}t = A(t) \cos \bar{\omega}t,$$

где $A(t) = 2\cos(\Delta\omega t)$ – огибающая, или функция модуляции (плавная кривая на рис.4.15). В данном случае огибающей является монохроматическая волна с меньшей частотой.

Рис. 5.15. Две монохроматические волны с несколькими различными частотами, находившиеся в фазе в начале координат, по мере того как они удаляются от начала координат, оказываются последовательно то в противофазе, то снова в фазе (а); сумма двух монохроматических волн (б)



Складывая большое число монохроматических волн с несколькими различными частотами, можно получить функцию модуляции любой формы. В качестве примера рассмотрим отдельный импульс, который играет важную роль в волновых процессах. Такой импульс выглядит наподобие центрального всплеска на рис. 5.15, б и называется волновым пакетом. С помощью набора близких по частоте монохроматических волн удается построить любой волновой пакет. Можно подавить соседние всплески колебаний (рис. 5.15, б), добавив третью монохроматическую волну с частотой $\bar{\omega}$ и амплитудой, равной высоте всплеска (отметим, что $A(t)$ меняет знак у чередующихся всплесков). Такая монохроматическая волна добавится к центральному всплеску и окажется сдвинутой по фазе на 180° в области соседних всплесков (рис.5.16). Функция $G(\omega)$ характеризует относительные интенсивности трех суммируемых монохроматических волн. Чтобы подавить следующий набор всплесков, можно добавить две монохроматические волны $\cos(\bar{\omega} + \Delta\omega/2)t$ и $\cos(\bar{\omega} - \Delta\omega/2)t$ с соответствующими амплитудами, как показано на рис. 5.17. Добавление еще двух монохроматических волн вряд ли повлияет на центральный всплеск, но их сумма будет сдвинута по фазе на 180° относительно следующих всплесков.

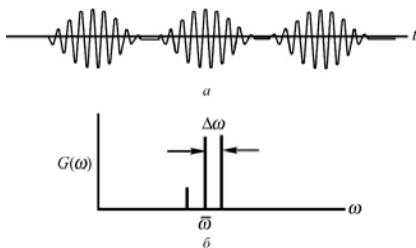


Рис. 5.16. Сумма трех монохроматических волн (а); относительное распределение амплитуд (б)

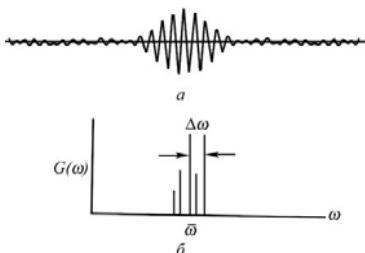


Рис. 5.17. Сумма пяти монохроматических волн (а); относительное распределение амплитуд (б)

В действительности для формирования отдельного волнового пакета, не сопровождающегося дополнительными всплесками, следует складывать бесконечное число монохроматических волн с близкими частотами. Соответствующая ситуация представлена на рис. 5.18, где функция $G(\omega)$ характеризует относительные амплитуды отдельных монохроматических компонент. Такая функция $G(\omega)$ называется гауссовой и записывается в виде

$$G(\omega) = e^{-(\omega - \bar{\omega})^2 / 2(\Delta\omega)^2},$$

где $\Delta\omega$ – среднеквадратичное (или стандартное) отклонение величины ω относительно $\bar{\omega}$. Мы будем называть $\Delta\omega$ разбросом частот. Чтобы найти сумму бесконечного числа монохроматических волн, вычислим интеграл

$$\int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

используя табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-(\omega - \bar{\omega})^2 / 2(\Delta\omega)^2} \cos(\omega t) d\omega = \sqrt{2\Delta\omega} e^{-(t^2 / 2)(\Delta\omega)^2} \cos \bar{\omega} t.$$

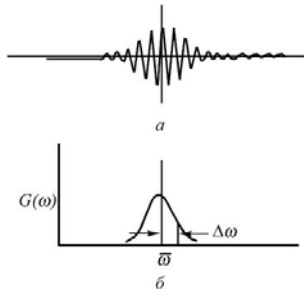


Рис. 5.18. Сумма бесконечного числа монохроматических волн (а); относительное распределение амплитуд (б); $G(\omega)$ – гауссова функция со средним значением, равным $\bar{\omega}$, и среднеквадратичным отклонением $\Delta\omega$

В правой части этого равенства записана монохроматическая волна $\cos \bar{\omega} t$, промодулированная гауссовой огибающей $e^{-(t^2/2)(\Delta\omega)^2}$.

Среднеквадратичное отклонение для этой функции равно

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta\omega}$$

и называется шириной волнового пакета.

Таким образом, разброс частот монохроматических компонентов в точности равен обратной величине ширины волнового пакета. Функция $G(\omega)$ называется фурье-образом волнового пакета.

Аналогично можно просуммировать бегущие волны с различными частотами. Оказывается, что скорость распространения огибающей может значительно отличаться от скорости волны, с которой распространяются монохроматические компоненты, а скорость перемещения волнового пакета как целого может существенно отличаться от скорости распространения входящих в его состав монохроматических волн. Скорость волнового пакета или огибающей называется групповой скоростью. Рассмотрим две монохроматические волны с близкими частотами и длинами волн. Суперпозиция двух бегущих волн

$$y(x, t) = \cos[(\bar{\omega} + \Delta\omega)t - (\bar{k} + \Delta k)x] + \cos[(\bar{\omega} - \Delta\omega)t - (\bar{k} - \Delta k)x].$$

где $\bar{k} = 2\pi/\lambda$ – среднее волновое число.

Применяя тригонометрическую формулу сложения для косинусов, получаем

$$y(x, t) = 2 \cos[(\Delta\omega)t - (\Delta k)x] \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}x).$$

Огибающая записывается в виде $A(x, t) = 2 \cos[(\Delta\omega)t - (\Delta k)x]$. Она

имеет максимум при

$$(\Delta\omega)t - (\Delta k)x = 0,$$

т.е. при

$$\frac{x}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Эта величина представляет собой скорость перемещения горба гигающей: именно так определяется групповая скорость.

Для набора монохроматических волн с близкими частотами, в котором ω является функцией k : $\omega = \omega(k)$, групповая скорость определяется следующим образом:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Характерный пример распространения с групповой скоростью – это прохождение света через диэлектрик (п. 5.6). Другое важное применение понятия групповой скорости связано с квантовой механикой, где частицам сопоставляются волновые пакеты. Скорость частицы совпадает с групповой скоростью волнового пакета, а не со скоростями отдельных компонент; эти скорости обычно сильно различаются.

Упражнения

1. Космический корабль массой $m = 1$ т приводится в движение с помощью пучка света. Насколько увеличится скорость Δv корабля после работы двигателя в течение суток, если мощность пучка $W = 10$ кВт (влиянием гравитационных сил можно пренебречь)? Ответ: $\Delta v = Wt/(mc) = 2,88 \cdot 10^{-3}$ м/с.

2. Космический корабль можно заставить двигаться с помощью давления солнечных лучей. Предположим, что для этого на корабле имеется парус, изготовленный из алюминированного майлара плотностью $\rho_m = 2$ г/см³ и коэффициентом отражения $\rho \approx 1$. Если поток солнечного излучения, падающего на Землю, составляет $S_e = 1,35$ кВт/м², то какую толщину d должен иметь парус, чтобы сила светового давления уравновесила силу гравитационного притяжения Солнца? Масса Солнца $M = 1,98 \cdot 10^{30}$ кг, расстояние от Солнца до Земли $R = 1,49 \cdot 10^{11}$ м, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг·с²). Ответ: $d = S_e R^2 (1 + \rho) / (GM\rho_m c) = 0,75$ мкм.

3. Падающий на Землю солнечный свет обеспечивает $S_e = 1,35$ кВт/м². Чему равны соответствующие среднеквадратичные значения E и B ? Ответ: $E = (8\pi k_0 S_e / c)^{1/2} = 1009$ В/м; $B = E/c = 3,36$ мкТл.

4. Максимальное значение магнитного поля, создаваемого колеб-

- лющимся диполем на расстоянии 1 км, равно 10^{-15} Тл. Найдите:
- максимальное значение электрического поля,
 - максимальное значение вектора Пойнтинга,
 - среднюю мощность, излучаемую диполем.
5. Свободный электрон находится в переменном электрическом поле, амплитуда которого равна 0,1 В/м. Чему равна амплитуда колебаний электрона при $\nu_1 = 1$ кГц и при $\nu_2 = 100$ МГц?
6. В упражнении 5 вычислите соответствующие скорости электрона.
7. Чему равен угол ϕ в градусах на рис. 5.5, б?
8. Чему равен показатель преломления воздуха для ИК-излучения с $\lambda = 2$ мкм в задаче п. 5.5.
9. Предположим, что молекулы воздуха при действии на них света с частотами ν_1 и ν_2 начинают колебаться, причем молекулы приобретают дипольный момент $p = p_0(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t)$. Если ν_2 соответствует голубому свету, а ν_1 – красному, то каково отношение соответствующих энергий излучаемого света? Дайте численный ответ.
10. Найдите показатель преломления алюминия для рентгеновских лучей с длиной волны $1,56 \cdot 10^{-8}$ см, предполагая, что электроны в алюминии имеют собственную частоту много меньшую, чем частота рентгеновских лучей.
11. Показатель преломления ионосферы для радиоволн с частотой $\nu = 10^8$ Гц равен $n = 0,90$. Определите плотность электронов N в 1 см^3 ионосферы. Ответ: $N = 2(1 - n)\pi\nu^2 m / (k_0 e^2) = 2,48 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3} = 2,48 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$.
12. Электрическое поле E световых волн, проходящих через среду с показателем преломления n , равно $E_0 e^{i\omega(t-nz/c)}$.
- а) Покажите, что если $n = n' - in''$, то

$$E = E_0 e^{-n''\omega z/c} e^{i\omega(t-n'z/c)}.$$

- б) Используя выражение $n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left(\frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \right)$, найдите

ту область, в которой ослабляется интенсивность пучка излучения, частота которого в точности равна собственной частоте ω_0 атома.

13. Известно, что мгновенная плотность энергии потока волн равна $S = \epsilon_0 c E^2$ Вт/м².

- 1) Найдите полную энергию, излучаемую в единицу времени электроном, осциллирующим с амплитудой y_0 и угловой частотой ω .

- 2) Сравните энергию, излучаемую за одно колебание, с запасенной энергией $m\omega^2 y_0^2 / 2$ и найдите константу затухания γ_R . Этот процесс называется *радиационным затуханием*.
- 3) Возбужденный атом испускает фотоны с определенной длиной волны λ . Рассчитайте ожидаемое уширение $\Delta\lambda$ спектральной линии, если оно возникает исключительно из-за радиационного затухания. (Рассматривайте атом как крошечный осциллятор, обладающий затуханием.)

Задачи

1. На космическом корабле массой 1 т установлен парус из алюминированного майлара площадью $100 \times 100 \text{ м}^2$ и коэффициентом отражения $\rho \approx 1$. Парус может ориентироваться в любом направлении. Космический корабль первоначально движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом 10^5 км . Поток мощности солнечного излучения равен $1,35 \text{ кВт/м}^2$.

- 1) Какой примерно выигрыш в энергии за один оборот космического корабля можно было бы получить за счет светового давления?
- 2) Сколько приблизительно времени понадобится космическому кораблю, чтобы добраться от Земли до Луны только за счет светового давления, создаваемого Солнцем? Влияние гравитационных сил не учитывать.
2. Допустим, что плохо проводящая пластинка на рис. 5.2 имеет удельное сопротивление ρ . На какой толщине пластинки поле падающей волны $E_{\text{пад}}$ уменьшится вдвое? Запишите ответ через ρ , ϵ_0 и c (плохая проводимость означает, что эта толщина эквивалентна большому числу длин волн).

3. Все излучение от дуговой лампы мощностью 1 кВт собирается в пучок кругового сечения радиусом 10 см.

- 1) Если пучок направить на зеркало, то с какой силой он будет давить на зеркало?
- 2) Чему равен индуцированный поверхностный ток I_s (в А/м)?
- 3) Какова плотность энергии в пучке (в Дж/м³)?

4. Частица массой m колеблется под действием внешней силы $F_0 \cos \omega t$ вдоль оси y .

- 1) Найдите зависимость y от t .
- 2) Запишите выражение для амплитуды в зависимости от F_0 , ω и m .

5. На частицу массой m действует результирующая сила

$$F_{\text{рез}} = -ky + F_{\text{внеш}}.$$

- 1) Определите зависимость y от t , если $F_{\text{внеш}} = F_0 \sin \omega t$.
- 2) Определите зависимость y от t , если $F_{\text{внеш}} = F_0 \cos \omega t$.
- 3) Какова частота собственных колебаний ω_0 в отсутствие внешней силы $F_{\text{внеш}}$?
- 4) Если частота вынуждающей силы ω больше ω_0 , будет ли внешняя сила в фазе или противофазе относительно смещения?
6. Каков в примере в п.5.6 сдвиг Δt во времени прихода сигнала при перестройке приемника с частоты $\nu_1 = 150$ МГц на частоту $\nu_2 = 160$ МГц?

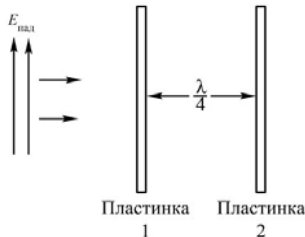
Ответ: $\Delta t = (D/c) \cdot [k_0 N e^2 / (2\pi m)] \cdot [(1/\nu_1)^2 - (1/\nu_2)^2] = 0,258$ с.

7. Предположим, что в примере в п. 4.6 расстояние до пульсара известно и составляет $D/c = 1500$ световых лет. Какой должна быть средняя плотность электронов N в межзвездном пространстве, чтобы получился наблюдаемый сдвиг во времени Δt ?

Ответ: $N = (c/D) \cdot [2\pi m \Delta t / (k_0 e^2)] \cdot (\nu_1 \nu_2)^2 / (\nu_2^2 - \nu_1^2) = 2,8 \cdot 10^4 \text{ м}^{-3}$.

8. Предположим, что электрон проводимости находится в электрическом поле $E = E_0 \cos \omega t$, где $E_0 = 100$ В/м и $\nu = 100$ Гц. Какова амплитуда f_0 его колебаний?

9. Электромагнитная волна $E_{\text{пад}}$ падает на тонкую, плохо проводящую пластинку, которая излучает поле $\Delta E = -0,01 E_{\text{пад}}$. В этом случае амплитуда прошедшей волны равна $(1 - 0,01) E_{\text{пад}}$, а амплитуда отраженной $0,01 E_{\text{пад}}$. Рассмотрим две такие пластинки, расположенные на расстоянии $\lambda/4$ друг от друга (см. рисунок). Какими в этом случае будут результирующие прошедшая и отраженная волны? Заметим, что, когда отраженная от пластинки 2 волна достигает пластинки 1, ее фаза будет отличаться на 180° от фазы отраженной волны, покидающей пластинку 1.



10. Какова скорость электрона в задаче 8?

11. Рассмотрим классическую модель атома водорода, согласно которой электрон движется по круговой орбите радиусом $R = = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м. Сумма кинетической и потенциальной энергий электрона

$$E = \bar{K} + \bar{U} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2R} = -13,6 \text{ эВ}.$$

1) Какая энергия излучается за один оборот? Дайте численный ответ в электрон-вольтах.

Получите следующие равенства ($k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0)$):

- 2) $dE/dt = -(2/3)(k_0^3 e^6)/(m^2 c^3 R^4)$,
 3) $dE/dR = k_0 e^2 / 2R^2$ и $dR/dt = -(4/3)(k_0^2 e^4)/(m^2 c^3 R^2)$.
 4) Когда электрон достигает $R = 10^{-15}$ м, он падает на протон. Сколько ему для этого понадобится времени, иными словами, каково «время жизни» классического атома водорода? Воспользуйтесь соотношением

$$t = \int_{R_1}^{R_2} (dt/dR) dR.$$

12. Чему равна в примере в п. 5.6 разность $c - v_g$ для частоты $\nu = 150$ МГц.

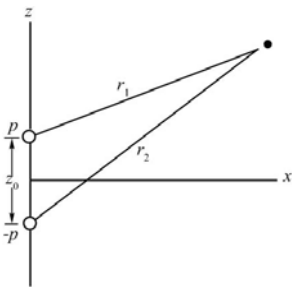
Ответ: $c - v_g = c/[1 + 8\pi^3 \nu^2 m/(k_0 N e^2)] = 4 \cdot 10^{-4}$ м/с.

13. Покажите, что для электромагнитного излучения, распространяющегося в ионизированной среде,

$$uv_g = c^2 \left[1 - \left(\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m \omega^2} \right)^2 \right]^{-1} \approx c^2.$$

14. Используя метод фазовых диаграмм, покажите, что

$$\sin \omega t + \sin(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t + 2\varphi) = (1 + 2\cos \varphi) \sin(\omega t + \varphi).$$



15. Квадрупольный излучатель можно представить как два диполя p , расположенных на расстоянии z_0 друг от друга (см. рисунок), при условии, что $z_0 \ll \lambda$. Диполи излучают в противофазе. Если верхний диполь колеблется по закону $p = p_0 \cos \omega t$, то его поле излучения

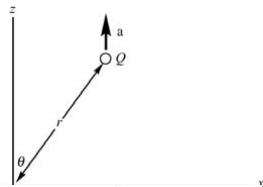
$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_0 \omega^2}{c^2 r} \sin \theta \cos \left(t - \frac{r_1}{c} \right).$$

В случае нижнего диполя

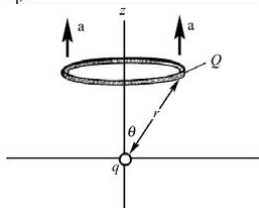
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_0 \omega^2}{c^2 r} \sin \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r_2}{c} \right) - \pi \right].$$

Какой вид имеет результирующее поле излучения обоих диполей? Запишите результат через ω , c , r , θ и квадрупольный момент $Q_0 = p_0 z_0$. (Указание: $k(r_2 - r_1) \approx kz_0 \cos \theta$.)

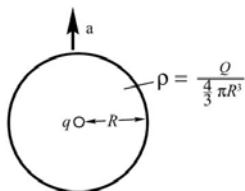
16. Заряд Q движется с ускорением a вдоль оси z . В нештрихованной системе заряд q находится в точке, показанной на рисунке для $t = 0$. Какова величина и направление действующей на заряд q силы, обусловленной полем излучения заряда Q ?



17. Повторите решение задачи 16 для случая, когда заряд Q распределен по кольцу радиусом $R = r \sin \theta$.



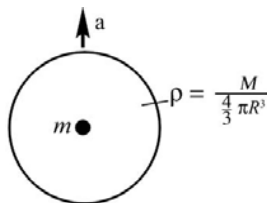
18. Повторите решение задачи 16 для случая равномерного распределения заряда Q внутри шара радиусом R .

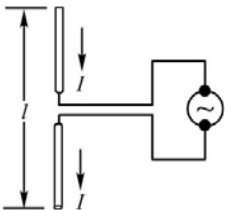


19. Повторите решение задачи 16 для случая малой массы m и однородного шара массой M . Предположим, что гравитационная сила пропорциональна a/r по тем же соображениям, что и электрическая сила. Покажите, что результирующая сила, действующая на m , записывается в виде

$$F = ma \cdot [(4\pi/3)G\langle\rho\rangle(R/c)^2].$$

(Замечание. Для нашей Вселенной множитель $(4\pi/3)G\langle\rho\rangle(R/c)^2$ может оказаться близким единице (в этом случае R — радиус, а $\langle\rho\rangle$ — средняя плотность Вселенной). При этом мы получим $F = ma!$ Это объяснение инертной массы носит название принципа Маха.)





20. Дипольная антенна длиной l ($l \ll \lambda$) подсоединена к генератору переменного тока. Генератор подводит заряд $q = q_0 \cos \omega t$. В этом случае ток в максимуме $I_0 = \omega q_0$. Предположим, что заряды колеблются между краями диполя. В этом случае $p_0 = q_0 l$.

1) Покажите, что поле излучения

$$E = -\frac{l\omega I_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta.$$

2) Используя соотношение $W = I^2 R$, покажите, что эффективное сопротивление на выходе генератора равно $R = (2/3)(c/4\pi\epsilon_0)(kl)^2 = (kl)^2 = 20$ Ом, где k – волновое число. (В случае $l = \lambda/2$ заряд q_0 перемещается в среднем на расстояние $\langle l \rangle = 0,61 \cdot \lambda/2$. Таким образом, полуволновая дипольная антенна имеет $R = 72$ Ом.)

21. Покажите, что если уравнение движения заряженного осциллятора имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x - \frac{2e^2}{3c^3 4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d^3 x}{dt^3} = F(t),$$

то член, содержащий третью производную, правильно описывает скорость уменьшения энергии при излучении (сопротивление излучения) для любой частоты.

Примечание. Пусть $F(t) = A \cos \omega t$. Найдите количество энергии, излучаемой осциллятором.

22. Пучок света проходит через область, содержащую N рассеивающих центров в единице объема. Сечение рассеяния света на каждом из них равно σ . Покажите, что интенсивность света в зависимости от пройденного расстояния x описывается формулой $I = I_0 e^{-N\sigma x}$.

23. Используя выражение для сечения рассеяния

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2 \cdot 4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^2$$

и выведенную формулу для показателя преломления газа n , покажите, что величина $N\sigma$ может быть записана в виде

$$N\sigma = \frac{2}{3\pi} \frac{(n-1)^2}{N} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4,$$

где N – число рассеивающих центров в единице объема.
(Таким способом было вычислено впервые число Авогадро при

изучении рассеяния света, $N = \frac{\rho}{\mu} N_A$ – число рассеивающих центров в единице объема.)

24. Какая часть излучения Солнца, испускаемого в голубой области спектра ($\lambda = 4500 \text{ \AA}$), проходит через атмосферу и достигает поверхности Земли, когда Солнце находится: а) в зените? б) под углом 10° к горизонту?

25. Открыты новые лучи (названные X-лучами, ибо они обладают неизвестными, но удивительными свойствами) и высказано предположение, что это подобно свету поперечные волны. Затем было замечено, что электроны вещества рассеивают эти лучи. Как можно доказать, что они действительно поперечны? Можно ли их поляризовать?

26. Внутренняя корона Солнца (называемая K-короной) представляет собственно солнечный свет, рассеянный свободными электронами. Кажущаяся яркость этой K-короны на расстоянии одного солнечного радиуса от солнечного диска составляет около 10^{-8} от яркости самого диска (на единицу площади). Вычислите число свободных электронов в 1 см^3 пространства вблизи Солнца.

27. Покажите, что величина $(\epsilon_0 c)^{-1}$ имеет размерность сопротивления, и оцените ее численно.

28. Межзвездное пространство заполнено облаками из крошечных пылинок, состоящих из углерода, льда и очень малого количества других элементов. Какова должна быть минимальная масса таких пылинок, отнесенная к единице площади (1 г/см^2), способная ухудшить наши наблюдения за звездами, скажем, в 100 раз (т. е. на 0,5 звездной величины). Не забудьте, что свет от звезд может не только рассеиваться на пылинках, но и просто поглощаться ими.

29. Короткий прямой кусок медной проволоки, помещенный в поток электромагнитных волн, действует как радарная система, рассеивающая волны. Электрическое поле падающей волны взаимодействует с движущимися электронами в проволоке, в результате чего происходит рассеяние. Если рассматривать достаточно короткий кусок проволоки (длина которого много меньше λ), то можно предположить, что среднее смещение электронов в нем вдоль оси пропорционально компоненте E_{\parallel} электрического поля волны, параллельной проволоке. Таким образом, если в проволоке имеется N электронов, а d – их среднее

смещение, то $d = \chi E_{\parallel}$. Нам нужно знать (в зависимости от χ и N):

а) чему равно максимальное сечение рассеяния проволоки?

б) как зависит сечение рассеяния от ориентации проволоки?

30. Покажите, что в веществе, состоящем из неполярных частиц, квадрат показателя преломления при низких частотах равен диэлектрической проницаемости.

31. На частоте примерно 6 МГц ионосфера становится прозрачной. В рамках модели свободных электронов оцените плотность электронов в ионосфере.

32. К металлу в течение долгого времени приложено постоянное электрическое поле, а затем оно мгновенно выключается. Используя модель свободных электронов, покажите, что время релаксации (т.е. время, в течение которого дрейфовая скорость электронов падает в e^{-1} раз) равно 2τ , где τ – среднее время между столкновениями.

33. Внутри металла существуют решения уравнений Максвелла, имеющие вид плоских волн: $E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$, где k – комплексное число.

Для низких частот
$$k = (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2 \varepsilon_0 c^2}}.$$

1) Напишите выражение для магнитного поля такой волны.

2) Какой угол образуют векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} для произвольного z ?

3) Какова разность фаз векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} ?

(Если момент времени t_1 соответствует максимальной величине \mathbf{E} , а t_2 максимальной величине \mathbf{B} , то разность фаз определяется как $\pm \omega(t_1 - t_2)$.)

34. При выводе выражения $n^2 = 1 - (\omega_p/\omega)^2$ предполагалось, что в металле переход от вещественных значений n^2 к мнимым в ультрафиолетовой области очень резкий. На опыте же столь резкого перехода не наблюдается. Покажите, что с помощью более удачной аппроксимации n^2 теорию можно согласовать с экспериментом.

6. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА. РАДИОСВЯЗЬ

6.1. Линейные цепи переменного тока. Низкие частоты

В предыдущих главах были рассмотрены уравнения Максвелла и обсуждались следствия из этих уравнений. Уравнения Максвелла содержат объяснения электро- и магнитостатических, электродинамических явлений, в том числе и электромагнитных волн. Но важные технические применения имеют решения уравнений Максвелла, когда электрические и магнитные поля оказываются замкнутыми в некоторых объемах или элементах электрических цепей – электрических емкостях или конденсаторах, катушках индуктивностей, сопротивлениях. Начнем со свойств линейных электрических цепей при низких частотах, когда к уравнениям Максвелла применимо почти статическое приближение, а затем рассмотрим цепи, в которых преобладают высокочастотные эффекты. Высокочастотные устройства активно используются при радиосвязи и в телевизионном вещании.

Пусть электрическая цепь состоит из последовательно соединенных генератора переменного тока $\mathcal{E}(t)$, емкости C , индуктивности L и сопротивления R . ЭДС генератора меняется по закону $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, соответственно по гармоническим законам изменяются токи $I = I_0 \cos(\omega t + \gamma)$ и напряжения $V = V_0 \cos(\omega t + \beta)$ в цепи. Удобнее ввести в рассмотрение комплексные числа и представить \mathcal{E} , I , V в виде $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$, $V = V_0 e^{i\omega t}$, $I = I_0 e^{i\omega t}$, где \mathcal{E}_0 , V_0 , I_0 – также комплексные числа. Естественно, физический смысл имеют действительные части этих комплексных чисел, которые всегда можно найти, воспользовавшись соотношением $Z + Z^* = 2a$, $Z - Z^* = 2ib$, где $Z = a + ib$ – комплексное число; a – его действительная; b – мнимая части; $Z^* = a - ib$ – комплексно сопряженное число, и, кроме того, применяя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, можно представить комплексное число в показательной форме: $Z = |Z| \cdot e^{i\varphi}$, $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$.

Удобство введения комплексных величин связано с тем, что в этом случае дифференцирование по времени сведется к умножению

$$\frac{dI}{dt} = i\omega I_0 e^{i\omega t} = i\omega I,$$

а интегрирование – к делению

$$\int I dt = \frac{1}{i\omega} I_0 e^{i\omega t} = \frac{I}{i\omega},$$

и в то же время мы избавляемся от сложных тригонометрических преобразований.

Вычислим ток для цепи, содержащей только конденсатор. Мгновенное значение напряжения равно $V = q/C$, и можно записать

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{I}{C}.$$

В случае переменного напряжения $V = V_0 e^{i\omega t}$ получим

$$\frac{I}{C} = i\omega V_0 e^{i\omega t}.$$

Откуда, учитывая, что $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, получим

$$I = i\omega C V_0 e^{i\omega t} = \omega C V_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} = I_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Ток в конденсаторе опережает по фазе напряжение на емкости на 90° и достигает максимального значения на четверть периода раньше, чем напряжение (рис. 6.1).

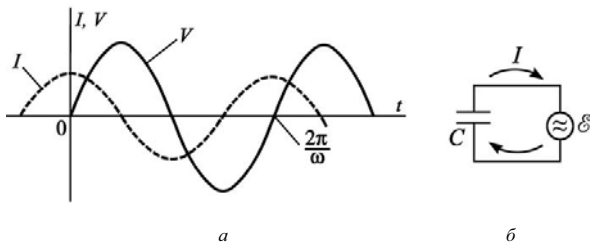


Рис. 6.1. Графики тока и напряжения в конденсаторе (а). Ток опережает напряжение по фазе на угол 90° в цепи, содержащей только емкость (б)

Между амплитудами тока и напряжения существует соотношение

$$I_0 = V_0 \omega C.$$

Коэффициент пропорциональности

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

называется емкостным сопротивлением и определяет реактивное емкостное сопротивление цепи. Емкостное сопротивление играет в цепях переменного тока ту же роль, что и активное сопротивление R в цепях постоянного тока. Однако на сопротивлении X_C не происходит потери энергии.

Вычислим ток через конденсатор $C = 1$ мкФ, к которому приложено напряжение амплитудой $V_0 = 100$ В при частотах $\nu_1 = 50$ Гц, $\nu_2 = 1$ кГц и $\nu_3 = 1$ МГц. Поскольку $\omega = 2\pi\nu$, имеем $I_0 = 2\pi\nu \cdot CV_0$. Амплитудные токи соответственно равны

$$I_{01} = 31,4 \text{ мА}, \quad I_{02} = 0,629 \text{ А}, \quad I_{03} = 629 \text{ А}.$$

Если цепь состоит только из катушки индуктивности L , то

$$V = L \frac{dI}{dt}.$$

При напряжении $V = V_0 e^{i\omega t}$ получаем

$$I = \frac{V_0}{L} \int e^{i\omega t} dt = \frac{V_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = -i \frac{V_0}{\omega L} e^{i\omega t} = \frac{V_0}{\omega L} e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

– в цепи с индуктивностью ток отстает от приложенного напряжения по фазе на 90° . Поскольку $I = \frac{V_0}{\omega L}$, индуктивное сопротивление равно $X_L = \omega L$. Величина X_L определяет реактивное индуктивное сопротивление цепи. На реактивных сопротивлениях не происходит потери энергии.

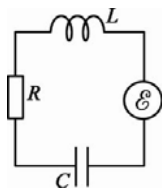


Рис. 6.2. Цепь переменного тока с индуктивностью L , емкостью C , сопротивлением R и источником переменной ЭДС $\varepsilon(t)$

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую индуктивность L , емкость C , активное сопротивление R и источник пере-

менной ЭДС $\mathcal{E}(t)$ (рис. 6.2). Уравнение, описывающее изменение тока в R - L - C цепи, имеет вид

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t),$$

которое можно представить как

$$V_L + V_R + V_C = \mathcal{E}(t)$$

– сумму падений напряжений на индуктивности, сопротивлении и емкости. Соответственно, для падений напряжений на индуктивности, емкости и сопротивлении можем записать

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = i\omega LI, \quad V_C = \frac{1}{i\omega C} I, \quad V_R = RI.$$

Все они соответствуют закону Ома

$$V = Z \cdot I,$$

но в V_L и V_C вместо сопротивления стоит комплексная величина $Z = V/I$, называемая импедансом (от англ. *impedance* и лат. *impedio* – препятствую). Импеданс представляет комплексное сопротивление для гармонических процессов. Понятие импеданса было введено в электродинамику О. Хевисайдом. В общем случае импеданс может быть представлен в виде $Z = R + iX$. Активное сопротивление R отвечает за потери мощности в цепи. Реактивное сопротивление X определяет величину энергии, пульсирующей в цепи с частотой 2ω . Для индуктивности, конденсатора и сопротивления импедансы равны (рис. 6.3)

$$Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad Z_R = R.$$

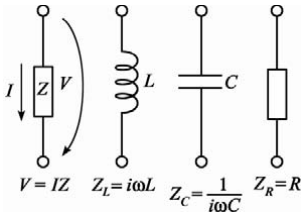


Рис. 6.3. Идеальные элементы цепи и их импедансы Z_L , Z_C и Z_R

Если перейти к случаю цепи постоянного тока $\omega = 0$, то $Z_L = 0$ – между клеммами катушки индуктивности наступает короткое

замыкание, $Z_C = \infty$ – постоянный ток через конденсатор не течет и только $Z_R = R$. Поэтому при расчете цепей постоянного тока следует учитывать только обычные сопротивления.

В элементах L , C , R цепи ток и напряжение пропорциональны друг другу. Если $V = 0$, то и $I = 0$. Элемент реагирует на приложенные внешние условия. По этой причине такие элементы называют пассивными. Активными элементами являются генераторы, представляющие источники колебаний токов и напряжений.

Если рассмотреть достаточно сложную цепь, состоящую из идеальных элементарных индуктивностей, емкостей и сопротивлений, т.е. таких элементов, вне которых нет ни электрических, ни магнитных полей – сосредоточенные элементы, то контурный интеграл от напряженности электрического поля для такой цепи равен сумме падений напряжений на всех элементах цепи:

$$\oint(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \sum V_n .$$

Но поскольку вне цепи нет переменных магнитных полей, то этот интеграл равен нулю и сумма падений потенциалов вдоль всего замкнутого контура цепи равна нулю:

$$\sum V_n = 0 .$$

Кроме того, в цепи на выходах элементов не происходит накопления зарядов. Заряды из одного элемента цепи немедленно перетекают в другой, и в любой точке соединения – узле цепи – алгебраическая сумма токов равна нулю:

$$\sum_n I_n = 0 .$$

Полученные два уравнения для падений напряжений и токов называются правилами (законами) Кирхгофа. Они позволяют найти силы токов и падения напряжений в любой цепи. Нужно помнить, что падение напряжения считается положительным, если направление обхода совпадает с направлением тока, и отрицательным, если нет. А также учитывать, что падение напряжения на генераторе равно отрицательному значению ЭДС в этом направлении.

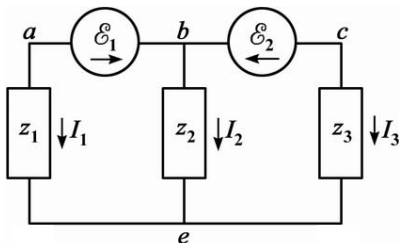


Рис. 6.4. Сумма падений напряжений вдоль любого замкнутого контура равна нулю: $\sum_n V_n = 0$ и сумма токов

в любом узле цепи равна нулю: $\sum_n I_n = 0$. Маленькая

стрелка в генераторе дает направление положительной ЭДС. Положительная ЭДС создает более высокие потенциалы в узле b

Ток в узле e для схемы, приведенной на рис. 6.4, можем записать

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

откуда следует $I_3 = -(I_1 + I_2)$.

Для контуров $abea$ и $bceb$ имеем

$$-\varepsilon_1 + I_2 Z_2 - I_1 Z_1 = 0 \quad \text{или} \quad -I_1 Z_1 + I_2 Z_2 = \varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_2 + I_3 Z_3 - I_2 Z_2 = 0 \quad \text{или} \quad I_1 Z_3 + I_2 (Z_2 + Z_3) = \varepsilon_2.$$

Решая эту систему, находим

$$I_1 = \frac{Z_2 \varepsilon_2 - (Z_2 + Z_3) \varepsilon_1}{Z_1 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3},$$

$$I_2 = \frac{Z_1 \varepsilon_2 + Z_3 \varepsilon_1}{Z_1 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3}.$$

Если $\varepsilon_2 = 0$, $Z_3 = \infty$, то мы получаем цепь с генератором ε_1 с двумя последовательно соединенными импедансами. Ток в цепи равен

$$I = -I_1 = +I_2 = \frac{\varepsilon_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{\varepsilon_1}{Z}.$$

Оказывается, что при последовательном соединении двух элементов цепи с импедансами Z_1 и Z_2 они эквивалентны одиночному элементу с импедансом $Z = Z_1 + Z_2$.

При отсутствии источника ЭДС $\varepsilon_2 = 0$ и импеданса $Z_1 = 0$ элементов Z_2 и Z_3 оказываются соединенными параллельно. В этом случае

$$I = -I_1 = \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1}{Z}$$

импеданс одиночного элемента, эквивалентного двум параллельно соединенным, равен

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}.$$

Рассмотрим цепочку из последовательно соединенных элементов R, L, C . Импеданс такой цепочки равен

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}.$$

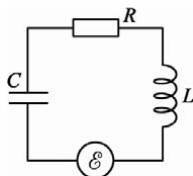
Модуль этой величины

$$|Z| = Z \cdot Z^* = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Рис. 6.5. Импеданс колебательного контура, состо-

ящего из элементов R, L, C : $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$.

Емкость оказывает большое сопротивление низкочастотным колебаниям и пропускает высокочастотные. Индуктивность, наоборот, практически не оказывает сопротивления низкочастотным колебаниям и не пропускает высокочастотные



Из этого соотношения видно, что для низкочастотных колебаний $\omega \rightarrow 0$, основное падение напряжения будет происходить на конденсаторе, а индуктивность свободно их пропускает. И наоборот, высокочастотные колебания свободно проходят через емкость, но гасятся на индуктивных элементах цепи (рис. 6.5).

Для модулей \mathcal{E} и I выполняется закон Ома $|\mathcal{E}| = |I| \cdot |Z|$.

Для параллельно соединенных сопротивления и емкости (рис. 6.6) импеданс цепи равен

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\omega C, \quad |Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}.$$

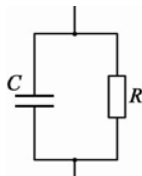


Рис. 6.6. Параллельно соединенные емкость C и сопротивление R . Сопротивление этого элемента для высокочастотных колебаний мало, а для низкочастотных равно R

Сопротивление такого элемента цепи очень мало для высокочастотных колебаний ($|Z| \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$) и совпадает с реактивным сопротивлением R для низкочастотных. При параллельном соединении сопротивления и индуктивности (рис. 6.7) импеданс цепи равен

$$Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Эта цепь практически не оказывает сопротивления низкочастотным колебаниям ($Z \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow 0$, если можно пренебречь сопротивлением катушки индуктивности), а для высокочастотных колебаний импеданс контура целиком определяется его омическим сопротивлением ($Z \rightarrow R$ при $\omega \rightarrow \infty$).

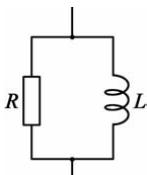


Рис. 6.7. Параллельно соединенные сопротивление R и индуктивность L : $Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$. Контур пропускает низкочастотные колебания, а для высокочастотных колебаний $Z = R$

Рассмотрим теперь вопрос о потерях энергии в цепи с генератором $\mathcal{E}(t)$ и эффективным импедансом $Z = R + iX$, где действительная часть — это активное сопротивление цепи, а iX — чисто мнимая часть, представляет совокупность идеальных емкостей и индуктивностей (рис. 6.8). Чисто мнимый импеданс (реактивное сопротивление) называется реактансом. ЭДС связана с током в цепи соотношением $\mathcal{E} = I(R + iX)$. Средняя скорость потерь энергии в цепи за период T равна

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E} I dt.$$

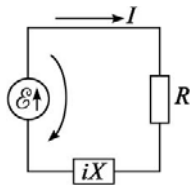


Рис. 6.8. Потери энергии в цепи происходят на активном сопротивлении R , в реактивной части iX потерь нет

Если выбрать начало отсчета так, чтобы I_0 было действительным числом, то истинное изменение I со временем будет равно (действительная часть от $I_0 e^{i\omega t}$)

$$I(t) = I_0 \cos \omega t.$$

ЭДС в интеграле – это действительная часть от $I_0 e^{i\omega t}(R + iX)$:

$$\mathbf{E}(t) = I_0 R \cos \omega t - I_0 X \sin \omega t.$$

Падение напряжения на сопротивлении находится в одной фазе с током, а падение напряжения на реактивной части сдвинуто по фазе относительно тока на $\pi/2$. Поэтому ($\omega = 2\pi/T$)

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 R \cos^2 \omega t - \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 X \cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} I_0^2 R$$

– потери энергии в импедансе зависят лишь от его действительной части. В реактивной части потерь энергии нет. Заметим, что мгновенная мощность на реактивной части принимает за период как положительное, так и отрицательное значения и в среднем равна нулю. Когда мгновенная мощность отрицательна, энергия, запасенная в реактивной части цепи, возвращается обратно в сеть.

Рассмотрим цепочку, состоящую из большого числа последовательно соединенных одинаковых индуктивностей и соединенных параллельно емкостей. Такая цепочка может моделировать двухпроводную линию или кабель связи (рис. 6.9).

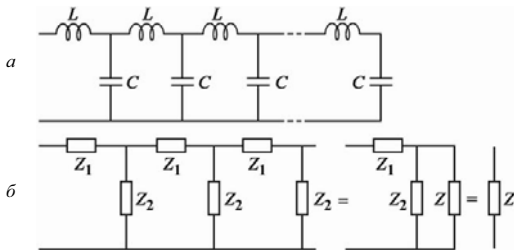


Рис. 6.9. Бесконечная цепочка из L и C элементов (а) и эквивалентная ей схема импедансов (б). Z – импеданс всей цепи; $Z_1 = i\omega L$ – импеданс индуктивности;

$$Z_2 = \frac{1}{i\omega C} \text{ – импеданс емкости}$$

Провода этой линии обладают на единицу длины некоторой индуктивностью и емкостью. Общее сопротивление такой цепочки Z можно найти, представив ее в следующем эквивалентном виде. Если к бесконечной LC цепочке, имеющей общее сопротивление Z , подсоединим еще один LC элемент с импедансом L , равным Z_1 , и импедансом C , равным Z_2 , то в результате общее сопротивление цепочки станет равным Z' :

$$Z_1 + \frac{1}{1/Z + 1/Z_2} = Z'.$$

Но поскольку цепочка LC бесконечна, то добавление к ней еще одного элемента LC не изменит ее общего импеданса, а поэтому $Z' = Z$. Из полученного уравнения

$$Z_1 + \frac{ZZ_2}{Z_2 + Z} = Z$$

находим

$$Z = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2}.$$

Перед корнем взят знак «плюс», так как активная часть комплексного сопротивления должна быть положительной. Поскольку $Z_1 = i\omega L$, $Z_2 = \frac{1}{i\omega C}$, то полный импеданс бесконечной LC цепочки равен

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} + \frac{i\omega L}{2}.$$

Если $\omega^2 < \frac{4}{LC}$, то импеданс Z содержит действительную часть – число, а при $\omega^2 > \frac{4}{LC}$ Z – чисто мнимая величина,

$$Z = i\sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{L}{C}} + \frac{i\omega L}{2}.$$

Для высоких частот импеданс LC цепочки чисто мнимый, как и ожидалось, поскольку идеальные LC элементы не рассеивают энергию. Однако при низких частотах Z – действительное число и цепочка из LC элементов может поглощать энергию. Это неожиданное свойство связано с тем, что цепь состоит из бесконечного

числа элементов, и сначала источник питания снабжает энергией первый элемент, затем второй и т.д. В этом случае энергия бесконечно течет в цепь и запасается в индуктивностях и емкостях вдоль цепи. И если к передней части цепочки подсоединить генератор переменного напряжения, то колебания подобно волне будут распространяться вдоль цепи, если $\omega < 2/\sqrt{LC}$. При $\omega > 2/\sqrt{LC}$ такое распространение не происходит.

6.2. Фильтры

Бесконечная LC цепочка поглощает энергию низкочастотных колебаний $\omega < \omega_0 = 2/\sqrt{LC}$ и не пропускает далеко колебания с высокой частотой $\omega > \omega_0$. Частота ω_0 называется граничной. Рассмотрим, как меняются напряжения от звена к звену LC цепочки, если ее подключить к генератору переменного тока \mathcal{E} частотой ω .

Для бесконечной цепочки можем записать для n и $n + 1$ элементов (рис. 6.10) падение напряжения на n -м импедансе Z_1 равно

$$V_n - V_{n+1} = I_n Z_1,$$

где ток I_n через n -й импеданс равен напряжению на n -м элементе, деленному на импеданс всей бесконечной цепочки:

$$I_n = \frac{V_n}{Z}.$$

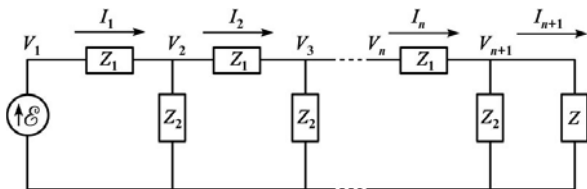


Рис. 6.10. Цепочка из $n + 1$ элемента с импедансами Z_1 и Z_2 может служить фильтром пропускаемых частот. В случае ($Z_1 = i\omega L$, $Z_2 = 1/(i\omega C)$) LC цепочки отфильтровываются высокие частоты, в CL цепочке ($Z_1 = 1/(i\omega C)$, $Z_2 = i\omega L$) гасятся низкие частоты

В результате получаем отношение $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \alpha$, называемое фактором распространения, $\alpha = \frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{Z_1}{Z} = \frac{Z - Z_1}{Z}$.

Напряжение на n -м звене равно

$$V_n = \alpha^n \mathcal{E},$$

где \mathcal{E} – ЭДС источника.

Для LC цепочки фактор распространения равен

$$\alpha = \frac{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4 - i(\omega L/2)}}{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4 + i(\omega L/2)}}.$$

Если частота ω на входе ниже граничной $\omega < \omega_0$, то корень – число действительное и α – мнимое число. Модули комплексных чисел в числителе и знаменателе α одинаковы, поэтому модуль α равен единице и можно записать

$$\alpha = e^{i\varphi}, \text{ где } \varphi = -\arctg\left(\omega\sqrt{CL - \omega^2 L^2 C^2/4}\right) (\omega < \omega_0).$$

Модуль напряжения в этом случае не изменяется вдоль цепи, а изменяется его фаза. Поскольку $\varphi < 0$, то происходит рост задержки напряжения по фазе по мере его распространения по цепи.

При частоте ω выше граничной ω_0 (корень – число мнимое) фактор распространения α – действительное число, меньшее единицы:

$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C - \omega L/2}}{\sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C + \omega L/2}} < 1.$$

В этом случае напряжение в каждом последующем звене меньше напряжения в предыдущем и напряжения экспоненциально спадают по мере продвижения по цепи ($\ln \alpha < 0$)

$$V = \mathcal{E} e^{n \ln \alpha}.$$

Таким образом, LC цепочка передает энергию низкочастотных колебаний ($\omega < \omega_0$) и задерживает энергию высокочастотных колебаний ($\omega > \omega_0$). Проводящая цепь из LC цепочек пропускает низкие частоты и отфильтровывает высокие $\omega > \omega_0$. Реально вместо бесконечной LC цепочки можно построить цепочку из конечного числа LC элементов и завершить ее обычным сопротивлением $R = \sqrt{L/C}$.

Полученная цепочка обладает свойствами, очень близкими к свойствам бесконечного LC -фильтра.

Если в бесконечной цепочке поменять местами емкости и индуктивности, то получится цепочка, пропускающая высокие частоты и отфильтровывающая низкие (рис. 6.11). Импеданс высокочастотного фильтра равен

$$Z = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{\frac{Z_1^2}{2} + Z_1 Z_2},$$

где теперь $Z_1 = \frac{1}{i\omega C}$; $Z_2 = i\omega L$,

$$Z = \frac{1}{i2\omega C} + \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}}.$$

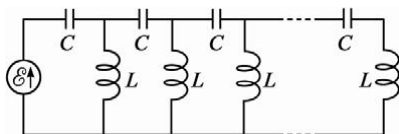


Рис. 5.11. Высокочастотный CL фильтр

В отличие от LC цепочки, в CL лестничной схеме $i\omega$ заменяется на $\frac{1}{i\omega}$ и все зависимости для LC от ω соответствуют зависимостям в CL цепях от $\frac{1}{\omega}$ (см. п. 6.1).

Описанные фильтры имеют широкие технические приложения.

Электрические LC -фильтры используются в системах многоканальной связи, радиоустройствах, устройствах автоматики, телемеханики, радиоизмерительной техники и т.д. То есть везде, где передаются электрические сигналы при наличии других (мешающих) сигналов и шумов, отличающихся от полезного сигнала по частотному составу. Фильтры LC низких частот используют как сглаживающие фильтры в цепях постоянного тока. Высокочастотные фильтры нужны, если необходимо убрать высокие частоты. Например, в проигрывателях и магнитофонах в низкочастотном усилителе следует использовать эти фильтры для того, чтобы убрать шумы от лентопротяжного механизма и механизма вращения дисков.

Отметим также, что LC цепочка (рис. 6.9, а) представляет модель передающей линии – двух проводников, расположенных параллельно друг другу, например в коаксиальном кабеле.

Между ними существует некая емкость и индуктивность. Представив эту линию в виде небольших участков Δl с индуктивностью ΔL и емкостью ΔC , при переходе к пределу $\Delta l \rightarrow 0$ получим действительный импеданс для такой линии:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

где L_0, C_0 – индуктивность и емкость на единицу длины линии. Величина Z_0 в этом случае называется волновым сопротивлением линии. Индуктивности и емкости телевизионных кабелей таковы, что волновые сопротивления составляют для многих марок симметричных двужильных кабелей $100 \div 300$ Ом, а для большинства коаксиальных кабелей 75 Ом. Для коаксиальной $L_0 = \mu_0 \frac{\ln(b/a)}{2\pi}$, $C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln b/a}$, где a, b – радиусы внутреннего

и внешнего проводника. Поэтому $Z_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c} = 60 \ln \frac{b}{a}$ [Ом].

При $\Delta l \rightarrow 0, \Delta C \rightarrow 0, \Delta L \rightarrow 0$ граничная частота $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\Delta L \Delta C}}$ стремится к бесконечности. У идеальной передающей линии нет граничной частоты.

6.3. Индуктивность на высоких частотах

Реальная индуктивность не совпадает с идеальной, импеданс которой равен $i\omega L$. У реальной проволочной катушки есть конечное активное сопротивление R , а промежутки между витками обладают конечной емкостью. Особенно эти емкости проявляются на высоких частотах, когда на проводах возникают заряды, чтобы создать напряжение. Реальную картину можно представить как совокупность отдельных индуктивностей и активных сопротивлений, запараллеленных малыми емкостями (рис. 6.12).

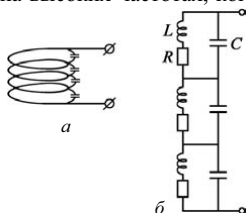


Рис. 6.12. Реальная картина индуктивности (а) и эквивалентная ей схема (б) для высоких частот

Импеданс катушки индуктивности с частотой растет как ωL и при частотах, когда $\omega L > R$, катушка начинает выглядеть как идеальная индуктивность. Но если подняться по частоте еще выше, то начнут проявляться межвитковые емкости. Их импеданс убывает с частотой $1/(\omega C)$. На высоких частотах эти малые емкости замыкают индуктивность – ток начинает течь не через индуктивность, а через емкости между витками – по пути минимального импеданса. Катушка, первоначально сконструированная как индуктивность на высоких частотах, начинает работать не как индуктивность, а как некое новое устройство.

6.4. Конденсатор на высоких частотах

Рассмотрим поведение конденсатора с повышением частоты ω электрического поля, приложенного к обкладкам конденсатора. Конденсатор состоит из двух параллельных круглых пластин и соединен с генератором двумя проводами (рис. 6.13).

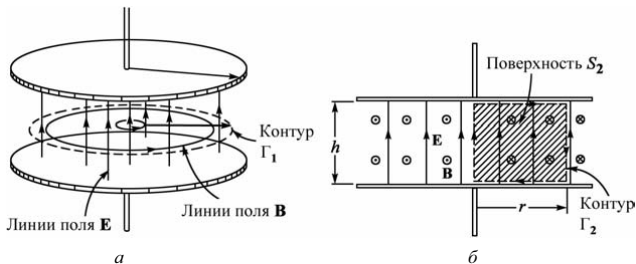


Рис. 6.13. Электрическое и магнитное поля в плоском конденсаторе

При постоянном приложенном напряжении обкладки конденсатора заряжаются, а электрическое поле между пластинами – однородно, если пренебречь краевыми эффектами.

Если же к обкладкам конденсатора приложено переменное электрическое поле

$$E_1 = E_0 e^{i\omega t},$$

то оно порождает переменное магнитное поле \mathbf{B} . В пространстве, свободном от токов, эту связь между \mathbf{E} и \mathbf{B} определяет одно из уравнений Максвелла

$$c^2 \oint_{(\Gamma)} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} (\mathbf{E}, d\mathbf{S})$$

– индукция магнитного поля \mathbf{B} по замкнутому контуру Γ пропорциональна скорости изменения потока электрического поля \mathbf{E} через поверхность S , ограниченную контуром Γ .

Взяв контур Γ_1 в виде круга радиусом r (рис. 6.13, *a*) и учитывая, что \mathbf{B} направлено по касательной к окружности, получаем

$$c^2 B \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} E_0 e^{i\omega t} \pi r^2.$$

Магнитное поле в конденсаторе, соответственно, равно

$$B_1 = \frac{i\omega r}{2c^2} E_1.$$

Магнитное поле также переменное, и его величина пропорциональна ω и r . С ростом частоты магнитное поле усиливается, а импеданс конденсатора становится отличным от $1/\omega C$. В свою очередь, переменное магнитное поле вызовет появление дополнительного электрического поля E_2 , которое можно найти, воспользовавшись вторым уравнением Максвелла (рис. 6.13, *b*):

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{(S_2)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}).$$

Поскольку в центре конденсатора магнитное поле равно нулю $B_1(r=0) = 0$, то и $E_2(r=0) = 0$, и мы имеем

$$-E_2 h = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^r B(r) h dr = -h \frac{i\omega r^2}{4c^2} \cdot \frac{\partial E_1}{\partial t} = h \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_1,$$

$$E_2 = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}.$$

Электрическое поле в конденсаторе уже неоднородно – наведенное электрическое поле E_2 , согласно правилу Ленца, стремится уменьшить первоначальное электрическое поле E_1 :

$$E = E_1 + E_2 = \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) E_0 e^{i\omega t}.$$

Если частота ω достаточно высока, то изменение электрического поля E_1 приведет к изменению магнитного поля B_1 в конденсаторе:

$$c^2 B_2 \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r E_2 2\pi r dr = -2\pi \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r \frac{\omega^2}{4c^2} E_1 r^3 dr = -2\pi \frac{\omega^2 r^4}{16c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} E_1,$$

$$B_2 = -\frac{i\omega^3 r^3}{16c^4} E_0 e^{i\omega t}.$$

Поправка B_2 к магнитному полю B_1 обуславливает новую коррекцию в величине электрического поля E_3 :

$$E_3(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B_2 dr = \frac{\omega^4 r^4}{64c^4} E_0 e^{i\omega t}.$$

Вновь исправленное электрическое поле равно

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{2^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 + \frac{1}{2^2 4^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^4 \right].$$

Далее все идет по тому же пути – поправка E_3 порождает поправку B_3 для магнитного поля

$$B_3(r) = \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \int E_3(r) r dr,$$

а очередная поправка E_4 для электрического поля равна

$$E_4(r) = -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^6 E_0 e^{i\omega t}.$$

Теперь можно уловить общую закономерность вычисления электрического поля в полости, записав решение в виде ряда:

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^6 + \dots \right] =$$

$$= E_0 e^{i\omega t} J_0 \left(\frac{\omega r}{c} \right).$$

Здесь через $J_0(x)$ обозначена функция Бесселя нулевого порядка с аргументом $x = \omega r/c$. Эта функция всегда описывает волны с цилиндрической симметрией.

Удивительным и важным физическим результатом в полученном решении является то, что функция $J_0(x)$ – знакопеременна (рис. 6.14). Поэтому если частота ω достаточно велика, то направления электрического поля в центре конденсатора и у его

края могут быть различны. Направление электрического поля между обкладками конденсатора может много раз изменяться при переходе от центра к краю пластины конденсатора при $\omega r/c \gg 1$.

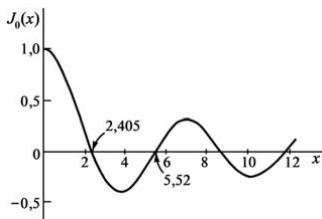


Рис. 6.14. Функция Бесселя $J_0(x)$ – знакопеременна

Поведение конденсатора на высоких частотах, скорее всего, похоже на индуктивность, но в любом случае, конденсатор, сконструированный для низкочастотных полей, при высоких частотах ведет себя совсем иным образом и при расчете его поведения надо пользоваться полной системой уравнений Максвелла для описания полей в пространстве.

6.5. Объемный резонатор

Резонансный высокочастотный контур не удастся смоделировать с помощью одной катушки и плоского конденсатора. Но, с другой стороны, задача создания высокочастотного колебательного контура упрощается, поскольку плоский конденсатор объединяет в себя сразу два элемента – емкость и индуктивность – от электрического поля на боковых обкладках возникают заряды, а от магнитного поля – обратные ЭДС. Если разместить между обкладками конденсатора на расстоянии a от центра, таким, что $\frac{\omega a}{c} = 2,405$ (первый ноль функции Бесселя $J_0(x)$) – металлический цилиндр радиусом a , то по этому цилиндру ток не потечет, поскольку $E(2,405) = 0$ и в конденсаторе ни магнитное, ни электрическое поля не изменятся. В результате мы получили металлический цилиндр радиусом $a = 2,405 \frac{c}{\omega}$, настроенный на резонансную частоту $\omega_0 = 2,405 \frac{c}{a}$, в котором могут существовать электрическое и магнитное поля.

Такой цилиндр называется объемным резонатором. Изменение E создает B , а изменение B генерирует E . Сами по себе поля существовали бы бесконечно долго, если сделать стенки цилиндра из идеального проводника. Чтобы в реальном резонаторе поля не затухали, надо подпитывать резонатор энергией на частоте ω_0 , например, передавая её от внешнего генератора через боковое отверстие в резонансной полости (рис. 6.15).

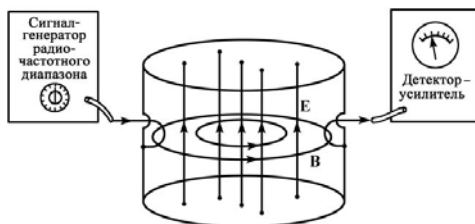


Рис. 6.15. Подключение полости для наблюдения резонанса

За резонансной накачкой полости можно следить с помощью второй петли, помещенной в банку и подключенной к внешнему детектору (рис. 6.15). Если измерить ток на выходе как функцию от частоты сигнала генератора, то на резонансной частоте ω_0 получится заметный рост тока (рис. 6.16).

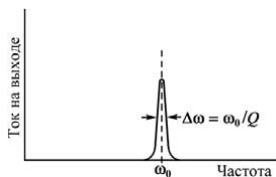


Рис. 6.16. Отклик полости на резонансную частоту

Ширина резонанса $\Delta\omega$ у полости заметно меньше, чем у резонансных контуров, составленных из индуктивности и емкости. Следовательно, у объемных резонаторов очень велика добротность $Q = \omega_0/\Delta\omega$, порядка 10^5 и выше, особенно если внутренние стенки полости сделаны из хорошо проводящего металла, например из серебра.

Рассмотренная резонансная полость внешне сильно отличается от обычного колебательного контура, состоящего из индуктивности L и емкости C . Но на самом деле это лишь крайние при-

меры электромагнитных резонаторов, рассчитанных на разные области частот, и можно плавно перейти от одной резонансной системы к другой. В обычном колебательном контуре с параллельно соединенными емкостью C и катушкой индуктивности L резонансная частота $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (рис. 6.17, *а*).

Для повышения резонансной частоты можно начать уменьшать индуктивность и дойти в итоге просто до одного проводника, соединяющего верх и низ конденсатора. Дальше индуктивность можно уменьшить, запараллелив несколько проводников, соединяющих верх и низ конденсатора, поскольку для n витков $L_n = L_1/n$, где L_1 – индуктивность одного витка (рис. 6.17, *б*). Добавляя отдельные витки провода, можно постепенно получить совершенно замкнутый цилиндр, припаянный к краям обкладок конденсатора (рис. 6.17, *в*). Электрические и магнитные поля в такой «нагруженной» полости показаны на рисунке 6.17, *в*. В этой полости есть L и C части, емкость – область, где находится большая часть электрического поля, индуктивность – магнитного. Для еще большего увеличения резонансной частоты полости можно еще уменьшить индуктивность (уменьшить высоту h на рис. 6.17, *в*) или емкость – уменьшить площадь обкладок конденсатора. В том и другом случае у нас получится пустотелый металлический цилиндр – полый резонатор (рис. 6.17, *з*). Если одну из стенок сделать подвижной, то получим объемный резонатор с переменной частотой резонанса.

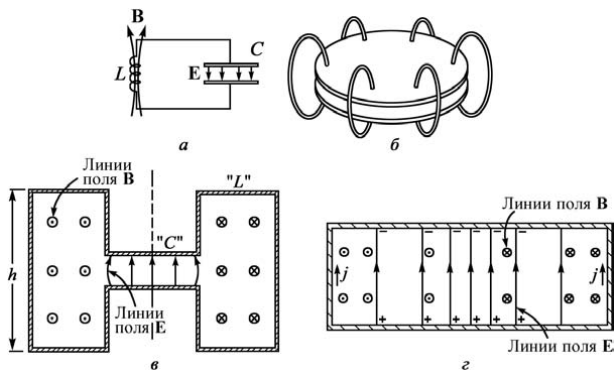


Рис. 6.17. Электромагнитные колебательные устройства с возрастающей резонансной частотой

Резонатор не обязательно должен иметь цилиндрическую форму. Полость любой формы будет обладать своим набором резонансных частот, отвечающим допустимым типам колебаний электрических и магнитных полей.

Объемные резонаторы встречаются и в природных условиях, причем экранирующие поверхности у них могут быть плохо проводящими. Бисферическим объемным резонатором служит система Земля – ионосфера. Земля является электропроводящим экраном, а ионосфера – рефракционным из-за полного внутреннего отражения волн.

6.6. Волноводы

В предыдущем разделе уже возникал вопрос, связанный с передачей энергии от генератора к резонансной полости и от полости к детектору. Для цепей низкой частоты эта связь осуществляется по проводам, но на высоких частотах энергия начинает неконтролируемо излучаться и трудно предвидеть, куда она потечет. И в обычной линии электропередач часть энергии тратится на излучение. Но поскольку частота здесь мала (50 Гц), то эти потери пренебрежимо малы.

На частотах в несколько килогерц излучение вполне заметно, но его можно уменьшить, пользуясь «двухжильной» линией передач, применяемой, например, в телефонной связи на небольших расстояниях.

При повышении частоты в передающей линии потери энергии на излучение становятся очень велики и неуправляемы. В области высоких частот $10^5 \div 10^8$ Гц электромагнитная энергия обычно передается по коаксиальным линиям – проводу, помещенному внутрь цилиндрического внешнего проводника (рис. 6.18, а).

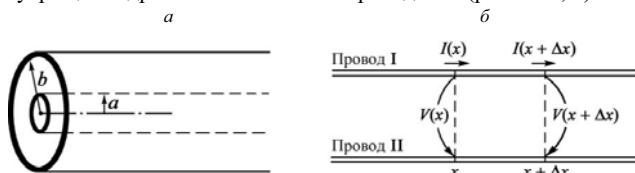


Рис. 6.18. Коаксиальная передающая линия (а); токи и напряжения в передающей линии (б)

Рассмотрим две соседние точки передающей линии x и $x + \Delta x$ (рис. 6.18, б). Напряжение между проводниками $V(x)$, ток в

верхнем проводнике $I(x)$. Поскольку ток в линии меняется, то индуктивность вызовет падение напряжения на участке Δx :

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x) = -L_0 \Delta x \frac{dI}{dt}.$$

Здесь L_0 – индуктивность на единицу длины линии. В пределе $\Delta x \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}$$

– изменение тока приводит к перепаду напряжения.

Если напряжение $V(x)$ изменяется, то появляются заряды, передающиеся на этом участке емкости $\Delta x C_0$ (C_0 – емкость на единицу длины). Заряд на небольшом участке равен

$$\Delta q = C_0 \Delta x V.$$

Скорость изменения заряда равна $C_0 \Delta x \frac{\partial V}{\partial t}$, и она определяется разностью токов на входе $I(x)$ и на выходе $I(x + \Delta x)$ элемента Δx линии

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x) = -C_0 \Delta x \frac{\partial V}{\partial t}.$$

В пределе $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

– сохранение заряда предполагает, что градиент тока пропорционален скорости изменения напряжения во времени.

Полученная пара уравнений определяет волновые уравнения для тока и напряжения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}.$$

Скорость распространения волны в линии равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Из уравнений линий передач следует, что напряжение для каждой волны в линии пропорционально току этой волны с характеристическим импедансом

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Емкость единицы длины цилиндрического конденсатора (коаксиальной линии)

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}.$$

Индуктивность единицы длины

$$L_0 = \mu_0 \frac{\ln(b/a)}{2\pi} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c^2},$$

где a , b – радиусы внутреннего и внешнего проводника.

Соответственно волна бежит по линии со скоростью $v = c$ – скорость света, но это в случае если в промежутке между проводниками нет диэлектриков и магнитных материалов (в этом случае $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$) и все токи распространяются только по поверхности проводников.

Для воздушной коаксиальной линии характеристический импеданс

$$Z_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c} = 60 \cdot \ln \frac{b}{a}, \text{ Ом.}$$

Большинство линий обладает характеристическим импедансом от 50 Ом до нескольких сот Ом.

6.7. Высокочастотный волновод

Оказывается, если из коаксиального кабеля убрать центральный провод, то тем не менее при достаточно высоких частотах он по-прежнему будет передавать электромагнитную энергию. Это похоже на то, как при высоких частотах колебательный контур можно заменить простым металлическим цилиндром, оставив один конденсатор и убрав катушку индуктивности. Если посмотреть сквозь прямую трубу, то через нее проходит свет – электромагнитная волна высокой частоты. Но низкочастотные волны – переменный ток, телефонная связь по одной линии, через одну трубу – не передаются. Определим набор частот, способных распространяться по одной линии – волноводу. Рассмотрим трубу прямоугольного сечения. Ось z направим вдоль трубы, а оси x , y – вдоль стенок, перпендикулярно z (рис. 6.19, a).

Если поперечные волны распространяются вдоль оси z , то допустим, что электрическое поле имеет только y компоненту E_y . Это электрическое поле должно обратиться в нуль на сторонах, параллельных оси y , – касательные составляющие электрического поля на проводниках отсутствуют (рис. 6.19, б). Зависимость E_y от x – это обычные гармонические функции (рис. 6.19, в): $E_y \sim \sin(k_x x)$. Вдоль трубы электрическое поле E_y представляет бегущую волну $E_y \sim e^{i(\omega t - k_z z)}$. В целом

$$E_y = E_0 \sin(k_x x) e^{i(\omega t - k_z z)}.$$

Чтобы отсутствовали касательные составляющие электрического поля на стенках прямоугольного волновода, необходимо выполнение граничного условия

$$k_x a = n\pi,$$

где n – целое число. В самом простом случае $k_x = \pi/a$, где a – ширина трубы. Поскольку E_y должно удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},$$

то получаем

$$k_x^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0.$$

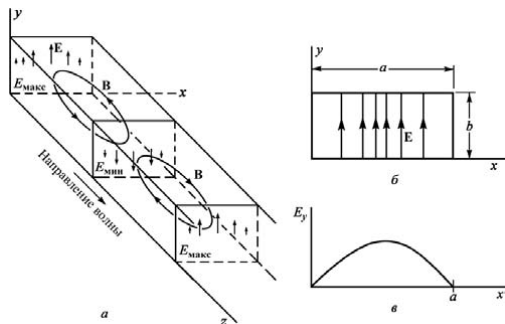


Рис. 6.19. Электрическое и магнитное поля в прямоугольном волноводе. Волна распространяется вдоль оси z

Так как $E_y \neq 0$ и $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$, то волновое уравнение выполняется,

$$\text{если } k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

Волновое число k_z связано с частотой ω условием

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

Фазовая скорость волны

$$v = \frac{\omega}{k_z}.$$

Длина волны в направлении оси z , бегущей по волноводу, равна

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0 / 2a)^2}},$$

где $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ — длина электромагнитной волны в пустом пространстве.

В волноводе существует и магнитное поле, поскольку $c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Петли вектора магнитной индукции лежат параллельно плоскости xz , между гребнями и впадинами \mathbf{B} (рис. 6.19, *a*).

Полученное соотношение для k_z позволяет оценить наименьшую частоту ω_C , при которой волны еще распространяются вдоль волновода. Для этого k_z должно быть действительным числом, т.е.

$$\omega > \omega_C = \frac{c\pi}{a}.$$

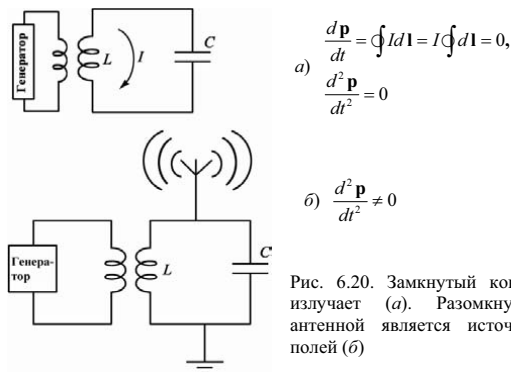
При $\omega < \omega_C$ k_z будет чистым мнимым числом: $k_z = ik$ (k — действительной положительной число) и волна E_y будет затухать вдоль волновода

$$E_y = E_0 \sin(k_x x) e^{i\omega t} e^{-kz}.$$

6.8. Радиосвязь

Провод, по которому течет переменный ток, излучает радиоволны только в случае, если он не замкнут и ток не квазистационарен. Действительно, если разбить провод на элементы с током $I d\mathbf{l}$, то каждый из таких элементов тока излучает как точечный диполь $I d\mathbf{l} = \frac{dq}{dt} d\mathbf{l} = \frac{d \cdot d\mathbf{p}}{dt} = d \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)$. В случае квазистационарности все диполи совершают колебания практически в одной фазе. В волновой зоне их можно считать сосредоточенными в одной точке. В этом случае весь виток с током будет подобен точечному диполю, для которого $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \oint I d\mathbf{l} = I \oint d\mathbf{l} = 0$, поскольку для квазистационарных токов $I = \text{const}$, а в замкнутом контуре $\oint d\mathbf{l} = 0$ (рис. 6.20, а).

Разомкнуть контур можно, применив излучатель, в котором возбуждаются незамкнутые переменные токи, например отрезок прямолинейного провода (рис. 6.20, б). Излучатель такого типа и был использован в классических опытах Герца. Такая излучающая система называется антенной (от лат. *antenna* – мачта, рея).



$$a) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \oint I d\mathbf{l} = I \oint d\mathbf{l} = 0,$$

$$\frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} = 0$$

$$b) \quad \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \neq 0$$

Рис. 6.20. Замкнутый контур с током не излучает (а). Разомкнутая система с антенной является источником волновых полей (б)

Для радиосвязи пригодны только высокочастотные токи, поскольку низкочастотные токи очень

слабо излучают. Излучаемая мощность растет пропорционально четвертой степени частоты (гл. 4):

$$\langle W \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}.$$

Для радиопередатчика, работающего на частоте $\omega = 5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ и создающего поле электромагнитного излучения $E_0 = 10 \text{ нВ/см}$, амплитуда колебаний электрона в антенне y_0 определяется из условия

$$eE_0 = ma = my_0 \omega^2,$$

$$y_0 = \frac{eE_0}{m\omega^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (5 \cdot 10^5)^2} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Максимальная скорость электрона при гармонических колебаниях

$$v_0 = \omega y_0 = 5 \cdot 10^5 \cdot 7 \cdot 10^{-7} = 0,35 \text{ м/с}.$$

Дипольный момент колеблющегося заряда

$$p_0 = ey_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 7 \cdot 10^{-7} = 1,12 \cdot 10^{-25} \text{ Кл}\cdot\text{м},$$

средняя мощность, излучаемая одним электроном:

$$\langle W \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{(1,12 \cdot 10^{-25})^2 \cdot (5 \cdot 10^5)^4}{12 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (3 \cdot 10^8)^3} = 8,7 \cdot 10^{-44} \text{ Вт}.$$

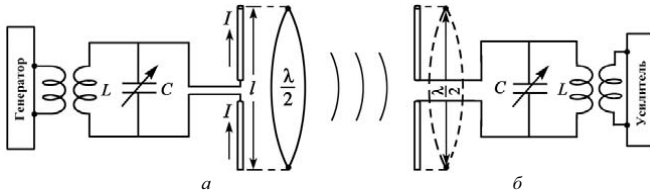


Рис. 6.21. Передатчик (а) и приемник (б), настроенный в резонанс с передатчиком

Помимо этого, для возбуждения электромагнитных колебаний антенна должна быть настроена в резонанс с колебательным контуром (рис. 6.21), для чего узлы волны должны располагаться по краям антенны, и, следовательно, размеры l антенны будут равны $\lambda/2$. При частоте колебаний 10^3 Гц $l =$

150 км. Поэтому на излучающие антенны подаются токи высокой частоты от 10^5 до 10^8 Гц и выше, 10^{10} Гц – дециметровые и сантиметровые волны.

Радиосвязь основана на том, что волна, излучаемая сильными высокочастотными токами в антенне, настроенной в резонанс с генератором, улавливается другой антенной – антенной приемника, также настроенной в резонанс с передающей антенной. Эти сигналы усиливаются и могут быть использованы. В этом простейшем варианте передаваться и приниматься могут только высокочастотные сигналы и информация, основанная на наличии и отсутствии сигнала или его длительности. Для передачи речи, музыки необходимы низкочастотные сигналы в диапазоне от 16 до $2 \cdot 10^4$ Гц. Непосредственная передача таких сигналов невозможна из-за малой излучаемой мощности на этих частотах и колоссальных размеров антенн. Эти проблемы снимаются, если для передачи использовать высокочастотные волны, измененные низкочастотным сигналом. Такое изменение называется модуляцией. Модулировать можно амплитуду и фазу колебаний. Соответственно, мы будем иметь дело с амплитудной или фазовой модуляцией. В случае амплитудной модуляции исходный высокочастотный сигнал

$$I = I_0 \sin \omega t$$

изменяется наложением передаваемого низкочастотного сигнала $1 + f(t)$, $|f(t)| < 1$ (рис. 6.22):

$$I(t) = I_0[1 + f(t)] \sin \omega t.$$

В случае низкочастотного музыкального тона

$$f(t) = a \sin \Omega t,$$

здесь Ω – частота модуляции; a – глубина модуляции.

Приведем выражение для $I(t)$ к виду

$$I(t) = I_0 \sin \omega t + \frac{I_0 a}{2} \cos(\omega - \Omega)t - \frac{I_0 a}{2} \cos(\omega + \Omega)t.$$

Модулированное колебание состоит, таким образом, из трех гармонических колебаний с частотами ω , $\omega \pm \Omega$. Частоты $\omega \pm \Omega$ называются боковыми (рис. 6.23).

Если функция $f(t)$ не синусоидальна, то ее всегда можно разложить в ряд Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos \Omega_n t + b_n \sin \Omega_n t)$$

и для каждого слагаемого выполнить только что приведенные преобразования. В этом случае слева и справа от несущей частоты ω появятся несколько боковых частот или бесконечно много, образуя боковые полосы. В случае радиопередач диапазон частот Ω_n лежит в интервале от 16 до $2 \cdot 10^4$ Гц, и боковые полосы имеют ширину $2 \cdot 10^4$ Гц по обе стороны от несущей частоты.

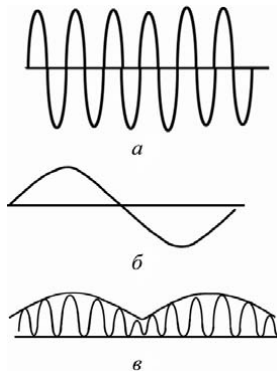


Рис. 6.22. Исходное высокочастотное колебание (а); налагаемый низкочастотный сигнал (б); модулированное колебание, $a < 1$ (в). Модуляция (в) низкочастотным колебанием $1 + a \sin \Omega t$ (б) высокочастотного $\sin \omega t$ (а), $\omega \gg \Omega$

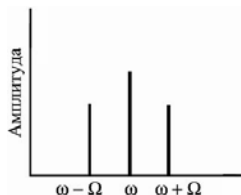


Рис. 6.23. Модулированное колебание состоит из трех гармонических колебаний

Для всех Ω_n выполняется условие $\Omega_n \ll \omega$, поэтому частоты $\omega \pm \Omega_n$ пригодны для излучения радиоволн. Колебательный контур приемника должен принимать не только частоту ω , но и частоты примыкающих боковых полос, поскольку иначе модулирующий сигнал будет утерян. Поэтому резонансная кривая колебательно-го контура не должна быть очень острой – уже, чем 2Ω .

Для модуляции колебаний необходимо, чтобы лампа или транзистор, генерирующие колебания, работали на нелинейном

участке. В этом случае они будут давать на выходе (аноде, коллекторе) ток, пропорциональный не сумме

$$I_{a,k} = aV_a \sin \omega t + bV_s \sin \Omega t,$$

а произведению анодного V_a и сеточного V_s (коллекторного, базового) напряжений.

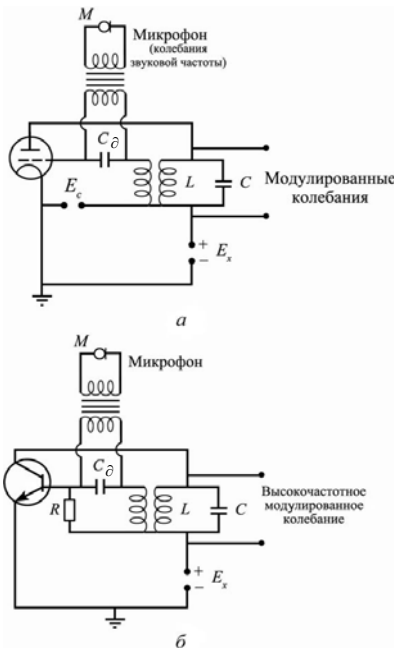


Рис. 6.24. Ламповый (а) и транзисторный (б) генераторы амплитудно модулированных колебаний

На линейном участке вместо модуляции высокочастотных колебаний мы получим простое сложение колебаний высокой и низкой частот. Модуляция колебаний возможна только при нарушении линейной зависимости между напряжением и током. Колебательный контур LC включен в цепь анода или коллектора (рис. 6.24). Модулирующее напряжение возникает в цепи микрофона и повышается трансформатором. Для высокочастотных токов сопротивление емкости C_{∂} генератора мало, а вторичной

обмотки трансформатора – велико. Поэтому высокочастотные токи не заходят в микрофонную цепь. Токи низкой частоты – от микрофона – испытывают большое сопротивление в цепи конденсатора C_{∂} , и напряжение вторичной обмотки трансформатора оказывается целиком приложенным между сеткой и катодом в ламповом усилителе (базой и коллектором в транзисторном). Это напряжение модулирует выходное напряжение генератора.

Анодный ток I является функцией анодного $V_1 = V_a \sin \omega t$ и сеточного $V_2 = V_s \sin \Omega t$ напряжений

$$I_a = I_a(V_1, V_2).$$

Разложим эту зависимость в ряд Тейлора до членов второго порядка

$$I_a = a_0 + a_1 V_1 + a_2 V_2 + b_1 V_1^2 + b_2 V_2^2 + A V_1 V_2,$$

после подстановки V_1 и V_2 получим

$$I_a = a_1 V_a \left(1 + \frac{A V_s}{a_1} \sin \Omega t \right) \sin \omega t + \\ + \left(a_0 + a_2 V_s \sin \Omega t + b_1 V_a^2 \sin^2 \omega t + b_2 V_s^2 \sin^2 \Omega t \right).$$

Выражение в первой скобке является требуемым модулированным колебанием, которое можно выделить с помощью резонансного контура, настроенного на полосу $\omega \pm \Omega$. Это модулированное колебание передается в антенный контур, индуктивно связанный с катушкой L колебательного контура.

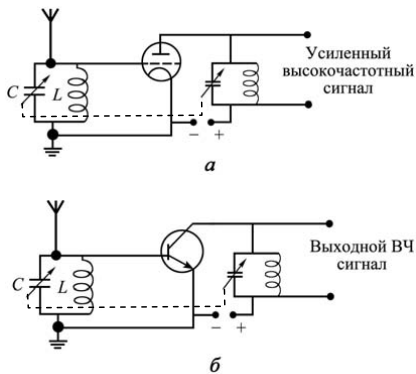
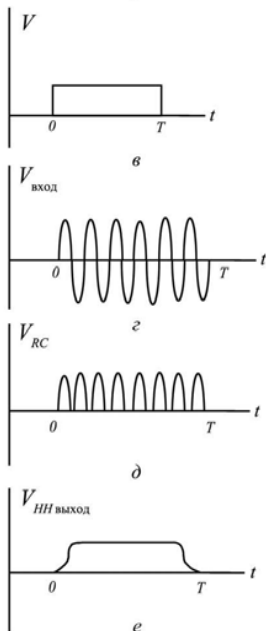
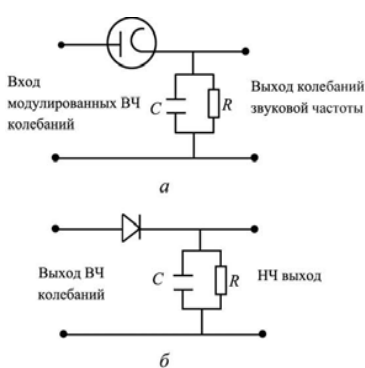


Рис. 6.25. Резонансный высокочастотный ламповый (а) и транзисторный усилители (б)

Рассмотрим, как происходит прием радиосигналов. Электромагнитная волна передающей антенны возбуждает в приемной антенне слабые электромагнитные модулированные колебания амплитудой $10^{-4} \div 10^{-3}$ В. Эти слабые сигналы нужной частоты отфильтровываются резонансным LC контуром, причем для настройки на нужную станцию конденсатор в контуре делается переменной емкости (рис. 6.25). Напряжение высокой частоты с



катушки колебательного контура, включенного в антенну, подается на сетку электроно-лампового усилителя (базу транзисторного). В анодную цепь лампы включен второй колебательный контур, также настроенный на частоту принимаемого сигнала. Резонансный усилитель в результате не только усиливает колебания той частоты, на которую он настроен, но и отфильтровывает все остальные колебания, индуцированные в приемной антенне другими передающими станциями.

Для преобразования модулированных высокочастотных колебаний в токи звуковой частоты применяются детекторы (от лат. *detectio* – открытие, обнаружение) – ламповые или полупроводниковые (рис. 6.26). Общим свойством детекторов является односторонняя проводимость, и поэтому они выпрямляют высокочастотный ток.

Рис. 6.26. Ламповый (а) и полупроводниковый (б) диодные детекторы; исходный низкочастотный сигнал (в); переданный модулированный ВЧ сигнал, поступивший на вход детектора (г); сигнал, прошедший вакуумный или полупроводниковый диод (д); сигнал, прошедший RC-фильтр – демодулированный сигнал (е)

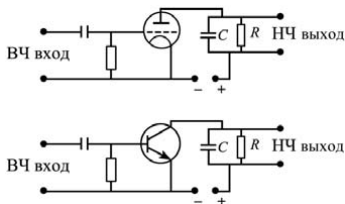
Допустим, что модулирование высокочастотных колебаний проведено прямоугольным импульсом длительностью T такой, что частота высокочастотных колебаний ν много больше $1/T$. В этом случае на вход детектора (демодулятора) подается радиосигнал, состоящий из совокупности νT колебаний высокой частоты. Благодаря односторонней проводимости диода он пропускает только высокочастотные импульсы одного знака. Эти импульсы, попадая на RC цепочку, начинают заряжать конденсатор, емкость которого C и сопротивление фильтра R подобраны так, что постоянная времени релаксации $\tau = RC$ много больше периода высокочастотных колебаний ν^{-1} , но много меньше времени передачи низкочастотного импульса T ($\nu^{-1} \ll \tau \ll T$). Поэтому за νT высокочастотных колебаний высокочастотные импульсы зарядят конденсатор до постоянного напряжения, которое будет сохраняться на сопротивлении в течение всего времени T прохождения модулированного сигнала. После прохождения сигнала за время τ напряжение на выходном сопротивлении упадет до нуля и цепочка будет готова к приему следующего низкочастотного сигнала. Если подобрать постоянные R, C так, чтобы выполнялось условие $\nu^{-1} \ll \tau \ll T$, то форма выходного импульса после детектирования почти не будет отличаться от формы исходного низкочастотного импульса. Так же будет обстоять дело и при передаче звуковых сигналов.

Если в детекторе вместо диода применить триод (рис. 6.27), то при этом будет достигнуто не только выпрямление сигнала, но и его усиление. Если полученные низкочастотные колебания дополнительно усилить и подать на выходной громкоговоритель или наушники, то мы услышим передаваемые низкочастотные сигналы, речь или музыку.

Таким образом, простейший радиоприемник работает следующим образом. Высокочастотный сигнал с антенны попадает в приемный колебательный контур и усиливается в высокочастотном усилителе. Входной колебательный контур этого усилителя может перестраиваться на различные резонансные частоты для того, чтобы выделять сигналы различных передающих радиостанций.

Рис. 6.27. Схема лампового и транзисторного детекторов с использованием вакуумного и полупроводникового триодов. На выходе получается низкочастотный усиленный сигнал

Настройка контура должна предусматривать прохождение



резонансной полосы колебаний шириной 2Ω : $\omega \pm \Omega$. Усиленные колебания попадают на демодулятор и преобразуются в колебания низких частот, модулировавших высокочастотные колебания. Полученные низкочастотные колебания вновь усиливаются и попадают на громкоговоритель, телефон и прочие системы регистрации. Приемник, работающий по данной схеме, называется приемником прямого усиления (рис. 6.28). Недостатком такого приемника является его слабое усиление сигналов, передаваемых на очень высоких частотах. Это связано с наличием неизбежных паразитных емкостей – емкостей, электронных ламп, соединительных проводов, колебательных контуров и пр., которые при очень высоких несущих частотах обладают крайне малым сопротивлением и шунтируют сигналы (п. 6.2). Демодулировать сигнал сразу на входе также нельзя, поскольку при этом в приемник к низкочастотному усилителю будут проходить различные помехи, особенно большие на низких частотах.

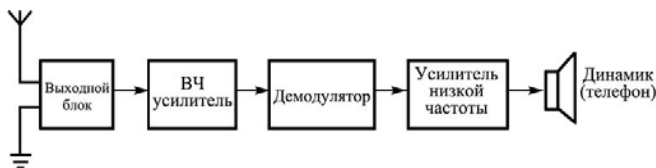


Рис. 6.28. Блок-схема приемника прямого усиления

Избежать указанных недостатков позволяет супергетеродинный приемник, в котором используется гетеродин – собственный маломощный высокочастотный генератор, выдающий частоту ω_1 . Это высокочастотное колебание гетеродина $V_1 = a_1 \sin \omega_1 t$ используется для того, чтобы преобразовать высокочастотное модулированное колебание

$$V = a[1 + f(t)] \sin \omega t$$

в два колебания

$$[1 + f(t)] \cos(\omega \pm \omega_1),$$

модулированные одной и той же низкочастотной передаваемой функцией $f(t)$. Для этого передаваемое модулированное высокочастотное колебание подается на один, а колебание гетеродина на другой электроды специальной лампы – смесителя, работающего в нелинейном режиме и умножающего сигналы гетеродина и высокочастотного усилителя (рис.6.29). В супергетеродинном приемнике используется более низкочастотное колебание с промежуточной частотой $\omega - \omega_1$, лежащей существенно выше звуковых частот. Это колебание промежуточной частоты выделяется резонансным фильтром, усиливается усилителем промежуточной частоты, демодулируется, усиливается усилителем низкой частоты и подается на выходной громкоговоритель или иной регистратор сигналов.



Рис. 6.29. Блок-схема супергетеродинного приемника

При настройке на разные станции с изменением емкости конденсатора входного контура приемника изменяется и емкость колебательного контура гетеродина таким образом, чтобы промежуточная частота $\omega - \omega_1$ оставалась неизменной. Для чего подвижные пластины обоих конденсаторов размещены на общей оси вращения.

6.9. Телевидение

В телевидении видеосигнал также представляет собой высокочастотные колебания, промодулированные по амплитуде. Поэтому телевизионный приемник похож на радиоприемник, с той лишь разницей, что видеосигнал используется для управления интенсивностью электронного пучка, который падает на экран телевизионной трубки (кинескопа). Напряжение выходного видеосигнала прямо пропорционально яркости передаваемого изображения. В интервалы времени между двумя последователь-

ными строками развертки видеосигнал содержит импульсы, запускающие генератор развертки, который выдает следующую строку.

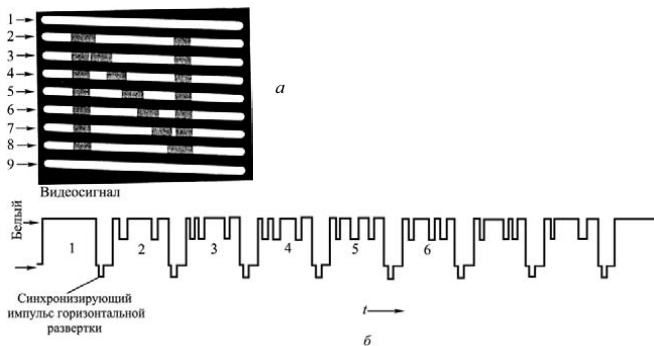


Рис. 6.30. Передача изображения буквы «N» с помощью видеосигнала при использовании 9 строк развертки: *a* – изображение на экране кинескопа; *b* – форма соответствующего видеосигнала, управляющего интенсивностью электронного пучка

На рис. 6.30 показана последовательность передачи изображения буквы «N», а соответствующий видеосигнал – на рис. 6.30, *b*. Блок-схема телевизионного приемника, включая блоки развертки, приведена на рис. 6.31.

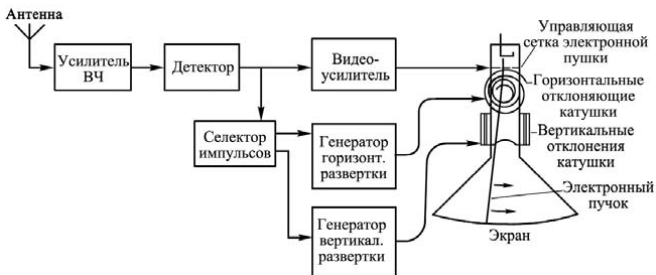


Рис. 6.31. Блок-схема телевизионного приемника

В России, Франции и ряде других стран принят стандарт – 625 строк и 24 кадра в секунду. Коммерческое телевидение в США работает на 525 строках при 30 кадрах в секунду.

Основные выводы

Закон Ома для цепей переменного тока всегда может быть записан в виде

$$V = ZI,$$

где V – падение напряжения на элементе цепи (емкость, индуктивность, сопротивление); I – ток в цепи; Z – вообще говоря, комплексная величина, называемая импедансом. Для емкости, индуктивности, сопротивления импедансы равны

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_R = R.$$

Используя импедансы как обычные сопротивления, можно рассчитать с помощью правил (законов) Кирхгофа

$$\sum_n V_n = 0, \quad \sum_k I_k = 0$$

токи и падения напряжений на любом элементе сложной электрической цепи переменного тока.

Бесконечная LC цепочка обладает комплексным импедансом

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} + \frac{i\omega L}{2}.$$

По такой цепочке распространяются низкочастотные колебания $\omega < \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ и задерживаются высокочастотные колебания.

Для передающей линии с индуктивностью и емкостью на единицу длины L_0, C_0 импеданс равен $Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \approx 50 \div 300$ Ом.

Для того чтобы цепочка пропускала высокие частоты, надо поменять местами емкости и индуктивности, получится CL цепочка с импедансом

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}} + \frac{1}{i\omega C}.$$

По этой цепочке распространяются колебания $\omega > \omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ и

задерживаются низкочастотные колебания.

В области высоких частот элементы, определяющие индуктивность и емкость цепи, можно разделить лишь условно. Резонансным элементом с высокой добротностью может служить цилиндрическая полость, покрытая изнутри металлом с высокой проводимостью (серебром) – резонатор. При радиусе полости a , основной резонансной частотой для нее служит частота

$$\omega_0 = 2,405 \cdot \frac{c}{a}.$$

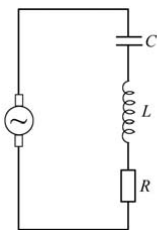
Передача энергии от резонансной полости и подкачка энергии в резонансную полость в области высоких частот энергией осуществляется с помощью волноводов.

Длина волны, передаваемая по волноводу шириной a равна

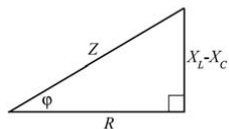
$$\lambda = \frac{2\pi}{k_z},$$

где $k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$ – волновое число для волны, распространяющейся вдоль волновода (ось z). По волноводу прямоугольного сечения распространяются волны с частотой $\omega > \omega_0 = \pi \frac{c}{a}$.

Упражнения



a

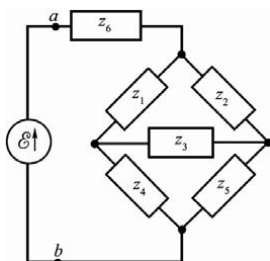


б

1. Показать, что для цепи, приведенной на рисунке *a*, соотношения между импедансом, индуктивным, емкостным, активным сопротивлением и фазовым углом φ (φ определяет, на сколько напряжение $V = ZI$ опережает ток по фазе) может быть изображено треугольником, приведенным на рис. *б*.

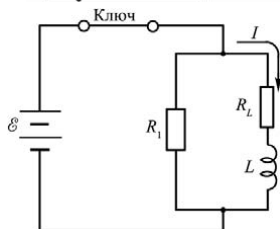
2. Приведенную схему называют «мостиком». Она встречается во многих приборах, измеряющих импедансы. В таких схемах обычно интересуются таким вопросом: как должны соотноситься различные импедансы, чтобы ток через импеданс Z_3 был равен нулю?

Ответ: $Z_1/Z_4 = Z_2/Z_5$.



3. Показать, что в момент размыкания ключа на его контактах появляется очень высокое напряжение, если $R_1 \gg R_L$:

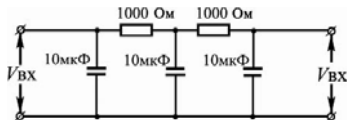
$$(V_1 + \varepsilon) = \varepsilon \left[\frac{R_1}{R_L} + 1 \right].$$



4. Почему короткое замыкание конденсатора равносильно тому, что его емкость становится бесконечно большой?

5. Показать, что если на входе фильтра задано напряжение

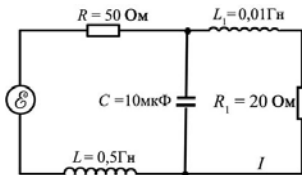
$$V_{\text{вх}} = (120 \sin 300t + 120 \sin 600t) \text{ В,}$$

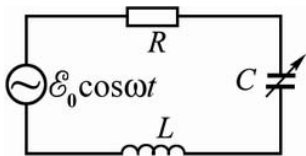


то напряжение на выходе будет следующим:

$$V_{\text{вых}} \approx [10 \sin(300t - 132^\circ) + 3 \sin(600t + 207^\circ)] \text{ В.}$$

6. Дана схема, представленная на рисунке. Сила тока в катушке L_1 колебательного контура $I = 0,5 \cos 600t$. Показать, что ЭДС $\varepsilon \approx 150 \cos(600t - 78^\circ)$ В.





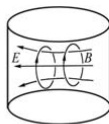
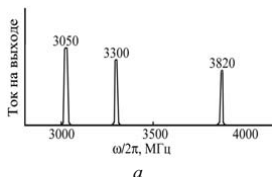
7. Емкость конденсатора в цепи, показанной на рисунке, может плавно изменяться в широких пределах ЭДС источника равна $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. 1) Определить мощность W , отдаваемую источником, в зависимости от величины емкости.

2) При каком значении емкости эта мощность будет максимальной и чему она равна? Ответ: 1) $W(t) = \mathcal{E}^2 / Z$, где $Z = [R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2}$; 2) при $\omega L = 1/(\omega C)$, $W(t) = \mathcal{E}^2 / R$.

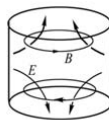
8. Как с помощью амперметра и вольтметра переменного тока можно измерить емкость конденсатора C ? Дать расчетную формулу. Ответ: $C = I/(\omega U)$, где I и U – показания приборов.

9. Если в качестве антенны пользоваться городской осветительной сетью, то между сетью и приемником необходимо включить разделительный конденсатор. Зачем это делается и чему должна быть равна емкость такого разделительного конденсатора?

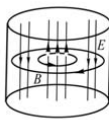
10. На рисунке *a* изображены наблюдаемые резонансные частоты цилиндрической полости высотой 6,3 см, диаметром 7,5 см. Каким типам колебаний они соответствуют (*б*, *в*, *г*)?



б

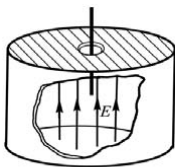


в

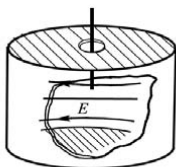


г

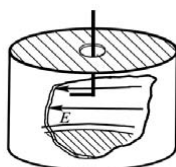
11. В каком случае небольшая проволоочка, введенная в полость, сильнее исказит резонанс?



а

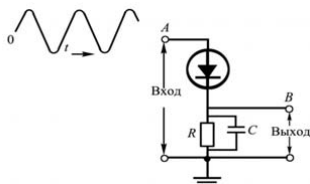
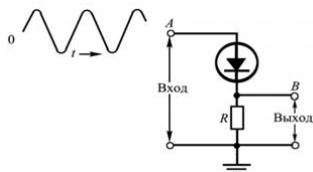


б

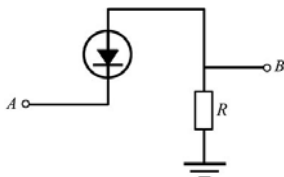


в

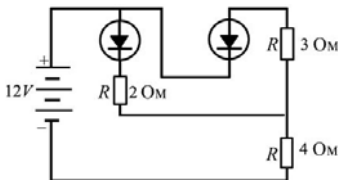
12. Нарисовать сигнал на выходе в приведенных ниже схемах.



13. К точке A в схеме, показанной на рисунке, приложено переменное напряжение. Нарисуйте зависимость напряжения в точке B от времени.

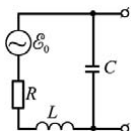


14. Рассмотрим цепь, составленную из трех резисторов и двух идеальных диодов. Чему равны токи I_1 , I_2 и I_3 в резисторах сопротивлением 2, 3 и 4 Ом, соответственно? Вычислите ток I_4 в резисторе сопротивлением 4 Ом, если полярность батареи поменять на обратную.

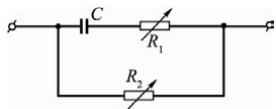


Ответ: $I_1 = I_3 = 2$ А, $I_2 = 0$; $I_4 = 12/7 = 1,71$ А.

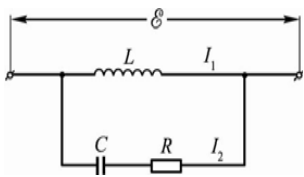
Задачи



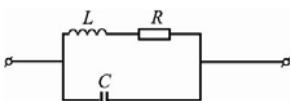
1. Найти ЭДС \mathcal{E} и внутреннее сопротивление Z источника, эквивалентного цепи, показанной на рисунке. Считать, что генератор \mathcal{E}_0 настроен в резонанс с цепью и что $R \ll \omega L$.
 Ответ: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$; $Z = R$.



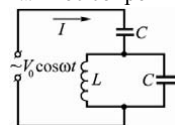
2. Дана схема, приведенная на рисунке. Будет ли меняться сдвиг фазы между токами в ветвях с изменением: 1) сопротивления R_2 ; 2) сопротивления R_1 ? Ответ: 1) нет; 2) да.



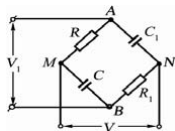
3. В схеме, приведенной на рисунке, даны L , C , R и $I_2 = I_0 \cos \omega t$. Найти \mathcal{E} , I_1 и сдвиг фазы φ между \mathcal{E} и напряжением V на конденсаторе. Ответ: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \varphi_1)$, где $\mathcal{E}_0 = I_0(R^2 + (1/\omega C)^2)^{1/2}$, $\text{tg} \varphi_1 = 1/(\omega RC)$; $I_1 = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \varphi)/(\omega L)$; $\text{tg} \varphi = \omega RC$.



4. Определить полное сопротивление r цепи, показанное на рисунке. Круговая частота переменного тока в цепи равна ω . Определить условие, при котором сопротивление цепи будет максимальным, если $R \ll \omega L$, и найти это максимальное сопротивление r_{\max} .

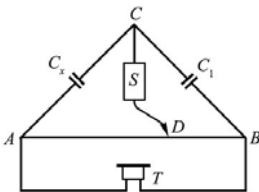


5. Найти ток I (в установившемся режиме) в цепи, изображенной на рисунке. При какой частоте ω амплитуда установившихся колебаний будет максимальна и при какой – минимальна? Чему равны максимум и минимум тока?



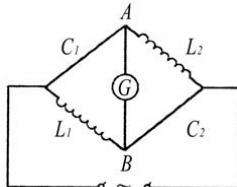
6. К точкам A и B схемы, изображенной на рисунке подводится напряжение $V_1 = V_{10} \sin \omega t$, а с точек M и N снимается напряжение $V_2 = V_{20} \sin(\omega t - \varphi)$. 1) Показать, что при $R_1 C_1 = RC$ имеем $V_{10} = V_{20}$, и найти сдвиг фазы φ . 2) Чему будет равно φ , если $R = 1/(\omega C)$? (Рассматриваемая схема является одной из простейших схем фазовращателей.)

7. Для измерения емкости конденсатора применяются иногда метод моста, показанного на рисунке. AB – реохорд; S – звуковой генератор (источник переменного тока); T – телефон; C_x – измеряемая емкость; C_1 – эталонный конденсатор. Вывести условия баланса моста (т.е. условия, при которых в телефоне нет звука). Можно ли в схеме моста поменять местами звуковой генератор S и телефон T ?

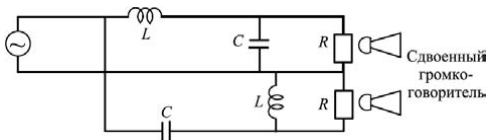


Ответ: $R_{AB}C_x = R_{BD}C_1$; да.

8. Схема моста дана на рисунке. Можно ли при каких-либо соотношениях величин L и C получить отсутствие тока через прибор переменного тока G ? Ответ: нет.

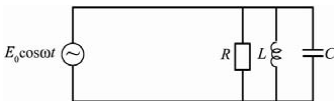


9. Принципиальная схема устройства высокой точности звукопроизведения имеет такой вид, как изображено на рисунке.

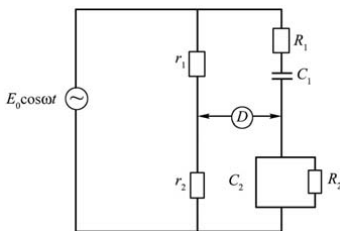


Эффективное сопротивление каждого громкоговорителя равно R . 1) Покажите, что при $R^2 = L/(2C)$ импеданс на входе (на клеммах генератора) веществен и равен R . 2) Покажите, что частота равна $\omega_C^2 = 1/(LC)$. Частота ω_C определяется как та частота, при которой на каждый из громкоговорителей приходится половина общей мощности.

10. Электрическая цепь имеет вид, изображенный на схеме. 1) Изобразите схематически зависимость амплитуды тока в цепи от частоты для произвольно выбран-

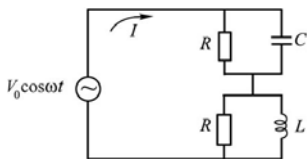


ных величин L , C и R . 2) Если $R \gg \sqrt{L/C}$, сравните частоту резонанса и ширину пика резонансной кривой данной цепи с аналогичными величинами для цепи с последовательным соединением её элементов, но при $R \ll \sqrt{L/C}$. Специально рассмотрите случай $R = (1/K) \cdot \sqrt{L/C}$ для цепи с последовательным соединением.



11. Изображенная схема представляет собой мост Вейна, часто используемый в RC цепях. Если ток через детектор равен нулю, говорят, что мост сбалансирован. Покажите, что баланс наступает при одновременном выполнении следующих условий:

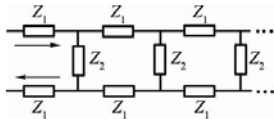
$$\left(\frac{r_1}{r_2} \right) = \left(\frac{R_1}{R_2} \right) + \left(\frac{C_2}{C_1} \right), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$



12. В цепи, изображенной на рисунке, действует источник переменного напряжения $V(t) = V_0 \cos \omega t$.

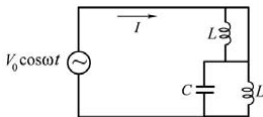
1) Покажите, что если R , L и C подобраны так, что $RC = L/R$, ток I в цепи не зависит от частоты.

2) Какова разность фаз между приложенным напряжением и напряжением на концах RC -пары (при $RC = L/R$)?



13. Найти импеданс бесконечной цепочки, изображенной на рисунке.

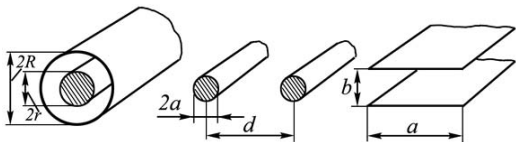
Ответ: $Z = Z_1 + \sqrt{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2}$.



14. Найдите ток I в цепи, схема которой изображена на рисунке.

Ответ: $I = V_0 \cos \omega t / Z$, где $Z = \omega L / (\omega^2 LC - 1)$.

15. Показать, что волновые сопротивления линий, приведенных на рисунках a , b , v , соответственно равны:

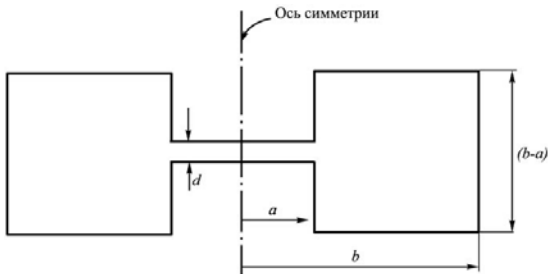


а) $Z_B = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{R}{r}\right) = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \text{ Ом},$

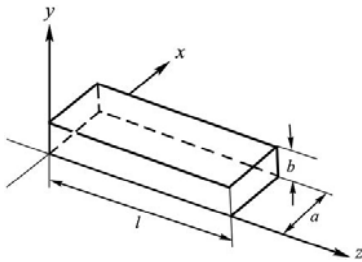
б) при $a \ll d$ $Z_B = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{d}{a}\right) = 120 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{d}{a}\right) \text{ Ом},$

в) $Z_B = \frac{1}{\epsilon_0 c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \text{ Ом}.$

16. Найдите приближенно «резонансную» частоту для полости, изображенной на рисунке, предполагая, что $d \ll a$ и $d \ll (b-a)$.



Какими основными эффектами мы пренебрегли? Если полость равномерно остывает (т.е. температура во всех точках полости в один и тот же момент времени одинакова), приведет ли ее тепловое сжатие к увеличению или уменьшению резонансной частоты? А может быть, она останется неизменной?



напряженности магнитного поля на направление распространения (так называемые поперечные магнитные волны). Для волновода в форме прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рисунке, векторный потенциал поперечной магнитной волны имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_z \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{i(\omega t - k_z z)},$$

где $k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$.

1) Убедитесь, что магнитное поле, найденное с помощью этого потенциала, действительно поперечно, и покажите, что электрическое поле \mathbf{E} и магнитное поле \mathbf{B} удовлетворяют волновому уравнению и соответствующим граничным условиям.

Примечание. Мы полагаем, что $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$, $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$, где $\text{div}\mathbf{A} = -(1/c^2)(\partial\phi/\partial t)$.

2) Покажите, что поперечная магнитная волна не распространяется, если $\omega < c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$.

17. Электрические поля внутри волноводов обладают тем свойством, что проекция вектора напряженности электрического поля на направление распространения волны равна нулю, т.е. электрическое поле поперечное. Кроме того, могут существовать бегущие волны, у которых равна нулю проекция

7. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

7.1. Релятивистское преобразование электрического и магнитного полей

С точки зрения движущихся наблюдателей магнитное и электрическое поля (\mathbf{B} и \mathbf{E}) переходят друг в друга и их следует рассматривать как единое электромагнитное поле, имеющее шесть компонент: E_x, E_y, E_z, B_x, B_y и B_z , которые «перемешиваются» между собой при измерении движущимся наблюдателем. С этой точки зрения система единиц СГС более разумна, поскольку компоненты единого физического поля должны по меньшей мере измеряться в одних и тех же единицах.

Пусть в системе K электрические \mathbf{E} и магнитные \mathbf{B} поля действуют на движущийся со скоростью \mathbf{v} заряд e . Движение такого заряда описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Перейдем в систему координат K' , где напряженность электрического поля равна \mathbf{E}' , а магнитное поле отсутствует $\mathbf{B} = 0$. Уравнение движения заряда в системе K' запишется в виде

$$\frac{dp'}{dt'} = e\mathbf{E}'.$$

Здесь учтено, что при переходе от K' к K заряд сохраняется $e' = e$.

Пусть скорость \mathbf{v} относительного движения систем K' и K направлена вдоль оси x : $\mathbf{v} = \mathbf{i}v$, где \mathbf{i} – единичный вектор $(1, 0, 0)$, параллельный оси x . Компонента импульса p'_x в системе отсчета K' , согласно преобразованию Лоренца, связана с компонентой импульса p_x и энергией частицы \mathcal{E} в системе K ($\beta \equiv v/c$):

$$p'_x = \frac{p_x - \mathcal{E}v/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Приращение энергии $d\mathcal{E} = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = (e\mathbf{E}, d\mathbf{r}) = e(\mathbf{E}, \mathbf{v})dt$ равно элементарной работе, совершаемой полем над зарядом. Откуда следует

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e(\mathbf{E}, \mathbf{v}).$$

В этом случае для изменения x -компоненты импульса в системах K и K' ($dt' = dt\sqrt{1-\beta^2}$) имеем

$$eE'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{d}{dt\sqrt{1-\beta^2}} \frac{p_x - \frac{Ev}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\frac{dp_x}{dt} - \frac{dE}{dt} \frac{v}{c^2}}{1-\beta^2}.$$

Расписывая покомпонентно уравнение для импульса в системе K , находим

$$\frac{dp_x}{dt} = eE_x.$$

Поскольку движение происходит вдоль оси x , вектор $[\mathbf{iv}, \mathbf{B}]$ имеет только составляющие, перпендикулярные оси x :

$$[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = v[\mathbf{k}B_y - \mathbf{j}B_z].$$

Подставляя значения $\frac{dp_x}{dt} = eE_x$ и $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = eE_x v$ в формулу для $\frac{dp'_x}{dt'}$, получаем

$$E'_x = E_x$$

— продольная компонента электрического поля, направленная вдоль вектора скорости, при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой не изменяется.

Аналогичные вычисления выполним для определения изменений $E'_{y,z}$ компонент электрического поля с использованием импульсов $p_{y,z}$, $p'_{y,z}$, которые не изменяются при переходе от системы отсчета K к K' :

$$p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z.$$

В системе отсчета K'

$$eE'_{y,z} = \frac{dp'_{y,z}}{dt'} = \frac{dp_{y,z}}{dt\sqrt{1-\beta^2}} \frac{eE_{y,z} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]_{y,z}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Из последнего равенства следуют законы преобразования для y -, z -компонент электрического поля ($[\mathbf{iv}, \mathbf{B}]_y = -B_z v$, $[\mathbf{iv}, \mathbf{B}]_z = v B_y$):

$$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

– поперечные компоненты электрического поля преобразуются при переходе от одной системы отсчета к другой. Преобразование E_y и E_z компонент электрического поля при переходе от системы K' к K получается в силу физической эквивалентности инерциальных систем отсчета заменой знака у скорости $v \rightarrow -v$:

$$E_x = E'_x, \quad E_{y,z} = \frac{E'_{y,z} - [\mathbf{v}, \mathbf{B}']_{y,z}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Найдем формулы преобразований компонент магнитного поля. С этой целью можно вновь воспользоваться уравнениями движения заряженной частицы в электрическом и магнитном полях. Но можно поступить иначе.

Запишем уравнения Максвелла для полей в свободном от токов и зарядов пространстве

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Проводя в любом из этих уравнений замену $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\frac{\mathbf{E}}{c^2}$,

получаем из одного уравнения второе. Кроме того, уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца. Поэтому если в преобразованиях Лоренца для электрического поля заменить \mathbf{E} на \mathbf{B} и \mathbf{B} на $-\frac{\mathbf{E}}{c^2}$, мы получим преобразование

для магнитного поля, которое описывается той же самой системой исходных уравнений. Выполним такую замену:

$$B_x = B'_x, \quad B_{y,z} = \frac{B'_{y,z} + \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, \mathbf{E}']_{y,z}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

При переходе от системы K' к K вновь следует заменить v на $-v$:

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + \frac{vE_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - \frac{vE_y}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Электрические и магнитные поля относительны, как и большинство физических величин. Их свойства различны в различных системах отсчета. В частности, электрическое или магнитное поле может быть равно нулю в одной системе отсчета и в то же время присутствовать в другой системе отсчета.

Полученные формулы преобразований электромагнитных полей в нерелятивистском случае $(v/c)^2 \ll 1$ принимают вид

$$E_x = E'_x, \quad E_y = E'_y + vB'_z, \quad E_z = E'_z - vB'_y,$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = B'_y - \frac{vE'_z}{c^2}, \quad B_z = B'_z + \frac{vE'_y}{c^2}$$

или в векторном виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - [\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, \mathbf{E}].$$

Если в системе K' магнитное поле равно нулю $B' = 0$, то в системе K между электрическим и магнитным полями существует соотношение

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, \mathbf{E}].$$

Если в K' отсутствует электрическое поле $E' = 0$, то в системе K

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

В обоих случаях в системах K и K' электрические и магнитные поля взаимно перпендикулярны.

Справедливо и обратное утверждение. Если в системе K поля \mathbf{E} и \mathbf{B} ортогональны, то существует такая система отсчета K' , в которой поле чисто электрическое ($\mathbf{B}' = 0$) либо чисто магнитное ($\mathbf{E}' = 0$). Скорость этой системы перпендикулярна векторам \mathbf{E} и \mathbf{B}

и равна $v = \frac{Bc^2}{E}$ в случае $\mathbf{B}' = 0$ ($Bc < E$) и $v = \frac{E}{B}$ при $\mathbf{E}' = 0$

($E < Bc$), здесь, естественно, наложено ограничение $v \leq c$.

Преобразование полей при переходе от одной системы отсчета к другой в нерелятивистском приближении $(v/c)^2 \ll 1$ проявляется в опыте с униполярной индукцией (рис. 7.1). В этом опыте магнит NS вращается вокруг продольной оси. К оси магнита и к его центральной части подведены два скользящих электрода A и B . При этом в проволоке появится ЭДС.

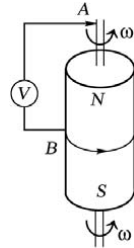


Рис. 7.1. Опыт по униполярной индукции. В системе отсчета K' , связанной с вращающимся магнитом, $\mathbf{E}' = 0$, $\mathbf{B}' \neq 0$. В системе отсчета, связанной с проволокой, $\mathbf{E} = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}] \neq 0$, что и приводит к появлению ЭДС

В системе отсчета, связанной с магнитом, присутствует только магнитное поле B , а электрическое равно нулю. Но в системе отсчета, связанной с проволокой, относительно которой магнит движется, должно наблюдаться электрическое поле $\mathbf{E} = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$. Это поле и создает ЭДС.

7.2. Инварианты электромагнитного поля

Существует две комбинации векторов электрического и магнитного полей, которые остаются неизменными при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Прямыми вычислениями, используя формулы преобразований Лоренца для полей, можно показать, что такими инвариантами являются

$$E^2 - (Bc)^2 = (E')^2 - (B'c)^2,$$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = (\mathbf{E}', \mathbf{B}').$$

Из инвариантности этих выражений следует, что если векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} ортогональны в какой-либо инерциальной системе отсчета, то они ортогональны и в любой другой инерциальной системе отсчета, т.е. если в K $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = 0$, то $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$ и в любой иной системе K' . Кроме того, если $E > Bc$ ($E < Bc$) в K , то $E' > Bc$ ($E' < Bc$) в K' .

Поскольку знак у инвариантной величины не должен изменяться, то нельзя перейти из системы отсчета, где есть только электрическое поле ($E \neq 0$, $B = 0$), в систему отсчета, где есть только магнитное поле ($E = 0$, $B \neq 0$)

Преобразованием систем отсчета можно всегда достичь того, чтобы \mathbf{E} и \mathbf{B} получили любые значения, но удовлетворяющие только условиям $E^2 - (Bc)^2 = \text{const}$ и $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \text{const}$ — чтобы инварианты имели заданные, определенные значения. В частности, можно найти систему отсчета, в которой векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} параллельны. В этой системе $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = EB$, и из формул преобразований полей находим

$$\frac{\mathbf{v}}{1+v^2/c^2} = \frac{c^2[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{E^2 + (Bc)^2}.$$

Из решения этого уравнения следует выбрать значение v , для которого $v < c$.

7.3. Электрическое поле равномерно движущегося заряда

Найдем поле, создаваемое равномерно движущимся со скоростью v зарядом e . Свяжем с зарядом e систему K' . В системе K' магнитное поле отсутствует $B' = 0$, а напряженность электрического поля равна

$$\mathbf{E}' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 (r')^2} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r'}.$$

Пусть движение заряда происходит вдоль оси x со скоростью v (рис. 7.2). В этом случае напряженность электрического поля в системе K равна

$$E_x = E'_x = \frac{e(x')}{4\pi\epsilon_0 (r')^3},$$

$$E_{y,z} = \frac{E'_{y,z}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e(y',z')}{4\pi\epsilon_0 (r')^3 \sqrt{1-\beta^2}}.$$

Поскольку магнитное поле в системе K' отсутствует, то в системе K оно равно

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}, \mathbf{E}].$$

Для того чтобы найти \mathbf{E} в системе K , следует перейти от координат x', y', z' к координатам x, y, z в системе K , воспользовавшись преобразованиями Лоренца:

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Поэтому

$$(r')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = \frac{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(z^2 + y^2)}{(1-\beta^2)}.$$

Подставив эти величины в компоненты вектора напряженности электрического поля в системе K , получим

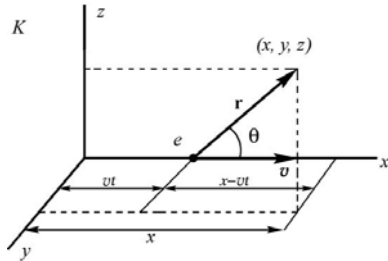
$$E_x = \frac{e(x-vt)}{4\pi\epsilon_0(r')^3\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E_y = \frac{ey}{4\pi\epsilon_0(r')^3\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_z = \frac{ez}{4\pi\epsilon_0(r')^3\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{i}(x-vt) + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, \mathbf{r} – радиус-вектор, определяющий положение заряда в системе K , проведенный от заряда e к точке наблюдения поля x, y, z . Введем угол θ между векторами скорости \mathbf{v} и \mathbf{r} . Поскольку

$$\cos\theta = \frac{(x-vt)}{r},$$

Рис. 7.2. Заряд e движется равномерно и прямолинейно вдоль оси x со скоростью v . В системе K' заряд неподвижен. Поле вычисляется в точке (x, y, z)



то получаем

$$z^2 + y^2 = r^2 \sin^2\theta,$$

и в этом случае

$$(r')^2 = \frac{r^2(1-\beta^2 \sin^2\theta)}{1-\beta^2}.$$

В результате имеем для \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2\theta)^{3/2}}.$$

Вдоль направления движения ($\theta = 0$) напряженность поля движущегося заряда убывает с увеличением скорости v заряда

$$E_{\parallel} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1-\beta^2).$$

В направлении, перпендикулярном к скорости движения $\theta = \pi/2$, напряженность поля максимальна

$$E_{\perp} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{1-\beta^2}}.$$

Электрическое поле движущегося заряда как бы «сжимается» вдоль направления движения (рис. 7.3).

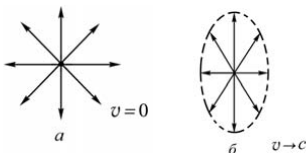


Рис. 7.3. Электрическое поле неподвижного (а) и движущегося с околосветовой скоростью (б) заряда e

Пусть два заряда e_1 и e_2 двигаются параллельно друг другу вдоль оси x с одинаковыми скоростями v (рис. 7.4). Тогда в системе K сила взаимодействия между ними равна

$$\mathbf{F}_{12} = e_1 \mathbf{E}_2 + e_2 [\mathbf{v}, \mathbf{B}_2].$$

Здесь \mathbf{E}_2 , \mathbf{B}_2 – электрическое и магнитное поля, созданные движущимся зарядом e_2 :

$$\mathbf{E}_2 = \frac{e_2 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, \mathbf{E}_2].$$

Подставляя в формулу для \mathbf{F}_{12} полученные соотношения, находим составляющие силы вдоль осей x , y :

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{(1-\beta^2) \cdot \cos \theta}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

$$F_y = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{(1-\beta^2) \cdot \sin \theta}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \cdot (1-\beta^2) = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{(1-\beta^2)^2 \cdot \sin \theta}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}.$$

Здесь θ – угол между радиус-вектором \mathbf{r} , проведенным от заряда e_1 к e_2 , и направлением вектора скорости \mathbf{v} движения зарядов.

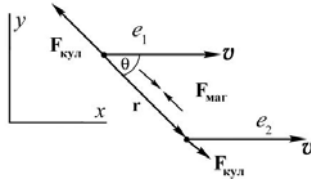


Рис. 7.4. Между подвижными зарядами e_1 и e_2 действуют силы электрического и магнитного взаимодействия

Если заряды находятся на одной прямой, перпендикулярной вектору скорости, так что $\theta = \pi/2$, то между ними действует только перпендикулярная составляющая силы

$$F_{\perp} = F_y \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{e_1 e_2 \sqrt{1 - \beta^2}}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

уменьшенная по сравнению с обычным законом Кулона в $\sqrt{1 - \beta^2}$ раз. Кулоновское отталкивание частично компенсируется магнитным притяжением токов параллельно движущихся зарядов.

Основные выводы

С точки зрения движущихся наблюдателей поля \mathbf{B} и \mathbf{E} переходят друг в друга. Физически их следует рассматривать как единое поле, называемое электромагнитным.

Если система зарядов движется как целое со скоростью v , то возникает магнитное поле

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, \mathbf{E}].$$

При наличии движущихся зарядов в СГС

$$\frac{B}{E} = \frac{v}{c},$$

и при $v \rightarrow c$ электрическое и магнитное поля практически совпадают.

Если источником поля является незаряженный проводник с током, движущийся со скоростью \mathbf{v} , то благодаря явлению электромагнитной индукции возникает электрическое поле

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Если поля E_{\parallel} и B_{\parallel} направлены вдоль оси x (вдоль относительной скорости системы) и полные поперечные компоненты равны

E_{\perp}, B_{\perp} , то при переходе от неподвижной системы отсчета (x, y, z, t) к подвижной (x', y', z', t') преобразования для полей можно записать в виде ($\beta \equiv v/c$):

$$E'_{\parallel} = E, \quad B'_{\parallel} = B,$$

$$E'_{\perp} = \frac{(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}])_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad B'_{\perp} = \frac{\left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}, \mathbf{E}]\right)_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Если в системе K' отсутствует магнитное поле $\mathbf{B}' = 0$, то в K $\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}, \mathbf{E}]$ и $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$. Соответственно, если в K' нет электрического поля, то в K $\mathbf{E} = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ и снова $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$. Справедливо и обратное утверждение: если в системе K поля \mathbf{E} и \mathbf{B} ортогональны, то существует такая система отсчета K' , в которой поле чисто электрическое ($\mathbf{B}' = 0$) либо чисто магнитное ($\mathbf{E}' = 0$). Скорость этой системы перпендикулярна векторам \mathbf{E} и \mathbf{B} и равна $v = Bc^2/E$ в случае $\mathbf{B}' = 0$ ($Bc < E$) и $v = E/B$ при $\mathbf{E}' = 0$ ($E < Bc$).

Комбинациями электрического и магнитного полей, остающимися неизменными при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (инвариантами), являются

$$E^2 - B^2c^2 = \text{Inv},$$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \text{Inv}.$$

Поскольку знак у инвариантной величины не должен изменяться, то нельзя перейти из системы отсчета, где есть только электрическое поле, в систему отсчета, где есть только магнитное поле.

Если заряд e движется со скоростью v относительно системы K , то, поскольку заряд относительно системы K' неподвижен, в K' магнитное поле отсутствует $B' = 0$, а напряженность электрического поля в K' :

$$\mathbf{E}' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0(r')^2} \frac{\mathbf{r}'}{r'}.$$

Если заряд движется вдоль оси x со скоростью v , то в системе K магнитное поле от движущегося заряда равно

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}, \mathbf{E}],$$

а компоненты электрического поля вдоль направления движения убывают:

$$E_{\parallel} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 - \beta^2).$$

В направлении, перпендикулярном скорости движения, напряженность поля максимальна

$$E_{\perp} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

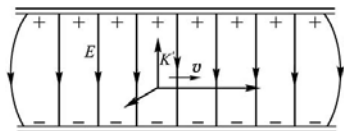
Упражнения

1. Реактивный самолет летит к северу на широте, где вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна 0,6 Гс и направлена вниз. Скорость самолета 278 м/с.

1) Чему равна величина измеряемого пилотом электрического поля?
2) Будут ли на крыльях самолета электрические заряды?

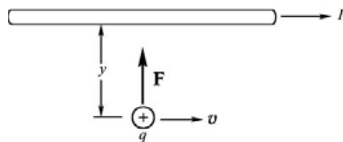
Ответ: 1) $E = Bv = 0,6 \cdot 10^{-4} \cdot 278 = 0,0167$ В/м; 2) да.

2. Описать поля в системе K' , движущейся между пластин плоского конденсатора со скоростью v перпендикулярно силовым линиям электрического поля.



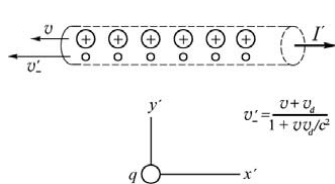
3. Показать, что в системе отсчета движущегося заряда q незаряженный проводник, как показано на рисунке, приобретает заряд с линейной плотностью

$$\lambda' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{v}{c^2} I.$$



4. Показать, что для наблюдателя, движущегося вместе с зарядом q (упр. 3) относительно проводника с током I , измененный ток будет равен

$$I' = \lambda'_+ v + \lambda'_- v_- = \frac{I}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$



5. Покажите, что $\mathbf{E}^2 - \mathbf{V}^2$ и (\mathbf{E}, \mathbf{V}) инвариантны относительно преобразований Лоренца. Убедитесь, что если векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} образуют острый угол в какой-нибудь системе координат, то этот угол будет острым во всех других системах координат. Для какого важного физического явления оба инварианта равны нулю?

6. Пусть \mathbf{E} и \mathbf{B} – напряженности электрического и магнитного полей в некоторой точке пространства в данной системе координат. Определите скорость другой системы координат, в которой электрическое и магнитное поля параллельны. Систем координат, обладающих таким свойством, много. Действительно, если найдется хотя бы одна такая система координат, то указанные векторы будут параллельны и во всех других системах координат, движущихся с постоянной скоростью относительно найденной в направлении, общем для векторов \mathbf{E}' и \mathbf{V}' . Поэтому удобно и в то же время достаточно рассмотреть систему координат, вектор скорости которой перпендикулярен векторам \mathbf{E} и \mathbf{B} .

7. Разбив векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{B} на составляющие вдоль направления относительного движения систем отсчета и перпендикулярно ему, выпишите формулы преобразования векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} в векторной форме. Выписать формулы обратного перехода, т.е. от системы отсчета K к K' .

8. Используя результат, полученный в предыдущем упражнении, выпишите формулы преобразования для векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} для случая, когда относительная скорость систем отсчета нерелятивистская, т.е. $v/c \ll 1$.

Задачи

1. Записать формулы преобразования векторов полей \mathbf{E} и \mathbf{B} при переходе от системы K к системе K' , движущейся с произвольно направленной скоростью \mathbf{v} .

2. Найти взаимное расположение векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} в произвольной инерциальной системе отсчета, если известно, что в системе K' либо $\mathbf{E}' = 0$, либо $\mathbf{B}' = 0$.

3. Используя инварианты электромагнитного поля, найти условия, когда выбором системы отсчета можно получить либо чисто электрическое, либо чисто магнитное поле, если исходные электрическое и магнитное поля однородны.

4. Если в некоторой системе отсчета K' поля \mathbf{E}' и \mathbf{B}' взаимно перпендикулярны (упр. 5), то можно подобрать систему отсчета K , в которой одно из полей исчезает. Найти скорость системы

отсчета K , в которой одно из полей \mathbf{E} и \mathbf{B} исчезает (в системе K' выполняется условие $(\mathbf{E}', \mathbf{B}') = 0$).

5. В системе K' электрическое и магнитное поля \mathbf{E}' и \mathbf{B}' однородны, но произвольно направлены. Найти скорость системы отсчета K , в которой поля \mathbf{E} и \mathbf{B} окажутся параллельными.

6. Найти электрическое и магнитное поля равномерно и прямолинейно движущегося заряда e , производя преобразование полей от системы отсчета K' , в которой заряд покоится. Убедиться в том, что силовые линии магнитного поля, создаваемого движущимся зарядом, – окружности с центром на траектории заряда, плоскость которых нормальна к этой траектории.

7. Найти индукцию магнитного поля B равномерно движущегося точечного заряда e , если скорость заряда нерелятивистская, т.е. $v/c \ll 1$.

8. Два заряда e_1 и e_2 двигаются параллельно друг другу с одинаковыми скоростями v . Определить силу взаимодействия между зарядами в системе K , относительно которой они движутся.

Указание. Пусть заряды находятся в системе K' , причем заряд e_1 находится в начале отсчета O' , а заряд e_2 – на оси y , так что расстояние между зарядами равно r . Найдите проекции силы взаимодействия на оси x и y в этом случае, исходя из общей формулы.

9. Покажите, что электрическое и магнитное поля заряда, движущегося с постоянной скоростью, могут быть представлены в виде

$$\mathbf{E} = \frac{q \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$
$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

здесь \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный из точки, где в данный момент находится заряд, в точку наблюдения, а θ – угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{v} , $\beta = v/c$.

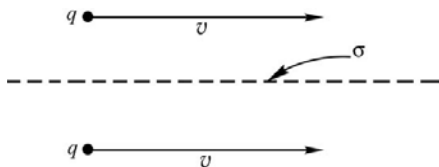
10. По очень длинному прямому проводу течет ток I , создаваемый электронами, движущимися со скоростью \mathbf{v} . Полная плотность зарядов в каждой точке провода равна нулю благодаря наличию положительно заряженных ионов.

1) Найдите поля вне провода в системе координат, где провод покоится.

2) Найдите те же поля в системе координат, движущейся вместе с электронами.

11. Два электрона с одинаковой скоростью v двигаются па-

параллельно друг другу по обе стороны от бесконечной, положительно заряженной плоскости на расстоянии a от нее; плотность покоящихся поверхностных зарядов равна σ .



- 1) При какой величине a расстояние между электронами будет оставаться равным $2a$?
- 2) Сравните величину a , которая получается для электронов с энергией 500 МэВ, с той, которая будет в случае медленно движущихся электронов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Электродинамика	5
2. Электромагнитная индукция	19
2.1. Открытие явления электромагнитной индукции	19
2.2. Электродвижущая сила индукции	22
2.3. Правило Ленца	25
2.4. Вихревое электрическое поле	30
2.5. Самоиндукция	33
2.6. Токи при замыкании и размыкании цепи	35
2.7. Взаимная индукция. Трансформатор	38
2.8. Генератор переменного тока	42
2.9. Индукционный ускоритель электронов – бетатрон	48
2.10. Переменные электрические и магнитные поля	51
Основные выводы	57
Упражнения	60
Задачи	63
3. Уравнения Максвелла	68
3.1. Введение	68
3.2. Уравнения Максвелла в интегральной – диф- ференциальной формах	69
3.3. Распространение электромагнитного поля	74
3.4. Электромагнитные волны	77
3.5. Энергия и импульс электромагнитного поля	83
3.6. Электромагнитная масса	95
3.7. Решение уравнений Максвелла при наличии токов и зарядов	98
Основные выводы	104
Упражнения	107
Задачи	110
4. Электромагнитные колебания и волны	117
4.1. Введение	117
4.2. Электрический колебательный контур	119
4.3. Незатухающие свободные колебания	123
4.4. Затухающие колебания	129
4.5. Вынужденные колебания. Резонанс	135

4.6. Установление колебания. Биения	142
4.7. Параметрические колебания	145
4.8. Волны	147
4.9. Волновые уравнения	148
4.10. Бегущая гармоническая волна	152
4.11. Плоские электромагнитные волны	157
4.12. Стоячие волны	160
4.13. Электромагнитное поле колеблющегося диполя	162
4.14. Опыты Герца с электромагнитными волнами	168
Основные выводы	171
Упражнения	175
Задачи	176
5. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом	180
5.1. Поглощение энергии неидеальным проводником	180
5.2. Импульс излучения	183
5.3. Отражение излучения от сверхпроводника	185
5.4. Взаимодействие излучения с диэлектриком	186
5.5. Показатель преломления	187
Дисперсия	192
5.6. Электромагнитное излучение в ионизированной среде	193
5.7. Поле излучения точечных зарядов	195
5.8. Показатель преломления в конденсированных средах	199
5.9. Волны в металлах	205
5.10. Излучение Вавилова – Черенкова	210
Основные выводы	213
Приложение 1. Метод фазовых диаграмм	215
Приложение 2. Волновые пакеты и групповая скорость	216
Упражнения	220
Задачи	222
6. Уравнения Максвелла и цепи переменного тока.	
Радиосвязь	229
6.1. Линейные цепи переменного тока. Низкие частоты	229
6.2. Фильтры	239
6.3. Индуктивность на высоких частотах	242
6.4. Конденсатор на высоких частотах	243
6.5. Объемный резонатор	246
6.6. Волноводы	249
6.7. Высокочастотный волновод	251
6.8. Радиосвязь	254

6.9. Телевидение	263
Основные выводы	265
Упражнения	266
Задачи	270
7. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля . .	275
7.1. Релятивистское преобразование электрического и магнитного полей	275
7.2. Инварианты электромагнитного поля	279
7.3. Электрическое поле равномерно движущегося заряда . .	280
Основные выводы	283
Упражнения	285
Задачи	286

Учебное издание

**Тюрин Юрий Иванович
Чернов Иван Петрович
Крючков Юрий Юрьевич**

Ф И З И К А

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Учебник

Редактор

Е.В. Лукина

Дизайн обложки

О.Ю. Аршинова

О.А. Дмитриев

Подписано к печати 14.07.2008. Формат 60х84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать XEROX. Усл. печ. л. 16.98. Уч.-изд. л. 15.36.

Заказ 788. Тираж 200 экз.




Томский политехнический университет

Система менеджмента качества

Томского политехнического университета сертифицирована

NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30