


ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Научно-образовательный центр
«БИОСОВМЕСТИМЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ПОКРЫТИЯ
МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ»
Белгородского государственного университета

УТВЕРЖДАЮ

Декан МСФ

 Р.И. Дедюх
«21» апреля 2008 г.

А.Г. Князева

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОНЯТИЯ О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

Методические указания к выполнению лабораторных работ
по курсу «Теплофизические основы высокотемпературных
технологий в машиностроении»
для студентов V курса,
обучающихся по направлению 150900 «Технология, оборудование
и автоматизация машиностроительных производств»,
специальности 151001 «Технология машиностроения»,
специализации 151001.01 «Технология автоматизированного производства»,
150917 «Физика высоких технологий в машиностроении»

Издательство
Томского политехнического университета
2008

УДК 517.962(076.5)
ББК 22.14я73
К54

Князева А.Г.

К54

Элементарные понятия о разностных схемах: методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Теплофизические основы высокотемпературных технологий в машиностроении» для студентов V курса, обучающихся по направлению 150900 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств», специальности 151001 «Технология машиностроения», специализации 151001.01 «Технология автоматизированного производства», 150917 «Физика высоких технологий в машиностроении» / А.Г. Князева. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 18 с.

ISBN 5-98298-186-9

УДК 517.962(076.5)
ББК 22.14я73

Методические указания рассмотрены и рекомендованы
к изданию методическим семинаром кафедры
«Физика высоких технологий в машиностроении»
«21» ноября 2006 г.

Зав. кафедрой ФВТМ
доктор физ.-мат. наук,
профессор



С.Г. Псахье

Рецензент

Доктор физико-математических наук, профессор ТУСУРа

Ю.В. Гриняев

ISBN 5-98298-186-9

© Князева А.Г., 2008
© Томский политехнический университет, 2008
© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2008

ДВА ОСНОВНЫХ ВОПРОСА В ТЕОРИИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

1. Построение дискретных (разностных) аппроксимаций для уравнений (задач) математической физики и исследование априорных оценок качества этих аппроксимаций; устойчивости и точности разностной схемы.
2. Решение разностных уравнений и систем прямыми или итерационными методами, выбираемыми из соображений экономичности вычислительного алгоритма.

Из всего множества разностных схем естественно выбрать те, которые удовлетворяют определенным требованиям:

упрощенные
представления:

аппроксимируемость схемы означает, что при стремлении к нулям шагов аргументов решение системы разностных уравнений стремится к решению исходного дифференциального уравнения при заданных краевых условиях,

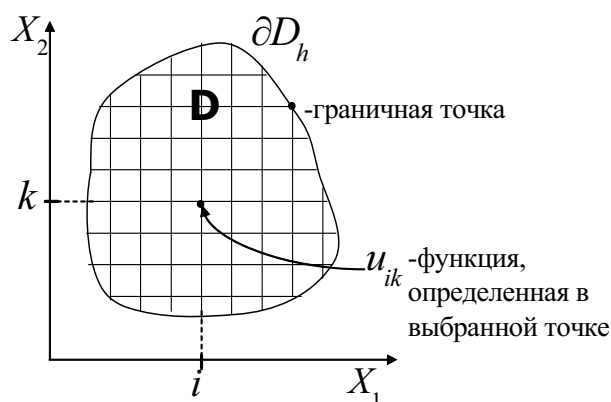
устойчивой называют такую схему, для которой ошибки округления, неизбежные при всяком счете, при уменьшении шагов аргументов (при сгущении сетки) не приводят к большим искажениям решения. В противном случае схему называют неустойчивой,

сходимость схемы при ее численной реализации на ЭВМ есть следствие одновременной аппроксимируемости и устойчивости.

Дополнительная литература

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики: учеб. пособие. – М.: Наука, 1989.
3. Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. – М., Физматгиз, 1962.

НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ



Пусть \mathbf{D} – ограниченная область из \mathbf{R}^n с границей $\partial\mathbf{D}$. Пространство \mathbf{R}^n разобьем на элементарные ячейки $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$, такие что $k_i h_i < x_i < (k_i + 1) h_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, k_i – целые числа; $h_i > 0$. \bar{D}_h – объединение элементарных ячеек вместе с их границами; такое что

$$\bar{D}_h \in \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \cup \partial\mathbf{D},$$

где ∂D_h есть граница области D_h .

Множество вершин ячеек, принадлежащих \bar{D}_h , обозначим этим же символом и назовем *сеткой*, введенной на $\bar{\mathbf{D}}$, а сами вершины – *узлами сетки*.

Множество узлов сетки, принадлежащих \mathbf{D} , будем обозначать как D_h , а сами такие узлы назовем *внутренними*. Множество узлов, принадлежащих границе $\partial\mathbf{D}$, назовем *граничными*.

Если $h_i = const$, то сетка по x_i называется *равномерной*.

В узлах сеток можно определять некоторые функции. Функции, областью определения которых является сетка, называются *сеточными функциями*.

Линейное уравнение относительно сеточной функции назовем *линейным разностным уравнением*

$$a_0(i) u_i + a_1(i) u_{i+1} = f(i); \tag{1}$$

$$a_0(i) u_i + a_1(i) u_{i+1} + a_2(i) u_{i+2} = f(i). \tag{2}$$

(1) есть разностное уравнение первого порядка,

(2) есть разностное уравнение второго порядка.

ПРИМЕРЫ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Левая разность

$$u_i - u_{i-1} = \nabla u_i. \quad (3)$$

Правая разность

$$u_{i+1} - u_i = \Delta u_i. \quad (4)$$

Центральная разность

$$\delta u_i = \frac{1}{2}(\Delta u_i + \nabla u_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2}. \quad (5)$$

Разности второго порядка:

$$\Delta^2 u_i = \Delta(\Delta u_i) = \Delta(u_{i+1} - u_i) = u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i; \quad (6)$$

$$\Delta \nabla u_i = \Delta(u_i - u_{i-1}) = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \quad (7)$$

или

$$\Delta^2 u_i = \Delta \nabla u_{i+1}.$$

Тогда разность m -го порядка можно записать

$$\Delta^m u_i = \Delta(\Delta^{m-1} u_i). \quad (8)$$

Как сеточные функции рассматривают дискретные или разностные аналоги дифференциальных уравнений математической физики

Пусть

$$\begin{aligned} Au &= f \text{ в } \mathbf{D}; \\ au &= g \text{ на } \partial \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (9)$$

где A – линейный оператор; a – линейный оператор граничных условий, есть некоторая задача математической физики.

Тогда её конечно-разностная аппроксимация будет иметь вид

$$\begin{aligned} A^h u^h &= f^h \text{ в } D_h; \\ a^h u^h &= g^h \text{ на } \partial D_h, \end{aligned} \quad (10)$$

где A^h, a^h – линейные операторы, зависящие от шага сетки $u^h \in U_h$, $f^h \in F_h$, $g^h \in G_h$.

С какой точностью мы аппроксимируем дифференциальные операторы разностными, а дифференциальную задачу (9) разностной задачей (10)?

Оценим погрешность разностной аппроксимации:

$$\psi(x) = A^h u^h - Au; \quad (11)$$

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3); \quad (12)$$

$$u' = \frac{du}{dx}; \quad u'' = \frac{d^2u}{dx^2},$$

u – достаточно гладкая функция в некоторой окрестности точки x :

$$(x - h_0, x + h_0), \quad h < h_0.$$

Пример 1

Пусть

$$Au = u' = \frac{du}{dx}. \quad (13)$$

Тогда

$$A^{h+}u = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u^{x+} = u'(x) + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2);$$

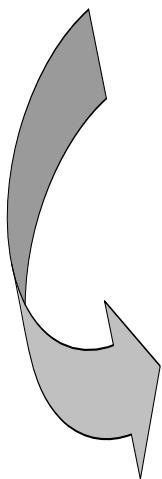
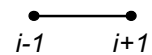
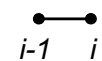
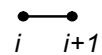
$$A^{h-}u = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u^{x-} = u'(x) - \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2);$$

$$A^{h0}u = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u^{x0} = u'(x) + O(h^2);$$

$$\psi_{x+} = u_{x+} - u'(x) = O(h);$$

$$\psi_{x-} = u_{x-} - u'(x) = O(h);$$

$$\psi_{x0} = u_{x0} - u'(x) = O(h^2).$$



То есть, левая и правая разности аппроксимируют дифференциальный оператор с погрешностью $O(h)$; центральная разность – с погрешностью $O(h^2)$.

Пример 2

Пусть

$$Au = u'' = \frac{d^2 u}{dx^2}. \quad (14)$$

Тогда

$$A^h u = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \quad \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ i-1 \quad i \quad i+1 \end{array}$$

или

$$A^h u = \frac{u_{x+} - u_{x-}}{h} = \frac{u_{x+}(x+h) - u_{x-}(x)}{h}.$$

Следовательно (с учетом (12)),

$$\begin{aligned} \psi = A^h u^h(x) - Au(x) &= \frac{1}{h^2} \left[u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \frac{h^3}{6} u'''(x) - O(h^4) - \right. \\ &\left. - 2u(x) + u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) - \frac{h^3}{6} u'''(x) + O(h^4) \right] - u''(x) = O(h^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Определение

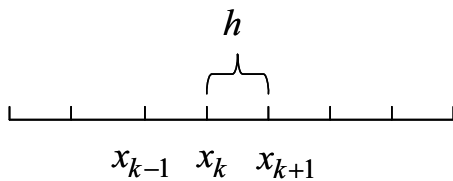
Пусть U – класс достаточно гладких функций, $u \in U$, заданных в окрестности некоторой точки x , содержащей при $h < h_0$ шаблон разностного оператора A^h (т. е., все дискретные точки попадают в эту окрестность). Будем говорить, что оператор A^h аппроксимирует дифференциальный оператор A с порядком $m > 0$ в точке x , если

$$\psi(x) = A^h u^h(x) - Au(x) = O(h^m). \quad (16)$$

**ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.
ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО
УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА**

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad 0 < x < 1; \quad (17)$$

$$u(0) = a, \quad u(1) = b.$$



Разобьем промежуток $[0,1]$ точками x_k на $N \geq 2$ равных промежутках $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ с постоянным шагом $h = x_{k+1} - x_k$.

Введем разностный оператор

$$(Au)_k = \frac{2u_k - u_{k+1} - u_{k-1}}{h^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (18)$$

Тогда разностная схема для задачи (17) запишется

$$\begin{cases} (Au)_k = f_k, & k = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = a, & u_N = b, \end{cases} \quad (19)$$

$$f_k = f(x_k).$$

Исключаем граничные точки из разностных уравнений с помощью граничных условий и приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{2u_1 - u_2}{h^2} &= \frac{a}{h^2} + f_1; & -\frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2} &= f_k; & k = 1, 2, \dots, N-1; \\ -\frac{u_{N-2} + 2u_{N-1}}{h^2} &= \frac{b}{h^2} + f_{N-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Система алгебраических уравнений (20) может быть представлена в матричном виде:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad (21)$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_{N-2} \\ g_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

$$g_k = \begin{cases} f_1 + \frac{a}{h^2}, & k = 1; \\ f_k, & k = 2, 3, \dots, N-2; \\ f_{N-1} + \frac{b}{2}, & k = N-1. \end{cases}$$

Порядок аппроксимации следует из формулы (15).

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f,$$

$$\frac{du}{dx} = a \text{ при } x = 0; \quad \frac{du}{dx} = b \text{ при } x = 1,$$

где a, b – заданные константы.

Для получения разностного аналога задачи второго порядка аппроксимации решение удобно продолжить вне области определения $[0, 1]$, еще на один интервал h слева и справа от границы.¹

$$x_k = kh, \quad k = -1, 0, 1, \dots, N, N + 1.$$

Тогда

$$\frac{-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}}{h^2} = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, N;$$

$$\frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = a; \quad \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} = b.$$

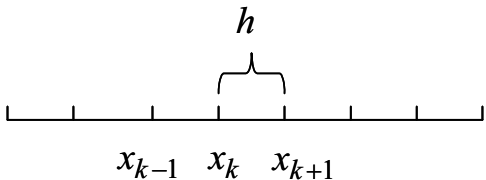
Исключая u_{-1} и u_{N-1} из разностной аппроксимации граничных условий с помощью разностной аппроксимации дифференциального уравнения (в точках $k = 0$ и $k = N$ соответственно), приходим к задаче (21), где

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_{N-1} \\ g_N \end{pmatrix},$$

$$g_k = \begin{cases} \frac{f_0}{2} - \frac{a}{h}, & k = 0; \\ f_k, & k = 1, 2, \dots, N-1; \\ \frac{f_N}{2} + \frac{b}{h}, & k = N. \end{cases}$$

¹ Возможен иной способ аппроксимации граничных условий.

ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ



x_{k-1} x_k x_{k+1}

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t);$$

$$u(0, t) = a(t); \quad u(1, t) = b(t); \quad (23)$$

$$u(x, 0) = u^0(x),$$

где $c^2 = \kappa = (\lambda/c\rho)$ – коэффициент температуропроводности; f, a, b, u^0 – заданные достаточно гладкие функции.

Разностный аналог дифференциальной задачи строим в два приема:

- 1) Записываем систему обыкновенных дифференциальных уравнений на разностной сетке, аппроксимируя конечными разностями только пространственные операторы:

$$\frac{1}{c^2} \frac{du_k}{dt} + \frac{-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}}{h^2} = f_k(t);$$

$$u_0 = a(t); \quad u_N = b(t); \quad (24)$$

$$u_k = u^0 \text{ при } t = 0;$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Исключаем граничные точки с помощью граничных условий, то есть перейдем от неоднородных граничных условий к однородным:

$$\frac{1}{c^2} \frac{du_k}{dt} + \frac{-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}}{h^2} = g_k(t);$$

$$u_0 = 0; \quad u_N = 0, \quad (25)$$

где

$$g_k = \begin{cases} \frac{a}{h^2} + f_1, & k = 1; \\ f_k, & k = 2, 3, \dots, N-2; \\ \frac{b}{h^2} + f_{N-1}, & k = N-1. \end{cases}$$

2) Проинтегрируем каждое из уравнений (25) по времени на интервале

$$t_j \leq t \leq t_{j+1} \quad (26)$$

$$\frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} = \frac{\bar{u}_{k-1}^j - 2\bar{u}_k^j + \bar{u}_{k+1}^j}{h^2} + \bar{g}_k^j, \quad (27)$$

где

$$\bar{u}_k^j = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_j}^{t_{j+1}} u_k dt; \quad \bar{g}_k^j = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g_k dt; \quad (28)$$

$$u_k^j = u_k(t_j); \quad \tau = c^2 \Delta t; \quad \Delta t = t_{j+1} - t_j; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Различные разностные схемы мы будем получать на основе тех или иных аппроксимаций интегралов в (28).

Предположим, что имеет место одна из трех аппроксимаций:

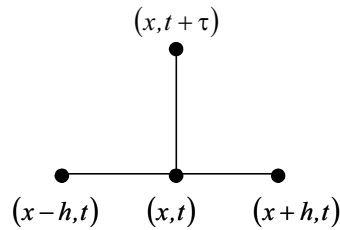
$$\frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} u_k dt \approx \begin{cases} u_k^j \\ u_k^{j+1} \\ \frac{1}{2}(u_k^j + u_k^{j+1}) \end{cases}; \quad (29)$$

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g_k dt \approx \begin{cases} g_k^j \\ g_k^{j+1} \\ \frac{1}{2}(g_k^j + g_k^{j+1}) \end{cases}.$$

НАИБОЛЕЕ РАСПРОСТРАНЕННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Явная схема треугольника

$$\frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} = \frac{u_{k-1}^j - 2u_k^j + u_{k+1}^j}{h^2} + g_k^j. \quad (30)$$



Неявная схема треугольника

$$\frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} = \frac{u_{k-1}^{j+1} - 2u_k^{j+1} + u_{k+1}^{j+1}}{h^2} + g_k^{j+1}. \quad (31)$$

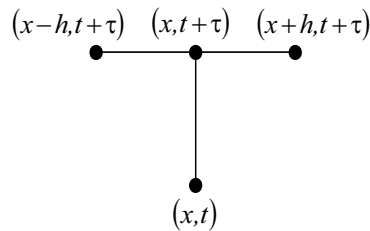
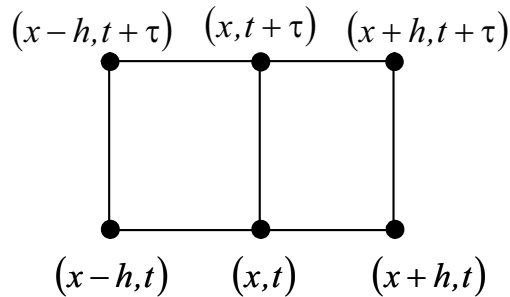


Схема Кранка-Николсона

$$\frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} = \frac{1}{2} \left[\frac{u_{k-1}^j - 2u_k^j + u_{k+1}^j}{h^2} + \frac{u_{k-1}^{j+1} - 2u_k^{j+1} + u_{k+1}^{j+1}}{h^2} \right] + \frac{g_k^j + g_k^{j+1}}{2}. \quad (32)$$



Точки, принадлежащие одной гиперплоскости $t = t_j$, называются *слоем*.

ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}} \rightarrow u_t = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} = \frac{\hat{u} - u}{\tau}; \quad u = u(x, t); \quad \hat{u} = u(x, t + \tau);$$

$$\check{u} = u(x, t - \tau); \quad (33)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \rightarrow u_{xx} = \frac{u(x + h) + u(x - h) - 2u(x)}{h^2}.$$

Пользуясь формулами

$$u_t = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) = \frac{\partial u(x, t + \tau/2)}{\partial t} + O(\tau^2);$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + O(h^4);$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x, t + \tau/2)}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u(x, t + \tau/2)}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2); \quad (34)$$

$$\hat{u}_{xx} = \frac{\partial^2 u(x, t + \tau/2)}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u(x, t + \tau/2)}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2),$$

которые получаются с помощью разложений функций и их производных в ряды Тейлора, найдем оценку порядка аппроксимации для построенных разностных схем (30), (31) и (32):

$$\psi_1 = O(h^2 + \tau); \quad \psi_2 = O(h^2 + \tau); \quad \psi_3 = O(h^2 + \tau^2). \quad (35)$$

Имеем однопараметрическое семейство разностных операторов:

$$A_{ht}^\sigma u = u_t - \left(\sigma \hat{u}_{xx} + (1 - \sigma) u_{xx} \right). \quad (36)$$

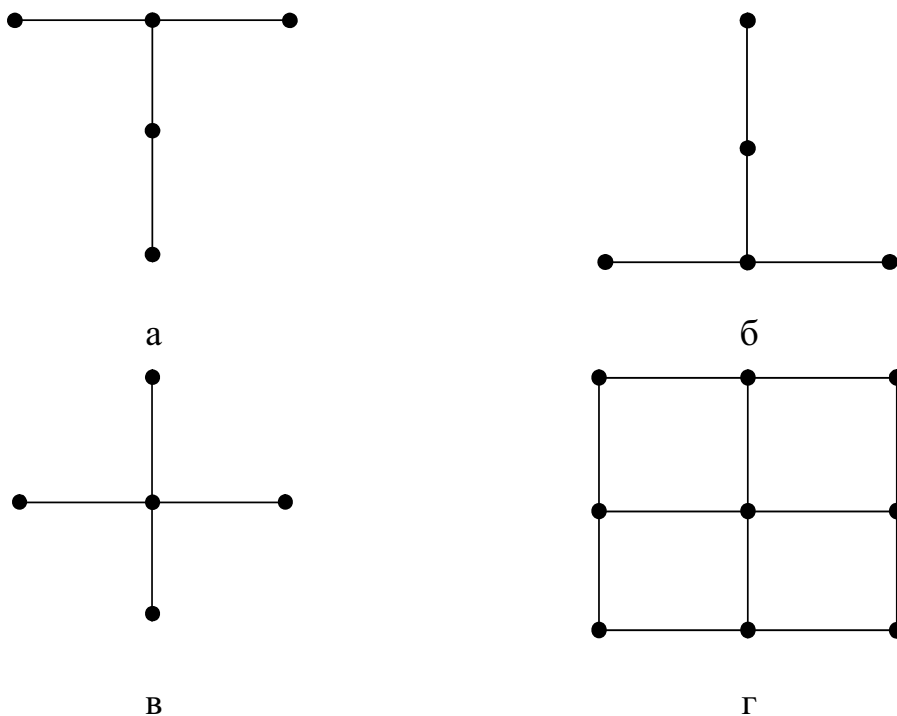
ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (37)$$

В этом случае для записи разностного оператора нужно использовать значения сеточной функции для трех моментов времени:

$$t - \Delta t, \quad t, \quad t + \Delta t.$$

Минимальным для этой цели является пятиточечный шаблон:



Например, разностная аппроксимация, соответствующая шаблону (в), будет иметь вид:

$$L_{h\tau} u = u_{-+} - u_{-+}. \quad (38)$$

Разностная аппроксимация второй производной по времени имеет вид

$$u_{-+}^{\wedge}(x, t) = \frac{1}{\tau^2} [u(x, t + \tau) - 2u(x, t) + u(x, t - \tau)] = \frac{1}{\tau^2} [\hat{u} - 2u + \check{u}].$$

Аналогично можно записать оператор

$$L_{h\tau} u = u_{-+} - \hat{u}_{-+}.$$

Более подробная запись для шаблона (в):

$$\frac{u_k^{j+1} - 2u_k^j + u_k^{j-1}}{\tau^2} = \frac{u_{k-1}^j - 2u_k^j + u_{k+1}^j}{h^2}, \quad (39)$$

для шаблона (б)

$$\frac{u_k^{j+1} - 2u_k^j + u_k^{j-1}}{\tau^2} = \frac{u_{k-1}^{j-1} - 2u_k^{j-1} + u_{k+1}^{j-1}}{h^2}, \quad (40)$$

для шаблона (а)

$$\frac{u_k^{j+1} - 2u_k^j + u_k^{j-1}}{\tau^2} = \frac{u_{k-1}^{j+1} - 2u_k^{j+1} + u_{k+1}^{j+1}}{h^2} \quad (41)$$

Имеем двухпараметрическое семейство разностных операторов

для девятиточечного шаблона (г)

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{j+1} - 2u_k^j + u_k^{j-1}}{\tau^2} = & \sigma_1 \frac{u_{k-1}^{j+1} - 2u_k^{j+1} + u_{k+1}^{j+1}}{h^2} + \\ & + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \frac{u_{k-1}^j - 2u_k^j + u_{k+1}^j}{h^2} + \sigma_2 \frac{u_{k-1}^{j-1} - 2u_k^{j-1} + u_{k+1}^{j-1}}{h^2}; \end{aligned} \quad (42)$$

порядок аппроксимации

$$\psi = O(\tau^2 + h^2). \quad (43)$$

Явная схема разрешается без труда. Так, для уравнения теплопроводности имеем

$$\hat{u}_k = \frac{\tau}{h^2} \left[\overset{\vee}{u}_{k-1} - 2\overset{\vee}{u}_k + \overset{\vee}{u}_{k+1} \right] + \tau \overset{\vee}{f}_k + \overset{\vee}{u}_k; \quad (44)$$

для волнового уравнения

$$\hat{u}_k = \frac{\tau^2}{h^2} \left[\overset{\vee}{u}_{k-1} - 2\overset{\vee}{u}_k + \overset{\vee}{u}_{k+1} \right] + 2\overset{\vee}{u}_k - \overset{\vee}{u}_k. \quad (45)$$

В других случаях мы приходим к системе алгебраических уравнений вида:

$$a_i u_{i-1} - c_i u_i + b_i u_{i+1} = -f_i; \quad (46)$$

$$a_i \neq 0, b_i \neq 0; \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

аппроксимация граничных условий общего вида:

$$u_0 = \kappa_1 u_1 + \mu_1; \quad u_N = \kappa_2 u_{N-1} + \mu_2 \quad (47)$$

В матричной записи имеем систему уравнений:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (48)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\kappa_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i & -c_i & b_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\kappa_2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ -f_1 \\ -f_2 \\ \dots \\ -f_{N-1} \\ -f_N \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Задачи такого типа требуют специальных методов решения.

Учебное издание

КНЯЗЕВА Анна Георгиевна

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОНЯТИЯ О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

Методические указания к выполнению лабораторных работ
по курсу «Теплофизические основы высокотемпературных
технологий в машиностроении»
для студентов V курса,
обучающихся по направлению 150900 «Технология, оборудование
и автоматизация машиностроительных производств»,
специальности 151001 «Технология машиностроения»,
специализации 151001.01 «Технология автоматизированного производства»,
150917 «Физика высоких технологий в машиностроении»

Редактор	<i>Р.Д. Игнатова</i>
Верстка	<i>Д.В. Сотникова</i>
Дизайн обложки	<i>О.Ю. Аршинова О.А. Дмитриев</i>

Подписано к печати 29.04.2008. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать XEROX. Усл. печ. л. 1,04. Уч.-изд. л. 0,94.

Заказ 414. Тираж 100 экз.



Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.