

Ю.И. Тюрин, И.П. Чернов, Ю.Ю. Крючков

Ф И З И К А

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

*Допущено Научно-методическим Советом по физике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по техническим направлениям подготовки
и специальностям*

2-е издание

Издательство
Томского политехнического университета
2008

УДК 537.1+537.6(075.8)
ББК 22.33я73
Т98

Тюрин Ю.И.
Т98 Физика. Электричество и магнетизм: учебник для технических университетов / Ю.И. Тюрин, И.П. Чернов, Ю.Ю. Крючков. – 2-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 468 с.

ISBN 5-98298-266-0

Учебник, представляющий собой курс лекций по физике для студентов технических университетов, читаемый авторами в течение многих лет студентам Томского политехнического университета, посвящен физике электромагнитных взаимодействий. Основное внимание уделено раскрытию физического смысла фундаментальных законов теории электромагнитных явлений и выработке у студентов практических навыков их использования при решении профессиональных задач. Пособие содержит многочисленные примеры, упражнения и задачи.

Учебник разработан в рамках реализации Инновационной образовательной программы ТПУ по направлению «Технологии водородной энергетики, энергоэкономия и возобновляемые источники энергии» и предназначен для преподавателей, студентов, бакалавров, магистров технических университетов.

УДК 537.1+537.6(075.8)
ББК 22.33я73

Рецензенты

Кафедра общей и экспериментальной физики
Томского государственного университета
(зав. кафедрой – доктор физ.-мат. наук, профессор В.П. Демкин)

Кафедра физики
Московского государственного индустриального университета
(зав. кафедрой – доктор физ.-мат. наук, профессор Н.П. Калашников)

ISBN 5-98298-266-0

© Тюрин Ю.И., Чернов И.П., Крючков Ю.Ю., 2007
© Томский политехнический университет, 2008,
аппарат издания
© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

Существует настоятельная потребность в современном курсе физики для технических университетов, сочетающем глубину и академичность изложения наряду с широтой и практической направленностью включенного в него материала. Обучение по такому курсу с использованием современных мультимедийных технологий позволит выпускнику технического университета профессионально овладеть одной из основных фундаментальных дисциплин – физикой, творчески усвоить принципы и подходы естественных наук, а также научиться реализовывать эти принципы в конкретных инновационных инженерных решениях, конкурентоспособных на современном рынке товаров и услуг.



Настоящими томами – «Электричество и магнетизм», «Электродинамика», подготовленным профессорами Томского политехнического университета, продолжено издание курса физики для технических университетов, удачно начатое, получившим доброжелательные отзывы, первыми томами – «Механика», «Молекулярная физика, термодинамика», Москва: изд-во «Высшая школа», 2007.

Предлагаемый курс удобен для преподавателей и студентов, обеспечивает возможность выбора различных траекторий обучения в техническом университете – от минимально необходимого, определяемого требованиями госсов к специалистам, бакалаврам, магистрам, до элитного, совмещающего разумную фундаментальность подходов с выработкой практических навыков использования физической теории для решения научно-исследовательских, инженерно-технических и мировоззренческих задач современного мира. Авторами заметно обновлен материал, по сравнению с традиционными курсами – изложены принципы работы топливного элемента, плазменных экранов, магнитной записи в винчестерах, физические основы явления взрывной электронной эмиссии и т.д.

В курсах «Электричество и магнетизм», «Электродинамика» отражены существенные научные результаты, полученные учеными Томского политехнического – создание первого Российского бетатрона (А.А. Воробьев, Л.М. Ананьев, В.И. Горбунов,

Б.Н.Родимов, В.А. Москалев), открытие явления взрывной электронной эмиссии (коллектив под руководством Г.А. Месяца).

Успешное применение фундаментальных физических понятий происходит в процессе творческого развития у студентов практических навыков – с этой целью в учебник включено большое число примеров, упражнений и задач.

Для настоящего курса физики в Томском политехническом университете реализовано его мультимедийное сопровождение, включая проблемно-ориентированные лекции, практические и лабораторные занятия.

Предлагаемый курс физики может оказать реальную помощь преподавателям и студентам в деле становления современного выпускника Российского вуза, обладающего традиционно глубокой фундаментальной подготовкой и владеющего навыками непрерывного пополнения своих знаний, способного оперативно адаптироваться к постоянно меняющимся внешним условиям, быть конкурентно способными на рынке труда и достойно представлять высокий статус современного инновационного академического университета.

*Президент Ассоциации
инженерного образования России,
ректор Томского политехнического университета,
профессор Похолоков Ю.П.*

1. РАЗВИТИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ И МАГНЕТИЗМЕ

Во второй части курса мы займемся изучением, возможно, самого важного раздела физики – электромагнитных взаимодействий. Эти взаимодействия не только объясняют все электрические и магнитные явления, но и обеспечивают силы, благодаря которым вещество на атомном и молекулярном уровне существует как целое. Оптика, в сущности, также имеет дело с электромагнитными взаимодействиями, поскольку свет представляет собой электромагнитное излучение. Изучение электромагнитных взаимодействий на основе квантовой механики позволяет объяснить существование и свойств атомов, молекул и твердых тел. Таким образом, вторая часть курса физики посвящена теории электромагнетизма и ее приложениям.

Электромагнитные явления играют ведущую роль во многих отраслях науки и техники и определяют развитие энергетики, транспорта, вычислительной техники, физики плазмы, термоядерного синтеза и т.д. Магнитная разведка, дефектоскопия, электромагнитные линзы, магнитная запись информации, поездка на магнитной подушке – вот далеко не полный перечень перспективных областей промышленного применения электромагнитного поля. Неотъемлемой частью компьютерного томографа, без которого невозможна современная медицинская диагностика, является также источник магнитного поля. В течение многих лет не ослабевает интерес к электромагнитным полям биологических объектов, повышено внимание к среде их обитания, а также вопросам влияния магнитного поля Земли на человека.

Первые наблюдения электрических и магнитных явлений относятся к далекому прошлому. Древние греки знали, что существует особый минерал – магнитный железняк, способный притягивать железные предметы. Залежи этого минерала находились возле города Магнезии в Малой Азии, от названия которого и произошло слово «магнит».

Магнитная стрелка применялась для ориентации ещё в древнем Китае за 1100 лет до нашей эры, где для знатных лиц изготовлялись прогулочные тележки, оснащённые магнитным указателем, который постоянно был направлен на юг. В Европу компас попал только в XII столетии. Развитие мореплавания стимулировало исследования в области электричества и магнетизма.

Из древней Греции до нас также дошли предания о способности натертого янтра притягивать легкие тела (Фалес Ми-



Магнитный
указатель

Милетский). Греки называли янтарь «электрон» – от этого (спустя много веков) и произошло слово «электричество». Конечно, древние народы наблюдали и другие электрические явления – яркие вспышки молний и слышали грозовые раскаты, но не догадывались, что свойства натертого янтаря и явление грозы в атмосфере имеют одну и ту же природу. И еще одно любопытное явление не осталось незамеченным древними народами, жившими на побережье Средиземного моря и в бассейне Нила. Речь идет об «электрических» рыбах – skate и угре. Греки их называли «наркэ», что означает «парализующий». При соприкосновении с этими рыбами человек испытывал сильные удары, так как разряд, производимый электрическим угрем, происходит при напряжении около 300 В.

Упадок античной культуры заметно отразился на изучении электрических и магнитных явлений. Из многочисленных источников следует, что практически до 1600 г. не было сделано ни одного открытия в этой области.

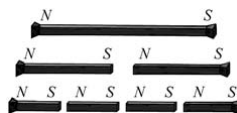
Становление электростатики и магнитостатики. В XVI–XVII вв. в Европе все большее распространение получает экспериментальный метод научных исследований, одним из основоположников которого по праву называют Леонардо да Винчи. В его записной книжке есть такие знаменательные слова: «Не слушай учения тех мыслителей, доводы которых не подтверждены опытом». Экспериментальный метод исследований нанес заметный удар по мистицизму и разного рода вымыслам, предрассудкам.



В. Гильберт

Несомненная заслуга в изучении электричества и магнетизма принадлежит английскому врачу Вильяму Гильберту (1540–1603). Большим шагом вперед стала его книга «О магните, магнитных телах и великом магните Земли», вышедшая в 1600 г. Гильберт доказал, что электрическими свойствами обладает не только янтарь, но и многие другие тела – алмаз, сера, смола, горный хрусталь, электризующиеся при их натирании. Эти тела Гильберт назвал «электрическими», введя таким образом в науку термин «электричество». Гильберт экспериментально исследовал свойства магнита, природу земного магнетизма. К известным уже фактам существования двух

полюсов магнита, двух видов взаимодействия между ними, намагничивания тел Гильберт прибавил важные наблюдения: образование новых полюсов при делении магнита на две части, усиление действия магнитных полюсов железной арматурой, намагничивание железных проволок магнитным полем Земли, потерю магнетизма при нагревании, намагничивание магнитным полем Земли сильно нагретого куска железа при его остывании. Экспериментируя с магнитом, имеющим форму шара, и маленькой магнитной стрелкой, он пришел к выводу, что Земля представляет собой большой шарообразный магнит, полюса которого расположены возле географических полюсов, покончив тем самым со всеми преданиями о великих магнитных горах на Северном полюсе или о магнитной силе, исходящей из Полярной звезды.



Переломленный магнит
остается магнитом

Познакомившись с книгой Гильберта, Отто фон Герике создал простейшую электростатическую машину. Он изготовил шар из серы, насадил его на железную ось, укрепленную на деревянном штативе. При помощи ручки шар мог вращаться и натирался ладонями рук или куском сукна.



Электростатическая машина
Отто фон Герике

Значительным шагом в изучении свойств электрических зарядов стали исследования члена Лондонского королевского общества Стефана Грея (1670–1736) и члена Парижской Академии наук Шарля Франсуа Дюфе (1698–1739). В результате многочисленных экспериментов Грей удалось установить, что «электрическая способность стеклянной трубки притягивать легкие тела может быть передана другим телам», и показать (1729 г.), что тела в зависимости от их отношения к электричеству можно разделить на две группы: проводники (металлическая нить, проволока) и непроводники (шелковая нить). Продолжая опыты Грея, французский ученый Дюфе в 1734 г. установил существование двух родов электричества. Тела, обладающие одним видом электричества, взаимно отталкиваются, а тела, содержащие разные виды электричества, наоборот, притягиваются.

Следующим шагом в изучении электрических явлений было изобретение лейденской банки, которое было сделано почти

одновременно немецкими учеными Клейстом в Померании и Мушенбруком в Лейдене (1745–1746 гг.). Опыт был быстро популярен и получил широкую популярность, несмотря на предостережения Мушенбрука об «ужасных» ощущениях при разряде. Важность этого изобретения заключалась в том, что теперь физики могли получать большие электрические заряды и экспериментировать с ними.

Закон сохранения электрического заряда. С середины XVIII в. учение об электричестве и магнетизме развивается более



Б. Франклин

быстрыми темпами. В это время формируются понятие электрического заряда и закон сохранения электрического заряда, а также намечаются две основные концепции в понимании электрических и магнитных явлений – концепция дальнего действия и концепция ближнего действия. Понятие электрического заряда и закон его сохранения формируются в работах Франклина. Известный американский ученый и общественный деятель Бенджамин Франклин (1706–1790) предполагает существование специальной электрической материи, которая состоит из мельчайших частиц, способных легко проникать в обычное вещество. Между частицами электрической материи действуют силы отталкивания, а между этими частицами и частицами обычного вещества – силы притяжения. По Франклину, при электризации никакая электрическая материя не создается, она только перераспределяется. И если одно из тел электризуется положительно, то другие тела должны электризоваться отрицательно. При этом количество положительного электричества равно образовавшемуся отрицательному электричеству. Предполагается, что Франклином впервые введены такие термины, как «батарея», «заряд», «разряд», «конденсатор».

Научное обоснование атмосферного электричества. После изобретения лейденской банки, когда ученые смогли наблюдать сравнительно большие искры при электрическом разряде, возникла мысль об электрической природе молнии. Франклин высказал эту идею в письме в Лондонское королевское общество в 1750 г. В этом письме он объяснял так же, как можно проверить высказанное предположение. Он предлагал поставить на башню будку, на крышу которой вывести железный шест. Помещенный

внутри будки человек в случае грозы мог бы извлекать из шеста электрические искры.

Содержание письма Франклина стало известно во Франции. О нем узнал француз Далибар, который в мае 1752 г. проделал опыт, о котором писал Франклин.

У себя в саду, возле Парижа, Далибар установил высокий железный шест, изолировав его от земли. В то время когда собиралась гроза, он попробовал извлечь электрические искры из шеста. Опыт удался. Действительно, Далибару удалось получить электрические искры.

В том же году, летом, Франклин в Америке проделал похожий опыт. Вместе со своим сыном он запустил змей во время грозы. Когда нить, которой был привязан змей, намочил, то из нее можно было извлекать электрические искры. Франклину даже удалось зарядить при этом лейденскую банку.

После того как об опытах Франклина стало известно в Петербурге, подобными же испытаниями занялись русские академики Рихман и Ломоносов. Они соорудили более удобную установку для изучения атмосферного электричества, названную громовой машиной.

Громовая машина представляла собой заостренный железный шест, установленный на крыше дома. От железного шеста в дом шла проволока. Конец этой проволоки был соединен с электрическим указателем, т.е. с простейшим электрометром, изобретенным Рихманом, который отличался от электроскопа тем, что был снабжен деревянным квадрантом со шкалой, разделенной на градусы. Это усовершенствование позволило измерять «большую и меньшую степень электричества». Ломоносов и Рихман установили, что молния – это электрические разряды в атмосфере и «сама электрическая сила грома и молнии причина». 25 июня 1753 г. во время грозы Рихман был убит ударом в лоб «бледно-синеватым огненным шаром». В ноябре 1753 г. Ломоносов выступил с докладом «Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих, предложенное от Михаила Ломоносова». По утверждению Ломоносова, атмосферное электричество возникает в результате трения пылинок и других взвешенных частичек воздуха с каплями воды, происходящего при вертикальных перемещениях воздушных потоков. Северные сияния, по мнению Ломоносова, также имеют электрическую природу. Он рассматривал их как



М.В. Ломоносов

свечение, вызываемое электрическими зарядами в верхних слоях атмосферы. Свои воззрения на явления электричества Ломоносов сформулировал в 1756 г. Он отрицает существование особой электрической материи и рассматривает электричество как форму движения эфира. Это был новый шаг к материалистическому объяснению явлений природы. Теория получила дальнейшее развитие в XIX в., ее придерживались Фарадей и другие ученые. Фарадей считал электричество движением некой, заполняющей все пространство, пронизывающей все тела упругой среды.

Закон Кулона. Важнейшим шагом в развитии количественных исследований электрических и магнитных явлений было установление закона о силе взаимодействия между наэлектризованными телами и магнитными полюсами. В 1759 г. вышла работа петербургского академика Франца Ульриха Теодора Эпинуса (1724–1802) «Опыт теории электричества и магнетизма», где Эпинус задолго до Кулона, исходя из аналогии с силами тяготения, высказал предположение о том, что силы взаимодействия электрических и магнитных зарядов изменяются обратно пропорционально квадратам расстояния между ними.



Г. Кавендиш

Иначе поступил английский ученый Генри Кавендиш (1731–1810). Он также исходил из аналогии между силами тяготения и силами электрического взаимодействия. Но он пошел дальше, нежели Эпинус, и проверил на опыте выводы, вытекающие из этой аналогии. Известно, что если взять полый шар с равномерно распределенной массой, т.е. с постоянной плотностью, то сила тяготения, действующая внутри шара на какую-либо массу, будет равна нулю. Этот результат справедлив только для случая, когда сила обратно пропорциональна именно квадрату расстояния. Полученный вывод можно перенести на случай электрических сил.

Кавендиш в 70-х гг. XVIII в. проделал такой опыт. Он взял заряженный металлический шар и поместил его внутрь полого металлического шара, образованного двумя полушариями. Внешний полый шар сначала был не заряжен.

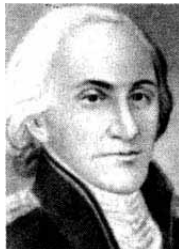
Затем внутренний шар тонкой проволокой соединялся с внешним шаром, для чего в последнем было сделано маленькое отверстие. Как только внутренний шар соединял проволокой с полушариями, так сейчас же электричество начинало перетекать с внутреннего шара по проволоке на полушария, равномерно распределяясь на них. Ведь между зарядами, находящимися на

шаре, действовала сила отталкивания, но пока шар изолирован, заряды не могли его покинуть. Попав же на внешний шар, заряды равномерно распределялись на его поверхности, и их действие на заряд, находящийся внутри шара, прекращалось.

Перетекание зарядов с внутреннего шара на внешний происходит до тех пор, пока они все не покинут внутренний шар. Отсюда Кавендиш и сделал вывод о том, что силы взаимодействия между электрическими зарядами обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними, поскольку при любом другом законе взаимодействия заряд внутри проводящей сферы не мог быть равным нулю.

Таким образом, Кавендиш первым экспериментально установил закон взаимодействия электрических зарядов. Однако он не обнародовал своего открытия. И эта работа оставалась при его жизни неизвестной. О ней узнали гораздо позже, только в середине позапрошлого столетия, после того как Максвелл опубликовал ее. Конечно, к этому времени она имела уже чисто исторический интерес.

Не зная об исследованиях Кавендиша, французский ученый Шарль Кулон (1736–1806) в 80-х гг. XVIII в. проделал ряд опытов и установил основной закон электростатики, получивший его имя. В течение нескольких лет Кулон проводил эксперименты с помощью прибора, который вначале был предназначен для изучения законов закручивания шелковых и волосяных нитей, а также металлических проволок. Кулон установил, что сила кручения пропорциональна углу закручивания. Он решил использовать этот прибор для измерения малых электрических и магнитных сил. В результате многочисленных экспериментов он установил, что сила взаимодействия наэлектризованных тел пропорциональна количеству электричества заряженных тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Этот закон Кулон распространил и на взаимодействие магнитных полюсов. Кулоном аналитически и экспериментально было доказано, что электричество распространяется по поверхности проводника, а также равномерно распределяется по поверхности изолированной проводящей сферы.



Ш. Кулон

Открытие электрического тока. Вплоть до последней четверти XVIII в. ученым были известны только явления статиче-



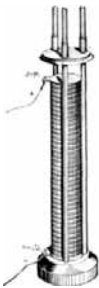
Л. Гальвани

названного «животным»). Исследованием мышечных движений под воздействием электричества занялся в 1773 г. профессор анатомии Болонского университета Луиджи Гальвани (1737–1798). Первые электрофизиологические опыты над лягушками относятся к 1780 г. Спустя 11 лет он опубликовал результаты своих исследований в «Трактате о силах электричества при мышечном движении», получившем широкую известность.



А. Вольта

Случилось так, что при препарировании лягушек в его лаборатории кто-то привел в действие электрическую машину. В момент проскакивания электрической искры мышцы лягушки, к которой прикасались скальпелем, стали сокращаться. Мышцы сокращались и во время грозового разряда. Но, к удивлению ученого, они сокращались и при ясной погоде. Причина была в том, что лапки подвешивались на медных крючках к железной ограде и при контакте разнородных металлов возникала разность потенциалов, вызывающая раздражение нервов и потому сокращение мышц. Гальвани сделал вывод о существовании «животного» электричества, считая, что мышца и нерв есть источник электричества, замыкаемый проводником. Его опыты вызвали большой интерес среди физиков, но их взгляды на явления, наблюдаемые Гальвани, разошлись. Некоторые физики оспаривали вообще существование «животного» электричества. К ним принадлежал профессор физики в Павийском университете Алессандро Вольта (1745– 1827). После многочисленных опытов он все более и более проникся мыслью, что биологический объект –



Вольтов столб

лягушечья лапка – имеет второстепенное значение, и пришел к выводу, что источником электричества является контакт двух разнородных металлов. При соприкосновении различных металлов происходит разложение «естественного» электричества: электричество одного знака собирается на одном металле, другого – на другом. Силу, возникающую при контакте двух металлов и разлагающую их электричество, Вольт назвал электродвижущей силой. Эта сила «перемещает электричество так, что получается разность напряжений» между металлами. Эксперименты привели Вольту к выводу, что непрерывный электрический «флюид» может возникнуть лишь в замкнутой цепи, составленной из различных проводников – металлов и жидкостей. опыты Вольты завершились построением в 1799 г. первого источника непрерывного электрического тока, составленного из медных и цинковых кружков, переложенных суконными прокладками, смоченными водой или кислотой.

Этот прибор, о котором А. Вольт впервые сообщил президенту Лондонского королевского общества в марте 1800 г., был назван им «электродвижущим аппаратом», а позже его стали называть «гальваническим, или вольтовым, столбом». Вольтов столб в различных модификациях долгое время оставался единственным источником электрического тока. В 1881 г. на Международном конгрессе электриков в Париже единице напряжения было присвоено наименование «вольт». Создание длительно действующего источника электричества позволило начать изучение действий постоянного электрического тока. В 1800 г. члены Лондонского королевского общества Антони Карлейль и Вильям Никольсон произвели ряд опытов с вольтовым столбом, которые привели их к открытию нового явления – электролиза воды и установлению химического действия тока. Тепловые действия тока были обнаружены при накаливании тонких металлических проводников и зажиганием посредством искр легко воспламеняющихся веществ. Световые явления наблюдались в виде искр различной длины и яркости.

Открытие Вольты положило начало целому ряду новых направлений развития физики и техники. Гальванические элементы давали токи совсем другой силы и продолжительности, чем те, которые получались путем разряда конденсатора. Благодаря гальваническим элементам стали доступны исследованию магнитные действия тока.

Электролиз, в котором мы теперь видим причину возникновения гальванического тока, был описан уже в 1797 г. до создания элемента Вольты Александром Гумбольдтом (1769–1859). Он

наблюдал электролиз в цепи одного цинкового и одного серебряного электродов с прослойкой воды между ними. Иоганн Вильгельм Риттер (1776–1810) получил путем электролиза металлическую медь из раствора медного купороса. Он обнаружил также идентичность статического и гальванического электричества, применяя для электролиза разряды лейденской банки. Риттер первый установил, что химические превращения являются причиной возникновения тока в гальваническом элементе.

В 1800 г. Гемфри Дэви (1778–1829) начал свои знаменитые электролитические исследования, которые привели его в 1807 г. к открытию гальванического выделения щелочных металлов. Благодаря количественному измерению массы продуктов электролиза он открыл для исследования направление, которое способствовало в 1834 г. открытию закона эквивалентности Майклом Фарадеем (1791–1867), а в 1887 г. к появлению теории электролитической диссоциации Сванте Аррениуса (1859–1927).

Открытия Эрстеда и Араго. Закон Био – Савара. В начале XIX в. существовало много различных предположений о силах, действующих между электрическими и магнитными флюидами, поскольку уже давно были известны факты, указывающие на существование связи между электричеством и магнетизмом. Еще в XVII в. были известны случаи перемагничивания стрелки компаса во время ударов молнии. В XVIII в. после установления электрической природы молнии были сделаны попытки намагнитить железо, пропуская через него разряд лейденской банки, а позже – ток от гальванической батареи. Однако эти попытки не дали ожидаемого результата.



Х. Эрстед

В 1802 г. итальянский физик Джованни Романьози обнаружил, что электрический ток, протекающий по проводнику, вызывает отклонение свободно вращающейся магнитной стрелки, находящейся вблизи этого проводника. Однако тогда, в первые годы изучения электрического тока, явление, открытое Романьози, имевшее, как впоследствии выяснилось, громадное значение, не получило должной оценки.

Исследовать магнитное действие электрического тока начинают после открытия датским ученым Хансом Кристианом Эрстедом (1777–1851) действия электрического тока на магнитную стрелку. Эрстед впервые доказал связь между электрическими и магнитными явлениями. Открытие Эрстеда,

сделанное им в 1819 г. и опубликованное в 1820 г., заключалось в следующем. Эрстед обнаружил, что если возле магнитной стрелки поместить прямолинейный проводник, направление которого совпадает с направлением магнитного меридиана, и пропустить через него электрический ток, то магнитная стрелка отклоняется.

Открытие Эрстеда стимулировало новые исследования. В том же 1820 г. Араго показал, что проводник с током действует на железные предметы, которые при этом намагничиваются.

Французские физики Био и Савар установили закон действия прямолинейного проводника с током на магнитную стрелку. Поместив магнитную стрелку около прямолинейного проводника с током и наблюдая изменение периода колебаний этой стрелки в зависимости от расстояния до проводника, они установили, что сила, действующая на магнитный полюс со стороны прямолинейного проводника с током, направлена перпендикулярно проводнику и прямой, соединяющей проводник с полюсом, а ее величина обратно пропорциональна этому расстоянию. После введения понятия элемента тока был установлен закон, известный ныне под названием закона Био – Савара.

Работы Ампера. В том же 1820 г. был получен еще один важный результат в области электромагнетизма французом Андре Мари Ампером (1775–1836).

В начале сентября 1820 г. Араго сообщил французским академикам об открытии Эрстеда и вскоре продемонстрировал его опыты на заседании Парижской академии наук. Ампер чрезвычайно заинтересовался этим открытием. Прежде всего, оно натолкнуло его на мысль о возможности сведения магнитных явлений к электрическим и отказ от представления о специальной магнитной жидкости. В конце 1820 – начале 1821 г. им было сделано более десяти докладов. В них Ампер сообщал как о своих экспериментальных исследованиях, так и о теоретических соображениях. Ампер показал на опыте взаимодействие двух прямолинейных проводников с током, взаимодействие двух замкнутых токов. Проводя опыты с катуш-



Настольный компас Эрстеда, на котором он наблюдал отклонение стрелки при включении и выключении электрического тока



Андре Мари Ампер

кой с током (он первый назвал ее соленоидом), Ампер показал эквивалентность магнитного поля соленоида полю постоянного магнита. Позже он показал эквивалентное поведение соленоида и магнитной стрелки в магнитном поле Земли.

Исследования магнитного поля кругового тока привели его к мысли, что постоянный магнетизм объясняется существованием элементарных круговых токов, обтекающих частицы, из которых состоят магниты. Сначала Ампер считал эти токи макроскопическими, позже он пришел к гипотезе молекулярных токов. Соответствующую точку зрения Ампер развивает и по вопросу о земном магнетизме, полагая, что внутри Земли протекают токи, которые обуславливают ее магнитное поле.

В итоге своих исследований Ампер отказывается от идеи магнитных жидкостей и делает вывод о том, что магнетизм представляет собой одно из проявлений электричества.

Открыв взаимодействие токов, эквивалентность магнита и соленоида и т. д., а также выдвинув ряд гипотез, Ампер поставил перед собой задачу установить количественные законы этого взаимодействия. В результате он получил дифференциальное выражение для закона взаимодействия элементов токов.

Амперу также принадлежат идеи создания прибора для измерения силы тока (амперметра) и электромагнитного телеграфа.

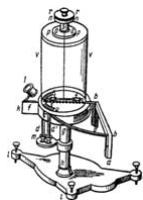
Законы цепи постоянного тока. Большим достижением электродинамики первой половины XIX в. стало открытие законов цепи постоянного тока. Уже в начале XIX в. высказывались предположения, что сила тока (действие тока) в цепи зависит от свойств проводников. Русский физик Петров установил, что действие гальванического элемента тем больше, чем больше поперечное сечение проводника. Англичанин Дэви показал, что это действие тем больше, чем короче проводник и чем больше его сечение.



Г. Ом



Прибор Ома



(рисунок Ома)

В середине 20-х гг. XIX в. исследованием цепи постоянного тока занялся немецкий физик Георг Ом (1787–1854). Для измерения силы тока Ом использовал простейший гальванометр, представляющий собой крутильные весы, на нити которых была подвешена магнитная стрелка. Под стрелкой располагался проводник, включенный в цепь постоянного тока. Когда по проводнику протекал ток, магнитная стрелка отклонялась. Поворачивая головку крутильных весов, приводя стрелку в ее начальное положение, Ом измерял момент сил, действующий на магнитную стрелку. Ом считал, что момент этих сил пропорционален силе тока.

Сначала Ом исследовал зависимость силы тока от длины проводника, включенного в цепь. Ом нашел, что «сила магнитного действия» тока (сила тока) исследуемого проводника обратно пропорциональна его длине. Затем Ом определил, что сила тока в проводнике прямо пропорциональна его поперечному сечению, а также количеству гальванических элементов (источников тока), включенных в цепь. В 1826 г. Ом вывел названный по его имени закон пропорциональности между силой тока и электроскопической силой, причем коэффициент пропорциональности означал сопротивление проводника. Ом показал, что сопротивление проволоки пропорционально длине и обратно пропорционально ее сечению, и заложил этим основы для понятия удельной электропроводности тел.

Г. Кирхгоф (1824–1887) в работах, относящихся к 1845–1848 гг., уточнил понятие электроскопической силы. Он установил тождественность понятия этой величины и понятия потенциала в электростатике. На основе этой идеи Кирхгоф в 1847 г. смог разрешить проблему разветвления тока путем установления правил расчета электрических цепей, названных его именем.



Г. Кирхгоф

Открытие электромагнитной индукции. Открытие явления электромагнитной индукции – важнейшее открытие в электродинамике. Еще в 1824 г. Араго, пытаясь с помощью магнитной стрелки определить присутствие железа в красной меди, обнаружил, что немагнитные вещества тормозят колебательное движение подвешенной магнитной стрелки. Затем он установил, что при вращении медной пластинки возле подвижного магнита последний стремится вращаться в том же

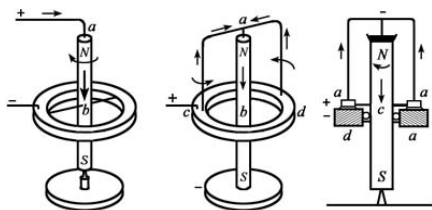
направлении, и, наоборот, если вращать магнит, то пластинка стремится следовать за ним.



М.Фарадей

Опыт Арго сумел объяснить только великий физик Майкл Фарадей, открывший явление электромагнитной индукции.

Работам Фарадея в области электричества положило начало исследование электромагнитных вращений. Из серии опытов Эрстеда, Араго, Био, Савара, проведенных в 1820 г., стало известно не только об электромагнетизме, но и о своеобразии взаимодействий тока и магнита: здесь действовали не привычные для классической механики центральные силы, а силы иные, стремившиеся установить магнитную стрелку перпендикулярно проводнику. Фарадей поставил перед собой вопрос: не стремится ли магнит к непрерывному движению вокруг проводника с током? Опыт подтвердил гипотезу. В 1821 г. Фарадей дал описание физического прибора. В центре левого сосуда с ртутью находился стержневой постоянный магнит, закрепленный шарнирно в нижней части. При включении тока магнитный полюс вращался относительно неподвижного проводника. В правом сосуде стержень магнита был неподвижен, а проводник с током, свободно подвешенный на кронштейне, скользил по ртути, совершая вращение вокруг полюса магнита. Это было первое электромагнитное устройство с непрерывным движением.



Электромагнитные вращения

Именно с этого момента, судя по всему, у Фарадея начинают складываться представления о всеобщей «взаимопревращаемости сил». Получив при помощи электромагнетизма непрерывное механическое движение, Фарадей ставит перед собой задачу обратить явление – превратить магнетизм в электричество. Только абсолютная уверенность в справедливости гипотезы «взаимопревращаемости» может объяснить целеустремленность и настойчивость. Тысячи опытов и 10 лет напряженного труда потребовалось затратить на решение сформулированной задачи. Семнадцатого октября 1831 г. Майкл Фарадей открыл явление

электромагнитной индукции. Это был хорошо подготовленный и заранее продуманный опыт.

Вот как об этом писал Фарадей: «Я взял цилиндрический магнитный брусок и ввел один его конец в просвет спирали из медной проволоки, соединенной с гальванометром. Потом я быстрым движением толкнул магнит внутрь спирали на всю его длину, и стрелка гальванометра испытала толчок. Затем я так же быстро вытащил магнит из спирали, и стрелка опять качнулась, но в противоположную сторону. Эти качания стрелки повторялись всякий раз, как магнит вталкивался или выталкивался. Это значит, что электрическая волна возникает только при движении магнита, а не в силу свойств, присущих ему в покое».

Вслед за открытием электромагнитной индукции Фарадей проверяет новую идею. Если движение магнита относительно проводника создает электричество, то, видимо, движение проводника относительно магнита должно приводить к такому же результату. Значит, есть возможность создать генератор электрического тока, обеспечив непрерывное относительное движение проводника и магнита. Фарадей быстро строит и испытывает новое устройство: между полюсами подковообразного магнита вращается медный диск, с которого при помощи скользящих контактов (один на оси, другой на периферии) снимается напряжение. Это был первый генератор электрического тока!

После открытия электромагнитной индукции внимание ученых в значительной степени переключилось с «гальванических» токов, когда главными объектами исследований были сами гальванические элементы, процессы электролиза, на индукционные токи, в это время наибольший интерес стали вызывать явления электромагнетизма. Так новая форма материи – поле – входила в физику. Фарадей является и навсегда останется творцом того общего учения об электромагнетизме, которое рассматривает с единой точки зрения все явления, изучавшиеся прежде в отдельности, не говоря уже о тех, которые открыл сам Фарадей, следуя своему убеждению о единстве всей науки.

Существенный шаг в направлении детального количественного изучения явления электромагнитной индукции был сделан петербургским академиком Эмилием Христиановичем Ленцем (1804–1865). В 1833 г. Ленц сформулировал правило, названное по его имени, заключающееся в следующем: *если металлический проводник движется вблизи гальванического тока или магнита, то в нем возбуждается ток такого направления, что если бы данный проводник был неподвижным, то ток мог бы обусловить его перемещение в противоположную сторону; при этом*

предполагается, что покоящийся проводник может перемещаться только в направлении движения или против него.



Э. Х. Ленц

Этот принцип раскрыл энергетику индукционных процессов. Сам Ленц вывел из него хорошо известный в электротехнике принцип обратимости для электромагнитных машин: *если вращать катушку между полюсами магнита, она генерирует ток, а если в нее послать ток, то она будет вращаться.* Таким образом, электродвигатель можно обратить в генератор и наоборот. Вскоре на основе указанных открытий появились индукционные машины, которые вырабатывали электрический ток без применения гальванических элементов. Но особенно большой подъем в этой области начался после 1867 г., когда В. Сименс (1816–1892) заменил используемые в индукционных машинах стальные магниты электромагнитами, которые питались вырабатываемым этими машинами током; именно в этом заключается динамоэлектрический принцип.

Тепловое действие тока. В 1843 г. Ленц опубликовал свое классическое исследование «О законах выделения тепла гальваническим током», начатое им задолго до аналогичных исследований Джоуля. В нем он формулирует закон, известный под названием закона Джоуля – Ленца: *нагревание проволоки гальваническим током пропорционально сопротивлению проволоки и квадрату служащего для нагревания тока.* Этот закон сыграл большую роль в открытии закона сохранения энергии.



Дж. Джоуль

Начиная с 1841 г. Дж. Джоуль также занимался исследованием выделения теплоты электрическим током. Исследуя затем общее количество теплоты, выделяемой во всей цепи, включая и гальванический элемент, за определенное время, он установил, что это количество теплоты равно теплоте химических реакций, протекающих в элементе за то же время. У Джоуля складывается мнение, что источником теплоты, выделенной в цепи электрического тока, являются химические процессы, происходящие в гальваническом элементе, а электрический ток как бы разносит эту теплоту по всей цепи. Он писал, что электричество может рассматриваться как важный агент, который переносит, упорядочивает и изменяет химическое тепло. Но источником

электрического тока может служить также и «электромагнитная машина» (электродвигатель). Как в этом случае нужно рассматривать теплоту, выделяемую электрическим током? Джоуль задается также вопросом: что будет, если в цепь с гальваническим элементом включить электродвигатель, как повлияет это на количество теплоты, выделяемой током в цепи?

Продолжая исследования в этом направлении, Джоуль пришел к новым важным результатам, которые изложил в работе «Тепловой эффект магнитоэлектричества и механическая ценность теплоты», опубликованной в 1841 г. Джоуль установил, что индукционный ток, как и гальванический, выделяет теплоту, количество которой пропорционально квадрату силы тока и сопротивлению.

Теория Максвелла. Создание теории электромагнитного поля и открытие электромагнитных волн. Дело Фарадея по обоснованию понятия поля продолжил другой величайший английский физик – Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879).

Теорию электромагнитного поля Максвелл начал разрабатывать с 1855 г. на основе анализа работ Фарадея и в окончательном виде оформил в работе «Трактат по электричеству и магнетизму», вышедшей в 1873 г. В своих собственных исследованиях Максвелл предпринял попытку придать идеям и методам Фарадея математическое выражение.

Вклад Максвелла сводится к следующему:

1. Максвелл вводит в физику фундаментальное понятие единого электромагнитного поля. С современной точки зрения поле – материальный объект, существующий в пространстве и времени. В дальнейшем, с созданием теории относительности, когда стало возможным устранение гипотезы эфира, поле было признано самостоятельно существующим видом материи, не нуждающимся в особом материальном носителе. Введение понятия поля как основного объекта, обеспечивающего все электромагнитные взаимодействия, делающего акцент не на заряды и токи, а на «порожденное» ими поле означало окончательное утверждение в физике идеи близкодействия.

2. Из теории Максвелла следует конечность скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Сигнал, испущенный источником, распространяется как реальное образование, обладающее энергией, которая, по Максвеллу, сосредоточена в поле. Энергия электромагнитного взаимодействия зависит от параметров поля, а не от энергии зарядов и токов. Но энергия не



Дж.К.Максвелл

может быть без материального носителя. Следовательно, поле является объективной реальностью.

3. Теория Максвелла по-новому поставила вопрос о взаимосвязи электричества и магнетизма. Их единство проявляется в том, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное, а изменяющееся магнитное порождает электрическое, т.е. электрические и магнитные поля есть частные проявления единого электромагнитного поля.

4. Максвелл на основе понятия поля свел в единую систему все знания по электричеству и магнетизму. Все законы электрических и магнитных взаимодействий, все законы тока, выведенные раньше, получаются из уравнений Максвелла как следствия.

5. Из решения уравнений вытекает, что электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде волн и скорость электромагнитных волн равна скорости света. Тем самым устанавливается не только существование нового объекта, но и выдвигается идея об электромагнитной природе света, а значит, устанавливается единство оптики и электромагнетизма.

Теория электромагнитного поля Максвелла знаменовала собой начало нового этапа в физике. Именно на этом этапе развития физики электромагнитное поле стало реальностью, материальным носителем взаимодействия. Мир постепенно стал представляться электродинамической системой, построенной из электрически заряженных частиц, взаимодействующих посредством электромагнитного поля.

Как уже говорилось, из теории Максвелла вытекало существование электромагнитных волн. Эти поперечные волны распространяются в бесконечной диэлектрической среде с конечной скоростью, зависящей от свойств среды. В каждый момент энергии электрического поля и энергии магнитного поля в данном объеме диэлектрика оказываются равными. Отсюда Максвелл сделал важный вывод о том, что оптические свойства среды связаны с ее электромагнитными свойствами.

Максвелл также заключил, что электромагнитная волна должна оказывать давление на проводящую поверхность. Максвелл рассчитал величину этого давления, которое для поглощающих поверхностей должно быть равно объемной плотности энергии, а для отражающих – удвоенной величине. Этот вывод Максвелла подвергся критике, однако позднее Бартоли, а затем Больцман вывели из термодинамических соображений существование светового давления, а в 1889 г. П.Н. Лебедев измерил это давление экспериментально и показал, что оно совпадает с теоретиче-

ским значением, найденным Максвеллом. Опыты Лебедева рассматривались как триумф теории Максвелла.

Экспериментальная проверка теории Максвелла выпала на долю русских и немецких ученых. Окончательный триумф теории Максвелла пришелся на 1887 г., когда Генрих Герц (1857–1894) экспериментально получил электромагнитные волны.

Герц дальше развил теорию Максвелла, записал ее уравнения в измененной, ныне общепотребительной форме, исследовал частное решение этих уравнений для случая так называемого вибратора Герца, когда поле может быть разбито на три области: ближнюю, промежуточную и волновую. В ближней области поле совпадает с квазистатическим полем: электрическое поле – с полем диполя, убывающим обратно пропорционально третьей степени расстояния от центра вибратора, магнитное – с полем элемента тока, определяемым согласно закону Био – Савара, напряженность которого убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра элемента. Большой неожиданностью для Герца было открытие волнового поля, отпочковавшегося от диполя, напряженность которого убывает обратно пропорционально первой степени расстояния от диполя.



Г. Герц

С 1887 г. Герц начинает ставить свои опыты. Прежде всего, он находит способ генерирования самых высокочастотных в то время колебаний, используя открытый колебательный контур (вибратор Герца). Обладая малой емкостью и индуктивностью, вибратор действительно позволял получать колебания высокой частоты, возникающие при проскакивании искры в разрядном промежутке диполя. Рядом с этим генератором находился незамкнутый виток. Герц обнаружил, что в момент разряда в генераторе происходит проскакивание искры между незамкнутыми концами витка, расположенного рядом с генератором. Это были



Первый вибратор Герца. Герц использовал два метровых провода, связанных с индукционной катушкой

первые в мире передатчик и приемник. Далее Герц заметил, что влияние генератора на приемник особенно сильно в случае резонанса (частота колебаний генератора совпадает с собственной частотой приемника) Продолжая исследования, Герц при удалении резонатора от вибратора обнаружил, что в большом

помещении с увеличением расстояния размер искр не убывает монотонно, а периодически меняется. Он объяснил это тем, что происходит интерференция прямой волны с отраженной. Этот опыт наиболее убедительно доказывал, что электромагнитные волны, предсказанные Максвеллом, действительно существуют. Герц ставит опыты с целью проверки тождества световых и электромагнитных волн. Почти сразу он обнаруживает «тьень» – непрозрачность металлических листов для «электрических лучей». Диэлектрики «прозрачны» для волн. Но они должны вызывать преломление. И Герц обнаруживает явление преломления волн в асфальтовой призме весом более чем в тонну, причем отклонение соответствует тому, которое должно быть по Максвеллу. Последующие опыты показали существование отражения волн, а затем и их поляризацию. Герц ставит между генератором и приемником решетку из параллельных проволок, от ориентации которой меняется интенсивность искры в приемнике. Зная период колебаний вибратора и измерив длину волны, Герц вычислил скорость распространения электромагнитных волн, она оказывается равной скорости света. Все это было изложено в работе «О лучах электрической силы», вышедшей в декабре 1888 г. Этот год считается годом открытия электромагнитных волн и экспериментального подтверждения теории Максвелла.

За пять лет до опытов Герца появилась работа Пойнтинга о переносе энергии электромагнитным полем, которая, в свою очередь, была частным случаем общей теории о движении энергии, разработанной в 1873 г. Н. А. Умовым (1846–1915). Герц применил вектор Умова – Пойнтинга к вычислению потока энергии, излучаемой диполем в окружающее пространство, и показал, что количество энергии, излучаемое вибратором в окружающее пространство, не зависит от расстояния и будет прямо пропорционально квадрату длины диполя и обратно пропорционально кубу длины волны, генерируемой полем. Этот результат явился отправным пунктом в теории антенн. Теоретические основы радиотехники были заложены Герцем.



Н.А. Умов

Герц открыл для физиков новый объект – свободное электромагнитное поле. Задача состояла в том, чтобы научиться генерировать это поле, обнаруживать его и управлять им. В год смерти Герца (1894) его опыты были продемонстрированы на IX съезде русских естествоиспытателей П. Н. Лебедевым, который, построив миниатюрные вибратор и резонатор, получил самые короткие

для того времени электромагнитные волны длиной в 6 мм. С этими волнами Лебедев не только повторил все опыты по отражению, преломлению, дифракции и интерференции, но и доказал их двойное преломление в кристаллической сере и продемонстрировал поляризационные явления. Синтез электромагнетизма и оптики был представлен с величайшей наглядностью.

В 1896 г. индийский физик Дж.Ч. Бозе (1858–1937) в докладе Британской ассоциации сообщил об опытах с короткими ($2 \div 0,6$ см) электромагнитными волнами. Ему удавалось передавать сигналы через стены зданий. А.С. Попов (1859–1906) в 1900 г. в своих лекциях по беспроволочной телеграфии воспроизводил опыты Бозе и Лебедева с короткими электромагнитными волнами.

Герц относился скептически к мысли об использовании электромагнитных волн для целей телеграфии, размышляя о размерах зеркал, которые понадобились бы для телеграфа, действующего по принципу оптического. Но его подвела аналогия с оптикой. Практика пошла по другому пути, вернувшись к оптической аналогии только в наши дни. Была изобретена антенна (Тесла, Попов), построен достаточно чувствительный детектор – когерер (Бранли, Лодж) и, наконец, А.С. Попов сконструировал практически пригодный приемник радиосигналов (грозоотметчик, 7 мая 1895 г.), а в 1896 г. осуществил первую передачу и прием радиogram из одного здания в другое.

В том же году начал эксперименты по беспроволочной телеграфии Г. Маркони (1874–1937), которому удалось довести дело до промышленных образцов. Радиотехника родилась, а вместе с ней теория Максвелла получила подтверждение практикой.

Электротехника. Исключительно большое значение электричества для современной техники объясняется сочетанием ряда причин. Электроэнергию легко передавать на большие расстояния, что позволяет использовать для выработки электроэнергии естественные запасы энергии рек. Электроэнергия легко и с большим коэффициентом полезного действия может быть



П.Н. Лебедев



А. С. Попов



Г. Маркони

преобразована в другие виды энергии и применена, таким образом, для привода машин, освещения, химических процессов, нагрева и т.д. Широчайшее применение в быту и технике получили самые разнообразные *электроаппараты*: телеграф, телефон, радиоаппараты, различные электроавтоматы, аппараты электрической сигнализации, аппараты электрического управления машинами на расстоянии, электромедицинские аппараты и т.д. *Электроизмерительные приборы* благодаря своей исключительной точности в настоящее время применяются во всех областях науки и техники.

В 1882 г. П.Л. Шиллинг создал первый *электромагнитный телеграф*, который был использован для связи между Зимним дворцом и Министерством путей сообщения. Первый самопишущий телеграфный аппарат был также создан в России Борисом Семеновичем Якоби в 1839 г.; в том же году этот аппарат был пущен в эксплуатацию – на год раньше, чем за границей Морзе построил телеграфную линию с самопишущими аппаратами. В 1850 г. Б.С. Якоби создал первый буквопечатающий телеграфный аппарат.

Б.С. Якоби первый применил электролиз для покрытия предметов металлическим слоем, т. е. положил начало развитию гальванопластики.



Свеча
Яблочкова

В 1876 г. русский изобретатель Павел Николаевич Яблочков нашел способ практически использовать открытую В. В. Петровым электрическую дугу для освещения улиц и помещений. Сконструированная П. Н. Яблочковым *дуговая электрическая лампа* («свеча Яблочкова») представляла собой два расположенных на определенном расстоянии друг от друга угольных стержня, непроводящей электричество гипсовой или глиняной прослойкой, которая постепенно испарялась по мере укорочения углей в электрической дуге.

Общепринятый в настоящее время способ освещения посредством *электрических ламп накаливания* также был изобретен в России в 1873 г. Александром Николаевичем Лодыгиным. В том же году одна из улиц Петербурга была освещена электролампами Лодыгина, а в следующем 1874 г. Академия наук присудила Лодыгину Ломоносовскую премию, отметив, что изобретение ламп накаливания «обещает произвести переворот в важном вопросе об освещении». Эдисон в 1877 г. разработал лампочки накаливания с вольфрамовой нитью.

Проблемы технических применений магнетизма входят в число важнейших в электротехнике, приборостроении, вычислительной технике, автоматике и телемеханике, навигации. В технике широкое применение нашли магнитная *дефектоскопия* и другие магнитные методы контроля. Очень важную роль играют измерения магнитных характеристик электротехнических и радиотехнических материалов. Магнитные материалы идут на изготовление магнитопроводов электрических генераторов, моторов, трансформаторов, реле, магнитных усилителей, элементов магнитной памяти, лент и дисков магнитной записи, стрелок магнитных компасов, магнитострикционных излучателей и приемников и т. д.

Учение об электричестве имеет очень большое познавательное значение. Исследуя электрические явления, мы проникаем в строение вещества. Этим путем физика пришла к познанию строения атомов и к открытию способов освобождения атомной энергии, что привело к новой эре в технике и в жизни человечества.

Физика электрических и магнитных явлений в средах.

Теория Максвелла в своей первоначальной форме хорошо представила распространение света в пустом пространстве, но не дала анализа оптических свойств материи. Особенно не хватало объяснения зависимости показателя преломления от длины волн. Электронная теория Джозефа Лармора (1857–1942) и Г.А. Лоренца объяснила не только нормальную, но и открытую в 1871 г. Кундтом аномальную дисперсию, связанную с избирательным поглощением, как явление резонанса способных к колебаниям атомных образований. Величайшим триумфом электронной теории было открытие Питером Зееманом (1865–1943) в 1896 г. расщепления спектральных линий в магнитном поле; в 1897 г. Лоренц дал объяснение этого эффекта, носящего ныне наименование «эффект Зеемана». В тесной связи с этим явлением находится найденное уже в 1845 г. Фарадеем вращение плоскости поляризации под влиянием магнитного поля.

Открытие электрона существенным образом повлияло на развитие теории электрических и магнитных явлений. Если в электродинамике Максвелла такие свойства тел, как их диэлектрическая и магнитная проницаемость, электропроводность, являлись эмпирическими коэффициентами, то электронная



П.Зееман



П. Друде



Г.А. Лоренц



Дж.Дж. Томсон



Дж. Флеминг



И. Ленгмюр

теория ставит своей задачей вывести эти коэффициенты исходя из представлений о структуре тел.

В 1900 году П. Друде, а в 1904 – 1905 г. Г.А. Лоренц создали теорию электропроводности, основанную на представлении о существовании свободных электронов в металле. Применения к этим электронам законы кинетической теории газов – «электронный газ», они получили закон Ома, закон Джоуля – Ленца и др. Гипотеза существования свободных электронов в металле опиралась на опытные данные и, прежде всего, на явление термоэлектронной эмиссии, которое было открыто Эдисоном и исследовано Ричардсоном в 1900 г.

Дж. Дж. Томсон показал, что удельный заряд испускаемых накалившимся катодом частиц совпадает с удельным зарядом катодных лучей. О. Ричардсон применил к явлениям термоэлектронной эмиссии законы кинетической теории газов и вывел зависимость силы термоэлектронного тока от температуры (закон Ричардсона, 1901 г.).

Открытие термоэлектронной эмиссии привело к важнейшим научно-техническим последствиям. В 1904 г. Дж. Флеминг сконструировал двух-электродную лампу и применил ее для детектирования электромагнитных колебаний при радиоприеме. Де Форест (1907 г.) изобрел третий электрод – сетку для управления потоком термоэлектронов. Это изобретение открыло широчайшие возможности для применения электронных ламп в научных измерениях и радиотехнике. В 1913 г. Мейснер разработал метод генерирования незатухающих колебаний с помощью трехэлектродной лампы. Усовершенствование техники получения вакуума (Ленгмюр) привело к улучшению качества ламп и их широкому распространению. И. Ленгмюр в 1913 г. начал исследование процессов в лампе и выявил влияние объемного заряда на термоэлектронный ток («закон трех вторых»).

Таким образом, было не только доказано существование свободных электронов в металле, но и родилась новая отрасль науки и техники – *электроника*.

К концу Второй мировой войны стало ясно, что высокая стоимость, большие размеры и низкая надежность вакуумных ламп становятся препятствием для их широкого применения в коммерческих и военных целях. Вакуумные лампы были неспособны обеспечить существенный прогресс вычислительной техники. Создание в сороковых годах XX в. транзисторов а в шестидесятых годах – первых интегральных схем позволило сегодня иметь интегральные схемы (Дж. С. Килби), в которых для включения-выключения транзистора необходимо лишь 1000 электронов, а плотность элементов превышает плотность нейронов мозга человека. Создана электроника полупроводниковых гетероструктур и двойных гетероструктур (ДГС) – Ж.И. Алферов. В настоящее время солнечные элементы на гетероструктурах, ДГС-лазерные считывающие устройства, персональные компьютеры и суперкомпьютеры нашли широчайшее применение на Земле и в космосе.



Дж. С. Килби



Ж.И. Алферов

В классической электронной теории электропроводности наряду с успехами встретились и серьезные трудности. Особенно необъясним был факт, что электроны, обладающие, согласно теории, своей долей энергии, в соответствии с законом равномерного распределения энергии по степеням свободы не вносят эту долю в полную теплоемкость металла. Наконец, зависимость сопротивления от температуры (его уменьшение при охлаждении) оказалась не такой, как требовала теория. Подобные расхождения теории и опыта были преодолены лишь с использованием квантовых представлений о коллективных свойствах вырожденной электронной подсистемы металла.

В 1908 г. Г. Камерлинг-Оннес (1853–1926) в Лейдене обратил в жидкость гелий и получил возможность исследования свойств веществ при температурах ниже 10 К. Он показал, что у ряда металлов имеется критическое сопротивление, ниже которого оно не падает при дальнейшем охлаждении. В 1911 г. он нашел, что для ртути, свинца, олова и некоторых других металлов по достижении определенной для каждого металла температуры сопротивление внезапно падало



Г. Камерлинг-Оннес

скачком до нуля. Так была открыта *сверхпроводимость*. Все эти явления не могли быть объяснены в рамках классической электронной теории.

Теория диэлектриков начала развиваться еще до возникновения теории Максвелла. В 1847 г. Моссооти рассматривал механизм поляризации диэлектрика, уподобив его молекулы проводящим шарикам. Полученная им связь между диэлектрической поляризацией и плотностью среды была в 1879 г. найдена вторично Клаузиусом и получила название закона Клаузиуса – Моссооти. Лоренц в 1880 г. применил к теории диэлектриков идеи электронной теории (до открытия электрона!), рассматривая молекулу диэлектрика как совокупность отрицательных и положительных зарядов, связанных квазиупругими силами.

Теория электронов дала объяснение эффекту Зеемана, открытому в 1896 г. Для объяснения так называемого «нормального» эффекта Зеемана потребовалось учесть влияние магнитной составляющей силы Лоренца на колеблющийся электрон, тогда как в электронной теории дисперсии исследуется влияние на этот электрон электрической составляющей. В дальнейшем оказалось, что эффект Зеемана значительно сложнее. Объяснения этому эффекту классическая теория электронов не могла дать.

В области объяснения магнитных свойств веществ первый крупный успех был достигнут французским ученым Полем Ланжевром (1872–1946), применившим в 1905 г. электронную теорию к истолкованию диа- и парамагнетизма. В частности, теория парамагнетизма Ланжевона дала истолкование закону убывания магнитной восприимчивости парамагнетиков с температурой, открытому Пьером Кюри в 1895 г. Кроме того, Кюри обнаружил, что при определенной температуре («точка Кюри») ферромагнетик теряет свои ферромагнитные свойства и начинает вести себя как парамагнетик. Еще в 1892 г. русский физик Б.Л. Розинг ввел гипотезу о существовании внутри ферромагнитного вещества особого внутреннего «молекулярного поля», названного им «частичной магнитной силой». В 1907 г. швейцарский физик Пьер Вейсс вновь ввел гипотезу «молекулярного поля», с помощью которой он дал формальное описание ферромагнитных явлений и, в частности, существование точки Кюри и зависимость восприимчивости от температуры (закон Кюри – Вейсса). В 1910 г. Вейсс ввел понятие об элементарном магнитном моменте ферромагнетиков («магнетон Вейсса»).

Магнетизм веществ широко используется как средство изучения химических связей и структуры молекул. Изучение диамагнетизма и парамагнетизма газов, жидкостей, растворов и

соединений в твердой фазе позволяет разобраться в деталях физико-химических процессов, протекающих в этих веществах, и происходящих в них структурных изменениях. Изучение магнитодинамических характеристик помогает понять кинетику многих физико-химических процессов. Интенсивно развивается магнитобиология, а также применение магнетизма в медицине.

К важнейшим проблемам магнетизма космоса относятся: выяснение происхождения магнитных полей *Земли*, других планет, *Солнца*, *звезд* (в частности, *пульсаров*), радиогалактик, квазаров и других астрономических объектов, а также роли магнитных полей в космическом пространстве.

Несмотря на свои успехи, классическая электронная теория многого не могла объяснить. Она не могла объяснить факт существования самого электрона, факт устойчивости атомов, в которых должны быть заряженные частицы, происхождение спектральных серий, закономерности рентгеновских спектров, магнитооптические и электрооптические явления. Здесь начала одерживать победы квантовая теория атома, предложенная Бором в 1913 г.

Электрические заряды, электромагнитные поля и электромагнитные взаимодействия. Наряду с такой фундаментальной силой, как сила тяготения, между телами проявляется действие и иных фундаментальных сил. Важнейшее место среди них занимает взаимодействие, которое подобно тяготению также изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, но является намного более сильным, – электрическое взаимодействие. С электрическим взаимодействием, как показывает опыт, тесно связано и магнитное взаимодействие. Попытки объяснить природу сил тяготения, так же как электрических и магнитных явлений, вплоть до XX в. оставались безуспешными. Усилия ученых были направлены на выяснение тех законов, которые определяют взаимодействие между точечными объектами, обладающими электрическими и магнитными свойствами. Эти законы копировали законы всемирного тяготения Ньютона, например закон Кулона, и описывали взаимодействие тел на расстоянии, причем взаимодействие должно распространяться с бесконечно большой скоростью.

В отличие от сил тяготения, силы электрического взаимодействия могут быть как силами притяжения, так и силами отталкивания. Соответственно существует два сорта свойств «веществ», которые чисто условно можно назвать положительным и отрицательным. «Вещества» одного сорта отталкиваются, а разных

сортов притягиваются, данные свойства вещества называют электрическим зарядом.

Заряд наэлектризованной стеклянной палочки назвали положительным, а смоляной (в частности, янтарной) – отрицательным. В соответствии с этим условием электрический заряд электрона (электрон по-гречески – янтарь) отрицателен. Заряд протона равен по величине заряду электрона, но имеет противоположный знак. Открытие электрона и протона показало, что электрические заряды существуют не сами по себе, а связаны с частицами и являются их внутренним свойством.

В целом заряд атома любого вещества равен нулю, так как положительный заряд ядра атома компенсируется противоположным зарядом электронных оболочек атома. Очень сильное взаимодействие между зарядами практически исключает самопроизвольное появление заряженных макроскопических тел. Так, сила кулоновского притяжения между электроном и протоном в атоме водорода в 10^{39} раз больше их гравитационного взаимодействия.

Важнейшим свойством зарядов является их дискретность. Наименьшим и равным по абсолютной величине зарядом обладают все свободные элементарные частицы, наблюдаемые в свободном состоянии. Величина этого заряда в СИ равна $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл (Кулон). Заряд – новая фундаментальная физическая единица в дополнение к массе, времени и длине, появляющаяся при изучении электромагнитных явлений. Заряды всех тел q кратны величине наименьшего электрического заряда

$$q = \pm n \cdot e,$$

где n – целое число. Для кварков – фундаментальных частиц, из которых состоят тяжелые частицы – барионы и средние по массе частицы – мезоны, $n = 1/3, 2/3$.

Еще одним фундаментальным свойством электрических зарядов является независимость заряда тела от выбора инерциальной системы отсчета, в которой он измеряется. Иначе характер протекания физических процессов был бы различен в подвижных и неподвижных инерциальных системах отсчета, что противоречит принципу относительности. Заряд тела (частицы), как и масса покоя, является инвариантом.

Электрический заряд системы тел может изменяться только за счет перехода через ее границу электрически заряженных частиц. В противном случае электрический заряд системы частиц не изменяется и выполняется закон сохранения электрического заряда в изолированной системе. В ней могут рождаться электрически заряженные частицы под действием высокоэнергетических

воздействий, но только разноименно заряженными парами так, чтобы общего изменения заряда в системе не происходило. Если же локального высокоэнергетического воздействия на систему не оказывается, то в изолированной системе по отдельности сохраняется величина положительного и отрицательного зарядов. В целом тела являются электрически нейтральными – незаряженными и самопроизвольно не заряжаются – суммарный электрический заряд в мире не изменяется, так как имеет место закон сохранения электрического заряда. Закон сохранения заряда, один из фундаментальных законов, был сформулирован в 1747 г. Б. Франклином. Экспериментальная проверка закона сохранения заряда основана на проверке стабильности электрона и нулевой массы покоя фотонов – квантов переносчиков электромагнитного взаимодействия (благодаря этому электромагнитное поле является дальнедействующим). Действительно, в силу закона сохранения энергии электрон, самая легкая заряженная частица, не может распадаться на более тяжелые заряженные частицы (мезон, л-мезон), а распад на более легкие нейтральные частицы запрещен законом сохранения заряда. Анализ возможных явлений атмосферного электричества, которые могли бы возникнуть при распаде электронов в атмосфере, дает для нижней границы времени жизни электрона величину $5 \cdot 10^{21}$ лет. Существование крупномасштабного магнитного поля в дисковой составляющей Галактики приводит к ограничению сверху на допустимую величину массы покоя фотона $< 10^{-27}$ эВ. Эти ограничения делают проблематичными физические теории, допускающие нарушение закона сохранения электрического заряда.

Электрический заряд – источник электромагнитного поля, связанный с материальным носителем – элементарной частицей. Электрический заряд служит внутренней характеристикой элементарной частицы. Вся совокупность электрических и магнитных явлений есть проявление существования, движения и взаимодействия электрических зарядов.

Наряду с электрическим зарядом при расчете статических магнитных полей вводится понятие магнитного заряда по аналогии с понятием электрического заряда, создающего электростатическое поле. Согласно классической теории магнетизма, магнитное поле не имеет иных источников, кроме электрических токов – направленных движущихся зарядов. Однако П.А.М. Дирак в 1931 г. выдвинул гипотезу о существовании в природе обособленных магнитных зарядов – магнитных монополей, существование которых также предсказывается в теории великого объединения. Созданная Дираком квантовая теория взаимо-

действия электрического (e) и магнитного (g) зарядов применима при условии $eg = 2\pi\hbar cn$, где n – целое число. Существование магнитного заряда не противоречит стандартной квантовой механике в случае, если электрические заряды всех частиц квантуются. Поэтому существование магнитных зарядов могло бы объяснить наблюдаемую на опыте дискретность электрических зарядов частиц и их кратность величине e .

Масса магнитных монополей может быть вычислена. Она зависит от конкретной модели, но во всяком случае должна быть больше $M \approx 10^{-8}$ г. Эти частицы могли бы родиться на ранней стадии возникновения Вселенной после Большого взрыва. Отсутствие магнитных монополей в настоящее время говорит о том, как шло развитие Вселенной, например, магнитные монополи могли катализировать распад протонов и нейтронов (нуклонов).

Неоднократные попытки экспериментально обнаружить магнитные монополи не увенчались успехом. Особенно интенсивно поиски магнитных монополей в космических мирах начались в начале 80-х гг. XX в. Полученные ограничения плотности потока магнитных монополей определяются величиной 10^{-12} частиц/(с·м²).

Электромагнитное поле представляет собой особую форму материи, посредством которой осуществляется взаимодействие между электрически заряженными частицами и магнитами. Понятие электрического и магнитного поля введено английским ученым М. Фарадеем в 30-е гг. XIX в. Концепция поля возрождала идею близкого действия, основоположником которой был французский ученый Р. Декарт (1596–1650), первая половина XVII в. Согласно представлениям, заложенным Фарадеем, в пространстве, окружающем заряженные и магнитные тела, возникают определенные изменения. Это пространство с измененными свойствами получило название электромагнитного поля. В любой точке этого поля на заряды или магниты действуют силы, обеспечивая электромагнитное взаимодействие тел на расстоянии.

Источниками электромагнитного поля являются неподвижные и движущиеся заряды. Электромагнитное поле обладает рядом физических характеристик и свойств, которые могут быть изучены и определены экспериментально. При этом электромагнитная теория начинает оперировать не понятиями тока и заряда, а полевыми свойствами окружающего пространства. Эти качественные представления Фарадея были воплощены в стройную физическую теорию Дж. Максвеллом в начале 60-х гг. XIX в., которому удалось сформулировать в математической форме основные законы электромагнитного поля. Изучение электромаг-

нитных полей в опытах Г. Герца показало, что переменные электромагнитные поля существуют в виде электромагнитных волн, распространяющихся в вакууме со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Таким образом, и оптика имеет дело с электромагнитными взаимодействиями, поскольку свет представляет собой электромагнитное излучение. Это полностью соответствовало теории Максвелла и показывало ограниченность описания в терминах действия на расстоянии рамками статических, электрических и магнитных явлений, где понятие поля носит вспомогательный математический характер. В теории Максвелла вакуум оказался той первичной средой, где возбуждается электромагнитное поле. Всякое вещество с точки зрения электромагнитной теории – это вакуум, частично заполненный атомами, электронами и ядрами. Поля от внутренних источников взаимодействуют с внешними полями, и их суперпозиция определяет величину поля в веществе. Уравнения Максвелла позволяют последовательно описать широчайший круг электромагнитных явлений: электро- и магнитостатические процессы, распространение электромагнитных волн в вакууме и в веществе, движение зарядов во внешних электрических и магнитных полях и в веществе. Изучение электромагнитных взаимодействий на основе квантовой механики позволяет объяснить существование и свойства атомов, молекул и твердых тел.

Уравнения Максвелла обобщают огромное число опытных фактов и предсказывают новые неочевидные явления. Поэтому изложение электромагнитной теории следует вести, разумно сочетая теоретические обобщения с их экспериментальными основами.

В общем случае физические поля являются первичной физической реальностью. Каждому типу взаимодействий в природе отвечают определенные физические поля. В классической теории описание поля осуществляется одной или несколькими непрерывными функциями координат. Для данных функций могут быть записаны соответствующие уравнения, в частности, для электромагнитного поля это уравнение Максвелла. Тогда описание взаимодействия заряженных частиц распадается на 2 части. 1. Поиск соответствующих пространственно-временных характеристик поля и соответствующих им силовых воздействий на частицы. 2. Решение соответствующих этим силовым воздействиям уравнений движения. Такой подход значительно облегчает описание сложных процессов движения заряженных частиц, взаимодействующих между собой или с внешними полями.

Согласно специальной теории относительности, любое взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей скорости света в вакууме. Поэтому в системе взаимодействующих частиц сила, действующая в какой-либо момент времени на частицу системы, определяется не расположением частиц в этот же момент времени t , а расположением частиц в более ранний момент времени $t - L/c$, где L – характерные размеры системы. Изменение положения одной частицы, таким образом, не сразу скажется на других частицах, а лишь через промежуток времени $\Delta t \approx L/c$. Если частицы движутся со скоростью, близкой к скорости света, то их взаимодействие удобно описывать через создаваемые ими поля. Электромагнитные поля могут существовать и проявляться безотносительно к создаваемым их источникам, например в виде электромагнитных волн, представляя собой особую форму существования материи.

Опыт показал, что энергия и импульс электромагнитного поля изменяются дискретным образом и электромагнитное поле представляет собой совокупность особого рода безмассовых частиц – фотонов.

Частной формой проявления электромагнитного поля служит электрическое поле. Оно определяет действие на электрический заряд силы, не зависящей от скорости движения заряда. Представление об электрическом поле введено М. Фарадеем в 30-е гг. XIX в. Согласно Фарадею, каждый покоящийся заряд создает в окружающем пространстве электрическое поле. Поле одного заряда действует на другой заряд и наоборот. Так осуществляется взаимодействие зарядов. Основной количественной силовой характеристикой электрического поля является напряженность электрического поля \mathbf{E} . В данной точке пространства напряженность поля равна отношению силы \mathbf{F} , действующей в данной точке на точечный положительный заряд, к величине заряда q :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

Распределение электрического поля в пространстве можно изображать с помощью силовых линий напряженности. Для неподвижных или неускоренных зарядов силовые линии начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных (или уходят на бесконечность). Силовые линии вихревого электрического поля, порождаемые переменным магнитным полем, замкнуты.

Магнитное поле, наряду с электрическим полем, составляет единое электромагнитное поле. Магнитное поле оказывает действие на движущиеся заряды и тела, обладающие магнитными

свойствами. Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции \mathbf{B} . Значение \mathbf{B} определяет силу, действующую в данной точке поля на электрический заряд q , движущийся со скоростью \mathbf{v} :

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Термин «магнитное поле» ввел в 1845 г. М. Фарадей, считавший, что магнитные и электрические взаимодействия осуществляются посредством единого электромагнитного поля.

Происхождение термина «магнитная индукция» связано с тем, что изменение именно этой величины \mathbf{B} индуцирует вихревое электрическое поле.

Перейдя в инерциальную систему отсчета, связанную с зарядом, мы исключим действие магнитного поля на заряд ($\mathbf{v} = 0$). Поэтому разделение поля на электрическое и магнитное зависит от выбора системы отсчета. Электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом и могут преобразовываться друг в друга при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, образуя в общем случае единое электромагнитное поле.

2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

2.1. Закон Кулона

Электростатика изучает электрические поля неподвижных зарядов. Основной количественный закон электростатики был открыт и опубликован Кулоном в 1785 г. В 1784 г. Шарль Огюстен Кулон, французский военный инженер, сконструировал чувствительный прибор – крутильные весы. С помощью этих весов он открыл закон электрических и магнитных взаимодействий. Существенным моментом в работе Кулона было установление метода измерения количества электричества и количества магнетизма (магнитных масс). Законы Кулона дают основную базу системы электрических и магнитных единиц. После Кулона стало возможным построение математической теории электрических и магнитных явлений.

Закон Кулона утверждает, что между двумя покоящимися точечными зарядами действует сила, пропорциональная произведению зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. Сила направлена по прямой от одного заряда к другому. Если знаки заряда разные, то эта сила является силой притяжения, и силой отталкивания, если знаки зарядов одинаковы (рис. 2.1, а):

$$\mathbf{F}_1 = k_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \right) = -\mathbf{F}_2.$$

Здесь \mathbf{F}_1 – сила, действующая на заряд q_1 ; \mathbf{F}_2 – сила, действующая на заряд q_2 ; r_{12} – расстояние между зарядами q_1 и q_2 ; \mathbf{r}_{12}/r_{12} – единичный вектор, направленный от q_2 к q_1 (рис.2.1, б).

Множитель k_0 определяется выбором системы единиц. В СИ, которой мы пользуемся, он записывается в виде $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ и определяется как 10^{-7} от квадрата скорости света. Так как c примерно равна $3 \cdot 10^8$ м/с, то $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} \right]$. Величина ϵ_0 называется электрической постоянной или диэлектрической проницаемостью вакуума (устаревшее). В СИ (п. 9.6) заряд определяется через магнитную силу, действующую между двумя

элементами токов. Единица заряда в СИ называется кулоном и обозначается Кл.

В системе единиц СГС для определения единицы заряда используют выражение для силы Кулона, где полагают коэффициент пропорциональности равным единице $k_0 = 1$: $\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}$ –

единичный заряд взаимодействует с равным ему электрическим зарядом, расположенным на расстоянии в 1 см с силой в 1 дину. Это абсолютная электростатическая единица количества электричества – единица СГСЭ. Кулон и единица СГСЭ связаны соотношением 1 Кл = (10 c) единиц СГСЭ, где c – скорость света.

Уравнения теории электричества удобно записывать с использованием k_0 . Это придает одинаковый вид уравнениям в системах СИ и СГС. Переход к системам СИ и СГС осуществляется подстановкой в СИ $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0)$ и в СГС: $k_0 = 1$.

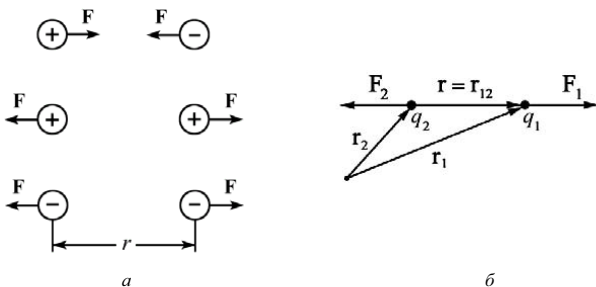


Рис. 2.1. Зависимость направления электростатической силы от знака зарядов (а); взаимодействие двух одноименных точечных зарядов q_1 и q_2 происходит по

закону Кулона $\mathbf{F} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ (б)

Точность зарядов в законе Кулона означает, что линейные размеры тел, на которых они локализованы, пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними. Закон Кулона в приведенном виде предполагает, что заряды помещены в вакуум. Впрочем, влияние воздуха на силы взаимодействия между зарядами пренебрежимо мало.

Экспериментально с достаточной точностью примерно за 11 лет до Кулона в 1773 г. тот же закон был получен Генри

Кавендишем, богатым английским лордом, занимавшимся физикой «для души». Будучи знакомым с крутильными весами и применившим их для «взвешивания Земли» – измерение гравитационной постоянной, Кавендиш показал методом сферического конденсатора отсутствие заряда внутри заряженной металлической сферы. Это возможно, если сила электростатического взаимодействия изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния с точностью $2 \pm 0,02$. Однако свои результаты Кавендиш не опубликовал. Они оставались неизвестными до 1879 г., когда их обнаружил и опубликовал Дж. Максвелл, первый профессор и руководитель Кавендишской лаборатории, открытой на средства потомка Генри Кавендиша в Кембридже в 1874 г. Для макроскопических расстояний с помощью экспериментов в земных условиях, проведенных по методу Кавендиша, доказано (1971 г.), что показатель степени n в законе Кулона не может отличаться от 2 более чем на $6 \cdot 10^{-16}$. Из опытов по рассеянию α -частиц следует, что закон Кулона не нарушается вплоть до расстояний $\approx 10^{-12}$ см.

Рассмотрим два шара из углерода. Они имеют небольшой избыток электронов. Найдем отношение числа электронов к числу протонов такое, чтобы электростатическое отталкивание в точности компенсировало силу гравитационного притяжения. По условию $F_E = F_G$, т.е.

$$k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(здесь q_1 и q_2 – заряды, а m_1 и m_2 – массы шаров), и можно записать

$$\left(\frac{q_1}{m_1} \right) \left(\frac{q_2}{m_2} \right) = \frac{G}{k_0}.$$

Если у обоих шаров отношения числа электронов к числу протонов одинаковы и $m_1 = m_2$, то

$$\frac{q_1}{m_1} = \sqrt{\frac{G}{k_0}}.$$

Кроме того,

$$q_1 = (N_e - N_p)e,$$

где N_e – число электронов, а N_p – число протонов. Масса первого шара

$$m_1 = N_p m_p + N_n m_n + N_e m_e,$$

где m_p , m_n и m_e – массы протона, нейтрона и электрона соответственно. Учитывая, что $m_p \approx m_n \gg m_e$ и $N_p = N_n$, получаем $m_1 = 2N_p m_p$. Тогда

$$\frac{q_1}{m_1} = \frac{(N_e - N_p)e}{2N_p m_p} = \sqrt{\frac{G}{k_0}}, \quad \frac{N_e - N_p}{N_p} = \frac{2m_p}{e} \sqrt{\frac{G}{k_0}} = 1,8 \cdot 10^{-18}.$$

Следовательно, для компенсации гравитационного притяжения необходим лишь один дополнительный электрон на каждые $5 \cdot 10^{17}$ протонов.

2.2. Принцип суперпозиции электрических полей

Если зарядов более двух, то закон Кулона следует дополнить установленным экспериментально фактом: сила, действующая на заряд q , есть векторная сумма кулоновских сил, действующих со стороны всех прочих зарядов q_k . Этот факт называется «принципом суперпозиции» (рис. 2.2):

$$\mathbf{F} = \sum_k \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_k}{r_k^2} \frac{\mathbf{r}_k}{r_k} = \sum_k \mathbf{F}_k.$$

Здесь r_k – расстояние между зарядом q и q_k .

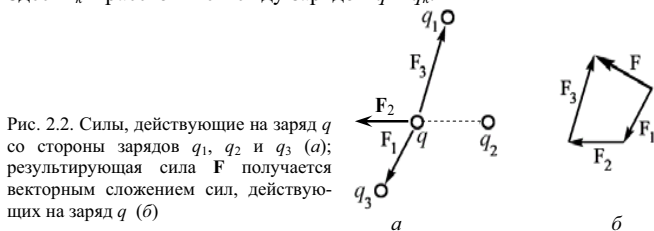


Рис. 2.2. Силы, действующие на заряд q со стороны зарядов q_1 , q_2 и q_3 (а); результирующая сила \mathbf{F} получается векторным сложением сил, действующих на заряд q (б)

Применяя закон Кулона, удобно ввести понятие напряженности электрического поля как силу, действующую на единичный положительный заряд

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \sum_k \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_k^2} \frac{\mathbf{r}_k}{r_k} = \sum_k \mathbf{E}_k,$$

где \mathbf{r}_k – радиус-вектор, проведенный от заряда q_k в точку наблюдения \mathbf{R} .

Формула для \mathbf{E} позволяет рассчитать напряженность электрического поля любой системы неподвижных зарядов. Направление электрического поля совпадает с направлением силы, действующей

шей на положительный заряд. Величина \mathbf{E} измеряется в ньютонах на кулон (Н/Кл) или, что то же самое, в вольтах на метр (В/м) (см. п. 2.6).

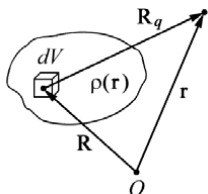


Рис. 2.3. В силу принципа суперпозиции напряженность электрического поля в точке с координатой \mathbf{r} определяется как геометрическая сумма напряженностей от электрических зарядов ρdV

Бывает удобно отвлечься от факта, что заряды всегда дискретны, а считать их распределенными непрерывно. Распределение зарядов описывается плотностью заряда $\rho = \rho(\mathbf{R})$. Если количество заряда в объеме ΔV вблизи точки $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{R}_q$ равно (рис.2.3)

$$\Delta q = \rho(\mathbf{R})\Delta V,$$

то можно рассчитать напряженность поля в точке наблюдения \mathbf{r} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} \frac{\rho(\mathbf{R})\mathbf{R}_q}{R_q^3} dV.$$

2.3. Электрические силовые линии

Для наглядного изображения электрических полей используют понятие силовых линий. Это такая математическая линия, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} в той же точке. Положительным направлением силовой линии условно считается направление вектора \mathbf{E} . В этом случае силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (рис.2.4).

По густоте силовых линий можно судить о напряженности электрического поля.

Понятие о силовых линиях поля, к сожалению, не удовлетворяет основному принципу электродинамики – принципу суперпозиции. Если мы знаем, как выглядят силовые линии одной и другой совокупности зарядов, то мы тем не менее не получим из этих картин характера силовых линий, если эти совокупности зарядов действуют совместно.

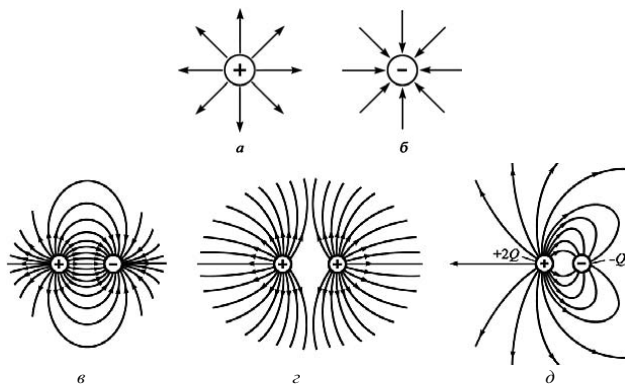


Рис. 2.4. Силовые линии точечного заряда: *a* – положительного; *б* – отрицательного. Диаграммы силовых линий: *в* – два заряда противоположного знака (диполь); *г* – два заряда одного знака; *д* – два заряда, один из которых $-Q$, а другой $+2Q$

Хотя силовые линии и дают наглядную картину поля, но такой способ описания не лишен недостатков.

2.4. Электрические поля систем зарядов

2.4.1. Электрический диполь

Простейшей системой точечных зарядов является электрический диполь – совокупность двух одинаковых по величине, но разноименных точечных зарядов ($\pm q$), расположенных на расстоянии l друг от друга (рис.2.5). Пусть \mathbf{l} – вектор, направленный от заряда $-q$ к $+q$. Вектор

$$\mathbf{p} = lq$$

называется дипольным моментом или электрическим моментом диполя. Элементарным или точечным диполем называется система зарядов с конечным дипольным моментом при стремлении расстояния между зарядами к нулю, причем расстояние от диполя до точки наблюдения r много больше l . Естественными диполями являются многие молекулы, например молекула воды (рис.2.6).

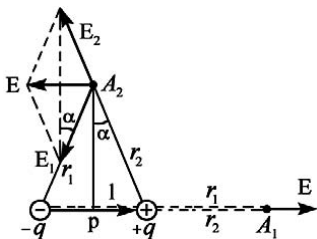


Рис. 2.5. Электрический диполь – система двух разноименных $\pm q$ близко расположенных зарядов. Дипольный момент равен $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ и направлен от отрицательно-го заряда к положительному

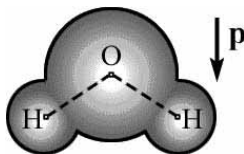


Рис.2.6. Схема молекулы воды H_2O , обладающей постоянным дипольным моментом p , равным $1,9 \cdot 10^{-18}$ ед. СГСЭ-см. Вектор дипольного момента направлен от центра иона кислорода O^{2-} к середине прямой, соединяющей центры ионов водорода H^+ . (Для перехода к СИ значение p умножить на $(1/3) \cdot 10^{-11}$, $p = 6,3 \cdot 10^{-30}$ Кл·м)

В качестве примера рассчитаем напряженность поля точечного диполя на его оси (положение A_1) и на перпендикуляре, проведенном через центр диполя (положение A_2):

$$A_1: \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_2^2} - \frac{q}{r_1^2} \right) \mathbf{l} = q \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \mathbf{l}}{4\pi\epsilon_0 (r_1 - l)^2 r_1^2 l} \approx \frac{ql \cdot 2r \mathbf{l}}{4\pi\epsilon_0 r^4 l} = \frac{2\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$\mathbf{E} = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

$$A_2: E = 2E_1 \sin \alpha = \frac{2q_1 r_1 \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} \approx \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \mathbf{E} = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Последняя формула, в силу условий $r \gg l$, справедлива при любом положении точки A_2 относительно перпендикуляра, восстановленного из середины к оси диполя.

Поле в точках A_1 и A_2 отличается в два раза и направлено в разные стороны. Напряженность поля диполя убывает обратно пропорционально кубу расстояния от диполя до точки наблюдения, т.е. быстрее, чем поле точечного заряда, поскольку в близких точках размещены два разноименных точечных заряда.

В произвольной точке пространства \mathbf{r} напряженность электрического поля диполя можно найти, используя полученные два соотношения, если соблюдается условие $r \gg l$ (рис. 2.7).

Пусть точка A , где ищется напряженность поля диполя, характеризуется радиусом-вектором \mathbf{r} , проведенным из точки B диполя в точку наблюдения. Восстановим из точки D , где расположен заряд $+q$, перпендикуляр на ось BA . В точку пересечения C поместим два точечных заряда $\pm q$, при этом поле в системе не изменится. Полученная система четырех зарядов представляет два диполя с суммарным дипольным моментом, равным геометрической сумме дипольных моментов исходной системы зарядов:

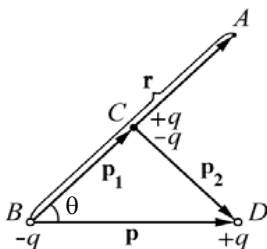
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$


Рис. 2.7. Использование принципа суперпозиции при расчете напряженности поля в точке A для диполя

Точка A лежит на оси диполя \mathbf{p}_1 и перпендикулярна оси диполя \mathbf{p}_2 , и, соответственно, напряженность поля в ней равна ($\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{p}_1$)

$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{\mathbf{p}_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{3\mathbf{p}_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Поскольку

$\mathbf{p}_1 = p \cos\theta \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = p \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{pr} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^2} \mathbf{r}$, то окончательно получаем

(рис. 2.8)

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}, \mathbf{r})\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5} - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

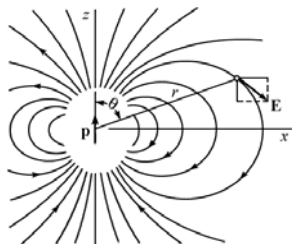


Рис. 2.8. Распределение силовых линий диполя \mathbf{p} , ориентированного вдоль оси z

На диполь в однородном электрическом поле действует результирующая сила, равная нулю:

$$\mathbf{F} = -q\mathbf{E} + q\mathbf{E} = 0.$$

В неоднородном электрическом поле на диполь действует сила, вообще говоря, отличная от нуля:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -q\mathbf{E}_1 + q\mathbf{E}_2 = q(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1).$$

Момент этих сил равен

$$\mathbf{M} = [\mathbf{l}, \mathbf{F}] = [lq, \mathbf{E}] = [p, \mathbf{E}].$$

Электрическое поле стремится повернуть ось диполя по направлению поля. Положение равновесия, когда векторы \mathbf{p} и \mathbf{E} антипараллельны, неустойчиво.

Для малых расстояний

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = l_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{E}.$$

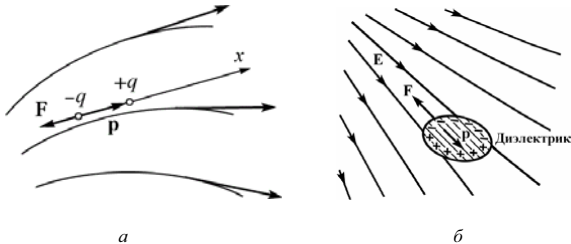


Рис. 2.9. В неоднородном электрическом поле диполь втягивается в область более сильного электрического поля (а). Примером такого диполя может являться диэлектрик в неоднородном поле (б) – мелкие бумажки будут притягиваться к заряженной расческе. На диэлектрик в неоднородном поле действует сила, направленная в сторону областей с большей напряженностью поля

На диполь в неоднородном электрическом поле действует сила $\mathbf{F} = q\Delta \mathbf{E}$, пропорциональная величине дипольного момента и тем большая, чем сильнее неоднородность поля:

$$\mathbf{F} = (p, \nabla) \mathbf{E}.$$

Например, если ось x направить вдоль оси диполя \mathbf{p} ($p_x, 0, 0$), то на диполь будет действовать сила

$$F = p \frac{\partial E}{\partial x},$$

втягивающая диполь в область более сильного электрического поля ($F < 0$, \mathbf{F} антипараллельна x , рис. 2.9, а).

2.4.2. Заряженная нить

Найдем, пользуясь принципом суперпозиции, напряженность электрического поля от равномерно заряженной тонкой нити на расстоянии r от ее середины (рис. 2.10). Линейная плотность заряда – электрический заряд, приходящийся на единицу длины нити, – равна λ [Кл/м]. Направим ось x вдоль нити и расположим начало координат в её центре. Любой бесконечно малый элемент dx нити обладает точечным зарядом

$$dq = \lambda dx.$$

Напряженность поля в точке A равна

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

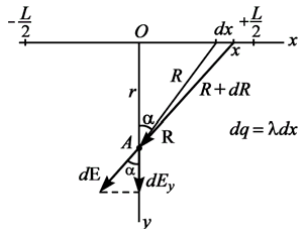


Рис. 2.10. Расчет напряженности электростатического поля в точке A , расположенной на перпендикуляре OA , который восстановлен к центру равномерно заряженной нити

Здесь \mathbf{R} – радиус-вектор, соединяющий точку A с зарядом dq . Вектор \mathbf{E} $d\mathbf{E}$ направлен вдоль радиус-вектора \mathbf{R} , но поскольку любому заряду dq справа от начала координат соответствует симметрично расположенный заряд dq слева от начала координат, то результирующий вектор напряженности в точке A будет всегда направлен вдоль оси y :

$$dE_y = 2dE \cos \alpha = 2dE \frac{r}{R} = \frac{2\lambda r dx}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

По теореме Пифагора:

$$x^2 + r^2 = R^2.$$

Напряженность поля в точке A , лежащей на перпендикуляре на расстоянии r от середины нити, равна

$$E = \int_0^{L/2} \frac{2\lambda r dx}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\lambda r L}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{r^2 + L^2/4}}.$$

Если расстояние от точки наблюдения A до нити много меньше длины нити ($r \ll L/2$), то в этом случае

$$E = \frac{\lambda r L}{4\pi\epsilon_0 r^2 (L/2)} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{и} \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

– напряженность поля убывает обратно пропорционально увеличению расстояния до нити $E \sim r^{-1}$, что существенно отличается от зависимости $E \sim r^{-2}$ для точечного заряда.

Если точка A находится так далеко от нити, что она уже не воспринимается как протяженный объект ($r \gg L/2$), то

$$E = \frac{(\lambda L) \cdot r}{4\pi\epsilon_0 r^2 \cdot r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

– напряженность поля заряженной нити длиной L совпадает с напряженностью поля точечного заряда – величиной $q = \lambda L$, равной полному заряду нити.

2.4.3. Заряженная плоскость

Перейдем от одномерного распределения зарядов к двумерному. Пусть, например, заряды равномерно распределены по круглому диску диаметром D с поверхностной плотностью – заряд на единицу площади – σ [Кл/м²]. Вычислим напряженность поля на расстоянии r от центра диска (рис. 2.11).

Для этого разобьем диск на кольцевые зоны шириной dx и радиусом x . Каждый бесконечно малый элемент такого кольца длиной dL обладает точечным зарядом $dq = \sigma dx dL$, напряженность поля для которого равна

$$d\mathbf{E} = \frac{\sigma dL dx}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Каждому элементу кольца с левой стороны диска соответствует симметричный элемент с правой стороны, так что результирующее поле будет направлено вдоль оси y . Проекция вектора $d\mathbf{E}$ на ось y на расстоянии r от центра диска равна

$$dE_y = \frac{\sigma dx dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \alpha = \frac{\sigma dx dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r}{R} = \frac{\sigma r dx dL}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

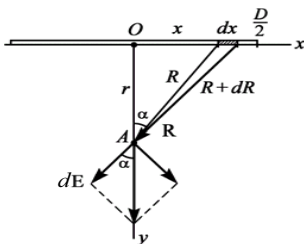


Рис. 2.11. Расчет напряженности электрического поля в точке A на оси равномерно заряженного диска. Показано сечение диска, проведенное перпендикулярно поверхности диска через его центр

Поскольку все элементы кольца равноудалены от центра диска и точки наблюдения O , легко найти вклад в dE_y от всего кольца

$$\left(\sum_{(L)} dL = 2\pi x - \text{длина кольцевого диска радиуса } x \right):$$

$$\sum_{(L)} dE_y = \frac{\sigma r dx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \sum_{(L)} dL = \frac{\sigma 2\pi x dx}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

По теореме Пифагора $R^2 = x^2 + r^2$ и результирующее поле в точке A равно

$$E_A = \int_0^{D/2} \frac{\sigma r 2\pi x dx}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + D^2/4}} \right].$$

При малых расстояниях от точки наблюдения A до заряженной плоскости ($r \ll D$) напряженность поля не зависит от расстояния до плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

В этом случае неважно, какую форму имеет заряженная плоскость и где, собственно, расположена точка A относительно центра плоскости (исключая приграничные области). При удалении от плоскости на расстояния, много большие размеров плоскости ($r \gg D$), поле от нее будет изменяться как поле точечного заряда величиной $q = \sigma(\pi D^2/4)$, равной полному заряду плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{(\sqrt{r^2 + D^2/4} - r)}{(\sqrt{r^2 + D^2/4})} \cdot \frac{(\sqrt{r^2 + D^2/4} + r)}{(\sqrt{r^2 + D^2/4} + r)} \right] \cong$$

$$\cong \frac{\pi\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{D^2/4}{r \cdot 2r} = \frac{\sigma(\pi D^2/4)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

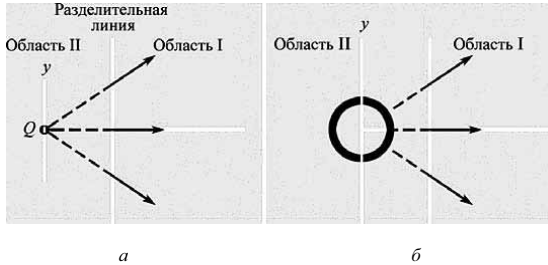


Рис. 2.12. В обоих случаях *a* и *б* напряженности поля одинаковы в каждой точке области I. Никаким способом нельзя определить распределение заряда в области II по измерениям поля в области I

Одно из преимуществ использования понятия электромагнитного поля заключается в том, что при этом мы избегаем необходимости касаться детальной природы источника поля. Например, на рис. 2.12, *a* и *б* поле в области I в обоих случаях равно $E = k_0 Q/r^2$. Тем не менее поле такой конфигурации может быть создано самыми разнообразными источниками. Это может быть либо точечный заряд, как на рис. 2.12, *a*, либо равномерно заряженная сфера (рис. 2.12, *б*). Никакими измерениями в интересующей нас области (область I) нельзя установить истинное распределение заряда источника поля. Кроме того, источник поля может перемещаться. В этом случае использование представления об электрическом поле позволяет учитывать релятивистские эффекты такие, как невозможность распространения сигнала со скоростью, превышающей скорость света. Мы увидим, что электрическое поле – реальный физический объект, который характеризуется своими значениями локальной энергии и импульса. В рамках представления о поле все силы оказываются локальными, и поэтому удается избежать действия сил на расстоянии.

2.5. Электрический потенциал

Вычислим работу по переносу заряда q_0 из одной точки электрического поля в другую. Работа A_n , произведенная силами электрического поля, равна интегралу по некоторому пути, соединяющему исходную (a) и конечную (b) точки поля, от произведения компонента силы \mathbf{F} , направленной вдоль перемещения $d\mathbf{r}$:

$$A_n = \int_a^b (\mathbf{F}, d\mathbf{r}).$$

В случае электрического поля $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$, тогда работа по перемещению единичного положительного заряда равна (рис. 2.13, a)

$$A = \frac{A_n}{q_0} = \int_a^b (\mathbf{E}, d\mathbf{r}).$$

Пусть электрическое поле создается точечным зарядом, напряженность поля которого равна

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

В этом случае имеем для величины A следующее соотношение:

$$A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \left(\frac{\mathbf{r}, d\mathbf{r}}{r^3} \right).$$

В интеграле, определяющем A , скалярное произведение $(\mathbf{r}, d\mathbf{r})$ отлично от нуля лишь для перемещений $d\mathbf{r}$, параллельных \mathbf{r} , т.е. вдоль прямой, исходящей из точечного заряда q . Для перпендикулярных к \mathbf{r} перемещений $(\mathbf{r}, d\mathbf{r}_\perp) = r d\mathbf{r} \cdot \cos(\pi/2) = 0$.

Поэтому можно записать $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_\parallel + d\mathbf{r}_\perp$, где вектор $d\mathbf{r}_\parallel$ параллелен \mathbf{r}_\parallel . В последнем случае имеем $(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = r d\mathbf{r}$. Работа по перемещению единичного положительного заряда в поле точечного электрического заряда q равна (рис. 2.13, $b, в$)

$$A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{(\mathbf{r}, d\mathbf{r})}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right).$$

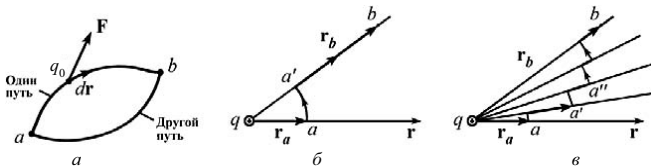


Рис. 2.13. Работа сил электрического поля по переносу заряда q_0 от a к b равна интегралу от $(\mathbf{F}, d\mathbf{r})$, взятому по выбранному пути (а): $A_n = \int (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$; при переносе единичного положительного заряда от a к b по любому пути тратится одна и та же работа, которая определяется начальным и конечным положениями заряда (б, в)

Работа зависит только от положения тела в начале (a) и в конце (b) пути, но совершенно не зависит от траектории перемещения тела из точки a в точку b . В результате величина W_A может быть выражена в виде разности двух чисел $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ – потенциалов электрического поля в точках a и b :

$$A = \int_a^b (\mathbf{E}, d\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_b} = \varphi(a) - \varphi(b).$$

Найденное соотношение в силу принципа суперпозиции справедливо для любого распределения зарядов, поскольку всегда можно записать

$$\mathbf{E} = \sum_k \mathbf{E}_k = \sum_k \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_k^2} \frac{\mathbf{r}_k}{r_k}.$$

В этом случае имеем

$$A = \int_a^b \sum_k \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_k, d\mathbf{r}_k)}{r_k^3} = \sum_k \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{ak}} - \sum_k \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{bk}} = \varphi(a) - \varphi(b).$$

Разность потенциалов между двумя точками представляет собой работу, которую необходимо затратить для перемещения единичного положительного заряда из одной точки в другую. Величину разности потенциалов принято также называть электрическим напряжением или просто напряжением.

Величину φ в произвольной точке a называют электростатическим потенциалом в этой точке и обычно определяют, как

$$\varphi(r_a) = \int_{r_a}^{r_b=\infty} (\mathbf{E}, d\mathbf{r}).$$

Функция $\varphi(r)$ имеет физический смысл изменения потенциальной энергии единичного положительного заряда, если его перевести в указанную точку пространства \mathbf{r}_a из исходной точки \mathbf{r}_b (которую обычно выбирают удаленной на бесконечность ($\mathbf{r}_b = \infty$)). В общем случае потенциал определен, как и потенциальная энергия, с точностью до произвольной постоянной) $\varphi(\mathbf{r}_b)$. Но поскольку физический смысл имеет не сам потенциал, а разность потенциалов, то это обстоятельство не вносит каких-либо проблем. Если исходную точку \mathbf{r}_b выбрать на бесконечности, то потенциал электростатического поля точечного заряда q , находящегося в начале координат, в произвольной точке \mathbf{r} ($\mathbf{r} \neq 0$) будет равен

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Таким образом, потенциал электростатического поля *численно* равен работе, совершаемой электрическими силами по перемещению единичного положительного заряда из данной точки поля на бесконечность. Или потенциал *численно* равен работе, которую совершают внешние силы (против сил электрического поля) по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля.

Для совокупности точечных зарядов, расположенных в точках с координатами \mathbf{R}_k , потенциал в точке $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ равен

$$\varphi(x, y, z) = \sum_k \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{R}_k|}.$$

Здесь $|\mathbf{r} - \mathbf{R}_k| = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}$.

Результирующий потенциал в данной точке поля равен алгебраической сумме потенциалов полей точечных зарядов.

Если заряды распределены непрерывно, то потенциал можно вычислить согласно соотношению

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} \frac{\rho(\mathbf{R}) dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}.$$

Практической единицей измерения потенциала в СИ является вольт, сокращенно В. Вольт – это разность потенциалов между такими точками, когда при перемещении одного кулона электричества из одной точки в другую электрическое поле совершает работу в один джоуль.

Удобной единицей измерения энергии оказывается количество энергии, сообщаемой электрону (или другой частице с тем же зарядом) при перемещении в электрическом поле между точками с разностью потенциалов 1 В. Действующее на частицу электрическое поле увеличивает ее кинетическую энергию на величину

$$\Delta K = -\Delta U = e \Delta \phi = (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}) \cdot (1 \text{ В}) = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Это количество энергии называется электрон-вольт (сокращенное обозначение эВ):

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж (электрон-вольт).}$$

Производными единицами являются МэВ, ГэВ и ТэВ:

$$1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж,}$$

$$1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Дж,}$$

$$1 \text{ ТэВ} = 10^{12} \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

Рассмотрим боровскую модель атома водорода, в котором электрон движется по круговой орбите радиусом $R = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, в центре орбиты расположен протон. Найдем скорость электрона, электрическую потенциальную энергию и полную энергию электрона.

Чтобы найти скорость, запишем для электрона соотношение $F = ma$, в котором $F = k_0 e^2 / R^2$ – электростатическая сила, а $a = v^2 / R$ – нормальное ускорение. Тогда

$$k_0 \frac{e^2}{R^2} = m \frac{v^2}{R},$$

$$v = \sqrt{\frac{k_0 e^2}{mR}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 0,53 \cdot 10^{-10}}} = 2,18 \cdot 10^6 \text{ м/с} \approx c / 137.$$

Потенциальная энергия парного взаимодействия равна

$$U = -k_0 \frac{e^2}{R} = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{0,53 \cdot 10^{-10}} = -43,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = -27,2 \text{ эВ.}$$

Умножив обе части выражения $k_0 \frac{e^2}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$ на $R/2$, найдем кинетическую энергию:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k_0 \frac{e^2}{R} = -\frac{1}{2} U = 13,6 \text{ эВ.}$$

Мы видим, что кинетическая энергия по модулю равна половине потенциальной энергии. Полная энергия равна

$$E = K + U = -U/2 + U = U/2 = -13,6 \text{ эВ.}$$

Абсолютное значение этой величины равно той энергии, которую нужно сообщить электрону, чтобы удалить его на бесконечность. Эта величина называется энергией ионизации.

2.6. Связь между потенциалом и напряженностью

Удобство введенной величины ϕ в том, что потенциал – это скалярная энергетическая характеристика электростатического поля. Потенциал равен отношению потенциальной энергии взаимодействия заряда с полем к величине этого заряда. В то же время силовое действие поля на заряд определяется напряженностью электростатического поля \mathbf{E} . Напряженность электрического поля является векторной величиной, и обращаться с ней значительно сложнее, чем со скаляром. Однако, зная распределение потенциала в пространстве, легко найти напряженность электрического поля.

Пусть точка a имеет координаты (x, y, z) , точка b $(x + \Delta x, y, z)$. Работа электростатического поля по перемещению единичного положительного заряда из точки a в точку b по прямой x равна разности потенциалов в этих точках.

Учитывая, что $\phi_a - \phi_b = -\Delta\phi$, запишем:

$$\Delta A = \phi_a(x, y, z) - \phi_b(x + \Delta x, y, z) = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \Delta x.$$

По определению, работа электростатического поля по перемещению единичного положительного заряда вдоль оси x равна

$$\Delta A = \int (\mathbf{E}, d\mathbf{r}) = E_x \Delta x.$$

Приравнивая правые части полученных соотношений, находим

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

Аналогичным образом получаем

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

Видно, что электрическое поле можно измерять либо в вольтах на метр (В/м), либо в ньютонах на кулон (Н/Кл) и что поле \mathbf{E} направлено в сторону уменьшения потенциала. В векторной форме записи имеем

$$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$

Выражение в скобках называется градиентом потенциала φ и обозначается как $\text{grad } \varphi$ или $\nabla\varphi$:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla\varphi.$$

Компоненты вектора $\text{grad}\varphi$ или $\nabla\varphi$ определяют скорость пространственного изменения потенциала: x -компонента $\partial\varphi/\partial x$ показывает, как быстро φ изменяется в направлении x , $\partial\varphi/\partial y$ – в направлении y , $\partial\varphi/\partial z$ – в направлении оси z . Самая большая проекция $\nabla\varphi$ совпадает с направлением самого вектора $\nabla\varphi$, иными словами, это то направление, по которому φ изменяется быстрее всего. Направление градиента φ – это направление наискорейшего возрастания потенциала.

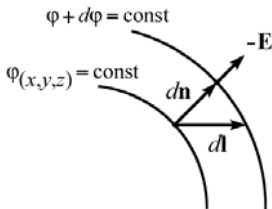


Рис. 2.14. Вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} направлен против направления наискорейшего изменения потенциала

$$\mathbf{E} = -\frac{d\varphi}{dn} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} - \text{единичный вектор нормали к поверхности } \varphi = \text{const}$$

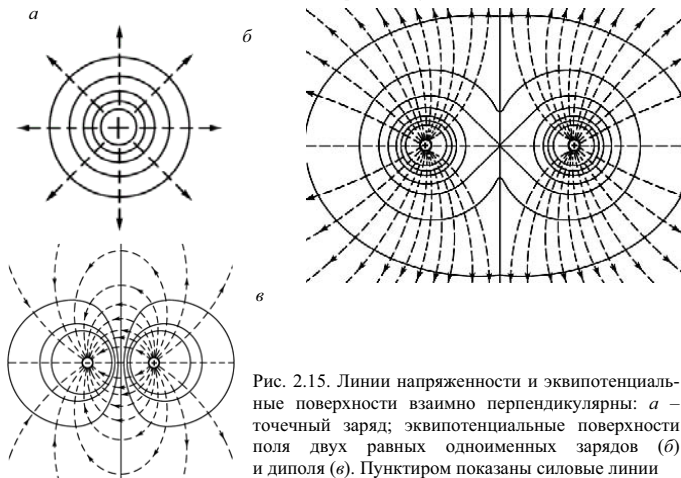


Рис. 2.15. Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны: a – точечный заряд; эквипотенциальные поверхности поля двух равных одноименных зарядов (b) и диполя (v). Пунктиром показаны силовые линии

Вектор напряженности \mathbf{E} направлен противоположно вектору градиента потенциала (рис. 2.14). Вдоль электрических силовых линий потенциал изменяется максимально быстро и, следовательно, вектор \mathbf{E} перпендикулярен поверхностям равного потенциала $\varphi(x,y,z) = \text{const}$ – эквипотенциальным поверхностям (рис. 2.15). Если бы вектор \mathbf{E} не был направлен перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям, то у него существовала бы компонента вдоль поверхности и потенциал изменялся бы вдоль поверхности $\varphi = \text{const}$, а поэтому их нельзя было бы назвать эквипотенциальными. Эквипотенциальные поверхности могут служить для наглядного изображения картины поля. Через равные приращения потенциала $\Delta\varphi$ чертят эквипотенциальные поверхности, а затем для полноты картины проводят силовые линии, перпендикулярные эквипотенциальным поверхностям. Там, где расстояние между эквипотенциальными поверхностями мало, напряженность поля велика и наоборот.

Наибольшее электрическое поле в воздухе при атмосферном давлении достигает величины 10^6 В/м. В более сильных полях происходит электрический пробой – лавинный процесс, при котором каждый ион образует новые ионы и возникает искровой, или коронный, разряд. На рис. 2.16 показано проявление эффекта коронного разряда. Студентка касается рукой электрода генератора



Рис. 2.16. Касаясь электрода генератора Ван-де-Граафа, студентка сообщает своему телу потенциал $\approx 10^5$ В. Волосы вытягиваются вдоль электрических силовых линий

Ван-де-Граафа. Такой генератор может создавать потенциал выше 10^5 В. На кончиках волос возникают искровые разряды. Заряженные волосы отталкиваются друг от друга и располагаются вдоль силовых линий вокруг заряженной головы.

Определим наибольший потенциал и заряд, которые можно сообщить находящейся в воздухе сфере диаметром 30 см. Поле вне сферы совпадает с полем точечного заряда. Поэтому для

вычисления потенциала на поверхности сферы можно воспользоваться формулой

$$\varphi = \frac{k_0 Q}{R} = \left(k_0 \frac{Q}{R^2} \right) R.$$

Выражение в скобках – это напряженность электрического поля E , следовательно,

$$\varphi = ER.$$

Поскольку в воздухе максимальное значение $E = 10^6$ В/м, то

$$\varphi_{\text{макс}} = (10^6 \text{ В/м}) \cdot (0,15 \text{ м}) = 1,5 \cdot 10^5 \text{ В}.$$

Находя Q из формулы $\varphi = k_0 Q/R$, получаем

$$Q_{\text{макс}} = \frac{\varphi_{\text{макс}} R}{k_0} = \frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot 0,15}{9 \cdot 10^9} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

В качестве еще одного примера рассмотрим электрический диполь $p = qL$, расположенный вдоль оси x , как показано на рис. 2.17. Найдем φ , E_x и E_y в точке A в случае, когда $r \gg L$.

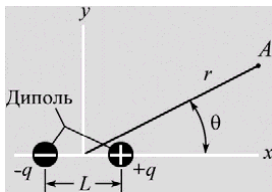


Рис. 2.17. Электрический диполь, ориентированный вдоль оси x

Если точка A находится от диполя на расстоянии r , значительно превышающем L , можно считать, что расстояние от точки A до заряда $+q$ равно $[r - (L/2)\cos\theta]$, а до заряда $-q$ оно будет $[r + (L/2)\cos\theta]$. Тогда потенциал φ в точке A равен сумме потенциалов, создаваемых отдельными зарядами:

$$\varphi = k_0 \frac{q}{r - (L/2)\cos\theta} + k_0 \frac{(-q)}{r + (L/2)\cos\theta} = k_0 \frac{qL \cos\theta}{r^2 - (L^2/4)\cos^2\theta}.$$

При $r \gg L$ имеем

$$\varphi \approx k_0 \frac{p \cos\theta}{r^2} = k_0 p \frac{x}{r^3},$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -k_0 p x \frac{\partial(r^{-3})}{\partial y} = -k_0 p x (-3)r^{-4} \frac{\partial r}{\partial y} =$$

$$= 3k_0 p \frac{x}{r} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = 3 \frac{k_0 p \cos \theta}{r^3} \left(\frac{y}{r} \right) = 3 \frac{k_0 p \cos \theta \sin \theta}{r^3},$$

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{k_0 p}{r^3} - k_0 p x \frac{\partial (r^{-3})}{\partial x} = \frac{k_0 p}{r^3} \left(-1 + \frac{3x}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{k_0 p}{r^3} (-1 + 3 \cos^2 \theta) = \frac{k_0 p}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned}$$

Мы видим, что при данном угле θ поле убывает обратно пропорционально кубу расстояния. Диаграмма силовых линий диполя приведена на рис. 2.8, 2.15.

2.7. Безвихревой характер электростатического поля

Из условия $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ следует одно важное соотношение, а именно величина векторного произведения $[\nabla, \mathbf{E}]$ для стационарных полей всегда равна нулю. Действительно, по определению, имеем

$$[\nabla, \mathbf{E}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \varphi = 0,$$

поскольку определитель содержит две одинаковые строки. Величина $[\nabla, \mathbf{E}]$ называется ротором или вихрем и обозначается как $\text{rot } \mathbf{E}$. И мы получаем важнейшее уравнение электростатики

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0.$$

Закон Кулона дает безвихревое поле.

Согласно теореме Стокса, присутствует следующая связь между контурным и поверхностным интегралами:

$$\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

где контур L ограничивает поверхность S , ориентация которой определяется направлением вектора положительной нормали \mathbf{n} :

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS.$$

Поэтому работа при перемещении заряда по любому замкнутому пути в электростатическом поле равна нулю.

Это условие, впрочем, выполняется для любой радиальной силы $F \sim r^{-n}$ независимо от показателя степени n . Условий $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi$ недостаточно для полного описания законов электростатики.

2.8. Поток вектора напряженности

Определим одно очень важное и полезное понятие математической физики – поток вектора. Первоначально это понятие было введено в гидродинамике и определяло количество жидкости, протекающее через некоторую поверхность.

Количество жидкости, протекающей за время dt через площадку dS , расположенную перпендикулярно вектору скорости \mathbf{v} равно (рис.2.18)

$$d\Phi = v dS dt.$$

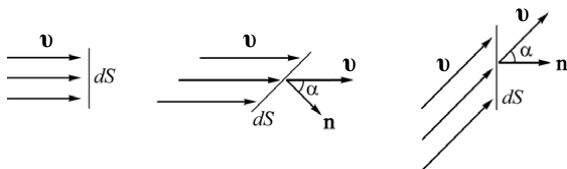


Рис. 2.18. Поток вектора \mathbf{v} через поверхность dS за время dt определяется скалярным произведением $d\Phi = (\mathbf{v}, \mathbf{n}dS)dt$, \mathbf{n} – вектор нормали

Если площадка расположена под углом α к вектору скорости (α – угол между нормалью \mathbf{n} к площадке dS и вектором \mathbf{v}), то вектор \mathbf{v} не будет пересекать элементы dS_{\parallel} , ориентированные параллельно вектору скорости, или составляющая потока с вектором \mathbf{v}_{\parallel} , направленным вдоль dS , также не будет вытекать через поверхность, а будет вытекать поток с составляющей вектора скорости \mathbf{v}_{\perp} – перпендикулярной dS :

$$d\Phi = \mathbf{v}dS_{\perp}dt = \mathbf{v}_{\perp}dSdt = \mathbf{v}dS \cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{n}})dt = (\mathbf{v}, \mathbf{n}d\mathbf{S})dt = (\mathbf{v}, d\mathbf{S})dt.$$

Количество жидкости, вытекающей в единицу времени через dS , равно

$$\frac{d\Phi}{dt} = (\mathbf{v}, d\mathbf{S}).$$

Здесь ориентация элементарной площадки dS задается вектором положительной нормали \mathbf{n} . Для замкнутой поверхности вектор \mathbf{n} направлен наружу, для незамкнутой направление вектора \mathbf{n} условно: $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$. Если поверхность S , через которую вытекает жидкость (вектор \mathbf{v}), не бесконечно мала, то для подсчета потока вектора \mathbf{v} через поверхность S надо разбить S на бесконечно малые площадки dS и затем вычислить интеграл $\int(\mathbf{v}, d\mathbf{S})$ по всей поверхности S . Независимо от физической природы вектора \mathbf{v} выражения типа $\int(\mathbf{v}, d\mathbf{S})$ называются потоком вектора \mathbf{v} через поверхность S . В частности, величина

$$\Phi = \int_{(S)} (\mathbf{E}, d\mathbf{S})$$

называется потоком вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} . Слову «поток» здесь придается смысл поверхностного интеграла от нормальной составляющей вектора \mathbf{E} . Величина Φ равна числу силовых линий, пересекающих поверхность S .

Покажем на примере точечного заряда, что число силовых линий (поток Φ) остается постоянным для любой замкнутой поверхности S .

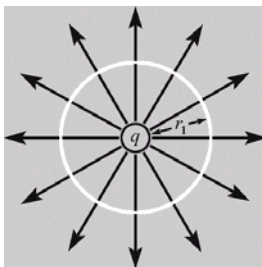


Рис. 2.19. Силовые линии точечного заряда q пересекают воображаемую сферу радиусом r_1

Окружим заряд q воображаемой сферой радиусом r_1 (рис. 2.19). Поскольку площадь S сферы равна $4\pi r_1^2$, число силовых линий, пересекающих эту сферу, равно произведению E на площадь S ($k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0)$):

$$\Phi = E(4\pi r_1^2) = \left(k_0 \frac{q}{r_1^2}\right)(4\pi r_1^2) = 4\pi k_0 q = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Следует заметить, что полученный результат не зависит от r_1 и поэтому справедлив для всех значений r . Таким образом, полное число силовых линий, выходящих из точечного заряда q , равно $4\pi k_0 q$, и эти линии непрерывны на всем пути до бесконечности.

Число силовых линий равно $\Phi = 4\pi k_0 q$, даже если замкнутая поверхность не является сферой. Если поверхности dS и dS' пересекает одно и то же число линий, то $(\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = (\mathbf{E}, d\mathbf{S}')$, и, следовательно,

$$\Phi = \int_{\text{По сфере}} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \int_{S'} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}'),$$

где S' – замкнутая поверхность любой формы, охватывающая заряд q . Пусть $\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S})$ – это интеграл от \mathbf{E} по замкнутой поверхности любой формы. Тогда

$$\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

при условии, что поверхность охватывает изолированный заряд q . Такая замкнутая поверхность называется гауссовой поверхностью.

Для потока произвольного вектора \mathbf{A} можно установить одно полезное соотношение. Пусть S представляет куб со сторонами dx , dy , dz , ориентированными вдоль осей x , y , z (рис. 2.20). Подсчитаем поток вектора \mathbf{A} через поверхность этого куба.

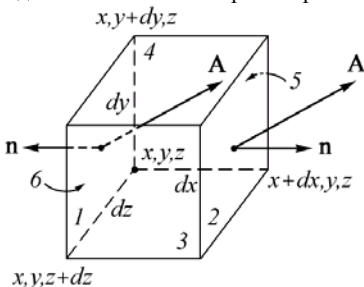


Рис. 2.20. Поток вектора \mathbf{A} из бесконечно малого объема $dx dy dz = dV$ равен дивергенции вектора \mathbf{A} , умноженной на объем dV

Поток через поверхность (1) $dS = dy dz$ грани 1 куба равен

$$(\mathbf{A}, d\mathbf{S})_1 = (A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z) dz dy = -A_x dz dy.$$

На грани 1 вектор \mathbf{n} ориентирован против оси x ($n_x = -1$, $n_y = 0$, $n_z = 0$).

Поток через грань 2 равен ($n_x = +1$, $n_y = 0$, $n_z = 0$)

$$(\mathbf{A}, d\mathbf{S})_2 = A_x(x + dx, y, z) dz dy = \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx \right) dy dz .$$

Складывая потоки сквозь грани 1 и 2, получаем поток через грани 1 и 2 наружу

$$(\mathbf{A}, d\mathbf{S})_{1+2} = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz .$$

Проведя аналогичные вычисления для граней 3, 4

$$(\mathbf{A}, d\mathbf{S})_{3+4} = -A_y dz dx + \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} dy \right) dz dx = \frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz$$

и граней 5, 6

$$(\mathbf{A}, d\mathbf{S})_{5+6} = -A_z dx dy + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \right) dx dy = \frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz ,$$

получаем поток через все грани бесконечно малого куба ($dV = dx dy dz$)

$$(\mathbf{A}, d\mathbf{S}) = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV .$$

Если поверхность S , ограничивающая векторное поле \mathbf{A} , замкнута и конечна и конечен объем V , ограничиваемый этой поверхностью, то, разбивая этот объем на бесконечно малые объемы dV (на соседних соприкасающихся гранях потоки взаимно компенсируются в силу противоположного направления нормалей), получаем для полного потока вектора через замкнутую поверхность S

$$\int_S (\mathbf{A}, d\mathbf{S}) = \int_V (\nabla, \mathbf{A}) dV .$$

Это соотношение (теорема Гаусса) связывает поток вектора через замкнутую поверхность с величиной интеграла от (∇, \mathbf{A}) , взятого по объему, заключенному под поверхностью S .

Скалярная функция векторного аргумента

$$(\nabla, \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \equiv \operatorname{div} \mathbf{A}$$

называется дивергенцией вектора \mathbf{A} (от латинского *divergo* – отклоняюсь, отхожу). Термин и обозначение div ввел У. Клифф-

форд (1878 г.). Противоположную по знаку величину рассматривал Дж. Максвелл (1873 г.), называя ее конвергенцией.

2.9. Теорема Гаусса в электростатике

Пусть заряд распределен в пространстве непрерывно с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, выберем в этом пространстве сферическую область достаточно малого радиуса Δr , тогда для любой точки пространства внутри объема ΔV , ограниченного сферой радиуса Δr , можем записать:

$$\int_{(\Delta S)} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) \approx \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot \Delta V, \text{ поскольку } \operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ \Delta S \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta V} \int_{(\Delta S)} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}).$$

Напряженность электрического поля \mathbf{E} от непрерывно распределенного заряда с плотностью $\rho(\mathbf{r})$ в объеме ΔV равна

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Delta V} \frac{\rho(\mathbf{r})}{r^2} \mathbf{n} dV \cong \frac{\rho(r)}{4\pi\epsilon_0 \Delta r^2} \mathbf{n} \Delta V.$$

Поскольку $\Delta S = \mathbf{n} \cdot 4\pi \Delta r^2$, то получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \Delta V = \frac{\rho(r)}{4\pi\epsilon_0 \Delta r^2} \Delta V (\mathbf{n}, \mathbf{n} 4\pi \Delta r^2).$$

Откуда следует

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

– дифференциальная форма теоремы Гаусса. Она позволяет рассчитать электрическое поле при произвольном пространственном распределении зарядов.

От дифференциальной формы, воспользовавшись теоремой Гаусса, можно перейти к интегральной форме соотношения между полевыми и зарядовыми характеристиками.

Проинтегрируем равенство $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho(r)/\epsilon_0$ по объему V и перейдем от объемного интеграла к поверхностному:

$$\int_{(V)} \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} dV = \frac{q}{\epsilon_0} = \int_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \int_{(S)} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \Phi.$$

В результате получим

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

– теорему Гаусса в интегральной форме: поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен полному электрическому заряду, заключенному под данной поверхностью, деленному на ϵ_0 .

Отметим, что теорема Гаусса в электростатике имеет место только при строгом соблюдении закона обратных квадратов, определяющего взаимодействие точечных зарядов. Поэтому следствия теоремы Гаусса позволяют с высокой точностью проверить закон Кулона.

Теперь покажем, что сообщенный проводнику заряд должен оказаться на поверхности проводника, даже если этот заряд был введен внутрь проводника. На рис. 2.21 изображен проводник произвольной формы (он может быть даже пустотелым). Выберем непосредственно под поверхностью проводника замкнутую поверхность S , показанную на рисунке штриховой линией. Применим к этой поверхности теорему Гаусса:

$$\oint_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \frac{q_{\text{внутр}}}{\epsilon_0}.$$

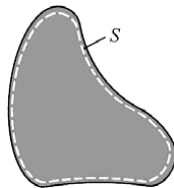


Рис. 2.21. Замкнутая поверхность, показанная штриховой линией, расположена сразу же под поверхностью тела

В любой точке проводящей поверхности S поле должно быть равно нулю, иначе электроны проводимости пришли бы в движение. (Электроны неподвижны, поскольку мы дождалась, когда закончится перераспределение зарядов и свободных электронов.) Неподвижность зарядов в проводнике означает, что внутри проводника на них не действуют электрические силы, т.е. $E = 0$ на поверхности S . В этом случае

$$\oint_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 0.$$

Таким образом, поток вектора \mathbf{E} через поверхность S равен нулю:

$$\frac{q_{\text{внутр}}}{\epsilon_0} = 0.$$

Отсюда $q_{\text{внутр}} = 0$ – заряд внутри замкнутой поверхности отсутствует. Можно брать всевозможные замкнутые поверхности, и при этом всякий раз мы будем иметь $q_{\text{внутр}} = 0$ – полный заряд в любой небольшой области внутри проводника равен нулю. Рассмотрим некоторые примеры использования теоремы Гаусса.

Земля обладает небольшим электрическим полем, напряженность которого непосредственно над её поверхностью составляет около 100 Н/Кл. Определим:

а) Какова напряженность электрического поля непосредственно под поверхностью Земли?

б) Чему равен поверхностный заряд, создающий вблизи поверхности Земли напряженность $E = 100$ Н/Кл? Сколько для этого требуется избыточных электронов на каждый квадратный сантиметр поверхности?

а) Поскольку Земля – это проводник, а не изолятор, то под поверхностью Земли, как внутри всякого проводника, постоянное поле существовать не может, т.е. $E = 0$.

б) Применим теорему Гаусса к сфере, которая окружает Землю и имеет радиус несколько больше радиуса Земли R_3 . Поскольку E постоянна по сфере, то интеграл равен произведению E на площадь поверхности Земли S_3 :

$$\oint_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = ES_3.$$

Теорема Гаусса принимает вид

$$ES_3 = \frac{Q_3}{\epsilon_0},$$

где Q_3 – полный поверхностный заряд, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \frac{Q_3}{S_3} = E\epsilon_0 = 10^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} = 8,85 \cdot 10^{-10} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 8,85 \cdot 10^{-14} \frac{\text{Кл}}{\text{см}^2}.$$

Поскольку величина заряда электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, то поверхностная плотность n избыточных электронов равна

$$n = \frac{\sigma}{e} = \frac{8,85 \cdot 10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,53 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{см}^2}$$

– около полумиллиона электронов на квадратный сантиметр. Это очень небольшая величина, поскольку на 1 см² находится примерно 10^{15} атомов.

Если напряженность электрического поля больше 10^6 Н/Кл, то в сухом воздухе происходит образование ионов и возникают искровые разряды (воздух становится проводником).

Вычислим максимальный заряд, который можно сообщить сферам радиусами $r_1 = 1$ см и $r_2 = 1$ м. Для этого применим теорему Гаусса к сфере, радиус которой несколько больше радиуса заряженной сферы. Поскольку величина E постоянна, поверхностный интеграл равен $E \cdot (4\pi r^2)$. Согласно теореме Гаусса, этот интеграл должен быть равен q/ϵ_0 :

$$E \cdot (4\pi r^2) = q/\epsilon_0, \quad q = E \cdot r^2 \cdot 4\pi\epsilon_0.$$

В случае $r_1 = 1$ см $(4\pi\epsilon_0) = 1/k_0 = (1/9) \cdot 10^9$ м/Ф):

$$q_1 = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot (10^{-2})^2}{9 \cdot 10^9} = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ Кл.}$$

В случае $r_2 = 1$ м q_2 в 10^4 раз больше q_1 , т.е. $q_2 = 1,1 \cdot 10^{-4}$ Кл.

Мы видим, что 1 кулон электричества оказывается настолько большим зарядом, что для его «удержания» на проводящей сфере, находящейся в воздухе, необходима сфера радиусом около 100 м.

2.10. Поле равномерно заряженной прямой нити и заряженного цилиндра

Закон Гаусса полезен при решении ряда задач, связанных с вычислением напряженности электрического поля от системы симметрично расположенных зарядов. Симметрия может быть точечной, линейной, сферической и плоскостной.

Пусть на длинную прямую нить равномерно помещен электрический заряд, так что на единицу длины нити приходится заряд λ [Кл/м]. Найдем напряженность электрического поля E на расстоянии r от нити (рис. 2.22).

Если решать данную задачу с помощью закона Кулона, то она сведется к вычислению суммы вкладов от совокупности точечных зарядов, расположенных на бесконечно малых элементах нити (п. 2.4.2). Интегрирования можно избежать, применив теорему Гаусса. Учтем, что вектор E направлен перпендикулярно нити – для бесконечно длинной прямой нити ни одно из направлений вдоль нити не выделено. На равных расстояниях от нити вектор E , очевидно, будет иметь одну величину, поскольку пространство изотропно. Окружим нить цилиндрической поверхностью радиусом r так, чтобы нить проходила по оси цилиндра. Подсчитаем поток вектора E через эту поверхность.

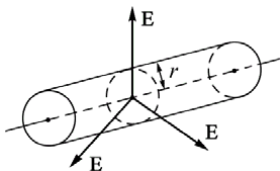


Рис. 2.22. Вектор напряженности направлен перпендикулярно заряженной бесконечно длинной прямой нити. Величина вектора \mathbf{E} убывает обратно пропорционально расстоянию до нити:
 $E \sim r^{-1}$

Согласно теореме Гаусса, поток равен заряду λL , заключенному под цилиндрической поверхностью, деленному на ϵ_0 , $\Phi = q/\epsilon_0 = \lambda L/\epsilon_0$ ($L \rightarrow \infty$), а с другой – по определению, имеем для потока вектора \mathbf{E} от нити

$$\Phi = \int_{(S)} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = E \cdot 2\pi r \cdot L,$$

поскольку на цилиндрической поверхности вектор \mathbf{E} параллелен нормали \mathbf{n} и постоянен по величине. В результате получаем из равенства $2\pi r L E = \lambda L/\epsilon_0$ величину напряженности поля на расстоянии r от равномерно заряженной нити:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Электрическое поле от равномерно заряженной прямой нити убывает пропорционально r^{-1} , где r – расстояние до нити. Полученная формула справедлива при условии, что нить достаточно длинная $L \gg r$ (см. п. 2.4.2).

Воспользовавшись соотношением между потенциалом и напряженностью

$$E = -\frac{\partial\phi}{\partial r},$$

определим потенциал бесконечной, равномерно заряженной нити, проинтегрировав уравнение

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Находим

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \partial\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{\partial r}{r}, \quad \phi - \phi_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{r}{r_0},$$

где ϕ_0 – потенциал на поверхности нити радиуса r_0 .

Приняв, для потенциала на поверхности нити $\varphi_0 = 0$, получим

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{r}{r_0}$$

– потенциал логарифмически изменяется с расстоянием при условии $r_0 \leq r \ll L$.

Рассчитаем напряженность поля равномерно заряженной цилиндрической области с объемной плотностью заряда ρ (Кл/м³) радиусом R (рис. 2.23). Как и для случая нити, проведем коаксиальную цилиндрическую поверхность S радиусом r . Считая заряженную область достаточно длинной ($L \gg r$), можно утверждать, что вектор \mathbf{E} будет параллелен вектору положительной нормали \mathbf{n} к поверхности S и постоянен по величине на этой поверхности.

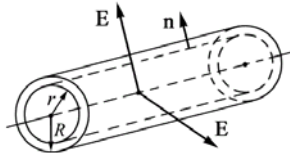


Рис. 2.23. Равномерно заряженный цилиндр. Вектор напряженности \mathbf{E} перпендикулярен боковой поверхности

Поток вектора напряженности через поверхность S , с одной стороны, равен заряду под поверхностью S , деленному на ϵ_0 :

$$\Phi = \begin{cases} \rho \frac{\pi r^2 L}{\epsilon_0}, & r \leq R, \quad - r \text{ внутри заряженной области,} \\ \rho \frac{\pi R^2 L}{\epsilon_0}, & r \geq R, \quad - r \text{ вне заряженной области.} \end{cases}$$

С другой стороны, по определению, имеем для потока вектора \mathbf{E} через поверхность S :

$$\Phi = \int_{(S)} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \int_{(S)} (E \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} dS) = E \int_{(S)} dS = E 2\pi r L.$$

Приравнивая эти два соотношения, получаем

$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^2}, & r \leq R, \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, & r \geq R. \end{cases}$$

Здесь введена линейная плотность заряда $\lambda = \rho\pi R^2$.

Внутри равномерно заряженной цилиндрической области напряженность поля растет линейно с удалением от оси и падает как r^{-1} вне заряженного цилиндра (рис. 2.24).

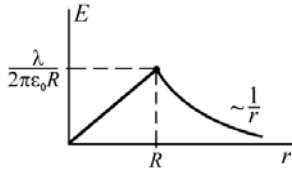


Рис. 2.24. Зависимость напряженности электрического поля от расстояния до центра равномерно заряженного цилиндра радиусом R

На оси равномерно заряженного цилиндра поле отсутствует ($E = 0$), а вне цилиндра поле изменяется таким образом, как если бы весь заряд цилиндра с линейной плотностью λ был сосредоточен на бесконечно длинной ($L \gg r$) нити, проходящей через центр цилиндра.

Определим потенциал электрического поля внутри и вне равномерно заряженного цилиндра (рис. 2.23), воспользовавшись соотношениями

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{2R^2} + \varphi_1, & r \leq R, \\ -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} + \varphi_0, & r \geq R. \end{cases}$$

Постоянную φ_1 найдем из условия непрерывности изменения потенциала φ на границе $r = R$:

$$-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} + \varphi_1 = \varphi_0, \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0},$$

где φ_0 – потенциал поверхности цилиндра.

Окончательно получаем

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \varphi_0, & r \leq R, \\ -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} + \varphi_0, & r \geq R. \end{cases}$$

График зависимости $\varphi(r)$ приведен на рис. 2.25, где значение потенциала φ_0 поверхности цилиндра принято равным нулю.

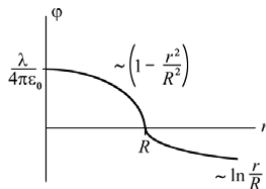


Рис. 2.25. Потенциал равномерно заряженного цилиндра радиусом R

Рассмотрим коаксиальный кабель, состоящий из внутреннего провода радиусом r_0 , окруженного полым цилиндрическим проводником радиусом R . Линейные плотности зарядов этих проводников равны соответственно λ и $-\lambda$ (рис. 2.26). Найдём напряженности поля E а) в области I и б) в области II.

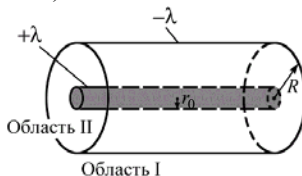


Рис. 2.26. Участок коаксиального кабеля с равными по величине и противоположными по знаку зарядами

В случае “а” в качестве поверхности интегрирования можно выбрать цилиндр, охватывающий оба проводника. Поскольку полный заряд внутри этой поверхности равен нулю, то $E_I = 0$.

В области II (случай “б”), для которой $r_0 < r < R$, поле, создаваемое внешним проводником, также равно нулю, согласно теореме Гаусса. Поле, создаваемое внутренним проводником, дается формулой

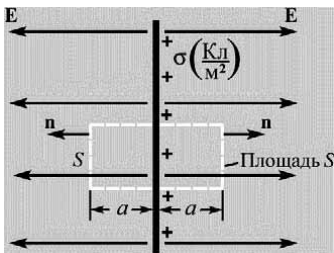
$$E_{II} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ и, следовательно, } \varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} + \varphi_0.$$

Обычно внешний полый цилиндрический проводник коаксиального кабеля заземлен. В этом случае значение потенциала φ_0 на поверхности кабеля принимают равным нулю.

2.11. Электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости и плоскопараллельной пластины

Пусть имеется однородно заряженная плоскость бесконечной ($L \gg r$) протяженности. Заряд, приходящийся на единицу площади, равен σ [Кл/м²] (рис. 2.27).

Вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости, поскольку на ней нет выделенных направлений, а пространство однородно. Кроме того, вектор \mathbf{E} постояен на плоскости и может зависеть лишь от расстояния до плоскости. Проведем цилиндр с основаниями S ,



параллельными плоскости, и образующей $2a$, перпендикулярной плоскости.

Рис. 2.27. Силовые линии напряженности электрического поля \mathbf{E} равномерно заряженной бесконечной плоскости перпендикулярны этой плоскости. Поверхностная плотность заряда σ , Кл/м² (вид сбоку). Штриховой линией показан цилиндр длиной $2a$ и площадью основания S (вид сбоку)

Если площадь основания цилиндра S , то внутри него заключен заряд $q = \sigma S$ и поток через поверхность цилиндра будет равен в силу теоремы Гаусса

$$\Phi = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}.$$

С другой стороны, по определению, имеем

$$\Phi = \int_{(S)} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \mathbf{E} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{S} \mathbf{n} + \mathbf{S} \mathbf{n}) = 2ES.$$

Поток через боковую поверхность цилиндра отсутствует, так как на ней векторы \mathbf{E} и \mathbf{n} взаимно перпендикулярны. Приравнивая выражения для Φ , получаем

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

– напряженность поля от бесконечно заряженной плоскости не зависит от расстояния до нее. Плоскость можно считать бесконечной, если ее линейные размеры L много больше расстояния до плоскости $r \ll L$. Если $r \gg L$, то плоскость будет действовать как точечный заряд и

полученное соотношение не выполняется. Если плоскостью является круглый диск радиусом L , то напряженность поля равна (п. 2.4.3)

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right).$$

При $r \ll L$ имеем $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$; при $r \gg L$ $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, где

$q = \sigma\pi L^2$ – заряд плоскости диска радиуса L .

Потенциал бесконечно заряженной плоскости определяется из соотношения

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

где r – расстояние до плоскости,

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} r + \varphi_0.$$

Потенциал неограниченно возрастает при удалении от бесконечной заряженной плоскости (φ_0 – потенциал поля на поверхности заряженной плоскости, обычно принимают $\varphi_0 = 0$).

Если по соседству с плоскостью имеются другие заряды, то величина напряженности поля и плотность зарядов могут изменяться от точки к точке, но если взять цилиндр с очень малой площадью и торцами, расположенными бесконечно близко к заряженной плоскости, то локально условия нормальности вектора \mathbf{E} к поверхности и постоянства внутри цилиндра будут соблюдены. Величины вектора напряженности по разные стороны плоскости будут, в общем случае, различны. В результате получим (рис. 2.28)

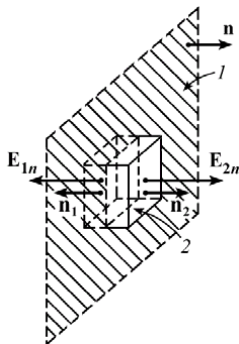


Рис. 2.28. Напряженность поля по разные стороны заряженной плоскости при наличии внешних зарядов различна

$$(E_{2n} \mathbf{n}_2, S \mathbf{n}_2) + (E_{1n} \mathbf{n}_1, S \mathbf{n}_1) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0},$$

$$E_{2n} + E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Здесь E_{2n}, E_{1n} – нормальные составляющие поля, направленные на каждой стороне плоскости наружу от нее. Если задать одну внешнюю нормаль \mathbf{n} (рис. 2.28), то в векторной форме соотношение между напряженностями по обе стороны заряженной плоскости имеет вид

$$\mathbf{E}_{2n} - \mathbf{E}_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}$$

– при переходе через заряженную плоскость нормальная составляющая вектора напряженности претерпевает разрыв, равный $(\sigma/\epsilon_0)\mathbf{n}$.

На практике часто встречаются устройства – конденсаторы, которые состоят из двух параллельных пластин, имеющих одинаковые по величине, но разные по знаку заряды.

Если имеется две бесконечные параллельные плоскости с равными, но противоположными зарядами $+\sigma, -\sigma$ на единице поверхности (рис. 2.29), то задача о напряженности поля вне и между плоскостями решается просто при симметричности внешних условий. Воспользовавшись принципом суперпозиции, получаем для поля между плоскостями

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{+\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n} - \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}.$$

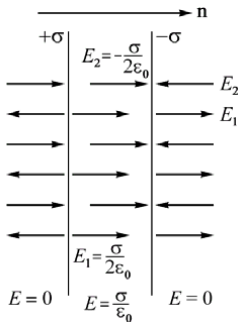


Рис. 2.29. Напряженность электрического поля между двумя параллельными плоскостями с разноименными, но равными зарядами удваивается, а вне этого промежутка равна нулю

Вне плоскостей поля от первой и второй плоскостей направлены противоположным образом и компенсируют друг друга:

$$\text{справа от пластин } \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = \frac{+\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n} = 0;$$

$$\text{слева от пластин } \mathbf{E} = -\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0.$$

Таким образом, поле между плоскостями в два раза больше поля отдельной плоскости, а вне плоскостей поле отсутствует.

Рассмотрим бесконечную равномерно заряженную по объему зарядом плотностью ρ (Кл/м³) плоскопараллельную пластину толщиной a . Найдем, как изменяется напряженность поля внутри и вне этой пластины (рис. 2.30).

В качестве поверхности для подсчета потока вектора \mathbf{E} опять выберем цилиндр с площадью основания S и высотой x так, что он может лежать как внутри, так и вне плоскопараллельной пластины. Согласно теореме Гаусса, поток через боковую поверхность цилиндра равен заключенному под ней заряду, деленному на ϵ_0 :

$$\Phi = \begin{cases} \frac{\rho S x \cdot 2}{\epsilon_0}, & -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \\ \frac{\rho S a}{\epsilon_0}, & x \leq -\frac{a}{2}, \quad x \geq \frac{a}{2}. \end{cases}$$

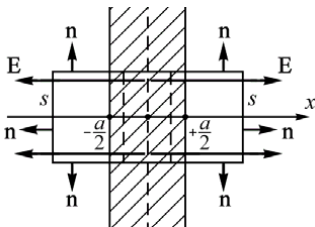


Рис. 2.30. Расчет напряженности поля равномерно заряженной по объему пластины толщиной a (ось x) и неограниченной в направлениях y, z

Вычисляя Φ согласно определению потока, имеем

$$\Phi = \int_{(\bar{S})} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = (\mathbf{E}\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}\mathbf{n} + \mathbf{E}\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}\mathbf{n}) = 2ES.$$

Приравняв Φ , находим величину напряженности поля внутри и вне плоскопараллельной заряженной пластины ($\sigma = \rho a$) (рис. 2.31):

$$E = \begin{cases} \frac{\sigma x}{\varepsilon_0 a}, & -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & x \leq -\frac{a}{2}, \quad x \geq \frac{a}{2}. \end{cases}$$

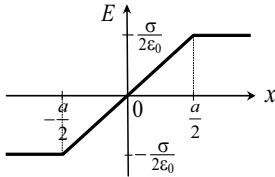


Рис. 2.31. Изменение напряженности поля от равномерно заряженной по объему пластины толщиной a

В центре равномерно заряженной по объему плоскопараллельной пластины поле отсутствует, линейно нарастая по модулю к ее границам, и остается постоянным вне плоскопараллельной пластины.

Потенциал для бесконечной равномерно заряженной по объему плоскопараллельной пластины равен (рис. 2.32):

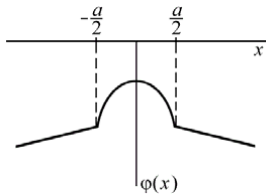


Рис. 2.32. Изменение потенциала внутри $\left(-\frac{a}{2} \leq x \leq +\frac{a}{2}\right)$ и вне $\left(x \leq -\frac{a}{2}, x \geq +\frac{a}{2}\right)$ заряженной по объему плоскопараллельной пластины

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0 a} \left(x^2 + \frac{a^2}{4} \right) + \varphi_0, & -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \\ -\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} + \varphi_0, & x \geq \frac{a}{2}, \\ +\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} + \varphi_0, & x \leq -\frac{a}{2}. \end{cases}$$

где φ_0 – потенциал поля на поверхности пластины.

Пусть внутри равномерно заряженной пластины в точке $x = x_0$ помещен электрон, который может свободно перемещаться. Опишем движение электрона, пренебрегая силами сопротивления.

На электрон в точке x действует сила (e – элементарный заряд)

$$F = -eE = -e \frac{\rho x}{\epsilon_0}.$$

Уравнение движения электрона запишется в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \left(\frac{e\rho}{m_e \epsilon_0} \right) x.$$

Это уравнение описывает колебательное движение частицы по гармоническому закону. Уравнение движения имеет решение $x = x_0 \cos \omega t$, причем циклическая частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{e\rho}{m_e \epsilon_0}}.$$

Следует заметить, что частота колебаний не зависит от толщины пластины. Роль такой «пластины» или слоя с положительным зарядом может играть плазменный слой, подобный ионосфере в верхней части земной атмосферы. При этом плотность положительного заряда $\rho = n^+ e$, где n^+ – концентрация положительных ионов. Частота колебаний отдельного электрона внутри заряженного слоя равна

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2 n^+}{m_e \epsilon_0}}.$$

Это выражение справедливо и в том случае, когда число электронов равно числу ионов. При возмущении электроны в плазме начинают колебаться с указанной частотой ν (её называют плазменной частотой).

Верхние слои атмосферы, начиная от 50–80 км, характеризуются значительным содержанием атмосферных ионов и свободных электронов (ионосфера). Причина повышения ионизации воздуха в ионосфере – разложение молекул атмосферы газов под действием ультрафиолетовой и рентгеновской солнечной радиации и космического излучения

Радиоволны с частотой ниже плазменной отражаются от ионосферы. В этом случае ионосфера ведет себя как проводник. Такое отражение делает возможной дальнюю радиосвязь по всей поверхности Земли. Однако для связи с космическими кораблями нужно использовать радиоволны с частотой, превышающей плазменную частоту.

2.12. Поле шара с равномерно заряженной поверхностью и объемом

Рассмотрим сферу радиуса R с равномерно заряженной поверхностью. Плотность заряда поверхности сферы равна σ (Кл/м²). Найдем напряженность поля вне и внутри заряженной сферы. Ввиду шаровой симметрии вектор напряженности электрического поля направлен перпендикулярно поверхности, а его величина постоянна в любой точке поверхности сферы.

Рассмотрим сферу радиусом r (рис. 2.33). Согласно теореме Гаусса, поток вектора напряженности электрического поля равен заряду, находящемуся под этой сферой, деленному на ϵ_0 :

$$\Phi = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}, & r \geq R. \end{cases}$$

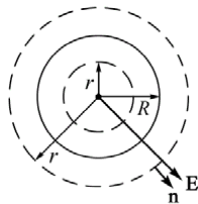


Рис. 2.33. Направление вектора напряженности \mathbf{E} равномерно заряженной сферы совпадает с направлением положительной нормали \mathbf{n}

По определению, для потока вектора \mathbf{E} сквозь сферическую поверхность радиуса r

$$\Phi = \int (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \int (E\mathbf{n}, \mathbf{n}dS) = E \int dS = E \cdot 4\pi r^2.$$

Приравнявая эти два выражения для потока, находим напряженность электрического поля в зависимости от расстояния до центра заряженной сферы (рис. 2.34, а):

$$E = \begin{cases} 0, & r < R \text{ — внутри сферы,} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R \text{ — вне заряженной сферической поверхности.} \end{cases}$$

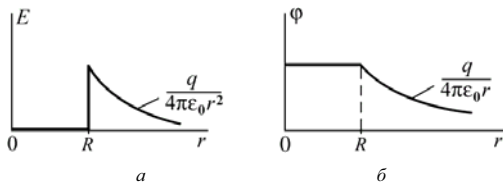


Рис. 2.34. Напряженность (а) и потенциал (б) электрического поля, создаваемые заряженной сферой радиусом R

Поле внутри заряженной сферической поверхности отсутствует, а вне сферы изменяется так, как если бы весь заряд сферы $q = 4\pi R^2 \sigma$ был сосредоточен в виде точечного заряда в её центре.

Соответственно, потенциал внутри равномерно заряженной сферы постоянен и равен потенциалу поля на поверхности сферы, а вне сферы изменяется как потенциал точечного заряда, помещенного в центр сферы (рис. 2.34, б):

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & r \leq R, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq R. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда шар радиусом R равномерно заряжен по объему зарядом с объемной плотностью ρ (Кл/м³). Как и раньше, проведем концентрическую сферу радиусом r . Величина потока через поверхность такой сферы равна

$$\Phi = \begin{cases} \frac{(4/3)\pi r^3 \rho}{\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{R^3} = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}, & r \leq R, \\ \frac{(4/3)\pi R^3 \rho}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}, & r \geq R. \end{cases}$$

Здесь $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ – полный заряд сферы. С другой стороны, по определению, поток вектора \mathbf{E} через сферическую поверхность радиусом r равен

$$\Phi = \int_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \int_S E(\mathbf{n}, \mathbf{n}) dS = E \int_S dS = E \cdot 4\pi r^2.$$

Из условия равенства потоков получаем напряженность поля внутри и вне равномерно заряженной по объему сферы (рис. 2.35)

$$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}, & r \leq R - \text{внутри сферы,} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R - \text{вне заряженной сферы.} \end{cases}$$

Напряженность поля равна нулю в центре и линейно нарастает при смещении к границе сферы. Вне сферы ее поле изменяется, как поле точечного заряда величиной $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, равной полному заряду сферы и сосредоточенному в ее центре.

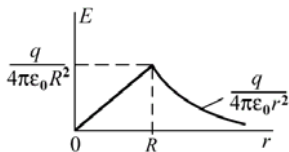


Рис. 2.35. Зависимость напряженности электрического поля E от расстояния до центра однородно заряженного шара

В рамках квантовой механики в атоме водорода электрон представляется в виде равномерно заряженного шара радиусом $R \approx 10^{-10}$ м с полным зарядом $Q = e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл и массой $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. В нормальном состоянии протон с зарядом по модулю равным e находится в центре электронного облака. Пусть протон смещен относительно центра электронного облака на расстояние x_0 (рис. 2.36). Если теперь электрон и протон представить самим себе, то они начнут колебаться около положения равновесия с амплитудой x_0 под действием силы F , действующей на протон:

$$F = eE = e \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^3} x.$$

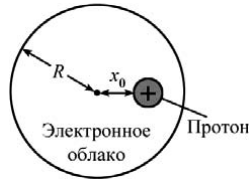


Рис. 2.36. Электрон, рассматриваемый как однородно заряженный шар, смещен на расстояние x_0 относительно протона

По третьему закону Ньютона точно такая же сила, но направленная в другую сторону, действует на электрон, и мы можем записать второй закон Ньютона в виде

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} x.$$

Строго говоря, в уравнении следует использовать приведенную массу $\mu = (M_p m_e)/(M_p + m_e)$, а не массу электрона m_e . Однако в случае $m_e \ll M_p$, где M_p – масса протона, $\mu \approx m_e$. Разделив обе части равенства на m_e , получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3} x.$$

Решению данного уравнения соответствует незатухающее гармоническое колебание $x(t) = a \cos \omega t$ с циклической частотой:

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}}.$$

Частота колебаний $\nu = \omega/2\pi$:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^{-10})^3}} = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Гц.}$$

Это значение почти совпадает с частотой электромагнитного излучения, испускаемого атомом водорода в первом возбужденном состоянии, что подтверждает разумность принятой модели атома водорода.

В качестве еще одного примера определим индуцированный дипольный момент атома в электрическом поле \mathbf{E}_0 . Предположим, что внешний электрон представляет собой равномерно заряженное шарообразное облако радиусом R . Если нейтральный атом поместить в электрическое поле \mathbf{E}_0 (рис. 2.37), то под

действием силы $F = -eE_0$ центр внешнего электронного облака сместится влево относительно остова атома (с зарядом $Q = +e$) на расстояние x_0 . У атома появляется индуцированный дипольный момент $p = ex_0$. Если внешний электрон представить в виде равномерно заряженного шара радиусом R , то дипольный момент можно выразить через R , e и E_0 .

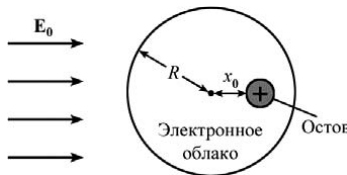


Рис. 2.37. Смещение электронного облака атома влево на расстояние x_0 относительно атомного остова под действием внешнего электрического поля E_0

Поле, создаваемое электронным облаком в центре остова, направлено влево и равно

$$E_{\text{обл}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{R^3}.$$

Поскольку вектора E_0 и $E_{\text{обл}}$ антипараллельны, то результирующая напряженность поля, в котором находится атом, равна

$$E_{\text{рез}} = E_0 - E_{\text{обл}} = E_0 - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{R^3}.$$

Поскольку атом покоится, результирующая сила (или результирующее поле), действующая на него, должна равняться нулю, следовательно,

$$0 = E_0 - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} x_0, \quad \text{откуда} \quad x_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{e} E_0.$$

Дипольный момент

$$p = ex_0 = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$$

линейно изменяется от величины приложенного поля.

Оценим в единицах R смещение внешнего электронного облака относительно остова атома, если атом радиуса $R = 10^{-10}$ м поместить в электрическое поле напряженностью $E_0 = 10^6$ В/м.

$$\frac{x_0}{R} = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2 E_0}{e} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (10^{-10})^2 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-5}.$$

Смещение электронного облака при $E_0 = 10^6$ В/м незначительно по сравнению с размерами атома, т.к. внутриатомные поля имеют величину порядка 10^{11} В/м.

Вычислим потенциал внутри и вне равномерно заряженной по объему сферы. Из условия $-\partial\varphi/\partial r = E$ получаем

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{2R^3} + \varphi_1, & r \leq R, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \varphi_0, & r \geq R. \end{cases}$$

Считая потенциал на бесконечности равным нулю, получаем $\varphi_0 = 0$, а из условия непрерывности φ при $r = R$ определяем

$$\varphi_1 = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Окончательно (рис. 2.38) находим

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right), & r \leq R, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq R. \end{cases}$$

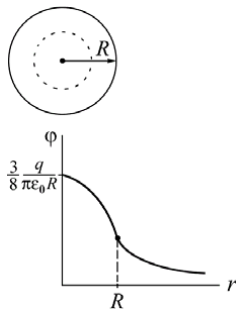


Рис. 2.38. Зависимость потенциала от расстояния до центра равномерно заряженной по объему сферы радиусом R

Полученные результаты являются прямым следствием закона Кулона и позволяют проверить его с исключительно высокой

точностью, в частности, по факту отсутствия электрического поля внутри сферы с равномерно заряженной поверхностью. Для этого в большую сферу помещают электромметр, а сферу заряжают до высокого потенциала. Электромметр никогда не показывает наличие заряда в сфере. Зная чувствительность электромметра, можно рассчитать величину поля, доступную регистрации. Отметим также, что отсутствие поля внутри проводящей поверхности наблюдается не только у сферической поверхности, но и у любой другой замкнутой поверхности. Так что отклонение сферы от идеальной геометрической фигуры не сказывалось на точности проверки закона Кулона. В результате удается установить величину отклонения δ показателя степени от двух в законе Кулона $F \sim r^{-2+\delta}$. Этим способом Максвелл определил, что $\delta < 10^{-4}$. Современные измерения показывают, что $\delta < 10^{-16}$. Причем в 1947 г. Лэмбом и Резерфордом было показано, что $\delta < 10^{-9}$ на расстояниях вплоть до $\approx 10^{-8}$ см, т.е. порядка межатомных. Закон Кулона остается справедливым и на расстояниях порядка межъядерных. Но как показали опыты по рассеянию быстрых электронов на протонах, на расстояниях $< 10^{-14}$ см электрические силы оказываются чуть ли не в 10 раз слабее, чем следует из закона Кулона. Это, вероятно, связано с тем, что на этих расстояниях протоны уже нельзя рассматривать как точечные заряды.

Результаты, полученные в настоящем разделе, можно обобщить и на другие поля, меняющиеся по закону обратных квадратов, в частности, на поле тяготения. Согласно закону Ньютона, тела массами m_1 и m_2 притягиваются с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними r_{12} :

$$\mathbf{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}},$$

где величина γ носит название гравитационной постоянной, а массы m_1 и m_2 считаются точечными.

В этом случае можно ввести понятие величины напряженности поля тяготения, создаваемого массой m_1 , как силы тяготения, действующей на тело единичной массы в данной точке поля:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m_2} = \gamma \frac{m_1}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}.$$

Для напряженности поля тяготения также справедлива теорема Гаусса

$$\int_S (\mathbf{G}, d\mathbf{S}) = 4\pi \sum_k \gamma m_k$$

– поток вектора напряженности поля тяготения через замкнутую поверхность равен массе, заключенной внутри этой поверхности, умноженной на гравитационную постоянную γ и на 4π .

Используя эту теорему, можно показать, что в случае шара сила притяжения на его поверхности такая же, как если бы вся масса шара была сосредоточена в его центре. Отсутствие доказательства этого факта много лет сдерживало Ньютона от публикации его работ по теории тяготения. С помощью теоремы Гаусса она доказывается очень просто. С одной стороны, поток вектора напряженности поля тяготения равен

$$\Phi = 4\pi\gamma M,$$

где M – масса шара. С другой стороны, в силу изотропности и однородности пространства задачи $\mathbf{G} \uparrow \uparrow \mathbf{n}$ – внешней нормали, и \mathbf{G} постояен на поверхности шара, а поэтому, по определению,

$$\Phi = \int_S (\mathbf{G}, d\mathbf{S}) = \int_S G(\mathbf{n}, \mathbf{n}) dS = G \int dS = G \cdot 4\pi R^2.$$

Откуда следует, что на поверхности шара массой M и радиусом R напряженность поля тяготения равна

$$G = \gamma \frac{M}{R^2} \quad \text{и} \quad G = \gamma \frac{M}{r^2} \quad \text{при} \quad r \geq R,$$

а сила притяжения, действующая на точечное тело массой m , на поверхности шара равна

$$F = mG = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

Аналогичные рассуждения можно было бы провести и для тела массой m , если оно имеет шаровую форму, и показать, что закон всемирного тяготения справедлив не только для тел точечной массы, но и для шаровых тел, в этом случае R – расстояние между центрами притягивающихся шаровых тел.

Отметим, что теорема Гаусса в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$$

не использует представлений о дальнем действии, поскольку является локальной теоремой, связывая $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ в одной и той же точке пространства. Теорема Гаусса в локальной форме следует из закона Кулона, он достаточен для ее доказательства, но не необходим. Поэтому можно предположить, что теорема Гаусса справедлива не только в случае электростатических полей, но и для переменных электрических полей, являясь одним из уравнений электромагнитного поля. Опыт подтверждает эту гипотезу.

2.13. Теорема Ирншоу

Теорема Ирншоу решает вопрос об устойчивости равновесия любой системы электрических зарядов. Теорема Ирншоу говорит о том, что ни в каком электрическом поле не существует устойчивого равновесия зарядов, за исключением случая, когда заряды «сидят» друг на друге (устойчивое статическое равновесие электрических зарядов невозможно).

Теорема Ирншоу является следствием теоремы Гаусса и может быть доказана методом от противного. Допустим, что такая устойчивая система зарядов существует, и, в частности, положительный заряд q находится в устойчивом равновесии в поле \mathbf{E} внешних зарядов (рис. 2.39). Если это равновесие устойчиво, то любое смещение заряда q из точки l в произвольную точку 2 должно приводить к возникновению кулоновской силы, возвращающей заряд в исходную точку l . Окружим заряд q произвольной замкнутой поверхностью S такой, что внутри S находится лишь заряд q . На поверхности S поле всех внешних зарядов должно быть направлено к точке l , но источник этого поля находится вне S .

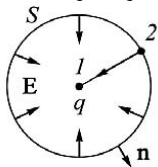


Рис. 2.39. Смещение заряда q из положения равновесия приведет к необратимому распаду системы зарядов, находившейся в состоянии неустойчивого равновесия

Поэтому, с одной стороны, поток этого поля должен быть отрицателен (векторы \mathbf{E} и \mathbf{n} антипараллельны), но, согласно теореме Гаусса, поток этого поля, созданный всеми зарядами, исключая q , равен нулю. Полученное противоречие доказывает теорему Ирншоу. Уравновесить положительный заряд в пустом пространстве, в точке, где нет отрицательного заряда, невозможно. Но если положительный заряд поместить в центр отрицательного сферического облака, то он будет находиться в равновесии. Но при этом само отрицательное облако должно удерживаться на своем месте посторонними, некулоновскими силами.

Теорема Ирншоу, в частности, доказывает, что атом не может представлять собой статическую систему разноименных зарядов. Такая система зарядов будет неустойчива и должна разрушиться.

Статическая модель Томсона, представляющая атом как положительно заряженную сферу с вкрапленными в нее электронами, была опровергнута опытами Гейгера и Марсдена, которые, как показал Резерфорд, говорят о том, что положительный заряд

сосредоточен в очень малой области с размерами порядка $\approx 10^{-6}$ от размеров атома в его ядре. Бор предположил, что электроны вращаются вокруг ядра и орбитальное движение (центробежная сила) удерживает их от падения на ядро. Но поскольку электрон, вращаясь, движется ускоренно, он должен излучать и в результате быстро, примерно за 10^{-8} с теряет кинетическую энергию, необходимую для устойчивости атома.

Объяснение устойчивости атома последовательно дано в квантовой механике. В силу соотношения неопределенности Гейзенберга $\Delta p \Delta x \geq \hbar$ электрон не может локализоваться в области с размерами Δx , сравнимыми с ядром атома $\approx 10^{-13}$ см. При такой локализации неопределенность импульса Δp столь высока, что энергия электрона становится достаточной для удаления его из области электрического притяжения ядра. В итоге электрическое равновесие является обращением идеи Томсона с размазанным отрицательным зарядом, поскольку масса электрона почти в 2000 раз меньше массы протона. Классическая физика не в состоянии объяснить устойчивость атома. Устойчивость системы электрических зарядов обеспечивается принципом Паули, запрещающим находиться в одном квантовом состоянии двум одинаковым фермионам – частицам с полуцелым спином, например протонам и электронам.

2.14. Проводники в электрическом поле

Проводники, к ним относятся металлы, электролиты и плазма, содержат свободные заряды, способные перемещаться в пределах тела. Металлы содержат много свободных электронов, и любое электрическое поле приводит их в движение. Если есть источник сторонних сил (некулоновских, неконсервативных и непотенциальных), то движение зарядов можно поддерживать непрерывно. В условиях электростатики мы не рассматриваем такие источники тока зарядов, а поскольку в этом случае действуют только кулоновские силы, то поле этих сил вызывает в проводнике перераспределение зарядов, приводящее к исчезновению поля внутри проводника. Если бы некоторое поле внутри проводника осталось, то оно заставило бы двигаться электроны в этой области до тех пор, пока поле не исчезнет. Поскольку металл – проводник и внутреннее поле в нем равно нулю, то, значит, равно нулю и градиент потенциала – $\text{grad} \phi = \mathbf{E} = 0$. Поэтому в однородном проводнике потенциал от точки к точке не изменяется, и, следовательно, однородный проводник является эквипотенциальной областью, эквипотенциальна и его поверхность. В силу теоремы

Гаусса $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, для случая $\mathbf{E} = 0$ получаем, что $\rho = 0$ – плотность заряда во внутренней части проводника обращается в нуль. В неоднородном проводнике перечисленные свойства могут не иметь места из-за действия сил неэлектрического происхождения.

Поскольку внутри однородного проводника не может быть нескомпенсированных зарядов, то при зарядке проводника они могут накапливаться лишь на его поверхности, где существуют большие силы, не дающие зарядам покинуть ее. Толщина поверхностного заряженного слоя и избыточного или истощенного слоя электронов, в зависимости от знака заряда поверхности, составляет один-два атомных слоя. Поэтому достаточно правильно говорить, что заряды в проводнике сосредоточены исключительно на поверхности.

Силовые линии электрического поля заряженной поверхности, перпендикулярны поверхности – поверхности равного потенциала. В противном случае возникли бы составляющие силы $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, заставляющие двигаться заряд вдоль поверхности.

Применяя теорему Гаусса, можно найти напряженность поля у поверхности проводника с плотностью заряда σ [Кл/м²] (рис. 2.40).

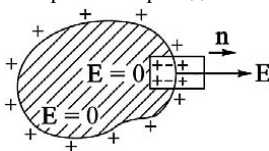


Рис. 2.40. Напряженность электрического поля у поверхности проводника σ/ϵ_0 в два раза больше, чем у равномерно заряженной плоскости $\sigma/(2\epsilon_0)$

Взяв за гауссову поверхность небольшой цилиндр и учитывая, что внутри проводника поля нет, получаем из условия

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{0} \cdot \mathbf{S} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S,$$

что напряженность поля у поверхности проводника в два раза больше, чем у заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Это связано с тем, что помимо заряда σ в проводнике есть и другие заряды. Эти заряды создают поле, дополнительное к полю слоя зарядов $\sigma/(2\epsilon_0)$. В объеме металла это поле компенсирует заряд поверхности, а вне проводника складывается с полем поверхностного слоя зарядов и дает удвоенную величину поля у поверхности проводника, в отличие от уединенного слоя зарядов.

2.15. Поле во внутренней полости проводника

Рассмотрим проводник, имеющий внутри полость, которая не содержит внутри себя изолированных зарядов. Оказывается, что в этом случае при любой форме полости в ней не будет электрического поля (рис. 2.41).

Пусть S – поверхность, проведенная в объеме металла, которая окружает внутреннюю полость (рис. 2.41, *a*). Поскольку в объеме металла поле отсутствует, то поток поля сквозь S равен нулю, поэтому и суммарный заряд под поверхностью S равен нулю.

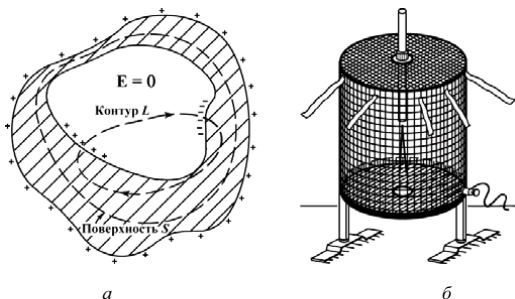


Рис. 2.41. При отсутствии закрепленных локализованных зарядов в полости проводника в ней отсутствует электрическое поле (*a*). Если заряженную сетку замкнуть, то бумажные лепестки не будут расходиться внутри сетки, где поле равно нулю, но будут отклоняться с внешней стороны, где локализованы заряды (*b*)

Если предположить, что заряды присутствуют в равных количествах на поверхности полости (положительные и отрицательные), компенсируя друг друга, то они должны начать двигаться навстречу и компенсироваться. Это следует из условия, что работа кулоновских сил по любому замкнутому контуру равна нулю:

$$q \oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0.$$

Если предположить, что на поверхности полости есть разноименные заряды, то работа по перемещению заряда в полости от положительных зарядов к отрицательным будет отличаться от нуля, а в металле, где поле заведомо отсутствует, равна нулю. Тогда получается, что работа по перемещению заряда по замкнутому контуру L также должна быть отлична от нуля, что заведомо невозможно. Следовательно, на поверхности полости не могут находиться разье-

диненные заряды. Поэтому в пустой полости в металле нет никаких полей, равно как нет и зарядов на внутренней поверхности.

Отсутствие электрических полей в металлической полости любого вида объясняет принцип «защиты» электрических приборов и оборудования от влияния внешних электрических полей.

Отсутствие постоянного электрического поля в проводящей полости любой формы есть следствие закона Кулона. Он может быть проведен с исключительно высокой точностью, поскольку форма поверхности не влияет на факт отсутствия поля внутри замкнутой проводящей поверхности (рис. 2.41, б).

Если поместить заряженное тело внутрь металлической полости, то заряды с него должны полностью перетечь на поверхность внешнего тела, оставив внутреннюю поверхность электрически нейтральной. В принципе такую процедуру возможно повторять многократно, заряжая внешнее тело до очень высокого потенциала, сообщая ему большой электрический заряд. Величина накопленного заряда ограничивается утечкой электричества за счет ионизации воздуха. Непрерывный перенос заряда на проводник через его внутреннюю полость лежит в основе работы генератора Ван-де-Граафа (рис. 2.42).

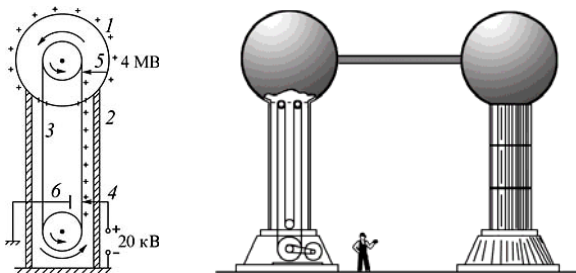


Рис. 2.42. Устройство электростатического генератора Ван-де-Граафа

Генератор Ван-де-Граафа состоит из металлического шара 1 диаметром до нескольких метров, укрепленного на изоляторе 2. Внутри изолятора движется непроводящая лента 3, непрерывно перенося заряд с высоковольтных острий 4 на поверхность шара через снимающие острия 5. Для усиления эффекта стекания заряда с острия 4 напротив них за лентой расположена заземленная пластина 6. Генератор позволяет получать напряжение до 3+5 миллионов вольт и может быть использован для ускорения электронов и ионов. При

этом находиться внутри шара генератора Ван-де-Граафа безопасно, так как там нет заряда и поля, хотя внешняя его поверхность имеет миллионновольтный потенциал. Внутренняя часть сферы наиболее помехозащищенное место, где располагаются люди с измерительными приборами. Экспериментально первым, кто заметил, что поле внутри заряженной сферы равно нулю, был Бенджамин Франклин.

Пристли связал этот факт с законом обратных квадратов, поскольку было известно, что поле тяготения отсутствует внутри сферического слоя вещества. Однако до открытия закона Кулона оставалось целых восемнадцать лет.

2.16. Пробой при высоком напряжении

Рассмотрим распределение поля вокруг проводников несферической формы, имеющих, например, острие. Оказывается, что поле около острия намного сильнее, чем в остальных местах. Это связано с тем, что заряды стремятся растечься по поверхности проводника, а кончик острия отстоит максимально далеко от остальной поверхности (рис. 2.43). Даже небольшое количество заряда на острие может создать высокую поверхностную плотность заряда, а высокая плотность заряда обеспечивает высокую напряженность поля у поверхности проводника:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

В общем случае в тех местах, где радиус кривизны поверхности меньше, поле оказывается сильнее. Рассмотрим в качестве примера большую и маленькую сферы, соединенные проводником (рис. 2.44). На большой сфере радиусом R содержится заряд Q , а на малой радиусом r – заряд q . Вся система эквипотенциальна, и, следовательно, потенциалы сфер можно приравнять:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

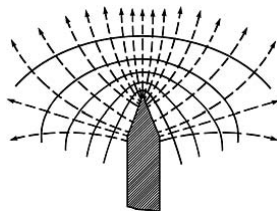


Рис. 2.43. Напряженность электрического поля максимальна на острие заряженного проводника. Сплошными линиями изображены сечения эквипотенциальных поверхностей, пунктирными – силовые линии поля

Откуда следует, что

$$\frac{Q}{R} = \frac{q}{r}.$$

Отношение напряженностей полей большой и малой сфер равно

$$\frac{E_R}{E_r} = \frac{Q/4\pi\epsilon_0 R^2}{q/4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{q} \frac{r^2}{R^2} = \frac{r}{R}.$$

Напряженность поля сферы малого радиуса в R/r раз больше напряженности поля сферы большого радиуса:

$$E_r = \frac{R}{r} E_R.$$

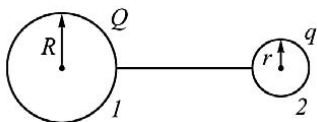


Рис. 2.44. Напряженности электрических полей двух соединенных (эквипотенциальных) металлических сфер обратно пропорциональны радиусам сфер: $\frac{E_R}{E_r} = \frac{r}{R}$

Этот результат показывает, что вокруг острия в воздухе может возникнуть пробой. Напряженность поля около острия велика. Свободный заряд в поле острия может набрать на длине свободного пробега энергию, достаточную для ионизации молекул воздуха, и будет стекать с острия. Движение заряда от острия можно наблюдать по отклонению пламени свечи (рис. 2.45) или по вращению «франклинова колеса» (рис. 2.46).

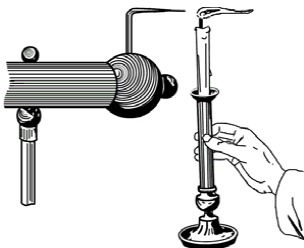


Рис. 2.45. «Электрический ветер»

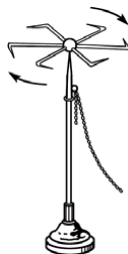


Рис. 2.46. «Франклиново колесо»

В результате каскада подобных столкновений будет появляться все больше ионов. Их движение сформирует искру или разряд. Поэтому тела с высоким потенциалом во избежание пробоя и разрядки должны иметь гладкую поверхность с большим радиусом кривизны, а вне острия детали и неровности следует помещать под гладкие металлические поверхности.

2.17. Электронный и ионный проекторы

Сверхсильное электрическое поле около острия проводника нашло важное применение в безлинзовом ионно-оптическом приборе для получения увеличенного в несколько миллионов раз изображения поверхности твердого тела, чаще всего металлов. С помощью ионного проектора удается различать детали поверхности, находящиеся на расстоянии $2 \div 3 \text{ \AA}$. Это дает возможность различать расположение отдельных атомов в кристаллической решетке. Изобретен ионный проектор Э. Мюллером в 1951 г., ранее он же построил электронный микроскоп.

Принцип работы заключается в следующем. Очень тонкая игла диаметром около 1000 \AA помещена в центре сосуда, из которого откачан воздух. Перед иглой расположен экран, покрытый люминофором – веществом, способным светиться под действием ускоренных электронов и ионов. Между иглой и проводящим покрытием, тонким слоем, нанесенном на экран, создается очень высокая разность потенциалов (рис. 2.47).

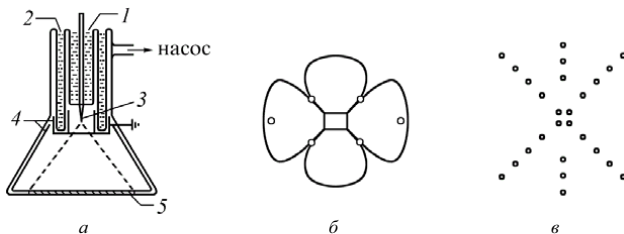


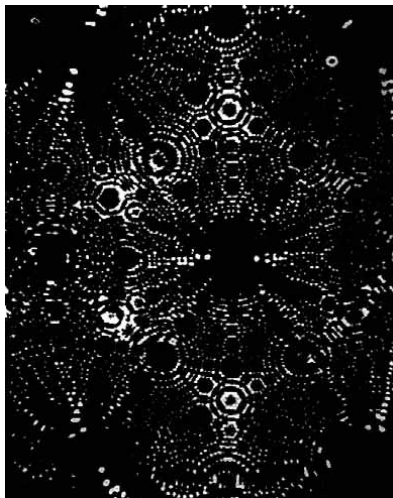
Рис. 2.47. Устройство электронного и ионного проекторов: 1 – жидкий водород; 2 – жидкий азот; 3 – острие; 4 – проводящее кольцо; 5 – экран (а). Изображение поверхности в электронном проекторе (б) и в гелиевом ионном проекторе при 22 К (в)

Пусть игла заряжена по отношению к экрану отрицательно, электрическое поле может достигать при этом у кончика иглы напряженности $4 \cdot 10^9$ В/м или 4 В/нм. В столь сильных полях электроны отрываются от поверхности иглы и уско­ряются на участке от иглы до экрана за счет разности потенциалов. Достигнув экрана, они вызывают свечение подобно тому, как это происходит на экране телевизора. Электроны, пришедшие на экран, это фактически те же электроны, что покинули поверхность иглы и двигались вдоль силовой линии поля. Так что на экране воспроизводится изображение поверхности иглы. При достаточно высокой разрешающей способности удастся различить положение отдельных атомов на кончике иглы. Однако электронный проектор не позволяет этого сделать, поскольку наблюдается квантово-механическое наложение электронных волн и изображение размывается. Снижение качества изображения также связано с тем, что электроны в металле имеют в момент вырывания поперечную составляющую скорости, и эта случайная составляющая также смазывает изображение. Перечисленные эффекты ограничивают разрешение изображения величиной порядка 25 \AA .

Разрешение можно существенно повысить, если сменить знак потенциала на острое и сделать его положительным, а объем ионного проектора заполнить инертным газом, например, гелием до давления $\leq 10^{-1}$ Па. Атомы газа, заполняющего объем прибора, ионизируются вблизи поверхности острия, приобретают положительный заряд, и ион гелия вдоль силовой линии поля движется к отрицательно заряженному экрану.

Свечение элементов экрана пропорционально приходящему на него ионному току. Поэтому распределение свечения на экране воспроизводит в увеличенном масштабе вероятность ионизации атомов вблизи острия, что отражает структуру поверхности объектов. Поскольку ион гелия приблизительно в 7350 раз тяжелее электрона, то и квантово-механическая длина волны у гелия много меньше. За счет понижения температуры в системе снижается и влияние тепловых скоростей. Изображение в ионном проекторе становится намного резче, чем в электронном проекторе. В ионном проекторе удастся достигнуть увеличения в $2 \cdot 10^6$ раз. Это в 10 раз выше, чем у лучших электронных микроскопов.

Рис. 2.48. Фотография вольфрамового острия радиусом $\approx 450 \text{ \AA}$, полученная на ионном проекторе (Э. Мюллер)



С помощью ионного проектора удается различить атомную структуру ступеней кристаллической решетки. Центры атомов металла ионизируют атомы гелия немного иначе, чем промежутки между атомами. Расположение пятен на светящемся экране отражает расстановку отдельных атомов на поверхности острия (рис. 2.48).

Ионный проектор широко применяется для изучения атомной структуры поверхности металлов, сплавов и соединений. С его помощью определяют параметры поверхностной диффузии отдельных атомов и их ассоциаций. Исследуются поверхностные фазовые переходы, дефекты, параметры межатомного взаимодействия и пр.

Основные выводы

Элементарные частицы обладают собственным электрическим зарядом, который может быть равен нулю, $+e$, $-e$ или целому кратному элементарного заряда, $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл. Согласно закону Кулона, сила, действующая между двумя заряженными частицами, равна

$$\mathbf{F} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

где $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9,0 \cdot 10^9 \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2$, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ – единичный вектор в направлении \mathbf{r} .

Напряженность электрического поля – это сила, действующая на единичный положительный электрический заряд:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q.$$

Вектор напряженности электрического поля точечного заряда q равен

$$\mathbf{E} = k_0(q/r^2) \hat{\mathbf{r}}.$$

Напряженность электрического поля, создаваемая элементом объема dV с плотностью заряда ρ , равна

$$d\mathbf{E} = k_0(\hat{\mathbf{r}}/r^2)\rho dV.$$

Электрическое поле протяженного тела можно вычислить, интегрируя последнее выражение по объему этого тела.

Поток электрического поля (т.е. число силовых линий электрического поля) равен $d\Phi = (\mathbf{E}, d\mathbf{S})$. Полный поток, выходящий из заряженного тела:

$$\Phi = \oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}).$$

Интегрирование ведется по поверхности, которая полностью охватывает тело. Теорема Гаусса утверждает, что величина этого интеграла по замкнутой поверхности равна умноженной на $4\pi k_0$ величине полного заряда, находящегося внутри поверхности:

$$\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi k_0 q = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Одно из следствий теоремы Гаусса состоит в том, что полный заряд внутри проводника равен нулю.

Простое применение теоремы Гаусса показывает, что поле вне сферического заряда (или массы) оказывается таким же, как если бы весь заряд (или масса) был сосредоточен в его (её) центре:

$$E = k_0 q_{\text{полн}} / r^2.$$

Поскольку электрическое поле внутри однородно заряженного облака увеличивается линейно с расстоянием от центра, точечный заряд внутри такого облака будет совершать простые гармонические колебания. По той же причине в атоме, помещенном во внешнее электрическое поле E_0 , шарообразное электронное облако смещается относительно центра атома на расстояние, пропорциональное E_0 . При этом появляется индуцированный дипольный момент

$$p = (R^3/k_0)E_0,$$

где R – радиус электронного облака.

Поле, создаваемое линейным распределением заряда, спадает как $1/r$, т.е. $E = 2k_0\lambda/r$, в то время как поле бесконечной заряженной плоскости постоянно в пространстве и равно

$$E = 2\pi k_0 \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Электрическая потенциальная энергия заряда q дается выражением

$$U = -q \int_{\infty}^r (\mathbf{E}, d\mathbf{r}),$$

причем на бесконечности величина U полагается равной нулю. Электрический потенциал в данной точке пространства представляет собой потенциальную энергию, приходящуюся на единицу заряда (т.е. $\phi = U/q$), и, таким образом, численно равен работе, которую совершают внешние силы, по переносу единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку пространства. Электрический потенциал точечного заряда равен $\phi = k_0 q/r$.

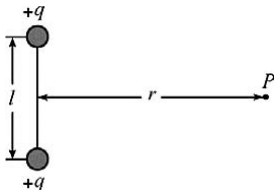
Ускоряясь в поле с разностью потенциалов 1 В, электрон приобретает кинетическую энергию, равную одному электрон-вольту (1 эВ), 1 эВ = $1,60 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Упражнения

1. Найдите отношение электростатической и гравитационной сил для двух электронов. Ответ: $4 \cdot 10^{42}$.
2. Два одинаковых шара из твердого водорода имеют небольшой избыток электронов. Каково должно быть отношение числа электронов к числу протонов, чтобы электростатическое отталкивание компенсировало силу гравитационного притяжения. Ответ: $9 \cdot 10^{-19}$.

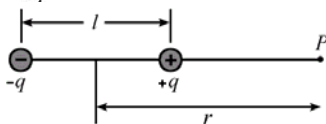
3. Найдите выражение для напряженности электрического поля в точке P через q , l и r .

Ответ: $E = 2k_0 q r / (r^2 + l^2/4)^{3/2}$.



4. Чему равно E в точке P в зависимости от q , l и r .

Ответ: $E = 2k_0 q r l / (r^2 - l^2/4)^2$.



5. Металлической сфере сообщен положительный заряд. Что произойдет при этом с массой сферы? Увеличится, уменьшится или останется прежней? Ответ обосновать. Ответ: зависит от механизма заряжения сферы: при удалении электронов масса уменьшится; при помещении на сферу положительно заряженных частиц – увеличится.

6. Заряд $-4 \cdot 10^{-5}$ Кл помещен на расстоянии 10 см от заряда $+5 \cdot 10^{-5}$ Кл. Чему равна электростатическая сила? Какое число силовых линий уходит на бесконечность, если предположить, что других зарядов нет? Ответ: $F = 1,8$ кН; $\Phi = 1,13 \cdot 10^6$ Н·м²/Кл.

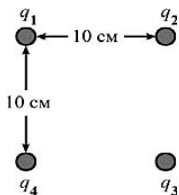
7. Заряд $-1 \cdot 10^{-6}$ Кл находится в центре полой металлической сферы, внешняя поверхность которой несет положительный заряд $+1,5 \cdot 10^{-6}$ Кл.

1) Изобразите с помощью диаграммы силовых линий результирующее электрическое поле.

2) Чему равен полный поток, выходящий из сферы?

3) Какова величина избыточного заряда на сфере?

Ответ: 2) $\Phi = 5,65 \cdot 10^4$ Н·м²/Кл; 3) $q = 5 \cdot 10^{-7}$ Кл.



8. В вершинах квадрата со стороной 10 см расположены четыре заряда по 10^{-8} Кл. Найдите величину и направление напряженности поля E в центре квадрата, если знаки зарядов q_1, q_2, q_3 и q_4 таковы:

1) +, +, +, +;

2) +, -, +, -;

3) +, +, -, -.

Ответ: 1) 0; 2) 0; 3) $E = 5,09 \cdot 10^4$ Н/Кл, вниз.

9. Найдите отношение гравитационной и электростатической сил для двух протонов. Ответ: $1 \cdot 10^{36}$.

10. Предположим, что плотность избыточного электрического заряда на поверхности Земли составляет один электрон на квадратный сантиметр.

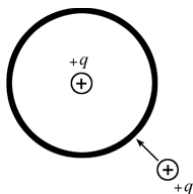
1) Чему равно электрическое поле непосредственно под поверхностью Земли?

2) Чему равно электрическое поле непосредственно над поверхностью Земли?

Ответ: 1) 0; 2) $E = 181$ мкН/Кл.

11. Начертите диаграмму силовых линий для случая, показанного на рисунке в упражнении 3.

12. Заряд, равный $+q$, помещен в центре полой проводящей сферы. Внешней поверхности сферы сообщен заряд $+q$. После того, как заряды придут в равновесие, чему будет равен полный заряд:



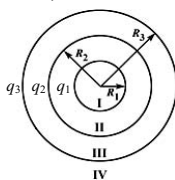
- 1) На внутренней поверхности сферы?
2) На внешней поверхности сферы?

Ответ: 1) $-q$; 2) $+2q$.

13. Повторите упражнение 4 для случая, когда оба заряда q положительны. Ответ: $E = 2k_0q(r^2 + l^2/4)/(r^2 - l^2/4)^2$.

14. Какого радиуса должна быть проводящая сфера, чтобы удерживать в воздушной среде заряд 1 Кл? Принять, что в сухом воздухе пробой происходит при $E_{\text{проб}} \geq 10^6$ Н/Кл. Ответ: $R = 94,9$ м.

15. Определите радиус проводящей сферы, способной удерживать в воздухе потенциал в полмиллиона вольт. Чему равен электрический заряд этой сферы? Принять, что $E_{\text{проб}} \geq 10^6$ Н/Кл. Ответ: $R = 0,5$ м; $q = 27,8$ мкКл.



16. Рассмотрим три тонкие концентрические сферы с зарядами q_1, q_2, q_3 соответственно, как показано на рисунке. Чему равны E и ϕ в областях I–IV?

Ответ: $\phi_I = k_0(q_1/R_1 + q_2/R_2 + q_3/R_3)$, $E_I = 0$, при $r < R_1$;

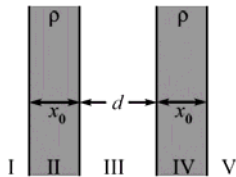
$\phi_{II} = k_0(q_1/r + q_2/R_2 + q_3/R_3)$, $E_{II} = -k_0q_1/r^2$, при $R_1 \leq r < R_2$;

$\phi_{III} = k_0((q_1 + q_2)/r + q_3/R_3)$, $E_{III} = -k_0(q_1 + q_2)/r^2$, при $R_2 \leq r < R_3$;

$\phi_{IV} = k_0(q_1 + q_2 + q_3)/r$, $E_{IV} = -k_0(q_1 + q_2 + q_3)/r^2$, при $r \geq R_3$.

17. Предположим, что в ионосфере давление $P = 10^{-3}$ атм, а температура $T = 300$ К, причем из общего числа атомов ионизована одна десятитысячная часть. Чему равна плазменная частота ионосферы при таких условиях? Ответ: $\nu = 1,4 \cdot 10^{10}$ Гц.

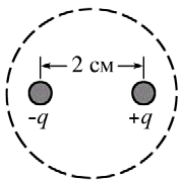
18. Имеются две бесконечные пластины, каждая из которых несет заряд плотностью ρ . Толщина пластин x_0 , расстояние между ними d . Какова напряженность электрического поля в каждой из областей I – V?



Ответ: $E_I = 0$, $E_{II} = \rho x_0 / \epsilon_0$; $E_{III} = \rho(x_0/2 - x) / (\epsilon_0 \epsilon)$; $E_{IV} = \rho(x_0/2 + x) / (\epsilon_0 \epsilon)$ при $-x_0/2 < x < x_0/2$; $E_{V} = 0$.

19. Повторите упражнение 18 для случая, когда заряды пластин имеют противоположные знаки. Ответ: $E_I = E_V = 0$; $E_{III} = \rho x_0 / \epsilon_0$; $E_{II} = \rho(x_0/2 + x) / (\epsilon_0 \epsilon)$; $E_{IV} = \rho(x_0/2 - x) / (\epsilon_0 \epsilon)$ при $-x_0/2 < x < x_0/2$.

20. Покажите, что электрический потенциал на расстоянии r от диполя p равен $\varphi = k_0 p \hat{r} / r^2$, где \hat{r} – единичный вектор в направлении \mathbf{r} .



21. Электрический диполь состоит из двух зарядов q и $-q$ по $1 \cdot 10^{-7}$ Кл каждый. Расстояние между зарядами 2 см (см. рисунок).

- 1) Вычислите полный поток или полное число силовых линий, выходящих из сферической поверхности радиусом 2 см (эта поверхность на рисунке показана штриховой линией).
- 2) Каков электрический потенциал в центре сферы?
- 3) Чему равна величина напряженности электрического поля в центре сферы?

Ответ: 1) $\Phi = 0$; 2) $\varphi = 0$; 3) $E = 1,8 \cdot 10^5$ Н/Кл.

22. Предположим, что два протона в ядре гелия расположены на расстоянии $1,5 \cdot 10^{-15}$ м друг от друга. Вычислите:

- 1) электростатическую силу, действующую между ними;
- 2) работу, которую нужно совершить, чтобы сблизить протоны на указанное расстояние.

Ответ: 1) $F = 102,4$ Н; 2) $A = 1,54 \cdot 10^{-13}$ Дж $\approx 0,96$ МэВ.

23. Электрон находится на расстоянии $5,3 \cdot 10^{-11}$ м от протона. Какой должна быть скорость электрона, чтобы он мог улететь в бесконечность? Ответ: $v \geq 2,19 \cdot 10^6$ м/с.

24. Пусть электрон с зарядом e и массой m и нейтрон с нулевым зарядом и массой M находятся на расстоянии R друг от друга.

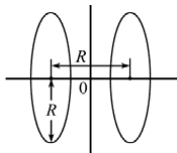
- 1) Чему равна действующая между ними сила? Ответ запишите через расстояние и любые другие универсальные физические константы. Ответ: $F = GmM/R^2$.
- 2) Пусть электрон движется вокруг нейтрона по круговой орбите. Какова действующая между ними сила? Ответ запишите через m , R и v (v – линейная скорость электрона). Ответ: $F = mv^2/R$.
- 3) Чему равна кинетическая энергия электрона? Ответ запишите через G , m , M и R . Ответ: $K = GmM/(2R)$.

- 4) Чему равна потенциальная энергия электрона? Ответ: $U = -GmM/R$.
25. Расстояние между двумя параллельными пластинами 2 см. Электрическое поле между пластинами $2 \cdot 10^4$ Н/Кл. Какова разность потенциалов между пластинами? Ответ: $\Delta\phi = 400$ В.
26. Имеются две бесконечные параллельные плоскости. Расстояние между ними 8 см. Каждая из них заряжена положительно с плотностью заряда 10^{-6} Кл/м². Чему равна напряженность электрического поля между плоскостями? Ответ: $E = 0$.
27. В шарике диаметром 1 см, изготовленном из угля, на каждый миллион протонов приходится один избыточный электрон.
- 1) Чему равен заряд шарика, если плотность шарика $1,7$ г/см³?
 - 2) Каковы напряженность электрического поля и потенциал на поверхности шарика?
- Ответ: 1) $q = 3,56$ Кл; 2) $E = 1,28 \cdot 10^{12}$ Н/Кл, $\phi = 6,4 \cdot 10^9$ В.
28. Электрон движется вокруг протона по круговой орбите. Каково отношение потенциальной энергии электрона к его кинетической энергии? Положительно или отрицательно это отношение? Чему равно отношение энергии связи к кинетической энергии электрона? Ответ: $U/K = -2$; $E/K = -1$.
29. Предполагая, что на каждый квадратный сантиметр поверхности Земли приходится один избыточный электрон, определите электрический потенциал Земли. Ответ: $\phi = -1157,5$ В.

Задачи

1. Может ли существовать в вакууме электростатическое поле, вектор напряженности которого \mathbf{E} во всем объеме поля одинаково направлен, но по величине изменяется, например, по линейному закону, если переходить от точки к точке по нормальному к полю направлению? Ответ: Нет, так как такое поле не будет потенциальным.
2. Предположим, что в атоме водорода электрон движется по круговой орбите вокруг протона. Радиус орбиты электрона $0,53 \cdot 10^{-10}$ м.
 - 1) Чему равно отношение скорости света к скорости электрона?
 - 2) Сколько оборотов в секунду совершает электрон?

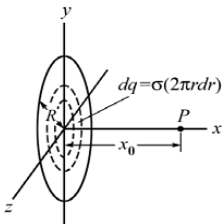
Ответ: 1) $c/v = 137,2$; 2) $n = 6,57 \cdot 10^{15}$ с⁻¹.



3. Два заряженных кольца радиусом R расположены на расстоянии R друг от друга, как показано на рисунке. Чему равно поле E на оси x в зависимости от x , q и R (q – заряд каждого из колец)?

Ответ:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R/2+x}{\left[(R/2+x)^2 + R^2 \right]^{3/2}} - \frac{R/2-x}{\left[(R/2-x)^2 + R^2 \right]^{3/2}} \right)$$



4. Чему равна величина электрического поля в точке P , создаваемого равномерно заряженным диском радиусом R с поверхностной плотностью заряда $\sigma = q/(\pi R^2)$?

Указание: заряд кольца толщиной dr и радиусом r равен $dq = \sigma(2\pi r dr)$.

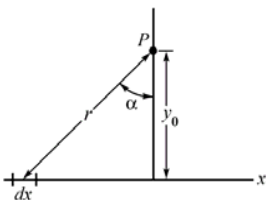
Ответ: $E_A = \left[\sigma / (2\epsilon_0) \right] \left(1 - x_0 / \sqrt{x_0^2 + R^2} \right)$.

5. Решите задачу 4 в случае, когда $R \rightarrow \infty$, т.е. поле создается бесконечной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ .

Ответ: $E = \sigma / (2\epsilon_0)$

6. По сфере радиуса r равномерно распределен заряд q . Определите давление изнутри на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.

Ответ: $P = dF/dS = E \cdot dq/dS = (\sigma/\epsilon_0) \cdot \sigma = q^2 / (16\pi^2 \epsilon_0 r^4)$.



7. Какова напряженность электрического поля на расстоянии y_0 от бесконечного прямолинейного провода с линейной плотностью заряда λ ? Следует заметить, что вклад элемента dx равен

$$dE_y = k_0 \frac{\lambda dx}{r^2} \cos \alpha = \frac{k_0 \lambda}{y_0} \cos \alpha d\alpha.$$

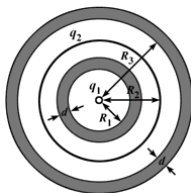
Ответ: $E = 2k_0 \lambda / y_0$.

8. Рассмотрим два концентрических проводящих сферических слоя, каждый толщиной d . Внутренние радиусы этих слоев R_1 и R_3 . В центр помещен точечный заряд q_1 . Между слоями находится

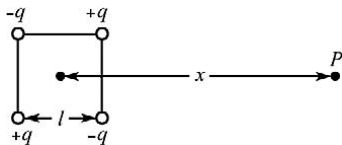
тонкая сферическая оболочка радиусом R_2 , несущая полный заряд q_2 . Чему равны заряды на поверхностях радиусами

1) R_1 , 2) R_3 , 3) $R_1 + d$, 4) $R_3 + d$.

Ответ: 1) $-q_1$; 2) $-(q_1 + q_2)$; 3) $+q_1$; 4) $q_1 + q_2$.



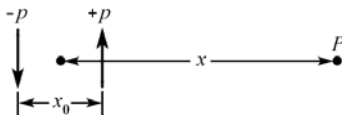
9. В вершинах квадрата (см. рисунок) находятся заряды q . Точка P расположена на расстоянии x от центра квадрата. Найдите E в точке P при условии, что $x \gg l$.



Ответ: $E = 3k_0ql^2/x^4$.

10. Два диполя, каждый с моментом p , расположены на расстоянии x_0 друг от друга и ориентированы в противоположные стороны.

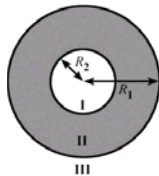
Покажите, что в случае $x \gg x_0$ $E = 3k_0px_0/x^4$. (Такое распределение зарядов называется электрическим квадруполем. Заметьте, что электрическое поле обратно пропорционально четвертой степени расстояния.)



11. В центре равномерно заряженного шара радиусом R_1 имеется сферическая полость радиусом R_2 . Полный заряд шара равен Q . Какова напряженность электрического поля E в областях I, II и III, указанных на рисунке?

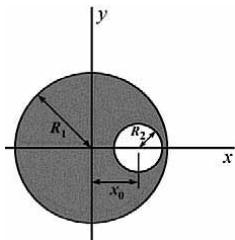
Ответ: $E_I = 0$, $r < R_2$; $E_{II} = \frac{k_0Q}{r^2} \left(\frac{r^3 - R_2^3}{R_1^3} \right)$, $R_2 \leq r \leq R_1$;

$$E_{III} = \frac{k_0Q}{r^2}, \quad r \geq R_1.$$



12. Сферическая полость радиусом R_2 смещена на расстояние x_0 от центра равномерно заряженного шара радиусом R_1 (плотность заряда ρ). Какова напряженность электрического поля E внутри полости?

(Указание: искомое электрическое поле равно суперпозиции электрических полей, создаваемых двумя шарами с радиусами R_1 и R_2 .)



Плотности зарядов этих шаров равны по величине и противоположны по знаку.)

Ответ: $E = \rho x_0 / (3\epsilon_0)$, поле однородно.

13. В условиях задачи 12 найдите поле E на оси y . Определите направление и величину поля внутри шара. Ответ:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos \alpha}, \text{ где } E_1 = \frac{\rho y}{3\epsilon_0}, E_2 = \frac{\rho R_2}{3\epsilon_0 (y^2 + x_0^2)}, \alpha = \arctg \frac{y}{x_0}.$$

14. Проводящая сфера радиуса r составлена из двух полусфер. Определите силу F , с которой отталкиваются эти полусферы, если полный заряд сферы равен Q . Ответ: $F = Q^2 / (32\pi\epsilon_0 r^2)$.

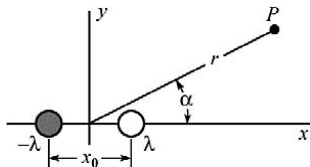
15. Допустим, что линия передачи состоит из голого проводника диаметром 1 см. Пусть на расстоянии 20 см от проводника электрический потенциал обращается в нуль. Каков максимальный потенциал линии, который еще не приводит к пробоем в воздухе, если пробой происходит при $E_{\text{проб}} \geq 10^6$ В/м? Какую максимальную линейную плотность заряда можно сообщить проводнику? Ответ: $\phi = 2 \cdot 10^5$ В; $\lambda = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл/м.

16. Две металлические пластины площадью 100 см² каждая расположены на расстоянии 2 см друг от друга. Заряд левой пластины $-2 \cdot 10^{-9}$ Кл, а правой $-4 \cdot 10^{-9}$ Кл. Вычислите электрическое поле: 1) непосредственно слева от левой пластины; 2) между пластинами; 3) непосредственно справа от правой пластины. Чему равна разность потенциалов между пластинами?

Ответ: 1) $E_1 = 3,39 \cdot 10^4$ В/м; 2) $E_2 = 1,13 \cdot 10^4$ В/м; 3) $E_3 = 3,39 \cdot 10^4$ В/м; $\Delta\phi = 5,65 \cdot 10^5$ В.

17. Однородно заряженный цилиндр радиусом r_1 имеет цилиндрическое отверстие радиусом r_2 . Какова напряженность электрического поля E внутри и вне цилиндра, если объемная плотность заряда ρ ?

$$\text{Ответ: } E_I = 0, r < r_2; E_{II} = \frac{\rho(r^2 - r_2^2)}{2\epsilon_0 r}, r_2 \leq r \leq r_1; E_{III} = \frac{\rho(r_1^2 - r_2^2)}{2\epsilon_0 r}, r \geq r_1.$$



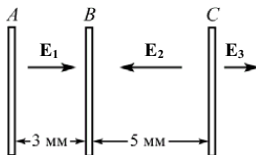
18. Два бесконечных противоположно заряженных проводника расположены на расстоянии x_0 друг от друга (см. рисунок). Линейные плотности зарядов λ и $-\lambda$. Покажите, что в случае, когда $r \gg x_0$, зависимость потенциала имеет вид:

$$\phi(r, \alpha) = 2k_0 \frac{\lambda x_0}{r^2} \cos \alpha.$$

19. В условиях задачи 21 найдите точные выражения для E_x и E_y .

Ответ: $E_x = \frac{k_0 \lambda x_0}{r^3} (3 \cos^2 \alpha - 1)$; $E_y = \frac{3k_0 \lambda x_0}{r^3} \cos \alpha \sin \alpha$.

20. Пусть имеются три заряженные пластины, которые расположены, как показано на рисунке. Потенциал пластины A равен нулю, $E_1 = 200$ В/м, $E_2 = 300$ В/м, $E_3 = 0$.



1) Найдите ϕ_B .

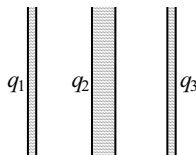
2) Найдите ϕ_C .

3) Определите плотности зарядов на каждой из трех пластин.

Ответ: 1) $\phi_B = -2,6$ В; 2) $\phi_C = 0,9$ В; 3) $\sigma_A = 1,77$ нКл/м²; $\sigma_B = -4,43$ нКл/м²; $\sigma_C = 2,63$ нКл/м².

21. Три одинаковые проводящие пластины расположены параллельно друг другу.

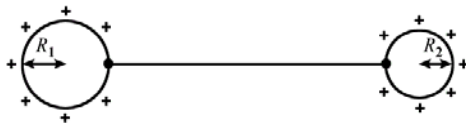
На первой из них (левой) находится заряд $q_1 = -q$, на второй (средней) – заряд $q_2 = -5q$, на третьей (правой) – заряд $q_3 = +6q$.



Найдите отношение зарядов, находящихся

на левой и правой плоскостях средней пластины, $q_{\text{лев}}/q_{\text{прав}}$. Влиянием внешних полей пренебречь. Размеры пластин считать много большими расстояний между ними. Ответ: $-1/6$.

22. Две проводящие сферы соединены проводником длиной L , причем $L \gg R_1 > R_2$. Этой системе сообщили электрический заряд, и ее потенциал стал равен ϕ_0 .



1) Чему равно отношение E_1 (на поверхности сферы радиусом R_1) к E_2 (на поверхности сферы радиусом R_2)? (Из решения этой задачи видно, почему величина E больше вблизи острых углов и краев проводника.)

2) Чему равно отношение σ_1 к σ_2 ?

Ответ: 1) $E_1/E_2 = R_2/R_1$; 2) $\sigma_1/\sigma_2 = R_2/R_1$.

23. Полный заряд равномерно заряженного по объему шара радиусом R равен Q . Чему равен электрический потенциал $\phi(0)$ в центре шара? Ответ: при $\phi_\infty = 0$, $\phi(0) = (3/2)k_0q/R$.

3. ДИЭЛЕКТРИКИ

3.1. Введение

Диэлектрики, в отличие от металлов, относительно плохо проводят электрический ток. Термин «диэлектрик» образован от греческого *diá* – через и английского *electric* – электрический и был введен в употребление М. Фарадеем для обозначения сред, через которые проникает электрическое поле. Этим диэлектрики отличаются от металлов, экранирующих электрическое поле. Заряды в диэлектрике не могут свободно перемещаться, а могут смещаться лишь на малые расстояния, порядка межатомных, из положения равновесия под действием внешнего электрического поля. Такое смещение зарядов может приводить к изменению или появлению электрического дипольного момента в объеме вещества, т.е. к его поляризации.

Различие в электропроводности диэлектриков и металлов классической теория объясняет наличием в металлах свободных электронов, в то время как в диэлектриках все электроны связаны, иными словами, электроны в диэлектриках не обобществлены, а принадлежат отдельным атомам. Внешнее электрическое поле E_0 лишь слегка смещает центр тяжести атомных ядер. Происходит поляризация диэлектрика (рис. 3.1). Молекулы становятся электрическими диполями, ориентированными положительно заряженными концами в направлении электрического поля. Само смещение зарядов диэлектрика в разные стороны называется электрической поляризацией. Заряды, появляющиеся в результате поляризации, называют индукционными или связанными. В объеме однородного диэлектрика поляризационные заряды взаимно компенсируются, и заряд остается нескомпенсированным лишь на поверхности диэлектрика.

Возможен иной механизм поляризации, если молекулы диэлектрика являются полярными и обладают собственными дипольными моментами. В отсутствие поля благодаря хаотичному тепловому движению дипольные моменты не ориентированы. Во внешнем электрическом поле молекулы выстраиваются своими дипольными моментами преимущественно вдоль линий поля и диэлектрик поляризуется.

Существует также тип диэлектриков, построенных из ионов разного знака, например кристалл поваренной соли Na^+Cl^- . Такие кристаллы называют ионными. Они состоят из двух подрешеток положительных и отрицательных ионов. Во внешнем электриче-

ском поле эти подрешетки сдвигаются в разные стороны, что и приводит к поляризации диэлектриков.

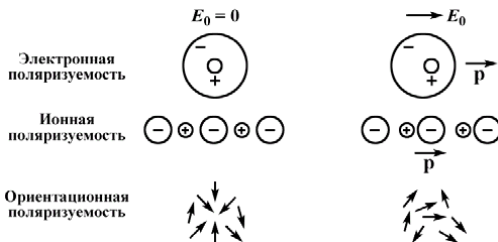


Рис. 3.1. Схематическое изображение трех основных типов вкладов в поляризуемость. Слева – ситуация в отсутствие внешнего поля E_0 , справа – при включении поля E_0 ; \vec{p} – вектор дипольного момента

Таким образом, полная поляризуемость диэлектрика включает составляющие – электронную, ионную и ориентационную (дипольную). Рис. 3.1 иллюстрирует механизм этих видов поляризуемости. Электронная поляризуемость обусловлена смещением электронной оболочки атома относительно ядра. Ионная поляризуемость вызвана смещением заряженных ионов по отношению к другим ионам. Ориентационная (дипольная) поляризуемость возникает, когда вещество состоит из молекул, обладающих постоянными электрическими дипольными моментами, которые могут более или менее свободно изменять свою ориентацию во внешнем электрическом поле.

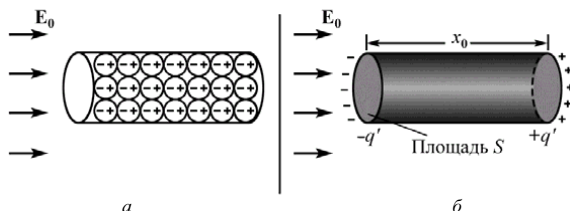


Рис. 3.2. В цилиндре из диэлектрика, находящемся во внешнем электрическом поле E_0 , дипольные моменты атомов ориентируются вдоль направления поля (а). Результирующее распределение заряда (б)

Отвлекаясь от конкретных механизмов поляризации диэлектриков, отметим, что в любом случае во внешнем электрическом поле на поверхности диэлектриков появляются некомпенсированные электрические заряды (рис. 3.2). Это смещение зарядов крайне невелико, поскольку внутренние поля имеют величину порядка 10^{11} В/м и намного превосходят любые реально достижимые внешние поля.

3.2. Вектор поляризации, или поляризованность

Класс диэлектриков охватывает большое количество веществ в твердом, жидком и газообразном состояниях. Для количественного описания поляризации диэлектриков вводится понятие вектора поляризации, или поляризованность \mathbf{P} . Вектором поляризации называют дипольный момент единицы объема диэлектрика при его поляризации. В изотропных условиях ненулевой вклад в этот интеграл дают заряды, сосредоточенные на поверхности диэлектрика (рис. 3.3):

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \int_{(V)} \mathbf{P}_{\text{ср}} dV .$$

Здесь $\mathbf{P}_{\text{ср}} = \mathbf{p}N$, где $\mathbf{P}_{\text{ср}}$ – средний дипольный момент единицы объема, направленный вдоль вектора электрического поля; N – концентрация частиц; \mathbf{p} – средний дипольный момент одной частицы.

Если поместить диэлектрик в однородное электрическое поле \mathbf{E}_0 , то на поверхности диэлектрика появятся поляризационные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{пол}}$. Пусть S – площадь основания параллелепипеда, \mathbf{l} – вектор, проведенный от отрицательного к положительному основанию. Вектор поляризации диэлектрика, по определению, будет равен

$$\mathbf{P} = \frac{\sigma_{\text{пол}} S \mathbf{l}}{V} .$$

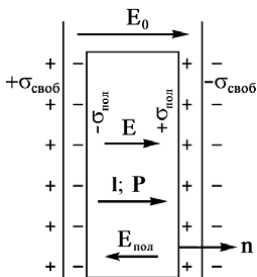


Рис. 3.3. Поле поляризационных зарядов $\mathbf{E}_{\text{пол}}$ направлено против внешнего электрического поля \mathbf{E}_0 , созданного свободными зарядами; $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{пол}}$ – результирующее поле в диэлектрике. \mathbf{P} – вектор поляризации, $\sigma_{\text{пол}} = (\mathbf{P}, \mathbf{n})$

Величина объема параллелепипеда равна $V = S \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{l})$, где \mathbf{n} – вектор нормали, проведенной к основанию положительно заряженного основания параллелепипеда. Используя данное соотношение, получаем

$$(\mathbf{P}, \mathbf{n}) \cdot S \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{l}) = \sigma_{\text{пол}} S \cdot (\mathbf{l}, \mathbf{n}),$$

$$\sigma_{\text{пол}} = (\mathbf{P}, \mathbf{n}).$$

Последнее равенство справедливо для поверхности диэлектрика любой формы. Полный поляризационный заряд в объеме диэлектрика при неоднородной поляризации равен поверхностному поляризационному заряду с обратным знаком

$$q_{\text{пол}} = -\oint \sigma_{\text{пол}} dS = -\oint (\mathbf{P}, d\mathbf{S}) = -\int \text{div } \mathbf{P} dV.$$

С другой стороны,

$$q_{\text{пол}} = \int \rho_{\text{пол}} dV.$$

Откуда получаем соотношение между плотностью поляризационного заряда и вектором поляризации

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_{\text{пол}}.$$

Если поляризация неоднородна, ее дивергенция определяет появляющуюся в материале результирующую плотность зарядов. Эти заряды формируют вполне реальные заряженные области в объеме диэлектрика в присутствии внешнего электрического поля, но исчезают в отсутствие внешнего поля. Величина напряженности поля в однородном поляризованном диэлектрике равна, согласно теореме Гаусса,

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{\text{своб}} - \sigma_{\text{пол}}}{\epsilon_0} \mathbf{n}.$$

Здесь $\sigma_{\text{своб}}$ – заряд на обкладках металлических пластин, создающих однородное электрическое поле, между которыми помещен диэлектрик (рис. 3.3). Поскольку векторы \mathbf{P} и \mathbf{n} параллельны в нашем случае, то $\sigma_{\text{пол}} = P$. Из этого уравнения можно определить поле в диэлектрике \mathbf{E} , если известна зависимость $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ – уравнение состояния диэлектрика. Зависимость $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ отражает электрические свойства диэлектрика и определяется типом веществ, однородностью, степенью чистоты материала, дефектностью и пр. Для большинства диэлектриков в широком интервале величин \mathbf{E} справедлива линейная зависимость \mathbf{P} от \mathbf{E} ,

выражаемая для изотропных веществ и кристаллов с кубической решеткой соотношением

$$\mathbf{P} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Коэффициент пропорциональности κ (каппа) называется диэлектрической восприимчивостью диэлектрика. В результате получаем

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{\text{своб}} - \sigma_{\text{пол}}}{\varepsilon_0} \mathbf{n} = \frac{\sigma_{\text{своб}}}{\varepsilon_0} \mathbf{n} - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} = \mathbf{E}_0 - \kappa \mathbf{E}$$

Поле в диэлектрике равно

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{\text{своб}}}{\varepsilon_0} \mathbf{n} \frac{1}{1 + \kappa} = \mathbf{E}_0 \frac{1}{1 + \kappa}.$$

Здесь $\mathbf{E}_0 = (\sigma_{\text{своб}}/\varepsilon_0)\mathbf{n}$ – электрическое поле, созданное между плоскопараллельными пластинами вне диэлектрика; \mathbf{E} – напряженность электрического поля в диэлектрике, которая оказывается в $\varepsilon = (1 + \kappa)$ раз меньше исходного поля. Величина ε называется относительной диэлектрической проницаемостью среды и характеризует электрические свойства диэлектрика. Точечные заряды, помещенные в диэлектрик, будут взаимодействовать с силой

$$F = qE = q \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{F_0}{\varepsilon}$$

в ε раз меньше, чем в вакууме F_0 .

Пусть два противоположно наэлектризованных шарика взаимодействуют друг с другом в пустоте, а затем их погружают в изолирующую жидкость, например в керосин. Сила взаимодействия между шариками при погружении в керосин уменьшается приблизительно вдвое против той силы, которая наблюдалась между ними в воздухе или в пустоте (диэлектрическая постоянная керосина ≈ 2). Уменьшение силы взаимодействия между шариками происходит из-за того, что керосин поляризуется. У поверхности положительно заряженного шарика сосредотачиваются отрицательные заряды молекулярных диполей керосина (рис. 3.4), а около отрицательно заряженного шарика – положительные заряды. Появившаяся поляризация уменьшает силу взаимодействия шариков. Это уменьшение силы взаимодействия вследствие поляризации среды формально учитывается в законе Кулона введением диэлектрической постоянной среды $\varepsilon = 1 + \kappa$.

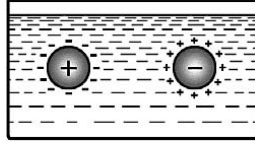


Рис. 3.4. Поляризация среды уменьшает силу взаимодействия между зарядами в ϵ раз

Численное значение относительной диэлектрической проницаемости вещества определяется электрическими свойствами молекул и их числом в единице объема. С увеличением полярности молекул и поляризуемости вещества растет относительная диэлектрическая проницаемость. Если, однако, число молекул в единице объема мало, то эффект поляризации сказывается слабо, поэтому относительная диэлектрическая проницаемость всех газов очень близка к единице (см. таблицу).

Газ	ϵ	Газ	ϵ
Гелий	1,000072	Воздух	1,00058
Водород	1,00027	Пары воды	1,0078
Кислород	1,00055	Углекислота	1,00098
Азот	1,00058	Пары этилового спирта	1,0065

Рис. 3.5. Зависимость относительной диэлектрической проницаемости газов от температуры

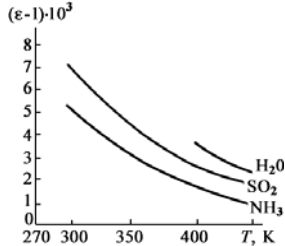
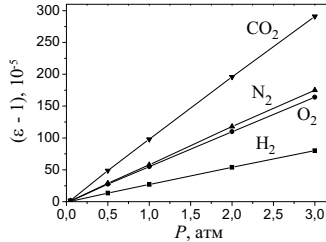


Рис. 3.6. Зависимость величины $(\epsilon - 1)$ для газов от давления при 20 °С



Приведенные в таблице относительные диэлектрические проницаемости (кроме паров воды и спирта) относятся к газам при нормальном атмосферном давлении и при температуре 20 °С. Относительная диэлектрическая проницаемость убывает с температурой (рис. 3.5) и растет с увеличением давления газа; величина $(\epsilon - 1)$ приближенно пропорциональна плотности газа при невысоких давлениях (рис. 3.6).

3.3. Уравнения электростатики для диэлектриков

Одно из основных уравнений электростатики сформулировано в виде теоремы Гаусса, которая в дифференциальной форме связывает величину напряженности электрического поля \mathbf{E} с плотностью его источников – электрических зарядов ρ :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

где $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ – операция дивергенции – скалярная

функция векторного аргумента, ϵ_0 – электрическая постоянная.

Разделим полную плотность зарядов ρ на две составляющие – плотность свободных и поляризационных электрических зарядов:

$$\rho = \rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{пол}}.$$

Поляризационные заряды появляются за счет неоднородной поляризации, а остальные заряды являются свободными. Обычно свободные заряды распределены на проводниках или размещены известным образом в пространстве.

Уравнение поля для диэлектрика в результате принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{пол}}}{\epsilon_0}.$$

Плотность поляризационных зарядов определяет вектор поляризации

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_{\text{пол}}.$$

В результате получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{своб}} - \operatorname{div} \mathbf{P}}{\epsilon_0}.$$

Собирая величины \mathbf{E} и \mathbf{P} под знаком дивергенции, запишем

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{своб}}.$$

Введем новый вектор \mathbf{D} , представляющий линейную комбинацию векторов \mathbf{E} и \mathbf{P} и называемый вектором электрической индукции:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Вообще говоря, введение \mathbf{D} не дает дополнительной информации о поведении диэлектриков в электрическом поле и целесообразно лишь из соображений удобства.

С использованием \mathbf{D} основные уравнения электростатики для диэлектриков примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_{\text{своб}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение для ротора не изменилось, т.е. и в диэлектриках поле безвихревое.

Полученная система имеет решение, если задано соотношение между \mathbf{D} и \mathbf{E} . В простейшем случае, когда связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} линейна: $\mathbf{D} = \varkappa \varepsilon_0 \mathbf{E}$, можно записать

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varkappa \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \varkappa) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}.$$

Данное равенство справедливо для изотропных сред и, по существу, описывает свойства вещества в электрическом поле. В общем случае линейное соотношение между \mathbf{D} и \mathbf{E} может и не выполняться для сильных полей, анизотропных сред, веществ с особым строением и пр. Кроме того, сама величина ε может зависеть, например, от частоты изменения внешнего электрического поля.

Смысл введения вектора электрической индукции состоит в том, что поток вектора \mathbf{D} через любую замкнутую поверхность определяется только свободными зарядами $q_{\text{своб}} = \oint (\mathbf{D}, d\mathbf{S})$, а не всеми зарядами внутри объема, ограниченного данной поверхностью, подобно потоку вектора \mathbf{E} . Это позволяет не рассматривать поляризационные заряды и упрощает решение многих задач. Так, например, получаем для вектора индукции в однородном диэлектрике

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sigma}{2} - \text{бесконечная заряженная плоскость,} \\ D &= \begin{cases} \frac{\sigma x}{a} = \rho x, & -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} - \text{внутри заряженной пластины,} \\ \frac{\sigma}{2} = \frac{\rho a}{2}, & x \leq -\frac{a}{2}, \quad x \geq \frac{a}{2} - \text{вне заряженной пластины.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$D = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi R^3}, & r \leq R - \text{внутри заряженного шара,} \\ \frac{q}{4\pi r^2}, & r \geq R - \text{вне заряженного шара.} \end{cases}$$

3.4. Диэлектрик в электрическом поле

Рассмотрим изотропный диэлектрик, помещенный во внешнее электрическое поле, например, между двумя разноименно заряженными плоскими бесконечными пластинами. Пусть в этом диэлектрике вырезаны две полости. Первая – узкая и длинная щель, параллельная вектору полного поля \mathbf{E} в диэлектрике, а вторая – перпендикулярная \mathbf{E} . Определим напряженность поля в том и другом случае (рис. 3.7).

В первом случае в силу потенциальности поля для любого замкнутого контура Γ имеем

$$\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0.$$

Взяв контур Γ со сторонами, параллельными первой щели, получаем

$$E_{\text{лок}}L = EL$$

или

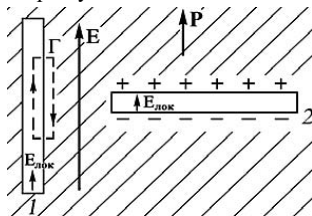
$$E_{\text{лок}} = E.$$

Локальное поле $E_{\text{лок}}$ в щели равно среднему полю E в диэлектрике, если щель вырезана вдоль силовых линий поля.

Если щель ориентирована перпендикулярно силовым линиям поля, то на боковых гранях полости появятся поляризационные заряды с поверхностной плотностью, равной величине вектора поляризации:

$$\sigma_{\text{пол}} = P.$$

В этом случае по теореме Гаусса имеем для величины поля во второй узкой щели



$$E_{\text{лок}} = E + \frac{\sigma_{\text{пол}}}{\epsilon_0} = E + \frac{P}{\epsilon_0}.$$

Рис. 3.7. Определение среднего поля в диэлектрике \mathbf{E} и величины вектора электрической индукции \mathbf{D} . В щели 1, ориентированной вдоль поля, напряженность поля $E_{\text{лок}}$ равна средней напряженности поля в диэлектрике \mathbf{E} . В щели 2 напряженность поля $E_{\text{лок}}$ пропорциональна вектору электрической индукции \mathbf{D}

По определению, имеем $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{D}$ – вектор электрической индукции в диэлектрике, и он равен величине вектора электрической индукции в щели, вырезанной перпендикулярно силовым линиям поля:

$$\mathbf{D}_{\text{лок}} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{лок}} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{D}.$$

В принципе, измерив поле в узких, взаимно перпендикулярных щелях, можно измерить величину среднего поля E в диэлектрике и величину вектора электрической индукции D .

Определим, чему равно поле в сферической полости равномерно поляризованного диэлектрика (рис. 3.8). Для этого в силу принципа суперпозиции отметим, что поле равномерно поляризованного диэлектрика со сферической полостью и поле равномерно поляризованного шара дают в сумме поле равномерно заряженного диэлектрика.

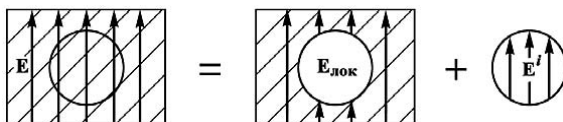
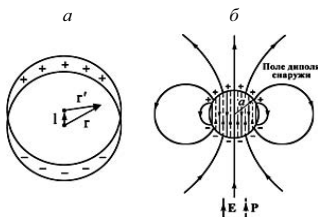


Рис. 3.8. Поле внутри равномерно поляризованной сферической полости $\mathbf{E}_{\text{лок}}$ можно найти, воспользовавшись принципом суперпозиции $\mathbf{E}_{\text{лок}} + \mathbf{E}^I = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} – среднее поле в диэлектрике; \mathbf{E}^I – поле равномерно поляризованного шара

Вычислим поле равномерно поляризованного шара радиуса r . До поляризации в шаре была равномерная смесь положительных и отрицательных зарядов, которая во внешнем поле разделилась в результате малого смещения \mathbf{l} положительных зарядов относительно отрицательных. Поле внутри равномерно поляризованного шара можно найти как разность полей отрицательно и положительно равномерно заряженных шаров (рис. 3.9) из условия $ES = q/\epsilon_0$, где $q = \sigma V$ – заряд шара, V и S – объем и площадь поверхности шара:

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\rho \mathbf{r}'}{3\epsilon_0}.$$

Рис. 3.9. Поле равномерно поляризованного шара равно разности полей положительно и отрицательно заряженных шаров (а); электрическое поле равномерно поляризованного шара (б)



Геометрическая сумма этих полей дает величину напряженности поля в равномерно поляризованном шаре:

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho\mathbf{l}}{3\epsilon_0} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}.$$

В результате поле внутри диэлектрика равно

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{лок}} + \mathbf{E}^i = \mathbf{E}_{\text{лок}} - \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0},$$

где $\mathbf{E}_{\text{лок}}$ – поле в свободной полости диэлектрика:

$$\mathbf{E}_{\text{лок}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}.$$

Поле в сферической полости больше среднего поля в диэлектрике \mathbf{E} на величину $\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$. Оно больше поля параллельной щели, но меньше поля перпендикулярной. Поскольку в слабых полях для однородных диэлектриков $\mathbf{P} = \epsilon_0\kappa\mathbf{E}$, то получаем ($\epsilon = 1 + \kappa$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0/\epsilon$)

$$\mathbf{E}_{\text{лок}} = \mathbf{E} + \frac{\kappa}{3}\mathbf{E} = \frac{\epsilon + 2}{3}\mathbf{E},$$

$$\mathbf{E}_{\text{лок}} = \frac{\epsilon + 2}{3\epsilon}\mathbf{E}_0.$$

Вектор поляризации шара

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\kappa\mathbf{E} = \frac{3\epsilon_0(\epsilon - 1)}{\epsilon + 2}\mathbf{E}_{\text{лок}}.$$

Во внешнем электрическом поле \mathbf{E}_0 шар радиусом r_0 приобретает дипольный момент

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}V = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \frac{3\epsilon_0(\epsilon - 1)}{\epsilon + 2}\mathbf{E}_0,$$

где $V = (4/3)\pi r_0^3$ – объем шара.

На такой шар в неоднородном электрическом поле будет действовать сила (п. 2.4.1):

$$F = p \frac{\partial E_0}{\partial x} = 4\pi r_0^3 \epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \frac{\partial E_0}{\partial x} = 2\pi r_0^3 \epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{\partial E_0^2}{\partial x}.$$

Если шар металлический, то для него $\epsilon = \infty$ (поле не проникает в металл) и сила равна

$$F = 2\pi r_0^3 \epsilon_0 \cdot \frac{\partial E_0^2}{\partial x}$$

– сила направлена в сторону возрастания поля E_0 . Силами такого рода объясняется притяжение наэлектризованными телами легких предметов.

Нейтральные частицы втягиваются в область более сильного электрического поля из-за возникновения поляризационных зарядов. Поскольку в области более сильного поля всегда оказывается заряд противоположного знака по отношению к источнику поля, то поляризуемое неоднородным полем тело движется по направлению сгущения силовых линий.

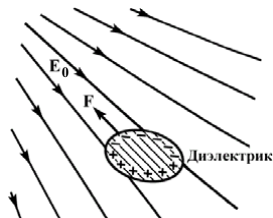


Рис. 3.10. Диэлектрик в неоднородном поле втягивается в область с большей напряженностью поля

Как показано на рис. 3.10, диэлектрик всегда стремится из области слабого поля в область, где поле сильнее. Сила, действующая на малые объекты, пропорциональна градиенту квадрата электрического поля. Она зависит от квадрата напряженности поля, потому что индуцированные поляризационные заряды пропорциональны полям, а для данных зарядов силы пропорциональны полю. Результирующая сила возникает, только если квадрат поля меняется от точки к точке. Сила пропорциональна градиенту квадрата поля. Константа пропорциональности включает диэлектрическую проницаемость данного тела и зависит от размеров и формы тела.

В отличие от заряженного тела диполь втягивается в область более сильного электрического поля с силой, пропорциональной градиенту поля:

$$F_x = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением векторов p и E .

3.5. Газообразные диэлектрики

Молекулы газов можно разделить на полярные и неполярные. К полярным относятся молекулы, имеющие собственный дипольный момент (H_2O , CO_2 , NH_3 и др.) в отсутствие электрического поля. К неполярным – молекулы, у которых в отсутствие внешнего электрического поля дипольный момент равен нулю (H_2 , O_2 , N_2 и др.) (рис. 3.11).

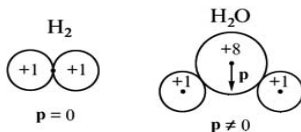


Рис. 3.11. Молекула H_2 не обладает в свободном состоянии дипольным моментом. Дипольный момент молекулы воды отличен от нуля

Неполярная молекула может поляризоваться внешним электрическим полем, когда электроны и ядра в ней стремятся разойтись в разные стороны. Смещение электронного облака относительно ядер, приводящее к индуцированию дипольного момента, называется электронной поляризацией.

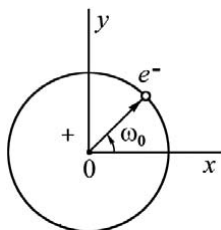


Рис. 3.12. Периодическое движение электрона по орбите с циклической частотой ω_0

Если предположить, что электрон движется периодически по орбите с циклической частотой ω_0 , то проекция его движения на ось x описывается периодической функцией (рис. 3.12):

$$x_1 = A \cos \omega_0 t.$$

Уравнение движения электрона в отсутствие внешнего электрического поля имеет вид

$$a = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -x_1 \omega_0^2.$$

Во внешнем электрическом поле на электрон в атоме действует дополнительная сила

$$F_x = -eE$$

в результате электрон сместится из положения равновесия на некоторое расстояние x_0 , определяемое из уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x - \frac{eE}{m} = 0.$$

Решение уравнения имеет вид $x = x_0 + A \cos \omega_0 t$, где

$$x_0 = \frac{eE}{m\omega_0^2}.$$

Дипольный момент атома во внешнем поле равен

$$\mathbf{p} = e\mathbf{x}_0 = \frac{e^2}{m\omega_0^2}\mathbf{E}.$$

Если в единице объема имеется N атомов, то дипольный момент единицы объема равен

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}N = \frac{e^2N}{m\omega_0^2}\mathbf{E}.$$

С другой стороны, по определению, для слабых полей имеем

$$\mathbf{P} = \kappa\epsilon_0\mathbf{E}.$$

Приравняв правые части равенств, находим диэлектрическую восприимчивость неполярных газов

$$\kappa = \frac{e^2N}{m\omega_0^2\epsilon_0}.$$

Величина

$$\alpha = \frac{\kappa}{N} = \frac{e^2}{m\omega_0^2\epsilon_0}$$

называется электронной поляризуемостью атома и имеет размерность м^3 .

Полученное соотношение показывает, что диэлектрическая восприимчивость газов должна зависеть от плотности газов N и резонансных частот ω_0 .

Для атома водорода собственную частоту ω_0 можно оценить по величине потенциала ионизации I атома:

$$I = h\omega_0 = \frac{e^4 m}{8\pi\epsilon_0 h^2}.$$

Подставляя значение ω_0 в выражение для κ , находим

$$\kappa = \frac{e^2 N}{m\epsilon_0} \left[\frac{8\pi\epsilon_0 h^3}{e^4 m} \right]^2 = 64\pi^2 \epsilon_0 N \left[\frac{h^2}{e^2 m} \right]^3 = \frac{N}{\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{e^2 m} \right]^3.$$

Величина в скобках равна радиусу первой орбиты атома водорода 0,528 Å. При нормальных условиях $N = 2,69 \cdot 10^{19}$ ат/см³ и величина $\epsilon^{\text{теор}} = \kappa + 1 = 1,00020$, на опыте относительная диэлектрическая проницаемость равна $\epsilon^{\text{эксп}} = \kappa + 1 = 1,00026$. Такое совпадение вполне удовлетворительно, поскольку измерения ϵ выполнены в молекулярном, а не атомарном водороде.

Если молекулы газа обладают собственным дипольным моментом, то при наличии поля молекулы газа будут стремиться из состояния с хаотически распределенными дипольными моментами перейти в состояние с дипольными моментами, выстроенными преимущественно по направлению силовых линий электрического поля. Роль поля в этом случае сведется к ориентации диполей (рис. 3.13). В зависимости от ориентации изменяется энергия диполя. Потенциальная энергия диполя равна

$$U = q\phi(1) - q\phi(2) = q\mathbf{l} \text{grad} \phi.$$

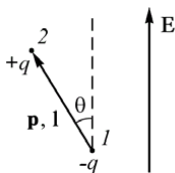


Рис. 3.13. Диполь стремится ориентироваться дипольным моментом \mathbf{p} вдоль силовых линий электрического поля \mathbf{E} .

Воспользовавшись связью между градиентом и напряженностью поля

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi,$$

перепишем соотношение для энергии диполя в виде ($\mathbf{p} = ql$)

$$U = -\mathbf{p}\mathbf{E} = -pE \cdot \cos\theta.$$

Число молекул с данной ориентацией определяется распределением Больцмана

$$n(\theta) = n_0 \exp\left(-\frac{U(\theta)}{kT}\right) = n_0 \exp\left(\frac{pE \cos \theta}{kT}\right).$$

Полное число молекул в единице объема со всевозможными пространственными ориентациями равно

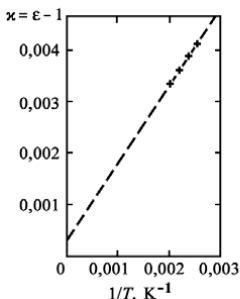
$$N = \int_0^\pi n(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta,$$

откуда находим величину нормировочного множителя

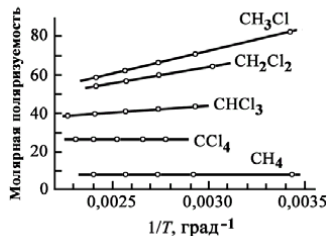
$$n_0 = \frac{NpE}{2\pi kT (e^{pE/kT} - e^{-pE/kT})}.$$

Просуммируем составляющие дипольных моментов, направленных вдоль поля:

$$P = \int_0^\pi n(\theta) p \cos \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi n_0 p \frac{e^{pE/kT} \left(\frac{pE}{kT} - 1\right) + e^{-pE/kT} \left(\frac{pE}{kT} + 1\right)}{(pE/kT)^2}.$$



a



б

Рис. 3.14. Зависимости: *a* – диэлектрической восприимчивости водяного пара от обратной температуры; *б* – молярной поляризуемости от обратной абсолютной температуры для соединений метанового ряда в газообразном состоянии при замещении водорода хлором. Эта зависимость иллюстрирует переход от полярного диэлектрика (наибольшая поляризуемость для CH_3Cl) к неполярному (чистый метан CH_4 и чистый четыреххлористый углерод CCl_4). Светлые кружки – экспериментальные точки. Молярная поляризуемость равна произведению отношения $(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2)$ на молярный объем

В слабых полях ($pE/kT \ll 1$) можно воспользоваться разложением экспоненты в ряд $e^x \approx 1 + x + x^2/2! + x^3/3!$, приближенно получим

$$P = \frac{Np_0^2 E}{3kT}, \quad \epsilon - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{Np_0^2}{3\epsilon_0 kT}.$$

Поляризация оказывается пропорциональной напряженности электрического поля и обратно пропорциональной температуре, поскольку повышение температуры усиливает хаотическое движение молекул и разрушает их ориентированность. Пропорциональность $\epsilon - 1$ обратной температуре называется законом Кюри. Для водяного пара зависимость $(\epsilon - 1) \sim 1/T$ (в условиях эксперимента, когда концентрация молекул H_2O постоянна) хорошо выполняется (рис. 3.14, а).

Типичная температурная зависимость ориентационной поляризуемости молекул метанового ряда приведена на рис. 3.14, б. Молекула CH_3Cl имеет наибольший постоянный электрический дипольный момент, а молекулы крайних членов метанового ряда, CH_4 и CCl_4 , симметричны и вообще не обладают постоянным дипольным моментом.

3.6. Диэлектрические свойства жидкостей

Поле, поляризующее атомы в жидкости, более похоже на поле в полости диэлектрика, которое равно

$$\mathbf{E}_{\text{люк}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}.$$

Под действием этого поля атом в жидкости приобретает дипольный момент (N – концентрация атомов в жидкости, m^{-3})

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}}{N} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{люк}} = \alpha \epsilon_0 \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right).$$

Дипольный момент единицы объема равен

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}N = \alpha \epsilon_0 N \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right).$$

Учитывая, что $\epsilon = 1 + \kappa$, получаем

$$\kappa = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3} \quad \text{или} \quad \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{1}{3} \alpha N$$

– связь диэлектрической проницаемости ϵ и восприимчивости κ жидкости с атомной поляризуемостью α . Полученное соотношение называется формулой Клаузиуса – Моссотти.

При малых $N\alpha \ll 1$ (N в газах мало) получаем

$$\kappa = N\alpha$$

– формулу, применимую для газов. С помощью этого соотношения для газа CS_2 , зная ϵ , находим $N\alpha = 0,0029$. При 20°C плотность жидкого CS_2 в 381 раз выше плотности газа, и, следовательно, N в 381 раз выше, $N\alpha = 1,105$, $N\alpha/3 = 0,368$. В результате получаем $\kappa = 1,75$ и $\epsilon = 2,75$ для жидкого CS_2 , что неплохо согласуется с экспериментальным значением 2,64.

Для полярных молекул развитый способ расчета κ неверен. Так, для H_2O получаем $N\alpha = 13,2$, и значение κ становится отрицательным, тогда как опытное значение κ равно 80. Здесь следует учесть вклад не только электронной, но и ионной поляризации.

Определим электронную поляризуемость α_e молекул бензола C_6H_6 и диэлектрическую проницаемость ϵ паров бензола. Показатель преломления жидкого бензола $n = 1,5$, его плотность $\rho = 899 \text{ кг/м}^3$ и молярная масса $\mu = 78 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Поскольку для жидкого бензола $\epsilon = n^2$, то можем записать

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} \alpha_e \frac{N_A}{\mu} \rho,$$

откуда

$$\alpha_e = \frac{3\mu}{\rho N_A} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right).$$

$$\alpha_e = \frac{3 \cdot 78 \cdot 10^{-3}}{899 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} \cdot \frac{1,5^2 - 1}{1,5^2 + 2} = 1,27 \cdot 10^{-28} \text{ м}^3.$$

Диэлектрическую проницаемость паров бензола найдем, воспользовавшись уравнением Клаузиуса – Моссоли для паров бензола при нормальных условиях

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{1}{3} \alpha N,$$

где N – концентрация молекул бензола.

Молекулы бензола неполярны и обладают двумя типами поляризации: электронной и атомной. Атомная поляризация мала, и ею можно пренебречь, считая $\alpha \approx \alpha_e$. Кроме того, при нормальных условиях ϵ мало отличается от единицы, и приближенно можно считать $\epsilon + 2 \approx 3$. В этом случае

$$\epsilon = 1 + \alpha_e N.$$

При нормальных условиях концентрация N молекул бензола известна ($N = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$). Это соответствует

$$\epsilon = 1 + 1,27 \cdot 10^{-28} \cdot 2,69 \cdot 10^{25} = 1,00342.$$

3.7. Твердые диэлектрики. Электреты. Пьезоэлектрики

Твердые диэлектрики обладают рядом интересных и практически важных особенностей. Одна из них связана с наличием у ряда веществ постоянной поляризации, даже в отсутствие внешнего электрического поля. Спонтанная поляризация является результатом несовпадения «центров тяжести» положительных и отрицательных зарядов и может быть получена искусственно. Так, если растопить воск и поместить его в электрическое поле, то в процессе затвердевания дипольные моменты его молекул окажутся частично ориентированными по полю и останутся в таком положении в затвердевшем материале после снятия поля. Вещество, обладающее поляризацией в отсутствие внешнего электрического поля, называется электретом. Однако свободные поляризационные заряды на поверхности электрета достаточно быстро нейтрализуются молекулами воздуха. Электрет «разряжается» и не создает заметного внешнего поля.

Постоянная внутренняя поляризация встречается у некоторых сложных кристаллических веществ (турмалин, α -кварц). Эту поляризацию обычно не замечают, так как внешнее поле у них разряжается. Обычно наблюдается не сама спонтанная поляризация, а ее изменение при быстром изменении внутренних дипольных моментов, поскольку в этом случае блуждающие заряды не успевают собраться и нейтрализовать поляризационные заряды. Поляризация может изменяться при быстром изменении температуры ΔT – пьезоэлектрический эффект («пир» – огонь). Плотность возникающего поверхностного заряда $\sigma = p\Delta T$ пропорциональна разности температур, p – пьезоэлектрическая константа. Типичный пьезоэлектрик – турмалин. В нем при изменении температуры на 1°C возникает электрическое поле $E \approx 4 \cdot 10^4$ В/м.

Изменение поляризации в пьезоэлектриках может происходить и под действием механических напряжений, например при сгибе кристалла или при его сжатии и растяжении. Наблюдаемый при этом слабый электрический эффект называется прямым пьезоэлектрическим эффектом. Обнаружен этот эффект в 1880 году братьями Пьером и Жаком Кюри. Пьезоэлектрическими свойствами обладают только ионные кристаллы. Если кристаллические решетки положительных и отрицательных ионов таких кристаллов при внешнем воздействии деформируются по-разному, то в противоположных местах на поверхности кристалла выступают электрические заряды разных знаков и наблюдается пьезоэлектрический эффект.

Важнейшим пьезоэлектриком является кварц. В нем можно возбудить поле до $3 \cdot 10^6$ В/м.

Многочисленны практические приложения пьезоэффекта. Так, пьезоэлектрический манометр – кварцевая пластинка, помещаемая в исследуемый газ, позволяет измерять быстропеременные давления. Существуют различные пьезоэлектрические преобразователи, пьезоэлектрические стабилизаторы и фильтры, пьезоэлектрические датчики, звукосниматели, микрофоны, кварцевые излучатели ультразвука и пр.

3.8. Сегнетоэлектрические кристаллы

В сегнетоэлектрических кристаллах электрический дипольный момент существует даже в отсутствие внешнего электрического поля. В сегнетоэлектрическом состоянии центр положительных зарядов всего кристалла не совпадает с центром отрицательных.

Зависимость поляризации от электрического поля в сегнетоэлектрическом состоянии имеет нелинейный вид, называемый петлей гистерезиса (от греч. hysteresis – отставание, запаздывание). Такой вид характерен именно для сегнетоэлектрического состояния (рис. 3.15).

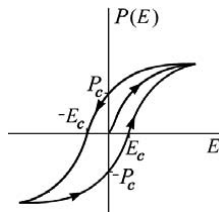


Рис. 3.15. Кривая поляризации сегнетоэлектрика – петля гистерезиса. E_c – коэрцитивное поле, P_c – остаточная поляризация

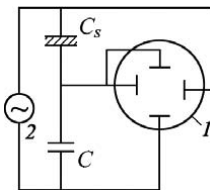


Рис. 3.16. Схема для снятия петли гистерезиса: I – осциллограф; 2 – генератор; C_s – конденсатор с исследуемым сегнетоэлектриком

На рис. 3.16 приведена принципиальная схема измерения петли гистерезиса для сегнетоэлектрика с помощью осциллографа I и генератора переменного напряжения 2. Исследуемый сегнетоэлектрик помещен между обкладками конденсатора C_s .

Обычно сегнетоэлектрики не бывают однородно поляризованными, а состоят из доменов – областей с различными направлениями поляризации. В результате суммарный дипольный момент практически отсутствует. Равновесная доменная структура отвечает минимуму свободной энергии кристалла (рис. 3.17).

Под действием электрического поля E доменные границы смещаются так, что объем доменов, поляризованных по полю, увеличивается за счет доменов, поляризованных против поля. В реальных кристаллах доменные границы обычно «закреплены» на дефектах и неоднородностях и необходимы достаточно сильные электрические поля, чтобы перемещать их по образцу.

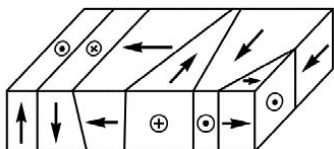


Рис. 3.17. Изображение доменов тетрагональной модификации BaTiO_3 . Стрелки и знаки \ominus, \oplus указывают направление вектора поляризации

В сильном электрическом поле кристалл становится однодоменным. После выключения электрического поля образец в течение длительного времени остается поляризованным, P_c – остаточная поляризация. Для того чтобы суммарные объемы доменов противоположного знака сравнялись, необходимо приложить достаточно сильное поле противоположного направления E_c – коэрцитивное поле (рис. 3.15).

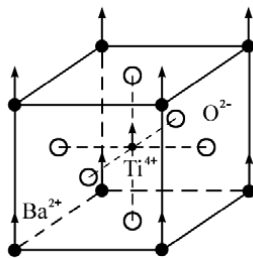
Особенность сегнетоэлектриков состоит в сравнительно легком изменении величины дипольного момента под влиянием электрического поля, упругих напряжений, изменения температуры.

Резкое изменение поляризации сегнетоэлектриков под влиянием электрического поля обуславливает большую величину диэлектрической проницаемости многодоменного сегнетоэлектрика. Значение ϵ тем больше, чем слабее закреплены доменные границы на дефектах и на поверхности.

Сегнетоэлектрическое состояние исчезает выше некоторой температуры T_C , называемой точкой Кюри. Выше этой температуры сегнетоэлектрики переходят в неполярную фазу, становятся параэлектриками. С приближением к точке Кюри диэлектрическая проницаемость резко возрастает. Выше точки Кюри зависимость ϵ от T имеет вид $\epsilon(T) = B/(T - T_0)$, где B и T_0 – константы вещества.

Одним из наиболее известных сегнетоэлектриков является титанат бария BaTiO_3 , имеющий температуру перехода $T_C = 393 \text{ K}$. Всего известно несколько сотен сегнетоэлектриков. Впервые сегнетоэлектрические свойства были обнаружены у кристаллов сегнетовой соли $\text{KNaC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ в 1920 г. В титанате бария ниже точки Кюри ионы Ba^{2+} и Ti^{4+} слегка смещаются относительно ионов O^{2-} , создавая дипольный момент. Возможно, что ионы O^{2-} верхней и нижней граней слегка смещаются вниз (рис. 3.18).

Рис. 3.18. Структура BaTiO_3 – титаната бария. Структура кубическая. В вершинах куба \bullet – ионы Ba^{2+} , в центрах граней \circ – ионы O^{2-} , \blacksquare – ион Ti^{4+} – в центре куба



При вычислении поляризации твердых тел, как и в жидкостях, следует найти локальные поля в каждой элементарной ячейке. И хотя кристалл – неоднородная жидкость, можно попытаться воспользоваться для локального поля выражением

$$E = -\frac{P}{3\epsilon_0},$$

несмотря на то, что величина множителя $1/3$ немного изменится. В этом случае диэлектрическая восприимчивость будет равна

$$\chi = \epsilon - 1 = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3}.$$

Если величина $N\alpha$ начнет приближаться к 3, то в кристалле будет заметно возрастать поляризация, создавая большие локальные поля. Большое локальное поле поляризует атом еще сильнее, дополнительно усиливая само локальное поле. Если атомы достаточно подвижны, то процесс будет продолжаться и возникнет обратная связь, приводящая к очень сильному росту поляри-

зации. Условие такого катастрофического увеличения χ возникает при $N\alpha \rightarrow 3$. Величины χ и ϵ при этом не обратятся в бесконечность, так как в сильных полях линейная связь между P и E нарушается, и уравнения для χ изменятся. Тем не менее, при условии $N\alpha \rightarrow 3$ решетка окажется сильно поляризованной.

Величина N с повышением температуры уменьшается из-за расширения решетки, поэтому можно управлять величиной $N\alpha$ изменением температуры. Пусть T_C – критическая температура, соответствующая $N\alpha = 3$. При увеличении температуры N падает из-за расширения решетки. Расширение мало, и можно приближенно записать вблизи T_C :

$$N\alpha = 3 - \beta(T - T_C),$$

где $\beta \approx 10^{-5} \div 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ – величина порядка коэффициента теплового расширения. В результате вблизи T_C имеем ($T > T_C$)

$$\chi = \frac{9}{\beta(T - T_C)}.$$

Поскольку $T \rightarrow T_C$, то величина χ вблизи T_C становится очень большой, достигая величины порядка 10^4 , и оказывается весьма чувствительной к температуре.

Этот закон $\epsilon \sim (T - T_C)^{-1}$ близок к наблюдаемой на опыте зависимости ϵ от T в параэлектрическом ($T > T_C$) состоянии.

Сегнетоэлектрические материалы (монокристаллы, керамики, пленки) широко применяются в качестве веществ с большими значениями диэлектрической проницаемости и пьезоэлектрических констант в конденсаторах и пьезоэлектрических преобразователях. Резкое изменение диэлектрической восприимчивости вблизи T_C используется для контроля за температурой. Большие значения диэлектрических констант позволяют использовать сегнетоэлектрики в детекторах электромагнитных волн от видимого до субмиллиметрового диапазона и в качестве электрооптических материалов.

3.9. Электроконвекционные явления (электрофорез, электроэндосмос и др.)

Электрическая поляризация и контактная электризация тел проявляются весьма разнообразно. Они приводят, в частности, к ряду *электроконвекционных* явлений – перемещению макроскопических количеств вещества под действием электрических сил.

Возникновение контактной разности потенциалов при тесном соприкосновении разнородных тел происходит всегда и представляет собой результат выравнивания полных термодинамических

потенциалов электронов в металлах или ионов в электролитах. *Контактная электризация* разнородных тел проявляется, в частности, в так называемой «электризации при трении» и обычно сопровождается (когда контакт окажется нарушенным) адсорбцией молекул и ионов на поверхностях, несущих заряды.

Частица какого-либо твердого вещества, погруженная в воду или другую жидкость, электризуется вследствие контактной разности потенциалов; жидкость приобретает противоположный заряд. На рис. 3.19 представлена схема опыта, доказывающего, что при погружении твердого тела в жидкость происходит контактная электризация: парафиновый шарик на стеклянной ножке опускают в воду и затем переносят его в металлическую коробку («коробку Фарадея»), соединенную с электрометром. Этот опыт обнаруживает, что парафиновый шарик заряжается отрицательным электричеством, а вода приобретает положительный заряд.

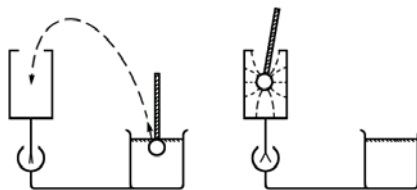


Рис. 3.19. Схема опыта, демонстрирующего электризацию при контакте

Аналогично можно наблюдать контактную электризацию, погружая в ртуть стержень из стекла, сургуча, янтаря и т.д.

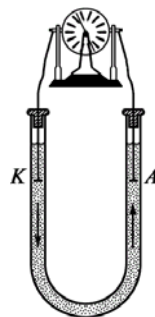


Рис. 3.20. Электрофорез – перемещение взвешенных частиц в жидкости под действием электрического поля. Взвешенные частицы заряжаются при контакте с жидкостью

Электризация твердых тел, взвешенных в жидкости, может быть обнаружена по их перемещению в электрическом поле. Схема такого опыта показана на рис. 3.20. Электрическое поле здесь создается между электродами *K* и *A* высоковольтной электрофорной машины. В качестве «взвеси» можно взять любую металлическую суспензию в воде, взвесь глины, шеллака, крахмала, эмульсию водяных капель в анилине и т.д. Во всех перечисленных случаях взвешенные частицы или капельки заряжаются отрицательно и движутся к аноду *A*. Их движение легко проследить, наблюдая взвесь в микроскоп. В других случаях взвешенные частицы, например частицы гидратов окисей металлов, метилвиолета, метиленовой сини и др., приобретают положительный заряд.

Описанное явление называют *электрофорезом* (от греч. *phoros* – несущий). Часто его называют также катафорезом. Это явление было открыто Рейсом в 1807 г. в Москве; Рейс тогда же открыл и другое явление: *электроэндосмос* (от греч. *enden* – внутри и *ostmos* – толчок, движение). Электроэндосмос представляет собой электрофорез жидкости при неподвижности твердой фазы. Чтобы наблюдать движение жидкости в электрическом поле, в трубку с жидкостью помещают какое-либо пористое вещество – пемзу, пробку из ваты, войлока или песка и т.п. На рис. 3.21 показано, что вода, которая в большинстве случаев заряжается положительно, переместилась под действием электрического поля к катоду и уровень ее здесь несколько поднялся. Электроэндосмос можно осуществить, заменив пористое тело достаточно длинным и тонким капилляром.

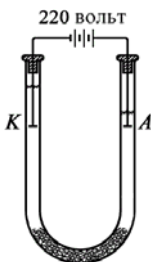


Рис. 3.21. Электроэндосмос

Электрофорез широко применяется в коллоидной химии и медицине (введение лекарств методом электрофореза). Его используют также при некоторых производственных процессах. Например, при производстве водонепроницаемых тканей при

помощи электрофореза заполняют поры ткани тонко размельченным глиноземом или гидратом окиси алюминия.

Электроэндосмос довольно широко применяют в технике при холодной *электрической сушке* различных пористых и волокнистых веществ. На рис. 3.22 представлена схема опыта, поясняющего, как электроэндосмос используется для просушивания веществ.

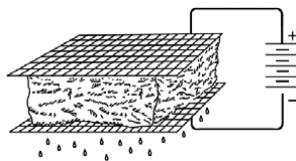


Рис. 3.22. Схема осуществления сушки посредством электроэндосмоса

Тюк влажного пористого или волокнистого вещества помещают между металлическими сетками, которые служат электродами. Электроэндосмос заставляет воду перемещаться вниз к катоду и стекать сквозь сетку.

Электроконвекционные процессы применяют также при очистке каолина для производства высококачественного фарфора, при очистке фруктовых соков, при отделении эмульсий в нефтяной промышленности и т.д.

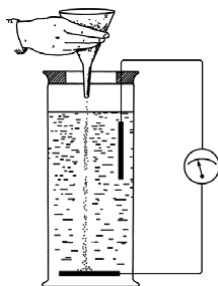


Рис. 3.23. Явление, обратное электрофорезу

Электрофорез заключается в движении взвешенных в жидкости твердых частиц или капелек эмульсии под действием элект-

трического поля. Но существует и обратное явление: вследствие движения взвешенных частиц в жидкости возникает электрическое поле. На рис. 3.23 показана схема опыта, демонстрирующего явление, обратное электрофорезу. Песчинки падают через столб жидкости под действием силы тяжести. Между металлическими пластинками, помещенными у концов водяного столба, возникает электрическое поле, и вольтметр обнаруживает создавшуюся разность потенциалов.

Существует также явление, обратное эндосмосу. Его открыл и исследовал в 1859 г. Квинке (рис. 3.24).

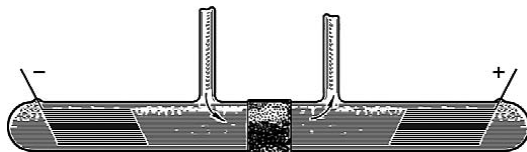


Рис. 3.24. Явление, обратное электроэндосмосу

В цилиндрический сосуд подводится вода, которая действием избыточного давления Δp проталкивается через пористую пробку, разделяющую сосуд на две части. В левой и правой частях сосуда помещены платиновые пластинки, к которым припаяны провода, выведенные наружу для подключения к вольтметру. Проталкивание жидкости через пористое тело электризует жидкость, причем обычно так, что выходящая жидкость электризуется положительно, а жидкость, не успевшая проникнуть через пористую перегородку, приобретает отрицательный заряд. Возникающая на электродах разность потенциалов пропорциональна перепаду давления, проталкивающей жидкости; эта разность потенциалов зависит также от вещества жидкости и вещества перегородки, но не зависит ни от толщины, ни от величины поверхности пористой перегородки (если они не слишком малы). При проталкивании воды через пористую перегородку из кварцевого песка при разности давлений в одну атмосферу на электродах создается разность потенциалов около 7 В. При проталкивании воды через жженую глину под действием того же перепада давления в одну атмосферу создается разность потенциалов всего 0,4 В.

Теория описанных явлений была разработана Г. Гельмгольцем, М. Смолуховским и др.

Вследствие электрической поляризации диэлектрики, внесенные в электрическое поле, оказываются под действием механической силы, которая увлекает диэлектрик в область максимальной напряженности поля. Притяжение наэлектризованными телами легких предметов – пушинок, пыли, кусочков бумаги – представляет собой простейший пример «пондеромоторного» действия электрического поля на диэлектрики. Это явление используют в технике, устраивая электрические улавливатели пыли, частиц дыма и т.п. (*электрофильтры*).

Капельки жидкого диэлектрика с большой диэлектрической постоянной, взвешенные в жидкости с меньшей диэлектрической постоянной, притягиваются наэлектризованным предметом, погруженным в жидкость. Иначе говоря, подобные капельки эмульсии, попадая в неоднородное электрическое поле, увлекаются, подобно пушинкам в воздухе, в область максимальной напряженности поля (рис. 3.25).

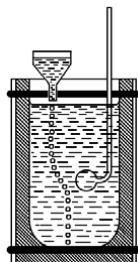


Рис. 3.25. Капли воды, падающие в легкое масло, притягиваются наэлектризованным телом

Такие перемещения диэлектриков соответствуют минимуму потенциальной энергии. Действительно, возьмем, как наиболее простое, выражение потенциальной энергии металлического шарика радиусом r , имеющего заряд q и находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ :

$$U = \frac{k_0 q^2}{2\epsilon r}.$$

Мы видим, что потенциальная энергия наэлектризованного шарика или, иначе говоря, *энергия его электрического поля убывает при увеличении диэлектрической постоянной вещества*, окружающего заряженный шарик. Механическая энергия перемещения диэлектрика с большой диэлектрической постоянной к наэлектризованному телу создается за счет убывания электриче-

ской энергии поля. Молекулярная картина этого явления состоит в том, что наэлектризованное тело поляризует диэлектрик и притягивает его с силой, которая равна геометрической сумме сил притяжения наэлектризованных телом всех молекулярных диполей диэлектрика.

Пузырьки любого газа в жидкости отталкиваются от наэлектризованного тела (рис. 3.26). Это понятно: жидкость как среда с большей, чем у газа, диэлектрической постоянной притягивается к наэлектризованному телу, что и создает в отношении пузырьков как бы выталкивающую силу, аналогичную архимедовой силе.

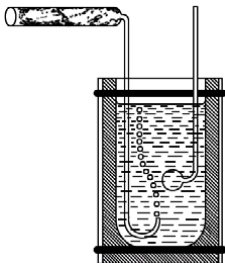


Рис. 3.26. Газовые пузырьки в жидкостях отталкиваются от наэлектризованного тела

Немаловажную роль в явлениях природы играет электризация тел при их размельчении, диспергировании. Русский ученый Н.А. Гезехус (1901 г.) обнаружил, что во множестве случаев пыль, скользящая по поверхности тела, из которого она образовалась, электризуется отрицательно. Это можно проследить, царапая мрамор, гипс, эбонит, сухое дерево и т.п. Снежинки, поднимаемые ветром, также заряжаются отрицательно. Отрицательно заряжаются и брызги воды. Когда порывы ветра сообщают капелькам в облаках большую скорость и этим вызывают отделение от больших капелек мельчайших брызг, то облако мельчайших брызг оказывается заряженным отрицательно, а облака, которые составлены из более крупных капель, заряжаются положительно.

Более поздние экспериментальные исследования выявили ограниченную применимость правила Гезехуса; при диспергировании некоторых веществ (и в определенных условиях даже воды) мельчайшие брызги и пыль иногда заряжаются – в противоречии с правилом Гезехуса – положительно.

Основные выводы

Диполь состоит из двух точечных зарядов q , равных по величине и противоположных по знаку, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния r от центра диполя до точки наблюдения. Электрический момент диполя равен $\mathbf{p} = ql\mathbf{l}$, где вектор \mathbf{l} проведен от отрицательного заряда диполя к положительному.

В электрическом поле на диполь действует момент силы

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}, \mathbf{E}].$$

В неоднородном электрическом поле диполь втягивается в область более сильного поля с силой

$$F_x = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением векторов \mathbf{p} и \mathbf{E} .

Диэлектрики – вещества, плохо проводящие электрический ток по сравнению с проводниками из-за малой концентрации подвижных зарядов. Под действием внешнего электрического поля в диэлектрике происходит поляризация (разделение) зарядов и возникает дополнительное к внешнему электрическое поле.

Дипольный момент единицы объема диэлектрика – вектор поляризации или поляризованность \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \frac{1}{\Delta V} \int_{(\Delta V)} \mathbf{P}_{\text{cp}} dV.$$

Здесь \mathbf{p}_i – дипольный момент i -й молекулы (атома); N – число молекул (атомов) в объеме ΔV ; \mathbf{P}_{cp} – средний дипольный момент в объеме dV .

Вектор поляризации (поляризованность) связан с плотностью поляризационного заряда в диэлектрике $\rho(r)$ соотношением

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_{\text{пол}}.$$

В объеме однородного диэлектрика поляризационные заряды взаимно компенсируются, и заряд остается некомпенсированным только на поверхности диэлектрика, при этом выполняется соотношение

$$\sigma_{\text{пол}} = (\mathbf{P}, \mathbf{n}).$$

Для большинства диэлектриков в широком интервале напряженностей полей имеет место линейная зависимость \mathbf{P} от \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}.$$

Коэффициент пропорциональности κ называют диэлектрической восприимчивостью. Напряженность \mathbf{E} среднего макроскопического поля в диэлектрике связана с напряженностью \mathbf{E}_0 внешнего поля соотношениями

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}.$$

Величина $\varepsilon = 1 + \kappa$ называется относительной диэлектрической проницаемостью среды. В вакууме $\kappa = 0$ и $\varepsilon = 1$. Для любого диэлектрика $\varepsilon > 1$. Сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов в безграничном диэлектрике в ε раз меньше, чем в вакууме. Для описания электрических полей в пространстве, содержащем диэлектрик, удобно пользоваться вектором электрической индукции

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Линии электрической индукции \mathbf{D} , в отличие от силовых линий \mathbf{E} , не прерываются на границе диэлектриков.

Напряженность локального поля для неполярных жидкостей и кубических кристаллов определяется суммой полей от внешних источников \mathbf{E} и полей от диполей внутри образца $\sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i$:

$$\mathbf{E}_{\text{лок}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}, \quad \mathbf{E}_{\text{лок}} = \frac{\varepsilon + 2}{3} \mathbf{E}.$$

Поляризуемость атомов, ионов и молекул – способность этих частиц приобретать электрический дипольный момент \mathbf{p} в электрическом поле \mathbf{E} . В относительно слабых электрических полях

$$\mathbf{p} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Коэффициент α называется поляризуемостью молекулы (атома). В однородном диэлектрике

$$\kappa = \alpha N,$$

где N – число диполей в единице объема.

Полная поляризуемость α включает в себя три части: электронную, ионную, ориентационную (дипольную).

Электронная поляризуемость обусловлена смещением электронной оболочки атома относительно ядра.

Ионная поляризуемость вызвана смещением ионов одного знака по отношению к ионам другого знака.

Ориентационная (дипольная) поляризуемость обусловлена ориентацией полярных молекул во внешнем электрическом поле.

В сегнетоэлектриках электрический дипольный момент существует даже в отсутствие внешнего электрического поля, поскольку центр положительных зарядов всего кристалла или отдельной его области – домена – не совпадает с центром отрицательных зарядов.

Диэлектрики широко используются как изоляционные материалы, преобразователи механических колебаний в электрические и, наоборот, в лазерах и квантовых усилителях.

Упражнения

1. Указать, какими типами поляризации (электронной – е, атомной – а, ориентационной – о) обладают следующие атомы и молекулы: 1) Н; 2) He; 3) O₂; 4) HCl; 5) H₂O; 6) CO; 7) CO₂; 8) CH₃; 9) CCl₄. Ответ: 1) е; 2) е; 3) е; 4) е, а, о; 5) е, а, о; 6) е, а, о; 7) е, а; 8) е, а, о; 9) е, а.

2. Молекула HF обладает электрическим моментом $p = 6,4 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Межъядерное расстояние $d = 92$ пм. Найти заряд q такого диполя и объяснить, почему найденное значение q существенно отличается от значения элементарного заряда $|e|$.

Ответ: $0,695 \cdot 10^{-19}$ Кл, $q/|e| = 0,434$. Электронное облако вблизи протона лишь частично смещается к ядру атома F.

3. Пространство между плоскими разноименно заряженными пластинами заполнено диэлектриком, молекулы которого можно рассматривать как жесткие диполи с электрическим моментом $p = 2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Концентрация N диполей равна 10^{26} м⁻³. Определить напряженность E среднего макроскопического поля в таком диэлектрике, если при отсутствии диэлектрика напряженность E_0 поля между пластинами была равна 10^8 В/м. Дезориентирующим действием теплового движения молекул пренебречь. Ответ: 77,4 МВ/м.

4. В электрическое поле напряженностью $E_0 = 10^6$ В/м внесли пластину диэлектрика ($\epsilon = 3$). Определить напряженность $E_{\text{лок}}$ локального поля, действующего на отдельную молекулу в диэлектрике.

Ответ: 555 кВ/м.

5. При какой поляризованности P диэлектрика ($\epsilon = 5$) напряженность $E_{\text{лок}}$ локального поля равна 10^7 В/м? Ответ: 152 мкКл/м².

6. Определить, при какой напряженности E среднего макроскопического поля в диэлектрике ($\epsilon = 3$) поляризованность P достигнет значения, равного 200 мкКл/м².

Ответ: 11,3 МВ/м.

7. Определить поляризованность P стекла, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью $E_0 = 5$ МВ/м.
Ответ: $37,9$ мкКл/м².

8. Связь поляризуемости α с диэлектрической восприимчивостью χ для неполярных жидкостей и кристаллов кубической сингонии задается выражением $\chi/(\chi + 3) = \alpha N/3$, где N – концентрация молекул. При каком наибольшем значении χ погрешность в вычислении α не будет превышать 1%, если воспользоваться приближенной формулой $\chi \approx \alpha N$?

Ответ: $\chi \leq 0,03$.

9. При каком наибольшем значении произведения αN формула Клаузиуса – Моссоги $(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2) = \alpha N/3$ может быть заменена более простой $\epsilon = 1 + \alpha N$ при условии, что погрешность в вычислении ϵ не превысит 1%?

Ответ: $\alpha N \leq 0,183$.

10. Определить поляризуемость α молекул азота, если относительная диэлектрическая проницаемость ϵ жидкого азота равна 1,445 и его плотность $\rho = 804$ кг/м³.

Ответ: $2,24 \cdot 10^{-29}$ м³.

11. Поляризуемость α молекулы водорода можно принять равной $1,0 \cdot 10^{-29}$ м³. Определить диэлектрическую восприимчивость χ водорода для двух состояний: 1) газообразного при нормальных условиях; 2) жидкого, плотность ρ которого равна $70,8$ кг/м³.

Ответ: 1) $2,7 \cdot 10^{-4}$; 2) $0,23$.

12. Вычислить ориентационную поляризуемость $\alpha_{ор}$ молекулы воды при температуре $t = 27$ °С, если электрический момент p молекулы воды равен $6,1 \cdot 10^{-30}$ Кл·м.

Ответ: $3,38 \cdot 10^{-28}$ м³.

13. Зная, что показатель преломления n водяных паров при нормальных условиях равен 1,000252 и что молекула воды обладает электрическим моментом $p = 6,1 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, определить, какую долю от общей поляризуемости (электронной и ориентационной) составляет электронная поляризуемость молекулы.

Ответ: $0,046$.

Задачи

1. Эбонитовая плоскопараллельная пластина помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E_0 = 2$ МВ/м. Грани пластины перпендикулярны линиям напряженности. Определить поверхностную плотность σ' связанных зарядов на гранях пластины.

Ответ: $\pm 11,8$ мкКл/м².

2. При какой максимальной диэлектрической проницаемости ϵ погрешность при замене напряженности $E_{\text{лок}}$ локального поля напряженностью E_0 внешнего поля не превысит 1%?

Ответ: 1,015.

3. Определить относительную погрешность, которая будет допущена, если вместо напряженности $E_{\text{лок}}$ локального поля брать напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике. Расчеты выполнить для двух случаев: 1) $\epsilon = 1,003$; 2) $\epsilon = 2$.

Ответ: 1) 0,1%; 2) 25%.

4. Во внешнем электрическом поле напряженностью $E_0 = 40$ МВ/м поляризованность P жидкого азота оказалась равной 109 мкКл/м². Определить: 1) диэлектрическую проницаемость ϵ жидкого азота; 2) индуцированный электрический момент одной молекулы. Плотность ρ жидкого азота принять равной 804 кг/м³.

Ответ: 1) 1,44; 2) $6,5 \cdot 10^{-4}$ Кл·м.

5. Определить поляризуемость α атомов углерода в алмазе. Диэлектрическая проницаемость ϵ алмаза равна 5,6, плотность $\rho = 3,5 \cdot 10^3$ кг/м³. Ответ: $1,04 \cdot 10^{-29}$ м³.

6. Показатель преломления n газообразного кислорода при нормальных условиях равен 1,000272. Определить электронную поляризуемость α_e молекулы кислорода.

Ответ: $2,02 \cdot 10^{-29}$ м³.

7. Показатель преломления n газообразного хлора при нормальных условиях равен 1,000768. Определить диэлектрическую проницаемость ϵ жидкого хлора, плотность ρ которого равна $1,56 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ответ: 2,02.

8. При нормальных условиях показатель преломления n углекислого газа CO_2 равен 1,00045. Определить диэлектрическую проницаемость ϵ жидкого CO_2 , если его плотность $\rho = 1,19 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ответ: 2,14.

9. Показатель преломления n жидкого сероуглерода CS_2 равен 1,62. Определить электронную поляризуемость α_e молекул сероуглерода, зная его плотность.

Ответ: $1,05 \cdot 10^{-28}$ м³.

10. Электрический момент p молекул диэлектрика равен $5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Диэлектрик ($\epsilon = 2$) помещен в электрическое поле напряженностью $E_{\text{лок}} = 10^8$ В/м. Определить температуру T , при которой среднее значение проекции $\langle p_E \rangle$ электрического момента на направление вектора $E_{\text{лок}}$ будет равно $0,5p$.

Ответ: 326 К.

11. Диэлектрик, молекулы которого обладают электрическим моментом $p = 5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, находится при температуре $T = 300$ К в электрическом поле напряженностью $E_{\text{лок}} = 10^8$ В/м. Определить, во сколько раз число молекул, ориентированных «по полю» ($0 \leq \theta \leq 1^\circ$), больше числа молекул, ориентированных «против поля» ($179^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$). Угол θ образован векторами \mathbf{p} и $\mathbf{E}_{\text{лок}}$.

Ответ: В 1,27 раза.

12. В некоторой точке изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ электрическая индукция имеет значение \mathbf{D} . Чему равен вектор поляризации \mathbf{P} в этой точке?

Ответ: $\mathbf{P} = (1 - 1/\epsilon)\mathbf{D}$.

13. Имеется две бесконечные параллельные плоскости с поверхностной плотностью зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$. Первоначально они находятся в вакууме. Затем зазор между плоскостями заполняется однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ϵ . Что происходит при этом с: а) напряженностью \mathbf{E} поля в зазоре; б) индукцией \mathbf{D} ; в) разностью потенциалов $\Delta\phi$ между плоскостями?

Ответ: \mathbf{E} и $\Delta\phi$ уменьшатся в ϵ раз, \mathbf{D} не изменится.

14. Стеклянная пластинка с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 6$ внесена в однородное электрическое поле с напряженностью 10 В/м и нормаль пластинки расположена под углом 30° к направлению внешнего поля. Найти напряженность поля в пластинке; угол, который это поле образует с нормалью, а также плотность связанных зарядов, возникших на поверхностях пластинки. Пластинка находится в вакууме.

Ответ: $5,2$ В/м, 74° , 64 пКл/м².

15. В воде электрическое поле напряженностью $E = 1,0$ кВ/см создает поляризацию, эквивалентную ориентации только одной из N молекул. Найти N . Дипольный момент молекулы воды равен $p = 6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м.

Ответ: 3000.

16. Точечный сторонний заряд q находится в центре шара из однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ . Найти вектор поляризации \mathbf{P} как функцию радиус-вектора \mathbf{r}

относительно центра шара, а также связанный заряд q' внутри сферы, радиус которой меньше радиуса шара.

$$\text{Ответ: } \mathbf{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r}, \quad q' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot q.$$

17. Точечный сторонний заряд q находится в центре диэлектрического шара радиусом r_0 с диэлектрической проницаемостью ε_1 . Шар окружен безграничным диэлектриком с проницаемостью ε_2 . Найти поверхностную плотность связанных зарядов на границе раздела этих диэлектриков. Ответ: $\sigma' = \frac{q}{4\pi r_0^2} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$.

18. Круглый диэлектрический диск радиусом r_0 и толщиной d поляризован статически так, что вектор поляризации, равный \mathbf{P} , всюду одинаков и лежит в плоскости диска. Найти напряженность \mathbf{E} электрического поля в центре диска, если $d \ll r_0$.

$$\text{Ответ: } \mathbf{E} = -\mathbf{P}d / (4\varepsilon_0 r_0).$$

19. Внутри шара из однородного изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 5$ создано однородное электрическое поле напряженностью $E = 100$ В/м. Радиус шара $r = 3,0$ см. Найти максимальную поверхностную плотность связанных зарядов и полный связанный заряд одного знака.

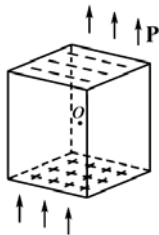
$$\text{Ответ: } 3,5 \text{ нКл/м}^2; 10 \text{ пКл.}$$

20. Бесконечно длинный диэлектрический цилиндр круглого сечения поляризован однородно и статически, причем вектор поляризации \mathbf{P} перпендикулярен оси цилиндра. Найти напряженность электрического поля в диэлектрике.

$$\text{Ответ: } \mathbf{E} = -\mathbf{P} / (2\varepsilon_0).$$

21. Пусть вырезаемая в диэлектрике полость имеет форму куба. На верхней и нижней гранях куба поверхностная плотность зарядов $\sigma = \pm \mathbf{P}$. Найти величину локального поля в центре куба O путем определения вертикальной составляющей поля, создаваемой зарядами одной из граней, разделив ее на полоски шириной dx и интегрируя по всей площади грани.

$$\text{Ответ: } \mathbf{E} = -\mathbf{P} / (3\varepsilon_0).$$



4. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

4.1. Электрическая емкость. Конденсаторы

Емкость, или просто емкость – характеристика проводящего тела, связанная с его способностью накапливать электрический заряд. В силу принципа суперпозиции потенциал тела ϕ растет пропорционально заряду проводника q , если считать потенциал на бесконечности равным нулю. Существует пропорциональность

$$q = C\phi.$$

Коэффициент C называется электрической емкостью уединенного проводника. Численно емкость равна заряду, который необходимо сообщить уединенному проводнику для того, чтобы увеличить его потенциал на единицу,

$$C = \frac{q}{\phi}.$$

Емкость зависит от размеров и формы проводника, диэлектрической проницаемости окружающей среды. Емкость проводника не зависит от проводимости вещества, его агрегатного состояния, величины заряда на проводнике и потенциала проводника. Так, для шара радиусом r в однородном диэлектрике $\phi = q/(4\pi\epsilon_0\epsilon r)$ и емкость равна

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon r.$$

Практически более важным является устройство, называемое конденсатором (лат. *condensator* – тот, кто уплотняет, сгущает). Конденсатор обладает свойством накапливать и удерживать электрический заряд. Почти ни одно электронное устройство не обходится без конденсаторов. Конденсатор состоит из двух металлических обкладок, разделенных слоем диэлектрика (рис. 4.1). Линейные размеры пластин обычно заметно превосходят толщину слоя диэлектрика – расстояние между пластинами. Поскольку пластины располагаются близко одна от другой, то заряды одной пластины будут притягивать к себе заряды другой пластины и равномерно распределяться на внутренней поверхности пластин с поверхностной плотностью $\pm\sigma$. Напряженность поля между пластинами равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0},$$

а вне пластин поле отсутствует $E = 0$.

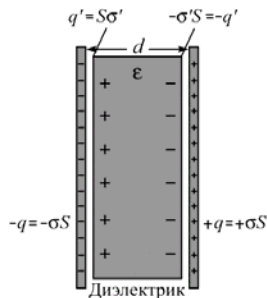


Рис. 4.1. Плоский конденсатор с диэлектриком между пластинами. Появление индуцированного заряда $q' = \sigma'S$ на диэлектрической пластине, помещенной между обкладками конденсатора, уменьшает напряженность поля E , разность потенциалов $\Delta\phi$ между обкладками и приводит к увеличению емкости конденсатора $C = q/\Delta\phi$. S – площадь пластины

Разность потенциалов между пластинами $\Delta\phi$ пропорциональна заряду на обкладках конденсатора q :

$$\phi_1 - \phi_2 = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} d = \frac{\sigma S}{\epsilon\epsilon_0 S} d = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S} = \frac{q}{C}, \quad C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}.$$

Здесь d – расстояние между пластинами; S – площадь пластины; $q = \sigma S$ – полный заряд на одной из обкладок конденсатора.

Величина C не зависит от q и $\Delta\phi$, а определяется размерами и устройством конденсатора и называется емкостью конденсатора:

$$C = \frac{q}{\Delta\phi}.$$

Численно емкость конденсатора равна заряду одной из обкладок при разности потенциалов между ними, равной единице. Емкость плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных пластин, разделенных диэлектриком, равна

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}.$$

Во всякой системе единиц за единицу емкости принимается емкость такого конденсатора, который при единичном заряде приобретает единичную разность потенциалов. В системе СИ единицей емкости является Фарада:

$$1 \text{ Ф} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}}.$$

В этом случае величину ϵ_0 можно выразить в фарадах на метр:

$$[\epsilon_0] = \frac{1 \text{ Ф}}{1 \text{ м}}.$$

Емкостью в одну фараду обладает уединенный шар с радиусом $9 \cdot 10^9$ м (радиус Солнца $6,45 \cdot 10^8$ м). Это очень большая емкость. Типичные емкости конденсаторов составляют от 10^{-12} Ф = 1 пФ (пикофарада) до миллифарад. Пара обкладок площадью 1 см^2 с промежутком 1 мм имеет емкость примерно 1 пФ. Широко распространена единица емкости микрофарада $1 \text{ мкФ} = 10^{-6}$ Ф, $1 \text{ пФ} = 10^{-6}$ мкФ.

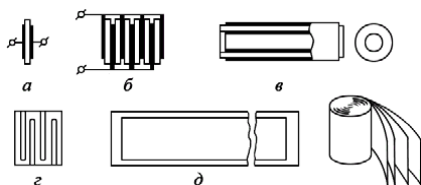


Рис. 4.2. Устройство конденсаторов

При изготовлении конденсаторов используют несколько базовых конструкций (рис. 4.2). В простейшем случае это плоский конденсатор – две плоские металлические обкладки, разделенные диэлектриком (а), или плоский многослойный конденсатор, содержащий n обкладок, соединенных параллельно (б). Эти две конструкции чаще применяются в конденсаторах с неорганическими диэлектриками. Кроме них, в керамических конденсаторах используются еще две конструкции – цилиндрическая и многосекционная (в, з). В конденсаторах с органическими диэлектриками базовой конструкцией является спиральный конденсатор (д), в котором обкладки и диэлектрики представляют собой ленты, скручиваемые спиралью. Эта же конструкция часто применяется в конденсаторах с оксидным диэлектриком. В них диэлектриком служит тонкая оксидная пленка, которая наносится на одну из обкладок (анод) электролитическим путем. Объемно-пористый анод различной формы получается спеканием металлического порошка (алюминий, ниобий, тантал). В результате анод имеет большую эффективную поверхность, отделенную от второй обкладки тонкой изолирующей оксидной пленкой, что определяет большую емкость оксидно-электролитических конденсаторов. В качестве второй обкладки используют жидкий или пастообразный электролит, проникающий в поры анода.

В подстроечных конденсаторах (конденсаторах переменной емкости) применяются дисковые, пластинчатые и цилиндрические конструкции, а диэлектриком в них служит конденсаторная керамика или воздух (рис. 4.3).

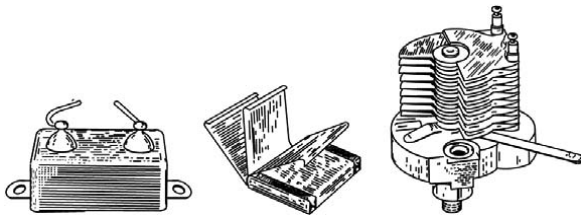


Рис. 4.3. Технический бумажный конденсатор и радиотехнический конденсатор переменной емкости

В качестве конденсаторов часто используются электрически управляемые конденсаторы (вариконды), а также полупроводниковые транзисторы и диоды с запертыми $p-n$ переходами.

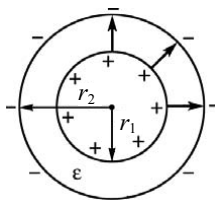
Любой конденсатор при достаточном увеличении напряжения пробивается (происходит разряд между обкладками). Пробивное напряжение определяется электрической прочностью диэлектрика конденсатора в конкретных условиях эксплуатации.

Рассчитаем емкость шарового конденсатора, обкладками которого служат сферы радиусами r_1 и r_2 (рис. 4.4). Промежуток между сферами заполнен диэлектриком.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Рис. 4.4. Шаровой конденсатор, состоящий из двух концентрических сфер радиусом r_1 и r_2 . Промежуток между сферами заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ . Емкость шарового конденсатора

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$



Соответственно, по определению, находим емкость шарового конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon}{1/r_1 - 1/r_2} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \cdot \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Пусть расстояние между сферами $d = r_2 - r_1$ мало по сравнению с радиусами $d \ll r_1, r_2$. Поскольку $4\pi r_1 r_2 \approx S$ – площадь поверхности сферы, то формула для емкости шарового конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

практически совпадает с выражением для емкости плоского конденсатора.

Если конденсатор представляет собой два коаксиальных цилиндра радиусами r_1 и r_2 и высотой L , то емкость цилиндрического конденсатора (рис. 4.5) можно опять определить по разности потенциалов между цилиндрами:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon L} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon L} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

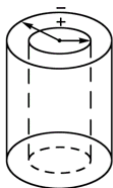


Рис. 4.5. Цилиндрический конденсатор, состоящий из двух коаксиальных цилиндров радиусами r_1 и r_2 с диэлектрической прослойкой между ними

Емкость цилиндрического конденсатора равна

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon L}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Найдем емкость в пикофарадах ($1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$) метрового отрезка коаксиального кабеля с диаметром центрального проводника 1 мм и диаметром оплетки 5 мм, если между его центральным проводником и оплеткой находится вакуум.

Емкость на метр длины равна

$$C_l = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)},$$

где $b/a = 5$ – отношение диаметра оплетки к диаметру центрального проводника. Подставляя числовые значения, получаем

$$C_l = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{\ln 5} = 34,5 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} = 34,5 \text{ пФ/м}.$$

Таким образом, метровый отрезок кабеля, если между его центральным проводником и оплеткой находится вакуум, имеет емкость 34,5 пФ. Обычно в кабелях между проводниками поме-

цена полиэтиленовая прослойка. В таком случае полученный выше результат нужно умножить на диэлектрическую проницаемость полиэтилена, которая равна 2,3; тогда $C_l = 79,4$ пФ/м.

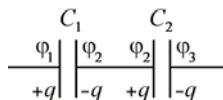
Если расстояние между цилиндрами $r_2 - r_1 = d$ много меньше r_1 и r_2 , то, воспользовавшись разложением $\ln(1+x) \approx x$ при $x \ll 1$, получаем для цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon r L}{d} = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$$

– величину емкости, совпадающую с емкостью плоского конденсатора.

Конденсаторы могут быть соединены в батареи последовательно (рис. 4.6) или параллельно (рис. 4.7).

Рис. 4.6. Последовательное соединение конденсаторов. Емкость батареи конденсаторов C при последовательном соединении определяется соотношением $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$



При последовательном соединении заряды на пластинах одинаковы, а разности потенциалов складываются:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3).$$

В результате можем записать

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_3}{q} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{q} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{q}$$

или

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Полученное соотношение легко обобщается на случай любого числа конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}.$$

Результирующая емкость

$$\frac{1}{C} = \frac{C_i}{1 + \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^n (C_i / C_k)} \leq C_i$$

меньше емкости любого из включенных последовательно в цепь конденсаторов, а напряжение батареи конденсаторов становится равным сумме напряжений каждого из конденсаторов.

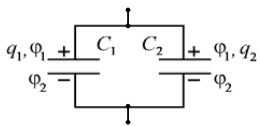


Рис. 4.7. Параллельное соединение конденсаторов. Емкость батареи C при параллельном соединении n конденсаторов равна $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

При параллельном соединении конденсаторов потенциалы обкладок конденсаторов равны, а заряд равен сумме зарядов на обкладках всех конденсаторов:

$$q = q_1 + q_2,$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Разделив первое равенство на $\Delta\varphi$, получим

$$C = \frac{q_1}{\Delta\varphi} + \frac{q_2}{\Delta\varphi} = C_1 + C_2,$$

при параллельном соединении электрическая емкость батареи равна сумме емкостей конденсаторов, её составляющих. Это справедливо для любого количества соединенных параллельно конденсаторов:

$$C = \sum_{k=1}^n C_k .$$

Конденсаторы применяются в электрических цепях как устройства, способные поглощать или выделять большие количества заряда. Конденсатор используется для получения определенных изменений в напряжении при изменении заряда. Конденсатор служит электрическим аналогом интегрирующего элемента. Конденсаторы применяются в измерительных целях, например в качестве емкостных датчиков. Конденсатор является одним из основных элементов колебательного контура – устройства для получения, передачи и приема переменного электромагнитного поля. С целью управления резонансной частотой такого контура в нем используются конденсаторы переменной емкости (рис. 4.3).

4.2. Энергия взаимодействия электрических зарядов

При перемещении электрических зарядов силы кулоновского взаимодействия совершают определенную работу δA . Работа, совершенная системой, определяется убылью потенциальной энергии взаимодействия $-dU$ зарядов

$$\delta A = -dU.$$

Изменение энергии взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии r_{12} , численно равно работе по перемещению заряда q_1 в поле неподвижного заряда q_2 из точки с потенциалом $\varphi_1 = q_2/(4\pi\epsilon_0 r_{12})$ в точку с потенциалом $\varphi_1 + d\varphi_1$:

$$\delta A = -q_1 d\varphi_1 = -d\left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\right) = -dU,$$

откуда энергия взаимодействия двух зарядов

$$U = q_1 \varphi_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + U_0.$$

Будем считать аддитивную постоянную U_0 равной нулю. В этом случае U может быть и отрицательной величиной, если q_1 и q_2 – заряды противоположного знака.

Аналогично можно рассчитать энергию двух зарядов, рассмотрев перемещение заряда q_2 в поле неподвижного заряда q_1 из точки с потенциалом $\varphi_2 = q_1/(4\pi\epsilon_0 r_{12})$ в точку с потенциалом $\varphi_2 + d\varphi_2$:

$$\delta A = -q_2 d\varphi_2 = -d\left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\right) = -dU,$$

$$U = q_2 \varphi_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Удобно записать энергию взаимодействия двух зарядов в симметричной форме

$$U = \frac{1}{2}(q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2).$$

Для системы из n точечных зарядов в силу принципа суперпозиции для потенциала в точке нахождения k -го заряда можно записать (рис. 4.8):

$$\varphi_k = (\varphi_{k,1} + \varphi_{k,2} + \dots + \varphi_{k,k-1} + \varphi_{k,k+1} + \dots + \varphi_{k,n}).$$

Здесь φ_{ki} – потенциал i -го заряда в точке расположения k -го заряда. В сумме исключен потенциал $\varphi_{k,k}$, т.е. не учитывается воздействие заряда самого на себя, равное для точечного заряда бесконечности. Взаимная энергия системы n зарядов тогда равна

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n \frac{q_k q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{kj}} \quad (k \neq j).$$

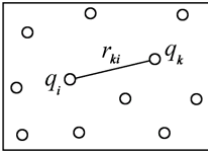


Рис. 4.8. Энергия взаимодействия системы n точечных зарядов может быть записана в симметричной форме:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^n \frac{q_k q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ki}} \quad (k \neq i)$$

Множитель $1/2$ перед знаком суммы учитывает тот факт, что в эту сумму энергии каждой пары зарядов входит дважды, например, в виде равных слагаемых

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad \text{и} \quad \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{21}}.$$

Данная формула справедлива лишь в случае, если расстояние между зарядами заметно превосходит размеры самих зарядов.

Полученное выражение может быть обобщено и на случай непрерывного распределения зарядов по объему V с плотностью ρ и по поверхности S с плотностью σ в точках пространства с потенциалом φ :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k \rho_k \Delta V_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k \sigma_k \Delta S_k.$$

Выполнив предельный переход ($n \rightarrow \infty$, $\Delta V_k, \Delta S_k \rightarrow 0$), получаем

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \int \varphi \sigma dS.$$

В последней формуле, в отличие от ее дискретного аналога, не учитывающего самодействие, введено представление о непрерывном распределении всех зарядов по пространству и учтена тем самым собственная энергия зарядов.

Рассмотрим энергии различных систем зарядов. Пусть имеется система неподвижных зарядов, создающих поле с потенциалом φ в точке пространства с координатой r , где находится точечный заряд q . Взаимная энергия внешних зарядов не изменяется, а переменная часть энергии поля, за счет которой совершается

работа электрических сил, называется энергией точечного заряда q во внешнем поле. По определению, она равна

$$U(r) = q\varphi(r),$$

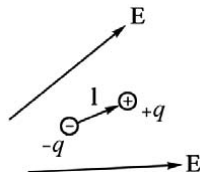
где $\varphi(r)$ – потенциал внешнего поля в точке, занимаемой зарядом q .

Найдем энергию двух разноименных близкорасположенных зарядов $+q$ и $-q$ во внешнем поле, т.е. энергию диполя (рис. 4.9). В силу принципа суперпозиции имеем

$$U = q\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - q\varphi(\mathbf{r}) \approx q \frac{\partial \varphi}{\partial l} \mathbf{l} = q \mathbf{l} \cdot \text{grad} \varphi = -(\mathbf{p}, \mathbf{E}).$$

Здесь $\mathbf{p} = \mathbf{l}q$ – дипольный момент; $\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi$ – напряженность электрического поля.

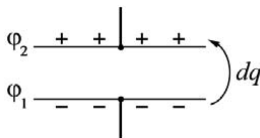
Рис. 4.9. Энергия диполя во внешнем электрическом поле равна $U = -(\mathbf{p}, \mathbf{E})$, где \mathbf{p} – дипольный момент; \mathbf{E} – напряженность поля



Рассчитаем энергию конденсатора. Конденсатор состоит из двух, первоначально незаряженных, пластин. Будем постепенно отнимать у нижней пластины заряд dq и переносить его на верхнюю пластину (рис. 4.10). В результате между пластинами возникнет разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$. При переносе каждой порции заряда совершается элементарная работа

$$\delta A = dq(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Рис. 4.10. Заряд dq переносится с нижней пластины на верхнюю в плоском конденсаторе. При этом совершается работа



$\delta A = dq(\varphi_2 - \varphi_1)$. В результате конденсатор запасает энергию $U = \frac{1}{2} C (\varphi_2 - \varphi_1)^2$

Воспользовавшись определением емкости

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1},$$

получаем

$$\delta A = \frac{q dq}{C}.$$

Общая работа, затраченная на увеличение заряда пластин конденсатора от 0 до q , равна

$$A = \int_0^q \delta A = \int_0^q \frac{q dq}{C} = \frac{q^2}{2C}.$$

При вычислении интеграла учтено, что емкость C не зависит от q и φ . Величина полной работы A равна энергии, запасенной конденсатором:

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q(\varphi_2 - \varphi_1)}{2}.$$

Эту энергию можно также записать в виде

$$U = \frac{1}{2} C (\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

Запасание энергии конденсатором наглядно проявляется при его подключении к электрической лампочке. Лампочка вспыхивает и гаснет при разрядке конденсатора (рис. 4.11).

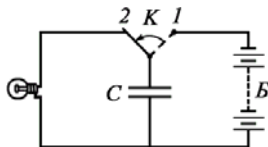


Рис. 4.11. При разрядке конденсатора через электрическую лампочку его энергия превращается в тепло

Полученное для U соотношение позволяет рассчитать энергию равномерно заряженной сферы, емкость которой по отношению к бесконечности ($r_2 = \infty$) равна

$$C = 4\pi\epsilon_0 r.$$

Соответственно

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

То же соотношение следует и из общей формулы

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi \sigma dS.$$

Поскольку в случае равномерно заряженной по поверхности сферы потенциал ее поверхности постоянен $\varphi = \text{const}$, а $\int \sigma dS = q$ есть полный заряд поверхности, то получаем

$$U = \frac{q\varphi}{2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Воспользовавшись этой формулой, рассчитаем энергию, обусловленную зарядом элементарной частицы. Предположим, что радиус электрона равен радиусу протона, 10^{-15} м, и что заряд электрона ($|q_e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл) сосредоточен на его поверхности. Найдем в этом случае потенциальную энергию системы и релятивистскую массу, соответствующую этой энергии. Воспользуемся полученной формулой для энергии заряженной сферы ($1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ М/Ф)

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_e^2}{2r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 10^{-15}} = 1,15 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 0,72 \text{ МэВ.}$$

Эквивалентная масса равна

$$m = \frac{U}{c^2} = \frac{1,15 \cdot 10^{-13}}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 1,3 \cdot 10^{-30} \text{ кг.}$$

Заметим, что даже эта величина превышает значение полученной из опыта массы электрона $0,91 \cdot 10^{-30}$ кг. Последние эксперименты показывают, что радиус электрона, по крайней мере, в 10^3 раз меньше, чем 10^{-15} м. Следовательно, масса покоя электрона должна быть в 10^3 раз больше измеренной на опыте. Это серьезное расхождение является одной из нерешенных фундаментальных проблем, на которые физика в настоящее время не может дать ответ.

Потенциал электростатического поля внутри равномерно заряженного по объему шара с плотностью заряда ρ , радиусом r_0 и диэлектрической проницаемостью среды ϵ

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0\epsilon r_0^3} (3r_0^2 - r^2), \quad r \leq r_0,$$

потенциал на поверхности шара принят равным нулю, $\varphi(r_0) = 0$.

Энергия равномерно заряженного по объему шара

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{r_0} \rho \varphi(r) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho^2 r_0^5}{15\epsilon_0\epsilon} = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_0}$$

Энергия пропорциональна квадрату полного заряда $q = (4/3)\pi r_0^3 \rho$ и обратно пропорциональна радиусу шара. Если рассчитать массу электрона, обусловленную объемным зарядом,

получим еще большую массу $m = 1,536 \cdot 10^{-30}$ кг, чем в случае заряженной сферической поверхности.

Используя понятие энергии электрического поля, удастся решить очень сложные задачи, не вникая в детали явления.

Рассмотрим диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , который частично размещен между обкладками подключенного к источнику ЭДС конденсатора. При внесении в пространство между обкладками конденсатора диэлектрика энергия всей системы будет понижаться, что приведет к возникновению силы, стягивающей диэлектрик в конденсатор (рис. 4.12).

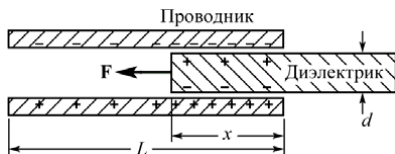


Рис. 4.12. Сила, действующая на диэлектрик в плоском конденсаторе, может быть вычислена с помощью закона сохранения энергии

Такой захват связан с неоднородностями поля вблизи концов пластин конденсатора.

Из закона сохранения энергии следует, что работа силы F_x , стягивающей диэлектрик в конденсатор, совершается за счет убыли энергии системы

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

$$\text{Для конденсатора } U = \frac{\Delta\phi^2 C}{2}.$$

Имеем для силы, стягивающей диэлектрик в направлении x ($\Delta\phi = \text{const}$),

$$F_x = -\frac{\Delta\phi^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}.$$

Если диэлектрик толщиной d , втнут на расстояние x , то весь конденсатор можно представить как состоящий из двух параллельно соединенных конденсаторов длиной $L - x$ без диэлектрика и длиной x с диэлектриком. Полная емкость такого конденсатора

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{L-x}{L} + \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} \frac{x}{L} = \frac{\epsilon_0 S}{L \cdot d} [L + (\epsilon - 1)x].$$

При постоянной разности потенциалов, поддерживаемой на обкладках конденсатора, величина силы, стягивающей диэлектрик, равна

$$F_x = \frac{\Delta\varphi^2}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{L \cdot d} (\varepsilon - 1).$$

В качестве еще одного примера использования понятия энергии, запасенной в конденсаторе, рассмотрим процессы, происходящие при изменении геометрии конденсатора – раздвижении пластин.

Плоский воздушный конденсатор с площадью пластины $S = 500 \text{ см}^2$ подключен к источнику тока, ЭДС $\mathcal{E} = 300 \text{ В}$. Вычислим работу A внешних сил по раздвижению пластин от расстояния $d_1 = 1 \text{ см}$ до $d_2 = 3 \text{ см}$ в двух случаях: 1) пластины перед раздвижением отключаются от источника тока; 2) пластины в процессе раздвижения остаются подключенными к нему.

В первом случае система является изолированной ($q = \text{const}$), и в ней выполняется закон сохранения энергии. Работа внешних сил равна изменению энергии конденсатора

$$A = \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right),$$

где U_2 – энергия поля конденсатора в конечном состоянии (пластины находятся на расстоянии d_2); U_1 – энергия поля в начальном состоянии (пластины находятся на расстоянии d_1).

Заряд пластин, отключенных от источника при их раздвижении, не изменяется. По определению, $q = C_1 \cdot \mathcal{E}$, и, соответственно, $C_1 = \varepsilon_0 S/d_1$ и $C_2 = \varepsilon_0 S/d_2$. Тогда величина совершенной работы

$$A = \frac{\varepsilon_0 S \mathcal{E}^2}{2d_1} \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right) = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,05 \cdot 300^2}{2 \cdot 10^{-2}} \left(\frac{3}{1} - 1 \right) = 3,98 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

Во втором случае если пластины остаются подключенными к источнику тока, то конденсатор не является изолированной системой и заряд с пластин при их раздвижении перемещается к клеммам батареи. В этом случае при раздвижении пластин остается неизменной разность потенциалов ($\Delta\varphi = \mathcal{E}$), а емкость будет уменьшаться ($C = \varepsilon_0 S/d$). Будут уменьшаться заряд на пластинах ($q = C\Delta\varphi = C\mathcal{E}$) и напряженность электрического поля ($E = \Delta\varphi/d = \mathcal{E}/d$). Поскольку величины E и q изменяются, то работу следует вычислять путем интегрирования.

Элементарная работа

$$dA = qE_1 dx,$$

где E_1 – напряженность поля, создаваемого зарядом одной пластины, действующего на заряд q второй пластины. Выразим

напряженность $E_1(x)$ и заряд $q(x)$ через расстояние x между пластинами:

$$E_1(x) = \frac{1}{2} E(x) = \frac{E}{2x} \quad \text{и} \quad q(x) = C(x), \quad \text{или} \quad q(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{x} E.$$

Подставим E_1 и q в выражение для dA :

$$dA = \frac{\varepsilon_0 S E^2}{2} \cdot \frac{dx}{x^2}.$$

Проинтегрируем dA в пределах от d_1 до d_2 :

$$A = \frac{\varepsilon_0 S E^2}{2} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{\varepsilon_0 S E^2}{2} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{d_1}^{d_2} = \frac{\varepsilon_0 S E^2}{2} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) \approx 1,33 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

– для раздвижения пластин конденсатора, неподключенного к источнику ЭДС, необходимо совершить большую работу, чем для подключенного к источнику ЭДС, поскольку во втором случае с увеличением расстояния между пластинами одновременно уменьшается заряд на обкладках конденсатора.

4.3. Энергия в электрическом поле

Полученное выражение для энергии системы непрерывно распределенных зарядов включает плотности зарядов и локальные потенциалы:

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \int \varphi \sigma dS.$$

Величины ρ и φ связаны с напряженностью поля \mathbf{E} и электрической индукции \mathbf{D} , поэтому можно выразить энергию через \mathbf{E} и \mathbf{D} . Для простоты рассмотрим плоский конденсатор, заполненный однородным диэлектриком. В этом случае $\rho = 0$ – свободные заряды между обкладками конденсатора отсутствуют. Имеем для плоского конденсатора (рис. 4.13)

$$\varphi = Ed.$$

Кроме того, учитывая, что для бесконечной заряженной плоскости $D_n = \sigma/2$,

$$q = \sigma S = 2D_n S.$$

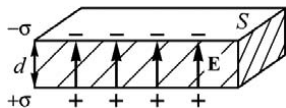


Рис. 4.13. Энергию системы зарядов можно выразить через напряженность электрического поля: $U = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} \cdot d \cdot S$

$$U = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} \cdot d \cdot S$$

Подставим эти соотношения в формулу для U :

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi dq = V \int (\mathbf{E}, d\mathbf{D}).$$

Здесь $V = S \cdot d$ – объем пространства, занятый электрическим полем, если пренебречь краевыми эффектами в конденсаторе. В результате находим плотность энергии электрического поля

$$w = \frac{U}{V} = \int (\mathbf{E}, d\mathbf{D}).$$

Полная энергия электрического поля

$$U = \int (\mathbf{E}, d\mathbf{D}) dV.$$

Это выражение является наиболее общим, поскольку не предполагает линейной связи между \mathbf{E} и \mathbf{D} .

Если выполняется соотношение $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$, то интегрирование легко выполняется

$$w = \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{D})}{2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2}.$$

Полученные соотношения справедливы для конденсатора произвольной формы, поскольку он может быть разбит эквипотенциальными поверхностями на батарею бесконечно тонких, последовательно соединенных емкостей, для каждой из которых справедливо полученное нами соотношение. Полная энергия системы равна сумме энергий в каждой из емкостей, так как поле вне обкладок конденсатора равно нулю. В этом случае полная энергия равна

$$U = \int_{(V)} w dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} (\mathbf{E}, \mathbf{D}) dV,$$

где V – объем, занятый электрическим полем.

Выражения для энергии поля через заряды и потенциалы или через индукцию и напряженность поля эквивалентны, но наполнены

различным физическим содержанием. Соотношение $U = \frac{1}{2} \int \varphi dq$

соответствует более теории действия на расстоянии – дальнего действия (*action in distant*). Величина U выражает общую энергию системы зарядов как сумму потенциальных энергий зарядов dq , находящихся в точках пространства с потенциалом φ . Такое толкование исключает возможность локализации энергии в определенных точках пространства, где нет зарядов.

Соотношение $U = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}, \mathbf{D}) dV$ определяет энергию поля через напряженность и индукцию поля и говорит, что энергия сосредоточена везде, где есть поле с объемной плотностью $w = (\mathbf{E}, \mathbf{D})/2$, и соответствует духу теории близкодействия.

Хотя обе формы записи величины U математически эквивалентны, однако эта эквивалентность имеет место лишь в постоянном электрическом поле. Переходя к переменным полям и электромагнитным волнам, обнаруживаются явления, которые могут быть объяснены только на основе представлений о локализации энергии в электромагнитном поле. Эта энергия излучается в виде электрического и магнитного полей, распространяющихся со скоростью света. И сам свет является частным случаем узкого частотного интервала электромагнитных волн. Как будет показано в дальнейшем (п. 12.5), электромагнитное поле обладает не только энергией, но и импульсом. С наличием импульса у электромагнитного поля связано световое давление, которое, в частности, проявляется в происхождении хвостов комет (рис. 4.14), обращенных от Солнца (И. Кеплер, 1619 г.). Давление света наряду с давлением газа обеспечивает стабильность звезд, противодействуя силе гравитации (Ч. 1, п. 8.7). Впервые экспериментально давление света было изучено П.Н. Лебедевым в 1900 г. (см. п. 12.5). Поэтому представление о локализации энергии в электрическом поле даже в электростатике является предпочтительным.

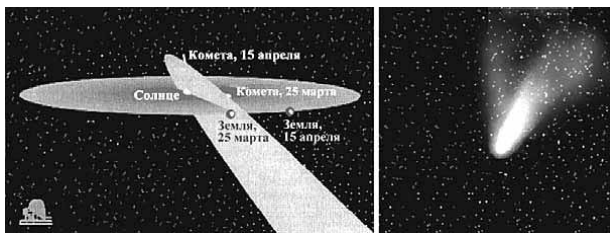


Рис. 4.14. Наличие хвостов у комет объясняется давлением света, испускаемого Солнцем, и локализацией энергии электромагнитного излучения в электромагнитном поле

Отметим также еще одно различие выражений для энергии в виде $U = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{ik}}$, ($i \neq k$) и $U = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}, \mathbf{D}) dV$.

В первом случае величина U может быть как положительной, так и отрицательной, в то время как во втором случае U – положительно определенная величина. Это связано с тем, что в случае представления о точечных зарядах взаимодействуют только различные заряды, сам с собой заряд не взаимодействует. Если в выражении для U в первом случае фигурирует лишь один заряд, то выражение для U обращается в нуль. Во втором случае представление о неточечности заряда позволяет взаимодействовать его частям между собой с положительным вкладом от слагаемых типа $\frac{dq_i dq_k}{4\pi\epsilon_0 r_{ik}}$, где dq_i, dq_k – заряды одного знака, дающие положительный вклад в интеграл для энергии. Соответственно этому формула $U = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}, \mathbf{D}) dV$ определяет полную электрическую энергию зарядов, а соотношение $U = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{ik}}$, ($i \neq k$) – только их взаимную потенциальную энергию.

Напряженность поля отдельного точечного заряда равна

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Плотность энергии, создаваемой им на расстоянии r

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}.$$

Полная энергия одного точечного заряда вычисляется путем интегрированием по всему объему поля

$$U = \int_{r=0}^{\infty} w dV = \int_{r=0}^{\infty} \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r=0}^{r=\infty} \rightarrow \infty$$

Таким образом, поле одного истинно точечного заряда должно содержать бесконечно много энергии. Поэтому, говоря о бесконечно малых зарядах dq_1 и dq_2 , представляющих части одного распределенного заряда, надо подразумевать, что эти распределенные заряды включают в себя большое количество истинно точечных зарядов (электронов), но не являются частями истинно точечного заряда – электрона. Представление о том, что энергия сосредоточена в поле, не согласуется с предположением о существовании точечных зарядов. Возможно, что на самом деле элементарные заряды не являются точечными, а представляют небольшие пространственные распределения. Может быть, неправильность связана с применением макроскопической теории электричества к очень малым расстояниям, хотя эта теория неплохо работает вплоть до внутриядерных масштабов $\approx 10^{-13}$ см.

Действительно, эксперименты, выполненные по определению возбужденных состояний в ядрах V^{11} и C^{11} , показали практически полное совпадение их нижних энергетических уровней с той разницей, что основное состояние C^{11} на 1,982 МэВ выше, чем то же состояние в V^{11} (рис. 4.15).

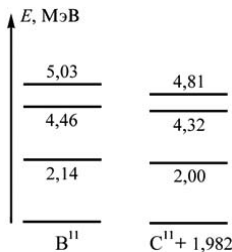


Рис. 4.15. Энергетические уровни ядер V^{11} и C^{11} . Основное состояние C^{11} на 1,982 МэВ выше, чем в V^{11} . Эта разница может быть объяснена тем, что энергия кулоновского взаимодействия в C^{11} выше, чем в V^{11}

Эта разница может быть объяснена тем, что ядро C^{11} состоит из 6 протонов и 5 нейтронов, а V^{11} – из 5 протонов и 6 нейтронов, поэтому энергия кулоновского взаимодействия в C^{11} выше, чем в V^{11} . Совпадение же энергетического спектра возбужденных состояний ядер говорит о независимости ядерных сил от электрического заряда. Иными словами, протон – нейтронные и нейтрон – нейтронные силы в ядре практически одинаковы. Опыты с C^{14} ($6p + 8n$) и N^{14} ($7p + 7n$) говорят, что и протон – нейтронные взаимодействия не отличаются от нейтрон – нейтронных и протон – протонных. Избыток энергии C^{11} над V^{11} равен энергии, необходимой для того, чтобы снаружи оболочки из 5 протонов и 5 нейтронов появился еще один протон:

$$U_1 = \frac{z_1(z_1 - 1)}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r_y} e^2 \quad \text{для } C^{11}; \quad U_2 = \frac{z_2(z_2 - 1)}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r_y} e^2 \quad \text{для } V^{11}.$$

Здесь $z_1 = 6$; $z_2 = 5$; e – элементарный заряд; r_{α} – радиус ядра C^{11} или B^{11} , зависящий от числа нуклонов в ядре.

Разность абсолютных положений энергетических уровней в C^{11} и B^{11} связана еще с заменой нейтрона на протон:

$$\Delta E = m_p c^2 - m_n c^2 = 938,272 - 939,565 = -1,293 \text{ МэВ.}$$

Полная разница энергий, как следует из эксперимента, равна $\Delta U_{12} + \Delta E = 1,982 \text{ МэВ.}$

$$\text{Отсюда } \Delta U_{12} = U_1 - U_2 = 1,982 - \Delta E = 3,275 \text{ МэВ}$$

В результате получаем для радиуса ядра B^{11} или C^{11}

$$r_{\alpha} = \frac{k \cdot e^2}{2 \cdot \Delta U_{12}} [z_1(z_1 - 1) - z_2(z_2 - 1)] = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6^2 \cdot 10^{-38}}{2 \cdot 3,275 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}} \cdot (30 - 20) = 2,2 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

при электронном рассеянии (зарядовый радиус)

$$r_{\alpha} = r_0 \cdot A^{1/3} = 1,12 \cdot 10^{-15} \cdot 11^{1/3} = 2,5 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

что близко (точность 12 %) к рассчитанному значению. Это говорит, во-первых, о том, что законы электростатики справедливы на столь малых расстояниях, как 10^{-15} м, во-вторых, что неэлектрическая часть взаимодействия протонов с протонами, протонов с нейтронами и нейтронов с нейтронами одинакова.

В качестве еще одного примера вычисления энергии, сосредоточенной в электрическом поле, рассмотрим металлический шар радиусом $r_0 = 3$ см с зарядом $q = 20$ нКл, окруженный слоем парафина толщиной $d = 2$ см и $\epsilon = 2$ (рис. 4.16). Определим энергию U электрического поля, заключенного в диэлектрике.

Поле, созданное заряженным шаром, является неоднородным, и энергия поля в слое диэлектрика распределена неравномерно, но объемная плотность энергии одинакова во всех точках, равноотстоящих от центра сферы.

Энергия в сферическом слое диэлектрика объемом dV равна

$$dU = w dV,$$

где w – объемная плотность энергии.

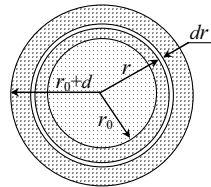


Рис. 4.16. Металлическая сфера радиусом R r_0 окружена слоем диэлектрика толщиной d

Полная энергия

$$U = \int w dV = 4\pi \int_{r_0}^{r_0+d} wr^2 dr,$$

где r – радиус сферического слоя толщиной dr . Объемная плотность энергии определяется по формуле $w = \varepsilon_0 \varepsilon E^2/2$, где $E = q/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2)$:

$$w = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon r^4},$$

$$U = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{r_0}^{r_0+d} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+d} \right) = \frac{q^2 d}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon r_0 (r_0+d)} = 12 \text{ мкДж.}$$

Основные выводы

Емкость – способность тел накапливать и сохранять электрический заряд. Емкость определяется геометрией тел, средой, в которой они находятся, но не зависит от заряда и потенциала тела.

Электрическая емкость уединенного проводника или конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\phi},$$

где q – заряд, сообщенный проводнику (конденсатору); $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ – изменение потенциала, вызванное этим зарядом.

Единицей измерения емкости в системе СИ служит фарада:

$$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл}/1 \text{ В.}$$

На практике используются более мелкие единицы – пикофарада $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ и микрофарада $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$.

Электрическая емкость уединенной проводящей сферы радиусом r ($r_2 = \infty$), находящейся в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ε ,

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r.$$

Электрическая емкость сферического конденсатора (две концентрические сферы радиусами r_1 и r_2 , пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε)

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot r_1 r_2 / (r_2 - r_1).$$

Электрическая емкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра длиной L и радиусами r_1 и r_2 , пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Электрическая емкость плоского конденсатора

$$C = \varepsilon_0\varepsilon S/d,$$

где S – площадь пластин (одной пластины); d – расстояние между ними; ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами.

Электрическая емкость последовательно соединенных конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n},$$

где n – число конденсаторов. Если $C_1 = C_2 = \dots = C_n$, то $C = C_1/n$.

В случае двух конденсаторов $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

Электрическая емкость параллельно соединенных конденсаторов:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n,$$

В случае двух конденсаторов $C = C_1 + C_2$.

Запасенная в конденсаторе энергия

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии (энергия электрического поля, приходящаяся на единицу объема)

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} ED,$$

где E – напряженность электрического поля в среде с диэлектрической проницаемостью ε ; $D = \varepsilon_0 E$ – электрическое смещение (электрическая индукция).

Взаимная энергия системы n точечных частиц равна

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^n \frac{q_k q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ik}} \quad (i \neq k).$$

При непрерывном распределении зарядов с плотностью ρ по объему V и на поверхности S с плотностью σ в точках пространства с потенциалом φ

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \int \varphi \sigma dS.$$

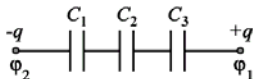
Величина энергии может быть записана через индукцию и напряженность поля

$$U = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}, \mathbf{D}) dV.$$

Упражнения

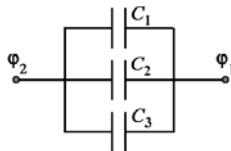
1. Расстояние между пластинами плоского конденсатора 0,1 мм. Какой должна быть площадь пластин, чтобы емкость конденсатора достигла 1 Ф? Ответ: $1,13 \cdot 10^7 \text{ м}^2$.

2. Емкость отдельного проводника определяется как $C = q/\varphi$, где φ – электрический потенциал проводника относительно бесконечно удаленной точки. Найдите емкость сферы радиусом r . Чему равно значение емкости в пикофарадах, когда $r = 1 \text{ см}$? Ответ: 1,11 пФ.



3. Полная емкость трех последовательно соединенных конденсаторов равна $C = q/(\varphi_1 - \varphi_2)$. Найдите выражение для C через C_1 , C_2 и C_3 .

Ответ: $C = C_1 C_2 C_3 / (C_2 C_3 + C_1 C_2 + C_1 C_3)$.



4. Полная емкость трех параллельно соединенных конденсаторов записывается в виде $C = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varphi_1 - \varphi_2}$. Найдите

выражение для C через C_1 , C_2 и C_3 .

Ответ: $C = C_1 + C_2 + C_3$.

5. Определить электроемкость металлической сферы радиусом $r = 2 \text{ см}$, погруженной в воду ($\epsilon = 81$). Ответ: 180 пФ.

6. Определить электроемкость C Земли, принимая ее за шар радиусом $R_3 = 6400 \text{ км}$. Ответ: 712 мкФ.

7. Два металлических шара радиусами $r_1 = 2 \text{ см}$ и $r_2 = 6 \text{ см}$ соединены проводником, емкостью которого можно пренебречь.

Шарам сообщен заряд $q = 1$ нКл. Найти поверхностную плотность σ зарядов на шарах.

Ответ: $\sigma_1 = 49,8$ нКл/м², $\sigma_2 = 16,6$ нКл/м².

8. Определить емкость C плоского слюдяного конденсатора, площадь S пластин которого равна 100 см², $\epsilon = 7,0$, а расстояние d между ними равно 0,1 мм. Ответ: 6,2 нФ.

9. Между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $\Delta\phi = 600$ В, находятся два слоя диэлектриков: стекла ($\epsilon_1 = 7,0$) толщиной $d_1 = 7$ мм и эбонита ($\epsilon_2 = 3,0$) толщиной $d_2 = 3$ мм. Площадь S каждой пластины конденсатора равна 200 см². Найти: 1) емкость C конденсатора; 2) смещение D , напряженность E поля и падение потенциала в каждом слое, если расстояние d между пластинами равно 1 см.

Ответ: 1) $C = 88,5$ пФ; 2) $D_1 = D_2 = 2,66$ мКл/м²; 3) $E_1 = 42,8$ кВ/м; 4) $E_2 = 100$ кВ/м; 5) $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = 300$ В.

10. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 1,33 мм, площадь S пластин равна 20 см². В пространстве между пластинами конденсатора находятся два слоя диэлектриков: слюды ($\epsilon_1 = 7,0$) толщиной $d_1 = 0,7$ мм и эбонита ($\epsilon_2 = 3,0$) толщиной $d_2 = 0,3$ мм. Определить емкость C конденсатора. Ответ: 35,4 пФ.

11. На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 0,2$ мКл/м². Расстояние d между пластинами равно 1 мм. На сколько изменится разность потенциалов на его обкладках при увеличении расстояния d между пластинами до 3 мм? Ответ: $\Delta\phi = 45,2$ В.

12. Две концентрические металлические сферы радиусами $r_1 = 2$ см и $r_2 = 2,1$ см образуют сферический конденсатор. Определить его емкость C , если пространство между пластинами заполнено парафином ($\epsilon = 2,0$). Ответ: 93,3 пФ.

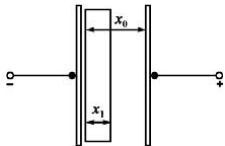
Задачи

1. Шар радиусом $r_1 = 6$ см заряжен до потенциала $\phi_1 = 300$ В, а шар радиусом $r_2 = 4$ см – до потенциала $\phi_2 = 500$ В. Определить потенциал ϕ шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь. Ответ: 380 В

2. В плоский конденсатор вдвинули плитку парафина ($\epsilon = 2,0$) толщиной $d = 1$ см, которая вплотную прилегает к его пластинам. На сколько нужно увеличить расстояние между пластинами, чтобы получить прежнюю емкость? Ответ: 0,5 см.

3. Электроемкость C плоского конденсатора равна $1,5$ мкФ. Расстояние d между пластинами равно 5 мм. Какова будет электроемкость конденсатора, если на нижнюю пластину положить лист эбонита ($\epsilon_2 = 3,0$) толщиной $d_1 = 3$ мм? Ответ: $2,5$ мкФ.

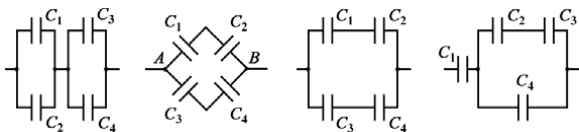
4. Промежуток между пластинами плоского конденсатора заполнен полиэтиленом ($\epsilon = 2,3$). Чему равна поверхностная плотность индуцированного на полиэтилене заряда, если толщина промежутка $d = 1$ мм, а напряжение на пластинах конденсатора $\Delta\phi = 1000$ В? Ответ: $\sigma = \epsilon\epsilon_0\Delta\phi/d = 20,36$ мкКл/м².



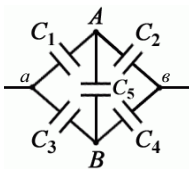
5. Между пластинами плоского конденсатора помещен брусок из диэлектрика толщиной x_1 (диэлектрическая проницаемость ϵ). Какова емкость конденсатора C , если $x_0 > x_1$?

Ответ: $\sigma = \epsilon\epsilon_0 S / [\epsilon(x_0 - x_1) + x_1]$.

6. Конденсаторы соединены так, как это показано на рисунках.



Электроемкости конденсаторов: $C_1 = 0,2$ мкФ, $C_2 = 0,1$ мкФ, $C_3 = 0,3$ мкФ, $C_4 = 0,4$ мкФ. Определить электроемкость C батареи конденсаторов. Ответ: 1) $C = 0,21$ мкФ; 2) $C = 0,24$ мкФ; 3) $C = 0,24$ мкФ; 4) $C = 0,14$ мкФ.



7. Конденсаторы электроемкостями $C_1 = C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = C_4 = 3$ мкФ, $C_5 = 1$ мкФ соединены так, как указано на рисунке. Разность потенциалов на обкладках пятого конденсатора $\Delta\phi_{AB} = 100$ В. Найти заряды и разности потенциалов на обкладках каждого конденсатора, а также общий заряд q и разность потенциалов $\Delta\phi_{ab}$ батареи конденсаторов. Ответ: 1) $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = 60$ В, $\Delta\phi_3 = \Delta\phi_4 = 40$

В; 2) $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 120$ мкКл, $q_5 = 100$ мкКл; 3) $q = 580$ мкКл, $\Delta\phi_{ab} = 0$.

8. Конденсатор электроемкостью $C_1 = 600$ пФ зарядили до разности потенциалов $\Delta\phi = 1,5$ кВ и отключили от источника

тока. Затем к конденсатору присоединили параллельно второй, незаряженный конденсатор электроемкостью $C_2 = 400$ пФ. Определить энергию, израсходованную на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов. Ответ: 0,27 мДж.

9. Конденсаторы электроемкостями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ включены в цепь с напряжением 1,1 кВ. Определить энергию каждого конденсатора в случаях: 1) последовательного их включения; 2) параллельного включения. Ответ: 1) 0,18 Дж, 0,09 Дж, 0,06 Дж; 2) 0,605 Дж, 1,21 Дж, 1,815 Дж.

10. Электроемкость C плоского конденсатора равна 111 пФ. Диэлектрик – фарфор ($\epsilon = 5,0$). Конденсатор зарядили до разности потенциалов $\Delta\phi = 600$ В и отключили от источника напряжения. Какую работу A нужно совершить, чтобы вынуть диэлектрик из конденсатора? Трение пренебрежимо мало. Ответ: 80 мкДж.

11. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком (фарфор, $\epsilon = 5,0$), объем V которого равен 100 см³. Поверхностная плотность заряда σ на пластинах конденсатора равна 8,85 нКл/м². Вычислить работу A , которую необходимо совершить для того, чтобы удалить диэлектрик из конденсатора. Трением диэлектрика о пластины конденсатора пренебречь. Ответ: 63,5 нДж.

12. Пластину из эбонита ($\epsilon = 3,0$) толщиной $d = 2$ мм и площадью $S = 300$ см² поместили в однородное электрическое поле напряженностью $E = 1$ кВ/м, расположив так, что силовые линии перпендикулярны ее плоской поверхности. Найти: 1) плотность σ связанных зарядов на поверхности пластин; 2) энергию U электрического поля, сосредоточенную в пластине. Ответ: 1) 5,9 нКл/м²; 2) 88,5 пДж.

13. Уединенный металлический шар радиусом $r_1 = 6$ см несет заряд q . Концентрическая этому шару поверхность делит пространство на две части (внутренняя конечная и внешняя бесконечная), так что энергии электрического поля обеих частей одинаковы. Определить радиус r_2 этой сферической поверхности. Ответ: 12 см.

14. Сплошной парафиновый шар радиусом ($\epsilon = 2,0$) радиусом $r = 10$ см заряжен равномерно по объему с объемной плотностью $\rho = 100$ нКл/м³. Определить энергию U_1 электрического поля, сосредоточенную в самом шаре, и энергию U_2 вне его. Ответ: 1) 788 нДж; 2) 788 нДж.

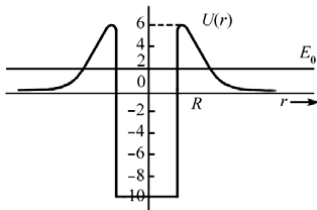
15. Два конденсатора электроемкостями $C_1 = 3$ мкФ и $C_2 = 6$ мкФ соединены между собой и присоединены к батарее с ЭДС $E = 120$ В. Определить заряды q_1 и q_2 конденсаторов и разности потенциалов $\Delta\phi_1$ и $\Delta\phi_2$ между их обкладками, если конденсаторы соединены: 1) параллельно; 2) последовательно.

Ответ: 1) $q_1 = 360$ мкКл, $q_2 = 720$ мкКл, $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = 120$ В; 2) $q_1 = q_2 = 240$ мкКл, $\Delta\phi_1 = 80$ В, $\Delta\phi_2 = 40$ В.

16. Конденсатор электроемкостью $C_1 = 0,2$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $\Delta\varphi_1 = 320$ В. После того как его соединили параллельно со вторым конденсатором, заряженным до разности потенциалов $\Delta\varphi_2 = 450$ В, напряжение $\Delta\varphi$ на нем изменилось до 400 В. Вычислить емкость C_2 второго конденсатора. Ответ: $C_2 = 0,32$ мкФ.
17. Конденсатор электроемкостью $C_1 = 0,6$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $\Delta\varphi_1 = 300$ В и соединен со вторым конденсатором электроемкостью $C_2 = 0,4$ мкФ, заряженным до разности потенциалов $\Delta\varphi_2 = 150$ В. Найти заряд Δq , перетекший с пластин первого конденсатора на второй, если конденсаторы соединили одноименно заряженными пластинами. Ответ: $\Delta q = 36$ мкКл.
18. Конденсатору, электроемкость C которого равна 10 пФ, сообщен заряд $q = 1$ пКл. Определить энергию U конденсатора. Ответ: 0,05 мкДж.
19. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 2 см, разность потенциалов $\Delta\varphi = 6$ кВ. Заряд q каждой пластины равен 10 нКл. Вычислить энергию U поля конденсатора и силу F взаимного притяжения пластин. Ответ: 30 мкДж; 15 мН.
20. Какое количество теплоты Q выделится при разряде плоского конденсатора, если разность потенциалов $\Delta\varphi$ между пластинами равна 15 кВ, расстояние $d = 1$ мм, диэлектрик – слюда ($\epsilon = 7,0$) и площадь S каждой пластины равна 300 см²? Ответ: 0,209 Дж.
21. Сила F притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора равна 500 мН. Площадь S каждой пластины равна 200 см². Найти плотность энергии w поля конденсатора. Ответ: 25 Дж/м³.
22. Найти энергию U уединенной сферы радиусом $r = 4$ см, заряженной до потенциала $\varphi = 500$ В. Ответ: 0,55 мкДж.
23. Вычислить энергию U электростатического поля металлического шара, которому сообщен заряд $q = 100$ нКл, если диаметр d шара равен 20 см. Ответ: 450 мкДж.
24. Уединенная металлическая сфера электроемкостью $C = 10$ пФ заряжена до потенциала $\varphi = 3$ кВ. Определить энергию U поля, заключенного в сферическом слое, ограниченном сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в три раза больше радиуса сферы. Ответ: 30 мкДж.
25. Электрическое поле создано заряженной ($q = 0,1$ мкКл) сферой радиусом $r = 10$ см. Какова энергия U поля, заключенная в объеме, ограниченном сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в два раза больше радиуса сферы? Ответ: 225 мкДж.
26. Пучок протонов с кинетической энергией 1 МэВ от ускорителя попадает в газообразный водород.

- Какова общая кинетическая энергия налетающего протона и протона мишени в системе центра масс?
 - Чему равна электрическая потенциальная энергия (в джоулях) взаимодействия налетающего протона с ядром атома водорода при их наибольшем сближении?
 - Каково расстояние наибольшего сближения двух протонов?
- Ответ: 1) $K = 0,5$ МэВ; 2) $U = 0,5$ МэВ; 3) $r = 2,3 \cdot 10^{-15}$ м.

27. Предположим, что протон с полной энергией $E_0 = 2$ МэВ приближается к ядру, двигаясь в поле, потенциал которого $U(r)$ изменяется так, как показано на рисунке, и попадет в ядро радиусом R . Найдите:



- Кинетическую и потенциальную энергию протона в ядре.
- Какая дополнительная энергия необходима протону с точки зрения классической физики, чтобы он мог покинуть ядро?
- Предполагая, что ядро обстреливается протонами извне, укажите, какой должна быть их кинетическая энергия с точки зрения классической физики, чтобы они смогли проникнуть в ядро. Протоны движутся из бесконечности.

28. Полный заряд равномерно заряженного шара радиусом R равен Q . Какую потенциальную энергию U , сосредоточенную в шаре, имеет такое распределение заряда? При решении задачи воспользуйтесь соотношением $dU = \varphi dq$ и представьте себе, что шар состоит из концентрических сферических слоев с зарядами $dq = (4\pi r^2 dr)\rho$, где ρ – объемная плотность заряда. Ответ: $U = k_0 Q^2 / (10R)$.

29. В условиях задачи 28 покажите, что электрическая потенциальная энергия, вычисленная путем интегрирования величины $E^2 / (8\pi k_0)$ по всему пространству, равна $U = (3/5)k_0 q^2 / R$.

30. Оценить электростатическую энергию U атомного ядра с атомным номером Z и массовым числом A . Считать, что ядро является однородно заряженным шаром, радиус которого $r = (1,3 \cdot A)^{1/3} \cdot 10^{-15}$ м. Численную оценку провести для ядра урана $Z = 92$, $A = 235$. Ответ выразить в джоулях и в мегаэлектрон-вольтах. Ответ: $1,46 \cdot 10^{-10}$ Дж = 910 МэВ.

31. Вычислить электростатическую энергию заряда на шаре радиуса R в вакууме, если заряд шара Q равномерно распределен по его поверхности. Ответ: $U = k_0 Q^2 / (2R)$.

5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

5.1. Плотность тока. Ток

Электрический ток представляет собой упорядоченное движение электрически заряженных частиц или заряженных макроскопических тел. По предложению Франклина условились считать, что ток, текущий к пластине конденсатора, передает ей положительный заряд. Теперь мы знаем, что пластина конденсатора приобретает положительный заряд, поскольку её покидают электроны проводимости. Следовательно, электроны проводимости всегда движутся в направлении, противоположном направлению тока. Такого несоответствия не возникло бы, если бы электрону был приписан положительный, а не отрицательный знак заряда. В этой книге принято, как и в большинстве других книг, что стрелка, обозначающая ток, указывает направление, в котором двигались бы положительные заряды. Если ток в действительности обусловлен движением электронов, то электроны движутся в направлении, противоположном указанному стрелкой. Различают электрический ток проводимости, связанный с направленным движением микроскопических заряженных частиц относительно макроскопической среды, и конвекционный ток – движение макроскопических заряженных тел как целого, например заряженных капель жидкости.

Наличие электрического тока в проводниках проявляется по производимому им действию: нагреванию проводников, химическому действию, созданию вокруг проводников магнитного поля. Химическое действие тока проявляется в электролитах, но не проявляется в металлах. Магнитное действие тока – магнитное поле – проявляется во всех без исключения проводниках.

В металлическом проводнике положительные заряды (ядра атомов) не могут перемещаться; они образуют кристаллическую решетку. Однако внешние электроны или электроны проводимости не связаны с определенными атомами. Они могут свободно перемещаться по проводнику. При отсутствии внешнего электрического поля электроны проводимости движутся хаотически во всех направлениях и их средняя скорость равна нулю. Средняя скорость направленного движения электронов в проводниках $u \approx 10^{-4}$ м/с много меньше скорости хаотического теплового движения электронов $v \approx 10^5$ м/с (см. п. 6.1).

Проводники электричества отличаются от других тел тем, что если внутри проводника напряженность электрического поля

отлична от нуля, то в проводнике возникает электрический ток – направленное движение зарядов. Протекающий в проводнике ток определяется как количество заряда, проходящего через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$i \equiv \frac{dq}{dt}$$

Если $dq/dt = \text{const}$, то такой ток принято называть *постоянным* и обозначать буквой I . Если ток меняется со временем, т.е. $dq/dt \neq \text{const}$, то он называется *переменным* и обозначается буквой i .

Единица измерения тока (кулон в секунду) называется ампером (А). С током непосредственно связана плотность тока. Выделим в проводящей среде бесконечно малый объем и обозначим через \mathbf{u} средний вектор скорости направленного движения зарядов e в данном объеме, плотность которых равна $\rho = ne$, где n – концентрация зарядов; e – величина одного заряда. Представим поток зарядов вектором \mathbf{j} , определяющим количество зарядов, проходящих в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную потоку:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}.$$

Плотность тока измеряется в $\text{А}/\text{м}^2$ или $\text{Кл}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Умножив плотность тока на величину площадки S (м^2), перпендикулярную вектору \mathbf{j} , получим ток

$$I = (\mathbf{j}, \mathbf{S}_n) = (\mathbf{j}, \mathbf{S}),$$

где \mathbf{n} – единичный положительный вектор нормали к поверхности S , $\mathbf{S} = S \cdot \mathbf{n}$. Если в пределах поверхности S плотность тока \mathbf{j} меняется, то

$$I = \int (\mathbf{j}, d\mathbf{S}).$$

Количество зарядов ∂q , переносимых через элемент поверхности dS за время ∂t , равно

$$\partial q = -\rho(\mathbf{u}, \mathbf{n}) dS \partial t.$$

Знак «минус» указывает, что заряд уходит через поверхность dS . Заряд, проходящий через замкнутую поверхность S в единицу времени, равен

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\oint_{(S)} \rho(\mathbf{u}, d\mathbf{S}) = -\oint_{(S)} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}).$$

Символ частной производной отмечает тот факт, что поверхность S остается неподвижной.

Полный заряд под поверхностью S

$$q = \int_{(V)} \rho dV$$

равен интегралу от плотности электрического заряда ρ , находящегося в объеме V , ограниченном поверхностью S . Поверхностный интеграл от плотности тока может быть с помощью теоремы Гаусса выражен через объемный интеграл:

$$\oint_{(S)} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \int_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{j} dV .$$

В результате для произвольного объема V получаем

$$\int_{(V)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \right) dV = 0 ,$$

это возможно лишь при условии

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

Эта формула выражает закон сохранения заряда – тот фундаментальный факт классической электродинамики, что электрический заряд неуничтожим, он никогда не теряется и не создается. Электрический заряд перемещается с места на место, пересекает границы некоторых выделенных объемов, но никогда не возникает из ниоткуда и не исчезает иначе, как только выйдя из объема. Заряд сохраняется.

Пусть по медному проводу сечением $S = 1 \text{ мм}^2$ течет ток силой $I = 1 \text{ А}$. Найдем среднюю скорость \mathbf{u} направленного движения электронов проводимости или, как ее еще называют, среднюю скорость дрейфа.

Среднюю скорость дрейфа находим согласно определению. Для однородного проводника

$$\mathbf{u} = \frac{I}{neS} ,$$

где n – концентрация электронов проводимости в меди.

Предположим, что на каждый атом приходится один электрон проводимости. Тогда концентрация электронов проводимости

$$n = \rho_{\text{Cu}} N_A / \mu_{\text{Cu}} ,$$

где $\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ – плотность меди; $\mu_{\text{Cu}} = 63,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярная масса меди; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

$$n = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{63,6 \cdot 10^{-3}} = 8,42 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Следовательно,

$$u = \frac{1}{8,42 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6}} = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ м/с} = 0,074 \text{ мм/с}.$$

Типичная скорость дрейфа электронов проводимости порядка 0,1 мм/с. Токи могут также течь в газах и жидкостях. Примером тока, протекающего через газ, является ток в неоновых лампах. Он обусловлен движением, как положительных ионов, так и электронов. Но поскольку электроны – более легкие частицы, их подвижность более высокая, и поэтому они дают больший вклад в величину тока. Электрон, ускорившись в электрическом поле, при столкновении с ионом или атомом в газе передает часть своей кинетической энергии атому, которая затем испускается им в форме видимого света.

Если токи стационарны, т.е. не зависят от времени, то $\text{div } \mathbf{j} = 0$ и для замкнутой поверхности имеем

$$\oint (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = 0.$$

Разомкнув поверхность S , получаем, что в случае стационарных токов сумма токов, проходящих через замкнутую поверхность, равна нулю:

$$\sum_k I_k = \sum_k \int_{(S_k)} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = 0.$$

Стационарность токов означает, что плотность электрических зарядов в каждой точке пространства не изменяется со временем, хотя и происходит движение электричества, но на место уходящих зарядов непрерывно поступают новые.

5.2. Закон Ома

Возбуждение и поддержание электрического тока в проводниках возможно при наличии в них электрического поля. Основной, хотя и не фундаментальный, закон электродинамики был открыт в 1826 г. немецким учителем, физиком Георгом Омом. Ом установил, что сила тока в проводнике пропорциональна разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ у начала и конца этого проводника, считая по направлению тока,

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}.$$

Величина R называется электрическим сопротивлением или просто сопротивлением определенного участка этого проводника. Считается, что ток идет от участка с большим потенциалом к меньшему ($\varphi_1 > \varphi_2$), т.е. по направлению движения положительных зарядов. Электрическое сопротивление характеризует противодействие проводника или электрической цепи электрическому току. Наличие сопротивления в цепи приводит к рассеянию электрической энергии и переходу ее в теплоту (закон Джоуля – Ленца, см. п. 5.6). Как уже говорилось, силой тока называется количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в единицу времени. Сопротивление измеряется в омах, разность потенциалов – в вольтах, сила тока – в амперах. Проводник обладает, по определению, сопротивлением в 1 Ом, если при разности потенциалов на его концах в один вольт по нему протекает ток силой в один ампер, т.е. один кулон электричества за одну секунду.

Закон Ома является следствием фундаментальных законов взаимодействия и строения вещества. Сопротивление различных материалов в различных условиях объясняется квантовой теорией твердого тела.

Разность потенциалов, входящую в закон Ома, можно выразить через линейный интеграл от напряженности поля \mathbf{E} , взятый от начального до конечного сечения рассматриваемого участка проводника:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = U_{12}.$$

Этот интеграл называется напряжением, существующим между точками 1 и 2 участка цепи. Закон Ома может быть записан в этом случае в виде

$$I = \frac{U}{R},$$

который хоть и совпадает с первоначальным видом этого закона, но обладает тем преимуществом, что оказывается справедливым и в случае переменных (квазистационарных) токов, для которых понятие электрического потенциала неприменимо.

По-определению, напряжение U между двумя точками численно равно работе сил электростатического поля при перемещении единичного положительного заряда из начальной точки в конечную.

Определим заряд q , прошедший по проводу с сопротивлением $R = 3$ Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от $U_0 = 2$ В до $U = 4$ В в течение $t = 20$ с.

Так как сила тока в проводе изменяется, то воспользуемся для подсчета заряда формулой $dq = idt$ и проинтегрируем:

$$q = \int_0^t i dt.$$

Выразим силу тока по закону Ома:

$$q = \int_0^t \frac{U}{R} dt.$$

Напряжение U равномерно нарастает и может быть выражено формулой

$$U = U_0 + kt,$$

где k – коэффициент пропорциональности. Найдем q :

$$\begin{aligned} q &= \int_0^t \left(\frac{U_0}{R} + \frac{kt}{R} \right) dt = \frac{U_0}{R} \int_0^t dt + \frac{k}{R} \int_0^t t dt = \\ &= \frac{U_0 t}{R} + \frac{kt^2}{2R} = \frac{t}{2R} (2U_0 + kt) = 20 \text{ Кл}. \end{aligned}$$

Значение коэффициента k нашли из условия, что при $t = 20$ с $U = 4$ В, а при $t = 0$ $U_0 = 2$ В: $k = (U - U_0)/t = 0,1$ В/с.

Закон Ома может быть выражен в локальной (дифференциальной) форме. Для однородного по составу цилиндрического проводника можно записать

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где l – длина участка проводника, обладающего сопротивлением R ; S – площадь поперечного сечения проводника; ρ – удельное сопротивление, характеризующее вещество проводника. Единицей измерения удельного сопротивления в СИ является Ом·м. Вместо ρ можно ввести обратную ему величину $\sigma = 1/\rho$, называемую удельной проводимостью или электропроводностью. Электропроводность характеризует способность вещества пропускать электрический ток под действием электрического поля. Электропроводность измеряется в Ом⁻¹·м⁻¹. Для металлов $\sigma \approx 10^4 \div 10^6$ Ом⁻¹·м⁻¹, для полупроводников $\sigma \approx 10^{-7} \div 10^3$ Ом⁻¹·м⁻¹, для диэлектриков $\sigma \approx 10^{-18} \div 10^{-8}$ Ом⁻¹·м⁻¹.

Удельное сопротивление металлов линейно растет с температурой:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

где ρ , ρ_0 – удельные сопротивления при t и 0 °С; t – температура в градусах Цельсия; α – температурный коэффициент сопротивления. Применим закон Ома для бесконечно малого цилиндриче-

ского участка проводника с боковыми гранями, перпендикулярными вектору плотности электрического тока (рис. 5.1). Имеем в этом случае

$$dI = (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \frac{(\mathbf{E}, d\mathbf{l})}{\rho(dl/dS)}.$$

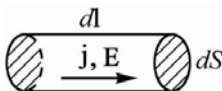


Рис. 5.1. В дифференциальной (локальной) форме закон Ома связывает плотность электрического тока \mathbf{j} с напряженностью электрического поля \mathbf{E} : $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, σ – удельная проводимость

Из полученного соотношения следует (поскольку $d\mathbf{l} \uparrow \uparrow \mathbf{E} \uparrow \uparrow \mathbf{j} \uparrow \uparrow \mathbf{n}$, \mathbf{n} – вектор положительной нормали)

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

– закон Ома в дифференциальной форме. Эта формулировка наиболее проста и вместе с тем является наиболее общей. В такой формулировке устанавливается связь между величинами, относящимися к одной определенной точке проводника.

Если ток стационарный, то, по определению, для таких токов выполняется условие $\partial\rho/\partial t = -\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$.

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\operatorname{div}\sigma\mathbf{E} = \operatorname{div}\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{D} = 0.$$

Для однородной среды ($\sigma = \operatorname{const}$, $\varepsilon = \operatorname{const}$) получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0.$$

С учетом теоремы Гаусса имеем $\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho = 0$ – в случае стационарных токов макроскопические электрические заряды могут находиться только на поверхности или в местах неоднородности проводящей среды. В этом состоит аналогия между полем стационарных токов и электростатическим полем. Заряды, создающие стационарные токи, порождают в окружающей среде кулоновское поле, такое же, как и неподвижные заряды той же плотности. Поэтому электрическое поле стационарных токов потенциально. Но, в отличие от кулоновского поля, поле стационарных токов существует внутри проводников, иначе бы не было и токов. Силовые линии электростатического поля всегда нормальны к поверхности проводника, что не обязательно выполняется для поля стационарных токов.

Отклонения от закона Ома – линейной связи между \mathbf{j} и \mathbf{E} – обусловлены изменением плотности среды и среднего времени свободного пробега носителей заряда при изменении электриче-

ского поля. Например, в газах может не «хватать» заряженных частиц при больших токах и слабой ионизации. В висмуте (полуметалл) отклонение от закона Ома наблюдается при $j \geq 10^{10} \text{ А/м}^2$. В металлах закон Ома выполняется всегда ($j > (5+6)10^{10} \text{ А/м}^2$).

5.3. Сторонние электродвижущие силы

Существенное отличие стационарного поля постоянных токов от поля электростатического состоит в необходимости непрерывных затрат энергии для поддержания поля токов. В электростатическом поле взаимопревращений энергии не происходит. Энергия, выделяющаяся в цепи тока, должна непрерывно компенсироваться за счет иных видов энергии – механической (генераторы), химической (батареи, аккумуляторы), тепловой (термоэлементы), световой (солнечные батареи) и прочих источников сил неэлектростатического происхождения. Если бы все действующие в цепи электродвижущие силы сводились к кулоновским силам, то, двигаясь свободно в проводнике, разноименные заряды очень быстро бы нейтрализовались и разность потенциалов, а вместе с этим и ток исчезли. Поэтому для поддержания постоянного поля токов в цепи требуется наличие поля сил неэлектростатического происхождения. Эти силы называются сторонними (электростатическому полю). Сторонние силы обозначаются $F_{\text{стор}}$, а их напряженность – сила, действующая на единичный положительный заряд, – $\mathbf{E}_{\text{стор}}$.

При одновременном действии электростатического поля и поля сторонних сил в проводнике возникает ток с плотностью

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}).$$

Пусть источником сторонних сил будет гальванический элемент, обозначаемый в цепи двумя вертикальными линиями – короткой со знаком «минус» и длинной со знаком «плюс» (рис. 5.2). Проводники будем считать достаточно тонкими и однородными, так что плотность тока \mathbf{j} по сечению проводника постоянна, и можно записать:

$$I = S j,$$

где S – площадь поперечного сечения проводника. Согласно закону Ома, имеем

$$E + E_{\text{стор}} = \frac{1}{\sigma} \frac{I}{S}.$$

Умножим это соотношение на элемент длины провода dl и проинтегрируем по участку проводника от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 E dl + \int_1^2 E_{\text{стор}} dl = I \int_1^2 \frac{dl}{\sigma S} = IR.$$

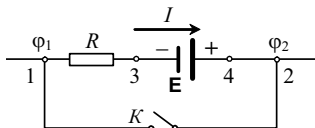


Рис. 5.2. Источник сторонних сил кулоновского происхождения \mathcal{E} и внешнее электрическое поле ($\varphi_1 - \varphi_2$) обеспечивает направленное движение зарядов в электрической цепи

Поле стационарных токов потенциально, и первый интеграл равен разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ на рассматриваемом участке цепи 1–3–4–2. Второй интеграл отличен от нуля лишь на участке 3–4, где есть нулевой источник сторонних сил, т.е. гальванический элемент. В области, где действуют сторонние силы, поле $E_{\text{стор}}$ потенциально и интеграл

$$\int_1^2 E_{\text{стор}} dl$$

не зависит от прохождения пути интегрирования через гальванический элемент. Значение этого интеграла характеризует свойства самого элемента и называется электродвижущей силой элемента

$$\mathcal{E} = \int_1^2 E_{\text{стор}} dl = \int_3^4 E_{\text{стор}} dl.$$

Понятие электродвижущей силы было введено Г. Омом в 1827 г. Электродвижущая сила (ЭДС) положительна, если путь 1–2 пересекает гальванический элемент от (–) к (+) (от катода к аноду), и отрицательна в противоположном случае.

Таким образом, при наличии в разомкнутой цепи ЭДС можем записать уравнение, определяющее величину тока на неоднородном участке цепи 1–3–4–2 (обобщенный закон Ома):

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} = IR.$$

Под R здесь подразумевается сопротивление всего участка цепи, включая сопротивление гальванического элемента.

Частным случаем полученного обобщенного закона Ома является исходное соотношение $\varphi_1 - \varphi_2 = IR$ для однородного участка цепи, не содержащего ЭДС ($\mathcal{E} = 0$).

Если цепь замкнута (рис. 5.2, ключ K замкнут, $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$) и ток лишен разветвлений, то интегрирование по всей замкнутой цепи 1–3–4–2–1 дает

$$IR = \oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) + \int E_{\text{стоп}} dl.$$

Поскольку \mathbf{E} обладает потенциалом, то $\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0$ и получаем

$$IR = \oint E_{\text{стоп}} dl = \mathcal{E},$$

где \mathcal{E} – результирующая ЭДС в цепи тока; R – полное сопротивление в цепи, включая сопротивление источника ЭДС. При отсутствии источников сторонних сил (ЭДС) сила постоянного тока в замкнутой цепи будет равна нулю.

Простые электрические цепи имеют большое практическое применение. Безусловно, полезно рассмотреть их в книге по общей физике. Важно знать, как подключать динамики или проигрыватель к стереосистеме, как подсоединить сигнализацию для охраны или автомобильный кассетный проигрыватель, как зарядить аккумуляторы или провести освещение.

Большинство электрических цепей содержит комбинации последовательно или параллельно включенных сопротивлений. Полное сопротивление цепи R мы получим, воспользовавшись законами Кирхгофа.

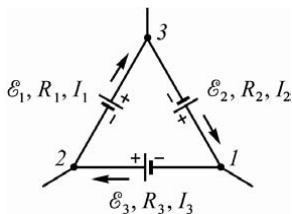
Назовем узлами все точки, в которых сходятся не менее трех проводников (ветвей) рассматриваемой цепи (узлы 1, 2 и 3, ветви 1–2, 2–3, 3–1, на рис. 5.3). Для произвольного замкнутого контура с произвольным числом разветвлений (рис. 5.3) можем записать для каждого элемента замкнутого контура простые соотношения для отдельных участков цепи:

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_1 &= I_1 R_1, \\ \varphi_3 - \varphi_1 + \mathcal{E}_2 &= I_2 R_2, \\ \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_3 &= I_3 R_3. \end{aligned}$$

Рис. 5.3. Алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \text{ и в любом замкнутом контуре } \sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k \text{ – алгебраическая сумма}$$

произведений тока в ветви на сопротивление ветви равна сумме ЭДС в контуре – первый и второй законы Кирхгофа



Складывая, получаем

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k$$

– в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления на всех ветвях контура равна алгебраической сумме электродвижущих сил, приложенных к этому контуру – *второй закон Кирхгофа*.

Обход контура осуществляется по часовой стрелке; если направление обхода совпадает с выбранным направлением тока, то ток берется со знаком «плюс», знак ЭДС берется положительным, если при данном обходе он пересекается от минуса к плюсу (от катода к аноду).

Первый закон Кирхгофа утверждает, что в любом узле цепи

$$\sum_n I_n = 0$$

– алгебраическая сумма токов сходящихся в узле равна нулю, при этом втекающие и вытекающие токи имеют противоположные знаки. Первый закон Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда, а второй – следствием закона сохранения энергии. Первоначально направление токов можно выбирать произвольно. Если при решении задачи величина тока получается со знаком «минус», значит, истинное направление тока противоположно выбранному. Законы (правила) Кирхгофа очень полезны при расчетах сложных электрических цепей.

Если k проводников соединены параллельно (рис. 5.4), то ток в каждом из проводников равен

$$I_k = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_k} + \frac{\mathcal{E}_k}{R_k}.$$

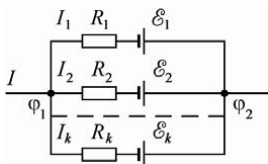


Рис. 5.4. При параллельном соединении

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Полный ток в цепи равен

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} + \frac{\mathcal{E}}{R},$$

где
$$\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}, \quad \mathcal{E} = R \cdot \sum_k \frac{\mathcal{E}_k}{R_k}.$$

Формула $\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}$ определяет сопротивление k параллельно соединенных проводов, величина \mathcal{E} играет роль электродвижущей силы. Если все элементы одинаковы, то $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k$ – электродвижущая сила батареи равна электродвижущей силе элемента.

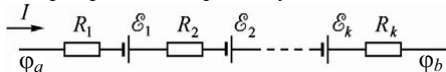


Рис. 5.5. При последовательном соединении k сопротивлений и k источников ЭДС полное сопротивление $R = R_1 + R_1 + \dots + R_k$, а результирующая ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_k$

Если k проводников соединены последовательно (рис. 5.5), то можем записать

$$\begin{aligned} IR_1 &= \varphi_a - \varphi_1 + \mathcal{E}_1, \\ IR_2 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_2, \\ &\dots\dots\dots \\ IR_k &= \varphi_{k-1} - \varphi_b + \mathcal{E}_k. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получаем

$$IR = I(R_1 + R_2 + \dots + R_k) = (\varphi_a - \varphi_b) + \sum_k \mathcal{E}_k.$$

Полное сопротивление и результирующая ЭДС в цепи равны сумме сопротивлений и алгебраической сумме ЭДС

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_k, \quad \mathcal{E} = \sum_k \mathcal{E}_k,$$

а разность потенциалов определяется разностью потенциалов на концах участка цепи.

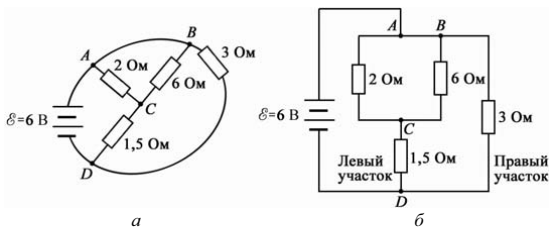


Рис. 5.6. Сложная цепь, состоящая из резисторов (а); та же цепь в представлении ее в виде последовательного и параллельного соединения (б)

Рассмотрим цепь, показанную на рис. 5.6, а, и вычислим: 1) полный ток, текущий через батарею, 2) ток, текущий через резистор сопротивлением 6 Ом.

Чтобы найти ток I , вначале вычислим полное сопротивление R_r . Для этого начертим ту же цепь в виде, показанном на рис. 5.6, б, на котором выделены участки цепи с параллельным и последовательным соединениями. Рассмотрим параллельное соединение резисторов с сопротивлениями 2 Ом и 6 Ом. Пусть R – сопротивление этой части цепи. Тогда

$$1/R = 1/2 + 1/6 = 2/3 \text{ Ом}^{-1} \quad \text{или} \quad R = 1,5 \text{ Ом.}$$

Далее это сопротивление включено последовательно с сопротивлением 1,5 Ом. Поэтому полное сопротивление левой части цепи равно

$$R' = R + 1,5 \text{ Ом} = 3 \text{ Ом.}$$

Наконец, мы имеем цепь, в которой резистор сопротивлением R' соединен параллельно с 3-омным резистором. Таким образом,

$$1/R_r = 1/R' + 1/3 = 2/3 \text{ Ом}^{-1}, \quad \text{откуда} \quad R_r = 1,5 \text{ Ом.}$$

Полный ток, потребляемый от батареи,

$$I = \mathcal{E}/R_r = (6/1,5) \text{ A} = 4 \text{ A.}$$

Чтобы вычислить ток, текущий через резистор сопротивлением 6 Ом, сначала нужно найти ток, текущий в левой части цепи:

$$I' = (6 \text{ В})/R' = 2 \text{ A.}$$

Этот ток распределяется таким образом, что на сопротивлениях 2 Ом и 6 Ом падает одно и то же напряжение. Поэтому 75% тока I' течет в резисторе с сопротивлением 2 Ом и 25%, т.е. 0,5 А, – в резисторе с сопротивлением 6 Ом.

Даже простые электрические цепи, доступные простым расчетам с помощью правил Кирхгофа, имеют важные практические применения.

Цепь, схема которой показана на рис. 5.7, используется для измерения неизвестного сопротивления R_x с высокой точностью. Если в этой цепи R_g – сопротивление гальванометра (чувствительного прибора для измерения силы тока), то эта схема называется мостом Уитстона. Для неизвестного сопротивления R_x подбирается такое сопротивление R_3 , чтобы ток через R_g был равен нулю. Тогда $R_2/R_1 = R_x/R_3$ или $R_x = R_3(R_2/R_1)$.

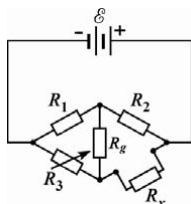


Рис. 5.7. Схема моста Уитстона, используемая для измерения R_x

В качестве примера найдем токи в схеме на рис. 5.8. Применим второй закон Кирхгофа к контуру $ABCDEA$:

$$I_2 R_2 + I_3 R_1 = \mathcal{E}_2$$

и к контуру $EFDE$:

$$I_3 R_1 = \mathcal{E}_1.$$

Вычитая второе выражение из первого, имеем

$$I_2 R_2 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/R_2.$$

Ток I_1 можно определить, применив первый закон Кирхгофа для узла D :

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$

$$I_1 = I_3 - I_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1} - \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R_2} = \mathcal{E}_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\mathcal{E}_2}{R_2}.$$

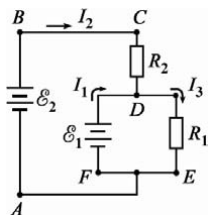


Рис. 5.8. Стабилизатор напряжения. Напряжение на сопротивлении R_1 определяется величиной \mathcal{E}_1 , а ток через него – величиной \mathcal{E}_2

Заметим, что если $\mathcal{E}_1(1/R_1 + 1/R_2) = \mathcal{E}_2/R_2$, то $I_1 = 0$, т.е. ток от батареи \mathcal{E}_1 не потребляется. Схема, в которой $I_1 \approx 0$, имеет важное практическое применение. Предположим, что на сопротивлении R_1 требуется создать падение напряжения, точно равное \mathcal{E}_1 , хотя через R_1 течет большой ток I_3 . Схема, приведенная на рис. 5.8, действует в этом случае как стабилизатор напряжения. Небольшие изменения напряжения мощного источника \mathcal{E}_2 не скажутся на напряжении \mathcal{E}_1 , приложенном к R_1 . \mathcal{E}_1 может быть маломощным источником, хотя через R_1 течет большой ток. (Этот ток берется в основном от источника \mathcal{E}_2 , а напряжение определяется источником \mathcal{E}_1 .) Если пользоваться только одной батареей \mathcal{E}_1 , то она скоро истощится.

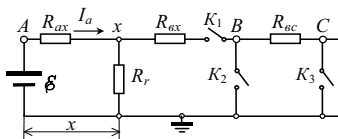


Рис. 5.9. Определение координаты точки x с нарушенной изоляцией

Воспользуемся законами постоянного тока для решения следующей задачи. Пусть A, B, C – три станции на линии телеграфа (рис. 5.9). Телеграфист станции A знает, что в некоторой точке x между A и B произошло нарушение изоляции кабеля и ток частично уходит в землю через сопротивление утечки R_r .

Телеграфист для определения точки с нарушенной изоляцией включил на своей станции батарею с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и измерил ток в условиях, когда

- 1) ключ K_1 на станции B разомкнут – ток $I_a = I_1 = 0,200$ А;
- 2) при замкнутом ключе K_1 линия на станции B заземлена (ключ K_2 замкнут на землю) – ток $I_a = I_2 = 0,220$ А;
- 3) при замкнутом ключе K_1 и разомкнутом K_2 ключ K_3 на станции C замкнут на землю – ток $I_a = I_3 = 0,210$ А.

Телеграфисту известно, что линия связи выполнена из провода сопротивление 1 км которого равно $\lambda = 5$ Ом/км. Длина кабеля, соединяющего станции A и B $\ell = 20$ км, а станции B и C $\ell_0 = 18$ км. При этом телеграфист учел, что сопротивлением земли и заземлением на станциях можно пренебречь.

Запишем сопротивления проводов на линии в виде:

$$R_{ax} = \lambda x; \quad R_{bx} = \lambda(\ell - x); \quad R_{bc} = \lambda \ell_0.$$

Тогда общее сопротивление схемы при различных условиях измерений равно

$$R_1 = \mathcal{E}/I_1 = R_{ax} + R_r = \lambda x + R_r,$$

$$R_2 = \mathcal{E}/I_2 = R_{ax} + \frac{R_{bx} R_r}{R_{bx} + R_r} = \lambda x + \frac{\lambda(\ell - x) R_r}{\lambda(\ell - x) + R_r},$$

$$R_3 = \mathcal{E}/I_3 = R_{ax} + \frac{(R_{bx} + R_{bc}) R_r}{R_{bx} + R_{bc} + R_r} = \lambda x + \frac{\lambda(\ell + \ell_0 - x) R_r}{\lambda(\ell + \ell_0 - x) + R_r}.$$

Выразив из первого уравнения сопротивление утечки

$$R_r = \mathcal{E}/I_1 - \lambda x$$

и подставим во второе уравнение, получим

$$\mathcal{E}/I_2 = \lambda x + \frac{\lambda(\ell - x)(\mathcal{E}/I_1 - \lambda x)}{\lambda(\ell - x) + \mathcal{E}/I_1 - \lambda x}.$$

После преобразований относительно x , имеем

$$x^2 + bx + c = 0,$$

где

$$b = -\frac{2\mathcal{E}}{\lambda I_2} = -\frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 0,22} = -18,182 \text{ км},$$

$$c = \frac{\mathcal{E}}{\lambda I_1 I_2} \left(\frac{\mathcal{E}}{\lambda} - \ell(I_2 - I_1) \right) = \frac{10}{5 \cdot 0,2 \cdot 0,22} \left(\frac{10}{5} - 20(0,22 - 0,2) \right) = 72,727 \text{ км}^2.$$

Уравнение имеет два корня: $x_1 = 12,24$ км и $x_2 = 5,942$ км.

Для однозначного определения координаты нарушения изоляции телеграфист воспользовался результатами третьего измерения. Оказалось, что уравнению $R_3(x) = \mathcal{E}/I_3$ удовлетворяет значение координаты точки с нарушенной изоляцией $x = 5942$ м.

Отметим, что наличие сторонних ЭДС должно учитываться в электростатике. В химически или физически неоднородном проводнике условие электростатического равновесия сводится к равенству нулю плотности тока

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}),$$

откуда вытекает условие $\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}} = 0$ или $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_{\text{стор}}$. В этом случае металлическая, но неоднородная поверхность уже не будет эквипотенциальной.

5.4. Стационарные токи в массивных проводниках

Найдем величину сопротивления между двумя массивными электродами A и B , выполненными из проводящих материалов и помещенных в относительно слабо проводящую среду, с удельной проводимостью σ (рис. 5.10). Величина тока между электродами равна

$$I = \oint_{(S)} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \sigma \oint_{(S)} (\mathbf{E}_n, d\mathbf{S}),$$

где интеграл берется по замкнутой поверхности, окружающей положительно заряженный электрод A .

По теореме Гаусса

$$\oint_{(S)} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}.$$

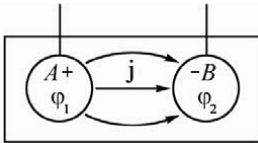


Рис. 5.10. Токи и сопротивление между массивными проводниками можно определить с помощью теоремы Гаусса

С другой стороны, по определению емкости конденсатора, составленного из электродов A и B и помещенного в среду с диэлектрической проницаемостью ϵ , имеем

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Полный ток между A и B равен

$$I = \sigma \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Из закона Ома следует

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}.$$

Приравнявая полученные выражения, находим R

$$R = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma C}$$

и величину тока между проводниками

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\sigma C}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Поскольку емкость пропорциональна ε , то R и I не зависят от величины диэлектрической проницаемости среды. Поэтому при расчете R , C , I можно полагать $\varepsilon = 1$.

Если электродами являются две концентрические сферы радиусами r_1 и r_2 ($r_1 > r_2$), то (п. 4.1) $C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_1 - r_2}$ и сопротивление между ними

$$R = \frac{r_1 - r_2}{4\pi r_1 r_2 \sigma}.$$

В случае двух коаксиальных цилиндров $C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)}$, сопротивление между ними равно

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma L} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Для электродов в виде двух удаленных шаров радиусом r емкость системы равна $C = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r$ (две последовательно соединенные емкости),

$$R = \frac{1}{2\pi r \sigma}$$

– сопротивление не зависит от расстояния между двумя шарами, что объясняет обнаруженный на опыте телеграфистами факт – сопротивление земли между телеграфными станциями не зависит от расстояния между ними.

Отметим, что существует полная аналогия в расчете сопротивления и электрической емкости, поскольку соотношение $CR = \varepsilon\varepsilon_0/\sigma$ справедливо для электропроводности слоя и электроемкости конденсатора, охватывающего слой, во всех случаях для слоев любой формы. Нередко это соотношение между проводимостью и емкостью применяется для вычисления электроемкости на основании результатов измерения проводимости. Этим методом пользуются, например, для определения весьма малых

емкостей между электродами сложной формы. Погружая изготовленный металлический каркас электродов в жидкость с небольшой и точно измеренной проводимостью, измеряют сопротивление между электродами и по формуле $CR = \epsilon\epsilon_0/\sigma$ вычисляют их взаимную емкость (рис. 5.11).

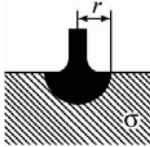


Рис. 5.11. Полусферический электрод в среде с удельной проводимостью σ

Найдем сопротивление заземления в общем случае. Пусть имеется два удаленных электрода A и B , соединенных проводом. Емкости электродов равны C_1 и C_2 , и они погружены глубоко в землю с удельной проводимостью σ_1 и σ_2 (рис. 5.12). Будем считать потенциалы электродов A и B относительно потенциала на бесконечности $\varphi_\infty = 0$ равными φ_1 и φ_2 . Соответственно, токи, идущие через первый и второй электроды, равны

$$I_1 = \frac{\varphi_1}{R_1} = \frac{\varphi_1 \sigma_1 C_1}{\epsilon_1 \epsilon_0}, \quad I_2 = \frac{\varphi_2}{R_2} = -\frac{\varphi_2 \sigma_2 C_2}{\epsilon_2 \epsilon_0}.$$

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_\infty}{R_{1\infty}} = (\varphi_1 - \varphi_\infty) \frac{\sigma_1 C_1}{\epsilon_1 \epsilon_0}, \quad I_2 = \frac{\varphi_\infty - \varphi_2}{R_{2\infty}} = (\varphi_\infty - \varphi_2) \frac{\sigma_2 C_2}{\epsilon_2 \epsilon_0}.$$

$$\varphi_1 - \varphi_\infty = I_1 \frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\sigma_1 C_1}, \quad \varphi_\infty - \varphi_2 = I_2 \frac{\epsilon_2 \epsilon_0}{\sigma_2 C_2}.$$

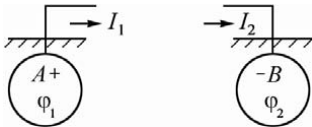


Рис. 5.12. К расчету сопротивления заземления

Поскольку станции A и B соединены через нагрузку, то $I_1 = I_2 = I$ и можно найти разность потенциалов между электродами A и B :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = I \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1 C_1} + \frac{\epsilon_2}{\sigma_2 C_2} \right).$$

Сопротивление между ними

$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1 C_1} + \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2 C_2} \right).$$

В случае шаровых электродов $C_1 = 4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r_1$, $C_2 = 4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r_2$ и

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma_1 r_1} + \frac{1}{4\pi\sigma_2 r_2}.$$

Полученное соотношение справедливо при условии, что радиусы шаров A и B много меньше расстояния между ними, и взаимным влиянием их друг на друга можно пренебречь.

Для уменьшения сопротивления между электродами необходимо, чтобы они были больших размеров и находились в почве с высокой электропроводностью.

5.5. Токи в цепи при зарядке и разрядке конденсатора

Рассмотрим конденсатор, на обкладках которого имеются заряды $\pm q$ и обкладки замыкаются через сопротивление R (рис. 5.13). Будем считать, что в каждый момент времени значение тока i в каждой точке цепи одинаково. Найдем, как изменяется ток в цепи со временем.

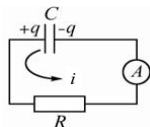


Рис. 5.13. Разряд конденсатора через сопротивление R происходит тем быстрее, чем меньше емкость и сопротивление цепи

Для такой цепи, согласно закону Ома, можем записать

$$\Delta\varphi = iR,$$

где $\Delta\varphi = q/C$ – разность потенциалов между обкладками конденсатора. Поскольку за положительное направление принято течение тока от положительной обкладки к отрицательной, то

$$i = -\frac{dq}{dt},$$

В результате для изменения заряда со временем получаем уравнение

$$\frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt}.$$

Откуда находим, что заряд на обкладках конденсатора экспоненциально убывает со временем

$$q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где q_0 – начальный заряд конденсатора.

Постоянная $\tau = RC$ называется временем релаксации. Через время τ заряд конденсатора убывает в e раз. Ток в цепи изменяется при разрядке конденсатора C через сопротивление R по закону

$$i = -\frac{dq}{dt} = i_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Здесь $i_0 = q_0/\tau$ – начальное значение тока.

Если конденсатор C подключить к источнику ЭДС \mathcal{E} через сопротивление R , то он начнет заряжаться. В этом случае заряд, появляющийся на обкладках конденсатора, препятствует прохождению тока (рис. 5.14).

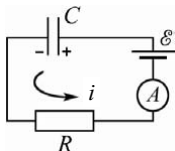


Рис. 5.14. Зарядка конденсатора C через сопротивление R происходит тем быстрее, чем меньше сопротивление R и емкость C

Запишем вторым законом Кирхгофа для контура, подключенного к источнику ЭДС, и получим уравнение для изменения заряда конденсатора со временем

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = \mathcal{E}, \quad \text{где } i = \frac{dq}{dt}, \text{ а } \int i dt = q.$$

Уравнение для нахождения изменения заряда в цепи со временем имеет вид

$$R \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} - \frac{q}{C}.$$

Его решением является функция

$$q(t) = \mathcal{E} C \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

при условии, что в начальный момент заряд на обкладках конденсатора отсутствовал ($q_0 = 0$). Здесь по-прежнему $\tau = RC$.

Ток в цепи со временем изменяется по закону

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Отношение $\mathcal{E}/R = i_0$ – ток в начальный момент зарядки конденсатора. При $t \rightarrow \infty$, $I \rightarrow 0$ – постоянный ток через емкость не течет.

Полученные формулы применимы лишь для достаточно больших сопротивлений R , характерных для полупроводников и диэлектриков.

Условие постоянства значений тока в каждой точке цепи в один и тот же момент времени не выполняется, например, для металлов, где $\tau = RC = \epsilon\epsilon_0\rho$ (см. п. 8.4); и в этом случае для меди удельное сопротивление $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, $\tau \approx 10^{-19}$ с, за это время электрическое поле пройдет расстояние $\tau c \leq 3 \cdot 10^{-11}$ м. Заряженное тело через проводники будет терять заряд медленнее, чем $\tau = RC$.

5.6. Тепловое действие тока. Закон Джоуля – Ленца

Прохождение тока по проводнику сопровождается выделением тепла – нагреванием проводников в цепи тока. Первое сообщение о тепловом действии тока появилось в 1841г. в «Philosophical magazine», автором его был манчестерский пивовар Джеймс Прескотт Джоуль (1818–1889). Он установил, что количество тепла, выделяемое током в проводнике, пропорционально квадрату силы тока. Аналогичные исследования были проведены петербургским академиком Э.Х. Ленцем, опубликовавшим свои работы в 1843 г. Ленц установил, что нагревание проволоки пропорционально ее сопротивлению и квадрату тока. Точность и обстоятельность опытов Ленца обеспечили признание закона, вошедшего в науку под названием Джоуля – Ленца. Теоретически закон теплового действия тока обоснован Клаузиусом в 1852 г. на основе закона сохранения энергии. При столкновении электрона проводимости с атомом в кристаллической решетке электрон теряет энергию, приобретаемую ранее от электрического поля. Эта энергия переходит в хаотическое движение атомов – тепло. Если сила тока в проводнике равна I , то за промежуток времени dt через любое сечение проводника проходит заряд $dq = Idt$, в частности из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 ; совершаемая при этом работа равна (рис. 5.15)

$$\delta A = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = I(\varphi_1 - \varphi_2)dt.$$

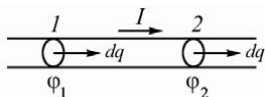


Рис. 5.15. Тепловая мощность тока равна произведению IU и связана с потерей энергии, приобретаемой электронами от электрического поля

Работа, совершаемая в единицу времени, – тепловая мощность тока – равна

$$W = \frac{\delta A}{dt} = I(\varphi_1 - \varphi_2) = IU.$$

Воспользовавшись законом Ома

$$I = U/R,$$

запишем выражение для мощности электрических сил, идущих на перемещение заряда по проводнику, в виде

$$W = I^2 R.$$

Равное количество мощности в силу закона сохранения энергии будет выделяться в иной форме, например в виде теплоты dQ/dt :

$$\frac{dQ}{dt} = I^2 R.$$

Полное количество теплоты, выделяемого за время t при постоянных I и R , равно

$$Q = I^2 R t.$$

Полученное соотношение выражает известный закон Джоуля – Ленца.

Пусть сила тока в проводнике сопротивлением $R = 20$ Ом нарастает в течение времени $\Delta t = 2$ с по линейному закону от $i_0 = 0$ до $i_{\max} = 6$ А. Определим количество теплоты Q_1 , выделившееся в этом проводнике за первую секунду, и Q_2 – за вторую.

Закон Джоуля – Ленца $Q = i^2 R t$, если сила тока в проводнике изменяется, справедлив для бесконечно малого промежутка времени и записывается в виде

$$dQ = i^2 R dt.$$

Сила тока i является некоторой функцией времени. В нашем случае

$$i = kt,$$

где k – коэффициент пропорциональности, равный отношению приращения силы тока к интервалу времени, за который произошло это приращение:

$$k = \Delta i / \Delta t = 3 \text{ А/с},$$

$$dQ = k^2 R t^2 dt.$$

Количества теплоты, выделившегося за промежуток времени Δt , равно интегралу от dQ в пределах от t_1 до t_2 :

$$Q = k^2 R \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R (t_2^3 - t_1^3).$$

Количество теплоты, выделившееся за первую секунду ($t_1 = 0$, $t_2 = 1$ с) $Q_1 = 60$ Дж, а за вторую ($t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с) $Q_2 = 420$ Дж. Отношение

$$Q_2/Q_1 = 420/60 = 7$$

– за вторую секунду выделится теплоты в 7 раз больше, чем за первую секунду.

В качестве еще одного примера определим сопротивление лампы мощностью $W = 60$ Вт, рассчитанной на напряжение $U = 220$ В. Рабочий ток в лампе $I = W/U$. По определению, $R = U/I$. Таким образом,

$$R = \frac{U^2}{W} = \frac{220^2}{60} = 806,7 \text{ Ом}.$$

Технические применения теплового действия тока многообразны: лампа накаливания, нагревательные приборы, электросварка и т.п.

Чтобы сосредоточить выделение мощности тока в нужном участке цепи, необходимо, чтобы сопротивление участка, где должно быть максимально тепловое действие тока, значительно превышало сопротивление всех остальных участков цепи. При последовательном соединении ток I в цепи одинаков, а количество выделяемой теплоты *пропорционально сопротивлению проводника*. Поэтому нить лампочки накаливания, выполненная из вольфрама и имеющая большое сопротивление, раскаляется, тогда как медные провода, подводящие к ней ток, остаются холодными. То же можно сказать о нагревательных приборах. По той же причине место плохого соединения двух проволок (плохой контакт) электрической цепи сильно нагревается током (для предотвращения этого в электрических установках концы соединяемых проволок тщательно спаивают, а ответственные механические контакты покрывают золотом).

Сосредоточение отдаваемой мощности (при последовательном соединении проводников) в проводнике, имеющем большое сопротивление, используется, в частности, при *распылении металлов* током. В этом случае ток подводят по массивным проводникам к тонкой проволочке и почти вся мощность тока

идет на нагревание этой тонкой проволоочки. Если взять батарею конденсаторов большой емкости, зарядить ее до разности потенциалов в десятки тысяч вольт и затем через массивные проводники и тонкую серебряную или другую проволоку разрядить эту батарею конденсаторов, то получается столь интенсивный разогрев проволоки, что она расплывается. При этом достигается температура порядка 20000 °С. Распыление проволок током применяют для покрытия поверхностей тонким слоем металла – для *металлизации поверхностей*.

При параллельном соединении токи в проводниках будут разные, зато они все имеют общее напряжение; количество теплоты, выделяемого ежесекундно, в этом случае *обратно пропорциональны сопротивлениям*, т.е. явление как раз противоположно тому, что наблюдается при последовательном соединении проводников. Поэтому если лампочки накаливания включены в цепь параллельно, как это и делается обыкновенно, то лампочка с меньшим сопротивлением будет брать на себя больше энергии, чем лампочка с большим сопротивлением.

Закон Джоуля – Ленца $Q = I^2 R t$ имеет интегральный характер и относится ко всему проводнику с сопротивлением R , по которому течет ток I . Он, как и закон Ома, может быть переписан в локальной – дифференциальной форме, характеризующей тепловыделение в произвольной точке проводника в единицу времени. Рассмотрим для этого бесконечно малый элемент проводника с током I , длиной Δl , площадью поперечного сечения ΔS , объемом $\Delta V = \Delta S \Delta l$ (рис. 5.16). Тепловая мощность тока равна

$$\Delta W = I^2 R = I \Delta \varphi = \mathbf{j} \Delta S \cdot \mathbf{E} \Delta l = (\mathbf{j}, \mathbf{E}) \Delta V.$$

Тепловая мощность, выделяемая в единице объема, – удельная мощность тока

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = (\mathbf{j}, \mathbf{E}).$$

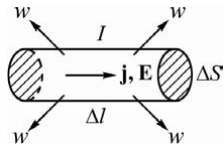


Рис. 5.16. Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме: в произвольной точке проводника удельная мощность тока w равна σE^2 (Вт/м³)

Согласно закону Ома в дифференциальной форме,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Поэтому можно переписать соотношение для w в виде

$$w = \sigma E^2 \left[\text{Вт/м}^3 \right].$$

В данной форме закон Джоуля – Ленца применим к любым проводникам, вне зависимости от их формы и однородности, при постоянных и переменных токах.

Полное количество теплоты, выделяемое во всем проводнике за время t , можно найти, вычислив сумму вкладов w по всем токам проводника за все время прохождения тока:

$$Q = \int_0^t dt \int_{(V)} w(\mathbf{r}, t) dV.$$

Закон Джоуля – Ленца применим, как показывает опыт, и к электролитам. Из этого следует, что работа электрического поля в электролитах не тратится на образование ионов. Ионы в растворе образуются в результате диссоциации молекул при растворении – электролитическая диссоциация.

Одним из важных применений теплового действия тока явилась открытая в 1802 г. В.В. Петровым *электрическая дуга*. Благодаря изобретениям П.Н. Яблочкова и В.Н. Чиколева электрическая дуга с 70-х гг. XIX в. широко использовалась для электрического освещения в дуговых лампах и прожекторах.

Другое важное применение электрической дуги – сварка металлов (рис. 5.17). Метод сварки металлов посредством электрической дуги был разработан Н.Н. Бенардосом в 1882 г. и усовершенствован в 1888 г. Н.Г. Славяновым. Теперь этот метод применяется во всем мире и определяет развитие многих отраслей техники. Для электросварки обычно используют ток силой 200 ÷ 300 А при разности потенциалов 25 ÷ 35 В.



Рис. 5.17. Дуговая сварка

Электрическая сварка металлов осуществляется и без видимой электрической дуги – посредством нагрева места соприкосновения тел током (*контактный метод*). В этом случае применяют ток очень большой величины (от 4000 до 25000 А) с малой разностью потенциалов. Свариваемые металлические детали приводят в соприкосновение давлением электродов последовательно каждый раз в одном каком-либо месте («точечная сварка» и «стыковая сварка») или же по шву («роликовая сварка»). Площадь поверхности соприкосновения незначительна, но сопротивление контакта велико в сравнении с сопротивлением

других участков цепи, составленной из хороших, массивных проводников. В месте контакта при большом токе выделяется в доли секунды такое количество тепла, что металл здесь плавится. При прекращении тока образовавшийся расплав снова быстро кристаллизуется. В итоге образуется прочное сочленение листов металла по местам сварки.

Громадное значение для развития культуры имела изобретенная в 1872 г. А.Н. Лодыгиным *электрическая лампа накаливания*. Массовое производство этих ламп было налажено Эдисоном после ряда усовершенствований в 80-х гг. XIX в.

В последующие годы было найдено, главным образом благодаря исследованиям Ленгмюра, что распыление вольфрамовой нити, вызываемое высокой температурой накала, можно уменьшить, если баллон лампы наполнять аргоном или азотом и скручивать нить вольфрама в тесную спираль. В современных галогенных лампах в состав газовой смеси добавляют галогены, обычно I или Vг. При этом можно существенно уменьшить размеры лампы и увеличить световую отдачу.

Широко вошли в обиход разнообразные по своему назначению электрические нагревательные приборы и электропечи. При хорошей теплоотдаче в открытых бытовых нагревательных приборах для проволоки из нихрома, никелина и других аналогичных сплавов допускается плотность тока до 50 А/мм^2 ; в закрытых нагревательных приборах допускается плотность тока не более $8 \div 10 \text{ А/мм}^2$.

В лабораторной практике часто применяют *муфельную печь*. Эта печь представляет собой фарфоровую трубку с обмоткой из платиновой или иридиевой проволоки, а для сравнительно низких температур (до $800 \text{ }^\circ\text{C}$) – с обмоткой из проволоки, изготовленной из никелевых сплавов. Для уменьшения потерь на лучеиспускание трубка с обмоткой накаливания вставляется в другую трубку, причем промежуток между стенками трубок заполняется магниезией. Тигель с нагреваемым веществом вносят в цилиндрическую полость печи и устанавливают нужную температуру, регулируя силу тока, пропускаемого через обмотку печи.

Еще более высокий нагрев осуществляется в *дуговых печах*, применяемых в электрометаллургии для выработки высококачественных сталей, содержащих примесь наиболее тугоплавких металлов – вольфрама, молибдена и др. (сталеплавильная дуговая печь, рассчитанная на одновременную нагрузку в 10 т, потребляет мощность около 3500 кВт; более мощные печи используются для выплавки чугуна из руд).

Вследствие нагревания при большой величине тока провод плавится. В таблице приводятся величины тока, расплавляющего провод диаметром 1 мм для различных металлов.

Материал	Ток (А), расплавляющий провод диаметром в 1 мм
Свинец	10,8
Олово	12,8
Железо	24
Алюминий	59
Медь	80

При изменении диаметра провода величина тока, расплавляющего провод, изменяется приблизительно пропорционально диаметру в степени 3/2 и может быть вычислена по формуле

$$I = I_0 \cdot d^{3/2},$$

где I_0 – сила тока при диаметре проволоки $d = 1$ мм; d – диаметр проволоки, мм.

В электротехнической практике допустимой величиной тока считается величина тока, в 7÷10 раз меньшая, чем ток, расплавляющий провод. Так, для медного провода диаметром в 1 мм допустимой считают величину тока в 11 А. Диаметр d (в мм) свинцовой проволоки, расплавляющейся при заданной величине тока (в амперах), можно найти по формуле, которая является следствием предыдущей формулы:

$$d \approx \frac{1}{5} \sqrt[3]{I^2}.$$

Железная и медная проволоки плавятся при той же величине тока, что и свинцовая, когда диаметр железной проволоки приблизительно в два раза, а медной – в четыре раза меньше диаметра свинцовой проволоки, вычисленного по выше приведенной формуле.

Основные выводы

Электрический ток – направленное движение заряженных частиц. Сила постоянного тока

$$I = q/t,$$

где q – количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника за время t . В СИ ток измеряется в амперах. Если ток не постоянен, то i – это отношение заряда dq , прошедшего через поперечное сечение проводника за время dt :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

– это мгновенная скорость переноса заряда через поперечное сечение проводника.

Плотность электрического тока есть векторная величина, равная произведению объемной плотности электрических зарядов ρ на средний вектор скорости \mathbf{u} направленного движения зарядов:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{u},$$

где $\rho = en$, n – концентрация зарядов; e – их величина. Вектор \mathbf{j} по направлению совпадает с направлением движения положительных носителей заряда. Плотность тока измеряется в амперах на квадратный метр.

Сопротивление однородного проводника

$$R = \rho l/S,$$

где ρ – удельное сопротивление вещества проводника; l – длина проводника, обладающего сопротивлением R ; S – площадь поперечного сечения проводника.

Проводимость G проводника и удельная проводимость σ вещества

$$G = 1/R, \quad \sigma = 1/\rho.$$

Зависимость удельного сопротивления от температуры

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

где ρ и ρ_0 – удельные сопротивления соответственно при t и 0 °C; t – температура (по шкале Цельсия); α – температурный коэффициент сопротивления.

Сопротивление соединения проводников:

последовательного $R = \sum_{i=1}^n R_i$, параллельного $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$.

Здесь R_i – сопротивление i -го проводника; n – число проводников.

Закон Ома в интегральной форме:

для неоднородного участка цепи $I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \mathcal{E}_{12}}{R} = \frac{U}{R}$;

для однородного участка цепи $I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R} = \frac{U}{R}$;

для замкнутой цепи ($\varphi_1 = \varphi_2$) $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

Здесь $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи; \mathcal{E}_{12} – ЭДС источников тока, входящих в участок; U – напряжение на участке цепи; R – полное сопротивление цепи (участка цепи); \mathcal{E} – ЭДС всех источников тока цепи.

Закон Ома в дифференциальной форме определяет вектор плотности электрического тока в данной точке проводника

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где σ – удельная проводимость проводника; \mathbf{E} – напряженность электрического поля.

Правила Кирхгофа. Первое правило: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0,$$

где n – число токов, сходящихся в узле.

Второе правило: в замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на всех участках сопротивления контура равна алгебраической сумме электродвижущих сил в этом контуре, т.е.

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=0}^k \mathcal{E}_i,$$

где I_i и R_i – сила тока и сопротивление в i -й ветви контура; \mathcal{E}_i – источник ЭДС в i -й ветви контура; n – число ветвей в контуре, содержащих сопротивление; k – число ветвей в контуре, содержащих источники ЭДС.

Работа, совершаемая электростатическим полем и сторонними силами в участке цепи постоянного тока за время t ,

$$A = IUt.$$

Мощность тока

$$W = IU.$$

Закон Джоуля – Ленца в интегральной форме:

$$Q = I^2 R t,$$

где Q – количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за время t .

Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме:

$$w = \sigma E^2,$$

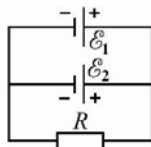
где w – объемная плотность тепловой мощности (Вт/м³).

Закон Джоуля – Ленца справедлив при условии, что участок цепи неподвижен и в нем не совершаются химические превращения.

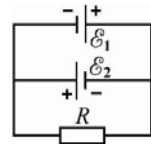
Упражнения

1. Ток в проводнике равномерно нарастает от $i_0 = 0$ до $i = 3$ А в течение времени $t = 10$ с. Определить заряд q , прошедший в проводнике. Ответ: 15 Кл.
2. Определить плотность тока j в железном проводнике длиной $l = 10$ м, если провод находится под напряжением $U = 6$ В. Удельное сопротивление железа $\rho = 9,8 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Ответ: 6,1 мА/м³.
3. Напряжение U на шинах электростанции равно 6,6 кВ. Потребитель находится на расстоянии $l = 10$ км. Определить площадь S сечения медного провода, который следует взять для устройства двухпроводной линии передачи, если сила тока I в линии равна 20 А и потери напряжения в проводах не должны превышать 3%. Удельное сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Ответ: $S \geq 34,2$ мм².
4. Вычислить сопротивление R графитового проводника, изготовленного в виде прямого кругового усеченного конуса высотой $h = 20$ см и радиусами оснований $r_1 = 12$ мм и $r_2 = 8$ мм. Температура t проводника равна 20° С. Удельное сопротивление графита $\rho = 3,9 \cdot 10^{-6}$ Ом·м. Ответ: 2,58 мОм.
5. На одном конце цилиндрического медного проводника сопротивление $R_0 = 10$ Ом (при 0 °С) поддерживается температура $t_1 = 20$ °С, на другом $t_2 = 400$ °С. Найти сопротивление R проводника, считая градиент температуры вдоль его оси постоянным. Удельное сопротивление меди при 20 °С $1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Ответ: 18,8 Ом.
6. Внутреннее сопротивление r батареи аккумуляторов равно 3 Ом. Сколько процентов от точного значения ЭДС составляет погрешность, если, измеряя разность потенциалов на зажимах батареи вольтметром с сопротивлением $R_B = 200$ Ом, принять ее равной ЭДС? Ответ: 1,48 %.
7. К источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 1,5$ В присоединили катушку с сопротивлением $R = 0,1$ Ом. Амперметр показал силу тока, равную $I_1 = 0,5$ А. Когда к источнику тока присоединили последовательно еще один источник тока с такой же ЭДС, то сила тока I в той же катушке оказалась равной 0,4 А. Определить внутреннее сопротивления r_1 и r_2 первого и второго источников тока. Ответ: 2,9 Ом; 4,5 Ом.
8. Две группы из трех последовательно соединенных элементов соединены параллельно. ЭДС \mathcal{E} каждого элемента равна 1,2 В, внутреннее сопротивление $r = 0,2$ Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление $R = 1,5$ Ом. Найти силу тока I во внешней цепи. Ответ: 2 А.

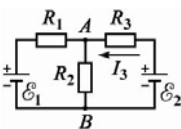
9. Две батареи аккумуляторов ($\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$, $r_1 = 1 \text{ Ом}$; $\mathcal{E}_2 = 8 \text{ В}$, $r_2 = 2 \text{ Ом}$) и сопротивление ($R = 6 \text{ Ом}$) соединены, как показано на рисунке. Найти силу тока в батареях и сопротивлении.
 Ответ: 1,6 А; 0,2 А; 1,4 А.



10. Две батареи аккумуляторов ($\mathcal{E}_1 = 8 \text{ В}$, $r_1 = 2 \text{ Ом}$; $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ В}$, $r_2 = 1,5 \text{ Ом}$) и сопротивление ($R = 10 \text{ Ом}$) соединены, как показано на рисунке. Вычислить силу тока I , текущего через сопротивление. Ответ: 0.



11. Определить силу тока I_3 в сопротивлении R_3 и напряжение U_3 на концах сопротивления, если $\mathcal{E}_1 = 4 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 3 \text{ В}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 6 \text{ Ом}$, $R_3 = 1 \text{ Ом}$. Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.
 Ответ: $I_3 = 0$; $U_3 = 0$.



12. Три батареи с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 5 \text{ В}$ и $\mathcal{E} = 10 \text{ В}$ и одинаковыми внутренними сопротивлениями r , равными 1 Ом, соединены между собой одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводов ничтожно мало. Определить силы токов I , идущих через каждую батарею. Ответ: 3 А; 4 А; 1 А.

13. Лампочка и сопротивление, соединенные последовательно, присоединены к источнику тока. Напряжение U на зажимах лампочки равно 40 В, сопротивление R равно 10 Ом. Внешняя цепь потребляет мощность $W = 120 \text{ Вт}$. Найти силу тока I в цепи. Ответ: 2 А.

14. ЭДС батареи аккумуляторов $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$, сила тока I короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность W_{max} можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей? Ответ: 15 Вт.

15. К батарее аккумуляторов, ЭДС \mathcal{E} которой равна 2 В и внутреннее сопротивление $r = 0,5 \text{ Ом}$, присоединен проводник. Определить: 1) сопротивление R проводника, при котором мощность, выделяемая в нем, максимальна; 2) мощность W , которая при этом выделяется в проводнике. Ответ: 0,5 Ом; 2 Вт.

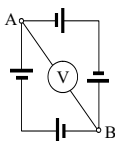
16. ЭДС \mathcal{E} батареи равна 20 В. Сопротивление R внешней цепи равно 2 Ом, сила тока $I = 4 \text{ А}$. Найти КПД батареи. При каком значении внешнего сопротивления R КПД будет равен 99%? Ответ: 0,4; 297 Ом.

17. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС \mathcal{E} батареи равна 24 В, внутреннее сопротивление $r = 1 \text{ Ом}$. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность $W =$

= 80 Вт. Вычислить силу тока I в цепи и КПД η устройства.
 Ответ: 1) $I_1 = 20$ А, $\eta_1 = 0,17$; 2) $I_2 = 4$ А, $\eta_2 = 0,83$.

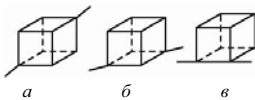
18. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена только первая секция, то вода закипает через $t_1 = 15$ мин, если только вторая, то через $t_2 = 30$ мин. Через сколько минут закипит вода, если обе секции включить последовательно? параллельно? Ответ: 45 мин; 10 мин.

19. При силе тока $I_1 = 3$ А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность $W_1 = 18$ Вт, при силе тока $I_2 = 1$ А – соответственно $W_2 = 10$ Вт. Определить ЭДС \mathcal{E} и внутреннее сопротивление r батареи. Ответ: 12 В; 2 Ом.



20. Что покажет вольтметр, если его включить вместе с четырьмя одинаковыми гальваническими элементами так, как показано на рисунке. ЭДС каждого элемента \mathcal{E} , внутреннее сопротивление r . Сопротивлением проводов пренебречь.
 Ответ: 0.

Задачи



1. Проволочный куб составлен из проводников. Сопротивление R_1 каждого проводника, составляющего ребро куба, равно 1 Ом. Вычислить сопротивление R этого куба, если он включен в электрическую цепь, как

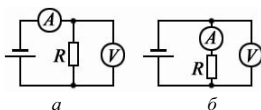
показано на рисунке. Ответ: $5/6$ Ом.

2. Катушка и амперметр соединены последовательно и присоединены к источнику тока. К зажимам катушки присоединен вольтметр сопротивлением $R_v = 1$ кОм. Показания амперметра $I = 0,5$ А, вольтметра $U = 100$ В. Определить сопротивление R катушки. Сколько процентов от точного значения сопротивления катушки составит погрешность, если не учитывать сопротивление вольтметра? Ответ: 250 Ом; 20%.

3. Зашунтированный амперметр измеряет токи силой до $I = 10$ А. Какую наибольшую силу тока может измерить этот амперметр без шунта, если сопротивление R_a амперметра равно 0,02 Ом и сопротивление $R_{ш}$ шунта равно 5 мОм? Ответ: 2 А.

4. Какая из схем, изображенных на рисунке, более пригодна для измерения больших сопротивлений и какая – для измерения малых сопротивлений? Вычислить погрешность, допускаемую при

измерении с помощью этих схем сопротивлений $R_1 = 1 \text{ кОм}$ и $R_2 = 10 \text{ Ом}$. Принять сопротивления вольтметра R_v и амперметра R_a соответственно равными 5 кОм и 2 Ом .

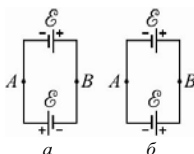


Ответ: а) 16,7%, 0,2%; б) 0,2%, 20%.

5. Имеется N одинаковых гальванических элементов с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r_i каждый. Из этих элементов требуется собрать батарею, состоящую из нескольких параллельно соединенных групп, содержащих по n последовательно соединенных элементов. При каком значении n сила тока I во внешней цепи, имеющей сопротивление R , будет максимальной? Чему будет равно внутреннее сопротивление R_i батареи при таком значении n ? Ответ: $n = (NR/r_i)^{1/2}$; $R_i = R$.

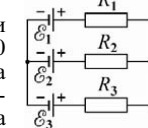
6. Даны 12 элементов с ЭДС $\mathcal{E} = 1,5 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,4 \text{ Ом}$. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной из них батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление $R = 0,3 \text{ Ом}$? Определить максимальную силу тока I_{max} . Ответ: 4 параллельные группы по 3 последовательно соединенных ЭДС в группе; $I_{\text{max}} = 7,5 \text{ А}$.

7. Два одинаковых источника тока с ЭДС $\mathcal{E} = 1,2 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,4 \text{ Ом}$ соединены, как показано на рис. а, б. Определить силу тока I в цепи и разность потенциалов U между точками A и B в первом и втором случаях. Ответ: а) $I = 3 \text{ А}$, $U = 0$; б) $I = 0$, $U = 1,2 \text{ В}$.

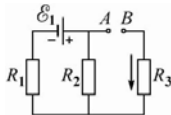


8. Два элемента ($\mathcal{E}_1 = 1,2 \text{ В}$, $r_1 = 0,1 \text{ Ом}$; $\mathcal{E}_2 = 0,9 \text{ В}$, $r_2 = 0,3 \text{ Ом}$) соединены одноименными полюсами. Сопротивление R соединительных проводов равно $0,2 \text{ Ом}$. Определить силу тока I в цепи. Ответ: $0,5 \text{ А}$.

9. Три источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 11 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ В}$ и $\mathcal{E}_3 = 6 \text{ В}$ и три сопротивления $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$ и $R_3 = 2 \text{ Ом}$ соединены, как показано на рисунке. Определить силы токов I в сопротивлениях. Внутреннее сопротивление источника тока пренебрежимо мало. Ответ: $0,8 \text{ А}$; $0,3 \text{ А}$; $0,5 \text{ А}$.



10. Три сопротивления $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ Ом}$ и $R_3 = 3 \text{ Ом}$, а также источник ЭДС $\mathcal{E} = 1,4 \text{ В}$ соединены, как показано на рисунке. Определить ЭДС \mathcal{E} источника тока, который надо



подключить в цепь между точками A и B , чтобы в сопротивлении R_3 шел ток силой $I = 1$ А в направлении, указанном стрелкой. Сопротивлением источника тока пренебречь. Ответ: 3,6 В.

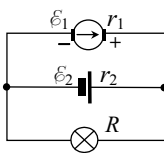
11. Сила тока в проводнике сопротивлением $r = 100$ Ом равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 10$ А в течение времени $t = 30$ с. Определить количество теплоты Q , выделившееся за это время в проводнике. Ответ: 100 кДж.

12. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 12$ Ом равномерно убывает от $I_0 = 5$ А до $I = 0$ в течение времени $t = 10$ с. Какое количество теплоты выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени? Ответ: 1 кДж.

13. По проводнику сопротивлением $R = 3$ Ом течет ток, сила которого возрастает. Количество теплоты Q , выделившееся в проводнике за время $t = 8$ с, равно 200 Дж. Определить заряд q , прошедший за это время по проводнику. В момент времени, принятый за начальный, ток в проводнике равен нулю. Ответ: 20 Кл.

14. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 15$ Ом равномерно возрастает от $I_0 = 0$ до некоторого максимального значения в течение времени $t = 5$ с. За это время в проводнике выделилось количество теплоты $Q = 10$ кДж. Найти среднюю силу тока $\langle I \rangle$ в проводнике за этот промежуток времени. Ответ: $\langle I \rangle = 10$ А.

15. Сила тока в проводнике равномерно увеличивается от $I_0 = 0$ до некоторого максимального значения в течение времени $t = 10$ с. За это время в проводнике выделилось количество теплоты $Q = 1$ кДж. Определить скорость нарастания тока в проводнике, если его сопротивление R равно 3 Ом. Ответ: $dl/dt = 1$ А/с.



16. Генератор постоянного тока с ЭДС $\varepsilon_1 = 12$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0,1$ Ом заряжает аккумуляторную батарею с ЭДС $\varepsilon_2 = 10$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 0,5$ Ом. Параллельно батарее включена лампочка с сопротивлением $R_3 = 3$ Ом. Определите ток в аккумуляторной

батареи и в лампочке. Ответ: 2,7 А, 3,8 А.

17. Сопротивление электролампочки ($U = 120$ В, $W = 100$ Вт) в накаливаемом состоянии больше, чем в холодном (при 20°C), в 10 раз. Найти ее сопротивление R в холодном состоянии и температурный коэффициент сопротивления α , если температура нити в рабочем состоянии равна 2000°C . Ответ: $R \approx 14,4$ Ом, $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3}$ 1/К.

6. КЛАССИЧЕСКОЕ И КВАНТОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ И ПОЛУПРОВОДНИКОВ

6.1. Экспериментальные данные

Кристаллическая решетка металлов состоит из остовов положительно заряженных ионов, расположенных в узлах решетки, и «свободных» электронов, беспорядочно движущихся в промежутках между ионами, образуя особого рода электронный газ. В отсутствие внешнего электрического поля электроны движутся хаотически. Появление поля вызывает направленное движение электронов вдоль силовых линий поля. Появляется электрический ток. Сталкиваясь при своем движении с дефектами решетки или рассеиваясь на ионах, совершающих ангармонические колебания, электроны передают решетке избыток, приобретенный под действием поля энергии. Рассеяние электронов на примесях, дефектах, ионах является причиной возникновения сопротивления и теплового действия электрического тока. Ионы в металлах не участвуют в переносе электричества, иначе бы прохождение тока сопровождалось переносом вещества. К. Рикке (1845–1915) в течение года пропускал ток через три поставленных друг на друга цилиндра: медный, алюминиевый и снова медный (рис. 6.1).

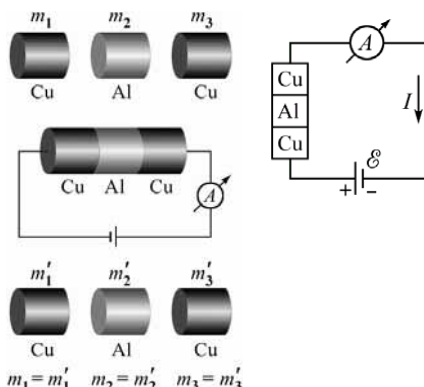


Рис. 6.1. Схема опыта Рикке. При прохождении по цепи в течение года $3,5 \cdot 10^6$ Кл электричества не было обнаружено переноса вещества между медными и алюминиевыми цилиндрами

За год через цилиндры прошло $3,5 \cdot 10^6$ Кл электричества, но проникновения металлов друг в друга и изменения их массы с точностью до $\pm 3 \cdot 10^{-8}$ кг не было обнаружено. Более прямое указание на природу «свободных» носителей заряда в металлах дали опыты, идея которых и качественное осуществление было выполнено русскими физиками Л.И. Мандельштамом (1879–1944) и Н.Д. Папалекси (1880–1947) в 1913 г. Катушка, содержащая большое число витков проволоки, раскручивалась и быстро тормозилась, а электроны после торможения продолжали двигаться, что приводило к появлению тока в замкнутой цепи, при этом в используемом ими телефоне был слышен щелчок. Первая мировая война не позволила завершить эти опыты. Опыт был осуществлен Р. Толменом (1881–1948) и Т. Стюартом (1881–1928) в 1916 г. В этих опытах катушка приводилась в быстрое вращение вокруг оси с линейной скоростью до 300 м/с. Концы провололочной обмотки соединялись длинными скручивающимися проводами с чувствительным баллистическим гальванометром (рис. 6.2). Индукционные токи в магнитном поле Земли исключались. При быстром торможении катушки наблюдалось отклонение баллистического гальванометра, что позволяло измерить полный заряд, прошедший через гальванометр. Величина силы инерции при торможении равна ma , она уравнивается полем кулоновских сил eE при инерционном смещении электронов

$$F = m \frac{v_n - v_k}{\Delta t} = eE = e \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{l}.$$

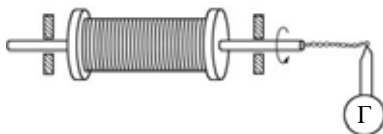


Рис. 6.2. Определение удельного заряда в опытах Толмена – Стюарта инерционным методом с помощью баллистического гальванометра. Идея и качественная реализация опыта принадлежат Мандельштаму и Папалекси

Здесь m , e – масса и заряд частиц, ответственных за прохождение тока в проводнике; l – длина проводника; v_n , v_k – начальная и конечная линейная скорости обода вращающейся катушки ($v_k = 0$); Δt – время торможения. Согласно закону Ома, имеем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR = \frac{\Delta q}{\Delta t} R,$$

где Δq – заряд, прошедший по цепи и измеренный баллистическим гальванометром.

В результате из равенства

$$m \frac{v_n}{\Delta t} = e \frac{\Delta q R}{l \Delta t}$$

найдем величину удельного заряда частицы, ответственной за прохождение тока в металлах, выраженную через экспериментально определяемые параметры:

$$\frac{e}{m} = \frac{v_n l}{\Delta q R}.$$

Удельный заряд (e/m) в пределах ошибок измерений оказался равным удельному заряду электрона $1,76 \cdot 10^{-11}$ Кл/кг. Таким образом, экспериментально доказано, что свободными носителями заряда, ответственными за появление тока в металлах, являются электроны. С точки зрения классического подхода считается, что электроны представляют в металлах идеальный газ. В газе «свободных» электронов силы отталкивания между электронами компенсируются силами притяжения электронов к регулярно расположенным остовам кристаллической решетки.

6.2. Вывод законов Ома и Джоуля – Ленца в классической теории электронной проводимости металлов

Исходя из перечисленных фактов, попытаемся получить закон Ома и выражение для электропроводности металла. Воспользуемся определением величины плотности тока

$$\mathbf{j} = en\mathbf{u}.$$

Электроны, согласно классической теории проводимости, представляют точки, движущиеся под действием внешнего поля \mathbf{E} . В отсутствие поля средняя скорость направленного движения электронов \mathbf{u} равна нулю, а средняя скорость хаотического движения v определяется выражением, полученным в молекулярно-кинетической теории (см. ч. 1, п. 9.3):

$$v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}} \approx 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Под действием поля \mathbf{E} электроны приобретают добавочную скорость \mathbf{u} (рис. 6.3). Величина этой скорости много меньше средней скорости хаотического движения практически для всех реально достижимых токов.

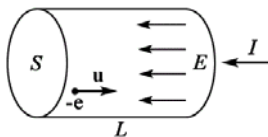


Рис. 6.3. Отрезок проводника длиной L (показан электрон проводимости, движущийся со средней скоростью направленного движения \mathbf{u})

При плотности тока $\approx 100 \text{ А/мм}^2$
 $= 10^8 \text{ А/м}^2$ проводники уже плавятся. Например, для меди $j_{\text{пред}} = \frac{63}{63 \cdot 10^6} \text{ А/мм}^2$
 (п. 5.6). Тогда

$$\mathbf{u} = \frac{j_{\text{пред}}}{en} = \frac{63 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,5 \cdot 10^{28}} \approx 4,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{М}}{\text{с}} = 4,6 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$$

где $n = N_A \cdot \rho / \mu \approx 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ – концентрация электронов в меди.

Поэтому столкновения электронов с дефектами, примесями и ионами решетки связаны главным образом с тепловым движением электронов и происходят в среднем через промежуток времени

$$\tau = \frac{l}{v},$$

где l – длин свободного пробега электрона.

За время τ электрон в электрическом поле \mathbf{E} может приобрести скорость направленного движения:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}\tau = \frac{\mathbf{F}}{m} \tau = \frac{e\mathbf{E}}{m} \tau,$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = e\mathbf{E}/m$ – ускорение, сообщаемое электрону силой $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$.

Среднее значение скорости \mathbf{u}

$$\mathbf{u}_{\text{ср}} = \frac{0 + \mathbf{u}}{2} = \frac{1}{2} \frac{e\mathbf{E}}{m} \tau.$$

Подставив величину $\mathbf{u}_{\text{ср}}$ в выражение для плотности тока $\mathbf{j} = en\mathbf{u}_{\text{ср}}$, получим

$$\mathbf{j} = \frac{e^2 n l}{2m v} \mathbf{E}.$$

Плотность тока пропорциональна напряженности поля, что соответствует закону Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Величина электропроводности равна

$$\sigma = \frac{e^2 n l}{2 m v}.$$

Средняя скорость теплового движения

$$v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

соответственно, σ можно записать в виде

$$\sigma = \frac{\sqrt{\pi} e^2 n l}{4 \sqrt{2 k T m}}.$$

Эта формула не допускает непосредственной проверки, поскольку неизвестны зависимости n и l от температуры.

Металлы оказываются хорошими проводниками не только электрического тока, но и тепла. Это связано с тем, что переносчиками тепла и электричества в металлах являются свободные электроны, а роль ионов в передаче тепла пренебрежимо мала. В этом случае коэффициент теплопроводности для металлов будет равен (см. ч. 1, п. 10.5)

$$\lambda = \frac{1}{3} n v l C_V,$$

где $C_V = (3/2)k$ – теплоемкость при постоянном объеме, в расчете на один свободный электрон.

Разделив λ на σ и учитывая, что $m v^2 / 2 \approx (3/2)kT$, имеем

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{2}{3} m v^2 \frac{C_V}{e^2} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T$$

– закон Видемана – Франца, утверждающий, что отношение коэффициента теплопроводности λ для металлов к удельной электропроводности σ пропорционально температуре и не зависит от рода металла. Этот закон был установлен в 1853 г. экспериментально немецкими физиками Г. Видеманом и Р. Францем. Теоретически закон был обоснован в 1902 г. немецким физиком П. Друде. Совпадение результатов теории П. Друде с экспериментом считалось долгое время веским доказательством справедливости классической теории электропроводности и теплопроводности металлов. Но реально классическая теория дает неверные значения для v^2 и C_V . Случайно эти ошибки

компенсируют друг друга, и фактически $C_V v^2$ получается верной. Последовательный вывод закона Видемана – Франца может быть выполнен только в рамках квантовой механики.

Классическая теория электропроводности дает правильное объяснение закону Джоуля – Ленца, т.е. тепловому действию тока. Поскольку при каждом столкновении частицей рассеивается дополнительно приобретенная энергия $mv^2/2$, а число таких столкновений в единице объема равно n/τ , то полное тепловыделение в единице объема

$$w = \frac{mv^2}{2} \frac{n}{\tau} = \frac{e^2 nl}{2mv} E^2.$$

Удельная мощность тока w пропорциональна квадрату электрического поля и удельной электропроводности $\sigma = \frac{e^2 nl}{2mv}$, что соответствует эксперименту.

Вместе с очевидными успехами классическая теория электропроводности столкнулась с принципиальными трудностями в объяснении теплоемкости металлов, зависимости удельного сопротивления от температуры и в количественном описании явлений электропроводности и теплопроводности металлов.

Рассмотрим вопрос о теплоемкости. Если считать, что электроны ведут себя как идеальный газ точечных частиц ($mv^2/2 \approx (3/2)kT$), то теплоемкость единицы объема такого газа при постоянном объеме

$$C_V^e = \frac{d}{dT} \frac{\langle mv^2 \rangle}{2} n^e = \frac{d}{dT} \frac{3}{2} kT n^e = \frac{3}{2} k n^e.$$

Теплоемкость кристаллической решетки равна (трехмерные осцилляторы, для которых $E_{\text{колеб}} = 3kT$)

$$C_V^{\text{ion}} = \frac{dE_{\text{колеб}}}{dT} n^{\text{ion}} = \frac{d}{dT} 3kT n^{\text{ion}} = 3k n^{\text{ion}}.$$

Здесь n^e – концентрация свободных электронов, n^{ion} – концентрация ионов решетки.

Экспериментально измеряется полная теплоемкость

$$C_V = C_V^{\text{ion}} + C_V^e = \frac{3}{2} k (2n^{\text{ion}} + n^e).$$

Если считать, согласно классической теории электропроводности, что каждый ион кристаллической решетки отдает один свободный электрон ($n^e \approx n^{\text{ion}}$), то теплоемкость металлического образца со свободными электронами

$$C_V = \frac{9}{2} kn^{ion}.$$

должна быть заметно больше теплоемкости диэлектрического материала, не содержащего свободных электронов:

$$C_V = \frac{6}{2} kn^{ion}.$$

Однако такого различия в теплоемкостях проводящих и диэлектрических металлов не наблюдается. Из этого следует, что концентрация свободных электронов в металлах должна быть столь мала ($n^e \ll n^{ion}$), что трудно получить электропроводность, согласующуюся с опытом $\sigma = \frac{e^2 nl}{2m\nu}$ при разумной с точки зрения классических представлений длине свободного пробега электронов. Так, для серебра при 300 K $l \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см, а при 14 K $l \approx 2 \cdot 10^{-3}$ см, в то время как расстояние между смежными атомами в кристалле $d \approx 10^{-8}$ см. Это противоречие явилось одним из возражений против классической электронной теории металлов.

6.3. Электропроводность металлов.

Термометры сопротивления, болометры, тензометры

Из всех металлов наибольшую удельную электропроводность имеет серебро. Электропроводность меди только на 10% меньше электропроводности серебра, притом медь во много раз дешевле, поэтому применяемые в электротехнике высококачественные проводники чаще всего изготавливаются из меди, очищенной от всех примесей. Сопротивление 1 м медной проволоки при сечении в 1 мм^2 (т.е. диаметром около 1,13 мм) составляет 0,0175 Ом. Медная проволока сечением в 1 мм^2 имеет сопротивление в 1 Ом при длине 57 м и массе $m \approx 0,5$ кг. Для изготовления проводов применяют также алюминий, удельное сопротивление которого в 1,5 раза превышает удельное сопротивление меди.

Удельные сопротивления и удельные проводимости некоторых металлов, сплавов и углей указаны в таблице.

Сопротивление химически чистых металлов с повышением температуры возрастает, увеличиваясь с каждым градусом примерно на 0,4% от сопротивления при 0 °С.

Для многих химически чистых металлов даже при значительном нагревании сохраняется пропорциональность между увеличением сопротивления и приростом температуры. Это

позволяет вычислить сопротивление при температуре t °С по формуле

$$R = R_0(1 + \alpha t),$$

где R_0 – сопротивление при 0 °С и α – температурный коэффициент сопротивления.

Электрическое сопротивление и электропроводность металлов, сплавов и углей (при температуре 18 °С)

	Удельное сопротивление, Ом·м·10 ⁶	Удельная проводимость, Ом ⁻¹ ·м ⁻¹ ·10 ⁻⁶
Чистые металлы		
Серебро	0,0158	63,3
Медь	0,0175	57
Золото	0,022	45,4
Алюминий	0,027	37
Вольфрам	0,053	18,8
Цинк	0,06	17
Никель	0,073	13,7
Железо	0,1	10
Платина	0,108	9,3
Олово	0,113	8,8
Свинец	0,208	4,8
Сурьма	0,34	2,5
Ртуть	0,954	1,05
Висмут	1,18	0,84
Сплавы		
Латунь(66% меди и 34% цинка) . . .	0,063	15,8
Нейзильбер (65% меди, 20% цинка и 15% никеля)	0,31	3,2
Манганин (85% меди, 12% марганца и 3% никеля)	0,39	2,6
Никелин (54% меди, 20% цинка и 26% никеля)	0,42	2,4
Реоган (84% меди, 12% марганца и 4% цинка)	0,45	2,2
Константан (58,8% меди, 40% никеля и 1,2% марганца)	0,47	2,1
Нихром (67,5% никеля, 15% хрома, 16% железа и 1,5% марганца)	1,05	0,95

Для некоторых металлов (Ag, Al, Zn, Cu и др.) $\alpha \approx 0,00367 = 1/273 \text{ K}^{-1}$. Следовательно, в этих случаях сопротивление примерно пропорционально абсолютной температуре:

$$R \approx R_0 \frac{T}{T_0}, \text{ где } T_0 = 273 \text{ K.}$$

Это означает, что при нагревании от $0 \text{ }^\circ\text{C}$ до $135 \text{ }^\circ\text{C}$ сопротивление металла возрастает примерно в 1,5 раза.

Температурные коэффициенты некоторых металлов и сплавов в области комнатных температур приведены в таблице.

Температурные коэффициенты некоторых металлов и сплавов

Металл	Температурный коэффициент, K^{-1}	Сплав	Температурный коэффициент, K^{-1}
Серебро	0,0037	Латунь	0,0015
Алюминий	0,0038	Нихром	0,0002
Цинк	0,0039	Никелин	0,00002
Медь	0,004	Манганин	0,000008
Свинец	0,0041	Константан	0,000004
Железо	0,006		

Исключительным постоянством удельного сопротивления отличаются константан и манганин. При уменьшении абсолютной температуры в пять раз (от 273 K до 56 K) сопротивление манганина уменьшается только на 5%. Самые тонкие манганиновые провода изготавливают диаметром 4 мкм ; их покрывают стекляной изоляцией; километр такого провода весит меньше 1 г.

На рис. 6.4 представлена зависимость сопротивления некоторых металлов от температуры. Рис. 6.5 показывает, во сколько раз изменяется сопротивление железа, свинца и меди при нагревании их от $0 \text{ }^\circ\text{C}$ на несколько сотен градусов. Мы видим, что повышение температуры железа до $600 \text{ }^\circ\text{C}$ вызывает почти восьмикратное увеличение его удельного сопротивления. Повышение температуры до $500 \text{ }^\circ\text{C}$ вызывает примерно трехкратное увеличение сопротивления меди. Сопротивление константана при этом остается почти неизменным. Зависимостью электропроводности от температуры пользуются для измерения температуры приборами, называемыми термометром сопротивления и болометром. Чувствительным элементом термометра сопротивления является терморезистор. Металлический терморезистор представляет собой проволоку (Pt, Ni, Fe), намотанную на крестообразную катушку из слюды или керамики и включенную в качестве одного из плеч в измерительный мост Уитстона. В другой измерительной схеме терморезистор включают в цепь

тока небольшой величины и напряжение на терморезисторе, меняющееся в зависимости от температуры среды, подводят к прибору, который многократно усиливает это напряжение.

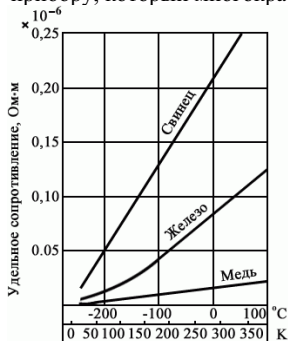


Рис. 6.4. Температурный ход удельного сопротивления чистых металлов

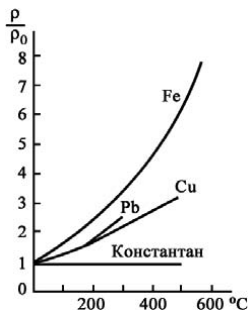


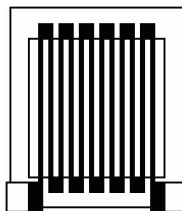
Рис. 6.5. Изменение удельного сопротивления металлов, отнесенного к сопротивлению при 0 °С, в зависимости от температуры

Термометры сопротивления позволяют измерять температуру с точностью до тысячных долей градуса. Термометры сопротивления часто применяют для измерения высоких температур порядка нескольких сотен градусов, но эти термометры в особенности незаменимы при измерении низких температур. Термометры, предназначенные для измерения низких температур, как правило, изготовляют не из платиновой проволоки, а из свинцовой или золотой.

Болометры (от греч. *bolē* – бросок, луч; *metrēō* – измеряю) представляют собой как бы разновидность термометров сопротивления, приспособленных для измерения теплового излучения. В качестве чувствительного элемента вместо проволоки в болометрах применяют тончайшие ленты-лепестки из платины или никеля толщиной в доли микрона (около 0,05 мкм). Для изготовления таких платиновых лент покрывают платиновую жечь наплавлением на нее слоя серебра, в 10÷20 раз более толстым, чем сама платиновая жечь, после чего прокатывают листы до толщины порядка микрона. Полученную тончайшую фольгу нарезают на узкие зигзагообразные полосы. Изготовленные таким образом полоски фольги укрепляют на изоляторе и тогда стравливают серебро, после чего покрывают их платиновой чернью или сажей, чтобы увеличить поглощение теплового излучения (рис. 6.6). Рамку с зачерненной

платиновой тончайшей лентой помещают в баллон; проволочные отводы от концов платиновой ленты выводят наружу и откачивают воздух из баллона. Посредством чувствительной или усиливающей аппаратуры измеряют сопротивление болометра (обычно в схеме моста Уитстона) и по величине этого сопротивления определяют температуру, приобретенную металлической лентой вследствие поглощенного ею теплового излучения; таким образом судят об интенсивности излучения. Малейшее изменение интенсивности излучения почти мгновенно сказывается на изменении сопротивления болометра.

Рис. 6.6. Конструкция чувствительного элемента болометра

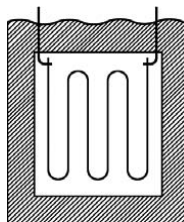


Чувствительность болометров, подключенных к усиливающей аппаратуре, чрезвычайно велика: они реагируют на поток энергии 10^{-8} - 10^{-9} Вт, хотя это в 10^7 раз меньше чувствительности человеческого глаза. Основным достоинством болометров является его неселективность, т.е. независимость его чувствительности от длины волны падающего света.

Удельное сопротивление металлов зависит не только от температуры, но и от механических воздействий. При растяжении удельное сопротивление большинства металлов возрастает. Кроме того, при растяжении проволоки ее сопротивление возрастает также согласно закону Ома вследствие увеличения длины проволоки и уменьшения ее поперечного сечения. В целом эффект изменения сопротивления проволоки при растяжении оказывается довольно значительным.

Зависимостью сопротивления проволоки от степени ее растяжения пользуются для измерения деформаций и механических напряжений в приборах, называемых тензомерами сопротивления (от лат. *tensus* – напряженный). Чувствительным элементом такого прибора является проволочный тензорезистор (рис. 6.7).

Рис. 6.7. Проволочный тензорезистор



Константановую или нихромовую проволоку диаметром в несколько сотых миллиметра изгибают и плотно приклеивают к исследуемой детали с таким расчетом, чтобы при деформации этой детали проволока тензометра испытывала растяжение. Основной характеристикой материала тензометра является его тензочувствительность k , равная отношению относительного изменения электрического сопротивления к величине относительной деформации. Для металлов $k = 2 \div 14$. Проволочный тензометр включают в цепь тока, и падение напряжения на нем подают на усилитель. При увеличении длины проволоки вследствие растяжения на 1% ее сопротивление увеличивается на 2÷3%. Проволочные тензометры широко применяются для исследования деформаций и усилий в разнообразных машинах и сооружениях (измеряемой величиной является относительная деформация; усилия определяются по закону Гука).

6.4. Квантовые представления об электронной проводимости металлов

Несоответствие поведения электронов в металле, наблюдаемого экспериментально, предсказаниям классической теории электропроводности обусловлено тем, что в металле электрон ведет себя как квантовый объект. Согласно представлениям квантовой механики, электрон не может быть строго локализован в данной точке, имея при этом конечное, строго определенное значение импульса. Максимально детальное описание положения Δr и импульса Δp частицы дается соотношением неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta p \cdot \Delta r \geq \frac{\hbar}{2}$$

– произведение неопределенностей проекции импульса Δp на направление r и неопределенности положения частицы Δr не может быть меньше по порядку величины постоянной Планка $\hbar = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Электроны являются фермионами – квантовыми частицами с полувещным спином $\hbar/2$. В одном квантовом состоянии в одной точке пространства не может находиться более одного фермиона – принцип запрета Паули.

В металлах мы имеем высокую концентрацию электронов $n^e \approx n^{ion} \approx n$, и каждый из них оказывается локализованным в области с линейными размерами порядка $\Delta r \approx n^{-1/3} = 2 \text{ \AA}$. В столь

малой части пространства неопределенность в импульсе $\Delta p = m\Delta v = mv_{\text{квкв}}$ электрона становится очень большой:

$$m\Delta v \cdot \frac{1}{n^{1/3}} \geq \frac{h}{2} \quad \text{или} \quad mv_{\text{кв}} \cdot \frac{1}{n^{1/3}} \geq \frac{h}{2},$$

соответствующей эффективной температуре движения T_g , которая определяется из неравенства

$$m\sqrt{\frac{3kT_g}{m}} \frac{1}{n^{1/3}} \geq \frac{h}{2}.$$

Из последнего неравенства получаем оценку T_g для меди ($n = N_A \cdot \rho / \mu \approx 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$)

$$T_g \geq \frac{h^2 n^{2/3}}{12mk} \approx 5 \cdot 10^4 \text{ К. Это при } n \approx 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$$

Температура вырождения T_g – это температура, ниже которой начинают проявляться квантовые свойства газа, обусловленные тождественностью его частиц. Для электронного газа T_g характеризует максимальную энергию электронов при абсолютном нуле температуры (энергия Ферми ϵ_F). Ниже этой энергии все энергетические уровни заполнены, поэтому электроны, имеющие энергию меньше kT_g , не участвуют в проводимости и не дают вклад в теплоемкость металла.

Для всех металлов температура T_g много выше температуры плавления, поэтому в металлах электронный газ всегда вырожден. Оказывается, что кинетическая энергия теплового движения электронов металла пренебрежимо мала по сравнению с «нулевой энергией» электронов, которой они обладают даже при абсолютном нуле температур. Квантовые объекты, в отличие от классических, нельзя «заморозить» – прекратить их движение уменьшением температуры. Средняя энергия, приходящаяся на один электрон, $\langle E \rangle = kT_g \approx 1 \div 10$ эВ намного выше энергии теплового движения электронов $kT \approx 0,025$ эВ (при $T \approx 300$ К), и скорость электронов практически не изменяется с температурой. Учитывая, что средняя скорость $v \approx v_{\text{квкв}}$, получим

$$\frac{mv^2}{2} = kT_g = \frac{\pi h^2 n^{2/3}}{32m}, \quad v = \frac{\sqrt{\pi h n^{1/3}}}{4m},$$

поскольку плотность электронов n от T почти не зависит. Соответственно, получаем для удельной электропроводности соотношение, показывающее, что электропроводность металлов

зависит от концентрации и длины свободного пробега электронов и не зависит от их скорости

$$\sigma = \frac{e^2 n l}{2 m v} = \frac{2 e^2 n^{2/3} l}{\sqrt{\pi} h}.$$

Изменение электропроводности с температурой определяется зависимостью длины свободного пробега электрона l от температуры T . Для большинства очень чистых металлов при не очень низких температурах σ обратно пропорциональна абсолютной температуре (см. п. 6.3), такой же зависимости следует ожидать и для l . Движение электрона в решетке, согласно квантовым представлениям, аналогично распространению волны в периодической структуре, где, как известно, волна не поглощается, если только нет нарушений такой периодичности. Поэтому идеальный металлический кристалл, в котором нет тепловых флуктуаций, не должен оказывать электрическому току сопротивление. Действительно, например, у меди при 4 К $l \approx 0,3$ см, в то время как при комнатной температуре $l \approx 3 \cdot 10^{-6}$ см. При температурах жидкого гелия у очень чистых металлов длина свободного пробега достигает 10 см.

С повышением температуры ионы в узлах кристаллической решетки начинают совершать колебания $x(t) = A \cos \omega t$, средняя амплитуда которых растет с увеличением температуры

$$\frac{m v^2}{2} = 3 \frac{2}{2} k T = \frac{\langle m \omega^2 A^2 \sin^2 \omega t \rangle}{2} = \frac{m \omega^2 \langle A^2 \rangle}{4}.$$

Поскольку можно предполагать, что сечение рассеяния δ пропорционально среднему от квадрата амплитуды колебания: $\delta \sim \langle A^2 \rangle \sim T$, а длина свободного пробега обратно пропорциональна сечению $l \sim 1/\delta$, то, следовательно, и l будет убывать обратно пропорционально росту абсолютной температуры. Колебания кристаллической решетки можно рассматривать с позиций классической физики, поскольку $T_g \sim 1/m$, а масса ионов кристаллической решетки в десятки тысяч раз больше массы электрона, поэтому $T_g^{ion} \approx 0,1 \div 1$ К и практически для всех реально достижимых температур $T \gg T_g^{ion}$

Зависимость $1/T$ должна выполняться и для σ :

$$\sigma \sim l \sim \frac{1}{T},$$

что соответствует эксперименту

$$\rho \sim \frac{1}{\sigma} \sim T$$

– удельное сопротивление у многих металлов при не очень низких температурах растет линейно с температурой.

Квантовый подход позволяет правильно понять и зависимость теплоемкости металлов от температуры. Согласно квантовым представлениям, энергия вырожденного электронного газа в металле изначально велика (даже при 0 К) и равна $\langle E \rangle = kT_g$. При нагреве металла тепловую энергию способны воспринять не все электроны, а лишь расположенные в узком интервале kT вблизи максимальной энергии электронов $\langle E \rangle \approx kT_g$ (выше расположены свободные энергетические состояния), при этом энергия ΔE , приобретаемая электронами, единицы объема металла будет пропорциональна

$$\Delta E = n \frac{kT}{kT_g} kT = nk \frac{T^2}{T_g}.$$

Средняя энергия электронов в единице объема металла равна

$$\langle E \rangle = \left(kT_g + \frac{kT^2}{T_g} \right) n = kT_g \left(1 + \frac{T^2}{T_g^2} \right) n,$$

а теплоемкость электронов в расчете на единицу объема,

$$C_V^e = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{2kT}{T_g} n^e.$$

Теплоемкость единицы объема кристаллической решетки металла

$$C_V^{ion} = 3kn^{ion}.$$

Учитывая, что $n^e \approx n^{ion} \approx n$, получим

$$\frac{C_V^e}{C_V^{ion}} \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{T}{T_g},$$

т.е. теплоемкость C_V^e электронного газа много меньше теплоемкости C_V^{ion} кристаллической решетки металла. Например, при температуре плавления меди отношение

$$\frac{C_V^e}{C_V^{ion}} \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{1080}{5 \cdot 10^4} \approx 0,014.$$

Соответственно, и в квантовой теории электронной проводимости металлов получаем для отношения коэффициентов электро - σ и теплопроводности λ

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{8}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 T,$$

где $\sigma = \frac{e^2 nl}{2mv}$; $\lambda = \frac{1}{3} v l C_V^e$; $C_V^e = \frac{2kT}{T_g} n$; $v = \sqrt{\frac{2kT_g}{m}}$.

Закон Видемана – Франца, однако, дает на этот раз правильное его толкование.

Понятие вырожденного электронного газа позволяет объяснить существование во Вселенной таких объектов, как белые карлики, нейтронные звезды и пульсары. Белые карлики представляют собой компактные звезды с массами порядка массы Солнца и радиусом $\approx 1\%$ от радиуса Солнца ($6,96 \cdot 10^8$ м). Равновесие белого карлика поддерживается при средней плотности вещества $10^8 \div 10^9$ кг/м³ давлением вырожденного электронного газа

$$P = \frac{2}{5} nkT_g.$$

Белый карлик существует благодаря устойчивому равновесию сил гравитации и внутреннего давления вырожденного газа электронов. Нейтронные звезды и пульсары (нейтронные звезды с сильным дипольным магнитным полем) – самые плотные звездные объекты во Вселенной. Имея массу порядка массы Солнца, они имеют радиус ≈ 10 км, плотность вещества у нейтронной звезды достигает плотности ядер $\approx 10^{17}$ кг/м³. В этом случае энергия, соответствующая температуре вырождения, составляет $\langle E \rangle = kT_g \approx 10^8$ эВ. Поскольку энергия, выделяемая при распаде нейтрона $n \rightarrow p + e$, составляет $\approx 8 \cdot 10^5$ эВ, то она недостаточно высока для образования такого количества электронов, которое сформировало бы фермиевское электронное «море». Распад нейтронов будет происходить лишь до тех пор, пока концентрация не достигнет величины, соответствующей энергии $\langle E \rangle = kT_g \approx 8 \cdot 10^5$ эВ, при которой концентрации электронов, протонов и нейтронов будут находиться в равновесии, но концентрация нейтронов будет преобладающей.

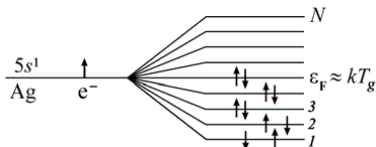
6.5. Зонная модель электронной проводимости металлов

С точки зрения электропроводности все вещества могут быть разделены на металлы $\sigma \approx 6 \cdot 10^3 \div 6 \cdot 10^5$ Ом⁻¹см⁻¹, полупроводники $\sigma = 10^2 \div 10^{-9}$ Ом⁻¹см⁻¹ и диэлектрики $\sigma \leq 10^{-10} \div 10^{-22}$ Ом⁻¹см⁻¹.

Качественное различие между металлами и полупроводниками (диэлектриками) состоит в характере зависимости удельной проводимости от температуры. У металлов с ростом температуры проводимость падает, а у полупроводников и диэлектриков растёт. При $T \rightarrow 0$ К у чистых металлов проводимость $\sigma \rightarrow \infty$, а у полупроводников и диэлектриков при $T \rightarrow 0$ К проводимость стремится к нулю $\sigma \rightarrow 0$. Качественного различия между полупроводниками и диэлектриками в отношении электропроводности, пожалуй, нет. Проявление у одних веществ металлических свойств, а у других полупроводниковых и диэлектрических может быть последовательно объяснено только в рамках квантовой теории.

Согласно квантовым представлениям, энергия электронов в атоме может изменяться дискретным образом. Причем, согласно принципу Паули, в одном квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. В результате электроны не собираются на каком-то одном энергетическом уровне, а последовательно заполняют разрешенные энергетические уровни в атоме, формируя его электронные оболочки. При сближении большого числа атомов в пределах одного объема и образовании кристаллической структуры химические связи между атомами образуются за счет электронов, находящихся во внешних, валентных, электронных оболочках. Причем опять же, согласно принципу Паули, атомы не могут сбиться в плотную массу, поскольку в этом случае в одном квантовом состоянии оказалось бы много частиц с полужелтым спином – собственным моментом количества движения $L = \hbar/2$. Такие частицы называются фермионами, и к ним, в частности, относятся электроны, протоны, нейтроны. Названы они так в честь итальянского физика Э. Ферми, впервые описавшего особенности поведения коллективов таких частиц. При сближении большого числа атомов в пределах твердого тела происходит расщепление исходного энергетического уровня валентного электрона в атоме на N подуровней в твердом теле, где N – число атомов, образующих кристалл. В результате образуется зона разрешенных энергетических уровней для электронов в твердом теле (рис. 6.8). В металлах внешние валентные оболочки заполнены не полностью, например, у атомов серебра во внешней оболочке $5s^1$ находится один электрон, в то время как, согласно принципу Паули, могло бы находиться два электрона с различными ориентациями спинов – собственных механических моментов, но второго электрона во внешней оболочке атома серебра просто нет.

Рис. 6.8. Заполнение энергетических уровней электронами при сближении N атомов металла (серебра). ε_F – последний заполненный энергетический уровень при 0 К – уровень Ферми



При сближении N атомов Ag и расщеплении внешнего энергетического уровня $5s^1$ на N подуровней каждый из них заполняется уже двумя электронами с различными ориентациями спинов, что показано стрелками на рис. 6.8. В результате при сближении N атомов серебра возникает энергетическая зона, наполовину заполненная электронами.

Энергия, соответствующая последнему заполненному электронному уровню при 0 К, называется энергией Ферми $\varepsilon_F \approx kT_g$. Расстояние между соседними энергетическими уровнями очень мало, поскольку N очень велико (до $V \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$, V – объем металла), $\varepsilon_F \approx 1 \div 10 \text{ эВ}$, $\Delta E = \varepsilon_F / N \ll kT \approx 0,025 \text{ эВ}$. Расстояние между соседними разрешенными уровнями электронов в металлах много меньше энергии теплового движения электронов даже при самых низких температурах. Если поместить проводник в электрическое поле, включив его, например, в замкнутую цепь с источником ЭДС, то электроны начнут перемещаться из точки с меньшим потенциалом к точке проводника с большим потенциалом, так как их заряд отрицателен. Но движение в электрическом поле означает увеличение энергии электрона, а по квантовым представлениям, переход на более высокий энергетический уровень у электрона возможен, если этот соседний уровень свободен. В металлах таких свободных уровней для электронов, находящихся вблизи уровня Ферми, вполне достаточно, поэтому металлы являются хорошими проводниками электрического тока, однако эту проводимость обеспечивают не все свободные электроны металла, а лишь те из них, что расположены вблизи уровня Ферми.

Как показано в п. 6.4, концентрация таких электронов примерно равна nT/T_g , где $T_g = 5 \cdot 10^4 \text{ К}$ – температура вырождения.

Пусть n – число всех электронов зоны проводимости на единицу объема металла:

$$n = \int_0^{\varepsilon_F} N(\varepsilon) d\varepsilon$$

$N(\varepsilon)$ – функция плотности состояний; $N(\varepsilon)d\varepsilon$ – число состояний в единице объема, приходящееся на интервал энергий от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$.

При абсолютном нуле все уровни энергии до ε_F включительно заняты двумя электронами каждый, а все уровни выше ε_F свободны. Для функции плотности имеем

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$n = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_F(0)} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon, \quad \varepsilon_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}.$$

Максимальная скорость электронов в металле при абсолютном нуле температур

$$\varepsilon_F(0) = \frac{mv_{\max}^2}{2}, \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F(0)}{m}}.$$

Металл	Li	Na	K	Rb	Cs
$\varepsilon_F^{\text{вычисл}}(0)$, эВ	5,22	3,15	2,05	1,78	1,59
$\varepsilon_F^{\text{эксп}}(0)$, эВ	4,72	3,12	2,14	1,82	1,59

Вычисленные $\varepsilon_F^{\text{вычисл}}$ и экспериментальные $\varepsilon_F^{\text{эксп}}$ значения энергии Ферми приведены в таблице. Экспериментальные значения получены из опытов с мягкими рентгеновскими лучами.

6.6. Зонная модель электронно-дырочной проводимости полупроводников

При образовании твердых тел (уменьшении расстояния между атомами) возможна ситуация, когда энергетическая зона, возникшая из энергетических уровней валентных электронов исходных атомов, оказывается полностью заполненной электронами (валентная зона), а ближайшие, доступные для заполнения электронами энергетические уровни отделены от полностью заполненной валентной зоны промежутком неразрешенных энергетических состояний – так называемой запрещенной зоной. Выше запрещенной зоны расположена зона разрешенных для электронов энергетических состояний –

зона проводимости. Зона проводимости при 0 К полностью свободна, а валентная зона полностью занята. Подобные зонные структуры характерны для кремния, германия, арсенида галлия (GaAs), фосфида индия (InP) и многих других твердых тел, являющихся полупроводниками (рис. 6.9).

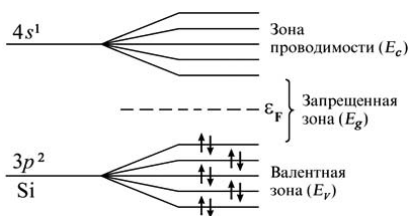


Рис. 6.9. Формирование зонной структуры полупроводников и диэлектриков на примере кремния. При сближении n атомов Si уровни $4s^1$ и $3p^2$ расщепляется на n уровней. При низких температурах уровни, образующие валентную зону, полностью заняты электронами

При повышении температуры полупроводников и диэлектриков электроны способны получать дополнительную энергию, связанную с тепловым движением kT . У части электронов энергии теплового движения оказывается достаточно для перехода из валентной зоны в зону проводимости, где электроны под действием внешнего электрического поля могут перемещаться практически свободно, и в цепи с полупроводниковым материалом по мере повышения температуры полупроводника будет нарастать электрический ток. Этот ток связан не только с движением электронов в зоне проводимости, но и с появлением вакантных мест от ушедших в зону проводимости электронов в валентной зоне, так называемых дырок (рис. 6.10). Дырки также являются носителями электрического тока и обладают эффективным положительным зарядом.

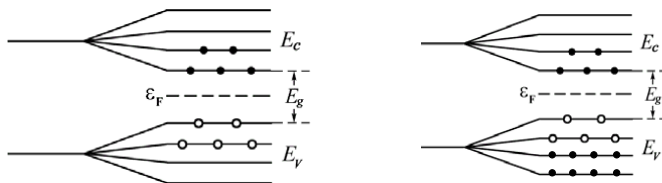


Рис. 6.10. Валентная зона E_v , \circ – дырки. Зона проводимости E_c , \bullet – свободные электроны; E_g – зона запрещенных энергетических состояний; ϵ_F – уровень Ферми в беспримесном полупроводнике

Если полупроводник содержит пренебрежимо малое число примесных центров (собственный полупроводник), то при $E_g \gg kT$ равновесная концентрация электронов в зоне проводимости мала (электронный газ невырожден). Тогда с достаточной точностью концентрация электронов n в зоне проводимости и дырок p в валентной зоне описывается выражениями

$$n = N_C \exp\left(\frac{\varepsilon_F - E_C}{kT}\right), \quad p = N_V \exp\left(\frac{E_V - \varepsilon_F}{kT}\right),$$

где N_C, N_V – эффективная плотность состояний зоны проводимости и валентной зоны.

$$N_C = 2 \left(\frac{m_C kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}, \quad N_V = 2 \left(\frac{m_V kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2},$$

где m_C и m_V – эффективная масса электрона и дырки в полупроводнике. В общем случае $N_C \neq N_V$.

В условиях электронейтральности ($n = p = n_i$) и термодинамического равновесия концентрация n_i электронно-дырочных пар, обуславливающих собственную проводимость полупроводника, равна

$$n_i = \sqrt{np} = \sqrt{N_C N_V} \exp\left(-\frac{\varepsilon_g}{2kT}\right),$$

где $\varepsilon_g = (E_C - E_V)$ – ширина запрещенной зоны полупроводника.

В этом случае электропроводность собственного полупроводника представляет собой сумму электропроводностей по двум зонам:

$$\sigma_i = en_i(b_n + b_p) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_g}{2kT}\right).$$

Здесь b_n и b_p – дрейфовая подвижность электронов и дырок в полупроводнике, e – элементарный заряд, σ_0 – постоянная, слабо зависящая от температуры. Дрейфовая подвижность носителей тока $b = v_{др}/E$ – отношение дрейфовой (направленной) скорости носителей тока к напряженности электрического поля в полупроводнике.

Существенно изменить проводимость полупроводников можно, введя в них очень небольшие количества примесей. Так, добавление в чистый кремний 10^{-3} % (атом/атом) атомов фосфора P увеличивает электропроводность кристалла в 10^5 раз. В металлах примесь всегда уменьшает проводимость. Небольшое добавление примеси к полупроводнику называется легированием. Если добавить пятиявалентный атом фосфора в решетку кремния, то четыре валентных

электрона фосфора вступают в связь с четырьмя соседними атомами кремния, у которого во внешней оболочке четыре электрона, а пятый электрон атома Р может достаточно легко отщепиться в результате теплового движения и перейти в зону проводимости (рис. 6.11). В зонной диаграмме атомы Р образуют систему энергетических уровней, расположенных вблизи дна зоны проводимости – донорные уровни (от лат. *dono* – дарю), с которых электроны могут достаточно легко переходить в зону проводимости, существенно увеличивая проводимость полупроводника. Полупроводники, легированные донорной примесью, называются полупроводниками *n*-типа (*n* – *negative* – отрицательный). За проводимость таких полупроводников отвечают свободные электроны, заряженные отрицательно.

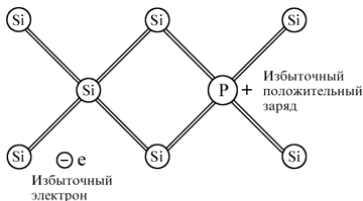
Энергетические уровни примесных центров хорошо описываются в рамках водородоподобной модели примеси. Например, для донорной примеси $E_{dn} = E_C - E_d/n^2$, где n – квантовое число, определяющее различные уровни возбуждения примеси ($n \geq 1$).

Энергия основного состояния ($n = 1$) донорной примеси лежит в запрещенной зоне полупроводника ниже дна зоны проводимости E_C на величину

$$E_d = \frac{E_i Z^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{m^*}{m_0} \right),$$

где $E_i = 13,6$ эВ – энергия ионизации атома водорода; Z – кратность ионизации примеси; ε – диэлектрическая проницаемость полупроводника; (m^*/m_0) – отношение эффективной массы к массе электрона.

Аналогичные выражения можно получить для акцепторной примеси: $E_{an} = E_V + E_a/n^2$ (акцепторный уровень E_a расположен в запрещенной зоне выше потолка валентной зоны E_V)



$$E_a = \frac{E_i Z^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{m^*}{m_0} \right),$$



Рис. 6.11. Атом фосфора Р в решетке кремния Si образует четыре связи, пятый электрон осуществляет проводимость. Атом Р является донором, так как он отдает электрон в зону проводимости. Электронные уровни атома Р в зонной диаграмме Si расположены вблизи дна зоны проводимости

Если ввести в кремний атомы трехвалентного элемента, допустим атомы бора, то дополнительно к имеющимся во внешней оболочке атома бора трем электронам может быть размещен четвертый, лишний электрон, взятый у соседнего атома кремния (рис. 6.12).

Рис. 6.12. Атом бора В имеет три электрона во внешней $2p^1$ оболочке, но он может заполнить свои тетраэдрические связи, захватив электрон из $3p^2$ оболочки соседнего атома кремния, что приведет к появлению вакантного места – дырки в валентной зоне состояний атомов кремния. Появившаяся дырка увеличивает проводимость кремния

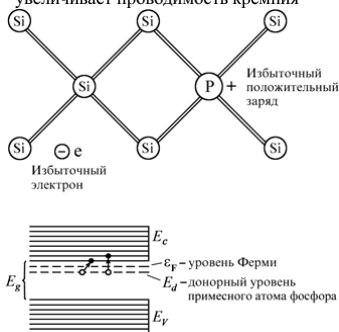


Рис. 6.11. Атом фосфора P в решетке кремния Si образует четыре связи, пятый электрон осуществляет проводимость. Атом P является донором, так как он отдает электрон в зону проводимости. Электронные уровни атома P в зонной диаграмме Si расположены вблизи дна зоны проводимости

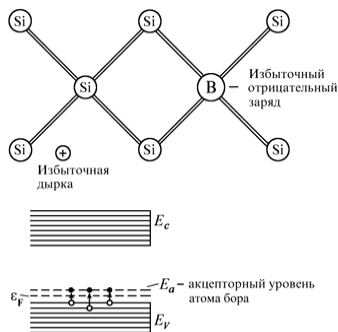
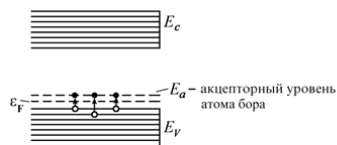
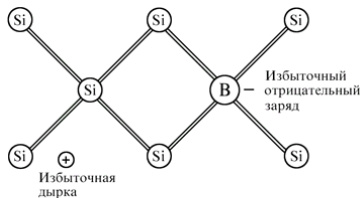


Рис. 6.12. Атом бора В имеет три электрона во внешней $2p^1$ оболочке, но он может заполнить свои тетраэдрические связи, захватив электрон из $3p^2$ оболочки соседнего атома кремния, что приведет к появлению вакантного места – дырки в валентной зоне состояний атомов кремния. Появившаяся дырка увеличивает проводимость кремния

На появившееся свободное место в электронной оболочке атома кремния (дырку) может переместиться электрон с другого соседнего атома кремния, и дырка переместится еще на один шаг в кристаллической решетке. Поскольку в кристалле кремния мигрирует вакантное место электрона во внешней валентной оболочке атома кремния, то это эквивалентно перемещению эффективного положительного заряда по кристаллической решетке. Проводимость в подобных образцах, легированных примесью с меньшим числом электронов во внешней оболочке, чем у атомов основной матрицы, называется дырочной, а атомы такой примеси называются акцепторами (от лат. *acceptor* – принимающий). Полупроводники с акцепторными примесями являются полупроводниками *p*-типа (*p* – *positive* – положительный).

Рассмотрим случай слабого легирования полупроводника, когда концентрация примеси невелика и взаимодействием между атомами примеси можно пренебречь. При термодинамическом равновесии и слабой ионизации донорной или акцепторной примеси ($E_d > kT$ или $E_a > kT$) концентрацию электронов n в зоне проводимости или дырок p в валентной зоне можно рассчитать из условия электронейтральности (рассмотрен случай $n \gg n_i, p \gg n_i$)

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_d}{2kT}\right), \quad p = p_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_a}{2kT}\right),$$

где n_0, p_0 – концентрация электронов в зоне проводимости или дырок в валентной зоне при высоких температурах ($kT \gg E_d$ и $kT \gg E_a$) (область насыщения), когда практически все атомы примеси ионизованы.

В этом случае электропроводность полупроводника *n*-типа и *p*-типа равна

$$\sigma_n = eb_n n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_d}{2kT}\right), \quad \sigma_p = eb_p p_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_a}{2kT}\right).$$

Электропроводность компенсированного полупроводника (в компенсированном полупроводнике одновременно присутствуют примеси донорного и акцепторного типа) представляет собой сумму электропроводностей электронов и дырок:

$$\sigma_i = e(b_n n_n + b_p n_p).$$

Во всех случаях в полупроводниках, в отличие от металлов, проводимость увеличивается с ростом температуры.

6.7. Электронно-дырочные переходы

Рассмотрим контакт двух полупроводников с различными типами проводимости p - и n -типа. На практике такой контакт получается введением при выращивании в пластину чистого полупроводника (Si) в различные его части двух примесей: донорной (P, As) и акцепторной (B, In). Такой контакт называется p - n переходом. Толщина границы между p и n областью может быть порядка 1 мкм (рис. 6.13, а).

Поскольку в полупроводнике p -типа избыток положительно заряженных дырок, а в n -типа – электронов, то дырки начинают диффундировать в область, где их мало, т.е. в полупроводник n -типа, а электроны переходят в образец p -типа (рис. 6.13, б). Эта диффузия прекращается образующимся из-за разделения зарядов электрическим полем, возникающим в месте контакта и имеющим там скачок (рис. 6.13, в).

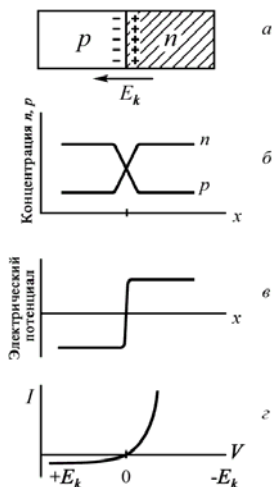


Рис. 6.13. Принципиальная схема контакта двух полупроводников с проводимостью p - и n -типа (а). Распределение электронов и дырок в области p - n перехода (б). Изменение электрического потенциала в p - n переходе (в). Вольт-амперная характеристика p - n перехода (г)

В результате этого процесса p - n переход представляет собой слой с низкой удельной проводимостью, заключенный между областями с высокой удельной проводимостью.

Если теперь включить полупроводник с p - n переходом в электрическую цепь и направить внешнее электрическое поле вдоль поля, уже имеющегося в контакте, то это приведет к еще большему разделению электронов и дырок, и ток в цепи будет практически отсутствовать. Он будет определяться лишь термически равновесной ионизацией полупроводника и движением свободных зарядов по цепи, концентрация которых очень мала, а сопротивление контактного слоя p - n очень велико (рис. 6.13, ε), $V < 0$.

Если изменить направление внешнего электрического поля и направить его от p - к n -области, против контактного поля E_k , то уже небольшое внешнее поле компенсирует контактное поле E_k и электроны и дырки начнут беспрепятственно проходить в обобщенный слой и его сопротивление практически исчезнет. Ток через контакт будет проходить (рис. 6.13, ε), $V > 0$.

Поэтому если включить p - n переход в цепь с напряжением, изменяющим свой знак, то при одном направлении поля ток через контакт будет проходить, а при другом – нет. В такой цепи произойдет выпрямление напряжения. На этом принципе работают полупроводниковые выпрямители (рис. 6.14).

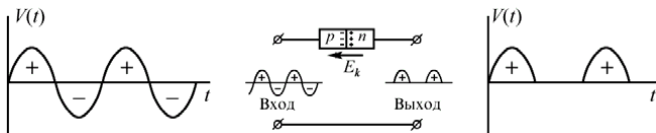
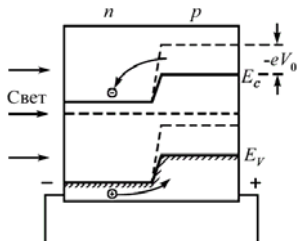


Рис. 6.14. «Выпрямление» напряжения p - n переходом (полупроводниковым диодом). На выходе получается постоянное по знаку пульсирующее напряжение

Полупроводниковые выпрямители весьма компактны и обладают высоким КПД. Так, выпрямитель на основе Ge с нанесенным на него индиевым контактом площадью $\approx 1 \text{ мм}^2$ при напряжении в 1 В может пропускать прямые токи больше 1 А, а обратные не превышают нескольких микроампер. При площади контакта в несколько квадратных сантиметров германиевые и кремниевые диоды способны пропускать токи в несколько сотен ампер, а их пробойное напряжение достигает сотен и тысяч вольт. Полупроводниковые приборы нашли широкое применение в технике, радиотехнике для преобразования, усиления, генерации электрических сигналов и определяют в настоящее время прогресс цивилизации.

Рис. 6.15. Возникновение фото-ЭДС при освещении области p - n перехода светом $h\nu > E_g$



Если концы кристалла с p - n переходом подключить к микроамперметру и осветить область p - n перехода фотонами с энергией $h\nu > E_g$ – большей ширины запрещенной зоны, то по цепи пойдет ток и стрелка прибора отклонится. Поглощенные областью p - n перехода фотоны будут генерировать электроны и дырки. В области двойного электрического слоя электрон будет перемещаться в n -область, а дырка – в p -область. В результате ток потечет по внешней цепи из p -области в n -область. Энергия фотонов в области p - n перехода будет превращаться в электрическую энергию. На этом принципе работают солнечные батареи, которые превращают световое излучение Солнца в электроэнергию, например для питания приборов на космических кораблях (рис. 6.15).

6.8. Сверхпроводимость

Существует одно явление, механизм которого оказалось возможным объяснить лишь в рамках квантовой теории. Причем между открытием этого явления и его объяснением прошло почти полвека. Речь идет о явлении сверхпроводимости. В 1908 г. голландскому физика Г. Камерлинг-Оннесу удалось получить жидкий гелий с температурой кипения 4,44 К. Метод получения жидкого гелия оказался очень сложным и малоэффективным, и в течение долгого времени лишь лаборатория Камерлинг-Оннеса в Лейдене производила жидкий гелий.

Изучая поведение сопротивления ртути, охлаждаемой до гелиевых температур, Камерлинг-Оннес в 1911 г. впервые в мире наблюдал исчезновение сопротивления ртути практически до нуля. Это явление было названо сверхпроводимостью. Камерлинг-Оннес писал: «При 4,3 К сопротивление ртути уменьшается до 0,084 Ом, что составляет 0,0021 от значения сопротивления, которое имела бы твердая ртуть при 0 °С (39,7 Ом). Обнаружено, что при 3 К сопротивление падает ниже $3 \cdot 10^{-6}$ Ом, что составляет

10^{-7} от значения при $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ » (рис. 6.16). Отметим, что температурный интервал, в котором сопротивление уменьшалось до нуля, очень узок, и для некоторых металлов он составляет лишь 10^{-3} К. Электрическое сопротивление в сверхпроводящем состоянии равно или так близко к нулю, что не наблюдалось ослабления тока в сверхпроводящем кольце в течение более чем года вплоть до прекращения эксперимента. Время спада сверхпроводящего тока в соленоиде из $\text{Nb}_{0,75}\text{Zr}_{0,25}$ составляет не менее 100000 лет.

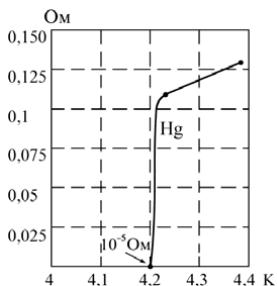


Рис. 6.16. Сопротивление образца ртути в зависимости от абсолютной температуры. Результат Камерлинг-Оннеса, приведший к открытию сверхпроводимости

Нетривиальными оказываются и магнитные свойства сверхпроводящих материалов. Слабые магнитные поля не проникают в сверхпроводник, и он выталкивается из магнитного поля – эффект Мейснера. Начиная с некоторой величины магнитного поля H_c – критического поля, сверхпроводящие свойства вещества исчезают или начинают уменьшаться.

В 1957 г. Дж. Бардином, Л. Купером, Дж. Шриффером дано квантово-механическое объяснение природы сверхпроводимости (теория БКШ). Было показано, что хотя между электронами действуют силы кулоновского отталкивания, тем не менее в твердых телах при температуре перехода в сверхпроводящее состояние T_c – критической температуре, между электронами начинают действовать силы притяжения, обусловленные обменом фононами между электронами. Фононы – кванты упругих колебаний кристаллической решетки. Это притяжение приводит к образованию связанных электронных пар – куперовских пар. Пары электронов уже не являются фермионами, и для них уже не действует принцип запрета Паули. Спаренные электроны являются бозонами – частицами с нулевым спином, и стремятся сконденсироваться. В результате такой конденсации образуется электрически заряженная, сверхтекучая электронная жидкость, обладающая свойствами сверхпроводимости. Сверхпроводящее состояние является макроскопическим квантовым состоянием металла.

Электрон, движущийся среди положительно заряженных ионов, поляризует решетку (рис. 6.17), т.е. электростатическими

силами притягивает к себе ближайшие ионы. Благодаря такому смещению ионов в окрестности траектории электрона локально возрастает плотность положительного заряда. Второй электрон, движущийся вслед за первым, будет притягиваться областью с избыточным положительным зарядом. В результате косвенным образом за счет взаимодействия с решеткой между электронами 1 и 2 возникают силы притяжения. Таким образом и получается связанная куперовская пара. Поскольку силы притяжения невелики, спаренные электроны слабо локализованы в пространстве. Эффективный диаметр куперовской пары имеет порядок 10^{-7} м, т.е. охватывает тысячи элементарных ячеек. Эти парные образования перекрывают друг друга, постоянно распадаются и вновь создаются, но в целом все пары образуют электронный конденсат, энергия которого за счет внутреннего взаимодействия меньше, чем у совокупности разобщенных нормальных электронов. При определенных условиях, которые выполняются в сверхпроводниках, такое притяжение между электронами может превышать электростатическое их отталкивание.

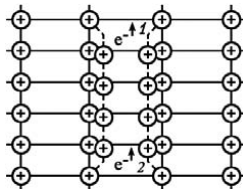


Рис. 6.17. Движение электрона в решетке поляризует решетку и понижает энергию движущегося вслед за ним второго электрона, что приводит к образованию связанных куперовских пар с эффективным диаметром $\sim 10^{-7}$ м

Благодаря поляризационному взаимодействию происходит образование куперовских пар и понижение энергии основного состояния электронов (относительно уровня Ферми E_F). На энергетическом уровне, соответствующем этому состоянию, происходит конденсация куперовских пар из электронов, которые (пары) теперь являются бозе-частицами, или бозонами. На бозоны запрет Паули не распространяется и в одном и том же квантовом состоянии может находиться любое число частиц; бозоны проявляют «стремление» к объединению, т.е. тем интенсивнее заселяют данное состояние, чем больше частиц уже находится в этом состоянии.

Чтобы уничтожить это состояние, необходимо разрушить куперовскую пару, т.е. затратить минимальную энергию (-2Δ) (на один электрон $-\Delta$). В энергетическом спектре электронов образуется щель $E_g = 2\Delta$, определяющая уровень, на котором

сконденсировались куперовские пары, от ближайшего разрешенного уровня, расположенного выше ϵ_F (рис. 6.18). Электроны сверхпроводника образуют единое целое квантовое состояние, которое в каждой точке пространства описывается амплитудой волновой функции и её фазой.

Энергетическая щель $E_g = 2\Delta$ – область запрещенных энергетических состояний. Спаренные электроны располагаются на дне энергетической щели. Оценка показывает, что количество таких электронов составляет примерно 10^{-4} от общего их числа. Размер энергетической щели зависит от температуры, достигая максимального значения при $T = 0$ К и полностью исчезая при $T = T_c$.

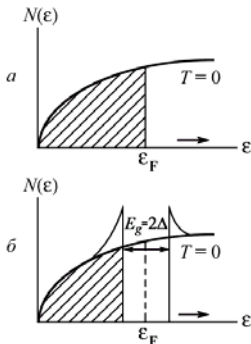


Рис. 6.18. Плотность состояний свободных электронов (а) и плотность неспаренных электронов в сверхпроводящем состоянии (б)

Теория БКШ дает следующую связь ширины щели с критической температурой перехода (при $T = 0$ К):

$$2\Delta = 3,52kT_c.$$

Эта формула хорошо подтверждается экспериментально. Для большинства сверхпроводников энергетическая щель составляет $10^{-4} \div 10^{-3}$ эВ.

Известно, что электрическое сопротивление металла обусловлено рассеиванием электронов на тепловых колебаниях решетки и на примесях. Однако при наличии энергетической щели для перехода электронов из основного состояния в возбужденное требуется достаточная порция тепловой энергии, которую при низких температурах электроны не могут получить от решетки, поскольку энергия тепловых колебаний меньше ширины щели. Именно поэтому спаренные электроны не рассеиваются на

дефектах структуры, т.е. их полный импульс не изменяется и сопротивление равно нулю.

Особенностью куперовских пар является их импульсная упорядоченность, состоящая в том, что все пары имеют одинаковый импульс и не могут изменять свои состояния независимо друг от друга. Электронные волны, описывающие движение пар, имеют одинаковую длину и фазу. Фактически движение всех электронных пар можно рассматривать как распространение одной электронной волны, которая не рассеивается решеткой, «обтекает» дефекты структуры своего рода «сверхтекучестью» электронного газа. Такая согласованность в поведении пар обусловлена высокой мобильностью электронного конденсата: непрерывно меняются наборы пар, происходит постоянная смена партнеров.

При абсолютном нуле все электроны, расположенные вблизи уровня Ферми, связаны в пары. С повышением температуры за счет тепловой энергии происходит разрыв некоторой части электронных куперовских пар, вследствие чего уменьшается ширина щели. Движение неспаренных электронов, переходящих с основных уровней на возбужденные, затрудняется рассеиванием на дефектах решетки. При $T = T_c$ происходит разрыв всех пар, ширина щели обращается в нуль, сверхпроводимость исчезает.

Переход вещества в сверхпроводящее состояние при его охлаждении происходит в очень узком интервале температур (сотые доли градуса). Неоднородности структуры, создаваемые примесями, искажениями решетки, границами зерен, пластической деформацией и т.п., не приводят к уничтожению сверхпроводимости, а вызывают лишь расширение температурного интервала перехода из одного состояния в другое.

Таким образом, в обычном состоянии все электроны подчиняются принципу Паули и статистике Ферми – Дирака, отличаются друг от друга набором квантовых чисел. В сверхпроводящем состоянии они приобретают право быть одинаковыми. То есть существует огромное количество идентичных частиц или, точнее, куперовских пар, подчиняющихся статистике Бозе – Эйнштейна, так как имеют нулевые спины, все с бесконечной длиной волны, что дает возникновение квантового явления на макроскопическом уровне.

У известных до 1986 г. материалов температуры перехода в сверхпроводящее состояние лежали в интервале от 21 К (сплав $Nb_3(Al_{0,8}Ge_{0,2})$) – 23,2 К Nb_3Ge до 0,01 К для некоторых полупроводников. У многих металлов сверхпроводимость не была обнаружена вплоть до самых низких температур ($T \ll 1$ К). Так, Li, Na и K оставались обычными проводниками при охлаждении

до 0,08 К, 0,09 К и 0,08 К соответственно. Из металлов максимальную критическую температуру имеет чистый ниобий Nb (9,2 К), «высокие» температуры в сверхпроводящем состоянии имеют ванадий V (5,38 К), технеций Tc (7,77 К), свинец Pb (7,193 К).

В 1986 г. появилась работа сотрудников швейцарского филиала фирмы IBM Г. Беднорца и А. Мюллера, в которой они сообщили о «возможной сверхпроводимости в керамической системе La–B–Cu–O» с температурой перехода в сверхпроводящее состояние $T_c \approx 40$ К, а у некоторых 70 К. Через год их исследование было отмечено Нобелевской премией, поскольку за это время удалось синтезировать сверхпроводники Y–Ba–Cu–O (рис. 6.19) (американский физик П. Чу, г. Хьюстон) с температурой перехода в сверхпроводящее состояние 93÷100 К, что выше температуры кипения жидкого кислорода и азота.

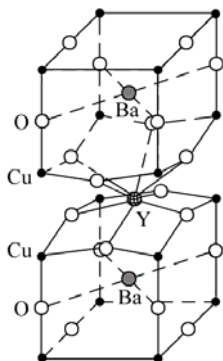


Рис. 6.19. Расположение атомов в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$, где $6 < x < 7$

Была открыта высокотемпературная сверхпроводимость (ВТСП). Дальнейшие исследования позволили открыть целый класс новых веществ, имеющих высокую температуру перехода в сверхпроводящее состояние, вплоть до 162 К. Причем сверхпроводящими свойствами обладают лишь строго определенные фазы. Стоит изменить температуру отжига на 5 К, как высокотемпературная сверхпроводящая фаза может пропасть. Свойство ВТСП воспроизводится надежно при строгом соблюдении режимов их синтеза. В свойствах ВТСП важную роль играет поведение кислорода и особенностей его связи с другими элементами. Кислород присутствует во всех образцах, обладающих свойствами ВТСП (рис. 6.19). Так, у $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$ сверхпроводящие свойства не наблюдаются при $x = 6$ и $x = 7$, а только при $6 < x < 7$. Надежно установлено, что в новых сверх-

проводниках наблюдаются спаривание электронов и конденсация этих пар в сверхтекучую, электропроводящую жидкость. Однако механизм спаривания в керамических сверхпроводниках, по-видимому, не является фононным, т.е. не связан с колебаниями и деформацией решетки. Возможно одновременное действие сразу нескольких механизмов спаривания электронов.

Возможная область применения сверхпроводников необычайно широка, но практическое осуществление различных вариантов использования сверхпроводников сдерживалось высокой стоимостью жидкого гелия, используемого для охлаждения. В настоящее время это ограничение снято, поскольку критическая температура у сверхпроводников перешагнула рубеж азотных температур. Жидкий азот на порядки дешевле, и его получение практически ничем не ограничено. Сверхпроводники, во-первых, исключают потери на джоулево тепло при создании сверхсильных магнитов, магнитных подвесов – подшипников, сверхмощных линий электропередач, накопителей энергии. Сверхпроводящие системы и устройства позволяют очень точно измерять напряженность магнитного поля, электрическое напряжение. На основе ВТСП может быть создано новое поколение сверхбыстродействующих ЭВМ, выполняющих до 10^{10} операций в секунду с рассеиваемой мощностью менее ватта.

Основные выводы

Электропроводность – способность вещества пропускать электрический ток под действием электрического поля. Электропроводность обусловлена присутствием свободных носителей заряда в твердом теле (в металлах – электроны). В однородных проводниках плотность электрического тока \mathbf{j} связана с напряженностью электрического поля законом Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Величина σ – электропроводность, или удельная проводимость, измеряется в $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. В классической электронной проводимости металлов

$$\sigma = \frac{e^2 n l}{2 m v},$$

где e , m – величина заряда и масса электрона; n – концентрация свободных электронов; l – длина свободного пробега электрона; v – средняя скорость теплового движения.

Высокая электропроводность металлов обусловлена высокой концентрацией свободных электронов ($\sigma = 10^6 \div 10^8 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$).

При низких температурах электропроводность многих металлов и сплавов становится бесконечной – сверхпроводимость.

Электропроводность металлов σ связана с его теплопроводностью λ законом Видемана – Фрэнца

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{8}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 T.$$

У диэлектриков в равновесном состоянии свободные электроны отсутствуют. Электропроводность диэлектриков осуществляется за счет перескока ионов по междоузлиям или дефектов примесного или биографического происхождения. У диэлектриков

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right),$$

где ΔE – энергия активации, $10^{-16} \leq \sigma \leq 10^{-6} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$.

В полупроводниках электропроводность обусловлена движением электронов проводимости и дырок. Зависимость σ от температуры также экспоненциальная, и в случае собственных полупроводников

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right),$$

где E_g – ширина запрещенной зоны полупроводника; $\Delta E = E_g/2$ – энергия активации. Электропроводность полупроводников много выше электропроводности диэлектриков и составляет $10^{-5} \div 10^3 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$.

С точки зрения квантовой механики электроны проводимости в металле нельзя рассматривать как локализованные частицы, они представляют существенно квантовый объект – вырожденный электронный газ со средней энергией на один электрон

$$kT_g \approx 1 \div 10 \text{ эВ},$$

где $T_g \geq \frac{h^2 n^{2/3}}{12mk} \approx 5 \cdot 10^4 \text{ К}$ – температура вырождения.

Проводимость металла обеспечивает лишь небольшая часть свободных электронов $n \cdot (T/T_g)$, локализованных вблизи уровня Ферми $\varepsilon_F = kT_g$ – последнего энергетического заполненного электронами при 0 К.

Уровень энергии Ферми ε_F при абсолютном нуле температур, $T = 0$

$$\varepsilon_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3},$$

где n – концентрация свободных электронов, m – масса электрона.

Упражнения

1. Сила тока в металлическом проводнике равна $I = 0,8$ А, сечение проводника $S = 4$ мм². Принимая, что в каждом кубическом сантиметре металла содержится $n = 2,5 \cdot 10^{22}$ свободных электронов, определить среднюю скорость $\langle u \rangle$ их упорядоченного движения. Ответ: 0,05 мм/с.
2. Определить среднюю скорость $\langle u \rangle$ упорядоченного движения электронов в медном проводнике при силе тока $I = 10$ А и сечении S проводника, равном 1 мм². Плотность меди $8,93 \cdot 10^3$ кг/м³. Принять, что на каждый атом меди приходится два электрона проводимости. Ответ: 3,7 мкм/с.
3. Плотность тока j в алюминиевом проводе равна 1 А/мм². Найти среднюю скорость $\langle u \rangle$ упорядоченного движения электронов, предполагая, что число свободных электронов в 1 см³ алюминия равно числу атомов. Плотность алюминия $2,7 \cdot 10^3$ кг/м³. Ответ: 0,1 мм/с.
4. Металлический проводник движется с ускорением $a = 100$ м/с². Используя модель свободных электронов, определить напряженность E электрического поля в проводнике. Ответ: 568 пВ/м.
5. Медный диск радиусом $r = 0,5$ м равномерно вращается ($\omega = 10^4$ рад/с) относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить разность потенциала U между центром диска и его крайними точками. Ответ: 71 мкВ.
6. Металлический стержень движется вдоль своей оси со скоростью $v = 200$ м/с. Определить заряд Q , который протечет через гальванометр, подключаемый к концам стержня, при резком его торможении, если длина l стержня равна 10 м, а сопротивление R всей цепи (включая цепь гальванометра) равно 10 мОм. Ответ: 1,14 мкКл.
7. Удельная проводимость σ металла равна 10^6 Ом⁻¹·м⁻¹. Вычислить среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега электронов в металле, если концентрация n свободных электронов равна 10^{28} м⁻³. Среднюю скорость v хаотического движения электронов принять равной 1 Мм/с. Ответ: 71 нм.
8. В цепь источника постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В включен резистор сопротивлением $R = 80$ Ом. Определить: 1) плотность

тока в соединительных проводах площадью поперечного сечения $S = 2 \text{ мм}^2$; 2) число N электронов, проходящих через сечение проводов за время $t = 1 \text{ с}$. Сопротивлением источника тока и соединительных проводов пренебречь. Ответ: 1) $37,5 \text{ кА/мм}^2$; 2) $4,7 \cdot 10^{17}$ электронов.

9. При отсутствии тока электроны, находящиеся в металлическом проводе, движутся беспорядочно, при наличии тока, наряду с беспорядочным движением, появляется упорядоченное. Почему беспорядочное движение электронов не вызывает нагревания провода, а упорядоченное вызывает? Ответ: В отсутствие электрического поля электроны находятся в тепловом равновесии с решеткой.

10. Определить количество движения электронов (p), соответствующее силе тока $I = 400 \text{ А}$ в прямом проводе длиной $l = 10 \text{ км}$. Ответ: $p = Im_0l/e = 23 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

11. Принимая, что на один атом меди приходится один свободный электрон, определить среднюю скорость упорядоченного движения электронов в медном проводе при плотности тока, равной $j = 5 \text{ А/мм}^2$. Плотность меди $8,93 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Ответ: $3,7 \text{ мкм/с}$.

12. Определить концентрацию n свободных электронов в металле при температуре $T = 0 \text{ К}$. Энергию Ферми ϵ_F принять равной 1 эВ . Ответ: $4,6 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$.

13. Определить отношение концентраций n_1/n_2 свободных электронов при $T = 0$ в литии и цезии, если известно, что уровни Ферми в этих металлах соответственно равны $\epsilon_{F1} = 4,72 \text{ эВ}$, $\epsilon_{F2} = 1,53 \text{ эВ}$. Ответ: $n_1/n_2 = 5,4$.

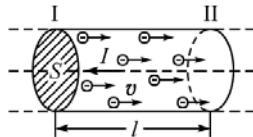
14. Определить число свободных электронов, которое приходится на один атом натрия при температуре $T = 0 \text{ К}$. Уровень Ферми ϵ_F для натрия равен $3,12 \text{ эВ}$. Плотность ρ натрия равна 970 кг/м^3 . Ответ: $0,9$.

15. Во сколько раз число свободных электронов, приходящихся на один атом металла при $T = 0$, больше в алюминии, чем в меди, если уровни Ферми соответственно равны $\epsilon_{F1} = 11,7 \text{ эВ}$, $\epsilon_{F2} = 7,0 \text{ эВ}$. Ответ: в 3 раза.

16. Определить уровень Ферми ϵ_F в собственном полупроводнике, если энергия ΔE_0 активации равна $0,1 \text{ эВ}$. За нулевой уровень отсчета кинетической энергии электронов принять низший уровень зоны проводимости. Ответ: $\epsilon_F = -\Delta E_0/2 = -0,05 \text{ эВ}$.

Задачи

1. По железному проводнику, диаметр d сечения которого равен 0,6 мм, течет ток 16 А. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ направленного движения электронов, считая, что концентрация n свободных электронов равна концентрации n' атомов проводника. Плотность железа $7,87 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Ответ: 4,2 мм/с.



2. Исходя из модели свободных электронов, определить число z соударений, которые испытывает электрон за время $t = 1 \text{ с}$, находясь в металле, если концентрация n свободных электронов равна 10^{29} м^{-3} . Удельную проводимость σ металла принять равной $10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Ответ: $1,4 \cdot 10^{14}$.

3. Исходя из классической теории электропроводности металлов определить среднюю кинетическую энергию $\langle K \rangle$ электронов в металле, если отношение λ/σ теплопроводности к удельной проводимости равно $6,7 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{К}$. Ответ: $\langle K \rangle = 39 \text{ мэВ}$.

4. Определить объемную плотность тепловой мощности в металлическом проводнике, если плотность тока $j = 10 \text{ А/мм}^2$. Напряженность E электрического поля в проводнике равна 1 мВ/м. Ответ: 10 кВт/м^3 .

5. Оценить температуру $T_{\text{кр}}$ вырождения для калия, если принять, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. Плотность ρ калия 860 кг/м^3 . Ответ: $3 \cdot 10^4 \text{ К}$.

6. Предполагая, что число свободных электронов в меди равно числу атомов, определить сумму сил F , действующих на все свободные электроны в медном проводе сечением $S = 1 \text{ мм}^2$, если провод находится под напряжением $U = 0,1 \text{ В}$. Плотность меди $\rho_{\text{Cu}} = 8,93 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Ответ: $F = eUSN_{\text{АрCu}}/\mu = 1,3 \text{ кН}$.

7. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ перемещения электронов внутри провода, если при указанных в задаче 6 условиях длина провода равна $l = 1 \text{ м}$, а удельная проводимость $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Ответ: $\langle v \rangle = \sigma U \mu / (e l \rho_{\text{Cu}} N_{\text{А}}) = 0,43 \text{ мм/с}$.

8. Предполагая, что свободные электроны внутри вращающегося тела перемещаются от оси вращения к периферии до тех пор, пока центробежная сила инерции не уравновесится электрической силой, определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между центром и окружностью вращающегося металлического диска. Диаметр диска $d = 5 \text{ см}$, частота оборотов равна $\nu = 1200 \text{ мин}^{-1}$. Ответ: $\Delta\varphi = m\omega^2 d^2 / (4e) = 22 \text{ нВ}$.

9. Катушка из металлической проволоки быстро вращается около своей оси. Концы катушки присоединены к баллистическому гальванометру. Катушка резко тормозится, при этом гальванометр дает отброс.

а) Показать, что количество электричества Δq , проходящее через гальванометр, линейная скорость движения проволоки, из которой состоит катушка (v_n), длина проволоки l и общее сопротивление катушки, соединительных проводов и гальванометра R связаны с зарядом e и массой m электрона соотношением

$$\frac{e}{m} = \frac{v_n l}{R \cdot \Delta q}.$$

б) Вычислить заряд электрона, считая его массу известной, если при одном из опытов измерения дали следующий результат: $v_n = 5 \cdot 10^3$ см/с; $l = 4 \cdot 10^4$ см; $R = 39$ Ом; $\Delta q = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл. Ответ: $e = 1,56 \cdot 10^{-19}$ Кл.

10. В германии часть атомов замещена атомами сурьмы. Рассматривая дополнительный электрон примесного атома по модели Бора, оценить его энергию E и радиус r орбиты. Диэлектрическая проницаемость германия равна $\epsilon = 15,8$. Принять $m^*/m_0 = 0,25$. Ответ: 0,014 эВ; 3,4 нм.

11. Вывести выражение для энергии Ферми для модели свободных электронов металла при абсолютном нуле температуры. Используя данные таблицы и другие константы, вычислить энергию Ферми для щелочных металлов. Предложить методы измерения энергии Ферми для этих металлов.

Металл	Li	Na	K	Rb	Cs
Плотность, г·см ⁻³	0,534	0,971	0,86	1,53	1,87
Атомный вес	6,939	22,99	39,102	85,47	132,905

Ответ: 4,66 эВ; 3,13 эВ; 2,02 эВ; 1,76 эВ; 1,51 эВ.

12. Найти выражение для отношения коэффициентов теплопроводности и электропроводности (λ/σ) для модели свободных электронов металла. Вычислить значение числа Лоренца $L = (\lambda/\sigma T)$, где T – абсолютная температура. Объяснить расхождение между вычисленным значением и экспериментально измеренными значениями L для Na при низких температурах.

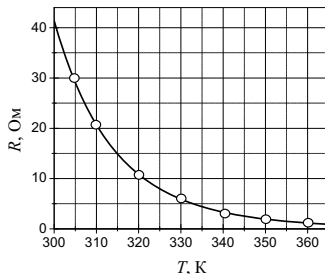
T , К	10	20	30	60
$L_{\text{эксп}}$, Вт·Ом·град ⁻²	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$0,7 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$

Ответ:	$L_{\text{расчет}}$	$1,98 \cdot 10^{-7}$	$3,97 \cdot 10^{-7}$	$5,95 \cdot 10^{-7}$	$7,94 \cdot 10^{-7}$
--------	---------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

13. Определить максимальную скорость v_{\max} электронов в металле при $T = 0$, если уровень Ферми ε_F равен 5 эВ. Ответ: $1,33 \cdot 10^6$ м/с.

14. Собственный полупроводник имеет при некоторой температуре удельное сопротивление $\rho = 0,48$ Ом·м. Определить собственную концентрацию n_i носителей заряда, если подвижности электронов и дырок соответственно равны $b_n = 0,36$ м²/(В·с) и $b_p = 0,16$ м²/(В·с). Ответ: $2,5 \cdot 10^{19}$ м⁻³.

15. Студент на лабораторной работе получил график зависимости сопротивления собственного полупроводника от температуры. Определить по экспериментальным данным, какой из полупроводников, представленных в таблице, исследовал студент? Ответ: $E_g = 1,1$ эВ (Si кремний).



Рекомендации к решению.

Необходимо построить зависимость $R(T)$ в координатах $\ln(R)$, $1/T$ и определить ширину запрещенной зоны по величине наклона полученной прямой, используя формулу для проводимости собственного полупроводника.

Полупроводник	Ge	Si	GaAs	CdS
E_g , эВ	0,664	1,11	1,43	2,52

7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЭЛЕКТРОЛИТАХ, ГАЗАХ И ВАКУУМЕ

7.1. Ток в электролитах. Электролиз. Законы Фарадея

Вещества, проводящие ток и *при этом разлагающиеся*, называют проводниками второго рода или *электролитами*, а сам процесс разделения их электрическим током – *электролизом* (электролиз от *электро-* и греч. *lysis* – разложение, распад). К электролитам относятся растворы кислот, щелочей и солей как в воде, так и в других растворителях. Электролитической проводимостью обладают и расплавленные соли.

Электролитическая проводимость не всегда связана с расплавленным или растворенным состоянием вещества. Расплавленная медь остается проводником первого рода. (Проводя ток, расплавленная медь химически не изменяется.) Прохождение тока через раствор натрия в жидком аммиаке также не сопровождается процессом разложения. С другой стороны, некоторые соли уже в твердом состоянии, особенно при нагревании, обнаруживают электролитическую проводимость.

Пример электролиза твердого тела представляет электролиз стекла (сплав натриевой и кальциевой солей кремнекислоты). Анодом (*A*, рис. 7.1) является амальгама (ртутный раствор) натрия, находящаяся в нагретом до 300 °С фарфоровом тигле, катодом (*K*) – алюминиевая проволока; *g* – стеклянная трубка с очень разреженным гелием. Составленная цепь: алюминиевый катод – разреженный гелий – нагретое стекло – амальгама натрия обладает большим сопротивлением. Источник тока в цепи должен давать напряжение не менее 200 В.

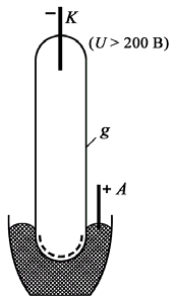


Рис. 7.1. Электролиз стекла: *g* – стеклянная трубка, заполненная гелием; *A* – амальгама натрия (анод); *K* – алюминиевая проволока (катод)

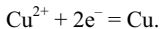
Наличие тока в замкнутой цепи обнаруживается по свечению гелия, наполняющего трубку. Разложение стекла проявляется выделением на внутренней стороне трубки одной из составных частей стекла, натрия, в виде блестящего металлического зеркала (на рис. 7.1 отмечено пунктиром).

При *электролитической проводимости* носителями тока являются ионы. В электролитических растворах расщепление молекул на ионы производится действием растворителя – *электролитическая диссоциация*.

Разность потенциалов на электродах, погруженных в электролит, определяет напряженность электрического поля в электролите и заставляет ионы с отрицательным зарядом (*анионы*) передвигаться к аноду, с положительным зарядом (*катионы*) – к катоду. Скорость движения ионов зависит от природы ионов, от вязкости электролита и от напряженности электрического поля. Чем выше напряженность поля E , тем больше скорость ионов. При достижении некоторой критической величины напряженности поля $E_{\text{крит}}$ скорости ионов достигают таких величин, что возникает искровой разряд. В этом случае свободные ионы, двигаясь к электродам, приобретают кинетическую энергию, достаточную для ударной ионизации молекул. Распад молекул на ионы резко увеличивает электропроводность и ток в цепи. Если величина напряженности поля $E < E_{\text{крит}}$, соударение ионов с молекулами не вызывает их диссоциации и проявляется только в выделении тепла.

Достигнув электрода, ионы нейтрализуются: анионы отдают аноду свои избыточные электроны, которые переходят во внешнюю металлическую цепь и движутся в ней к катоду; у катода катионы приобретают недостававшие им электроны.

Пусть идет электролиз хлорной меди CuCl_2 . К катоду стремятся электроны по металлической цепи и сюда же подходят ионы из раствора электролита. Ион Cu^{2+} – атом меди, лишенный двух электронов; получая их от насыщенного электронами катода, ион Cu^{2+} превращается в незаряженный атом металла. Обозначив свободный электрон через e^- , запишем реакцию на катоде:



Ионы Cl^- , имеющие избыточные электроны, притягиваются анодом и передают ему свои избыточные электроны, превращаясь в незаряженные атомы хлора:



Нейтрализация ионов на поверхности электродов – необходимое звено в прохождении тока через гальваническую цепь. Иначе

в электродах и вблизи них в электролитическом растворе скопились бы заряды, противодействующие течению тока.

Прямым следствием процесса электролиза является накопление у электродов продуктов химического разложения электролита. Продукты разложения электролита могут оставаться в растворенном состоянии, осаждаться на электродах или выделяться, как при разложении воды, в виде газов.

Количество веществ, выделяющихся при электролизе на электродах, определяется законами, которые были экспериментально установлены в 1833 г. Фарадеем. Фарадей экспериментально доказал, что при перемещении к электродам числа ионов, равного числу Авогадро N_A , имеющих валентность z , отношение количества перенесенного электричества q к валентности ионов z всегда равно одному и тому же заряду – заряду Фарадея:

$$F = \frac{q}{z} = 96485 \text{ Кл} \cdot \text{моль}^{-1}, \quad F = N_A \cdot e.$$

Это говорит о том, что заряд ионов дискретен и равен $\pm ze$, где e – элементарный заряд.

Приведем формулировку законов Фарадея, принятую в электрохимии, и установим вытекающее из законов Фарадея представление об электрохимических эквивалентах.

Первый закон Фарадея: *при электролизе за время t на электродах выделяется масса m вещества, пропорциональная количеству электричества q , прошедшего за то же время через электролит:*

$$m = kq.$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности, различный для разных веществ, но не зависящий ни от формы электродов, ни от расстояния между ними, ни от силы тока, ни от температуры, ни от давления. Коэффициент пропорциональности k в первом законе Фарадея равен массе вещества, которое выделяется из электролита на одном из электродов при прохождении через электролит единицы количества электричества (величину k называют *электрохимическим эквивалентом*).

Второй закон Фарадея: *при прохождении тока последовательно через несколько электролитов количества веществ, выделяющихся за некоторый промежуток времени t в разных электролитах, пропорциональны так называемым химическим эквивалентам этих веществ.*

Химическим эквивалентом k_c называют величину, равную μ/z , где μ – молярная масса ионов, нейтрализующихся на электроде; z – валентность иона, т.е. число, указывающее, сколько атомов (ио-

нов) водорода способен данный ион заместить или же связать в химическом соединении или сколько электронов участвуют в реакции одной молекулы каждого вещества.

Второй закон Фарадея, очевидно, можно выразить уравнением

$$k = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{z},$$

где $F = 96485$ Кл/моль – универсальная константа (постоянная Фарадея). То есть электрохимический эквивалент k вещества пропорционален его химическому эквиваленту $k_c = \mu/z$.

Соединяя оба закона Фарадея, мы видим, что масса вещества, выделяющаяся при электролизе на электродах, может быть вычислена по уравнению

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{z} q.$$

В случае постоянного тока I , протекающего через электролит в течение времени t , $q = It$, и поэтому последнее уравнение можно записать в виде

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{z} It.$$

Когда на электродах выделяются химические эквиваленты веществ ($k_c = \mu/z$), то тогда численно $F = q$. Величина F представляет собой заряд, переносимый одним химическим эквивалентом какого-либо вещества. Этот заряд носит название *фарадей*. Опыт показал, что численно $F = 96485$ Кл.

Если при электролизе на электродах нейтрализуются одновалентные ионы, то прохождение через электролит заряда в 1 фарадей (96485 кулонов) сопровождается выделением на каждом электроде авогадрова числа атомов, т.е. одного моля вещества. Если же носителями тока в электролите являются z -валентные ионы, т.е. ионы, имеющие z -кратный заряд электрона, то *прохождение через электролит 1 фарадея сопровождается выделением на электродах $1/z$ авогадрова числа атомов, т.е. одного химического эквивалента*.

Электрохимическим эквивалентом 1 фарадея является 1 химический эквивалент ($k = k_c = \mu/z$). Например, для одновалентного серебра $\mu = 107,9$ г/моль, $z = 1$, $m = 107,9$ г (т.е. на катоде выделяется 1 моль Ag); для двухвалентной меди, $\mu = 63,6$ г/моль, $z = 2$, $m = 63,6/2 = 31,8$ г (т.е. выделяется 1/2 моля Cu) и т.д.

Электрохимическим эквивалентом 1 кулона является $\frac{1}{96485}$ химического эквивалента или, что то же самое, $\frac{1}{96485 \cdot z}$ моля. В этом случае для серебра ($z = 1$, $k_c = \mu/z \approx 0,1079$ кг/моль) $k = 1,118 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл, т.е. при прохождении через раствор соли серебра одного кулона электричества, на катоде выделяется примерно 1 мг серебра.

В практических расчетах часто пользуются электрохимическими эквивалентами 1 кулона, а также нередко 1 ампер-часа (3600 кулонов); значения этих электрохимических эквивалентов приведены в таблице.

В теоретических расчетах более удобно рассматривать электрохимические эквиваленты 1 фарадея, т.е. химические эквиваленты. В связи с этим принято измерять концентрацию растворов числом химических эквивалентов, содержащихся в 1 л.

Раствор, содержащий 1 химический эквивалент в литре $\left(\frac{N_A}{z} \text{ атомов массой } \frac{\mu}{z} \right)$, называют *нормальным раствором электролита*. Если в литре раствора содержится не 1 химический эквивалент, а, например, 0,01 химического эквивалента, то говорят, что концентрация раствора равна 0,01 нормального (это кратко обозначают так: 0,01N).

Электрохимические эквиваленты

Анионы	Число граммов в одном химическом эквиваленте	1 кулон выделяет миллиграммов	* 1 ампер-час выделяет граммов	Катионы	Число граммов в одном химическом эквиваленте	1 кулон выделяет миллиграммов	* 1 ампер-час выделяет граммов
Cl ⁻	35,5	0,3672	1,322	Ag ⁺	107,9	1,118	4,025
CO ₃ ²⁻	30,0	0,3108	1,119	Al ³⁺	9,0	0,0936	0,3369
NO ₃ ⁻	62,0	0,642	2,312	Ca ²⁺	20,1	0,2077	0,748
				Cu ⁺	63,6	0,659	2,372
O ²⁻	8,0	0,0829	0,2983	Cu ²⁺	31,8	0,3294	1,186
				Fe ²⁺	27,9	0,2895	1,042

OH ⁻	17,0	0,1762	0,634	Fe ³⁺	18,6	0,1930	0,695
				H ⁺	1,008	0,01044	0,0376
SO ₄ ²⁻	48,0	0,4975	1,791	Na ⁺	23,0	0,2388	0,860
				Zn ²⁺	32,7	0,3387	1,219

* 1 ампер-час разлагает 336 мг воды и выделяет 626 см³ гремучего газа при 0° и 760 мм рт.ст.

Наряду с указанным смыслом термина «нормальный раствор» в электрохимии часто пользуются этим термином для обозначения *раствора, содержащего 1/2 авогадрова числа ионов в литре*. Таким образом, следует различать: 1) концентрацию раствора, определяемую сопоставлением с нормальным раствором электролита, и 2) концентрацию раствора, определяемую сопоставлением с нормальным раствором ионов. Так, определяемые концентрации численно совпадают только в случае полной диссоциации электролита, т.е. для разбавленных растворов и для сильных электролитов.

Заметим, что концентрацию раствора, выражаемую числом химических эквивалентов в литре, т.е. сопоставлением концентрации раствора (или концентрации ионов) с концентрацией нормального раствора, часто называют *эквивалентной концентрацией*. Так, говорят, что раствор имеет эквивалентную концентрацию в 1/10 или в 1/100 нормального.

Энергия источника тока при электролизе тратится, с одной стороны, на перемещение ионов в электролите, с другой – на разрядку ионов на электродах. Работа, затраченная на перемещение ионов – на преодоление вязкости растворителя, превращается в тепло, а энергия, затраченная на разрядку ионов, – в химическую энергию полученных при электролизе продуктов. Соотношение этих двух затрат энергии зависит от величины тока, а следовательно, от приложенного напряжения.

Опыт показывает, что *электролиз каждой соли начинается с определенного, характерного для нее напряжения (потенциал разложения); если напряжение будет ниже потенциала разложения, постоянный ток вообще не будет проходить через раствор этой соли*. Если напряжение только на бесконечно малую величину будет превышать потенциал разложения данной соли, то энергия тока будет использована с максимальным коэффициентом полезного действия, но электролиз затянется на бесконечно долгое время, так как скорость перемещения ионов к электродам будет бесконечно мала. Чтобы электролиз протекал достаточно быстро, напряжение должно значительно превышать

потенциал разложения, но при этом избыточная часть электроэнергии будет обращена в тепло. Например, если вести электролиз при напряжении, вдвое превышающем потенциал разложения, то 50% энергии пойдет на химическую работу и 50% превратится в тепло, т.е. в этом случае КПД процесса 50%.

Пользуясь тем, что каждый электролит имеет свой потенциал разложения, можно из смеси солей выделять в определенной последовательности один за другим содержащиеся в солях металлы, постепенно поднимая напряжение. На этом основан *электрохимический анализ*.

7.2. Вторичные реакции на электродах. Применения электролиза

Для применений электролиза главное значение имеют явления, происходящие на поверхности электродов, где электронный поток в металлических частях цепи сменяется ионными потоками в электролите. Ионы не способны проникнуть в металл, как электроны не способны перейти в раствор. Движение тех и других останавливается на поверхности электрода, и здесь происходит их взаимная нейтрализация.

Первичные продукты электролиза чаще всего вступают в химическую реакцию с электролитом, и на электродах выделяются продукты вторичных, побочных реакций. В промышленных применениях электролиза электролит составляют так, чтобы дать вторичным химическим реакциям нужное направление.

Первичные продукты электролиза могут вступить также в химическое взаимодействие с материалом самих электродов. Обычно это представляется нежелательным. Тогда применяют электроды из химически инертных и нерастворимых материалов (платина, графит).

Побочные реакции могут заключаться во взаимодействии катодных и анодных продуктов электролиза. Этого можно избежать, разделяя анодное и катодное пространства ванны пористой перегородкой, не задерживающей движения ионов, но препятствующей непосредственному смешению анодного и катодного растворов.

Вследствие вторичных реакций конечные продукты электролиза обычно отличаются от тех, которые возникают вначале. Рассмотрим наиболее важные для применений случаи электролиза, сопровождающегося побочными реакциями.

1. На катоде выделяется металл, разлагающий воду. Если подвергать электролизу водный раствор обыкновенной соли

(NaCl), то выделяющийся на катоде натрий, очевидно, не сохранится в металлическом виде, а, действуя на воду, будет выделять из нее водород и образовывать едкий натр (NaOH – каустическая сода). Вместе с хлором, выделяющимся на аноде, образуются три продукта электролиза, из которых едкий натр представляет наибольшую ценность.

2. На аноде разряжается остаток кислородосодержащей кислоты. При *электролизе раствора глауберовой соли* Na_2SO_4 ион SO_4^{2-} , разрядившись на аноде, превращается в молекулу SO_4 , в которой сера имеет валентность 8, тогда как максимальная ее валентность 6. Поэтому молекула SO_4 является неустойчивой и отщепляет лишний кислород, превращаясь в молекулу серного ангидрида SO_3 , которая, в свою очередь, соединяется с водой и образует серную кислоту H_2SO_4 . В результате имеем четыре продукта электролиза: H_2 и NaOH на катоде, O_2 и H_2SO_4 на аноде. Этот случай электролиза представляет особый интерес в связи с наличием больших запасов глауберовой соли, которую можно превращать в важнейшие химические продукты – серную кислоту и едкий натр.

3. Выделяющийся на аноде кислород окисляет материал анода. Если какая-либо слабая кислородосодержащая кислота (например, хромовая) подвергается электролизу при алюминиевом аноде, то освобождающийся на аноде кислород окисляет алюминий, образуя на его поверхности тончайшую стеклообразную пленку Al_2O_3 , обладающую высокой механической и диэлектрической прочностью. Этот тип электролиза, называемый *электрохимическим окислением*, получил широкое распространение в качестве лучшего способа поверхностной обработки деталей из алюминия и его сплавов в целях предохранения их от коррозии.

Кроме того, электролитическое окисление алюминия дает возможность изготавливать конденсаторы большой емкости при их малом объеме. Алюминиевая тонкая фольга и электролит, в который она погружена, являются обкладками этого конденсатора, а образованный на поверхности фольги слой Al_2O_3 является разделяющим их диэлектриком. Ввиду крайней тонкости этого слоя расстояние между обкладками очень мало и, соответственно, емкость такого *электролитического конденсатора* велика.

4. Окись металла реагирует с кислотой. При электролизе раствора сульфата меди CuSO_4 на катоде осаждается медь, а на аноде, как и в случае электролиза глауберовой соли, образуются O и H_2SO_4 . Если в качестве анода взята медная пластинка, электролитический кислород окисляет медь, а серная кислота

растворяет окись меди, вновь образуя медный купорос. Электролиз сводится к осаждению меди на катоде и растворению медного анода. Состав электролита при этом не меняется, так как каждой распавшейся молекуле CuSO_4 отвечает образование новой молекулы CuSO_4 у анода. В результате медь как бы переносится с анода на катод.

Данный тип электролиза лежит в основе почти всех видов гальванического покрытия. Деталь, подлежащую покрытию тем или иным металлом, помещают в качестве катода в раствор соли этого металла. В качестве анода берут пластины металла, предназначенного служить покрытием.

При электролитическом осаждении металла последний оседает преимущественно на тех участках катода, где силовые линии поля сгущаются, т.е. на остриях и ребрах. Поэтому при гальваническом осаждении металлов, чтобы получить равномерный слой, недостаточно пользоваться одной анодной пластинкой. Желательно покрываемый предмет окружать анодными пластинками со всех сторон, чтобы обеспечить равномерное распределение силовых линий по всей поверхности катода.

Для воспроизведения рельефных изображений или предметов с них сначала изготовляют вдавливанием негатив из воска, гуттаперчи или гипса. Покрывая поверхность негатива тонким графитовым порошком, делают ее проводящей, после чего электролитически осаждают на ней металл.

Широчайшее применение имеют: гальванотехническое *цинкование* – покрытие цинком железных предметов, в частности железных проволок, *никелирование*, *хромирование* и *покрытие кадмием* многих деталей в машиностроении и разнообразных изделий. Медные и никелевые гальванотехнические покрытия используют в типографском деле, серебряные и золотые – в ювелирном и т.д.

Электролитические процессы, аналогичные тем, которые служат для гальванотехнических покрытий, применяют в промышленности для *электролитического получения* металлов из растворов их солей и для *электролитической очистки* (рафинирования, от франц. *rafiner* – очищать) металлов. Электролизом ежегодно добывают сотни тысяч тонн меди из растворов медного купороса, большие количества цинка и других металлов.

Поскольку малейшие примеси существенно снижают электропроводность меди, то медь, из которой изготовляют провода, электролитически очищают до степени чистоты в 99,99%.

Наряду с электролизом водных растворов солей особое значение имеет *электролиз расплавленных солей*. Из расплавленного

едкого натра (NaOH) электролизом при температуре около 330 °С добывают натрий. Из расплавов $MgCl_2$ и $CaCl_2$ добывают магний и кальций. Важнейшим является электролитическое получение алюминия из расплава. Расплав представляет собой раствор глинозема (Al_2O_3) в криолите (Na_3AlF_6). Электролиз ведут при 950 °С в электролизере, который построен из железа, а внутри выложен плотно запрессованной угольной массой. Эта угольная масса служит катодом, сверху расположены угольные аноды (рис. 7.2). Выделяющийся на катоде алюминий получается в расплавленном состоянии. На производство 1 т алюминия расходуется приблизительно 25000 кВт·ч электроэнергии ($9 \cdot 10^{10}$ Дж).

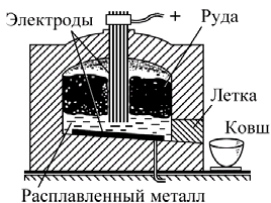


Рис. 7.2. Схема электролитической печи

Следует отметить еще одно применение электролиза – *электролитическую полировку* поверхностей металлических изделий. В данном случае электролиз используется не для осаждения металла, а для растворения различных случайных выступов на поверхности металлического изделия. Когда изделие служит в электролитической цепи анодом, то на всех микроскопических выступах поверхности изделия происходит сгущение силовых линий электрического поля, вследствие чего металл здесь растворяется быстрее, чем на гладких местах поверхности.

Явление электролиза, наряду с другими механическими и тепловыми процессами, использовано также в способе *анодно-механической резки металлов*. Резка металла по этому способу производится тонким быстро вращающимся металлическим диском, который смачивается электролитом особого состава. Этот диск служит катодом, а разрезаемый металл – анодом. В местах их контакта благодаря большой плотности тока происходит быстрое растворение металла. Бруски твердого сплава «победита» разрезаются указанным способом в десятки раз быстрее, чем при использовании «алмазного диска».

7.3. Подвижность ионов и электропроводность растворов

Электропроводность электролитов зависит от числа ионов в единице объема и от подвижности ионов.

Подвижность b_+ , b_- ионов определенного сорта выражается скоростью u_+ , u_- их направленного перемещения в электролите под действием электрического поля E с напряженностью 1 В/м: $u_{\pm} = b_{\pm} E$ или $b_{\pm} = u_{\pm} / E$.

Как видно из таблицы, подвижности различных ионов независимо от знака и величины их зарядов имеют близкие значения (доли миллиметра в минуту для поля 1 В/см).

Подвижности b_- и b_+ некоторых ионов в водном растворе при 18 °С*

Катионы	b_+ , $10^{-8} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	Анионы	b_- , $10^{-8} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$
H_3O^+	31,5	OH^-	17,4
Na^+	4,35	Cl^-	6,5
Ag^+	5,6	NO_3^-	6,2
Zn^{2+}	4,8	SO_4^{2-}	6,8
Fe^{3+}	4,6	CO_3^{2-}	6,2

* При повышении температуры на 1 °С подвижности ионов возрастают примерно на 2%.

Подвижности гидроксония H_3O^+ и гидроксила OH^- превосходят остальные в несколько раз. Это явление связано, по видимому, с тем, что ионы гидроксила и гидроксония построены из тех же элементов (H^+ и O^-), из которых построены молекулы растворителя (воды), и механизм их движения в растворе несколько иной, чем в случае других ионов; их перемещение к электродам осуществляется, скорее всего, «эстафетным» путем. Так, в случае гидроксония H_3O^+ его протон H^+ передается близлежащей незаряженной молекуле воды, которая сама теперь становится ионом гидроксония, и таким же порядком эстафета идет далее по направлению к катоду так, как это представлено на рис. 7.3. Вполне очевидно, что такое фиктивное движение гидроксония должно происходить быстрее, чем если бы гидроксоний, подобно другим ионам, перемещался сам.

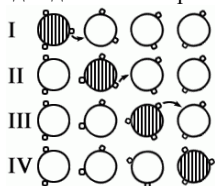


Рис. 7.3. Движение ионов гидроксония H_3O^+ при электролизе

При помощи таблицы подвижностей ионов можно вычислить электропроводность растворов, настолько разбавленных, чтобы ионы были достаточно удалены друг от друга и вследствие этого, с одной стороны, не сцеплялись в молекулы, а с другой – не тормозили движения друг друга своими собственными электрическими полями.

Пусть в растворе в единице объема содержится n молекул, часть которых диссоциирует на положительные и отрицательные ионы с зарядом ze (z – валентность ионов, e – элементарный заряд). Если напряженность электрического поля \mathbf{E} , подвижности анионов и катионов b_- и b_+ , то в этом случае плотность тока, по определению, равна

$$\mathbf{j} = \alpha zen(\mathbf{u}_+ + \mathbf{u}_-) = \alpha zen(b_+ + b_-)\mathbf{E},$$

где α – степень диссоциации, т.е. отношение числа диссоциировавших молекул к общему числу молекул растворенного вещества. Следовательно, удельная электропроводность раствора

$$\sigma = \alpha zen(b_+ + b_-).$$

В этой формуле zen есть заряд всех ионов одного знака, находящихся в единице объема раствора, как свободных – αzen , так и связанных – $(1 - \alpha)zen$. Обозначим через C_z эквивалентную концентрацию ионов, выраженную числом химических эквивалентов ионов одного знака в единице объема, т.е. выраженную сопоставлением имеющейся концентрации ионов с концентрацией ионов в *нормальном растворе*. В случае полной диссоциации C_z указывает, во сколько раз число ионов одного знака, содержащихся в единице объема раствора, превышает $1/z$ числа Авогадро. В этом случае эквивалентная концентрация

$$C_z = \frac{n}{N_A/z} = \frac{zn}{N_A} = zC_m,$$

где C_m – молярная концентрация ионов (моль/м³). Следовательно, эквивалентная концентрация в z раз больше молярной концентрации. Учитывая, что $F = N_A \cdot e$, получим

$$\sigma = \alpha FC_z(b_+ + b_-) = \alpha C_z \Lambda,$$

где $\Lambda = F(b_+ + b_-)$ – эквивалентная электропроводность раствора.

Определим удельную проводимость $0,001N$ раствора азотной кислоты HNO_3 . Так как $z = 1$, то $C_z = C_m = 10^{-3}$ моль/л = 1 моль/м³. Подвижность ионов $b(\text{H}_3\text{O}^+) = 31,5 \cdot 10^{-8}$ м²/(В·с), $b(\text{NO}_3^-) = 6,2 \cdot 10^{-8}$ м²/(В·с). При малых концентрациях раствора $\alpha = 1$, следовательно,

$$\sigma = \alpha F C_z (b_+ + b_-) = 1 \cdot 96485 \cdot 1 \cdot (31,5 + 6,2) \cdot 10^{-8} = 0,036 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}.$$

Если в растворе не два вида ионов, а больше, то вообще

$$\sigma = F(\alpha_1 C_{z1} b_1 + \alpha_2 C_{z2} b_2 + \alpha_3 C_{z3} b_3 + \dots),$$

т.е. доля участия каждого вида ионов в электропроводности пропорциональна их эквивалентной концентрации, с одной стороны, подвижности ионов и степени диссоциации молекул – с другой.

Рассмотрим вопрос о пределах применимости закона Ома к электролитам. Из теории движения тел в вязкой среде известно, что скорость установившегося (стационарного) движения в вязкой среде пропорциональна действующей на тело силе. Движущийся к электроду ион удовлетворяет тем условиям, для которых выведено это соотношение, поэтому скорость движения иона должна быть пропорциональна действующей на ион силе, т.е. произведению напряженности поля на заряд иона. Если напряженность поля увеличится в p раз, то во столько же раз увеличится скорость движения всех присутствующих в растворе ионов. Во столько же раз увеличится и количество ежесекундно переносимого ими через любое поперечное сечение проводника электричества, т.е. величина тока.

Таким образом, в случае электролитов закон Ома должен быть справедлив в тех пределах, в которых сохраняется пропорциональность между скоростью движения ионов и действующей на них электрической силой. Эти пределы очень широки. Показано, что отклонения от закона Ома становятся заметными лишь при напряженностях порядка 10^8 В/м. При таких напряженностях электрического поля скорость движения ионов может достигать десятков метров в секунду.

7.4. Гальванические элементы. Электрохимическая коррозия

При погружении металла в электролит наблюдается их взаимная электризация и между ними устанавливается контактная разность потенциалов: металл заряжается отрицательно, жидкость – положительно. Это объясняется *электролитической упругостью растворения* металлов – способностью металлов переходить в раствор в виде ионов. Электроны, принадлежавшие атомам металла, остаются в исходном металле и сообщают ему отрицательный заряд:



Прошедшие в раствор ионы металла удерживаются возле металлической пластины силами притяжения к оставшимся в металле электронам. Вдоль поверхности металлической пластинки образуется *двойной электрический слой* из электронов и ионов. *Металл заряжается отрицательно*, раствор – положительно. Переход ионов из металла в раствор продолжается до тех пор, пока между металлом и раствором не возникнет поле, достаточное для того, чтобы воспрепятствовать дальнейшему «растворению» металла. Количество ионов, перешедших в раствор, и разность потенциалов между металлом и раствором зависят от природы металла, растворяющей его жидкости и от того, имелись ли уже ранее в растворе ионы данного металла в виде какой-либо его соли. Если концентрация соли достаточно велика, двойной слой может и не образоваться, раствор как бы насыщен ионами данного металла. В этом случае упругость растворения металла численно равна осмотическому давлению ионов металла в растворе.

ОСМОС - самопроизвольный переход вещества через полупроницаемую мембрану, разделяющую два раствора различной концентрации. Осмос приближает систему к равновесию путём выравнивания концентраций по обе стороны мембраны. Для разбавленных растворов электролитов осмотическое давление ионов металла в растворе определяется уравнением состояния Вант-Гоффа $P_0 = iC_mRT$, где $i = 1 + \alpha(v - 1)$ – коэффициент Вант-Гоффа, α – степень диссоциации, v – число ионов, на которое распадается молекула электролита; C_m – молярная концентрация; R – газовая постоянная; T – абсолютная температура.

Для численной характеристики электролитической упругости растворения, недоступной прямому измерению, можно измерять осмотическое давление ионов металла в таком растворе его соли, в котором металл самопроизвольно не растворяется и из которого он самопроизвольно не выделяется (высаживается).

Равновесие между металлом и электролитом устанавливается, если достигается равенство термодинамических потенциалов ионов металла в обеих средах, т.е. в растворе и в кристаллической решетке. Удобной, однако не вполне точной мерой этих термодинамических потенциалов металлических ионов служат: для раствора – осмотическое давление ионов, для кристаллической решетки – электролитическая упругость растворения.

Если металл погрузить в раствор его соли, еще более концентрированный и как бы пересыщенный его ионами, некоторая часть последних выделится на металле и *металл зарядится положительно*; анионы же скопятся близ поверхности металла в растворе, и раствор зарядится отрицательно.

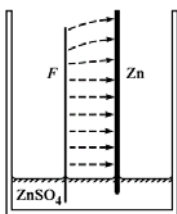


Рис. 7.4. Электрическое поле между металлом и электролитом (ненасыщенный раствор $ZnSO_4$), поднятым полоской фильтровальной бумаги F

На рис. 7.4 представлена схема опыта, в котором контактная разность потенциалов, устанавливающаяся на границе металл – электролит, проявляется в наличии электрического поля между металлической пластинкой и электролитом, поднятым полоской фильтровальной бумаги F . Силовые линии этого поля начинаются на зарядах поверхности электролита в фильтровальной бумаге и кончаются на зарядах, распределенных по выступающей части отрицательно заряженной металлической пластинки.

Когда металл погружают в электролит, происходит частичное растворение металла, заключающееся в переходе в раствор положительных ионов металла и связанной с этим электризации металла и раствора. Получающиеся при этом заряды сосредоточены в месте соприкосновения металла и электролита, в слое молекулярной толщины. Появление в растворе у погруженного в него металла положительных ионов, перешедших в раствор из металла, вызывает перераспределение уже имевшихся в растворе ионов. Примерная схема перераспределения ионов в растворе при переходе в раствор положительных ионов металла дана на рис. 7.5.

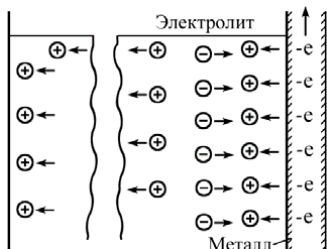


Рис. 7.5. Схема перераспределения (смещения) ионов в электролите при переходе в раствор положительных ионов металла

Металл и раствор, в который он погружен, представляют собой *полуэлемент*; несмотря на наличие разности потенциалов и

электропроводность всех своих составных частей, «полуэлемент» не дает электрического тока, так как все здесь находится в состоянии равновесия. Рассмотрим два полуэлемента – медь в растворе медного купороса и цинк в растворе цинкового купороса, разделенные пористой перегородкой (рис. 7.6), и соединим цинковую и медную пластинки какой-либо металлической проволокой. *Цинк имеет заметно бóльшую упругость растворения, чем медь, поэтому цинковая пластинка приобретает более сильный отрицательный заряд, чем медная.* Электроны с цинковой пластинки переместятся по проволоке на медную. В результате нарушится равновесие в двойном слое цинковой пластинки; часть образующих его ионов цинка устремится в раствор. Точно так же нарушится равновесие в двойном слое медной пластинки, отрицательный заряд которой усилился за счет электронов, прибывших из цинка. Здесь, наоборот, часть ионов меди, образующих двойной слой, соединится с избыточными электронами и оседет на пластинку уже в виде атомов.

Однако указанными процессами равновесие не будет восстановлено. «Двойной слой» цинка разрушен. Цинк стремится восстановить его, посылая в раствор новые ионы, но он не в состоянии *удержать* эти ионы близ своей поверхности, так как электроны, которые были связаны с этими ионами силами притяжения, непрерывно будут удаляться в медную пластинку, где они нейтрализуют прибывающие из раствора ионы меди. Так будет продолжаться до тех пор, пока либо не растворится весь цинк, либо не израсходуются все ионы меди в растворе.

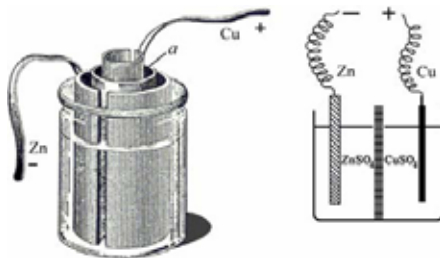
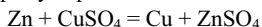


Рис. 7.6. Элемент Даниэля и его схема; *a* – пористый сосуд ($\epsilon \approx 1,1$ В)

В течение процесса раствор в цинковом полуэлементе обогащается положительными ионами, а в медном – обедняется ими. Вследствие этого раствор должен был бы получить в одной части положительный, а в другой – отрицательный заряд. На самом деле этого не происходит, так как одновременно с движением электронов по проволоке от цинкового электрода к медному в растворе от медного электрода к цинковому движутся через пористую перегородку отрицательные ионы. В описанном элементе протекает превращение цинка в сульфат цинка, а медь осаждается из раствора сульфата меди:



Напряжение на полюсах разомкнутого гальванического элемента (электродвижущая сила \mathcal{E}) не зависит от его геометрических свойств (величина и форма электродов, объемы омывающих электроды жидкостей, способ их разобщения), а определяется химической природой материалов, взятых для электродов и электролитических растворов, а также концентрацией растворов.

Оценим, что существенно и что несущественно в конструкции простейшего гальванического элемента. Цинковый электрод необходим, так как цинк является прямым участником химической реакции, энергия которой питает элемент. Несущественно, что в качестве второго электрода взята именно медь. Второй электрод в химической реакции не участвует; он служит лишь передатчиком электронов, нейтрализующих ионы меди. Если бы в качестве второго электрода взять другой электропроводящий материал с низкой упругостью растворения, например платину или уголь, то после замыкания цепи на платине или на угле осадился бы тончайший слой меди и в последующем элемент работал бы так же, как если бы электрод с самого начала был медным.

Из двух примененных электролитов, наоборот, наибольшее значение имеет медный купорос, так как именно он является наряду с цинком участником реакции, энергия которой питает элемент. Однако вместо сернокислой меди мы могли бы взять любую другую соль меди. Существенно лишь, чтобы имелись ионы меди независимо от того, в виде какой соли они были введены в раствор. Сернокислый же цинк опять-таки может быть заменен солью какого-либо другого металла, например поваренной солью.

Заменяя цинк другими металлами с высокой упругостью растворения или медный купорос солями других металлов с низкой упругостью растворения, мы получаем ряд новых гальванических элементов.

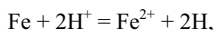
Назначение пористой перегородки заключается в том, чтобы препятствовать непосредственному действию медного купороса на цинк. При непосредственном действии медного купороса на цинк энергия реакции выделилась бы в виде теплоты в самом гальваническом элементе вместо того, чтобы превратиться в электрический ток. В некоторых конструкциях гальванических элементов пористая перегородка не нужна.

Гальванические элементы произвольно формируются в системах металлов с различной упругостью растворения. Это приводит к коррозии металлов (от лат. *corrosio* – разъедание). На поверхности металла всегда имеется тончайшая адсорбированная из воздуха пленка влаги, содержащая водородные ионы. Ионы H^+ получаются путем диссоциации воды и частично от насыщения пленки углекислотой из воздуха.

Например, в металлической конструкции, состоящей из медных и железных частей, мы имеем гальванический элемент следующего рода:



который действует согласно реакции



т.е. железо будет разрушаться, выделяя в раствор ионы, вследствие чего образуется (в итоге вторичных реакций) ржавчина, а на поверхности меди будет выделяться водород. Благодаря медленности процесса кислород из атмосферы успевает диффундировать к местам выделения водорода и окислять последний в воду. Следовательно, такая конструкция уподобляется короткозамкнутому элементу с деполяризатором.

Например, в короткозамкнутом гальваническом элементе $Fe|H^+|Cu$ роль деполяризатора выполняет кислород из атмосферы.

Как правило, следует избегать соприкосновения металлов, имеющих заметно различные упругости растворения. Однако в известных случаях это различие становится, наоборот, желательным и используется именно как мера борьбы с коррозией. Довольно широко применяется для защиты ответственных частей той или иной металлической конструкции так называемый *метод протекторов*. В паровые котлы вводятся листы цинка, металлически связанные со стенками котла. Цинк обладает большей упругостью растворения, чем железо. Он становится в получившемся гальваническом элементе отрицательным электродом и подвергается растворению, в то время как на стенках котла и в дымогарных трубах выделяется водород. На рис. 7.7 показано,

как применяется способ протекторов для защиты ответственных частей морских судов.

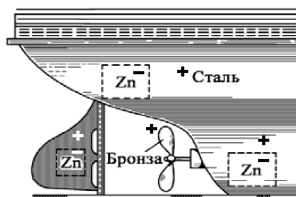


Рис. 7.7. Пример применения на морских судах метода протекторов

Для борьбы с коррозией часто применяют лакокрасочные и эмалевые покрытия металла. Широко распространено также покрытие железа цинком, оловом и хромом. Оцинкованное или хромированное железо не разрушается коррозией даже в том случае, если в слое покрытия имеются глубокие царапины. Это объясняется тем, что в данном случае (когда железо покрыто более электроотрицательным металлом) в гальваническом микроэлементе, возникающем у царапины, железо является анодом и не растворяется, а, напротив, покрывается пленкой цинка или хрома. Таким образом происходит самовосстановление покрытия в том месте, где оно оказалось случайно нарушенным (рис. 7.8, а). В связи со сказанным покрытия металла более электроотрицательным металлом называют *анодными покрытиями*.

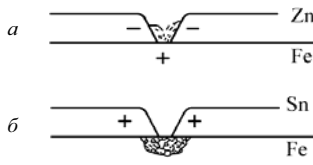


Рис. 7.8. Гальванические микроэлементы в царапине оцинкованного железа в некоторой мере восстанавливают пленку покрытия (а); в местах царапин луженого железа происходит быстрая коррозия металла (б)

Противоположная картина наблюдается при нарушении слоя оловы – слоя олова на железе. Такое покрытие называется *катодным* (железо в гальванических микроэлементах, возникающих в царапинах луженого железа, является катодом); в местах, где олово поцарапано, железо, как известно, быстро ржавеет (рис. 7.8, б).

7.5. Аккумуляторы

На рис. 7.9 показана схема действия элемента Даниэля как гальванического элемента и как электролитической ванны. Все процессы в гальванической ванне и гальваническом элементе имеют обратное направление; в частности, электромотор – поглотитель энергии – обратился в генератор – источник электроэнергии (рис. 7.9).



Рис. 7.9. Элемент Даниэля как аккумулятор. Стрелки указывают направления движений электронов

Пропуская через частично израсходованный элемент ток, обратный разрядному току, можно зарядить элемент, т.е. вызвать в нем образование нового запаса тех химических веществ, расхождение которых обуславливается действием элемента.

На этом основано изготовление *аккумуляторов*. Аккумуляторы – те же гальванические элементы, но материалы для электродов и электролиты в них подобраны с таким расчетом, чтобы обратимость достигалась наиболее легко. Аккумуляторы можно вновь заряжать (восстанавливать) током.

Здесь мы говорим только об обратном протекании процессов, а не об их полной термодинамической обратимости. Обратимость процессов зависит от режима работы аккумулятора. Чем меньше ток, тем в большей мере прямые и обратные процессы в аккумуляторе приближаются к ходу равновесных, термодинамически обратимых процессов.

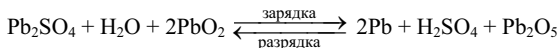
Трудность в выборе химического процесса, на основе которого может быть построен аккумулятор, состоит в том, чтобы исключить необратимые физические процессы. Например, гальванический элемент с разделенными пористой перегородкой жидкостями и с растворяющимися металлическими электродами нужным условиям не удовлетворяет, так как происходящие в нем диффузионные процессы не могут быть обращены.

На практике наибольшее распространение имеют *свинцовые* аккумуляторы, которые называются также *кислотными* аккумуляторами, и так называемые *щелочные* аккумуляторы. Свинцовые аккумулято-

ры были изобретены в 60-х гг. XIX в. французским физиком Плянтэ и усовершенствованы в 1881 г. Фором. Первые варианты щелочных аккумуляторов были созданы Эдисоном в 1903 г.

Свинцовый аккумулятор в незаряженном виде с электродами, еще не подвергнутыми «формовке током», состоит из свинцовых пластин, отлитых в виде решеток; отверстия их замазывают тестом из окиси свинца (порошка свинцового глета PbO ярко-красного цвета) и воды. Для «формовки» электродов их погружают в раствор серной кислоты, подвергая действию тока, превращающего окись свинца в недоокисную соль серной кислоты Pb₂SO₄ (являющуюся неустойчивым соединением). Чтобы зарядить аккумулятор, пластины присоединяют к противоположным полюсам источника тока. Происходит электролиз, причем Pb₂SO₄ на катоде восстанавливается водородом в губчатый (с сильно развитой поверхностью) металлический свинец, а на аноде кислородом превращается в пористый слой перекиси свинца Pb₂O₅. После достаточно долгого пропускания тока мы будем иметь одну пластину чистого свинца, другую – покрытую перекисью свинца, а концентрацию серной кислоты в растворе – увеличившейся. При разрядке аккумулятора все процессы происходят в обратном направлении, возвращая в виде электрического тока энергию, затраченную при зарядке.

В основном эти процессы могут быть выражены следующей формулой:



При разрядке аккумулятора концентрация серной кислоты понижается в несколько раз. О степени разрядки нормально заправленного аккумулятора можно судить по удельному весу раствора серной кислоты в аккумуляторе.

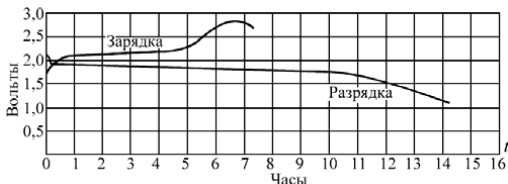


Рис. 7.10.
Напряжение свинцового аккумулятора при разрядке и зарядке

На рис. 7.10 приведены кривые, показывающие, как изменяется со временем напряжение, даваемое свинцовым аккумулятором при разрядке, и какое напряжение приходится подводить при его

зарядке (зарядка ведется так, чтобы температура электролита не поднималась выше 40 °С). К концу зарядки выделение на электродах пузырьков водорода и кислорода создает высокое поляризационное напряжение. Зарядку считают оконченной, когда напряжение достигает приблизительно 2,6 ÷ 2,7 В. Разрядку следует производить, не превышая установленного для данного аккумулятора предельного тока (в несколько ампер), и прекращать, когда напряжение падает до 1,8 В. Из рис. 7.10 можно заключить, что свинцовый аккумулятор отдает около 80% подведенной к нему электроэнергии.

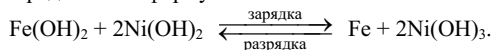
Внутреннее сопротивление заряженного, хорошо сформированного аккумулятора незначительно – сотые, даже тысячные доли Ома. Но при разрядке, по мере образования на пластинах сернокислого свинца, имеющего плохую проводимость, внутреннее сопротивление аккумулятора возрастает.

Свинцовые аккумуляторы дают примерно 20 А·ч на каждый килограмм веса аккумулятора, что соответствует запасу электроэнергии на каждый килограмм веса аккумулятора около 35 ÷ 40 Вт·ч. Это означает, что аккумулятор отдает около $7 \cdot 10^4$ Кл на каждый килограмм своего веса.

Емкость аккумуляторов сильно зависит от величины разрядного тока: она наибольшая при малом разрядном токе, уменьшается до 65% при разрядном токе 10 А и почти наполовину при токе 20 А. Емкость свинцовых аккумуляторов возрастает с повышением концентрации кислоты до некоторого предела; при дальнейшем увеличении концентрации кислоты емкость аккумуляторов начинает уменьшаться. Максимум емкости соответствует приблизительно той концентрации кислоты (около 30% при удельном весе 1,224), когда раствор имеет наибольшую электропроводность.

Химические процессы, вызываемые кислородом воздуха, уменьшают емкость аккумуляторов – со временем происходит *саморазрядка* аккумулятора. Даже лучшие аккумуляторы теряют в течение месяцев до половины своего заряда; емкость аккумуляторов обычного типа снижается от саморазрядки примерно на 1% в сутки. Саморазрядка свинцовых аккумуляторов чрезвычайно ускоряется при наличии в веществах электродов или раствора ничтожного количества примесей некоторых благородных металлов, в особенности платины: одна десятитысячная доля процента платины в веществе электродов может вызвать саморазрядку аккумулятора в течение двух часов. Поэтому при изготовлении электродов для свинцовых аккумуляторов производится самая тщательная очистка свинца. Примеси железа и других посторонних металлов в растворе не должны превышать 0,02%.

В щелочных аккумуляторах Эдисона действующей массой катода являлось порошкообразное железо, а анода – гидроксид никеля $\text{Ni}(\text{OH})_2$. В качестве электролита был применен 21%-ный раствор едкого кали (KOH). В этом случае процессы зарядки и разрядки определяются формулой



При разрядке железо окисляется, а перекись никеля частично восстанавливается; при зарядке аккумулятора находящиеся в железе окислы восстанавливаются, и образуется вновь перекись никеля, тогда как электролит остается неизменным. Зарядка состоит, по существу, в переносе кислорода в одном направлении, от железа к никелю, а разрядка – в обратном.

В щелочном аккумуляторе в качестве действующей массы отрицательных пластин вместо мелкозернистого железа применяют металлический кадмий с примесью окислов железа; для положительных пластин используют гидроксид никеля, смешанную для увеличения проводимости с графитом; электролитом служит раствор едкого кали или едкого натра (удельный вес раствора 1,2). Электроды щелочных аккумуляторов изготовляют в виде пакетов из стальной ленты с большим числом отверстий для прохода электролита к действующей массе, закладываемой в этот стальной пакет. При сборке пластины изолируют одну от другой.

Среднее рабочее напряжение щелочных аккумуляторов значительно ниже, чем свинцовых, и составляет 1,2 В. Они дают около 15 А·ч на каждый килограмм веса аккумулятора. Коэффициент полезного действия у щелочных аккумуляторов меньше, чем у свинцовых. Преимуществами щелочных аккумуляторов являются их меньший вес, простота ухода за ними, а также то обстоятельство, что случайные непродолжительные замыкания не приносят им такого вреда, как свинцовым аккумуляторам. Саморазрядка нормально не превышает 15% в месяц.

7.6. Топливный элемент

Топливной элемент (ТЭ) – электрохимический генератор, устройство, обеспечивающее прямое преобразование химической энергии в электрическую. Хотя то же самое происходит в электрических аккумуляторах, топливные элементы имеют два важных отличия: 1) они функционируют до тех пор, пока топливо и окислитель поступают из внешнего источника; 2) химический состав электролита в процессе работы не изменяется, т.е. топливный элемент не нуждается в перезарядке. Процесс, происходя-

щий в водородно-кислородном топливном элементе, по своей природе является обратным хорошо известному процессу электролиза, в котором происходит диссоциация воды при прохождении через электролит электрического тока.

Впервые о ТЭ в 1839 г. сообщил английский исследователь Гроув, который при проведении электролиза воды обнаружил, что после отключения внешнего тока в ячейке генерируется постоянный ток. Однако работа Гроува тогда не могла быть реализована. Не удалось реализовать и идею известного физикохимика В. Оствальда (1894 г.) о генерации электрической энергии в ТЭ, работающих на природных углях, а также изобретенного русским ученым П. Яблочковым (1887 г.) водородно-кис-лородного ТЭ. Интерес к ТЭ снова возродился в начале 50-х гг. после публикации в 1947 г. монографии российского ученого О. Давтяна, посвященной ТЭ. Работы по ТЭ ведутся в США, Японии, Германии, России, Италии, Канаде, Голландии и других странах. Первое практическое применение ТЭ нашли на космических кораблях "Джемини", "Аполлон" и "Шаттл". В России была создана ТЭ для корабля "Буран".

Принцип действия. Топливный элемент (рис.7.11) состоит из двух электродов, разделенных электролитом, и систем подвода топлива на один электрод и окислителя на другой, а также системы для удаления продуктов реакции. В большинстве случаев для ускорения химической реакции используются катализаторы. Внешней электрической цепью топливный элемент соединен с нагрузкой, которая потребляет электроэнергию.

В изображенном на рис.7.11 топливном элементе с кислым электролитом водород подается через полый анод и поступает в электролит через очень мелкие поры в материале электрода. При этом происходит разложение молекул водорода на атомы, которые в результате хемосорбции, отдавая каждый по одному электрону, превращаются в положительно заряженные ионы. Этот процесс может быть описан следующими уравнениями:

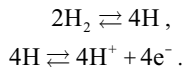
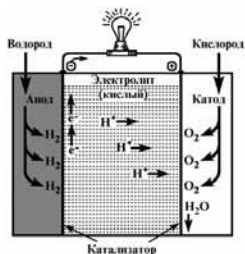
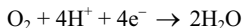


Рис 7.11 Водородно-кислородный топливный элемент. ТЭ непрерывно снабжается кислородом и водородом для получения электрической энергии в результате протекания химической реакции окисления



Ионы водорода диффундируют через электролит к положительной стороне элемента. Подаваемый на катод кислород переходит в электролит и также реагирует на поверхности электрода с участием катализатора (обычно Pt). При соединении его с ионами водорода и электронами, которые поступают из внешней цепи, образуется вода:



Поток электронов и ионов поддерживает баланс заряда и вещества в электролите. Образующаяся в результате реакции вода частично разбавляет электролит. Поток электронов во внешней цепи представляет собой постоянный ток, который используется для совершения работы. Большинство реакций в топливных элементах обеспечивают ЭДС около 1 В. Размыкание цепи или прекращение движения ионов останавливает работу топливного элемента.

Типы топливных элементов. Существуют различные типы топливных элементов. Их можно классифицировать, например, по используемому топливу, рабочему давлению и температуре, по характеру применения.

Элементы на водородном топливе. В этом типичном описанном выше элементе водород и кислород переходят в электролит через микропористые углеродные или металлические электроды. Высокая плотность тока достигается в элементах, работающих при повышенной температуре (около 250 °С) и высоком давлении.

Новым типом элементов, способных работать на водороде и кислороде при нормальной температуре и давлении, являются элементы с ионообменными мембранами (рис.7.12). В этих элементах вместо жидкого электролита между электродами располагается полимерная мембрана, через которую свободно проходят ионы. В таких элементах наряду с кислородом используется воздух. Образующаяся при работе вода не растворяет электролит и может быть легко удалена.

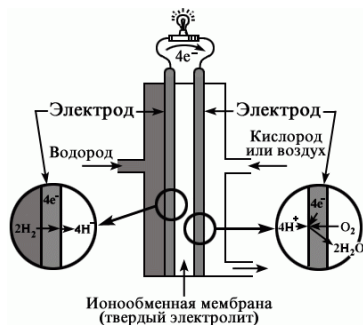


Рис. 7.12. Топливный элемент с ионообменной мембраной работает на кислороде и водороде, но вместо электролита используется полимерная мембрана.

Элементы, работающие на других видах топлива. В принципе реакции в топливных элементах не обязательно должны быть реакциями окисления обычных топлив. В перспективе могут быть найдены и другие химические реакции, которые позволят осуществить эффективное непосредственное получение электричества. В некоторых устройствах электроэнергия получается при окислении, например, цинка, натрия или магния, из которых изготавливаются расходуемые электроды.

Коэффициент полезного действия. Превращение энергии обычных топлив (угля, нефти, природного газа) в электричество было до сих пор многоступенчатым процессом. Сжигание топлива позволяет получить пар или газ, необходимые для работы турбины или двигателя внутреннего сгорания, которые, в свою очередь, вращают электрический генератор. Коэффициент использования энергии такого превращения ограничен по второму закону термодинамики и для самых современных паротурбинных энергетических установок не превышает 40%. Для топливных элементов нет термодинамического ограничения коэффициента использования энергии. В существующих ТЭ от 60 до 70% энергии топлива непосредственно превращается в электричество, и энергетические установки на ТЭ, использующие водород из углеводородного топлива, проектируются на КПД $40 \div 45\%$. Электродвижущую силу ТЭ можно рассчитать по уравнениям химической термодинамики

$$\mathcal{E} = \Delta G_{x,p} / nF,$$

где \mathcal{E} – ЭДС; $\Delta G_{x,p}$ – изменение энергии Гиббса в результате протекания химической реакции; n – число электронов на молекулу реагента; F – постоянная Фарадея (96485 Кл/моль). Расчет ЭДС по уравнению для реакции $2H_2 + O_2 = 2H_2O$ при давлениях O_2 и H_2 , равных 100 кПа и воды в жидком состоянии дает при $T = 298$ К значение $\mathcal{E} = 1,23$ В.

Так как процесс преобразования энергии не имеет промежуточной стадии генерации теплоты, то для электрохимического способа нет ограничения цикла Карно и теоретический КПД преобразования энергии можно рассчитать по уравнению

$$\eta = \Delta G_{x,p} / \Delta H_{x,p},$$

где $\Delta H_{x,p}$ – изменение энтальпии в результате протекания химической реакции (тепловой эффект реакции). Например, рассчитанный по данному уравнению КПД при $T = 298$ К равен $\eta = 1,0$ для метана и $\eta = 0,94$ для водорода.

Как и любой источник тока, ТЭ характеризуется напряжением, мощностью и сроком службы. Напряжение топливного элемента

ниже ЭДС из-за омического сопротивления электролита и электродов R , поляризации катода $\Delta\phi_K$ и анода $\Delta\phi_A$

$$U = E - IR - (\Delta\phi_K + \Delta\phi_A),$$

где I – сила тока.

Поляризация электродов обусловлена замедленностью процессов, протекающих на электродах, и равна разности потенциалов электрода под током ϕ_I и при отсутствии тока $\phi_{I=0}$:

$$\Delta\phi = \phi_I - \phi_{I=0}.$$

Поляризация электродов возрастает с увеличением плотности тока. Можно снизить плотность тока и поляризацию, применяя пористые электроды, имеющие высокоразвитую поверхность (до 100 м²/г). Для ускорения реакций в пористые электроды вводят катализаторы.

В соответствии с $U = \varepsilon - IR - (\Delta\phi_K + \Delta\phi_A)$ напряжение ТЭ снижается с увеличением тока. Напряжение большинства ТЭ лежит в пределах 0,8÷0,9 В. Реальный КПД топливного элемента η_p ниже теоретического ($\eta_t = nF\varepsilon/\Delta H_{x,p}$) и определяется по уравнению

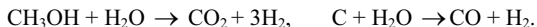
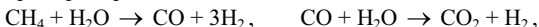
$$\eta_p = n_p F U / \Delta H_{x,p},$$

где n_p – реальное количество электронов на молекулу реагента.

Величина n_p ниже n в связи с неполным использованием реагентов и их расходом на собственные нужды установок с ТЭ. Факторы, увеличивающие напряжение, повышают КПД.

В процессе работы характеристики ТЭ постепенно ухудшаются, что обусловлено дезактивацией и износом катализаторов, коррозией основ электродов, изменением структуры электродов и другими причинами. Срок службы некоторых ТЭ достигает 40 тыс. часов ($\approx 4,5$ года).

С приемлемой скоростью в ТЭ могут окисляться лишь водород и в специальных видах ТЭ – монооксид углерода и метанол. Поэтому природные виды топлива и метанол предварительно конвертируются в блоке подготовки топлива в водород и другие газы, например по реакциям



Продукты конверсии затем подаются в ТЭ. Так как реальный КПД ТЭ (40÷65%) ниже 100%, то при их работе выделяется тепло, которое может быть использовано либо для теплофикации, либо для генерации дополнительной электрической энергии с помощью паровых или газовых турбин.

Разработаны ТЭ с фосфорнокислым электролитом (98%-ным раствором H_3PO_4), в которых на аноде и катоде протекают реакции: $2\text{H}_2 - 4\text{e}^- \rightarrow 4\text{H}^+$, $\text{O}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e}^- \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$.

Элементы работают при температуре 200 °С. Материалом электродов, устойчивым при этой температуре в агрессивной среде, служит графит, а катализаторами – Pt (0,8÷1,2 г/кВт) и ее сплавы. В ТЭ с кислотными электролитами окислителем может служить кислород воздуха, так как компоненты воздуха химически не взаимодействуют с такими электролитами. На базе этих ТЭ в США и Японии созданы и испытаны электроэнергетические установки (ЭЭУ) мощностью от 12 кВт до 11 МВт. Некоторые из них вышли на уровень коммерческой реализации. Данные ЭЭУ имеют срок службы несколько тысяч часов, суммарный КПД 75%, в том числе электрический 40 ÷ 42%. Выбросы вредных компонентов на этих ЭЭУ на 1 ÷ 2 порядка ниже по сравнению со стандартами на выбросы от тепловых машин.

Широкому промышленному применению электроэнергетических установок с использованием топливных элементов (ЭЭУ) в настоящее время препятствует относительно малый срок службы ТЭ и высокая стоимость.

7.7. Ток в газах

Газы в нормальном состоянии электрически нейтральны, состоят из незаряженных атомов и молекул, а потому не проводят электрический ток. Электрический ток могут проводить ионизованные газы, т.е. газы, в которых заметная часть атомов и молекул потеряла по одному или несколько внешних электронов и превратилась в положительные ионы. В особых случаях могут образовываться и отрицательные ионы. Ионы в газах возникают при нагреве, под действием света, излучения, электрических полей. Небольшое количество ионов имеется в газах и при обычных условиях, что связано с действием света, космического излучения и радиации Земли. Минимальное значение энергии, необходимое для удаления из нейтрального атома или молекулы электрона, называется энергией ионизации атома или молекулы. Энергия ионизации обычно выражается в электрон-вольтах. Электрическая проводимость воздуха была обнаружена в 1785 г. Кулоном при наблюдении потери электричества у заряженных проводников. Чтобы установить этот факт, две пластины конденсатора можно периодически заряжать до разности потенциалов $\Delta\phi$. Вследствие проводимости воздуха они медленно разряжаются. Быстрота разрядки измеряется электрометром. Если воздейст-

водить на воздушный промежуток между пластинами конденсатора ультрафиолетовым светом, излучением, пламенем свечи, то скорость разрядки резко возрастает. Это связано с ионизацией воздушного промежутка и увеличением электропроводности воздуха, а также с поверхностной ионизацией. При поверхностной ионизации ионы и электроны поступают в газ с поверхности пластин.

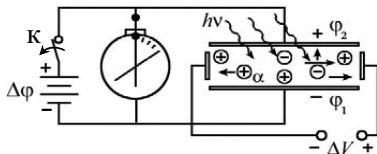


Рис. 7.13. Измерение проводимости воздуха под действием ионизирующих факторов и электрических полей после размыкания ключа К

Проводимость газа уменьшается, если подвести разность потенциалов ΔV к перпендикулярно расположенным пластинам (рис. 7.13). Электрическое поле боковых пластин удаляет ионы из воздушного промежутка и повышает сопротивление воздуха. После прекращения действия ионизатора положительные и отрицательные ионы начинают соединяться между собой, образуя нейтральные атомы и молекулы. Такой процесс называется рекомбинацией: $A^+ + B^- \rightarrow AB + h\nu$. В результате рекомбинации проводимость газа падает. Если источник ионов создает в единице объема в единицу времени q_i пар ионов, то число пар ионов в единице объема n будет изменяться со временем согласно уравнению

$$\frac{dn}{dt} = q_i - \alpha_r n^2 = \alpha \left(\sqrt{\frac{q_i}{\alpha_r}} - n \right) \left(\sqrt{\frac{q_i}{\alpha_r}} + n \right).$$

Слагаемое $-\alpha n^2$ описывает процесс рекомбинации пар ионов различных знаков, что приводит к уменьшению концентрации n . Если в момент включения ионизатора ионы в газе отсутствовали ($n_0 = 0$), то нарастание концентрации ионов со временем описывается зависимостью

$$n = \sqrt{\frac{q_i}{\alpha_r}} \cdot \frac{1 - \exp(-t/\tau)}{1 + \exp(-t/\tau)}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{1}{2\sqrt{q_i}\alpha_r}.$$

При выключении ионизатора ($q_i = 0$, $n_0 \neq 0$) происходит спад концентрации ионов

$$n = \frac{n_0}{1 + n_0 \alpha_r t}.$$

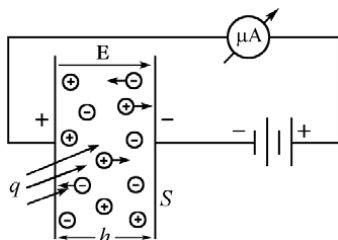
По скорости спада концентрации ионов можно определить коэффициент рекомбинации ионов α_r . Размерность $\alpha_r = q_i/n^2$ [$\text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^6 = \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$].

7.8. Несамостоятельная проводимость газов

Пусть между двумя пластинами конденсатора создано электрическое поле напряженностью E , а в промежутке между пластинами внешним ионизатором q в единице объема в единицу времени создается q_i пар ионов и поддерживается концентрация ионов n_+ и n_- обоих знаков (рис. 7.14). Плотность электрического тока между пластинами при равномерной по объему ионизации равна

$$j = en_+u_+ + en_-u_-.$$

Рис. 7.14. Определение величины тока в воздушном промежутке между обкладками конденсатора при действии ионизирующего фактора мощностью q



Скорости направленного движения зарядов во внешнем электрическом поле пропорциональны напряженности электрического поля:

$$u_{\pm} = b_{\pm}E.$$

Величины b_{\pm} называются подвижностями ионов. Они численно равны скорости направленного движения зарядов в поле единичной напряженности. Размерность $[b] = \text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Считая, что концентрации ионов разных знаков одинаковы, поскольку газ в целом электронейтрален $n_+ = n_- = n$, имеем для плотности тока

$$j = en(b_+ + b_-)E.$$

Если S – площадь пластин конденсатора, h – расстояние между пластинами, n – концентрация ионов в единице объема, q_i – число пар ионов создаваемых в единице объема в единицу времени при

действию ионизирующего фактора мощностью q , α_r – коэффициент рекомбинации, то можно записать следующее уравнение баланса для определения числа пар ионов в объеме Sh , заключенном между обкладками конденсатора:

$$Sh \frac{dn}{dt} = Shq_i - Sh\alpha_r n^2 - \frac{Sj}{e}.$$

Здесь $(Shq_i - Sh\alpha_r n^2)$ – число пар ионов, возникающих и рекомбинирующих в объеме между пластинами в единицу времени; Sj/e – число пар ионов, уносимых за счет прохождения электрического тока.

Разделив левую и правую части уравнения на Sh , имеем

$$\frac{dn}{dt} = q_i - \alpha_r n^2 - \frac{j}{eh}.$$

В стационарном случае ($dn/dt = 0$), когда ток между пластинами конденсатора установился, получаем следующее уравнение для определения n :

$$\alpha_r n^2 + \frac{n(b_+ + b_-)E}{h} - q_i = 0.$$

Решив это уравнение относительно n

$$n = \sqrt{\frac{q_i}{\alpha_r}} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{(b_+ + b_-)E}{2h\sqrt{\alpha_r q_i}} \right)^2} - \frac{(b_+ + b_-)E}{2h\sqrt{\alpha_r q_i}} \right) = \sqrt{\frac{q_i}{\alpha_r}} \cdot \left(\sqrt{1 + (\beta E)^2} - \beta E \right),$$

где $\beta = (b_+ + b_-)/(2h\sqrt{\alpha_r q_i})$ – параметр, характеризующий процессы в воздушном промежутке между обкладками конденсатора, и подставляя n в выражение для плотности тока, находим

$$j = e \sqrt{\frac{q_i}{\alpha_r}} \left(\sqrt{1 + (\beta E)^2} - \beta E \right) (b_+ + b_-) E \times \frac{\sqrt{1 + (\beta E)^2} + \beta E}{\sqrt{1 + (\beta E)^2} + \beta E},$$

$$j = e \sqrt{\frac{q_i}{\alpha_r}} \cdot \frac{(b_+ + b_-)E}{\sqrt{1 + (\beta E)^2} + \beta E}.$$

В общем случае закон Ома для тока в газе при несамостоятельном разряде, т.е. включенном внешнем ионизаторе, не выполняется, поскольку j нелинейным образом зависит от E – напряженности электрического поля (рис. 7.15). В слабых электрических полях $\beta E \ll 1$, закон Ома выполняется

$$j = e \sqrt{\frac{q_i}{\alpha_r}} (b_+ + b_-) E$$

– плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля (рис. 7.15, участок OA).

С увеличением напряженности электрического поля все образовавшиеся ионы будут достигать пластин конденсатора (коэффициент рекомбинации $\alpha_r \rightarrow 0$). В этом случае ($\beta^2 E^2 \gg 1$) плотность тока достигает насыщения и не зависит от E :

$$j = eq_i h. ^*)$$

Величина плотности тока насыщения определяется скоростью объемной ионизации q_i и величиной газового промежутка (рис. 7.15, участок BC).

Число пар ионов, рекомбинирующих за единицу времени в единице объема газа, свободного от пылинок:

$$\Delta n = \alpha_r n^2,$$

где n – концентрация ионов; α_r – коэффициент рекомбинации. При наличии в газе частиц пыли, дыма и т.п. рекомбинация в значительной мере происходит на них. В таком случае число пар ионов, рекомбинирующих в единицу времени, можно считать пропорциональным n :

$$\Delta n = \beta n.$$

Средняя продолжительность существования иона

$$\tau = n/q_i.$$

7.9. Самостоятельный газовый разряд. Закон Пашена

При дальнейшем увеличении напряженности электрического поля в газовом промежутке вновь наблюдается увеличение тока, и самостоятельный разряд переходит в самостоятельный лавинный разряд (рис. 7.15, участок CD). В этом случае сила тока определяется как интенсивностью внешнего ионизатора, так и газовым усилением, величина которого зависит от давления газа и напряженности электрического поля в области, занимаемой разрядом. Усиление тока связано с процессами ударной иониза-

^{*)} Этот результат получается непосредственно из уравнения баланса $\alpha_r n^2 + n(b_+ + b_-)E/h - q_i = 0$, если учесть, что в сильных полях коэффициент рекомбинации $\alpha_r \approx 0$. Тогда $n = hq_i / [(b_+ + b_-)E]$ и $j = eq_i h$.

ции атомов и молекул газа электронами, приобретающими в сильных электрических полях энергию, достаточную для выбивания из нейтральных атомных частиц электронов.

При дальнейшем увеличении напряженности поля несамостоятельный газовый разряд переходит в самостоятельный газовый разряд, не прекращающийся даже при выключении внешнего ионизатора. Переход от несамостоятельного газового разряда к самостоятельному характеризуется резким увеличением электрического тока (точка D) и называется электрическим пробоем газа. В этом случае на длине свободного пробега x электрон или ион приобретает энергию exE , достаточную для ионизации атомов и молекул при соударении: $exE \approx \varphi_i e$, здесь φ_i – потенциал ионизации атома или молекулы.

молекул при соударении: $exE \approx \eta \varphi_i e$, здесь φ_i – потенциал ионизации атома или молекулы, $\eta = M/(m + M)$ – доля энергии идущая на ионизацию, M – масса ионизируемого атома или молекулы, m – масса ускоренного электрона или иона. При ионизации молекул газа ускоренными электронами $\eta \approx 1$.

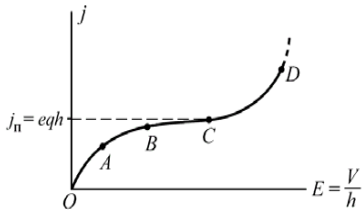


Рис. 7.15. Зависимость плотности тока в газе от напряженности электрического поля: $OABC$ – участок несамостоятельного газового разряда; OA – закон Ома выполняется; ABC – закон Ома не выполняется; CD – несамостоятельный лавинный разряд; D – начало самостоятельного разряда

Среднее число электронов, проходящих расстояние x без столкновений, равно

$$N(x) = N_0 \exp\left(-\frac{x}{\langle l \rangle}\right),$$

где $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега; N_0 – полное число электронов в пучке, начавших двигаться в поле напряженностью E . Если $x \approx \varphi_i/E$, то все такие электроны будут ионизовать газ. На единичном пути электрон испытывает в среднем $1/\langle l \rangle$ столкновений, так что на этом пути все N электронов вызовут

$$\frac{N}{\langle l \rangle} = \frac{N_0}{\langle l \rangle} \exp\left(-\frac{\varphi_i}{\langle l \rangle E}\right)$$

ионизаций. Среднее число ионизаций, производимых на единичном пути одним электроном, равно

$$\delta = \frac{1}{\langle l \rangle} \exp\left(-\frac{\Phi_i}{\langle l \rangle E}\right).$$

Величина δ называется коэффициентом ионизации. Поскольку (Ч. 1, п. 10.2) $\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}P\sigma}$ – обратно пропорциональна давлению

P газа и поперечному сечению рассеяния σ , $E = V/h$, где V – разность потенциалов между плоскими электродами, расположенными на расстоянии h , то можем записать δ в виде

$$\delta = \frac{\sqrt{2}\sigma}{kT} P \exp\left(-\frac{\Phi_i \sqrt{2}\sigma h P}{kTV}\right) = Pf\left(\frac{V}{hP}\right),$$

где f в общем случае – функция отношения $V/(hP)$.

Из полученного соотношения следует, что развитие процессов объемной ионизации оказывается затрудненным и при больших, и при малых давлениях. При малых давлениях почти каждое столкновение сопровождается ионизацией, но число таких столкновений между электродами мало и электронная лавина, необходимая для создания самостоятельного разряда, не может образоваться. При больших давлениях число столкновений велико, но энергия, приобретаемая электронами на длине свободного пробега, недостаточна для ионизации нейтральных атомов и молекул. Существует оптимальное давление, при котором ионизация газа идет наиболее легко и самостоятельный разряд возникает при минимальном напряжении. Максимум δ достигается при $x = \langle l \rangle$, тогда $P_{\max} = \frac{kTV}{\sqrt{2}\sigma h \Phi_i}$.

Коэффициент ионизации при P_{\max} равен $\delta_{\max} = \frac{V\sqrt{2}}{eh\Phi_i}$, где e –

основание натурального логарифма, (рис. 7.16).

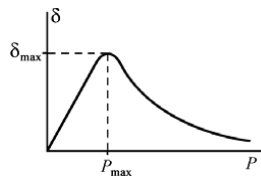


Рис. 7.16. Зависимость коэффициента ионизации от давления газа

Для возникновения самостоятельного газового разряда необходимо, чтобы в среднем при каждом столкновении электрон ионизовал атом или молекулу, создавая на единице длины δ новых электронов.

При прохождении электронов через газ с относительно слабым полем, не искажающим объемный заряд, но достаточным для ударной ионизации с коэффициентом ионизации δ , лавинообразное нарастание плотности электронного тока j_e по длине газового промежутка описывается уравнением

$$\frac{dj_e(x)}{dx} = \delta j_e(x).$$

Уравнение имеет решение $j_e(x) = C \exp(\delta x)$. В стационарных условиях полная плотность электронного j_e и ионного j_i токов в газе должна оставаться постоянной:

$$j_e(x) + j_i(x) = j.$$

Определение постоянных j и C возможно из граничных условий на катоде ($x = 0$) и аноде ($x = h$). Для электронного тока

$$j_e(x=0) = \gamma j_i(x=0) + q_i h e$$

– при ударе одного иона о катод генерируется γ новых электронов, и приходят все электроны, генерируемые внешним ионизатором по всей длине h камеры $q_i h e$ (рис. 7.17). Для положительных ионов на аноде имеем также условие полного выхода генерируемых положительных ионов на анод:

$$j_i(h) = q_i h e.$$

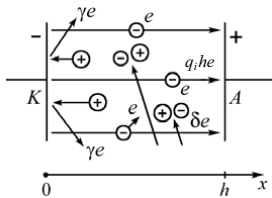


Рис. 7.17. К выводу условия возникновения самостоятельного газового разряда. При ударе иона о катод генерируется γ новых электронов. Электрон на единице длины генерирует δ новых электронов

В результате для полного тока в газе получаем

$$j = q_i h e \frac{(1 + \gamma) + e^{\delta h}}{(1 + \gamma) - \gamma e^{\delta h}}.$$

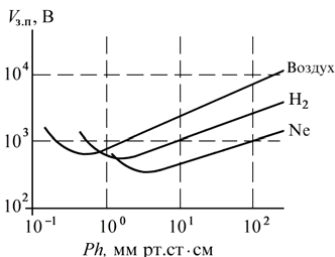
При отсутствии внешнего ионизатора $q_i h e \rightarrow 0$ ток в газовом промежутке будет отличен от нуля при условии

$$1 + \gamma - \gamma e^{\delta h} = 0.$$

Поскольку $\delta = Pf \left(\frac{V}{hP} \right)$, то получаем следующее уравнение для определения напряжения на электродах, соответствующего возникновению самостоятельного газового разряда – потенциала зажигания $V_{з.п.}$:

$$f \left(\frac{V}{hP} \right) = 0, \quad V_{з.п.} = \bar{V}_{з.п.}(hP).$$

Рис. 7.18. Кривые Пашена. Зависимость потенциала зажигания $V_{з.п.}$ от произведения Ph для различных газов.



Последнее условие устанавливает, что наименьшее напряжение зажигания газового разряда между двумя плоскими электродами есть величина постоянная (характерная для данного сорта газа) при одинаковых значениях произведения Ph , где P – давление газа; h – расстояние между электродами. Этот закон был сформулирован в 1899 г. немецким физиком Ф. Пашеном (1865–1947), рис. 7.18.

Потенциал зажигания возрастает в области малых и в области больших значений Ph , при $Ph \approx 1$ мм рт.ст.·1 см потенциал зажигания достигает для большинства газов минимальной величины, обычно порядка сотен вольт.

7.10. Тлеющий разряд

Тлеющий разряд является одной из разновидностей самостоятельного электрического разряда в газах, в котором катод испускает электроны при бомбардировке его положительными ионами и фотонами, образующимися в газе. Тлеющий разряд возникает при низкой температуре катода, отличается сравнительно малой

плотностью тока на катоде ($j < 1 \text{ А/см}^2$) и большим – сотни вольт, падением потенциала вблизи катода. Электрическое поле в тлеющем разряде существенно неоднородно.

Если взять стеклянную трубку длиной $\approx 50 \text{ см}$ с двумя впаиваемыми электродами и приложить к ним напряжение порядка $300 \div 500 \text{ В}$, то при атмосферном давлении $\approx 10^5 \text{ Па}$ пробой в газе не возникает. Если начать откачивать газ из трубки, то при давлении $\approx 7 \cdot 10^3 \text{ Па}$ возникает самостоятельный разряд в виде светящегося шнура. При давлении $200 \div 400 \text{ Па}$ свечение заполнит всю трубку. При давлении $10 \div 1 \text{ Па}$ разряд приобретает некую структуру, состоящую из темных и светящихся областей с неравномерным распределением потенциала (рис. 7.19). Непосредственно к катоду примыкает узкий слой темного астонова пространства. Впервые такая структура наблюдалась в Кембридже Ф. Астоном (1877–1945) в гелии, неоне, водороде. Ширина этой области $\approx 0,1 \text{ мм}$ и уменьшается с увеличением плотности тока. В этой области электроны, выбитые из катода, еще не успели приобрести энергию, достаточную для возбуждения атомов и молекул газа.

Затем идет тонкая светящаяся пленка 2 – астоново свечение (катодная пленка), где энергия электронов уже достаточна для возбуждения свечения, но еще не достаточна для ионизации атомов. За астоновым свечением следует темное катодное пространство 3. Оно слабо светится, но кажется темным на фоне примыкающих ярких областей разряда. В этой части разряда начинается ионизация атомов, молекул и возникают лавины электронов. Из-за возможности ионизации уменьшается вероятность возбуждения атомов, что приводит к ослаблению свечения атомов. В области темного катодного пространства 3 образуется значительный объемный заряд, приводящий к существенному перераспределению потенциала вдоль разрядной трубки. В поле этого заряда ускоряются положительно заряженные ионы, обеспечивающие необходимую ударную эмиссию электронов с катода. Темное катодное пространство резко переходит в отрицательное тлеющее свечение 4,

возникающее из-за рекомбинации электронов с положительными ионами и излучательной релаксации возбужденных атомов.

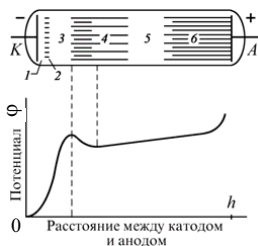


Рис. 7.19. Внешний вид и распределение потенциала в тлеющем разряде: 1 – астоново темное пространство; 2 – астоново свечение (катодная пленка, катодный слой); 3 – катодное темное пространство; 4 – катодное тлеющее свечение (отрицательное свечение); 5 – фарадеево темное пространство; 6 – положительный светящийся столб

Ближе к аноду яркость тлеющего свечения ослабевает, и оно постепенно переходит в фарадеево темное пространство 5, куда не долетают быстрые электроны электронных лавин. В пределах фарадеева темного пространства электроны термализуются и набирают энергию, достаточную для «термического» возбуждения и ионизации атомов.

Перечисленные пять областей называются катодными частями разряда. В них происходят все процессы, необходимые для поддержания разряда.

За фарадеевым темным пространством следует ионизованный светящийся газ *b* – положительный светящийся столб. Положительный столб иногда разделяется на отдельные чередующиеся светлые и темные полосы – страты, иногда неподвижные, но чаще быстро перемещающиеся. Страты (лат. *stratum* – настил, слой) представляют собой ионизационные волны. Каждая страта обращена яркой и резкой стороной (головой) к катоду, а к аноду яркость страты убывает. В «голове» страты напряженность поля, температура и концентрация электронов велики. При перемещении к аноду их концентрация и температура падают настолько, что прекращается ионизация – темный промежуток. Затем возникает новый скачок электрического потенциала и образуется новая страта.

Положительный столб имеет высокую степень ионизации и проводимости газа. Поэтому плотность заряда в нем невелика и даже близка к нулю. Свечение положительного столба обусловлено рекомбинацией электронов с положительными ионами.

Наличие положительного столба не существенно для разряда, хотя он имеет большое значение в применениях разряда. В длинных трубках положительный столб служит проводящим мостом, соединяющим фарадеево темное пространство с анодом.

Приборы с тлеющим разрядом используются в релейных и автоматических устройствах, ионных рентгеновских трубках, в счетной технике, как источники света и т.д.

7.11. Искровой разряд. Молния

Искровой разряд – неустановившийся электрический разряд в газе, возникающий обычно при давлениях порядка атмосферного в том случае, если непосредственно после пробоя разрядного промежутка напряжение на нем падает за время 10^{-7} – 10^{-4} с ниже величины напряжения гашения разряда. Внешне искровой разряд представляет пучок ярких зигзагообразных разветвляющихся полосок, пронизывающих разрядный промежуток. Полоски быстро гаснут и сменяют друг друга. Эти полоски называют

искровыми каналами. Искровой разряд повторяется после погасания, если напряжение вновь возрастет до величины напряжения пробоя. В природных условиях искровой разряд наблюдается в виде молний (рис. 7.20). Разность потенциалов между дном тучи и поверхностью Земли может достигать 20, 40 и даже 100 млн вольт, а ток в канале молнии – десятков и сотен тысяч ампер.

Высокий потенциал зажигания искрового разряда связан с большими давлениями газов, при которых он происходит. Так, сухой воздух пробивается на расстоянии 1 см при разности потенциалов 30 кВ. После пробоя газового промежутка искровым каналом сопротивление ионизованного промежутка становится очень малым и через канал проходит кратковременный импульс тока большой силы. Если мощность источника тока мала, то разряд прекращается после прохождения большого импульса тока. Чем больше энергии запасено в источнике, тем более длительный и сильный ток проходит по каналу разряда.



Рис. 3.20. Молния – пример искрового разряда продолжительностью $0,2 \div 0,3$ с с силой тока $10^4 \div 2,3 \cdot 10^5$ А длиной до 20 км

В результате прохождения импульса тока в канале искры выделяется большое количество энергии $0,1 \div 1$ Дж на каждый сантиметр длины канала, резко возрастают температура и давление в окружающем газе с образованием ударной волны. Ударные волны от расширяющихся искровых каналов порождают звук, воспринимаемый как

характерный треск искры, а в случае молнии – гром.

Искровой разряд развивается очень быстро, за время 10^{-7} с и меньше. Механизм его развития связан с возникновением стримера (от англ. *streamer* – единственное число, от *stream* – течь, проноситься) – узких светящихся каналов, образующихся в газе, помещенном в сильное электрическое поле при давлениях, близких к атмосферному (рис. 7.21). Зарождающаяся вблизи катода электронная лавина ионизует и возбуждает молекулы газа (рис. 7.21, а, б). Испускаемые при этом световые кванты, распространяясь к аноду со скоростью света, сами ионизуют газ и дают начало новым электронным лавинам.

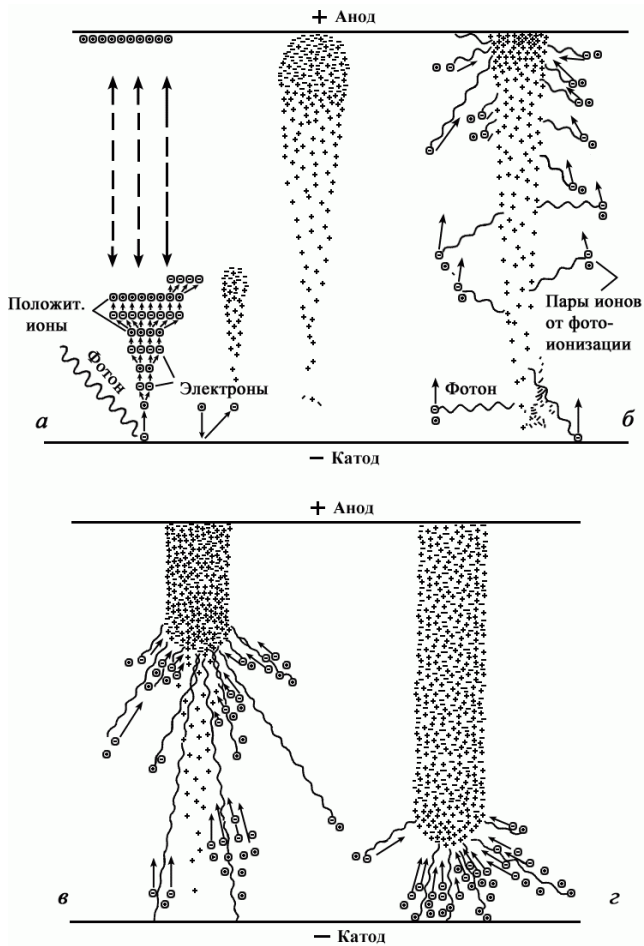


Рис. 7.21. Схема возникновения и развития положительного стримера

В результате во всем газовом промежутке появляются слабо светящиеся скопления ионизованного газа, называемые стримерами. В процессе своего развития стримеры, быстро удлиняясь, перекрывают разрядный промежуток и соединяют разноименные полюса непрерывными проводящими каналами (рис. 7.21, в). По этим каналам, наполненным положительными зарядами, в последующий момент времени устремляется мощный поток электронов, образуя канал сильного электрического разряда (рис. 7.21, з).

Механизм образования стримеров в результате фотоионизации и их слияние в один проводящий канал обеспечивают высокую скорость распространения искрового разряда, много большую скорости распространения отдельной электронной лавины.

Искровой разряд нашел разнообразное применение в науке и технике. С его помощью инициируют взрывы и процессы горения, измеряют напряжения, используют в спектральном анализе, для регистрации заряженных частиц, в переключателях электрических цепей, для обработки металлов, разрушения высокопрочных материалов и пород.

В последнее время для повышения защиты уязвимых и ответственных объектов, например пусковых комплексов ракет, пытаются реализовать различные формы управления молнией, в частности лазерное инициирование молнии. Лазерное инициирование основано на создании в воздухе ионизованного канала с помощью лазерного излучения.

7.12. Коронный разряд

Коронный разряд возникает при давлениях порядка атмосферного в сильно неоднородном электрическом поле, например вокруг проводов линий высоковольтных электропередач. Коронный разряд является самостоятельным высоковольтным разрядом. Бледно-голубое или фиолетовое свечение разряда по аналогии с ореолом солнечной короны дало повод к названию. Помимо излучения в видимой, ультрафиолетовой и более коротковолновых частях спектра коронный разряд вызывает движение частиц газа от коронирующего электрода. Возникает электрический ветер. Коронный разряд сопровождается шелестящим шумом, радиоизлучением, химическими реакциями, в частности образованием озона и окислов азота в воздухе. При постоянном напряжении различают корону положительную и отрицательную, в зависимости от знака заряда электрода (рис. 7.22).

При положительной короне электронные лавины порождаются вокруг анода с малым радиусом кривизны за счет фотоионизации газа фотонами, испускаемыми коронирующим слоем.

В отрицательной короне положительные ионы, порождаемые электронным ударом, ускоренно движутся к катоду и выбивают из катода электроны, которые, двигаясь от катода, порождают новые электронные лавины.

Ионизация и возбуждение нейтральных частиц газа лавинами электронов локализованы в ограниченной области, называемой зоной ионизации, поскольку напряженность электрического поля убывает по мере удаления от участков проводников с малым радиусом кривизны. Из зоны ионизации во внешнюю зону движется поток зарядов, знак которых совпадает со знаком коронирующего электрода. Образующийся объемный заряд тормозит дальнейшее развитие процессов ионизации, ослабляя поле вокруг коронирующего электрода, локализуя зону ионизации около электрода и регулируя интенсивность коронного разряда.

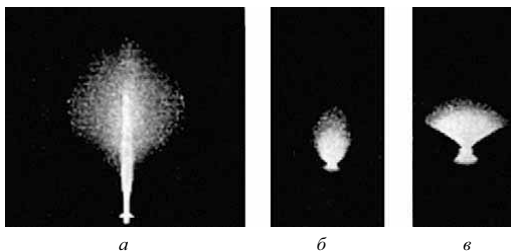


Рис. 7.22. Кистеобразные формы коронного разряда в атмосферном воздухе. Острие с гиперболической вершиной (радиус кривизны 1,5 мм): *а* – потенциал острия +25 кВ, стримерная корона; *б* – потенциал острия –25 кВ, отрицательная корона в режиме тричелевских импульсов; *в* – потенциал острия –60 кВ, отрицательная корона в непрерывном режиме

Положительная корона на электродах с малым радиусом кривизны имеет вид плотно прилегающего к электроду однородного чехла. Положительная корона не генерирует высокочастотных колебаний электрического тока. Если увеличить радиус кривизны положительного электрода и повысить напряжение, то в этом случае коронный разряд приобретает не однородную, а стримерную, факельную или кистевую формы. Вместо однородного чехла положительная корона приобретает вид отдельных ярко

светящихся каналов, размывающихся по концам в рассеянное свечение. Возникают высокочастотные электрические колебания, часто более мощные, чем в отрицательной короне (рис. 7.23).

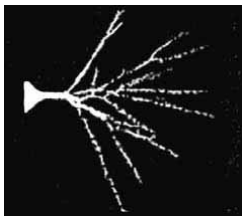


Рис. 7.23. Коронный стример в атмосферном воздухе. Острие с полусферической вершиной (радиус кривизны 1,5 мм)

Для отрицательной короны характерны локализация зоны ионизации в виде достаточно однородно расположенных по поверхности электродов светящихся очагов и зависимость напряжения возникновения короны от состояния поверхности. Отрицательная корона генерирует высокочастотные колебания тока с почти однородным частотным спектром до нескольких мегагерц.

Коронный разряд может возникать в естественных условиях под влиянием атмосферного электричества на верхушках деревьев, корабельных мачт и пр. электродов с острыми выступами. Это явление получило в старину название «огней святого Эльма» (кистевой разряд), рис. 7.24.

В случае положительного острия кистевой разряд представляет суммарную картину свечения отдельных чередующихся во времени коронных стримеров, возникающих у острия идвигающихся со скоростью 10^7 м/с в сторону слабого поля, где они затухают.

В случае отрицательного заряда острия свечение коронного разряда похоже на кисть, природа которой может быть прерывистой (импульсы Тричела) или непрерывной (рис. 7.22, б, в).

Коронный разряд применяется в промышленных устройствах для зарядки ионами потоков диспергированных материалов и осаждения мелких заряженных частиц силами электрического поля. Этот процесс применяется в электрофильтрах, электросепараторах, устройствах электростатической окраски, при нанесении защитных или декоративных покрытий.

На высоковольтных линиях электропередач корона вокруг проводов вызывает потери, особенно значительные при атмосферных осадках, достигающие сотен киловатт на километр длины. Коронный разряд является источником радиопомех.



Рис. 7.24. «Огни святого Эльма» – свечение металлических частей под влиянием атмосферного электричества (ночной снимок)

Для уменьшения токов утечки провода высоковольтных линий должны быть достаточно толстыми, а все части высоковольтных установок иметь плавные обводы и большие радиусы кривизны.

7.13. Дуговой разряд

Дуговой разряд является квазистационарным электрическим разрядом в газе, горящем практически при любых давлениях газа, превышающих 1 Па, при постоянной или меняющейся с низкой частотой ($\nu < 10^3$ Гц) разности потенциалов между электродами и отличающемся высокой плотностью тока на катоде ($10^2 \div 10^8$ А/см²). Напряжение на разрядном промежутке составляет несколько десятков вольт.

Впервые дуговой разряд был получен в 1802 г. русским физиком В.В. Петровым (1761–1834). Будучи профессором кафедры физики при Санкт-Петербургской медико-хирургической академии, Петров построил самую мощную по тому времени батарею, составленную из 2100 гальванических элементов с ЭДС примерно 1700 В (4 ряда элементов по 3 м длиной каждый). Экспериментируя с этой батареей, Петров обнаружил, что «если два древесных угля металлическими направлятелями, сообщенными с обоими полюсами огромной батареи, приближать оные один к другому ... то является между ними весьма яркий белого цвета свет или пламя, от которого оные угли скорее или медленнее загораются и от которого темный покой довольно ясно освещен быть может». К сожалению, работа Петрова осталась неизвестной западным ученым, и явление электрической дуги было вновь открыто в 1808 г. английским химиком Дэви и названо им вольтовой дугой (рис. 7.25).

В месте соприкосновения угольные электроды сильно раскаляются электрическим током, после чего они раздвигаются, получая яркую электрическую дугу. Во время горения расстояние между электродами составляет ≈ 5 мм при токе $10 \div 20$ А и напряжении между ними $40 \div 50$ В.

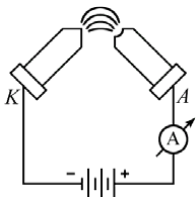


Рис. 7.25. Схема опытов В.В. Петрова по наблюдению дугового разряда

При горении дуги угольный катод заостряется, а на аноде образуется углубление – кратер. Кратер разогревается до температуры 4000 °С ($P = 10^5$ Па) \div 7000 °С ($P = 20 \cdot 10^5$ Па). Катод разогревается до температуры кипения или возгонки материала катода (≈ 3900 К). В электрических дугах с металлическими электродами температура меньше ($2000 \div 2500$ °С) из-за высокой теплопроводности и быстрого испарения металлов (рис. 7.26).

Поскольку температура катода очень велика, то дуговой разряд поддерживается главным образом за счет термоэлектронной эмиссии электронов с поверхности катода – В.Ф. Литкевич (1872–1951). Устойчивая дуга получается только при условии, что температура катода достаточно высока. При охлаждении катода дуга горит неустойчиво, периодически гаснет и вновь зажигается. Охлаждение анода не вызывает нарушения устойчивого горения дуги.

Над катодным пятном образуется слой положительного объемного заряда, обеспечивающего ускорение эмиттируемых электронов до энергий, достаточных для ударной ионизации атомов и молекул среды. Толщина этого слоя очень мала и составляет величину порядка длины свободного пробега электрона, соответственно, напряженность поля вблизи поверхности катода велика, особенно в областях естественных неоднородностей поверхности. В этих точках возможны процессы туннельного выхода электронов с поверхности катода. Возможны и другие механизмы испускания электронов с поверхности катода в дуговом разряде (взрывная электронная эмиссия, п. 7.16).



Рис. 7.26. Дуга при нормальном давлении

Длина столба дугового разряда может быть произвольной, но его диаметр жестко определяется условиями баланса подводимой и выделяемой энергий. С ростом тока или давления основные механизмы потерь многократно меняются.

Дуговой разряд применяется в науке и технике. На его основе созданы мощные источники света – угольные лампы – эталонные источники света. Дуговой разряд с угольным анодом, просверленным и заполненным исследуемыми веществами или пропитанный их растворами, широко используется в спектральном анализе разных минералов, солей. Дуговой разряд применяется также в различных конструкциях генераторов плазмы, в некоторых плазмохимических реакторах, в электросварке, в различных осветительных и электронных приборах – коммутаторах, ртутных выпрямителях, газотронах, газоразрядных источниках света.

7.14. Плазма

При сильном нагревании любое вещество испаряется, превращаясь в газ. Если увеличивать температуру дальше, то резко усилятся процессы термической ионизации – молекулы и атомы газа начнут распадаться на электроны и положительно заряженные ионы. Ионизация газа может быть вызвана также излучением.

Свободные заряженные частицы, особенно электроны, легко перемещаются под действием электрического поля. Поэтому в

состоянии равновесия пространственные заряды, входящие в состав ионизованного газа, должны компенсировать друг друга, так что полное поле внутри такого газа оказывается равным нулю. Образуется плазма. Термин «плазма» был введен американскими учеными И. Ленгмюром и Л. Тонксом в 1929 г., изучавшими низкотемпературную газоразрядную плазму. Плазма – частично или полностью ионизованный газ, в котором плотности положительного и отрицательного зарядов практически одинаковы.

Выделим в плазме область объемом D^3 и определим максимальный размер D области, в которой возможны заметные нарушения электронейтральности плазмы. Нарушение электронейтральности плазмы в основном обусловлено тепловым движением электронов, тепловая скорость которых на два и более порядка больше скорости ионов. Величину D можно оценить из условия, что тепловые флуктуации энергии электронов в выделенной области сравнимы с флуктуациями энергии электрического поля $E^2 \epsilon \epsilon_0 D^3 / 2$.

Полная тепловая энергия электронов выделенного объема $(3/2)nkT \cdot D^3$, где n – концентрация электронов в плазме. Флуктуации заряда в области размерами D обусловлены только электронами, направление импульса \mathbf{p} которых совпадает с вектором напряженности \mathbf{E} электрического поля (рис. 7.27). Следовательно, флуктуация тепловой энергии, обуславливающая нарушение электронейтральности, равна $(1/6) \cdot (3/2)nkT \cdot D^3 = nkT \cdot D^3 / 4$.

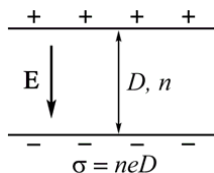


Рис. 7.27. Флуктуации заряда в области размерами D за счет флуктуации энергии теплового движения $D^3 nkT / 4$ при действии электрического поля $E = \sigma / (\epsilon \epsilon_0)$

По закону сохранения энергии

$$\frac{nkTD^3}{4} = \frac{E^2 \epsilon \epsilon_0 D^3}{2}.$$

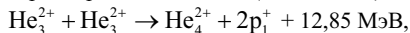
Учитывая, что $E = \sigma / (\epsilon \epsilon_0)$, где $\sigma = neD$ – поверхностная плотность заряда на границе области (рис. 7.27), из последнего равенства получаем

$$D = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0 kT}{2ne^2}}.$$

Условие квазинейтральности плазмы будет выполнено, если линейные размеры области, занимаемой плазмой, превосходят величину D , называемую *дебаевским радиусом экранирования*. Только в условиях квазинейтральности плазма ведет себя как связанный коллектив заряженных частиц. Нарушение квазинейтральности в объеме плазмы сопровождается появлением сильных электрических полей, восстанавливающих квазинейтральность. Восстановление нарушенной квазинейтральности плазмы аналогично появлению восстанавливающих сил в упругих телах при их деформациях. С этим связана возможность разнообразных коллективных колебаний плазмы, в отличие от газа, состоящего из нейтральных частиц.

Плазма характеризуется степенью ионизации α , где под α понимают отношение числа ионизованных атомов к полному их числу в единице объема. Для многозарядных ионов учитывается кратность ионизации. В зависимости от величины α различают слабо ионизованную ($\alpha \leq 10^{-2}$), умеренно ионизованную ($\alpha \approx 10^{-1} \div 10^{-2}$) и полностью ионизованную ($\alpha = 1$) плазму. Средние энергии различных типов частиц в плазме могут отличаться друг от друга. В общем случае плазму нельзя характеризовать одним значением температуры. Различают электронную T_e и ионную T_i температуры, а также температуру нейтральной компоненты T_a . Если $T_e \neq T_i \neq T_a$, то подобную плазму называют неизоотермической. Если температуры всех компонентов плазмы равны, то плазма называется изотермической.

Применительно к плазме несколько необычный смысл вкладывается в понятия «низкотемпературная» и «высокотемпературная» плазма. Низкотемпературной называют плазму с $T_i \leq 10^5$ К, а высокотемпературной с $T_i \geq 10^6 \div 10^8$ К. Такое разделение связано с особой возможностью протекания в высокотемпературной плазме термоядерных реакций синтеза (Ч. 1, п. 7.17)



обеспечивающего свечение звезд и возможный будущий источник энергии на Земле со значительным энерговыделением. Для осуществления такой реакции необходимо преодолеть кулоновский барьер отталкивания между сближающимися ядрами, что возможно при средних кинетических энергиях сталкивающихся частиц, соответствующих температурам в десятки и сотни миллионов градусов.

В состоянии плазмы находится подавляющая часть вещества во Вселенной, хотя в земных природных условиях плазма встречается достаточно редко. Во Вселенной плазменное состояние вещества характерно для звезд, звездных атмосфер, галактиче-

ских туманностей и межзвездной среды. Около Земли плазма существует в космосе в виде солнечного ветра, заполняет магнитосферу, формируя радиационные пояса Земли, и ионосферу. Ионосфера формируется под воздействием ультрафиолетовых и космических лучей в процессах ударной и фотонной ионизации. Процессы в околоземной плазме обусловлены магнитные бури и полярные сияния. Отражение радиоволн от ионосферной плазмы обеспечивает возможность дальней радиосвязи на Земле. Исследования по физике плазмы значительно интенсифицировались в связи с полетами в космос и назревшей проблемой управляемого термоядерного синтеза.

Значения концентрации частиц в плазме изменяются в очень широких пределах – от 10^{-8} см⁻³ в межгалактическом пространстве, примерно 10 в солнечном ветре, до 10^{22} в твердых телах и еще больших в центральных областях звезд.

Удельная проводимость плазмы, состоящей из ионов зарядом ze и электронов, определяется в основном движением легких электронов и их рассеянием на тяжелых ионах. В плазме между электронами и ионами действуют далекодействующие силы притяжения, и главным в рассеянии электрона являются отклонения электрона на большие углы при движении в поле большого числа ионов. Будем называть временем свободного пробега электрона время, в течение которого он повернет от первоначального направления движения на угол 90° . Пусть электрон с импульсом mv налетает на ион зарядом ze и максимальное сближение электрона с ионом равно b . Электрон повернет на угол 90° , если изменение момента импульса $mvb = \Delta L$ за время столкновения $\Delta t = b/v$ будет равно моменту действующей силы (рис. 7.28)

$$M = F \cdot b = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cdot b.$$

Из основного уравнения динамики вращательного движения $\Delta L/\Delta t = M$ получаем

$$b = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2}.$$

Найденному значению прицельного параметра соответствует эффективное сечение рассеяния

$$\delta = \pi b^2.$$

Учет далеких взаимодействий ($r \gg b$) приводит к увеличению эффективного сечения в L раз, где L называется кулоновским логарифмом:

$$L = \ln \frac{D}{b}.$$

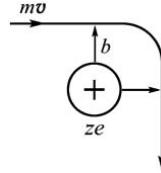


Рис. 7.28. Рассеяние электрона импульсом mv на ионе зарядом ze на 90° , b – прицельный параметр

Величина L слабо зависит от температуры и плотности плазмы. Так, для плазмы с $kT \approx 10$ кэВ и концентрации электронов $n \approx 10^{12} \div 10^{15} \text{ см}^{-3}$ $L \approx 15$ и вкладом близких столкновений в процессе рассеяния электронов можно вообще пренебречь. При далеких же пролетах скорости частиц изменяются на малые углы, что позволяет рассматривать движение электронов как процесс диффузии в пространстве скоростей.

Средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ и время «свободного пробега» $\langle \tau \rangle$ равны

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\delta(n/z)}, \quad \langle \tau \rangle = \frac{\langle l \rangle}{v} = \frac{m^2 v^3 (4\pi\epsilon_0)^2}{\pi z n e^4 L}.$$

Здесь учтено, что концентрация ионов с зарядом ze равна n/z , где n – концентрация электронов, m – масса электрона.

Поскольку $mv^2 \approx 3kT$, получаем

$$\langle \tau \rangle = \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 \sqrt{m} (3kT)^{3/2}}{\pi z n e^4 L}.$$

Соответственно удельная проводимость плазмы равна

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2mv} = \frac{ne^2}{2m} \langle \tau \rangle = \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 (3kT)^{3/2}}{2\pi z e^2 L \sqrt{m}}$$

– проводимость плазмы не зависит от плотности плазмы и растет пропорционально абсолютной температуре в степени $3/2$. В горячей плазме при $T \approx 15 \cdot 10^6$ К она превосходит электропроводность серебра. Поэтому при крупномасштабных движениях плазму можно приближенно рассматривать как идеальный проводник с $\sigma \rightarrow \infty$.

Еще быстрее растет с температурой теплопроводность плазмы $\lambda \sim T\sigma$ (согласно закону Видемана – Франца, п. 6.2).

Большие различия в массах электронов и ионов плазмы приводят к существенно различным скоростям релаксации для электронной и ионной подсистем, что позволяет характеризовать эти подсистемы двумя различными температурами. Время установления равновесия при столкновении электронов с электронами

$$\langle \tau \rangle_e \sim \sqrt{m_e},$$

соответственно, ионов с ионами

$$\langle \tau \rangle_i \sim \sqrt{m_i}.$$

Рассеянию электронов на ионах соответствует время релаксации

$$\langle \tau \rangle_{ei} \sim \sqrt{m_e} \cdot \frac{m_i}{m_e},$$

поскольку при столкновении быстрого, но легкого электрона с тяжелым ионом он передает ему лишь малую часть своей энергии, пропорциональную m_e/m_i .

В результате имеем

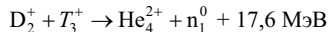
$$\langle \tau \rangle_e : \langle \tau \rangle_i : \langle \tau \rangle_{ei} = 1 : \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} : \frac{m_i}{m_e},$$

$$\langle \tau \rangle_e \ll \langle \tau \rangle_i \ll \langle \tau \rangle_{ei}.$$

Поэтому в плазме вначале установится квазиравновесие в электронной подсистеме с температурой T_e , а затем в ионной T_i . В общем случае $T_e \neq T_i$.

Если плазма находится в электрическом поле, то в ней начинает течь электрический ток и выделяется джоулево тепло. Энергию от поля получают в основном легкие подвижные электроны. Ионы разогреваются за счет столкновений с электронами, но этот процесс малоэффективен. В результате, например, в положительном столбе тлеющего разряда при 10^5 Па $T_e \approx 5 \cdot 10^4$ К и выше, а температура ионов $T_i \approx 500$ К.

Как уже говорилось выше, основной практический интерес к физике плазмы связан с решением проблемы управляемого термоядерного синтеза – процесс слияния легких атомных ядер при высоких температурах в управляемых условиях. Энергетический выход реактора составляет 10^5 кВт/м³ в реакции



при плотности плазмы 10^5 см^{-3} и температуре 10^8 К . Это означает, что размеры рабочей зоны реактора на $10^6 \div 10^7 \text{ кВт}$ (типичные мощности современных больших электростанций) должны составлять $10 \div 100 \text{ м}^3$. Удерживать температуру плазмы предлагается (1950 г. СССР, И.Е. Тамм, А.Д. Сахаров) сильным магнитным полем в тороидальной камере с магнитными катушками – сокращенно – токамак (рис. 7.29).

Низкотемпературная плазма ($T \approx 10^3 \text{ К}$) находит применение в газоразрядных источниках света, газовых лазерах, термоэлектронных преобразователях тепловой энергии в электрическую. Возможно создание плазменного двигателя, эффективного для маневрирования в космическом пространстве и длительных космических полетов.

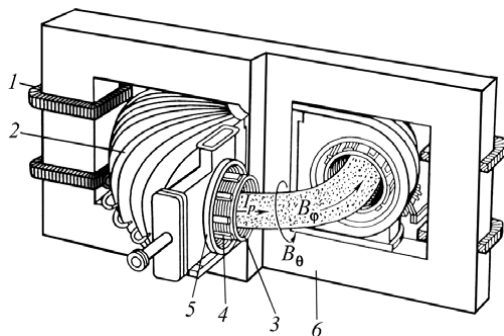


Рис. 7.29. Схема токамака: 1 – первичная обмотка трансформатора; 2 – катушки тороидального магнитного поля; 3 – лайнер, тонкостенная внутренняя камера для выравнивания тороидального электрического поля; 4 – катушки тороидального магнитного поля; 5 – вакуумная камера; 6 – железный сердечник (магнито-провод)

Создание струи плотной низкотемпературной плазмы в плазмотронах широко применяется для резки и сварки металлов, нанесения покрытий. Плазмтроны используют для получения галогенидов инертных газов и иных химических соединений, не получаемых обычным путем. В частности, если проводить синтез веществ на пролете плазменной струи, расширяя и тем самым охлаждая ее (закалка), то можно затруднить обратные реакции разложения и существенно повысить выход требуемого продукта.

7.15. Плазменные телевизионные экраны и дисплеи

В телевизорах с плоскими плазменными экранами на основе газоразрядных элементов используется свойство плазмы излучать электромагнитные волны ультрафиолетового диапазона. Ионизация плазмы в плоском экране происходит в газовом разряде. Разряд возникает при бомбардировке молекул газа электронами, ускоренными электрическим полем – самостоятельный разряд. Разряд поддерживается достаточно высоким электрическим потенциалом – десятки и сотни вольт. Наиболее распространенным газовым наполнением плазменных дисплеев является смесь инертных газов на основе гелия или неона с добавлением ксенона.

Экран плоского телевизора или дисплея на газоразрядных элементах составлен из большого числа ячеек, каждая из которых – самостоятельный излучающий элемент, рис. 7.30.

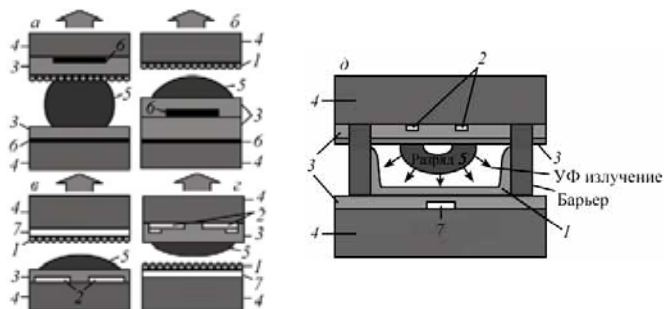


Рис. 7.30. Конструкции излучающих ячеек плазменных телевизионных экранов и дисплеев: *а* – ячейка с объемным разрядом; *б* – ячейка с поверхностным разрядом; *в* – трехэлектродная конструкция плазменной ячейки; *г* – «перевернутая» трехэлектродная плазменная ячейка; *д* – техническое решение ячейки *г*. 1 – люминофор; 2 – электроды; 3 – слой диэлектрика (MgO); 4 – стекло; 5 – плазма; 6 – разрядные электроды; 7 – адресный электрод

В дисплейно-телевизионном применении предпочтены конструкции не с объемным (рис 7.30, *а*), а с поверхностным разрядом. Эта конструкция поясняется рис.7.30, *б*. Принципиальная особенность этого варианта заключается в размещении поддерживающих разряд электродов на одной подложке. Ионные потоки, свя-

зывающие электроды, не достигают противоположной подложки с люминофорным покрытием и не разрушают люминофор.

В конструкции с поверхностным разрядом люминофор наносится непосредственно на стеклянную пластину. Нижние стеклянные пластины с внутренней стороны покрыты слоем проводника и диэлектрика (объемный разряд) или двумя слоями проводника и диэлектрика (поверхностный разряд). Газоразрядная ячейка излучает электромагнитные волны ультрафиолетового диапазона. Люминофор поглощает УФ излучение. Часть энергии передается на меньшие по потенциалу короткоживущие уровни, которые быстро релаксируют в основное состояние с излучением фотонов видимого диапазона. Происходит преобразование ультрафиолета в видимый свет.

В плоских газоразрядных экранах, воспроизводящих цветное изображение, применяются три разновидности люминофоров, излучающих красный (R), зеленый (G) и синий (B) свет. Плоский телевизор с экраном из газоразрядных элементов содержит около миллиона маленьких плазменных ячеек, собранных в триады RGB – пиксели (*pixel – picture element*), рис. 7.31.

С помощью напыления или электролитических технологий на стеклянные пластины в соответствующих местах наносятся электроды, слои диэлектрика (MgO) и люминофоров, создаются перегородки, отделяющие одну газоразрядную ячейку от другой, пространство между пластинами заполняется рабочим газом, по периметру все заливается газонепроницаемым веществом. Электроды формируются в виде двух взаимно пересекающихся решеток. Первый плоский экран с поверхностным газовым разрядом фирма «Fujitsu» выпустила в 1979 г.

Переход к поверхностному разряду существенно увеличивает срок службы люминофора, но не снимает проблему полностью, поскольку бомбардировка люминофора ионами не прекратилась. Для решения этой проблемы надо сделать поверхностный разряд ещё более плоским, для чего следует расположить электроды разряда на одной поверхности. В этом случае возникает необходимость создания скрещенной структуры электродов коммутации видеосигнала – трехэлектродная структура (1986 г.), рис. 7.30, в. Третий электрод – адресный. Адресные электроды создают штриховую электродную систему, ортогональную штрихам разрядных электродов. На разрядные электроды постоянно подается напряжение, достаточное для поддержания разряда, но меньше напряжения зажигания. На адресные электроды подаются импульсы, амплитуда которых достаточна для возникновения разряда.

Коммутационная система телевизора с поэлементной тактовой частотой переключает потенциалы, подаваемые на адресные электроды, и со строчной – на электроды разряда. При этом разность потенциалов между парой разрядных электродов поддерживается постоянной. С целью более эффективного использования излучения люминофора, чтобы он посылал фотоны преимущественно в сторону зрителя, ячейка «перевернута», как показано на рис. 7.30, *г*. Люминофор и адресный электрод перенесли на нижнюю пластину, а электроды разряда, которые сделаны прозрачными, переместили на верхнюю (рис. 7.30, *д*).

Адресный электрод вместе с основной функцией проводника выполняет и вторую – зеркала, отражающего половину света, излучаемого люминофором, в сторону зрителя. Разрядные электроды имеют выступы, более компактно локализующие разряд. Эта структура ячеек газоразрядного экрана была реализована в 1989 г. Срок службы плазменного экрана 30000 часов.

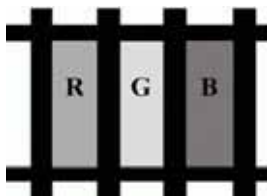


Рис. 7.31. Устройство пикселя (*pixel – picture element*) – трехцветного излучающего элемента

Каждая триада 86-сантиметровой панели – квадрат со стороной 0,66 мм и состоит из трех прямоугольных элементов с размерами 0,66 по вертикали и 0,22 по горизонтали (рис. 7.31). Всего в строке $3 \times 640 = 1920$ ячеек. Яркость свечения панели достаточно высока – 180 кандел на квадратный метр.

Существенным недостатком газоразрядных панелей, к сожалению принципиальным, является достаточно высокое коммутационное напряжение в десятки и сотни вольт. Оно определяется потенциалом пробоя и не может быть понижено. Это обуславливает и достаточно высокую потребляемую мощность плазменной панели – примерно 1 кВт/м^2 .

7.16. Ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия

Носителями заряда в вакууме могут быть свободные заряженные частицы, испускаемые с поверхности твердых тел. Наиболее эффективно с поверхности нагретых твердых тел испускаются электроны, энергия которых больше энергии электрона, покоящегося вне тела. Разность между энергией электрона на уровне Ферми ϵ_F и энергией покоящегося электрона в вакууме E_0 назы-

вается работой выхода A (рис. 7.32). Число таких электронов ничтожно мало при низких температурах $T \approx 300$ К и экспоненциально возрастает с повышением температуры.

Рис. 7.32. Выход электронов в вакуум: E_F – энергия Ферми; E_0 – уровень энергии электрона, покоящегося в вакууме; A – работа выхода; $E_{кин}$ – кинетическая энергия электрона в непрерывном спектре свободных состояний



Явление испускания электронов нагретыми телами – эмиссия – в вакуум или другую среду называется термоэлектронной эмиссией. Нагрев необходим для того, чтобы энергии теплового движения электрона было достаточно для преодоления сил кулоновского притяжения между отрицательно заряженным электроном и индуцируемым им на поверхности металла положительным зарядом при удалении с поверхности. Кроме того, при достаточно высокой температуре над поверхностью металла создается отрицательно заряженное электронное облако, препятствующее выходу электрона с поверхности металла в вакуум. Этими двумя и, возможно, другими причинами (примеси, дефекты структуры кристаллической решетки, адсорбированные молекулы газов) определяется величина работы выхода электрона из металла.

Явление термоэлектронной эмиссии открыто в 1883 г. Эдисоном (1847–1931), великим американским изобретателем. Явление термоэлектронной эмиссии наблюдалось им в вакуумной лампе с двумя электродами – анодом, имеющим положительный потенциал, и катодом с отрицательным потенциалом. Катодом лампы может служить нить из тугоплавкого металла (вольфрам, молибден, тантал и др.), нагреваемая электрическим током. Такая лампа называется вакуумным диодом. Если катод холодный, то ток в цепи катод – анод отсутствует. При повышении температуры катода в цепи катод – анод появляется электрический ток, который тем больше, чем выше температура катода. При постоянной температуре катода ток в цепи катод – анод возрастает с повышением разности потенциалов V между катодом и анодом и выходит к некоторому стационарному значению, называемому током насыщения (рис. 7.33). При этом все термоэлектроны, испускаемые катодом, достигают анода. Величина тока анода не пропор-

циональна V , и поэтому для вакуумного диода закон Ома не выполняется.

Оценим величину плотности тока насыщения j для вакуумного диода. Число состояний для электронов в единице объема металла с импульсами в интервале от p_x, p_y, p_z до $p_x + dp_x, p_y + dp_y, p_z + dp_z$ в соответствии со статистикой Ферми – Дирака равно

$$dn = \frac{2}{\hbar^3} \frac{dp_x dp_y dp_z}{\exp\left(\frac{E - \varepsilon_F}{kT}\right) + 1}.$$

Здесь E – энергия электрона; ε_F – энергия Ферми.

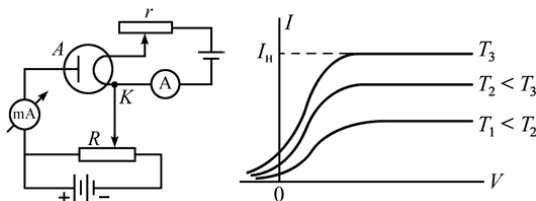


Рис. 7.33. Схема подключения вакуумного диода и его вольт-амперная характеристика

Число электронов с кинетической энергией $E > \varepsilon_F + A$, где A – работа выхода, способных выйти из металла в вакуум, составляет очень малую часть от полного числа электронов в металле, и поэтому $A = E - \varepsilon_F \gg kT$. В этом случае

$$dn = \frac{2}{\hbar^3} \exp\left(\frac{\varepsilon_F - E}{kT}\right) dp_x dp_y dp_z,$$

где $E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$. Будем считать, что ось Z направлена перпендикулярно поверхности металла. Проинтегрируем dn по составляющим импульса p_x, p_y от $-\infty$ до $+\infty$:

$$dn = \frac{4}{\hbar^3} \pi m k T \exp dn = \frac{4}{\hbar^3} \pi m k T \exp\left(\frac{\varepsilon_F - p_z^2/2m}{kT}\right) dp_z$$

Число электронов, покидающих единицу площади поверхности металла в единицу времени, равно

$$\int v_z dn = \frac{1}{m} \int p_z dn,$$

где

$$\varepsilon_F + A \leq \frac{p_z^2}{2m} < \infty.$$

Соответственно, плотность тока насыщения равна

$$j = \int_{\varepsilon_F + A}^{\infty} e \frac{4\pi kT}{\hbar^3} \exp\left(\frac{\varepsilon_F - p_z^2/2m}{kT}\right) p_z dp_z = \frac{4\pi me}{\hbar^3} k^2 T^2 e^{-\frac{A}{kT}}$$

или

$$j = BT^2 \exp\left(-\frac{A}{kT}\right).$$

Постоянная B определяется выражением

$$B = \frac{4\pi me k^2}{\hbar^3} = 120 \frac{\text{А}}{\text{см}^2 \cdot \text{К}^2}.$$

В общем случае надо заменить B на $B(1-r)$, где r – коэффициент отражения электронов от поверхности тела, усредненный по энергиям.

Полученное соотношение для плотности тока насыщения термоэмиссии электронов называется формулой Ричардсона – Дэшмана. Формула справедлива в предположении, что поверхность эмиттера однородна и электронный газ в нем является равновесным. В действительности равновесие нарушается отбором тока, проникновением внешнего электрического поля в эмиттер и зависимостью работы выхода от температуры. Учет указанных факторов приводит к значениям B для металлов от 15 до 350 А/(см²·К²).

Формула Ричардсона – Дэшмана применима и для описания термоэмиссии из полупроводников. В этом случае энергия Ферми «закрепляется» на поверхности полупроводников ввиду большой плотности поверхностных электронных состояний, а поэтому A и энергия Ферми не зависят от объемных свойств полупроводника и характер термоэлектронной эмиссии полупроводников становится схожим с термоэмиссией из металлов.

При малой величине вытягивающего электрического поля, когда ток анода далек от тока насыщения, электроны, вылетающие из катода, образуют вблизи поверхности эмиттера отрица-

тельный пространственный заряд, ограничивающий ток термоэмиссии. Из-за наличия пространственного заряда электрическое поле вблизи катода сильно искажается, поэтому зависимость анодного тока от напряжения имеет нелинейный характер (рис. 7.33).

Изменение потенциала φ вблизи катода описывается уравнением Пуассона

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{ne}{\varepsilon_0},$$

Здесь n – концентрация электронов в пространственном заряде, которую можно выразить через плотность тока $j = env$. Скорость электронов также связана с потенциалом законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi,$$

в котором можно пренебречь начальной скоростью электронов. В результате имеем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \frac{a^2}{\sqrt{\varphi}}, \quad a^2 = \sqrt{\frac{mj^2}{2e\varepsilon_0}}.$$

Проинтегрируем это уравнение при условии $\varphi(x=0) = 0$ – потенциал поля у катода равен нулю, кроме того $j(x) = \text{const}$:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = 4a^2\sqrt{\varphi}.$$

Интегрируем второй раз:

$$\frac{4}{3}\varphi^{3/4} = 2ax.$$

Подставляя значение a и $x = l$ – расстояние между катодом и анодом ($V = \varphi_l$), находим плотность тока в вакуумном диоде:

$$j = cV^{3/2}, \quad c = \frac{4}{9l^2} \sqrt{\frac{2e\varepsilon_0}{m}}.$$

– закон «трех вторых» Ленгмюра (1881–1957), получившего его в 1913 г. Постоянная c зависит только от формы и взаимного расположения электродов.

При малых напряжениях закон Ленгмюра дает заниженные значения j , поскольку не учитывает теплового разброса скоростей электронов. При больших напряжениях из-за того, что эмиссион-

ная способность катода не бесконечно велика, наступает насыщение, и закон «трех вторых» опять не выполняется.

Плотность термоэлектронного тока насыщения определяется величиной работы выхода A – наименьшей энергией, которую необходимо затратить для удаления электрона из твердого тела или жидкого вещества в вакуум в состоянии с равной нулю кинетической энергией. Плотность тока насыщения тем больше, чем меньше работа выхода.

Работа выхода у тугоплавких металлов достаточно велика и составляет для W, Mo, Pt соответственно 4,52, 4,37, 5,32 эВ. Так что у W при $T = 2200$ °C плотность тока эмиссии не превышает $0,1$ А/см². Работа выхода может быть существенно изменена адсорбцией атомов и молекул на поверхности. Атомы металлов с низкой энергией ионизации (Cs – 1,81 эВ, K – 2,22 эВ) снижают при адсорбции работу выхода некоторых металлов и полупроводников до 1 эВ. На практике часто применяется оксидный катод, в котором на металлическую основу наносят углекислые соединения щелочноземельных металлов BaCO₃, SrCO₃, CuCO₃. При прокалике эти соли разлагаются ($\text{MeCO}_3 \leftrightarrow \text{MeO} + \text{CO}_2$) и металлический катод оказывается покрытым слоем окислов щелочноземельных металлов. В результате получается оксидный катод с малой работой выхода. Рабочая температура современных оксидных катодов равна $800 \div 900$ °C. Они обладают плотностью эмиссионного тока ≈ 1 А/см².

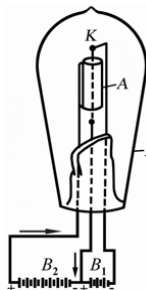


Рис. 7.34. Схема вакуумного диода – двухэлектродной лампы: I – вакуумированный стеклянный баллон; K – катод, нагреваемый электрическим током и испускающий электроны; A – анод – электрод, собирающий электроны, испускаемые с катода. Ток между катодом и анодом идет если потенциал анода больше потенциала катода

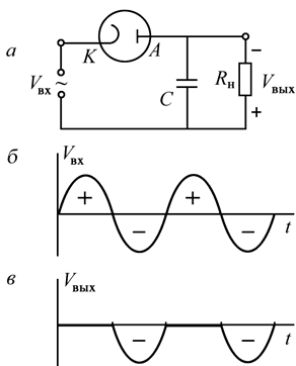


Рис. 7.35. Схема однополупериодного выпрямителя переменного тока (а); график входного напряжения на катоде (б); график выходного напряжения на аноде при отсутствии конденсатора C (в)

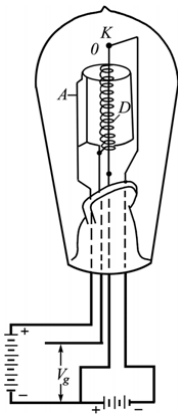
Явление термоэлектронной эмиссии лежит в основе работы термоэлектронных катодов, которые применяются во многих электровакуумных и газоразрядных приборах, а также в некоторых электронных приборах.

На основе вакуумного диода (рис. 7.34) можно, в частности,

создать выпрямитель переменного тока.

Электроны в вакуумном диоде, испускаемые катодом, двигаются к аноду только когда потенциал анода больше потенциала катода, в противном случае вакуумный диод ток пропускать не будет. В итоге, если подать на катод вакуумного диода переменное (по знаку) напряжение, то на аноде будут наблюдаться пульсации напряжения одного знака – отрицательного (рис. 7.35).

Рис. 7.36. Трехэлектродная лампа – вакуумный триод. Небольшими изменениями напряжения V_g между катодом K и сеткой D можно добиться заметного изменения тока в цепи катод – анод (A)



Для сглаживания пульсаций в цепь включен конденсатор C . Он накапливает заряд в течение полупериода, когда лампа пропускает ток, и разряжается во время полупериода, когда ток в цепи не идет. Пульсации будут тем меньше, чем больше емкость конденсатора и больше сопротивление нагрузки. Введя дополнительный электрод между катодом и анодом – сетку, можно небольшим изменением потенциала между сеткой и катодом заметно изменять величину тока в цепи катод – анод. На этом принципе работают усилители с использованием вакуумного триода (рис. 7.36).

7.17. Автоэлектронная и взрывная электронная эмиссии

Эмиссия электронов с поверхности металлов может происходить под действием сильного электрического поля, создающего условия для туннельного выхода электронов в вакуум сквозь потенциальный барьер. Это явление называется автоэлектронной или холодной эмиссией (АЭЭ). Автоэлектронную эмиссию можно наблюдать в хорошо откачанной вакуумной трубке, катодом которой служит острое, а анодом – обычный электрод с плоской или мало изогнутой поверхностью. Напряженность электрического поля на поверхности острия с радиусом кривизны r и потенциалом относительно анода $\Delta\phi$ равна

$$E = \frac{\Delta\phi}{r}.$$

При $r \approx 10^{-2}$ мм и $\Delta\phi \approx 10^3$ В $E \approx 10^6$ В/см, что приведет к появлению слабого тока, обусловленного автоэлектронной эмиссией с поверхности катода. Сила эмиссионного тока быстро нарастает с повышением разности потенциалов $\Delta\phi$. При этом катод специально не разогревается, поэтому эмиссия и называется холодной.

С помощью автоэлектронной эмиссии принципиально возможно получение плотности тока $10^6 \div 10^8$ А/см², но для этого нужны эмиттеры в виде совокупности большого числа острий, идентичных по форме (рис. 7.37), что практически невозможно, и, кроме того, увеличение тока до 10^8 А/см² приводит к взрывообразному разрушению всего эмиттера.

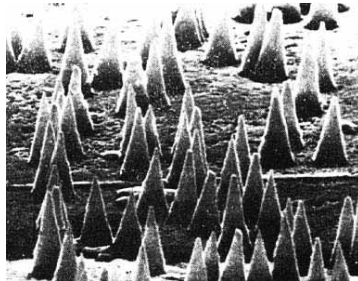


Рис. 7.37. Электронная микрофотография эмиттера с остройной поверхностью, полученного в г. Дубне с использованием современных трековых методик. Острия – конусы высотой 6,6 мкм, диаметром 1,5 мкм. Радиус кривизны вершины 0,1 мкм. Концентрация 10^7 см⁻²

Плотность тока АЭЭ в условиях влияния объемного заряда равна (закон Чайльда – Ленгмюра)

$$j = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \left(\frac{2e}{m} \right) E^{3/2} v_{im} r^{-1/2} \leq 10^8 \text{ А/см}^2,$$

где v_{lm} – коэффициент, определяемый формой и размерами эмиттера ($v_{lm} \approx 1$); r – радиус эмиттирующей поверхности.

Током автоэлектронной эмиссии при концентрации энергии в микрообъемах катода до 10^4 Дж· r^{-1} и более (при общей энергии 10^{-8} Дж) может инициироваться качественно иной вид эмиссии, обусловленный взрывом микроострий на катоде. При этом появляется ток электронов, который на порядки превосходит начальный ток, – наблюдается взрывная электронная эмиссия (ВЭЭ). ВЭЭ была открыта и изучена в Томском политехническом институте в 1966 г. коллективом сотрудников под руководством Г.А. Месяца. Помимо автоэлектронной эмиссии, существует и много других способов концентрации энергии в микрообъемах катода, приводящих к микровзрывам, – обтекание микронеоднородностей плазмой, микропробой диэлектрических пленок, лазерный разогрев микроучастков катода, удар микрочастиц. ВЭЭ – это единственный вид электронной эмиссии, позволяющий получить потоки электронов мощностью до 10^{13} Вт с плотностью тока до 10^9 А/см².

Ток ВЭЭ необычен по структуре. Он состоит из отдельных порций электронов $10^{11} \div 10^{12}$ штук, имеющих характер электронных лавин, получивших название эктонов (начальные буквы «*explosive centre*»). Время образования лавин $10^{-9} \div 10^{-8}$ с.

Появление электронов в эктоне вызвано быстрым перегревом микроучастков катода и является, по существу, разновидностью термоэлектронной эмиссии (рис. 7.38). Прекращение эмиссии электронов в эктоне обусловлено охлаждением зоны эмиссии за счет теплопроводности, уменьшения плотности тока, испарения атомов.

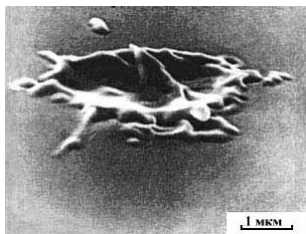


Рис. 7.38. Кратер на молибденовом катоде, сформированный в течение 10 нс в результате функционирования эктонов

Существование эктона проявляется в образовании кратера на поверхности катода (рис. 7.38). Взрывная эмиссия электронов и эктоны играют фундаментальную роль в вакуумных искрах и дугах, в разрядах низкого давления, в сжатых и высокопрочных

газах, в микропромежутках, т.е. там, где в наличии есть электрическое поле высокой напряженности на поверхности катода.

Ток ВЭЭ ограничен объемным зарядом тока электронов, испускаемых катодными факелами (микросгустками плазмы, образованной при взрыве микроучастков поверхности катода):

$$i = A_0 U^{3/2} F \left(\frac{vt}{d} \right),$$

где A_0 – постоянная, определяемая геометрией промежутка; U – напряжение между катодом и анодом; v – скорость движения катодной плазмы; d – длина промежутка; t – время. Для катодного факела радиусом $r < vt$ при $d \gg vt$ $F \left(\frac{vt}{d} \right) \approx \frac{vt}{d}$. В целом

получается закон «трех вторых» и пропорциональность количеству плазмы, долетающей до анода.

Явление взрывной электронной эмиссии послужило основой для создания импульсных электрофизических установок, таких как сильноточные ускорители электронов, мощные импульсные и рентгеновские устройства, мощные релятивистские сверхвысоко-частотные генераторы. Например, импульсные ускорители электронов имеют мощность до 10^{15} Вт и более при длительности импульсов $10^{-10} \div 10^{-6}$ с, токе электронов $1 \div 10^6$ А и энергии электронов $10^4 \div 10^7$ эВ. Такие пучки широко используются для исследований в физике плазмы, радиационной физике и химии, для накачки газовых лазеров и пр.

Основные выводы

Вещества, проводящие ток и при этом разлагающиеся, называют электролитами, а процесс разделения веществ электрическим током – электролизом. Носителями тока в электролитах служат ионы. Расщепление молекул на ионы связано с действием растворителя – электролитическая диссоциация.

Первый закон Фарадея:

$$m = kq.$$

m – масса вещества, выделявшегося на электродах при прохождении через электролит заряда q ; k – электрохимический эквивалент.

Второй закон Фарадея:

$$k = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{z}.$$

$F = 96485$ Кл·моль⁻¹ – заряд Фарадея или постоянная Фарадея, ($F = eN_A$); μ – молярная масса ионов, нейтрализующихся на электроде; z – валентность ионов.

Объединенный закон Фарадея:

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{z} q = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{z} It,$$

I – сила тока, проходящего через электролит в течение времени t .

Подвижность ионов

$$b_{\pm} = \frac{u_{\pm}}{E} \left[\frac{\text{М}^2}{\text{с} \cdot \text{В}} \right],$$

где u_{\pm} – средняя скорость упорядоченного движения ионов; E – напряженность электрического поля.

Закон Ома в дифференциальной форме для электролитов и газов при самостоятельном разряде в области, далекой от насыщения:

$$\mathbf{j} = \alpha z e n (b_+ + b_-) \mathbf{E},$$

где α – степень диссоциации молекул, n – концентрация молекул; e – элементарный заряд; z – валентность иона; b_+ и b_- – подвижности соответственно положительных и отрицательных ионов.

Плотность тока насыщения в газовом промежутке между электродами

$$j_{\text{нас}} = e q_i h,$$

где q_i – число пар ионов, создаваемых ионизатором в единице объема в единицу времени; h – расстояние между электродами ($q_i = N/(Vt)$, где N – число пар ионов, создаваемых ионизатором за время t в пространстве между электродами; V – объем этого пространства).

В слабых электрических полях в газе выполняется закон Ома

$$j = e \sqrt{\frac{q_i}{\alpha_r}} (b_+ + b_-) E,$$

где α_r – коэффициент рекомбинации.

Число пар ионов, рекомбинирующих за единицу времени в единице объема газа, свободного от пылинок:

$$\Delta n = \alpha_r n^2,$$

где n – концентрация ионов; α_r – коэффициент рекомбинации. При наличии в газе частиц пыли, дыма и т.п. рекомбинация в значительной мере происходит на них. В таком случае число пар ионов, рекомбинирующих в единицу времени, можно считать пропорциональным n :

$$\Delta n = \beta n.$$

Средняя продолжительность существования иона

$$\tau = \frac{n}{q_i}.$$

Плазма – частично или полностью ионизованный газ, в котором плотности положительного и отрицательного зарядов практически одинаковы. Нарушения электронейтральности наблюдаются в области, определяемой дебаевским радиусом экранирования:

$$D = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0 k T}{2 n e^2}},$$

T – абсолютная температура; n – концентрация зарядов в плазме.

Удельная проводимость плазмы

$$\sigma = \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 (3kT)^{3/2}}{2\pi z e^2 L \sqrt{m}},$$

m – масса электрона; $L = \ln(D/b)$ – кулоновский логарифм;

$b = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}$ – прицельный параметр.

Носителями заряда в вакууме служат свободные заряженные частицы, испускаемые с поверхности твердых тел.

Работа выхода – минимальная энергия, которую необходимо затратить заряженной частице для выхода из конденсированного материала в вакуум

Плотность тока насыщения при термоэлектронной эмиссии определяется формулой Ричардсона

$$j = B T^2 \exp\left(-\frac{A}{kT}\right),$$

где $B = \frac{4\pi m e k^2}{\hbar^3} = 120 \text{ A}/(\text{см}^2 \cdot \text{K}^2)$ (для реальных металлов

$B = 15 \div 350 \text{ A}/(\text{см}^2 \cdot \text{K}^2)$; A – работа выхода электрона.

При малых напряжениях V между катодом и анодом для плотности тока в термоэлектронной эмиссии выполняется закон «трех вторых» Ленгмюра:

$$j = c V^{3/2}, \quad c = \frac{4}{9l^2} \sqrt{\frac{2e\epsilon_0}{m}},$$

l – расстояние между катодом и анодом.

Упражнения

1. При силе тока $I = 5$ А за время $t = 10$ мин в электролитической ванне выделилось $m = 1,02$ г двухвалентного металла. Определить его атомную массу A . Ответ: 65,4.
2. Две электролитические ванны соединены последовательно. В первой ванне выделилось $m_1 = 3,9$ г цинка, во второй за то же время $m_2 = 2,24$ г железа. Цинк двухвалентен. Определить валентность железа. Ответ: 3.
3. Электролитическая ванна с раствором медного купороса присоединена к батарее аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E} = 4$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,1$ Ом. Определить массу m меди, выделившейся при электролизе за время $t = 10$ мин, если ЭДС поляризации $\mathcal{E}_n = 1,5$ В и сопротивление R раствора равно 0,5 Ом. Медь двухвалентна. Ответ: 0,83 г.
4. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 2,18 \cdot 10^{-18}$ Дж. Определить потенциал ионизации ϕ_i водорода. Ответ: 13,6 В.
5. Какой наименьшей скоростью v_{\min} должен обладать электрон, чтобы ионизовать атом азота, если потенциал ионизации ϕ_i азота равен 14,5 В? Ответ: $2,3 \cdot 10^6$ м/с.
6. Какова должна быть температура T атомарного водорода, чтобы средняя кинетическая энергия поступательного движения атомов была достаточна для ионизации путем соударения? Потенциал ионизации ϕ_i атомарного водорода равен 13,6 В. Ответ: $2,1 \cdot 10^5$ К.
7. Посередине между электродами ионизационной камеры пролетела α -частица, двигаясь параллельно электродам, и образовала на своем пути печочку ионов. Спустя какое время после пролета α -частицы ионы дойдут до электродов, если расстояние d между электродами равно 4 см, разность потенциалов $V = 5$ кВ и подвижность ионов обоих знаков в среднем $b = 2$ см²/(В·с)? Ответ: $8 \cdot 10^{-4}$ с.
8. Азот ионизируется рентгеновским излучением. Определить проводимость G азота, если в каждом кубическом сантиметре газа находится в условиях равновесия $n_0 = 10^7$ пар ионов. Подвижность положительных ионов $b_+ = 1,27$ см²/(В·с) и отрицательных $b_- = 1,81$ см²/(В·с). Ответ: $5 \cdot 10^{-10}$ Ом⁻¹.
9. Воздух между плоскими электродами ионизационной камеры ионизируется рентгеновским излучением. Сила тока I , текущего через камеру, равна 1,2 мкА. Площадь S каждого электрода равна 300 см², расстояние между ними $h = 2$ см, разность потенциалов $V = 100$ В. Найти концентрацию n пар ионов между пластинами, если ток далек от насыщения. Подвижность положительных

ионов $b_+ = 1,4 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ и отрицательных $b_- = 1,9 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. Заряд каждого иона равен элементарному заряду. Ответ: $1,5 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3}$.

10. В газоразрядной трубке между плоскими электродами ($S = 10 \text{ см}^2$), отстоящими друг от друга на расстоянии $d = 10 \text{ см}$, ток насыщения $I_{\text{нас}} = 10^{-6} \text{ А}$. Ионы в трубке возникают под действием постороннего ионизатора (несамостоятельный разряд). Какое количество q_i элементарных зарядов того и другого знака создается каждую секунду в 1 см^3 ? Ответ: $6 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}\cdot\text{с}^{-1}$.

11. Между двумя пластинами площадью S каждая, находящимися на расстоянии d и образующими плоский конденсатор в вакууме, приложена разность потенциалов V . При освещении катода ультрафиолетовыми лучами между пластинами идет ток силы I , который достигает насыщения I_n при $V = V_0$. Найти подвижность электронов b_- , если $b_- \gg b_+$ и коэффициент рекомбинации α_r .

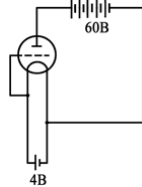
$$\text{Ответ: } b_- = \sqrt{\frac{\alpha_r d^3}{eSI_n}} \cdot \frac{I}{V}.$$

12. Некоторый ионизатор (например, рентгеновы лучи) создает в единице объема в единицу времени q_i пар однозарядных ионов разных знаков. Коэффициент рекомбинации ионов равен α_r . Определить концентрацию n пар ионов в момент времени t , если ионизатор был включен в момент $t = 0$, а концентрация ионов в этот момент была равна нулю.

$$\text{Ответ: } n = \sqrt{\frac{q_i}{\alpha_r}} \cdot \frac{1 - \exp(-t/\tau)}{1 + \exp(-t/\tau)}, \text{ где } \tau = \frac{1}{2\sqrt{q_i}\alpha_r}.$$

13. На рисунке изображена электронная лампа непосредственного накала со всеми поданными на нее напряжениями. С какой скоростью (выраженной в вольтах) электроны будут достигать анода лампы? Ответ: 596 В.

14. Будет ли скорость электронов, достигающих анода лампы, иной, если сетка лампы соединить не с нитью накала, как показано на рисунке, а с анодом лампы? Ответ: от 596 В до 600 В, зависит от точки эмиссии на катоде.



15. При приближении отрицательно заряженной палочки к накаливному волоску электрической лампочки волосок притягивается (см. рисунок). Если же приблизить положительно заряженную палочку, то волосок остается без движения и притягивается лишь в момент удаления положительного заряда. Если накал лампы очень слабый, то волосок притягивается



одинаково и к положительному, и к отрицательному зарядам. Если накал лампы очень силен, то волосок остается в покое при приближении любого заряда.

Объяснить эти явления, принимая во внимание явление термоионной эмиссии, а также те обстоятельства, что в колбе лампы имеется незначительное количество газа.

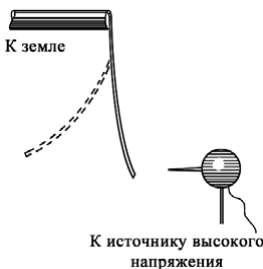
16. Какой наименьшей скоростью должны обладать свободные электроны в: 1) цезии ($A_{Cs} = 1,89$ эВ) и 2) платине ($A_{Pt} = 5,32$ эВ), для того чтобы они смогли покинуть металл? Ответ: $8,1 \cdot 10^5$ м/с, $1,37 \cdot 10^6$ м/с.

17. При какой относительной скорости молекул кислорода может произойти при соударении однократная ионизация одной из них? Потенциал ионизации молекулы кислорода 12,07 эВ.

Указание: При решении этой и последующих задач следует принять во внимание, что ионизация происходит при неупругом ударе молекул. Ответ: $1,2 \cdot 10^4$ м/с.

18. а) Молекула кислорода ионизируется ударом электрона. Какова разность потенциалов, которую прошел электрон, вызвавший ионизацию, если его начальная скорость мала? Потенциал ионизации молекулы кислорода 12,07 эВ. Считать также малой начальную скорость ионизируемой молекулы. Ответ: 12,07 В.

б) Тот же вопрос относительно иона, масса которого вместе с «прилипшими» молекулами в $n = 4$ раза больше массы молекулы кислорода. Ответ: 60,35 В.



19. На рисунке изображен опыт по стеканию зарядов с острия. Против заряженного острия находится узкая полоска папиросной бумаги, верхний конец которой прикреплен к штативу, отведенному к земле. При медленном повышении напряжения между острием и землей полоска сначала притягивается к острию, затем при некотором определенном для данного острия напряжении резко отталкивается. Объяснить явления.

Задачи

1. Сила тока, проходящего через электролитическую ванну с раствором медного купороса, равномерно возрастает в течение времени $\Delta t = 20$ с от $I_0 = 0$ до $I = 2$ А. Найти массу m меди, выделившейся за это время на катоде ванны. Ответ: 6,6 мг.
2. В электролитической ванне через раствор прошёл заряд $q = 193$ Кл. При этом на катоде выделился металл количеством вещества $\nu = 1$ моль. Определить валентность z металла. Ответ: 2.
3. Определить количество молей металла ν и число атомов N двухвалентного металла, отложившегося на катоде электролитической ванны, если через раствор в течение времени $t = 5$ мин шёл ток силой $I = 2$ А. Ответ: $3,1 \cdot 10^{-3}$ моль, $1,87 \cdot 10^{21}$.
4. Трубка длиной 3 см и площадью поперечного сечения 10 см² наполнена раствором, содержащим 0,1 кмоль CuSO₄ в 1 м³. Спротивление раствора равно 38 Ом. Найти эквивалентную электропроводность раствора, если все молекулы CuSO₄ диссоциированы. Ответ: $3,95 \cdot 10^{-3}$ м²/(Ом·моль).
5. Удельная электропроводность децинормального раствора соляной кислоты HCl равна $3,5$ Ом⁻¹·м⁻¹. Подвижность ионов равна $b_+^{(H)} = 31,5 \cdot 10^{-8}$ м²/(В·с), $b_-^{(Cl)} = 6,5 \cdot 10^{-8}$ м²/(В·с). Найти степень диссоциации α . Ответ: 0,95.
6. Найти число ионов каждого знака, находящихся в единице объема раствора предыдущей задачи. Ответ: $5,7 \cdot 10^{25}$ м⁻³.
7. Объем V газа, заключенного между электродами ионизационной камеры, равен 0,5 л. Газ ионизируется рентгеновским излучением. Сила тока насыщения $I_{\text{нас}} = 4$ нА. Сколько пар ионов образуется в 1 с в 1 см³ газа? Заряд каждого иона равен элементарному заряду. Ответ: $5 \cdot 10^7$ см⁻³·с⁻¹.
8. Найти силу тока насыщения между пластинами конденсатора, если под действием ионизатора в каждом кубическом сантиметре пространства между пластинами конденсатора каждую секунду образуется $n_0 = 10^8$ пар ионов, каждый из которых несет один элементарный заряд. Расстояние d между пластинами конденсатора равно 1 см, площадь S пластины равна 100 см². Ответ: 1,6 нА.
9. В ионизационной камере, расстояние d между плоскими электродами которой равно 5 см, проходит ток насыщения плотностью $j = 16$ мкА/м². Определить число n пар ионов, образующихся в каждом кубическом сантиметре пространства камеры в 1 с. Ответ: $2 \cdot 10^9$ см⁻³·с⁻¹.
10. При освещении сосуда с газом рентгеновскими лучами в каждом миллиметре его объема каждую секунду ионизируется 10^{10} молекул. В результате рекомбинации в сосуде установилось термодинамическое

равновесие, причем в 1 см^3 находится 10^8 ионов каждого знака. Найти коэффициент рекомбинации α_r . Ответ: $10^{-9} \text{ м}^3/\text{с}$.

11. К электродам разрядной трубки приложена разность потенциалов 5 В , расстояние между ними 10 см . Газ, находящийся в трубке, однократно ионизован, и число пар ионов в 1 см^3 равно 10^8 , причем $b_+ = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ и $b_- = 3 \cdot 10^2 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. Найти: 1) плотность тока в трубке; 2) какая часть полного тока переносится положительными ионами? Ответ: $0,2424 \text{ А/м}^2$, 10^{-4} .

12. Площадь каждого электрода ионизационной камеры 100 см^2 и расстояние между ними $6,2 \text{ см}$. Найти ток насыщения в такой камере, если известно, что ионизатор образует в 1 см^3 ежесекундно 10^9 ионов каждого знака. Ионы считать одновалентными. Ответ: 10^{-7} А .

13. Найти наибольшее возможное число пар ионов в 1 см^3 камеры предыдущей задачи в условиях, когда коэффициент рекомбинации равен $10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}$. Ответ: $3,2 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}$.

14. Какой ток пойдет между электродами ионизационной камеры задачи 12, если к электродам приложена разность потенциалов 20 В ? Подвижность ионов $b_+ = b_- = 1 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ и коэффициент рекомбинации $\alpha_r = 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}$. Какую долю тока насыщения составляет найденный ток? Ответ: $3,2 \cdot 10^{-12} \text{ А}$, $3,2 \cdot 10^{-5}$.

15. Найти сопротивление трубки длиной 84 см и площадью поперечного сечения 5 мм^2 , если она наполнена воздухом, ионизованным так, что в 1 см^3 его находятся при равновесии 10^7 пар одновалентных ионов. Подвижность ионов равна $b_+ = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ и $b_- = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. Ответ: $3,4 \cdot 10^{14} \text{ Ом}$.

16. Какой наименьшей скоростью должен обладать электрон для того, чтобы ионизовать атом водорода? Потенциал ионизации атома водорода $13,5 \text{ В}$. Ответ: $2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$.

17. При какой температуре атомы ртути имеют среднюю кинетическую энергию поступательного движения, достаточную для ионизации? Потенциал ионизации атома ртути $10,4 \text{ В}$. Ответ: $8 \cdot 10^4 \text{ К}$.

18. Потенциал ионизации атома гелия $24,5 \text{ В}$. Найти работу ионизации. Ответ: $3,9 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$.

19. Как изменится ток насыщения в электронной лампе с вольфрамовым катодом при повышении температуры накала от 2000 до 2020 К ? Работа выхода электрона из вольфрама $A = 4,54 \text{ эВ}$. Ответ: ув. в $1,3$ раза.

20. Определить силу тока насыщения в электронной лампе с вольфрамовым катодом при таких данных: длина и диаметр нити накала 3 см и $0,1 \text{ мм}$; температура накала 2700 К ; постоянная B

для вольфрама равна $60,2 \text{ А}/(\text{см}^2 \cdot \text{град}^2)$. Работа выхода электрона из вольфрама $A = 7,26 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Ответ: 0,28 А.

21. Во сколько раз изменится плотность тока насыщения термоэлектронной эмиссии вольфрама, находящегося при температуре 2400 К, если повысить температуру вольфрама на $100 \text{ }^\circ\text{C}$? Работа выхода электрона из вольфрама $A = 4,54 \text{ эВ}$. Ответ: ув. в 2,6 раза.

22. Во сколько раз катод из торированного вольфрама при его рабочей температуре в 1800 К дает большую плотность тока эмиссии, чем катод из чистого вольфрама при той же температуре? Работа выхода электрона из вольфрама $A_W = 4,5 \text{ эВ}$, торированного вольфрама $A_{W-Th} = 2,63 \text{ эВ}$. Эмиссионную постоянную B для чистого вольфрама считать равной $60 \text{ А}/(\text{см}^2 \cdot \text{град}^2)$ и для торированного вольфрама $3 \text{ А}/(\text{см}^2 \cdot \text{град}^2)$. Ответ: в $1,1 \cdot 10^4$ раза.

23. При какой температуре торированный вольфрам будет давать такую же плотность тока термоэлектронной эмиссии, какую дает чистый вольфрам при $T = 2500 \text{ К}$? Необходимые данные взять из предыдущей задачи. Ответ: 1760 К.

24. Пусть в некоторый объем катодного вещества вводится энергия w_0 (Дж/кг), которая в процессе разлета частиц переходит в кинетическую энергию частиц плазмы. Считая процесс адиабатическим и учитывая, что радиус плазмы много больше начального объема, показать, что скорость движения передних слоев

плазмы равна $v_p \approx \left(\frac{u\gamma}{\gamma-1} w_0 \right)^{1/2}$, где γ – показатель адиабаты.

Оценить удельную энергию микровзрыва, если скорость разлета для W, Mo, Cu, Al, Ni, Pb составляет $v_p \approx (1 \div 2) \cdot 10^6 \text{ м/с}$, $\gamma \approx 1,24$.

25. Определить скорость нарастания di/dt тока ВЭЭ, если начальная напряженность поля в промежутке $E_0 = 10^6 \text{ В/см}$, скорость движения катодной плазмы $v = 2 \cdot 10^6 \text{ см/с}$, $U_0 = 10^4 \text{ В}$, $A_0 = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ А} \cdot \text{В}^{-3/2}$. Ответ: $7,4 \cdot 10^{13} \text{ А/с}$.

8. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

8. 1. Контактная разность потенциалов

Возникновение разности потенциалов между приведенными в контакт различными металлами было экспериментально открыто итальянским физиологом и анатомом Луиджи Гальвани и получило верное объяснение в работах итальянского физика Алессандро Вольты. Гальвани, проводя опыты с препарированными лягушками, наблюдал сокращение лапки лягушки, подвешенной на железный или медный крюк, при соприкосновении с серебряной пластинкой. Гальвани объяснил этот факт наличием «животного» электричества, протекающего по замкнутой цепи. А. Вольта первым понял, что в этих основополагающих опытах Гальвани лапка лягушки выполняла роль чувствительного электрометра, а разность потенциалов обусловлена чисто физическими причинами и возникает между двумя различными металлами, приведенными в соприкосновение. Поместив изолированные друг от друга суконной тряпочкой медные и цинковые пластинки в кислую среду или раствор нашатыря (среда, подобная физиологической среде в живом организме), А. Вольта впервые создал источник постоянного электрического тока – гальванический элемент, открыв новую эру в развитии человеческой цивилизации, связанную с использованием электричества. Если металлы привести в контакт, расположив их в порядке, указанном на рис. 8.1, то потенциал каждого последующего металла будет ниже потенциала предыдущего металла. Причем Вольта установил, что разность потенциалов между крайними металлами в любом составленном ряду металлов не будет зависеть от того, какие металлы являются промежуточными в этом ряду, а определяется только крайними металлами в этом ряду – закон последовательных контактов Вольты.

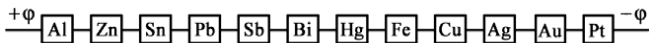


Рис. 8.1. Ряд Вольты. Потенциал каждого последующего металла в этом ряду ниже потенциала предыдущего

Если замкнуть любую последовательность металлов между собой в кольцо, то в любом из металлов разность потенциалов и ток будут равны нулю. В такой цепи равна нулю и электродви-

жающая сила, если температура всех контактов одинакова и между элементами контактов не протекает химическая реакция. Это согласуется с законом сохранения энергии, следствием которого и является закон последовательных контактов Вольты.

Закон последовательных контактов Вольты можно получить, если часть электронов металлов, способных свободно перемещаться, рассматривать как идеальный газ, к которому применимо распределение Больцмана. Отношение концентраций электронов в условиях термического равновесия с энергиями E_1 и E_2 равно

$$\frac{n(E_1)}{n(E_2)} = \exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{kT}\right).$$

Примем, что вне заряженных проводников A , B и C потенциал $\varphi_0 = 0$, а внутри $\varphi_A > 0$, $\varphi_B > 0$ и $\varphi_C > 0$. Пусть n_A , n_B и n_C – концентрации свободных электронов в металлах A , B и C , φ_{AB} , φ_{AC} и φ_{CB} – разности потенциалов при непосредственном их соприкосновении. Работа перехода электрона из одного металла в другой равна соответственно $e\varphi_{AB}$, $e\varphi_{AC}$ и $e\varphi_{CB}$, где $e > 0$ – элементарный заряд. В результате имеем

$$\frac{e\varphi_{AB}}{kT} = \ln \frac{n_B}{n_A},$$

$$\frac{e\varphi_{AC}}{kT} = \ln \frac{n_C}{n_A},$$

$$\frac{e\varphi_{CB}}{kT} = \ln \frac{n_B}{n_C},$$

откуда следует закон последовательных контактов Вольты:

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AC} + \varphi_{CB}.$$

Если два металла с различными энергиями Ферми ε_{1F} и ε_{2F} и работами выхода A_1 и A_2 (рис. 8.2 а) привести в контакт, то электроны из металла с большей энергией Ферми и меньшей работой выхода (металл 2) начнут перетекать в металл с меньшей энергией Ферми и большей работой выхода (металл 1). Перенос электронов будет продолжаться до тех пор, пока уровни Ферми (уровни электрохимических потенциалов) у этих металлов не сравняются (рис. 8.2 б). Причем поскольку энергии Ферми (см. п. 6.5)

$$\varepsilon_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

пропорциональны концентрации электронов в степени 2/3 (квантовая статистика), то перетекание электронов из одного металла в другой соответствует их диффузии из металла с большей концентрацией электронов в металл с меньшей концентрацией электронов.

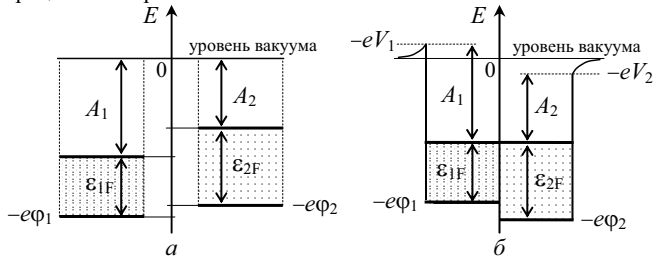


Рис. 8.2. Вычисление внутренней $\phi_1 - \phi_2$ и внешней $V_2 - V_1$ контактной разности потенциалов. Энергетические уровни в зонной диаграмме металлов до контакта (а) и после контакта (б): $-e\phi_1$ и $-e\phi_2$ – потенциальная энергия электронов вблизи дна зоны, ε_{1F} и ε_{2F} – энергия Ферми, A_1 и A_2 – работа выхода электрона из металла. Уровень Ферми (уровень электрохимического потенциала) выравнивается после соприкосновения металлов (б), т.е. $-e\phi_1 + \varepsilon_{1F} = -e\phi_2 + \varepsilon_{2F}$

Отметим, что энергия Ферми ε_F , характеризует максимальную кинетическую энергию электрона при абсолютном нуле температуры, а уровень Ферми (уровень электрохимического потенциала) $\varepsilon_F - e\phi$ характеризует полную энергию электрона в электростатическом поле, по модулю эта энергия равна работе выхода электрона из металла.

Возникшее электрическое поле, связанное с разделением зарядов, остановит перетекание электронов из одного металла в другой. Из условия равенства уровней Ферми (уровней электрохимических потенциалов)

$$-e\phi_1 + \varepsilon_{1F} = -e\phi_2 + \varepsilon_{2F}$$

определим разность потенциалов для двух точек, находящихся внутри металлов,

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{\varepsilon_{1F} - \varepsilon_{2F}}{e}$$

– величину внутренней контактной разности потенциалов. ($-e < 0$ – заряд электрона).

Подставляя в полученную формулу выражение для ϵ_F , находим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\hbar^2}{2me} (3\pi^2)^{2/3} (n_1^{2/3} - n_2^{2/3}) = 3,64 \cdot 10^{-19} (n_1^{2/3} - n_2^{2/3}) \text{ [В]}.$$

В частности, для меди и цинка $\varphi_1 - \varphi_2 \approx 1$ В. Для других металлов эта величина порядка сотых или десятых долей вольта.

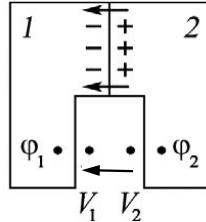


Рис. 8.3. Электрические поля, созданные при контакте двух различных металлов 1, 2

Поскольку металлы при контакте заряжаются, то возникшее электрическое поле, созданное приконтактным электрическим зарядом, локализовано не только вблизи границы раздела, но и в зазоре между проводниками. Разность потенциалов во внешних точках $V_2 - V_1$, лежащих в непосредственной близости (один – два атомных слоя от поверхности проводников), называется внешней контактной разностью потенциалов (рис. 8.3).

Как видно из рис. 8.2 б, вблизи поверхности контактирующих металлов потенциалы электрического поля неодинаковы. Поскольку в условиях установившегося равновесия

$$A_1 + eV_1 = A_2 + eV_2,$$

то внешняя контактная разность потенциалов ($-e < 0$)

$$V_2 - V_1 = -\frac{A_2 - A_1}{e}$$

будет определяться разностью работ выхода электрона из металлов. Металл с меньшей работой выхода заряжается положительно ($V_2 > 0$), а с большей работой выхода – отрицательно ($V_1 < 0$). Величина работы выхода материалов существенно зависит от состояния поверхности. Измеряя внешнюю контактную разность потенциалов, можно следить за изменением свойств поверхности в ходе различных физико-химических процессов.

Контактную разность потенциалов Вольта наблюдал в опыте с медным и цинковым дисками, расположенными один на другом и

разделенными тончайшим слоем изолятора – шеллаком (рис. 8.4). Медный диск соединялся с электроскопом. В исходном состоянии медный и цинковый диски замыкались через внешние поверхности и благодаря контактной разности потенциалов порядка одного вольта приобретали электрические заряды: Cu – отрицательный, Zn – положительный. Столь малую разность потенциалов электроскоп не регистрировал. Для ее обнаружения удаляется соединительная проволока и за изолированную ручку цинковый диск поднимается. Поскольку заряд конденсатора не изменяется, а его емкость уменьшается, то, соответственно, увеличивается разность потенциалов $\Delta\phi = q/C = qd/(\epsilon_0 S)$ и листочки электроскопа расходятся.

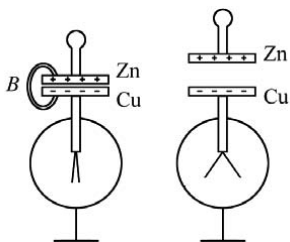


Рис. 8.4. Опыт Вольты по доказательству существования контактной разности потенциалов

На существовании контактной разности потенциалов основана работа важнейших элементов полупроводниковой электроники: переходов между полупроводниками с электронной и дырочной проводимостью (диоды, триоды), контактов металл – полупроводник. Учет контактной разности потенциалов важен при конструировании электровакуумных приборов, поскольку она может влиять на их вольт-амперные характеристики. При прямом преобразовании тепловой энергии в электрическую в термоэмиссионном преобразователе создается напряжение, по величине близкое к контактной разности потенциалов.

8.2. Эффект Зеебека – возникновение термо-ЭДС

В 1821 г. немецкий физик Томас Зеебек (1770–1831) открыл явление возникновения электрического тока в замкнутом контуре, состоящем из двух проводников *A* и *B*, контакты между которыми поддерживаются при разных температурах. Зеебек думал, что под влиянием разности температур в соединенных проводниках выделяется свободный магнетизм (рис. 8.5). Однако,

как выяснилось, появление магнитного поля при нагревании одного из контактов в замкнутой цепи связано с прохождением электрического тока. Градиент температуры в проводнике создает разность концентраций холодных и горячих электронов между спаями. В результате поток горячих электронов направляется к холодному спаю, а поток холодных – к горячему.

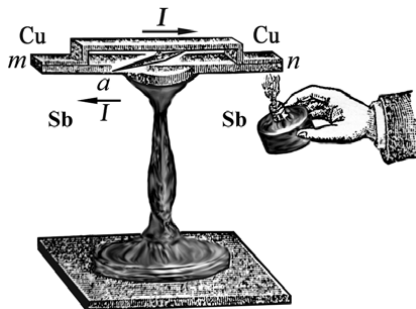


Рис. 8.5. Схема опыта Зеебека по обнаружению термо-ЭДС

Поскольку скорости холодных и горячих электронов различны, то на одном из спаев создается избыток отрицательного, а на другом – положительного заряда. В замкнутой цепи суммарные потоки электронов в проводниках A, B различны, поэтому устанавливается некоторое значение стационарного тока, обусловленного величиной возникшей электродвижущей силы в замкнутой цепи. Возникающая диффузионная термо-ЭДС определяется температурной зависимостью концентрации носителей заряда и их подвижности (рис. 8.6). Подвижность изменяется с температурой, поскольку меняется характер взаимодействия электронов с колебаниями решетки и примесями.

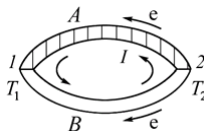


Рис. 8.6. Возникновение термо-ЭДС: A – положительный проводник; B – отрицательный проводник; $T_2 > T_1$

В металлах электронный газ вырожден и термо-ЭДС определяется в основном различием подвижностей горячих и холодных электронов.

Электродвижущая сила в замкнутом контуре из двух проводников равна разности ЭДС более и менее нагретого слоя

$$\Delta = (T_2) - (T_1).$$

Производная

$$\alpha = \frac{d\Delta\mathcal{E}}{dT}$$

называется коэффициентом термо-ЭДС и является характеристикой обоих материалов термопары. Поскольку число возможных пар очень велико, то условились определять величину α для каждого из материалов по отношению к свинцу ($\alpha_{\text{Pb}} = 0$). В этом случае коэффициент термо-ЭДС металла A по отношению к металлу B равен

$$\alpha_{AB} = \alpha_A - \alpha_B,$$

где α_A и α_B измерены для металла A и металла B по отношению к свинцу. Величины α сильно зависят от чистоты материалов.

Внутренняя контактная разность потенциалов металлов A и B (классическая статистика) на холодном (T_1) и горячем (T_2) спаях равна

$$\Delta\varphi_1 = \frac{kT_1}{e} \ln \frac{n_B}{n_A}, \quad \Delta\varphi_2 = \frac{kT_2}{e} \ln \frac{n_A}{n_B}.$$

Электродвижущая сила, возникающая в замкнутом контуре из металлов A и B

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = \frac{k}{e} \ln \frac{n_A}{n_B} (T_2 - T_1).$$

В случае линейной зависимости от температуры

$$(T) = \alpha T$$

получаем

$$\Delta = (\alpha_A - \alpha_B)(T_2 - T_1).$$

Для таких пар металлов, как (Cu, Bi), (Ag, Cu), (Au, Cu), (Pt, Fe) это соотношение выполняется в широких пределах. Абсолютная термо-ЭДС

$$a = \partial U / \partial T$$

равна термо-ЭДС проводника при единичной разности температур. Величину a можно оценить из условия, что коэффициент полезного действия тепловой машины, разделяющей заряды в проводнике, равный, по определению, отношению полезной работы $A_{\text{пол}} = \Delta U \cdot e$ к затраченной $A_{\text{затр}} = kT$, не может превосходить

КПД идеальной тепловой машины $\eta = \Delta T / T_g$. Здесь T_g – температура вырождения электронного газа. В результате получаем

$$\frac{\partial U}{\partial T} \leq \frac{k}{e} \frac{T}{T_g}.$$

Для металлов это величина порядка микровольт на градус. В общем случае термо-ЭДС в контуре равна

$$\mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} (\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B) dT,$$

где $\mathcal{E}_A, \mathcal{E}_B$ – абсолютные значения термо-ЭДС проводников A и B .

Эффективная демонстрация термоэлектрического тока может быть осуществлена в опыте, приведенном на рис. 8.7. Толстая U -образная медная дуга перекрывается коротким мостиком 1–2 из константана или железа (рис. 8.7, а). Место спая 1 разогревается.

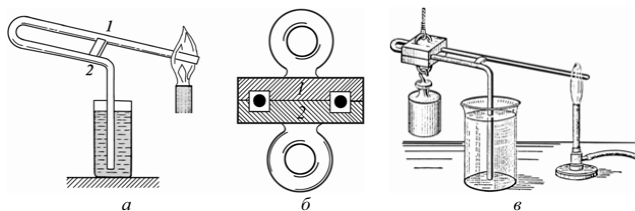


Рис. 8.7. Электромагнит, питаемый током термоэлемента, способен удерживать гирию массой в несколько килограммов

Для создания разности температур второй конец опускается в воду. При $\Delta T = 500^\circ\text{C}$ термо-ЭДС не превышает 0,027 В, но из-за малого сопротивления медной дуги ток в цепи может достигать сотен ампер. Если сверху и снизу расположить кусок железа, распиленный пополам (рис. 8.7, б), то мы получим электромагнит с одним витком медной проволоки, способный удерживать груз в несколько килограммов.

В полупроводниках термоэлектрические свойства выражены значительно сильнее, чем в металлах, поскольку в полупроводниках концентрация электронов и дырок сильно изменяется с температурой, как и положение уровня Ферми. Поэтому в то время, как у металлов α изменяется от единиц до десятков микровольт на градус, то у полупроводников α достигает милливольт на градус, т.е. в десятки и сотни раз больше.

Термоэлектричество может быть использовано для генерации электрического тока, если объединить термопары в термобатарею, состоящие из последовательно соединенных термоэлементов, слои которых поддерживаются при разных температурах (рис. 8.8). Термобатареи из металлических термопар обладают малым КПД $\approx 0,1\%$, поскольку температура электронного газа – температура вырождения T_g – очень велика и КПД такой тепловой машины $\text{КПД} \leq \Delta T/T_g$ мал. КПД полупроводниковых элементов намного больше и может достигать 15% и выше.

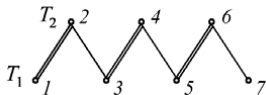


Рис. 8.8. Термобатарея, составленная из ряда последовательно соединенных термоэлементов

Поэтому перспективно их применение для прямого преобразования тепловой энергии в электрическую. Металлические термопары нашли также самое широкое применение для точного измерения температур в диапазоне от нескольких градусов Кельвина до 2800 К с точностью от нескольких градусов Кельвина до $0,01\text{ К}$.

8.3. Эффект Пельтье и эффект Томсона

Эффект Пельтье состоит в поглощении или выделении теплоты при прохождении электрического тока через контакт двух различных проводников. Выделение теплоты сменяется поглощением при изменении направления тока. Эффект был обнаружен в 1834 г. французским часовщиком Ж. Пельтье (1785–1845). Помещенная на стыке двух металлов – висмута ($\alpha = -68\text{ мкВ/}^\circ\text{С}$) и сурьмы ($\alpha = +43\text{ мкВ/}^\circ\text{С}$) капля воды замерзала при одном направлении тока, а при изменении направления тока образовавшийся лед таял. Это указывало, что помимо джоулевой теплоты в спае выделяется или поглощается дополнительная теплота, которая стала называться теплотой Пельтье.

В отличие от джоулевой теплоты, пропорциональной квадрату тока, теплота Пельтье Q пропорциональна количеству заряда q , прошедшему через контакт:

$$Q = \Pi q.$$

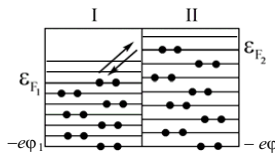
Величина Π называется коэффициентом Пельтье. Коэффициент Π определяется родом контактирующих материалов и их температурой. Для металлов коэффициент Пельтье порядка $10^{-2} \div 10^{-3}\text{ В}$, для полупроводников $3 \cdot 10^{-1} \div 10^{-3}\text{ В}$.

Явление Пельтье обратное явлению Зеебека. Эффект Пельтье объясняется тем, что средние энергии носителей тока в различных провод-

никах различны и зависят от энергетического спектра материала и механизмов рассеяния. При переходе из одного проводника в другой электроны либо передают избыточную энергию атомам твердого тела, либо пополняют недостающую энергию за счет тепловых колебаний решетки (рис. 8.9). В первом случае будет происходить выделение теплоты, а во втором – поглощение. При переходе электронов из полупроводника в металл энергия электронов проводимости (положение уровня Ферми) в металле. В результате электроны отдают свою избыточную энергию, и выделяется теплота Пельтье.

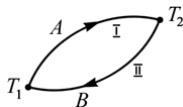
При противоположном направлении тока из металла в полупроводник переходят лишь те электроны, энергия которых выше дна зоны проводимости в полупроводнике. Откачивание таких электронов нарушает тепловое равновесие в металле, которое восстанавливается за счет энергии тепловых колебаний решетки. Идет поглощение теплоты Пельтье – контакт охлаждается.

Рис. 8.9. Эффект Пельтье. В металле II средняя энергия электронов выше, чем в металле I. Уровень Ферми расположен в металле II выше, чем в I. При переходе электронов из металла I в II происходит поглощение дополнительной энергии – теплота Пельтье отрицательна. При переходе электронов из металла II в I теплота Пельтье положительна



На контакте двух полупроводников либо двух металлов выделяется или поглощается теплота Пельтье вследствие различия средних энергий носителей заряда по обе стороны контакта.

Рис. 8.10. Тепловая машина, рабочим телом которой служат свободные электроны



Если взять замкнутую цепь, состоящую из двух различных металлов *A* и *B*, спаи которых поддерживаются при постоянной температуре, как идеальную тепловую машину, то к ней применимо термодинамическое рассмотрение (рис. 8.10). Для идеальной тепловой машины справедливо равенство Клаузиуса

$$\frac{\Pi_1 q}{T_1} = \frac{\Pi_2 q}{T_2},$$

где q – перенесенный заряд. Отсюда следует, поскольку T_1 и T_2 произвольны, что

$$\frac{\Pi}{T} = \text{const}, \quad \frac{d}{dT} \left(\frac{\Pi}{T} \right) = 0.$$

Работа, совершаемая такой машиной в результате появления термоэлектродвижущей силы

$$A = q = \alpha(T_1 - T_2),$$

равна теплоте Пельтье

$$A = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Откуда следует ($T_1 - T_2 \rightarrow dT \rightarrow 0$)

$$\frac{\Pi_1 - \Pi_2}{T_1 - T_2} = \alpha = \frac{d\Pi}{dT} = \frac{d}{dT}(\text{const} \cdot T),$$

поскольку $\Pi/T = \text{const}$.

Окончательно получаем связь между коэффициентом термо-ЭДС и коэффициентом Пельтье

$$\Pi = \alpha T.$$

Данное равенство, как правило, не согласуется с опытом, поскольку не учитывает, что различные участки проводников в нашей тепловой машине нагреты до различной температуры, а поэтому физически не эквивалентны. При прохождении тока по таким участкам будет также происходить поглощение или выделение теплоты, помимо джоулевой.

Если вдоль проводника, по которому протекает ток, существует градиент температуры и направление тока соответствует движению электронов от горячего участка к холодному, то при переходе из горячего участка к холодному электроны тормозятся полем и передают избыточную энергию атомам решетки. В этом случае выделяется избыточная теплота.

Между двумя точками одного и того же металла, разнящимися по температуре, имеется разность потенциалов $\mathcal{E}_{T_1 T_2}$, зависящая от природы металла и от разности температур, но не зависящая от распределения температур в остальной части металла:

$$\mathcal{E}_{T_1 T_2} = \sigma(T_1 - T_2),$$

где σ – коэффициент Томсона.

При движении электронов от холодного участка к горячему электроны ускоряются полем термо-ЭДС и поглощают в горячем участке теплоту от решетки, проводник охлаждается. Эта тепло-

та, как и теплота Пельтье, будет пропорциональна прошедшему заряду и перепаду температур участков

$$\Delta Q = \sigma q \Delta T.$$

Здесь σ – коэффициент Томсона.

Данный эффект был предсказан в 1856 г. английским физиком В. Томсоном (1824–1907) и экспериментально установлен в 1867 г. французским физиком Ф. Леру (1832–1907). Учет данного эффекта в тепловой машине с электронным газом позволяет установить в общем случае связь между коэффициентом Зеебека α и Пельтье Π . Из соотношений $Q = Pq$ и $\Delta Q = \sigma q \Delta T$ следует

$$\frac{d\Pi}{dT} \frac{\Pi}{T} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{T} \quad \text{и} \quad \frac{d\Pi}{dT} + \sigma_1 - \sigma_2 = \alpha,$$

откуда

$$\Pi = \alpha T,$$

где $\alpha = \alpha(T)$ уже зависит от температуры.

Эффект Пельтье используется для охлаждения в холодильных установках, где совершенно исключены механические, движущиеся части, а также в электронных приборах.

Основные выводы

Контактная разность потенциалов возникает между приведенными в контакт различными металлами.

Разность потенциалов в любом составленном ряду металлов определяется только крайними металлами.

Для двух точек, находящихся внутри различных металлов, контактная разность потенциалов определяется разностью уровней Ферми в металлах до контакта

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\varepsilon_{1F} - \varepsilon_{2F}}{e}$$

($-e < 0$ – заряд электрона).

Разность потенциалов $V_2 - V_1$ во внешних точках, лежащих в непосредственной близости от поверхности проводников, называется внешней контактной разностью потенциалов:

$$V_2 - V_1 = -\frac{A_2 - A_1}{e},$$

где A_1 и A_2 – работа выхода электрона из металла 1 и 2.

Эффект Зеебека – возникновение электрического тока в замкнутом контуре, состоящем из разных металлов, контакты между

которыми поддерживаются при разной температуре. Величина термо-ЭДС $\Delta\varepsilon$ пропорциональна разности температур ΔT спаев

$$\Delta\varepsilon = \alpha\Delta T,$$

где α – коэффициент термо-ЭДС для конкретной пары металлов.

Эффект Пельтье – поглощение или выделение теплоты при прохождении электрического тока через контакт двух различных материалов. Выделение теплоты сменяется поглощением при изменении направления тока. Дополнительная к джоулевой теплоте теплота Q пропорциональна количеству заряда, прошедшего через контакт,

$$Q = \Pi q,$$

где Π – коэффициент Пельтье.

Между двумя точками одного и того же металла, разнящимися по температуре, имеется разность потенциалов $\varepsilon_{T_1 T_2}$, зависящая от природы металла и от разности температур, но не зависящая от распределения температур в остальной части металла:

$$\varepsilon_{T_1 T_2} = \sigma(T_1 - T_2),$$

где σ – коэффициент Томсона. При прохождении заряда q между двумя точками одного металла, отличающимися температурой, выделяется или поглощается тепло ΔQ , пропорциональное прошедшему заряду. Тепло выделяется при переходе от горячего участка к холодному и поглощается при движении от холодного участка к горячему:

$$\Delta Q = \sigma q(T_1 - T_2).$$

Упражнения

1. Исходя из представлений, что некоторая часть электронов свободно перемещается внутри металла и что к этой части применимы соотношения кинетической теории газов, объяснить, почему разность потенциалов между непосредственно соприкасающимися металлами A и B равна разности потенциалов между теми же металлами, соединенными промежуточным металлом C .

2. а) Принимая, что при малых разностях температур ЭДС, зависящая от разности температур в металле, может быть вычислена подобно контактной ЭДС посредством соотношения Больцмана, показать, что ЭДС термопары AB , соответствующая разности температур спаев в 1° (термоэлектродвижущая сила), равна

$$\varepsilon = \frac{k}{e} \cdot \ln \frac{n_A}{n_B},$$

где n_A и n_B – концентрации свободных электронов в металлах A и B .

б) Для пар медь – платина и никель – платина термоэлектродвижущие силы равны соответственно $\alpha_1 = 7,6$ мкВ/град и $\alpha_2 = -15$ мкВ/град. Оценить на основании приведенных данных отношение концентрации свободных электронов в этих металлах. Можно ли считать, что на один атом этих металлов приходится один свободный электрон? Ответ: 1) 1,1; 2) 0,84; да.

3. Каково наибольшее (теоретически) количество электричества, которое протечет по термопаре медь – платина при поглощении горячим спаем одного джоуля? Температура горячего спа 100 °С, холодного 0 °С; ЭДС равна $0,76$ мВ. Ответ: $352,8$ Кл.

4. Термопара висмут – железо с постоянной $\alpha = 92$ мкВ/град и сопротивлением $r = 5$ Ом присоединена к гальванометру с внутренним сопротивлением $R = 110$ Ом. Какой ток покажет гальванометр, если один спай термопары погрузить в пар кипящей под нормальным давлением воды, а другой – в тающий лед? Ответ: 80 мкА.

5. Какова постоянная α термопары висмут – теллур, если при подключении ее к гальванометру с внутренним сопротивлением $R = 100$ Ом и чувствительностью на одно деление 10^{-5} А минимальная разность температур, которую можно измерить, $\Delta T = 2 \cdot 10^{-3}$ К? Сопротивлением термопары пренебречь. Ответ: $0,25$ В/град.

6. Для определения температуры печи в нее вставлена термопара никель – нихром с постоянной $\alpha = 0,5$ мкВ/град, присоединенная к гальванометру с внутренним сопротивлением $R = 200$ Ом и с чувствительностью на одно деление 10^{-7} А. При температуре второго спа $T_2 = +25$ °С гальванометр дает отклонение $b = 25$ делений. Чему равна температура T_1 печи? Ответ: 1025 °С.

7. 1) Два различных металла находятся в соприкосновении. Давление электронного газа в первом металле P_1 и работа выхода электрона из этого металла A_1 ; давление электронного газа во втором металле P_2 и работа выхода электрона из него A_2 . Найти контактную разность потенциалов, если температура обоих металлов T . Ответ: $\Delta\phi = |(A_1 - A_2)/e|$.

2) Из указанных металлов составлена термопара с двумя спаями, находящимися при температурах T_1 и T_2 . Найти термоэлектродвижущую силу. Ответ: $\mathcal{E} = \frac{k}{|e|} \cdot \ln \frac{P_1}{P_2} (T_2 - T_1)$.

Указание. Давление P электронного газа в металле связано с концентрацией n электронов и температурой T металла соотношением $P = nkT$, где k – постоянная Больцмана.

9. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

9.1. Введение

Существует еще один особый вид взаимодействия токов и тел – магнетизм, осуществляемый посредством магнитного поля, являющегося проявлением электромагнитной формы движения материи. Термин «магнитное поле» введен в 1845 г. М. Фарадеем. Между электрическими и магнитными полями нет полной симметрии. Источниками электрического поля служат электрические заряды. Магнитных зарядов до настоящего времени не обнаружено, хотя теория предсказывает их существование. Источниками магнитного поля являются движущиеся электрические заряды, иными словами, электрические токи. В атомных масштабах движение электронов и протонов создает орбитальные микротоки, связанные с переносным движением этих частиц в атомах или атомных ядрах.

Помимо этого микрочастицы, наряду с собственным механическим моментом количества движения – спином, обладают и собственным магнитным моментом – спиновым магнитным моментом, определяющим их взаимодействие с внешним магнитным полем. Поскольку электроны, протоны и нейтроны, образующие атомные ядра, атомы, молекулы и все макроскопические тела, имеют собственные магнитные моменты, то в принципе все вещества обладают магнитными свойствами и подвержены влиянию магнитного поля. Все вещества являются магнетиками.

В нашей стране на Урале в естественных условиях встречается железная руда, которая обладает свойством притягивать к себе железные предметы. Эта руда представляет собой химическое соединение железа с кислородом Fe_3O_4 и называется магнитным железняком. Это слово произошло от названия древнего города Магнезия в Малой Азии, вблизи которого находили магнитную руду.

Первые письменные свидетельства о магнитных свойствах веществ и о магнетизме пришли из Китая и имеют двухтысячелетнюю давность. В них упоминается об использовании постоянных магнитов в качестве компасов. Древнегреческие и римские ученые упоминают о притяжении и отталкивании магнитов и о намагничивании магнитом железных опилок – поэма Лукреция Кара (95–55 гг. до н.э.). В средние века в Европе широко применяется магнитный компас (с XII в. н.э.), предпринимались опыты по изучению свойств магнитов. Результаты исследования магнетизма в эпоху Возрождения обобщены У. Гильбертом в трактате «О

магните, магнитных телах и о большом магните – Земле» (1600 г). В этом труде показано, что Земля – магнитный диполь, и доказана невозможность разъединения двух разноименных магнитных полюсов (рис. 9.1). Причем, южный магнитный полюс находится недалеко от северного географического полюса Земли.

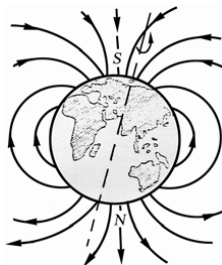


Рис. 9.1. Направление силовых линий магнитного поля Земли

Магнитным полюсом называется участок поверхности намагниченного образца – магнита, на котором нормальная составляющая силовых линий магнитного поля отлична от нуля. Если изобразить графически силовые линии магнитного поля, то магнитный полюс соответствует месту пересечения поверхности образца этими линиями (рис. 9.2). Участки поверхности, из которых выходят силовые линии, называются северным (N) или положительным магнитным полюсом, а участки поверхности, в которые эти линии входят, называются южным (S) или отрицательным.

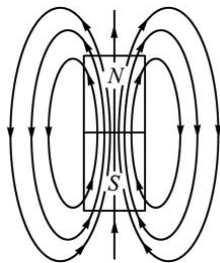


Рис. 9.2. Магнитное поле постоянного магнита в виде стержня и полюсы N – северный и S – южный. Линии со стрелками – силовые линии магнитного поля. Линии замыкаются в окружающем пространстве

Одноименные магнитные полюса отталкиваются, разноименные – притягиваются. По аналогии с взаимодействием электрических зарядов магнитным полюсам можно приписать отличную от нуля поверхностную плотность магнитных зарядов σ_m . Отсутст-

вие в природе свободных магнитных зарядов приводит к тому, что линии магнитной индукции не могут прерываться в образце, и у магнитного тела, наряду с магнитным полюсом одной полярности, всегда существует магнитный полюс другой полярности.

Принципиально новый этап изучения магнитных явлений начинается в конце XVIII – начале XIX в. В трактате Эпинуса «Опыт теории электричества и магнетизма» (1759 г.) подчеркнуто сходство электричества и магнетизма, а Кулон в 1785–1789 гг. показал, что взаимодействие точечных магнитных полюсов подчиняется закону обратных квадратов. В 1820 г. Х. Эрстед открыл магнитное поле электрического тока, а А. Ампер установил законы магнитного взаимодействия токов и эквивалентность магнитного поля кругового тока магнитному полю тонкого плоского магнита. Ампер объяснил магнетизм веществ существованием молекулярных токов.

Майкл Фарадей впервые ввел понятие о реальном электромагнитном поле и на этой основе дал последовательную трактовку магнитных явлений, в частности явлений электромагнитной индукции (1831 г.), была доказана взаимосвязь и относительность электрических и магнитных полей. Вершиной развития классической электромагнитной теории явились труды Дж.К. Максвелла, опубликованные в 1872 г.

Основными современными научными проблемами магнетизма являются проблема построения теории магнетизма в твердых телах и описание различных видов магнитных взаимодействий: объяснение спектров магнитных возбуждений; нелинейная динамика доменных стенок; развитие теории магнитных фазовых переходов.

Магнетизм широко используется как средство изучения химических связей и структуры молекул. Изучение процессов магнитного резонанса и релаксации позволяет понять кинетику многих физических и физико-химических процессов. Интенсивно развиваются магнитобиология и применение магнетизма в медицине.

Важнейшие проблемы магнетизма космоса связаны с выяснением происхождения магнитных полей Солнца, Земли и других звезд и планет, пульсаров, радиогалактик, квазаров и роли магнитных полей в космическом пространстве.

Проблемы технических применений магнетизма входят в число важнейших в электротехнике, приборостроении, вычислительной технике, автоматике и телемеханике. Широко применяются магнитная дефектоскопия и иные методы контроля. Важная роль отводится измерениям магнитных характеристик электротехнических и радиотехнических материалов, которые

идут на приготовление магнитопроводов электрических генераторов, моторов, трансформаторов, реле, магнитных усилителей, элементов магнитной памяти, лент и дисков магнитной записи, стрелок магнитных компасов, магнитострикционных излучателей и приемников и пр.

9.2. Сила Лоренца

Сила, действующая на электрический заряд q во внешнем электромагнитном поле, зависит не только от его местоположения и напряженности электрического поля $\mathbf{E}(x,y,z)$ в этой точке: $q\mathbf{E}(x,y,z)$, но, в общем случае, и от скорости его движения \mathbf{v} и величины индукции магнитного поля $\mathbf{B}(x,y,z)$. Выражение для этой силы было получено в конце XIX в. голландским физиком Г.А. Лоренцем путем обобщения опытных данных

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + kq[\mathbf{v}, \mathbf{B}],$$

где \mathbf{E} – напряженность электрического поля, а вектор \mathbf{B} получил историческое название индукции магнитного поля, k – коэффициент, зависящий от выбора системы единиц. Вектор \mathbf{B} является силовым вектором и не зависит от величины и движения заряда q , он характеризует только магнитное поле, в котором движется заряд q . Вектор \mathbf{B} следовало бы скорее назвать напряженностью магнитного поля, но исторически это название было дано другому вектору \mathbf{H} , аналогичному вспомогательному вектору \mathbf{D} в электростатике.

Первое слагаемое $q\mathbf{E} = \mathbf{F}_k$ в формуле Лоренца есть кулоновская сила, действующая на заряд в электрическом поле, второе $kq[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = \mathbf{F}_m$ – сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле и обычно называемая магнитной составляющей силы Лоренца (рис. 9.3). Сила \mathbf{F}_m перпендикулярна вектору скорости \mathbf{v} и вектору индукции магнитного поля \mathbf{B} . Выбор коэффициента k определяется выбором системы единиц. В системе СИ он полагается равным единице ($k = 1$). Этот выбор нельзя назвать удачным, так как при таком выборе k двум компонентам \mathbf{E} и \mathbf{B} единого электромагнитного поля приходится приписать различные размерности, чего бы не произошло, если в качестве коэффициента k выбрать величину, обратную скорости света в вакууме $k = 1/c$, что и сделано в гауссовой системе единиц. Однако использование СИ становится общепринятым, поэтому не будем от нее

* Физически это проявляется в том, что поля \mathbf{B} и \mathbf{E} взаимно преобразуются друг в друга при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

отказываться и при изучении магнитных явлений. Единицей измерения магнитной индукции в СИ служит тесла [Тл], в СГС – гаусс [Гс].

Единицы измерения $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ совпадают с единицами измерения $[\mathbf{E}]$. Таким образом, \mathbf{B} измеряется в единицах \mathbf{E} , деленных на м/с; следовательно, $[\mathbf{B}] = \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}$. Как уже отмечалось, единицей измерения \mathbf{B} в системе СИ является тесла. Прежде вместо теслы использовалась эквивалентная единица измерения вебер/м². Величину \mathbf{B} называют магнитной индукцией, однако теперь ее часто именуют просто магнитным полем.

В системе СГС (называемой также гауссовой) магнитное поле определяется уравнением

$$\mathbf{F}_m = \frac{q}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_{\text{СГС}}].$$

В системе СГС величина \mathbf{B} измеряется в гауссах (Гс):

$$1 \text{ тесла} = 10^4 \text{ гаусс.}$$

В системе СГС единицы измерения полей \mathbf{B} и \mathbf{E} одинаковы. Система, в которой \mathbf{B} и \mathbf{E} измеряются в одних и тех же единицах, имеет некоторые преимущества. Соотношение между единицами \mathbf{B} в СГС и СИ определяется через величину скорости света в вакууме. Любое уравнение в теории электромагнетизма можно записать в системе СГС путем замены величины \mathbf{B} на \mathbf{B}/c .

$$\mathbf{B}_{\text{СИ}} \longleftrightarrow \frac{1}{c} \mathbf{B}_{\text{СГС}}.$$

Дополнительная «магнитная» сила, пропорциональная $q\mathbf{v}$, не является новой фундаментальной силой природы. Существование силы, пропорциональной $q\mathbf{v}$, с необходимостью следует из принципа относительности и представляет собой релятивистское следствие закона Кулона. Таким образом, если \mathbf{F} – результирующая электромагнитная сила (сила Лоренца), действующая на заряд q , то мы можем записать

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \mathbf{F}_m.$$

Поскольку \mathbf{F}_m пропорциональна $q\mathbf{v}$, можно определить такую векторную величину \mathbf{B} – магнитную индукцию, что

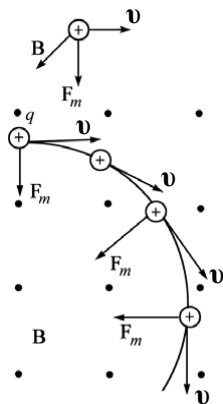
$$\mathbf{F}_m = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Как мы увидим дальше, происхождение термина «магнитная индукция» связано с тем, что изменение со временем именно этой величины порождает вихревое электрическое поле $\text{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$.

Поскольку сила, действующая со стороны магнитного поля, перпендикулярна вектору скорости, то элементарная работа этой силы всегда равна нулю ($\mathbf{F}_m \perp \mathbf{v}$, рис. 9.3):

$$\delta A_m = (\mathbf{F}_m, d\mathbf{r}) = (\mathbf{F}_m, \mathbf{v})dt = 0.$$

Рис. 9.3. Во внешнем магнитном поле индукцией \mathbf{B} (направлено на нас из-за плоскости рисунка) на положительно заряженную частицу, движущуюся со скоростью \mathbf{v} , действует магнитная составляющая силы Лоренца $\mathbf{F}_m = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$. Магнитная часть силы Лоренца подобна силе Кориолиса в механике (\mathbf{B} сопоставляется вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$). Сила \mathbf{F}_m действует лишь на движущийся заряд в направлении, перпендикулярном его скорости, и не совершает работы над зарядом, оставляя неизменной его энергию и меняя лишь направление импульса



Постоянное магнитное поле изменяет направление движения частицы, но не величину скорости. Магнитная часть силы Лоренца оставляет неизменной энергию заряда, а меняет лишь направление импульса. Соотношение

$$\mathbf{F}_m = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$$

позволяет в принципе произвести измерение вектора \mathbf{B} . Если при $\mathbf{v} = 0$ $\mathbf{F} = 0$, то, значит, в данной области пространства нет электрических полей. Затем ищется направление, при движении вдоль которого $\mathbf{F}_m = 0$, это направление совпадает или противоположно направлению вектора \mathbf{B} . Если направить движение частицы перпендикулярно данному направлению $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp$, то

$$\mathbf{F}_m = q[\mathbf{v}_\perp, \mathbf{B}],$$

откуда следует

$$\mathbf{B} = \frac{1}{qv_\perp^2} [\mathbf{F}_m, \mathbf{v}_\perp] \text{ заменил } \mathbf{B} = \frac{1}{qv_\perp^2} [\mathbf{F}_m, \mathbf{v}_\perp].$$

В поле индукцией 1 Тл на частицу с элементарным зарядом $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл будет действовать сила в $1,6 \cdot 10^{-19}$ Н, если компо-

нента скорости частицы, перпендикулярная вектору \mathbf{B} , равна $v_{\perp} = 1$ м/с. Однако в качестве практического способа измерения \mathbf{B} используются другие методы – определение максимального вращательного момента M_{\max} , действующего на контур с током в магнитном поле, или по величине потока вектора \mathbf{B} через замкнутый контур,

$$M_{\max} = p_m B,$$

где $p_m = IS$ – магнитный момент рамки с током (см. п. 9.12).

Формула Лоренца является одним из важнейших соотношений электродинамики. Она позволяет связать уравнения электромагнитного поля с уравнениями движения заряженных частиц:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

В вакууме, в постоянном однородном магнитном поле ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$) заряженная частица будет двигаться по винтовой линии. Составляющая скорости вдоль линий поля $\mathbf{v}_{\parallel} \uparrow \uparrow \mathbf{B}$ обеспечивает равномерное движение заряда по направлению силовых линий магнитного поля

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q[\mathbf{v}_{\parallel}, \mathbf{B}] = 0, \quad \mathbf{v}_{\parallel} = \text{const.}$$

Составляющая вектора скорости, перпендикулярная вектору $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}_{\perp}$, обеспечивает равномерное вращение по окружности. Радиус окружности определяется из условия

$$m \frac{v_{\perp}^2}{r} = qv_{\perp} B, \quad r = \frac{mv_{\perp}}{qB}.$$

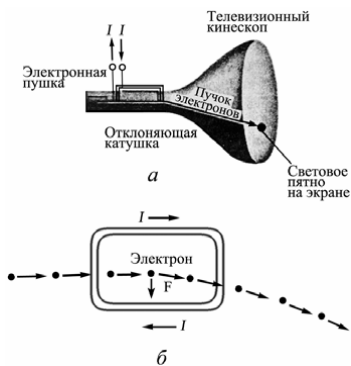
T и циклическая частота ω вращения частицы

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$$

не зависят ни от r , ни от v . Шаг винтовой линии равен Tv_{\parallel} .

Повседневное действие магнитной силы на движущийся заряд мы наблюдаем на телевизионном экране кинескопа. Движение пучка электронов по плоскости экрана стимулируется магнитным полем отклоняющей катушки. Если поднести постоянный магнит к плоскости экрана, то легко заметить его воздействие на электронный пучок по возникающим в изображении искажениям (рис. 9.4).

Рис. 9.4. Телевизионный кинескоп; показана катушка, отклоняющая пучок в вертикальном направлении (с другой стороны имеется точно такая же катушка) (а) и один из витков отклоняющей катушки (в увеличенном виде); между движущимся электроном и током, протекающим по нижней части витка, действует сила притяжения; между электроном и током, протекающим по верхней части витка, действует сила отталкивания (б). (Токи, идущие в одном направлении, притягиваются, в противоположных – отталкиваются. Заряд электрона – отрицательный)



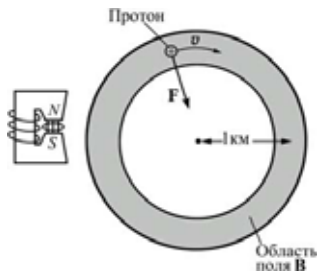
Рассмотрим ускоритель элементарных частиц, представляющий собой кольцевой магнит диаметром 2 км и создающий поле до 1,8 Тл; между полюсами этого магнита расположена тороидальная вакуумная камера. Если смотреть на ускоритель сверху (рис. 9.5), то пучок протонов движется по часовой стрелке со скоростью v , очень близкой к скорости света. Определим направление магнитного поля B и энергию протонов, когда B достигает значения 1,8 Тл.

На протон действует центростремительная сила, направленная к центру. Если поле \mathbf{B} направлено из плоскости чертежа, то вектор $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ всегда направлен к центру.

Центростремительная сила равна $F_{ц} = m_r(v^2/R)$, где m_r – релятивистская масса протона. Так как эта сила обусловлена действием магнитного поля, она равна $e v B$, где e – элементарный заряд. Таким образом,

$$m_r v^2 / R = e v B.$$

Рис. 9.5. Главное кольцо протонного синхротрона на энергию 500 ГэВ (вид сверху). Протоны движутся по часовой стрелке между полюсами магнита (магнит на рисунке схематично показан слева). Поле \mathbf{B} направлено из плоскости чертежа. Вектор \mathbf{F} указывает направление $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$



Поскольку $v \approx c$, заменим скорость v на скорость света c :

$$m_r c^2 = ecBR.$$

Левая часть этого равенства представляет собой полную релятивистскую энергию E ; тогда, подставляя в правую часть численные значения, находим

$$E = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,8 \cdot 10^3 = 8,64 \cdot 10^{-8} \text{ Дж} = 540 \text{ ГэВ}.$$

Заметим, что магнитное поле не меняет значений скорости или энергии частиц. Ускорение протонов осуществляется при каждом их обороте в кольце за счет электрического поля, которое действует на коротком участке кольца.

Пусть пучок протонов проходит через область скрещенных электрического и магнитного полей со скоростью $0,1c$ (рис. 9.6). Протоны движутся перпендикулярно силовым линиям за плоскость чертежа. На протоны действует электростатическая сила величиной $3 \cdot 10^{-13}$ Н.

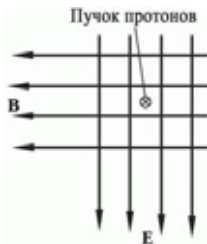


Рис. 9.6. Взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля (протоны движутся в направлении за плоскость чертежа)

Найдем, при каком отношении E/B результирующая сила, действующая на протоны, равняется нулю.

Определим также для случая свободного движения протонов направление и величину результирующей силы, действующей на частицы с зарядом e , которые движутся со скоростью $0,2c$. Устройства со скрещенными полями используются для селекции частиц, имеющих определенную скорость. Только такие частицы не будут отклоняться.

Поскольку

$$\mathbf{F}_{\text{рез}} = 0 = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}],$$

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Векторы \mathbf{v} и \mathbf{B} взаимно перпендикулярны и $E = vB$, откуда получаем $E/B = v$ – в системе СИ. В системе СГС, заменив B на B/c , имеем $E/B = v/c$:

$$E = \frac{F}{e} = \frac{3 \cdot 10^{-13} \text{ Н}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}} = 1,875 \cdot 10^6 \text{ Н/Кл},$$

$$B = \frac{E}{v} = \frac{1,875 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^7} = 0,0625 \text{ Тл} = 625 \text{ Гс.}$$

Положим $v = 2v_1$; $v_1 = 0,1c$; тогда

$$\mathbf{F}_{\text{рез}} = e\mathbf{E} + e[2\mathbf{v}_1, \mathbf{B}] = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}_1, \mathbf{B}] + e[\mathbf{v}_1, \mathbf{B}] = (0) + (-e\mathbf{E}).$$

В случае $v = 2v_1$ результирующая сила направлена вверх и равна

$$F_{\text{рез}} = 3 \cdot 10^{-13} \text{ Н.}$$

В общем случае во взаимно ортогональных однородных статических электрических и магнитных полях при $|\mathbf{E}| < |\mathbf{v} \times \mathbf{B}|$ существует класс движений заряженных частиц, для которых сила Лоренца обращается в нуль, – это движение с постоянной скоростью

$$\mathbf{v} = \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2} + v_0 \frac{\mathbf{B}}{B},$$

где скорость v_0 – произвольна.

Скорость $\mathbf{v}_d = [\mathbf{E}, \mathbf{B}]/B^2$ называют скоростью дрейфа заряженных частиц в скрещенных \mathbf{E} - и \mathbf{B} -полях. При найденной скорости \mathbf{v}_d , в соответствии с преобразованиями Лоренца в инерциальных системах для электромагнитного поля, электрическое поле обращается в нуль.

9.3. Сила Ампера

Рассмотрим проводник с током, размещенный в магнитном поле. Ток представляет совокупность зарядов q , двигающихся направленно со скоростью \mathbf{v} . Концентрация зарядов равна n . Плотность тока равна $\mathbf{j} = q\mathbf{v}n$. На объем проводника dV со стороны магнитного поля действует сила, равная сумме магнитных составляющих сил Лоренца по всей совокупности зарядов ndV :

$$d\mathbf{F} = nq[\mathbf{v}, \mathbf{B}]dV = [\mathbf{j}, \mathbf{B}]dV.$$

Рассмотрим тонкий проводник площадью поперечного сечения S , длиной dl , объемом $dV = Sdl$. В этом случае

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{j}, \mathbf{B}]dl \cdot S = [\mathbf{j}Sdl, \mathbf{B}] = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

Здесь вектор $d\mathbf{l}$ задается равенством $\mathbf{j}Sdl = I d\mathbf{l}$ и по направлению совпадает с направлением тока.

Формула, определяющая действие силы на бесконечно малый элемент проводника с током, помещенного в магнитное поле, была установлена Ампером, а эта сила носит название силы

Ампера. Сила Ампера направлена перпендикулярно векторам $d\mathbf{l}$ и \mathbf{B} таким образом, что вращение вектора $d\mathbf{l}$ к \mathbf{B} на наименьший угол, наблюдаемое со стороны конца вектора $d\mathbf{F}$, происходит против часовой стрелки или может быть задано правилом левой руки: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входили силовые линии магнитного поля, а четыре пальца направить вдоль проводника по току, то отведенный большой палец укажет направление силы Ампера (рис. 9.7).

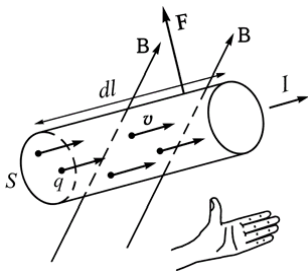


Рис. 9.7. Действие силы Ампера \mathbf{F} на проводник с током определяется суммарным действием сил Лоренца на отдельные заряды, движущиеся в проводнике, направление силы задается правилом левой руки

На провод конечной длины l действует сила, определяемая геометрической суммой сил, действующих на все участки проводника:

$$\mathbf{F} = I \int [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (1)$$

Экспериментально действие силы Ампера можно наблюдать по отклонению проводника, расположенного между полюсами магнита при пропускании тока по проводнику. Проводник втягивается или выталкивается из пространства между полюсами, в зависимости от направления тока, рис. 9.8. Если провод отклоняется влево, то можно ожидать, поскольку действие равно

противодействию, что сам магнит испытывает толчок вправо. (Последнее предположение, вообще говоря, неверно для электромагнитных сил.) Иными словами, если по проволоке протекает ток, то возникает сила, действующая со стороны проволоки на магнит.

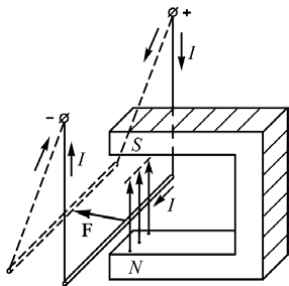


Рис. 9.8. Отклонение проводника с током в магнитном поле под действием силы Ампера $\mathbf{F} = I[\mathbf{l}, \mathbf{B}]$

Это впервые обнаружил в своих опытах датский физик и философ Х.К. Эрстед в 1820 г. В своей брошюре «Опыты, относящиеся к действию электрического конфликта на магнитную стрелку» Эрстед сообщает, что если вдоль способной свободно вращаться магнитной стрелки разместить проводник, то при прохождении тока по проводнику стрелка изменяет свою первоначальную ориентацию и устанавливается перпендикулярно проводу.

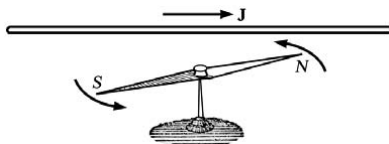


Рис. 9.9. Опыт Эрстеда по действию проводника с током на магнитную стрелку

При изменении направления тока стрелка разворачивается на 180° (рис. 9.9). То же происходит, если переместить проводник с током под стрелку. В опытах Эрстеда была впервые установлена связь между электрическими и магнитными явлениями.

9.4. Магнитное поле постоянного тока. Закон Био – Савара – Лапласа

На основе своих опытов по действию тока на магнитную стрелку Эрстед пришел к правильному заключению, что это воздействие связано с возникновением в пространстве вокруг проводника с током вихревого магнитного поля. Причиной возникновения магнитного поля являются в конечном итоге движущиеся заряды. Экспериментально действие элемента тока на магнитный полюс было изучено Ж.Б. Био (1774–1862) и Ф. Саваром (1791–1841), о чем они сделали доклад 30 октября 1820 г. П Лаплас (1749–1827) облек закон Био – Савара в математическую форму взаимодействия между элементом тока и намагниченной точкой. Закон, определяющий индукцию магнитного поля $d\mathbf{B}$ элементарного отрезка тока $I d\mathbf{l}$ на расстоянии \mathbf{r} от него, называют законом Био – Савара – Лапласа:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Модуль вектора $d\mathbf{B}$ равен

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl,$$

где α – угол между векторами $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} .

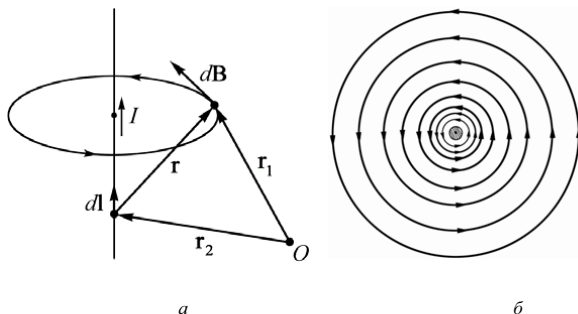


Рис. 9.10. Вычисление индукции магнитного поля $d\mathbf{B}$ от элемента с током $I d\mathbf{l}$.

Закон Био – Савара – Лапласа: $d\mathbf{B} \sim \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]$, $d\mathbf{B} \perp \mathbf{r}$, $d\mathbf{B} \perp \mathbf{r}$, $d\mathbf{B} \perp \mathbf{r}$, $d\mathbf{B} \perp \mathbf{r}$ (а); силовые линии

магнитного поля прямого тока (б), ток течет из-за плоскости чертежа где μ_0 – магнитная постоянная, определяемая выбором системы единиц и равная в СИ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м = $1,2566370614 \cdot 10^{-6}$ Гн/м. При удалении от элемента $I d\mathbf{l}$ вдоль полупрямой r , проведенной из этого элемента, напряженность его поля убывает $\sim r^{-2}$. Направление поля перпендикулярно плоскости, проведенной через векторы $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} , и имеет вид концентрических окружностей (рис. 9.10). Направление силовых линий магнитного поля определяется правилом правой руки. Это правило демонстрируется на рис. 9.11. Большой палец правой руки ориентируют в направлении тока, тогда остальные пальцы в согнутом положении укажут направление силовых линий магнитного поля \mathbf{B} . Силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические окружности, в центре которых находится проводник с током. Из рис. 9.11, а видно, что поле \mathbf{B} в точке, в которой находится заряд q , направлено за плоскость чертежа, а векторное произведение $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ направлено влево и указывает направление \mathbf{F}_m – магнитной составляющей силы Лоренца. Поскольку постоянные токи всегда текут по замкнутым контурам, то формула для $d\mathbf{B}$ является вспомогательной и не допускает прямой проверки на опыте. Но после интегрирования

$$\mathbf{B} = \int_{(L)} d\mathbf{B}$$

она дает правильный результат для всей цепи, допускающий непосредственную опытную проверку. Причем здесь опять использован тот подтверждаемый на опыте факт, что и для магнитного поля справедлив принцип суперпозиции – индукция магнитного поля в данной точке пространства равна геометрической сумме индукций полей от всех имеющихся источников.

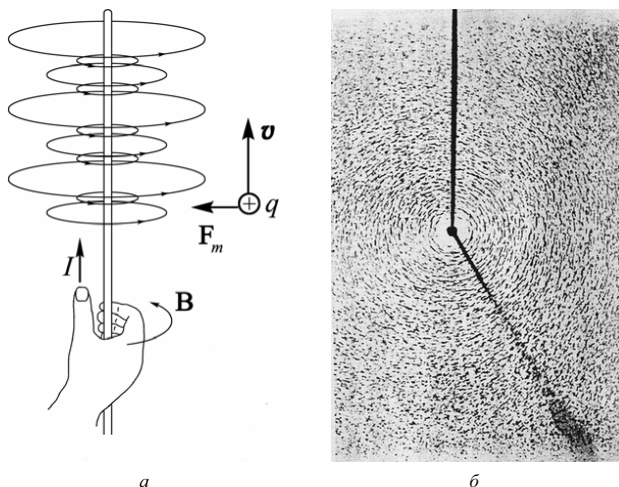


Рис. 9.11. Иллюстрация правила правой руки (а); показаны силовые линии магнитного поля \mathbf{B} , создаваемого прямолинейным током; точечный заряд q , движущийся со скоростью \mathbf{v} параллельно проводу с током I , притягивается к нему; фото железных опилок, рассыпанных вблизи длинного прямолинейного проводника с током; при включении тока железные опилки ведут себя подобно маленьким магнетикам, располагаясь вдоль силовых линий магнитного поля (б).

Закон Био – Савара – Лапласа удобен для расчета постоянных или квазистационарных магнитных полей и относится к области магнитостатики – особым случаям движения большого числа зарядов со скоростью, много меньшей скорости света. Поток зарядов считается постоянным, если плотность тока не меняется со временем и в уравнениях можно отбросить слагаемые, пропорциональные $\partial \mathbf{B} / \partial t$ и $\partial \mathbf{E} / \partial t$.

Пусть ток I течет по окружности радиусом R . В любой точке A , лежащей на оси окружности на расстоянии a от плоскости окружности, индукция магнитного поля равна (рис. 9.12)

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}.$$

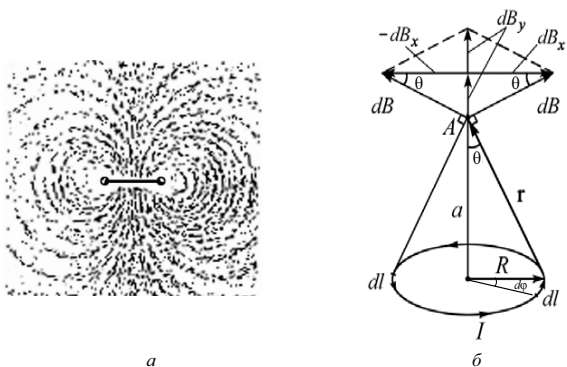


Рис. 9.12. Силовые линии магнитного поля кругового тока – опыт с железными опилками (а); вычисление индукции магнитного поля на оси кольца с током. $d\mathbf{B} \perp \mathbf{r}$ (б)

В силу симметричного расположения элементов с током по кольцу сумма составляющих dB_x (параллельных плоскости кольца) равна нулю $\left(B \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0 \right)$ (рис. 9.12), следовательно, $B_x = 0$. Поэтому полная величина вектора \mathbf{B} на оси кольца совпадает с составляющей B_y .

$$dB_y = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl \cdot \frac{R}{r},$$

где $\alpha = \pi/2$ – угол между векторами $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} (на рисунке не показан), $r = (a^2 + R^2)^{1/2}$. Интегрируя по всей окружности $\int_{(L)} dl = 2\pi R$,

находим составляющую вектора индукции, перпендикулярную плоскости кольца с током:

$$B_y = \frac{\mu_0 IR^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}}.$$

В центре кругового витка с током ($a = 0$)

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

При больших расстояниях до кольца $a \gg R$, модуль вектора индукции убывает пропорционально кубу расстояния

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2a^3}.$$

Магнитное поле кругового витка ведет себя аналогично полю электрического диполя, рассмотренного нами в п. 2.4.1. На больших расстояниях от источника силовые линии поля \mathbf{E} электрического диполя и силовые линии поля \mathbf{B} , создаваемого замкнутой петлей с током, имеют одинаковую форму (рис. 9.13). Петля с током ведет себя подобно магнитному диполю.

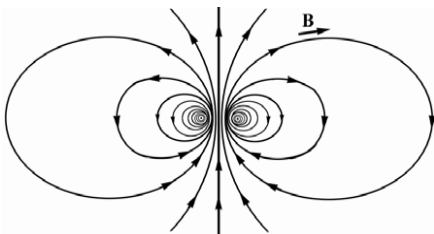


Рис. 9.13. Магнитное поле \mathbf{B} , создаваемое зарядом, движущимся по круговому контуру

Магнитное поле Земли представляет собой поле магнитного диполя. Предполагая, что оно создается кольцевым током, текущим в плоскости экватора на расстоянии $R = 5000$ км от центра Земли, определим величину этого тока, если вблизи магнитного полюса Земли $B \approx 1 \text{ Гс} \approx 10^{-4} \text{ Тл}$.

Для этого решим уравнение $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}$ относительно I :

$$I = \frac{2Br^3}{\mu_0 R^2}.$$

Расстояние от кольцевого тока до магнитного полюса равно $r = \sqrt{R^2 + a^2} = 8040$ км, где $a = R_3 = 6300$ км – радиус Земли и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Подставляя эти величины в приведенную выше формулу, получаем

$$I = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot (8,04 \cdot 10^6)^3}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (5 \cdot 10^6)^2} = 3,3 \cdot 10^9 \text{ А.}$$

Таким образом, в недрах Земли в плоскости экватора должен протекать ток, превышающий миллиард ампер. У геофизиков есть объяснение возможности существования такого тока.

Вычислим величину индукции магнитного поля прямолинейного проводника с током I длиной L в точке A , расположенной на расстоянии R от середины проводника. Вектор магнитной индукции $d\mathbf{B}$ от элемента с током $d\mathbf{l}$ имеет одну составляющую, перпендикулярную плоскости векторов \mathbf{r} и $d\mathbf{l}$ и направленную вдоль оси y (рис. 9.14):

$$dB_y = d\mathbf{B}_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin(\mathbf{dl}, \mathbf{r})}{r^2}.$$

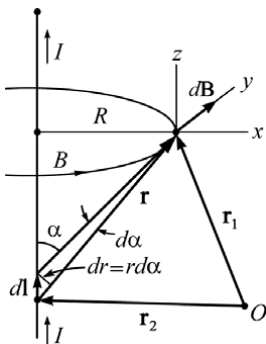


Рис. 9.14. Вычисление индукции магнитного поля \mathbf{B} для элемента $d\mathbf{l}$ прямолинейного проводника с током I . Ось y направлена перпендикулярно плоскости страницы.

$$\mathbf{r}_2 + \mathbf{r} = \mathbf{r}_1; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

Поскольку $dr = r d\alpha$, $R/r = \sin\alpha$, $dr/dl = \sin\alpha$, где $\alpha = (\mathbf{dl}, \mathbf{r})$, находим

$$\left(\cos\alpha_1 = \frac{L/2}{\sqrt{R^2 + L^2/4}}, \quad \alpha_2 = \pi - \alpha_1, \text{ т.е. } \cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1 \right)$$

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cos \alpha_1.$$

Для бесконечно длинного проводника $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\cos \alpha_1 \rightarrow 1$, индукция магнитного поля вблизи середины проводника $R \ll L/2$ равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Силовые линии вектора \mathbf{B} вокруг прямолинейного проводника с током представляют концентрические окружности, плоскость которых перпендикулярна току, и направление силовых линий составляет с направлением тока правовинтовую систему (рис. 9.10, б и 9.11, а).

9.5. Теорема о циркуляции

Из закона Био – Савара – Лапласа можно получить локальное и интегральное соотношения, связывающие вектор \mathbf{B} с источником поля – плотностью тока в статическом случае $\partial\rho/\partial t = 0$, неизменного магнитного и электрического полей.

Воспользуемся соотношением $\mathbf{j}dV = Id\mathbf{l}$, где $dV = Sdl$ – элемент объема с плотностью тока \mathbf{j} , направленного вдоль элемента $d\mathbf{l}$. В этом случае закон Био – Савара – Лапласа можно переписать в виде

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{r}]}{r^3} dV.$$

Полное поле найдем интегрированием полученного выражения по всем элементам пространства V с токами \mathbf{j} :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{r}]}{r^3} dV.$$

Выполним операцию rot над вектором \mathbf{B} , воспользовавшись равенством

$$\text{rot}[\mathbf{A}, \mathbf{D}] = \mathbf{A} \text{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \text{div} \mathbf{A} + (\mathbf{D}, \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{D}.$$

Получим

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\mathbf{j} \text{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \text{div} \mathbf{j} \right] dV.$$

Для квазистационарных токов $\operatorname{div} \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t = 0$ ($\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$) и второе слагаемое в интеграле равно нулю. В первом слагаемом преобразуем сомножитель с дивергенцией, воспользовавшись теоремой Гаусса для точечного заряда в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{где } \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

получаем

$$\operatorname{div} \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = 4\pi \frac{\rho}{q}.$$

Окончательно имеем, взяв достаточно малый объем, окружающий ток \mathbf{j} :

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \int_{(V)} \mathbf{j} \frac{\rho}{q} dV = \mu_0 \mathbf{j} \frac{1}{q} \int \rho dV = \mu_0 \mathbf{j} \frac{1}{q} q = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Соотношение

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

называется теоремой о циркуляции магнитного поля в дифференциальной форме.

Если проинтегрировать данное соотношение по поверхности S , натянутой на контур L , окружающий область пространства с плотностью тока \mathbf{j} , получим

$$\int_{(S)} (\operatorname{rot} \mathbf{B}, d\mathbf{S}) = \oint_{(L)} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu_0 \int_{(S)} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \mu_0 I.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Стокса

$$\oint_{(L)} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \int_{(S)} (\operatorname{rot} \mathbf{B}, d\mathbf{S}),$$

позволяющей связать контурный и поверхностный интегралы.

Таким образом, циркуляция вектора \mathbf{B} по замкнутому контуру равна полному току, находящемуся внутри этого контура, умноженному на постоянную μ_0 :

$$\oint_{(L)} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu_0 I.$$

В тех областях пространства, где нет токов, циркуляция вектора магнитной индукции по любому замкнутому контуру

$\oint_L (\mathbf{B}, d\mathbf{l})$ равна нулю. В таких областях магнитное поле потенциально, но условие потенциальности окажется нарушенным в областях, где текут электрические токи.

В магнитоэлектростатике теорема о циркуляции магнитного поля играет роль, аналогичную теореме Гаусса в электростатике. При наличии определенной симметрии теорема о циркуляции позволяет просто рассчитать индукцию магнитного поля проводников с током.

Рассмотрим бесконечный прямолинейный проводник с током I . Выберем замкнутый контур L в виде концентрической окружности радиуса r центром на проводнике. В любой точке этой окружности вектор \mathbf{B} постоянен по величине и параллелен элементу дуги окружности. Это позволяет легко вычислить интеграл

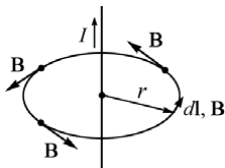
$$\oint_L (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I.$$

Откуда получаем ранее найденный непосредственным интегрированием результат для индукции магнитного поля от бесконечно длинного ($L \gg 2r$) проводника с током I (рис. 9.15):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Рис. 9.15. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля $\oint (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu_0 I$ позволяет легко

рассчитать величину B от бесконечного проводника с током $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



Последнее уравнение часто используется для определения единицы силы тока – ампера. На расстоянии в 1 м ток в 1 А, проходя по бесконечно длинному проводнику, создает магнитное поле индукцией $2 \cdot 10^{-7}$ Тл.

Пусть в стержне радиусом R течет ток I с однородной плотностью \mathbf{j} . Полный ток $I = \pi R^2 j$. Найдём распределение магнитного поля \mathbf{B} внутри и снаружи стержня. Поскольку проводник имеет конечный радиус, отличный от нуля, можно воспользоваться теоремой о циркуляции. При $r \leq R$ (внутри стержня) имеем

$$\oint_L (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_S j dS = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \pi r^2$$

– интегрирование выполнено по контуру, показанному на рис. 9.16 штриховой линией (но при $r \leq R$). Получаем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r, \quad r \leq R$$

– внутри стержня магнитное поле линейно нарастает от центра к поверхности стержня.

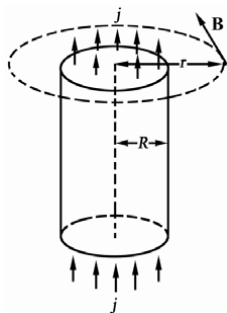


Рис. 9.16. По стержню радиусом R протекает однородный ток с плотностью j . Контурный интеграл берется по окружности радиусом r (показана штриховой линией)

Вне стержня

$$\oint_L (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_S j dS = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

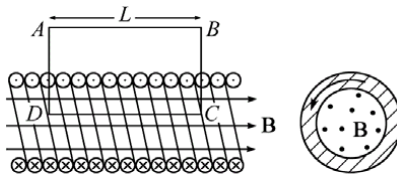
– магнитное поле оказывается таким, как если бы полный ток протекал по оси стержня, и величина вектора индукции магнитного поля определяется как индукция от бесконечно длинного проводника с током (п. 9.4).

В полой проводнике радиусом R магнитное поле отсутствует.

В качестве еще одного примера рассчитаем магнитное поле внутри длинного соленоида – полой катушки, на поверхность которой намотана виток к витку проволока (рис. 9.17). В качестве контура обхода выберем прямоугольник со сторонами AB , CD , параллельными оси соленоида. В достаточно длинном соленоиде силовые линии вектора \mathbf{B} параллельны его оси, поэтому циркуляция вектора \mathbf{B} на сторонах AD и BC равна нулю. В результате имеем

$$\overline{AB} \cdot 0 + \overline{CD} \cdot B = \overline{CD} \cdot n \cdot \mu_0 \cdot I.$$

Рис. 9.17. Магнитное поле соленоида. $ABCD$ – контур интегрирования в теореме о циркуляции



Здесь учтено, что если удалить сторону \overline{AB} на бесконечность от оси соленоида, то там магнитное поле будет отсутствовать, поскольку поле от витка убывает пропорционально кубу расстояния до витка, а число витков нарастает пропорционально первой степени линейных размеров соленоида. В результате получаем

$$B = \mu_0 I n,$$

где n – число витков на единицу длины соленоида. Величина магнитного поля не зависит от положения внутри соленоида, так как отрезок CD не обязательно должен лежать на оси соленоида.

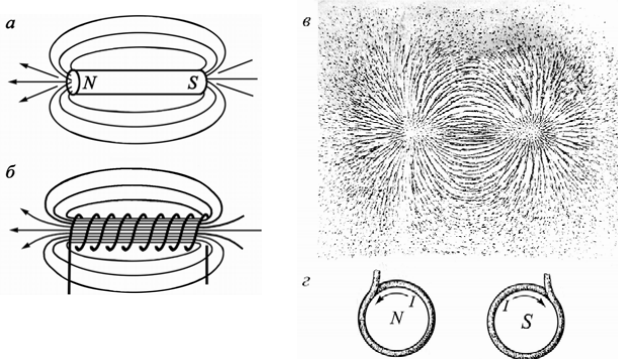


Рис. 9.18. Силовые линии поля \mathbf{B} : a – для намагниченного стержня; b – для соленоида той же формы; v – магнитные силовые линии можно «видеть», рассыпав железные опилки на листе бумаги, помещенной над магнитом. Опилки стремятся вытянуться вдоль силовых линий; z – магнитные полюсы соленоида

В соленоиде конечных размеров поле у конца соленоида расходуется и возвращается в соленоид с другой его стороны, это в точности совпадает с полем магнитного стержня (рис. 9.18).

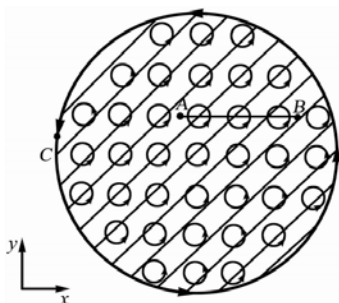


Рис. 9.19. Схематическая диаграмма циркулирующих атомных токов в поперечном сечении железного стержня, намагниченного в направлении оси z

Поэтому следует ожидать, что поле магнитного куска железа также создают некоторые внутренние токи, постоянно существующие внутри магнитных материалов. В случае железа эти токи создаются электронами, вращающимися вокруг собственных осей. Каждый электрон имеет такой собственный магнитный момент, который соответствует крошечному циркулирующему току. Поскольку электронов в железе огромное количество и железо так устроено, что в нем имеется большое число электронов, вращающихся в одном направлении, то возникает суммарный эффект, эквивалентный появлению тока, циркулирующего по поверхности магнита (рис. 9.19). Поэтому магнитный стержень эквивалентен соленоиду. Это очень важный результат, поскольку в уравнения, описывающие магнитные поля, нет нужды вводить дополнительные источники полей, связанные с магнитами, достаточно лишь слагаемых, учитывающих наличие токов.

9.6. Магнитное взаимодействие токов. Закон Ампера

В опытах Х.К. Эрстеда было установлено, что вокруг проводника с током возникает магнитное поле, обнаруженное им по действию на магнитную стрелку (рис. 9.9). Стрелка сама подобна маленькому соленоиду и может рассматриваться как катушка, по которой течет круговой ток (рис. 9.18, б). Поэтому можно рассматривать взаимодействие прямолинейного проводника, по которому течет ток, с магнитной стрелкой как взаимодействие магнитных полей, созданных электрическими токами. Магнитное взаимодействие токов обнаружил и исследовал в сентябре – октябре 1820 г. великий французский физик Андре Мари Ампер. Ампер впервые ввел в употребление такие понятия, как электрический ток, электрическая цепь, установил направление тока в замкнутой цепи, ввел термин «гальванометр» для прибора, фиксирующего прохождение тока по цепи. Наименование силы тока «Ампер» является поэтому вполне оправданным.

В своих опытах (рис. 9.20, 9.21) Ампер установил, что сила $d\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$, действующая со стороны одного элементарного отрезка тока $I_1 d\mathbf{l}_1$ на другой $I_2 d\mathbf{l}_2$, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между ними \mathbf{r}_{12} и равна

$$d\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} [d\mathbf{l}_1, [d\mathbf{l}_2, \mathbf{r}_{12}]].$$

Величина силы взаимодействия между двумя прямолинейными отрезками токов равна

$$\Delta F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 \Delta l_1 \Delta l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{r_{12}^2}.$$

Радиус-вектор \mathbf{r}_{12} направлен от тока I_1 к току I_2 , отрезки Δl_1 и Δl_2 направлены в сторону текущих токов I_1 и I_2 , θ_1 – угол между Δl_1 и \mathbf{r}_{12} , θ_2 – угол между Δl_2 и перпендикуляром \mathbf{n} к плоскости S , содержащей Δl_1 и \mathbf{r}_{12} . Вектор \mathbf{n} направлен в сторону поступательного движения буравчика, вращаемого от Δl_1 и \mathbf{r}_{12} (рис. 9.14).

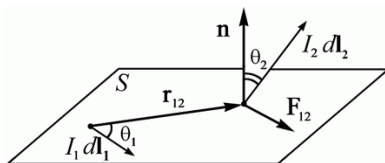


Рис. 9.20. Магнитное взаимодействие токов. Закон Ампера

Сила взаимодействия элементов тока не является центральной: направление $d\mathbf{F}_{12}$ не совпадает с прямой, соединяющей элементы токов $d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2$. Эта сила перпендикулярна $d\mathbf{l}_2$ и лежит в плоскости S . Направление силы определяется правилом буравчика: при вращении буравчика от \mathbf{r}_{12} к \mathbf{n} поступательное движение буравчика укажет направление $d\mathbf{F}_{12}$. Сила, с которой второй элемент с током действует на первый $d\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$, выражается формулой (рис. 9.21):

$$d\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{21}^3} [d\mathbf{l}_2, [d\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_{21}]].$$

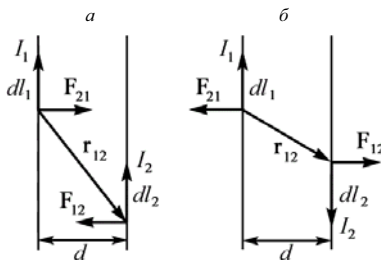


Рис. 9.21. Взаимодействие бесконечно малых элементов $d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2$ параллельных токов I_1 и I_2 : a – токи, текущие в одном направлении притягиваются; b – токи, текущие в разных направлениях, отталкиваются

По абсолютной величине силы $d\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ и $d\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ равны, но в общем случае при произвольно ориентированных отрезках токов $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$ направления $d\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ и $d\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ не лежат на одной прямой и не удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия. Это связано с тем, что входящие в формулы для расчета сил Ампера элементы тока $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$ являются лишь частями замкнутых электрических контуров, поскольку ток может течь лишь по замкнутой цепи. Полные силы взаимодействия для замкнутых контуров равны по величине и противоположно направлены $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, в согласии с третьим законом Ньютона.

Из закона Ампера следует, что два параллельных прямых провода с токами I_1 и I_2 , расположенными на расстоянии d , притягиваются или отталкиваются с силой на единицу длины, равной

$$\frac{F_{1 \rightarrow 2}}{l} = \frac{F_{2 \rightarrow 1}}{l} = \pm \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}.$$

Здесь знак «плюс» соответствует параллельным и «минус» – антипараллельным токам. Полученное соотношение непосредственно

венно следует из формулы для силы магнитного взаимодействия тока I_2 с постоянным вдоль $d\mathbf{l}$ магнитным полем \mathbf{B}_1 (см. п. 9.3)

$$\mathbf{F} = \int I_2 [d\mathbf{l}, \mathbf{B}_1], \quad F = I_2 B_1 l,$$

созданным бесконечным прямолинейным проводником с током длиной l на расстоянии d от него ($l \gg d$):

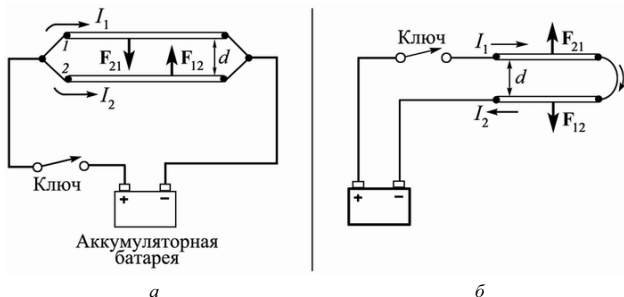


Рис. 9.22. Близко расположенные два незаряженных проводника при включении батареи притягиваются (а) или отталкиваются (б) в зависимости от того, текут ли в них токи в одном или противоположном направлениях. По величине силы отталкивания или притяжения, действующей на единицу длины проводника,

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

можно определить силу тока, идущего по проводникам. При $I_1 = I_2 = 1$ А, $d = 1$ м $F = 2 \cdot 10^{-7}$ Н/м

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}.$$

После подстановки B_1 в формулу для F получаем

$$\frac{F}{l} = \frac{F_{1 \rightarrow 2}}{l} = \frac{F_{2 \rightarrow 1}}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}.$$

Данное соотношение используется для определения единицы силы электрического тока в СИ. Силе неизменяющегося тока в 1 ампер соответствует ток, при прохождении которого по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии одного метра, соответ-

ствует сила магнитного взаимодействия на каждый метр длины проводников, равная $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

Таким образом, на основе закона Ампера устанавливается эталон единицы силы тока в СИ.

9.7. Относительность электрического и магнитного полей

Рассмотрим, что происходит с точки зрения наблюдателей в различных системах отсчета при магнитном взаимодействии проводников с током. Пусть имеется проводник с током I , средняя скорость направленного движения электронов в котором равна v . Относительно проволоки движется электрон, представляющий второй элементарный ток, также со скоростью v . С точки зрения наблюдателя, покоящегося относительно проволоки, при прохождении тока по проволоке вокруг нее возникает магнитное поле

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d},$$

которое действует на движущийся заряд с силой

$$F = evB = \frac{ev \cdot \mu_0 I}{2\pi d},$$

соответствующей магнитному взаимодействию тока I с элементарным током ev (рис. 9.23, а).

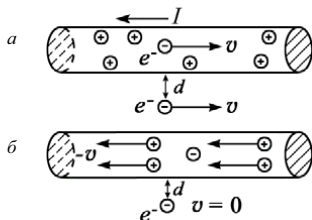


Рис. 9.23. Проводник с током I , обусловленным движением электронов со скоростью v вправо (а) с точки зрения неподвижного наблюдателя; с точки зрения наблюдателя, движущегося с электроном со скоростью v вправо (б). Действие магнитного поля на заряд – релятивистский эффект

Перейдем в систему отсчета, связанную с подвижным зарядом. В этой системе отсчета заряд покоится $v = 0$, а на неподвижный заряд сила со стороны магнитного поля не действует (рис. 9.23, б). Но характер протекания физических явлений не должен зависеть от выбора инерциальной системы отсчета. Поэтому притяжение заряда к проволоке должно сохраниться. Относительно инерциальной системы отсчета, связанной с зарядом,

проводник движется со скоростью $-v$ влево, при этом оказывается, что проводник уже не является электрически нейтральным.

Действительно, проводник испытывает лоренцево сокращение длины в направлении своего движения в $\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз, так что длина подвижного проводника равна $L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Однако полный электрический заряд не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. В частности, если плотность положительных зарядов равна в системе отсчета, связанной с проводником, ρ_0^+ , то в системе отсчета, связанной с подвижным зарядом, она будет равна ρ^+ , при этом в силу сохранения заряда имеем

$$\rho_0^+ S L_0 = \rho^+ S L_0 \sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Здесь S – поперечного сечения; L_0 – длина покоящегося проводника. Плотность положительных зарядов в движущемся проводнике возрастает

$$\rho^+ = \frac{\rho_0^+}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

С отрицательным зарядом все наоборот. В исходной системе отсчета отрицательный заряд двигался вправо со скоростью v и имел плотность ρ_0^- , в новой системе отсчета, связанной с зарядом, отрицательные заряды покоятся и имеют меньшую плотность ρ^- . Используя условие сохранения заряда, можем записать:

$$\rho_0^- S L_0 \sqrt{1-v^2/c^2} = \rho^- S L_0.$$

Откуда следует

$$\rho^- = \rho_0^- \sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Поскольку неподвижная проволока было электрически нейтральна, то имеем $\rho_0^+ + \rho_0^- = 0$, и, соответственно, $-\rho_0^- = \rho_0^+ = \rho_0$. Для наблюдателя, относительно которого проволока движется, она уже не является электрически нейтральной, а обладает зарядом плотностью

$$\rho = \rho^+ + \rho^- = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \rho_0 \sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{\rho_0 \cdot v^2 / c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Соответственно, линейная плотность заряда и напряженность электрического поля заряженной проволоки равны

$$\lambda = \rho S, \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d},$$

где d – расстояние до проволоки. Проволока с излишним положительным зарядом притягивает к себе электрон с силой ($\rho_0 v \cdot S = I$)

$$F' = E \cdot e = \frac{\rho_0 v^2 e \cdot S}{2\pi\epsilon_0 c^2 d \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{Iev}{2\pi\epsilon_0 c^2 d \sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Для наблюдателя в системе отсчета, связанной с проволокой, эта сила равна $F = F' \sqrt{1-v^2/c^2}$:

$$F = \frac{Iev}{2\pi\epsilon_0 c^2 d}.$$

Полученная сила электрического взаимодействия между проволокой и зарядом равна силе магнитного действия тока на подвижный заряд при условии, что $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1} = c^2$ – величина, обратная произведению диэлектрической и магнитной постоянной, равна квадрату скорости света – и это действительно соответствует опыту и является одним из фундаментальных следствий электродинамической теории, созданной Максвеллом.

Оказывается, независимо от того, анализируем ли мы движение заряда в системе покоя проволоки или в системе покоя частицы, получается один результат. В первом случае сила была чисто «магнитной», во втором – чисто «электрической». В системе отсчета, двигающейся со скоростью, промежуточной между нулем и v , в наличии бы были оба поля **E** и **B**, которые составляют части одного физического явления – электромагнитного взаимодействия частиц. Разделение этого взаимодействия на электрическую и магнитную части зависит от выбора системы отсчета для описания взаимодействия.

9.8. Релятивистское преобразование величин **B** и **E**

Покажем, что с точки зрения движущихся наблюдателей поля **B** и **E** переходят друг в друга. Физически их следует рассматривать как единое поле, которое называется электромагнитным.

Электромагнитное поле имеет шесть компонент: E_x, E_y, E_z, B_x, B_y и B_z , которые «перемешиваются» между собой при измерении движущимся наблюдателем. С этой точки зрения система единиц СГС более разумна, поскольку компоненты единого физического поля должны, по меньшей мере, измеряться в одних и тех же единицах.

Рассмотрим два примера преобразования полей. В первом случае возьмем лабораторную систему без магнитного поля $\mathbf{B} = 0$. При этом могут существовать покоящиеся заряды и электрическое поле \mathbf{E} . Оказывается, что движущийся наблюдатель «видит» магнитное поле $\mathbf{B}' = (\mathbf{v}'/c^2) \times \mathbf{E}'$, где \mathbf{v}' – скорость движения зарядов в штрихованной системе отсчета. Рассмотрим заряженный проводник, который покоится в лабораторной системе. В любой точке $\mathbf{B} = 0$, а $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 y$ в некоторой точке P (рис. 9.24). Теперь предположим, что наблюдатель X' движется со скоростью \mathbf{v} , как показано на рисунке. Он измерит ток $I' = \lambda'v$, текущий влево, где λ' – плотность заряда в проводнике в штрихованной системе отсчета. Магнитное поле для наблюдателя X' от тока $I = \lambda'v$ равно

$$B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} = \frac{\mu_0 (\lambda'v)}{2\pi y}.$$

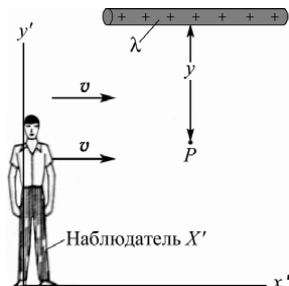


Рис. 9.24. Заряженный проводник неподвижен в лабораторной (нештрихованной) системе отсчета

Поскольку $\frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 y} = E'$, из этого выражения получаем, что магнитное поле в штрихованной системе отсчета можно записать в виде ($\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$):

$$B' = \frac{1}{c^2} v E'$$

или в векторной форме

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}', \mathbf{E}'],$$

где \mathbf{v}' – скорость источника в штрихованной системе отсчета. Этот результат не зависит от природы источника, если преобразованное

локальное поле в точке P определяется однозначно. В общем случае справедливо утверждение, что если система зарядов движется как целое со скоростью \mathbf{v} , то возникает магнитное поле

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, \mathbf{E}] \quad (\text{все заряды движутся с одинаковыми скоростями}).$$

Штрихи опущены, поскольку речь идет о движущихся зарядах в нештрихованной системе отсчета. В системе СГС при наличии движущихся зарядов $B/E = v/c$ и, если заряды движутся со скоростью, близкой к скорости света, электрическое и магнитное поля почти совпадают друг с другом.

Пусть на каждый метр длины стержня радиусом R приходится по поверхностный заряд Q_1 . Стержень движется вправо со скоростью v_0 (рис. 9.25). Найдем E и B вблизи поверхности стержня. При движении стержня линейная плотность заряда равна $\lambda = \gamma Q_1$, где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$. Напряженность электрического поля при этом равна

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\gamma Q_1}{R}.$$

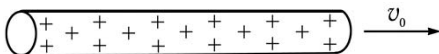


Рис. 9.25. Стержень с поверхностным зарядом, движущийся вправо со скоростью v_0 . Когда стержень покоится, заряд на единицу длины стержня равен Q_1

Используя релятивистское соотношение между B и E , находим

$$B = \frac{v_0}{c^2} E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \gamma \frac{v_0 Q_1}{R}.$$

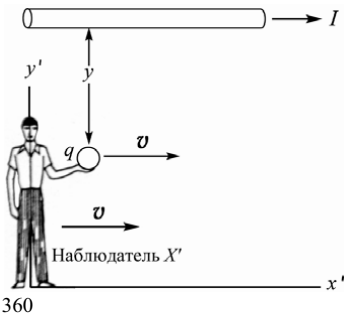


Рис. 9.26. По неподвижному незаряженному проводнику течет ток I , за которым наблюдает наблюдатель X' , движущийся со скоростью v

Рассмотрим противоположную ситуацию, когда в лабораторной системе отсчета в любой точке пространства $\mathbf{E} = 0$. Пусть источником поля является незаряженный проводник, в котором течет ток I (рис. 9.26). Движущийся наблюдатель X' обнаружит у проводника отрицательный заряд. Если в его руке находится заряд q , то сила, действующая на этот заряд, дается выражением (п. 9.7)

$$F' = \frac{qv\gamma I}{2\pi\epsilon_0 c^2 y},$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$.

Разделив обе части выражения для F' на q , получим

$$E' = v \frac{\gamma I}{2\pi\epsilon_0 c^2 y}.$$

Магнитное поле на расстоянии y от прямолинейного проводника с током равно

$$B' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi y}.$$

Поле B' направлено за плоскость (рис. 9.26).

Поскольку $I' = \gamma I$, получаем

$$B' = \frac{\mu_0 \gamma I}{2\pi y}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}' = -[\mathbf{v}', \mathbf{B}'],$$

где \mathbf{v}' – скорость проводника с током, измеренная в штрихованной системе отсчета.

Локальные преобразования поля являются однозначными, и для любого тока справедливо соотношение:

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}] \text{ (проводник с током движется со скоростью } \mathbf{v}\text{).}$$

Последнее уравнение определяет электрическое поле, создаваемое током, движущимся со скоростью \mathbf{v} . Штрихи опущены, так как рассматривается движущийся источник в нештрихованной системе отсчета. В данном случае электрическое поле возникает как результат проявления электромагнитной индукции (п. 11.1). Полученный результат непосредственно приводит к закону Фарадея для электрического поля, индуцированного изменяющимся магнитным полем.

Рассмотрим реактивный самолет, летящий к северу на широте, где вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна $6 \cdot 10^{-5}$ Тл и направлена вниз. Скорость самолета 278 м/с. Найдем величину измеряемого пилотом электрического поля и выясним, будут ли на крыльях самолета электрические заряды.

Для этого воспользуемся формулой $\mathbf{E} = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, поскольку пилот движется относительно источника магнитного поля Земли. Тогда $E = vB = 278 \cdot 6 \cdot 10^{-5} = 0,0167$ В/м. Поле \mathbf{E} направлено вдоль вектора $-[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, т.е. на восток. Поэтому положительные заряды будут скапливаться на восточном крыле самолета, а отрицательные – на западном. С точки зрения наблюдателя на земле, между концами возникает разность потенциалов. При размахе крыльев 20 м разность потенциалов составит

$$\Delta\varphi = Ex_0 = 0,0167 \cdot 20 = 0,334 \text{ В.}$$

Полученное соотношение между \mathbf{B} и \mathbf{E} , по существу, содержит «вывод» закона Био – Савара – Лапласа. Если заряд q движется со скоростью v , причем $v \ll c$, то электрическое поле $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/(4\pi\epsilon_0 r^3)$, а магнитное поле записывается в виде

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, \mathbf{E}] = \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3},$$

поскольку $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

Если заряд q заменить на элемент движущегося заряда dq на отрезке проводника $d\mathbf{l}$, то имеем

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} dq \frac{[(d\mathbf{l}/dt), \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq}{dt} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3},$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3} \quad (\text{закон Био – Савара – Лапласа}),$$

здесь $d\mathbf{l}$ – векторная длина элемента тока.

Приведенный «вывод» не является строгим, поскольку мы полагали, что $v \ll c$. Однако существует общий вывод, при котором закон Био – Савара – Лапласа получается как точный результат, с учетом того, что ток всегда образует замкнутый контур и поле \mathbf{B} в каждой точке получается интегрированием по этому контуру. В реальных условиях невозможно установить вклад в $d\mathbf{B}$ от элемента тока $I d\mathbf{l}$, поскольку этот элемент нельзя изолировать от других элементов тока.

Проведенный анализ показал, что существует единое электромагнитное поле. Разбиение этого поля на электрическое и магнитное является условным и зависит от скорости движения зарядов относительно выбранной системы отсчета.

9.9. Основные уравнения магнитостатики

Основные уравнения магнитостатики для описания магнитных полей, созданных постоянными потоками зарядов, когда плотность тока \mathbf{j} не изменяется со временем, записанные в дифференциальной форме, имеют вид

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}.\end{aligned}$$

Первое из этих уравнений говорит, что дивергенция вектора \mathbf{B} равна нулю. Если сравнить его с аналогичным уравнением для электрического поля

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

то можно прийти к выводу, что магнитного аналога электрического заряда не существует. Нет зарядов, из которых выходят линии вектора магнитной индукции \mathbf{B} . Возникают магнитные поля в присутствии токов и являются вихревыми полями в области, где есть токи. Векторная функция векторного аргумента – ротор, взятая от \mathbf{B} , пропорциональна плотности тока (см. п. 9.5):

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Магнитные линии образуют петли вокруг токов. Не имея ни конца, ни начала, линии \mathbf{B} возвращаются в исходную точку, образуя замкнутые петли. В любых, самых сложных случаях линии \mathbf{B} не исходят из точек. Утверждение, что $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ справедливо всегда, даже для динамических полей. В интегральной форме это уравнение имеет вид

$$\oint (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0$$

– поток вектора индукции через замкнутую поверхность всегда равен нулю.

В отличие от потенциального электростатического поля, для которого ротор напряженности всегда равняется нулю или, что

эквивалентно, интеграл от вектора \mathbf{E} по любому замкнутому контуру равен нулю, как это следует из теоремы Стокса:

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \oint_{(L)} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0.$$

Для магнитного поля имеем (см. п. 9.5, рис. 9.27)

$$\oint_{(L)} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \int_{(S)} (\text{rot}\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = \mu_0 \int_{(S)} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \mu_0 I$$

– теорему о циркуляции вектора \mathbf{B} , которая по любому замкнутому контуру L равна сумме токов, охватываемых данным контуром, умноженной на μ_0 .

Сравнив уравнения магнитостатики

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \text{div}\mathbf{B} = 0$$

с уравнениями электростатики

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \text{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

можно заключить, что электрическое поле всегда потенциально, а его источниками являются электрические заряды. Магнитное поле в пространстве, не свободном от токов, не потенциально, а является вихревым. Его источником служат электрические токи.

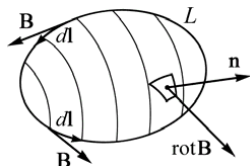


Рис. 9.27. Контурный интеграл от тангенциальной составляющей \mathbf{B} равен поверхностному интегралу от нормальной составляющей $\text{rot}\mathbf{B}$:

$$\oint_{(L)} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \int_{(S)} (\text{rot}\mathbf{B}, d\mathbf{S})$$

В силу линейности данных уравнений для описываемых ими полей справедлив принцип суперпозиции. Поле, созданное двумя постоянными токами, равно геометрической сумме полей от каждого тока, действующего по отдельности.

У нас теперь есть четыре уравнения для \mathbf{B} и \mathbf{E} в интегральной и дифференциальной формах. Эти уравнения можно получить с помощью закона Кулона и специальной теории относительности. В совокупности эти четыре уравнения называют уравнениями Максвелла. В таблице они перечислены

в следующем порядке: I уравнение – теорема Гаусса; II уравнение, которое утверждает независимость разности потенциалов от пути интегрирования; III уравнение, выражающее непрерывность силовых линий магнитного поля \mathbf{B} , и IV уравнение – теорема о циркуляции. Ради полноты изложения эти уравнения приведены как в системе МКС, так и в системе СГС. Уравнения в системе СГС получены за счет $k_0 = 1$ и замены \mathbf{B} на \mathbf{B}/c . В системе МКС приведена также запись этих уравнений через ϵ_0 и μ_0 , которая получается в результате замены k_0 на $1/4\pi\epsilon_0$ и k_0/c^2 на $\mu_0/4\pi$ (единицы СИ). В уравнениях I и III интегралы вычисляются по замкнутым поверхностям. Левые части этих уравнений представляют собой электрический и магнитный потоки, выходящие из замкнутых поверхностей. В уравнениях II и IV интегралы берутся по замкнутым контурам.

Уравнения Максвелла для постоянных токов

	Система единиц МКС с использованием k_0	Система единиц МКС с использованием ϵ_0 и μ_0 (единицы СИ)	Система единиц СГС
I	$\oint(\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi k_0 Q_{\text{полн}}$, $\text{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho k_0$	$\oint(\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = Q_{\text{полн}} / \epsilon_0$, $\text{div}\mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$	$\oint(\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi Q_{\text{полн}}$, $\text{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$
II	$\oint(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0$, $\text{rot}\mathbf{E} = 0$	$\oint(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0$, $\text{rot}\mathbf{E} = 0$	$\oint(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0$, $\text{rot}\mathbf{E} = 0$
III	$\oint(\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0$, $\text{div}\mathbf{B} = 0$	$\oint(\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0$, $\text{div}\mathbf{B} = 0$	$\oint(\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0$, $\text{div}\mathbf{B} = 0$
IV	$\oint(\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \frac{4\pi k_0}{c^2} I_{\text{полн}}$, $\text{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c^2} \mathbf{j}$	$\oint(\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu_0 I_{\text{полн}}$, $\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$	$\oint(\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} I_{\text{полн}}$, $\text{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$

До сих пор токи были постоянными. В более общем случае, когда ток может меняться во времени, в правых частях уравнений II и IV появятся дополнительные члены.

9.10. Векторный потенциал магнитного поля

Магнитное поле, создаваемое токами с плотностью \mathbf{j} , распределенными в пространстве, определяется для элементарного

объема dV выражением, следующим из закона Био – Савара – Лапласа (см. п. 9.4, 9.5 и рис. 9.28):

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{R}), (\mathbf{r} - \mathbf{R})]}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} dV.$$

Полное поле в точке наблюдения с координатой \mathbf{r} относительно точки O , выбранной за начало отсчета, получается интегрированием полученного выражения по объему d^3R , соответствующему протекающим токам:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\mathbf{j}(\mathbf{R}), \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2} \right] d^3R.$$

Подынтегральное выражение может быть переписано в виде

$$\left[\mathbf{j}(\mathbf{R}), \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2} \right] = \text{rot}_r \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|},$$

где индекс r у ротора означает, что точки \mathbf{R} источников поля – плотности тока – считаются неподвижными, а точки наблюдения \mathbf{r} – переменными:

$$\text{rot}_r \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{j_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} & \frac{j_y}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} & \frac{j_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \end{vmatrix},$$

где $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$.

Поскольку дифференцирование в функции rot_r ведется по координатам точки наблюдения, а интегрирование выполняется по объемам проводников, обтекаемых токами, то можно изменять порядок этих операций

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot}_r \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R.$$

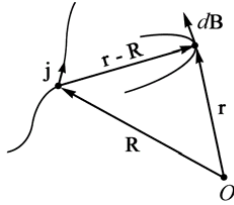


Рис. 9.28. Вычисление индукции магнитного поля \mathbf{B} от системы токов с плотностью \mathbf{j}

Если ввести обозначение

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R,$$

то можно записать соотношение между \mathbf{B} и \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

– вектор индукции магнитного поля можно представить в виде ротора некоторого вектора \mathbf{A} , который носит название векторного потенциала. Этот потенциал определяет вихревую часть векторного поля. То, что такое представление возможно, следует из уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$, поскольку это условие автоматически означает, что вектор \mathbf{B} может быть представлен в виде ротора от другого векторного поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, поскольку дивергенция ротора всегда равна нулю.

Ротор градиента также всегда равен нулю, и добавление к \mathbf{A} градиента от некоторого скалярного поля ϕ не изменяет величины вектора индукции магнитного поля \mathbf{B} :

$$\text{rot}(\mathbf{A} + \text{grad}\phi) = \text{rot}\mathbf{A} + \text{rot grad}\phi = \text{rot}\mathbf{A}.$$

На скалярный потенциал ϕ можно наложить ограничения, исходя из соображений удобства при решении конкретных задач. Например, можно выбрать ϕ таким, чтобы дивергенция \mathbf{A} равнялась нулю

$$\text{div}\mathbf{A} = \text{div}(\mathbf{A}' + \text{grad}\phi) = \text{div}\mathbf{A}' + \Delta\phi = 0.$$

Вычислим векторный потенциал для однородного магнитного поля, направленного вдоль оси z (рис. 9.29). По теореме Стокса имеем

$$\oint_L (\mathbf{A}, d\mathbf{l}) = A \cdot 2\pi r' = \int_{(S)} (\text{rot } \mathbf{A}, d\mathbf{S}) = \int_{(S)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = B\pi(r')^2.$$

Здесь r' – расстояние от оси z до окружности, расположенной перпендикулярно оси z : $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{r}'].$$

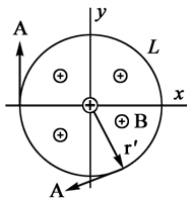


Рис. 9.29. Вычисление векторного потенциала для однородного магнитного поля, направленного вдоль оси z .

$\mathbf{A}(\mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{R}|} d^3 R$ – векторный потенциал определяется через источники

Однако проще, зная \mathbf{A} , вычислить индукцию \mathbf{B} . Исходя из определения \mathbf{A} , можем записать

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_x(\mathbf{R}) d^3 R}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}, \quad A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_y(\mathbf{R}) d^3 R}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}, \quad A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_z(\mathbf{R}) d^3 R}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}.$$

Полученные соотношения аналогичны выражению для скалярного электростатического потенциала

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3 R.$$

Последнее соотношение является решением дифференциального уравнения

$$\text{div grad}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \equiv \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Поэтому каждый из интегралов для компонент \mathbf{A} является решением уравнений

$$\Delta A_x = -\mu_0 j_x, \quad \Delta A_y = -\mu_0 j_y, \quad \Delta A_z = -\mu_0 j_z,$$

равносильных одному векторному уравнению

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j},$$

определяющему векторный потенциал через источники магнитного поля – плотности токов.

9.11. Вычисление векторного потенциала магнитного поля

Для нахождения векторного потенциала следует покомпонентно решить три электростатические задачи с плотностями зарядов

$$\rho_{x,y,z}; \quad \mu_0 \epsilon_0 j_{x,y,z} = \frac{j_{x,y,z}}{c^2},$$

а затем найти $\mathbf{V} = \text{rot} \mathbf{A}$.

В качестве примера рассчитаем поле прямого провода радиуса R , текущего вдоль оси z (рис. 9.30). Вектор \mathbf{j} имеет только z -компоненту, равную внутри провода

$$j_z = \frac{I}{\pi R^2} \quad (r \leq R),$$

и $j_z = 0$ вне провода ($r > R$). Поэтому сразу можно положить $A_x = A_y = 0$.

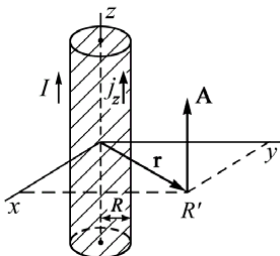


Рис. 9.30. Расчет вектора \mathbf{A} прямолинейного проводника с током

Потенциал равномерно заряженного цилиндра с линейной плотностью заряда $\lambda = \rho \pi R^2$ равен (см. п.2.10)

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r, \quad r \geq R,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Соответственно, для компоненты A_z ($\rho = j_z/c^2$) вне провода имеем ($\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$)

$$A_z = -\frac{j_z \pi R^2}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r.$$

Соответственно, для компонент вектора \mathbf{V} имеем

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{r^2},$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = +\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{r^2},$$

$$B_z = 0.$$

Силовые линии вектора представляют концентрические окружности. Величина вектора \mathbf{B} :

$$|\mathbf{B}| = B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

С помощью понятия векторного потенциала и рассмотренного алгоритма расчета можно определить распределение поля магнитного диполя – контура с током I , линейные размеры которого a много меньше расстояния r до точки наблюдения M (рис. 9.31).

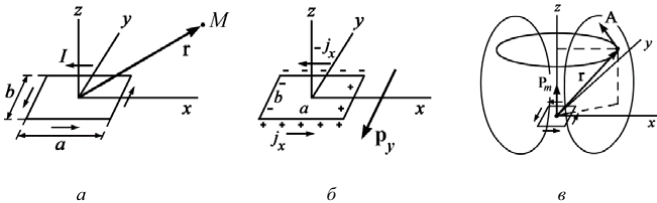


Рис. 9.31. Расчет поля магнитного диполя: a – магнитный диполь; b – электростатический аналог; v – направление вектора \mathbf{A} от диполя. Распределение поля от магнитного диполя приведено на рис. 9.13

Расположим контур с током в плоскости xy . Поскольку в направлении оси z ток отсутствует, то и $A_z = 0$. Сторонам с током, параллельным оси x , можно сопоставить электростатический диполь в виде двух противоположно заряженных палочек, параллельных оси x (j_x на разных сторонах течет в разных направлениях) с линейной плотностью λ . Двум таким разноименно заряженным сторонам соответствует дипольный момент величиной

$$p = \lambda ab,$$

где λa – заряд одной из сторон, а b – расстояние между ними. Диполь ориентирован антипараллельно оси y .

На больших расстояниях от распределенного диполя ($r \gg a, b$) потенциал равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^3},$$

где \mathbf{p} – вектор дипольного момента $p = \lambda ab$ распределенных зарядов.

Линейной плотности зарядов $\lambda = \rho \cdot s$ соответствует в векторном потенциале величина I/c^2 , поэтому компонента векторного потенциала в направлении оси x равна (вектор \mathbf{p} антипараллелен оси y)

$$A_x = \frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \left(\cos \left(\mathbf{p}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -\frac{y}{r} \right).$$

Соответственно, для A_y получаем

$$A_y = \frac{+Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \cdot \frac{x}{r}.$$

Полная величина вектора \mathbf{A} равна

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m \sqrt{x^2 + y^2}}{r^3}.$$

Здесь $\mathbf{p}_m = I \cdot ab \cdot \mathbf{n} = IS \cdot \mathbf{n}$ – магнитный момент контура с током; S – площадь контура; \mathbf{n} – направление положительной нормали, определяемое по правилу правого буравчика.

В векторной форме можно записать для потенциала \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{p}_m, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Компоненты вектора индукции магнитного поля равны

$$B_x = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_0 p_m x}{4\pi r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3xz}{r^5} p_m,$$

$$B_y = -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\mu_0 p_m y}{4\pi r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3yz}{r^5} p_m,$$

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_0 p_m x}{4\pi r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\mu_0 p_m y}{4\pi r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) p_m.$$

Или в общем случае

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_m) - r^2 \mathbf{p}_m}{r^5}.$$

Компоненты вектора \mathbf{B} ведут себя, как и компоненты вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} от диполя, ориентированного вдоль оси z . Совершенно разные уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

приводят к одинаковым результатам, поскольку системы уравнений для постоянных электрического и магнитного полей вдали от зарядов и токов, что соответствует случаю с диполем, совпадают:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0.$$

Однако источники полей различны. В случае магнитного поля это петля с током, а в случае с диполем – система разноименных зарядов, расположенных над и под плоскостью петли.

Рассмотрим в качестве примера заряженный шар радиуса a , вращающийся вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω , проходящей через центр (рис. 9.32). Если шар равномерно заряжен по поверхности, то любой достаточно узкий пояс на его поверхности эквивалентен круговому току

$$dl = \omega \frac{q}{4\pi a^2} a \sin \theta \cdot a d\theta$$

и обладает магнитным моментом

$$d\mathbf{p}_m = dl \cdot S \cdot \mathbf{n} = dl (\pi a \sin \theta)^2 \mathbf{n} = \frac{\omega q \pi a^2}{4} \sin^3 \theta d\theta.$$

Здесь учтено, что $\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}/\omega$ – направление вектора единичной нормали к контуру с током совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{\omega}$.

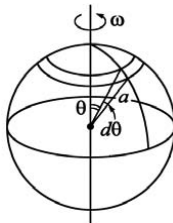


Рис. 9.32. Равномерно заряженный шар, вращающийся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Каждый элементарный поясик на поверхности шара является элементарным током. Магнитный момент шара $\mathbf{p}_m = \frac{qa^2 \boldsymbol{\omega}}{3}$

Полный магнитный момент шара равен

$$\mathbf{p}_m = \int_0^\pi d\mathbf{p}_m = \frac{qa^2\boldsymbol{\omega}}{3}.$$

Соответственно, величина вектора индукции поля в точке с координатой r , отсчитанной от центра шара, будет равна ($r \gg a$)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qa^2}{3} \left[\frac{3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} \right].$$

Если шар равномерно заряжен по объему и полный его заряд также равен q , то величина вектора индукции будет равна ($r \gg a$)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qa^2}{5} \left[\frac{3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} \right].$$

Векторный потенциал в магнитоэстатике можно рассматривать как некоторую вспомогательную величину, не допускающую прямых измерений, но облегчающую расчет магнитных полей. Из-за векторного произведения $[\mathbf{j}, \mathbf{r}]$ интегралы для \mathbf{B} вычислять обычно сложнее. Кроме того, при вычислении \mathbf{A} можно воспользоваться результатами, ранее полученными в электростатике. Векторный потенциал играет важную роль во многих современных разделах физики и, видимо, приводит к более прямому описанию физических процессов.

9.12. Силы и моменты, действующие на рамку с током в магнитном поле

На каждый элемент $d\mathbf{l}$ рамки с током I в магнитном поле \mathbf{B} действует элементарная сила – сила Ампера (п. 9.3, рис. 9.33):

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

В однородном поле равнодействующая всех сил равна

$$\mathbf{F} = \oint I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}] = I \left[\oint d\mathbf{l}, \mathbf{B} \right].$$

Поскольку интеграл по замкнутому контуру от $d\mathbf{l}$ равен нулю, то и равнодействующая всех сил при $\mathbf{B} = \text{const}$ равна нулю. Однако это относится лишь к однородному полю.

В неоднородном магнитном поле на стороны AB и CD действует результирующая сила

$$\mathbf{F}_{AB+DC} = I [\mathbf{B}_1, \Delta\mathbf{l}_{AB}] - I [\mathbf{B}_2, \Delta\mathbf{l}_{CD}] = I [(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2), \Delta\mathbf{l}_{AB}].$$

Для малых расстояний между токами A и B можем записать

$$\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 = \Delta l_{BC} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}.$$

Подставляя полученную разность $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$ в выражение для \mathbf{F}_{AB+DC} , получаем

$$\mathbf{F}_{AB+DC} = I \cdot \Delta l_{BC} \cdot \Delta l_{AB} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}, \mathbf{j}_y \right].$$

Соответственно, результирующая сила, действующая на стороны BC и DA , равна

$$\mathbf{F}_{BC+DA} = I [\mathbf{B}_3, \Delta l_{BC}] - I [\mathbf{B}_4, \Delta l_{DA}] = -I \cdot \Delta l_{CB} \Delta l_{DC} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}, \mathbf{k}_z \right].$$

Полная сила, действующая на все стороны рамки, равна

$$\mathbf{F} = I \Delta S \left(\left[\mathbf{k}_z, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right] - \left[\mathbf{j}_y, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right] \right),$$

где $I \Delta S = p_m$ — величина магнитного момента, направленного вдоль оси x . Поскольку $\mathbf{B} = \mathbf{i}_x B_x + \mathbf{j}_y B_y + \mathbf{k}_z B_z$, то получаем

$$\mathbf{F} = p_{mx} \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \mathbf{j}_y + \frac{\partial B_x}{\partial z} \mathbf{k}_z - \frac{\partial B_y}{\partial y} \mathbf{i}_x - \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{i}_x \right).$$

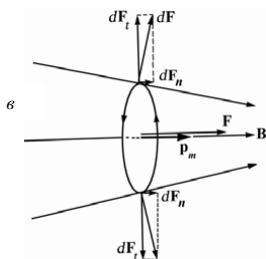
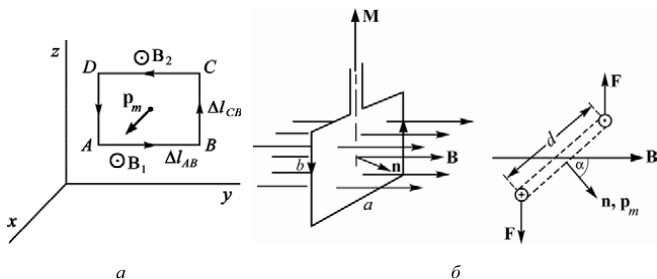


Рис. 9.33. Силы \mathbf{F} и моменты \mathbf{M} , действующие на рамку с током в магнитном поле (а)

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m, \nabla) \mathbf{B},$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}].$$

Рамка с током стремится сорентироваться магнитным моментом вдоль силовых линий поля (б) и втягивается при $\mathbf{p}_m \uparrow \uparrow \mathbf{B}$ в область более сильного магнитного поля (в)

Из условия $\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$, и поскольку в про-

странстве, где находится виток, нет токов

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{j}_y & \mathbf{k}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 0,$$

следует $\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x}$, $\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial z}$.

Окончательно имеем

$$\mathbf{F} = p_{mx} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial B_y}{\partial y} \mathbf{j}_y + \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{k}_z \right) = p_{mx} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}$$

– виток будет втягиваться в область более сильного поля, если магнитный момент сориентирован по полю.

Аналогично при наличии составляющих вектора магнитного момента витка с током вдоль других осей получаем, что в неоднородном магнитном поле на виток с током действует сила

$$\mathbf{F} = (p_m, \nabla) \mathbf{B}, \quad \text{где } \nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Последняя формула в точности совпадает с результатом, полученным для электрического диполя в электростатическом поле (п. 2.4.1). Это неудивительно, поскольку поведение зарядов и токов в свободном от токов и зарядов пространстве описывается одной и той же системой уравнений $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$.

Если плоскую рамку поместить в магнитное поле плоскостью витка параллельно силовым линиям поля, то на элементы сторон dl_1 , dl_2 рамки (рис. 9.34), будут действовать силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , перпендикулярные плоскости витка и направленные в противоположные стороны

$$F_1 = IB\Delta l_1 \sin \alpha = IB\Delta h,$$

$$F_2 = -IB\Delta l_2 \sin \beta = IB\Delta h.$$

Силы F_1 и F_2 образуют пару сил с моментом

$$\Delta M_{\max} = IB\Delta h \cdot AB = I \cdot B \Delta S_{ABCD}.$$

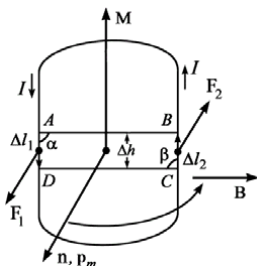


Рис. 9.34. На рамку с током в магнитном поле действует вращательный момент \mathbf{M} , стремящийся сорентировать рамку с магнитным моментом \mathbf{p}_m вдоль силовых линий магнитного поля \mathbf{B}

Вектор момента $\Delta \mathbf{M}$ направлен вертикально вверх. Вводя вектор положительной нормали \mathbf{n} , можем переписать полученное выражение в виде:

$$\Delta \mathbf{M} = [\Delta \mathbf{p}_m, \mathbf{B}],$$

где $\Delta \mathbf{p}_m = I \cdot \Delta S_{ABCD} \mathbf{n}$ – вектор магнитного момента элемента $ABCD$ рамки с током.

Просуммировав все эти составляющие по всей площади, охваченной током, получим

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]$$

– на рамку с током в однородном магнитном поле действует вращательный момент, стремящийся сорентировать рамку с током магнитным моментом вдоль направления силовых линий магнитного поля (рис. 9.33, б, 9.34).

Если линейные размеры катушки много меньше областей неоднородности магнитного поля, то такие катушки могут быть использованы для изучения магнитных полей. Такие катушки называются пробными. Если катушку поместить в магнитное поле, то она в каждой точке поля сорентируется своей плоскостью перпендикулярно силовым линиям магнитного поля, соответственно, магнитным моментом вдоль силовой линии поля. Развернув затем эту катушку на 90° , мы испытаем на нее действие максимально возможного момента силы, по величине которого

$$M_{\max} = p_m B$$

можно определить величину вектора индукции магнитного поля

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}.$$

Таким образом, определяя ориентацию рамки с током в магнитном поле и измеряя действующие на нее вращательные моменты, можно определить направление силовых линий и величину вектора индукции магнитного поля в каждой точке пространства.

9.13. Энергия контура с током в магнитном поле

На контур с током в магнитном поле действует вращательный момент величиной

$$M = B \cdot p_m \sin \theta,$$

где θ – угол между направлениями вектора индукции \mathbf{B} и магнитного момента \mathbf{p}_m .

Поскольку есть вращательный момент, то энергия контура с током зависит от его ориентации. При медленном повороте петли контура с током на угол $d\theta$ совершается элементарная работа против поля

$$\delta A = M d\theta = B p_m \sin \theta d\theta = d(-B p_m \cos \theta),$$

которая идет на увеличение энергии U контура с током. Величину энергии можно записать в виде

$$U = -(\mathbf{p}_m, \mathbf{B}) + U_0.$$

Знак «минус» означает, что контур с током стремится развернуться по полю. При этом энергия U минимальна, когда векторы \mathbf{p}_m и \mathbf{B} параллельны.

Полученная величина энергии U соответствует работе A , затрачиваемой на то, чтобы внести контур с током I и площадью $a \times b$ в данную точку поля x из бесконечности

$$\begin{aligned} A &= - \int_{-\infty}^x (F_2 - F_1) dx = -Ib \int_{-\infty}^x (B_2 - B_1) dx \approx \\ &\approx -Ib \int_{-\infty}^x \left(B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} \cdot a - B_1 \right) dx = -Iba \int_{-\infty}^x \frac{\partial B}{\partial x} dx = -IabB(x) = -(\mathbf{p}_m, \mathbf{B}). \end{aligned}$$

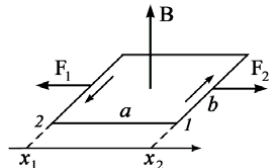
Здесь предполагалось, что контур с током небольшой и индукция магнитного поля $B(x)$ не очень различается по сторонам 1 и 2, $B(-\infty) = 0$ (рис. 9.35):

$$B_2 = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} a,$$

и действующая на него сила Ампера равна

$$F_x = Iab \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Рис. 9.35. Силы, действующие на контур с током в магнитном поле ($dB/dx \neq 0$)



Зная энергию петли в магнитном поле, можно рассчитать действующие на нее силы

$$\mathbf{F} = -\text{grad}(-\mathbf{p}_m, \mathbf{B}).$$

Если магнитный момент постоянен и пространство свободно от токов $\text{rot} \mathbf{B} = 0$ ($\mathbf{j} = 0$), то получаем уже известную формулу (п. 9.12)

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m, \nabla) \mathbf{B}.$$

При расчете величины энергии петли мы не учитывали энергии, идущей на поддержание тока в петле, и считали, что этот ток всегда постоянен.

Полученному выражению для работы по перемещению контура с током в магнитном поле можно придать другой вид. Элементарная работа при перемещении элемента $d\mathbf{l}$ контура с постоянным током I в магнитном поле индукцией \mathbf{B} на расстояние $\Delta \mathbf{r}$ равна

$$\delta A = (\mathbf{F}, \Delta \mathbf{r}) = I(\Delta \mathbf{r}, [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]).$$

Полная работа, связанная с тем же перемещением на $\Delta \mathbf{r}$ всех элементов контура L с током I , равна

$$\Delta A = \oint_L I(\Delta \mathbf{r}, [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]) = \oint_L I(\mathbf{B}, [\Delta \mathbf{r}, d\mathbf{l}]).$$

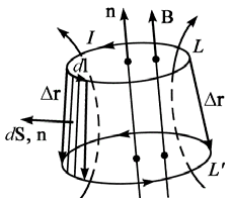


Рис. 9.36. Расчет работы по перемещению контура с током L в магнитном поле \mathbf{B} на расстояние $\Delta \mathbf{r}$ в положение L'

Величина $[\Delta \mathbf{r}, d\mathbf{l}] = d\mathbf{S}$ равна элементу площади, охваченной элементом контура $d\mathbf{l}$ с током I , при его перемещении на $\Delta \mathbf{r}$ (рис. 9.36). Вектор $d\mathbf{S}$ ориентирован по направлению положительной нормали \mathbf{n} .

В результате получаем

$$\Delta A = I \int_{\Delta S} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = I \Delta \Phi.$$

Здесь Φ – поток вектора магнитной индукции через поверхность S

$$\Phi = \int_{(S)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S});$$

$\Delta\Phi$ – изменение потока вектора магнитной индукции через замкнутый контур L при его перемещении на $\Delta\mathbf{r}$ в магнитном поле, которое равно магнитному потоку через поверхность ΔS , описанную контуром при его перемещении на $\Delta\mathbf{r}$, поскольку поток вектора \mathbf{B} через замкнутую поверхность равен нулю, так как магнитные заряды отсутствуют.

Если ввести обозначение

$$U = -I\Phi,$$

то для работы по перемещению контура с током в магнитном поле можем записать:

$$\Delta A = -(\Delta U)_I.$$

Здесь индекс I обозначает, что при определении приращения функции U токи в контуре считаются постоянными.

Величина потока вектора магнитной индукции в СИ измеряется в веберах (Вб). Один вебер равен потоку, создаваемому однородным магнитным полем при индукции 1 тесла через нормальное сечение площадью 1 м². Единица названа в честь В.Э. Вебера (1802–1891) – немецкого физика, основателя физической лаборатории в Геттингенском университете.

Отметим, что функцию U не следует отождествлять с потенциальной энергией магнитного поля, поскольку изменение полной энергии при перемещении проводника в магнитном поле связано не только с механическим действием магнитного поля на проводник с током, но и с работой электродвижущих сил, индуцируемых в проводнике при перемещении в магнитном поле.

Однако величина U тем не менее очень удобна на практике, поскольку позволяет рассчитывать силы, действующие в магнитном поле на токи и движущиеся заряды, по тем же формулам, что были получены для связи сил консервативного поля и потенциальной энергии

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U.$$

Работать же со скалярной функцией намного проще и удобней, чем производить сложение векторных величин, действующих на элементы контуров с током. В частности, как и в поле консервативных сил, устойчивому равновесию контура с постоянным током соответствует минимум функции $U = -I\Phi$, т.е. максимум магнитного потока Φ через контур.

Например, если подвижная рамка площадью S с током I , способная вращаться вокруг оси, помещена в однородное магнитное поле индукцией \mathbf{B} , то поток вектора \mathbf{B} сквозь эту рамку равен (рис. 9.37)

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

где α – угол между вектором положительной нормали рамки \mathbf{n} и вектором \mathbf{B} .

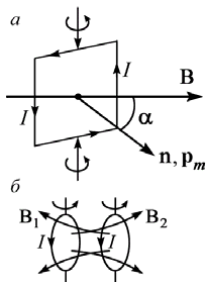


Рис. 9.37. Ориентация контуров с током в магнитном поле – рамка стремится сориентироваться магнитным моментом параллельно вектору \mathbf{B} (а); два контура с токами I стремятся к такому взаимному расположению, когда их плоскости параллельны, а токи текут в одном направлении (б)

Потенциальная функция рамки с током равна

$$U = -ISB\cos\alpha.$$

Момент сил, вращающий рамку с током, равен

$$M = -\frac{\partial U}{\partial \alpha} = ISB \sin \alpha .$$

Положению равновесия рамки с током соответствуют равные нулю значения вращательного момента, что возможно при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$. Первое из них соответствует минимуму U , а второе – максимуму. Только первое положение рамки с током с магнитным моментом, ориентированным по полю – параллельно \mathbf{B} , соответствует устойчивому положению рамки. В частности, два взаимодействующих контура будут стремиться сориентироваться так, чтобы плоскости их были параллельны, а направления токов совпадали.

9.14. Магнитная энергия

Токи, находящиеся в магнитном поле, испытывают действие магнитной силы, которая увеличивается пропорционально величине тока в проводнике и величине индукции магнитного поля. Причем внешнее магнитное поле в магнитостатике обязательно также связано с электрическим током. Магнитное взаимодействие токов показывает, что токи в магнитном поле обладают определенным запасом энергии, называемой магнитной энергией.

В неоднородном магнитном поле с распределенными по объему токами плотностью \mathbf{j} энергия каждого из токов I может быть определена по формуле

$$U = -I \int_{(S)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = -I\Phi.$$

Здесь Φ – поток вектора магнитной индукции через поверхность S . Вектор магнитной индукции \mathbf{B} выражается через векторный потенциал \mathbf{A}

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A},$$

поэтому выражение для U можно переписать в виде

$$U = -I \int_{(S)} (\text{rot}\mathbf{A}, d\mathbf{S}) = -I \int_{\Gamma} (\mathbf{A}, d\mathbf{l}),$$

где Γ – контур, ограничивающий поверхность S .

Любое распределение постоянных токов можно считать состоящим из нитей, идущих вдоль линий тока. Для любой пары таких токов энергия может подсчитываться по найденной формуле, где интеграл взят вокруг одного контура, а векторный потенциал создан другим контуром. Полная энергия получается сложением всех таких пар. Если, не следя за токами и потенциалами, подсчитать все такие пары взаимодействий, то каждая энергия будет учтена дважды и полную энергию следует записать в виде

$$U = -\frac{1}{2} \int (\mathbf{A}, \mathbf{j}) dV.$$

Это соответствует энергии, полученной для электростатического поля

$$U = +\frac{1}{2} \int \rho\varphi dV.$$

Различие в знаках отражает тот факт, что U для токов в магнитном поле не является полной энергией. Полная энергия $U_{\text{полн}}$ складывается из энергии токов в магнитном поле U и электрической энергии для поддержания тока I в петле $U_{\text{электр}}^{\text{ток } \mathbf{j}}$ и в катушке, создающей магнитное поле $U_{\text{электр}}^{\text{поле } \mathbf{B}}$:

$$U_{\text{полн}} = U + U_{\text{электр}}^{\text{ток } \mathbf{j}} + U_{\text{электр}}^{\text{поле } \mathbf{B}}.$$

Но поскольку работа магнитного поля по перемещению заряда по замкнутому полю равна нулю, то по отдельности имеем

$$U + U_{\text{электр}}^{\text{ток } j} = 0,$$

$$U + U_{\text{электр}}^{\text{поле } \mathbf{B}} = 0$$

$$\text{или } U + U_{\text{электр}}^{\text{ток } j} + U_{\text{электр}}^{\text{поле } \mathbf{B}} = -U.$$

Поэтому полная энергия равна энергии U , взятой со знаком «минус»,

$$U_{\text{полн}} = -U.$$

В общем случае работа при движении витка с током в магнитном поле совершается за счет источников постоянного тока – различных батарей и генераторов:

$$A_{\text{полн}} = U + U_{\text{электр}}^{\text{ток } j} + A_{\text{бат}}^{\text{поле } \mathbf{B}} = A_{\text{бат}}.$$

Поэтому для полной энергии токов в магнитном поле можно записать:

$$U_{\text{полн}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{A}, \mathbf{j}) dV = \int I d\Phi.$$

Эти формулы выражают магнитную энергию через токи и магнитные потоки. Величина U в этом случае может рассматриваться как потенциальная энергия токов, взаимодействующих по закону Ампера. Причем взаимодействие токов осуществляется непосредственно на расстоянии. Однако выражение для магнитной энергии может быть приведено к виду, соответствующему тому факту, что проводники с током создают вокруг себя магнитные поля и магнитное взаимодействие токов соответствует изменению величины энергии, запасенной в магнитном поле.

Действительно, пусть магнитное поле создается током I длинного соленоида, в этом случае (п. 9.5) $B = \mu_0 IN/L$ и $\Phi = B \cdot S \cdot N$, где N – полное число витков соленоида длиной L и площадью витка S . В результате получаем для энергии взаимодействия тока I с полем B

$$dU = Id(\Phi) = \frac{BL}{\mu_0 N} d(B \cdot SN) = d\left(\frac{LS}{2\mu_0} B^2\right).$$

$$U = \frac{LS}{2\mu_0} B^2.$$

Поскольку $SL = V$ – объем соленоида, то окончательно получаем для энергии соленоида в единице объема

$$w_m = \frac{U}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Физический смысл этой формулы можно понимать так, что магнитная энергия локализована в пространстве, где есть магнитное поле с объемной плотностью $w_m = B^2/(2\mu_0)$. Но в рамках магнитостатики нельзя, как и в электростатике, указать опыт, который решил бы однозначно вопрос о том, является ли энергия U энергией взаимодействия элементарных токов с магнитным полем или это энергия, локализованная в созданном токами магнитном поле. И только в электродинамике существование электромагнитных волн, распространяющихся самостоятельно в пустом пространстве безотносительно к источникам поля и способным переносить энергию и импульс, доказывает, что магнитная энергия локализована в пространстве, где есть магнитное поле.

В общем случае, исходя из соотношения

$$U = \frac{1}{2} \int (\mathbf{A}, \mathbf{j}) dV$$

и воспользовавшись уравнением для индукции магнитного поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$$

можем преобразовать выражение для U к виду

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V (\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{B}) dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_V (\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{A}) dV - \frac{1}{2\mu_0} \int_{(S)} (\mathbf{A}, \mathbf{B}) dS,$$

где мы воспользовались равенством $\operatorname{div}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}$ и теоремой Гаусса $\int_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{C} dV = \int_S (\mathbf{C}, d\mathbf{S})$. Поскольку поверхность S ,

ограничивающая объем V , произвольна, то, удаляя ее на бесконечность, мы попадаем в область, где полей нет, и потому последний интеграл в выражении для U равен нулю. Кроме того, поскольку векторный потенциал \mathbf{A} связан с вектором индукции \mathbf{B} соотношением

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

мы получаем для магнитной энергии

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV.$$

Магнитная энергия равна сумме энергий от отдельных точек поля. Плотность энергии пропорциональна квадрату индукции поля

$$w_m = \frac{dU}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Энергия может быть выражена и через плотности токов. Действительно, мы находим, что векторный потенциал от тока $\mathbf{j}(\mathbf{R})$ в точке с координатой \mathbf{r} равен (п. 9.10)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R}) d^3R}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}.$$

Подставляя это выражение в формулу для U , получаем

$$U = \frac{\mu_0}{8\pi} \int \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{R}), \mathbf{j}(\mathbf{r})) d^3R d^3r}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}$$

– выражение для энергии магнитного взаимодействия токов как интеграл, определяемый распределением и величиной токов. Но ранее полученное выражение для U имеет более общий характер, поскольку, в общем случае, переменные магнитные поля могут существовать и там, где нет токов.

9.15. Магнитное взаимодействие замкнутых контуров с токами. Моменты и силы

Пусть токи $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}(\mathbf{R})$ текут по тонким проводам, диаметр которых мал по сравнению с размерами всей системы. В этом случае можно упростить выражение для магнитной энергии взаимодействующих токов. Для тонких проводов элементы объема равны

$$d^3R = S_1 dl_1,$$

$$d^3r = S_2 dl_2,$$

где S_1, S_2 – площади поперечного сечения проводов, а dl_1, dl_2 – элементы длины проводов вдоль контуров с токами. Считая, что $\mathbf{j}(\mathbf{R}), \mathbf{j}(\mathbf{r})$ – плотности токов постоянны по сечению тонкого провода, можем записать

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{R}) d^3R = (\mathbf{j}_1, S_1) dl_1 = I_1 d\mathbf{l}_1,$$

$$\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) d^3r = (\mathbf{j}_2, S_2) dl_2 = I_2 d\mathbf{l}_2.$$

Здесь $I_{1,2} = j_{1,2} S_{1,2}$ – величины токов в контурах. Считаем, что I_1, I_2 не зависят от \mathbf{r} и \mathbf{R} , т.е. в контурах нет ответвлений. Соответст-

венно, величина энергии взаимодействия двух контуров с токами равна (рис. 9.38)

$$U = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{8\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}.$$

Двойной, умноженный на $\mu_0/(4\pi)$ интеграл, входящий в выражение для U , обычно обозначается L_{12} или L_{21} и называется коэффициентом взаимной индукции контуров Γ_1 и Γ_2 :

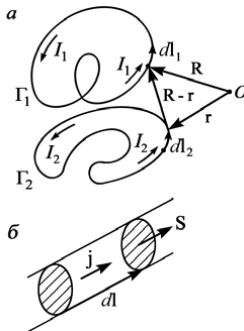
$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}.$$

С помощью коэффициентов взаимной индукции можно записать потенциальную функцию взаимодействия первого тока I_1 с магнитным полем второго тока I_2 :

$$U_{12} = -\frac{I_1 I_2 L_{12}}{2} = -\frac{I_1 \Phi_{21}}{2},$$

где Φ_{21} – магнитный поток поля второго тока через контур первого тока.

Рис. 9.38. Магнитное взаимодействие двух контуров Γ_1 , Γ_2 с токами I_1 , I_2 (а). Элемент проводника контура с током (б) $I = jS$. Энергия взаимодействия контуров $U = -\frac{L_{12} I_1 I_2}{2}$, L_{12} – взаимная индукция контуров Γ_1 и Γ_2



Аналогично для энергии взаимодействия второго тока I_2 с магнитным полем первого тока I_1 :

$$U_{21} = -\frac{I_2 I_1 L_{21}}{2} = -\frac{I_2 \Phi_{12}}{2}.$$

Здесь Φ_{12} – магнитный поток поля первого тока через контур второго тока. Поскольку $U_{12} = U_{21}$, то получаем

$$\Phi_{21} = I_2 L_{12}, \quad \Phi_{12} = I_1 L_{21}.$$

Коэффициент взаимной индукции L_{12} есть чисто геометрическая величина, зависящая от конфигурации и взаимного расположения контуров с токами Γ_1 , Γ_2 . Наибольший вклад в величину L_{12} дают параллельные отрезки проводов двух катушек.

При смещении первого витка с током I_1 как целого на расстояние $\delta \mathbf{r}_1$ при неподвижном втором витке совершается элементарная работа $(\mathbf{F}_1, \delta \mathbf{r}_1) = \delta A_1$, где \mathbf{F}_1 – результирующая сила, действующая на первый виток со стороны второго. С другой стороны, $\delta A_1 = -\frac{I_2 I_1}{2} \delta L_{21}$. Если теперь сместить виток с током I_2

как целое на расстояние $\delta \mathbf{r}_2$ при неподвижном первом витке, то совершаемая работа будет равна $\delta A_2 = (\mathbf{F}_2, \delta \mathbf{r}_2)$. Здесь \mathbf{F}_2 – результирующая сила, действующая на второй виток со стороны первого. Но поскольку изменение δU зависит лишь от изменения взаимного расположения витков, а оно точно такое же, как и в первом случае, то $\delta A_2 = -\frac{I_1 I_2}{2} \delta L_{12}$, откуда следует $(\mathbf{F}_1, \delta \mathbf{r}_1) = (\mathbf{F}_2, \delta \mathbf{r}_2) = -(\mathbf{F}_2, \delta \mathbf{r}_1)$. Ввиду того, что относительное смещение $\delta \mathbf{r}_1$ произвольно, получаем $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ – при механическом воздействии выполняется третий закон Ньютона: действие равно противодействию, поскольку силы, испытываемые каждым из взаимодействующих витков, определяются производными от одной и той же функции U : $U_{21} = U_{12}$, $\mathbf{F} = -\text{grad}U$, зависящей лишь от относительного расположения обоих контуров.

Аналогично, поворачивая один виток относительно другого, доказывается, что $\mathbf{M}_2 = -\mathbf{M}_1$, где \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 – моменты амперовых сил, действующих на витки.

9.16. Энергия магнитного взаимодействия в контуре с током. Коэффициент самоиндукции

Рассмотрим взаимодействие элементов одного и того же тока между собой и определим энергию их механического взаимодействия. Энергия такого взаимодействия в общем случае равна

$$U = -\frac{1}{2} \int (\mathbf{A}, \mathbf{j}) dV.$$

Множитель $\frac{1}{2}$ перед интегралом показывает, что каждая пара элементов тока $\mathbf{j} dV$ и $\mathbf{j}' dV'$ учитывается дважды через ток \mathbf{j} и векторный потенциал \mathbf{A} , поскольку для \mathbf{A} имеем

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}' dV'}{\Delta R},$$

где ΔR – расстояние между точками, в которых определяются плотности токов \mathbf{j} и \mathbf{j}' , сосредоточенных в элементарных объемах dV и dV' . В результате имеем

$$U = -\frac{\mu_0}{8\pi} \iint_{V V'} \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{j}') dV dV'}{\Delta R}.$$

Распределение тока по сечению проводника зависит от геометрических и физических свойств этого проводника, но не от силы тока в проводнике. Поэтому плотность тока в каждом из элементов объема пропорциональна силе тока в проводнике I_1 :

$$U_{11} = -\frac{I_1^2 L_{11}}{2} = -\frac{\mu_0}{8\pi} \iint_{V V'} \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{j}') dV dV'}{\Delta R}.$$

Величина L называется коэффициентом самоиндукции:

$$L_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi I_1^2} \iint_{V V'} \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{j}') dV dV'}{\Delta R}.$$

Величина L_{11} зависит от геометрической конфигурации проводника, а если он неоднороден, то и от соотношения электропроводностей отдельных элементов объема проводника.

Собственную энергию механического взаимодействия элементов одного контура с током между собой можно вычислить, разбив ток I_1 на бесконечно тонкие нити dl_1 и выразив потенциальную функцию каждой нити с помощью ранее найденного соотношения

$$dU = -dl \cdot \Phi,$$

где Φ – магнитный поток, посылаемый всем током I_1 через контур данной нити. Суммируя по всем нитям, получаем

$$U_{11} = -\frac{1}{2} \int \Phi dl_1.$$

Множитель $\frac{1}{2}$ показывает, что взаимодействие каждой пары нитей учитывается дважды. Если обозначить через Φ_{11} среднее значение магнитного потока через отдельные нити тока, то получаем

$$U_{11} = -\frac{1}{2} \Phi_{11} \int dl_1 = -\frac{1}{2} \Phi_{11} I_1.$$

Сравнивая полученные выражения для U_{11} , можно точно определить величину среднего значения магнитного потока Φ_{11} , посылаемого током I_1 через свой собственный контур:

$$\Phi_{11} = I_1 L_{11}.$$

Коэффициент самоиндукции или индуктивность L_{11} произвольного замкнутого проводника с током I_1 численно равен магнитному потоку Φ_{11} , посылаемому через контур этого проводника циркулирующим по нему током единичной силы.

За единицу индуктивности принимается индуктивность такого проводника, у которого при силе тока в 1 А возникает связанный с ним магнитный поток Φ , равный 1 Вб, эту единицу называют генри (Гн):

$$1 \text{ [Гн]} = \frac{1 \text{ [Вб]}}{1 \text{ [А]}}.$$

Отметим, что L_{11} , Φ_{11} существенно зависят от формы, размеров и сечения проводника. Для тонкого проводника индуктивность отдельной катушки стремится логарифмически к бесконечности, когда диаметр ее проволоки становится все меньше и меньше.

Другой способ определения L_{11} , свободный от этого недостатка, может быть основан на вычислении энергии катушки через характеристики самого магнитного поля, созданного током I_1 . В этом случае

$$U = -\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A}_1, \mathbf{j}_1) dV = -\frac{1}{2\mu_0} \int_V B_1^2 dV = -\frac{1}{2} I_1^2 L_{11},$$

откуда получаем

$$L_{11} = \frac{1}{I_1^2} \int_V (\mathbf{A}_1, \mathbf{j}_1) dV = \frac{1}{\mu_0 I_1^2} \int_V B_1^2 dV.$$

Поскольку A_1 , j_1 и B_1 пропорциональны току I_1 , то полученное выражение для L_{11} определяется геометрическими и физическими свойствами проводника, но не величиной тока в проводнике.

В частности, для соленоида имеем $B = \mu_0 n I$, где n – число витков на единицу длины. Если радиус катушки r , а длина ее L ($L \gg r$), то объем соленоида равен $V = \pi r^2 L$ и можем записать:

$$L_{11} = \frac{(\mu_0 n I)^2 \pi r^2 L}{\mu_0 I^2} = \mu_0 n^2 V.$$

В системе двух токов общая энергия магнитного взаимодействия проводников равна сумме взаимных U_{12} , U_{21} и собственных U_{11} , U_{22} энергий каждого из токов:

$$\begin{aligned} U &= U_{11} + U_{22} + U_{12} + U_{21} = \\ &= -\frac{1}{2} (L_{11} I_1^2 + L_{22} I_2^2 + L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1) = -\frac{1}{2} \sum_{ik} L_{ik} I_i I_k. \end{aligned}$$

Последнее выражение справедливо для системы из произвольного числа токов ($i, k = 1, 2, \dots, n$).

Все приведенные расчеты относятся к случаю, когда элементы с током и контуры находятся в вакууме. Наличие какой-либо среды в пространстве с токами может изменить энергию и силу взаимодействия полей, поскольку атомы любого вещества обладают собственными или наведенными магнитными моментами, которые создают собственное результирующее магнитное поле. Это приводит к изменению параметров внешнего магнитного поля в присутствии вещества.

Основные выводы

Релятивистским следствием закона Кулона является наличие дополнительной силы к чисто кулоновскому взаимодействию $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$, пропорциональной скорости \mathbf{v} движения заряда q , эту дополнительную силу \mathbf{F}_m можно записать в виде $\mathbf{F}_m = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$. Вектор \mathbf{B} исторически получил название индукции магнитного поля.

Полная сила, действующая на заряд в электромагнитном поле, называется силой Лоренца:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Магнитная составляющая силы Лоренца перпендикулярна вектору скорости, и элементарная работа этой силы равна нулю:

$$\delta A_m = (\mathbf{F}_m, d\mathbf{r}) = (\mathbf{F}_m, \mathbf{v})dt = 0$$

– сила \mathbf{F}_m меняет направление движения, но не величину скорости.

Индукция магнитного поля \mathbf{B} измеряется в СИ в теслах (Тл). В поле с индукцией в 1 Тл на частицу с зарядом в $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл будет действовать сила $1,6 \cdot 10^{-19}$ Н, если $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ и $v = 1$ м/с.

На элемент $d\mathbf{l}$ проводника с током I в магнитном поле индукцией \mathbf{B} действует сила, определяемая законом Ампера:

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

Из опытов Эрстеда по действию тока на магнитную стрелку следует, что в пространстве вокруг проводника с током возникает вихревое магнитное поле. Индукция магнитного поля $d\mathbf{B}$ элементарного отрезка $d\mathbf{l}$ с током I на расстоянии \mathbf{r} от него определяется законом Био – Савара – Лапласа (СИ):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м = $1,25663706144 \cdot 10^{-6}$ Гн/м (СИ) – магнитная постоянная, определяемая выбором системы единиц.

Для вектора индукции магнитного поля \mathbf{B} справедлив принцип суперпозиции – магнитная индукция результирующего поля равна геометрической сумме магнитных индукций \mathbf{B}_i складываемых полей

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i$$

или в случае непрерывного проводника

$$\mathbf{B} = \int_{(L)} d\mathbf{B}.$$

Магнитная индукция в центре кругового витка с током радиусом R :

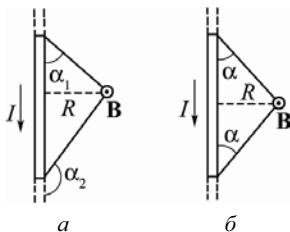
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Магнитная индукция от бесконечно длинного проводника с током на расстоянии R :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком проводника:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$



Обозначения ясны из рис. *а*. Вектор индукции \mathbf{B} перпендикулярен плоскости чертежа, направлен к нам и поэтому изображен точкой.

При симметричном расположении концов проводника относительно точки, в которой определяется магнитная индукция (рис. *б*), $-\cos \alpha_2 = \cos \alpha_1 = \cos \alpha$, и, следовательно,

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \cos \alpha.$$

Циркуляция вектора \mathbf{B} по замкнутому контуру $\oint(\mathbf{B}, d\mathbf{l})$ равна полному току, находящемуся внутри этого контура I , умноженному на постоянную μ_0 – теорема о циркуляции в интегральной форме:

$$\oint_{(L)}(\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu_0 I,$$

в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mu_0 \mathbf{j},$$

где \mathbf{j} – плотность тока.

Магнитная индукция в бесконечно длинном соленоиде или тороиде

$$B = \mu_0 n I,$$

где n – число витков на единицу длины соленоида (тороида); I – сила тока в одном витке.

Два параллельных прямых проводника с токами I_1 и I_2 , расположенные на расстоянии d , взаимодействуют с силой на единицу длины, равной

$$\frac{F}{l} = \pm \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}.$$

Проводники притягиваются (+), если токи текут в одном направлении, и отталкиваются (–), если в противоположных.

Это соотношение определяет единицу силы тока в СИ – ампер. Току в 1 ампер соответствует ток, при прохождении которого по двум прямолинейным параллельным проводникам, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м, между ними возникает сила взаимодействия $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

В системе отсчета, в которой имеются только токи, движущиеся со скоростью \mathbf{v} , электрическое поле

$$\mathbf{E} = [\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

В системе отсчета, в которой отсутствуют токи, а заряды движутся с одной и той же скоростью, магнитное поле

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, \mathbf{E}].$$

Векторный потенциал \mathbf{A} магнитного поля с индукцией \mathbf{B} определяет вихревую часть магнитного поля

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Если магнитное поле создается токами с плотностью \mathbf{j} , распределенными в пространстве,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R}) d^3R}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}.$$

Для прямолинейного проводника с током I , текущим вдоль оси z ,

$$A_z = -\frac{I\mu_0}{2\pi} \ln r,$$

где r – расстояние до проводника.

Векторный потенциал магнитного диполя – контура с током I , линейные размеры которого a много меньше расстояния r до точки наблюдения:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{p}_m, \mathbf{r}]}{r^3},$$

где $\mathbf{p}_m = I \cdot S \cdot \mathbf{n}$ – магнитный момент контура с током I ; S – площадь контура с током; \mathbf{n} – направление положительной нормали.

На рамку с током I и магнитным моментом \mathbf{p}_m в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} действует сила

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m, \nabla) \mathbf{B},$$

втягивающая рамку в область более сильного поля.

Магнитное поле стремится развернуть рамку с током таким образом, чтобы $\mathbf{p}_m \uparrow \mathbf{B}$ – положение устойчивого равновесия. Вращательный момент

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}].$$

Максимальный вращательный момент M_{\max} соответствует взаимно перпендикулярному расположению векторов \mathbf{p}_m и \mathbf{B} – рамка расположена вдоль силовых линий магнитного поля

$$M_{\max} = B \cdot p_m.$$

По величине M_{\max} и p_m можно определить величину вектора \mathbf{B} :

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m},$$

а по направлению вектора \mathbf{p}_m в состоянии устойчивого равновесия определяется направление вектора \mathbf{B} в данной точке магнитного поля.

В неоднородном магнитном поле с распределенными по объему токами плотностью \mathbf{j} энергия каждого из токов I может быть определена по формуле

$$U = -I \int_{(S)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = -I\Phi.$$

Здесь $\Phi = \int_{(S)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S})$ – поток вектора магнитной индукции через поверхность S . Величина потока вектора магнитной индукции в СИ измеряется в веберах (Вб). Один вебер равен потоку однородного магнитного поля индукцией 1 тесла через нормальное сечение площадью 1 м^2 .

В пространстве, где есть магнитное поле, локализована энергия с объемной плотностью

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

В магнитостатике нельзя однозначно решить вопрос, является ли магнитная энергия U энергией взаимодействия элементарных токов с магнитным полем или это энергия, локализованная в созданном токами магнитном поле. Существование электромагнитных волн в свободном пространстве доказывает, что магнитная энергия локализована в пространстве, где есть магнитное поле.

Энергия взаимодействия двух контуров с токами I_1, I_2 равна

$$U = -\frac{I_1 I_2}{2} L_{12} = -\frac{I_1 \Phi_{21}}{2} = -\frac{I_2 \Phi_{12}}{2}.$$

Здесь Φ_{ik} – магнитные потоки поля i -го тока через контур k -го тока; L_{12} – коэффициент взаимной индукции первого Γ_1 и второго Γ_2 контуров,

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}.$$

Коэффициент самоиндукции или индуктивность L_{11} произвольного замкнутого проводника с током I_1 численно равен магнитному потоку Φ_{11} , посылаемому через контур этого проводника циркулирующим по нему током единичной силы:

$$\Phi_{11} = I_1 L_{11}.$$

Для соленоида

$$L_{11} = \mu_0 n^2 V,$$

где V – объем соленоида; n – число витков на единицу длины соленоида.

Для произвольной системы токов энергия взаимодействия равна

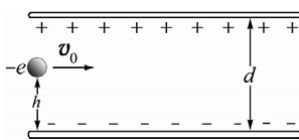
$$U = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k.$$

За единицу коэффициента самоиндукции или индуктивности в СИ принимается индуктивность такого проводника, у которого при силе тока в 1 А возникает связанный с ним магнитный поток Φ , равный 1 веберу, эту единицу называют генри (Гн):

$$1 [\text{Гн}] = \frac{1 [\text{Вб}]}{1 [\text{А}]}.$$

Упражнения

1. Двигаясь горизонтально с востока на запад, электрон попадает в область магнитного поля и отклоняется вниз. Найдите направление магнитного поля. Ответ: с севера на юг.



2. Электрон с массой m и скоростью v_0 ($v_0 \ll c$) попадает в область между двумя параллельными заряженными пластинами.

а) Куда направлено ускорение электрона? Найдите выражение для ускорения через e , E и m .

б) Сколько понадобится электрону времени, чтобы достичь одной из пластин? Ответ запишите через e , E , m , h , d .

в) Предположим, что силовые линии E изображают не электрическое, а магнитное поле, направленное в ту же сторону, что и E . Какая и в каком направлении при этом действует на электрон сила? Ответ запишите через e , v_0 и B .

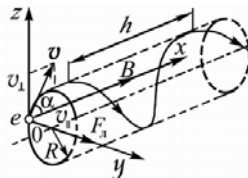
Ответ: а) $a = eE/m$, вверх; б) $t = [2m(d - h)/(eE)]^{1/2}$; в) $F = ev_0B$, к нам.

3. Вычислите период обращения электрона, движущегося со скоростью v в однородном магнитном поле B , причем скорость v перпендикулярна B . Ответ: $T = 2\pi m/(eB)$.

4. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов 400 В, попал в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1,5$ мТл. Определить: 1) радиус R кривизны траектории; 2) частоту n вращения электрона в магнитном поле. Вектор скорости элек-

трона перпендикулярен линиям индукции. Ответ: 1) $R = 4,5$ см; 2) $n = 4,2 \cdot 10^7$ 1/с.

5. Электрон, имея скорость $v = 2$ Мм/с, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 30$ мТл под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению линий индукции. Определить радиус R и шаг h винтовой линии, по которой будет двигаться электрон. Ответ: 0,19 мм; 2,07 мм.



6. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,03$ Тл по окружности радиусом $r = 10$ см. Определить скорость v электрона. Ответ: $2,65 \cdot 10^8$ м/с (релятивистский случай).

7. Определить силу Лоренца F , действующую на электрон, влетевший со скоростью $v = 4$ Мм/с в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30^\circ$ к линиям индукции. Магнитная индукция B поля равна 0,2 Тл. Ответ: $64 \cdot 10^{-15}$ Н.

8. Вычислить радиус R дуги окружности, которую описывает протон в магнитном поле с индукцией $B = 15$ мТл, если скорость v протона равна 2 Мм/с. Ответ: 1,38 м.

9. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 0,1$ Тл возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 100$ кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость v частицы. Ответ: $1 \cdot 10^6$ м/с.

10. Прямой провод, по которому течет ток $I = 1$ кА, расположен в однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции. С какой силой F действует поле на отрезок провода длиной $l = 1$ м, если магнитная индукция B равна 1 Тл? Ответ: 1 кН/м.

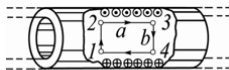
11. Прямой провод длиной $l = 10$ см, по которому течет ток $I = 20$ А, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,01$ Тл. Найти угол α между направлениями вектора \mathbf{B} и тока, если на провод действует сила $F = 10$ мН. Ответ: 30° .

12. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи $I = 1$ кА. Определить силу F , действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии, равном ее длине. Ответ: 0,1 Н.

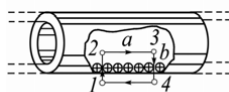
13. Найти магнитную индукцию в центре тонкого кольца, по которому идет ток $I = 10$ А. Радиус R кольца равен 5 см. Ответ: 126 мкТл.
14. По обмотке очень короткой катушки радиусом $r = 16$ см течет ток $I = 5$ А. Сколько витков N проволоки намотано на катушку, если индукция B магнитного поля в ее центре равна 10^{-3} Тл? Ответ: 51.
15. Индукция B магнитного поля в центре кругового витка радиусом $r = 8$ см равна $3,6 \cdot 10^{-5}$ Тл. Определить индукцию B_1 поля витка в точке, расположенной на расстоянии $d = 6$ см от центра витка. Ответ: $1,85 \cdot 10^{-5}$ Тл.
16. При какой силе тока I , текущего по тонкому проводящему кольцу радиусом $R = 0,2$ м, магнитная индукция B в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 0,3$ м, станет равной 20 мкТл? Ответ: 21,5 А.
17. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток $I = 50$ А. Определить магнитную индукцию B в точке, удаленной на расстояние $r = 5$ см от проводника. Ответ: 200 мкТл.
18. Два длинных параллельных провода находятся на расстоянии $r = 5$ см один от другого. По проводам текут в противоположных направлениях одинаковые токи $I = 10$ А каждый. Найти индукцию B магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 2$ см от одного и $r_2 = 3$ см от другого провода. Ответ: 0,17 мТл.
19. Расстояние d между двумя длинными параллельными проводами равно 5 см. По проводам в одном направлении текут одинаковые токи $I = 30$ А каждый. Найти индукцию B магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 4$ см от одного и $r_2 = 3$ см от другого провода. Ответ: 0,25 мТл.
20. Бесконечно длинный прямой провод согнут под прямым углом. По проводу течет ток $I = 100$ А. Вычислить магнитную индукцию B в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины угла на $a = 10$ см. Ответ: 482 мкТл; 82,8 мкТл.
21. По бесконечно длинному прямому проводу, согнутому под углом $\alpha = 120^\circ$, течет ток $I = 50$ А. Найти магнитную индукцию B в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины его на расстояние $a = 5$ см. Ответ: 346 мкТл; 116 мкТл.
22. По контуру в виде равностороннего треугольника идет ток $I = 40$ А. Длина a стороны треугольника равна 30 см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения высот. Ответ: 240 мкТл.
23. Электрон в невозбужденном атоме водорода движется вокруг ядра по окружности радиусом $r = 53$ пм. Вычислить силу эквива-

лентного кругового тока I и индукцию B поля в центре окружности. Ответ: 1,1 мА; 4л Тл.

24. По соленоиду длиной $l = 1$ м и без сердечника, имеющему $N = 10^3$ витков (рисунок) течет ток $I = 20$ А. Определить циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль контура, изображенного на рисунках. Ответ: а) 0; б) 25, 2 мТл·м.



а



б

25. Вычислить циркуляцию вектора индукции вдоль контура, охватывающего токи $I_1 = 10$ А, $I_2 = 15$ А, текущие в одном направлении, и ток $I_3 = 20$ А, текущий в противоположном направлении. Ответ: 2л мКл·м.

26. Двухпроводная линия состоит из длинных параллельных прямых проводов, находящихся на расстоянии $d = 4$ мм друг от друга. По проводам текут одинаковые токи $I = 50$ А. Определить силу взаимодействия токов, приходящуюся на единицу длины провода. Ответ: 0,125 Н/м.

27. Шины генератора представляют собой две параллельные медные полосы длиной $l = 2$ м каждая, отстоящие друг от друга на расстоянии $d = 20$ см. Определить силу F взаимного отталкивания шин в случае короткого замыкания, когда по ним течет ток $I = 10$ кА. Ответ: 200 Н.

28. По двум параллельным проводам длиной $l = 1$ м каждый текут одинаковые токи. Расстояние d между проводами равно 1 см. Токи взаимодействуют с силой $F = 1$ мН. Найти силу тока I в проводах. Ответ: 7 А.

29. По витку радиусом $r = 5$ см течет ток $I = 10$ А. Определить магнитный момент p_m кругового тока. Ответ: 78,6 мА·м².

30. Очень короткая катушка содержит 1000 витков тонкого провода. Катушка имеет квадратное сечение со стороной $a = 10$ см. Найти магнитный момент p_m катушки при силе тока $I = 1$ А. Ответ: 10 А·м².

31. Магнитный момент p_m витка равен 0,2 Дж/Тл. Определить силу тока I в витке, если его диаметр $d = 10$ см. Ответ: 25,5 А.

32. По тонкому стержню длиной $l = 20$ см равномерно распределен заряд $q = 240$ нКл. Стержень приведен во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить: 1) магнитный момент p_m , обусловленный вращением заряженного стержня; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса (p_m/L), если стержень имеет массу $m = 12$ г. Ответ: 1) 4 нА·м²; 2) 10 мКл/кг.

33. Магнитное поле создано бесконечно длинным проводником с током $I = 100$ А. На расстоянии $a = 10$ см от проводника находится точечный диполь, вектор магнитного момента ($p_m = 1 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$) которого лежит в одной плоскости с проводником и перпендикулярен ему. Определить силу F , действующую на магнитный диполь. Ответ: 2 мкН.
34. Определить степень неоднородности магнитного поля (dB/dx), если максимальная сила F_{max} , действующая на точечный магнитный диполь, равна 1 мН. Магнитный момент p_m точечного диполя равен $2 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$. Ответ: 0,5 Тл/м.
35. Проволочный виток радиусом $R = 5$ см находится в однородном магнитном поле напряженностью $H = 2$ кА/м. Плоскость витка образует угол $\alpha = 60^\circ$ с направлением поля. По витку течет ток $I = 4$ А. Найти механический момент M , действующий на виток. Ответ: 39,5 мкН/м.
36. Виток диаметром $d = 20$ см может вращаться около вертикальной оси, совпадающей с одним из диаметров витка. Виток установили в плоскости магнитного меридиана и пустили по нему ток $I = 10$ А. Найти механический момент M , который нужно приложить к витку, чтобы удержать его в начальном положении. Горизонтальная составляющая магнитной индукции поля Земли ≈ 20 мкТл. Ответ: 6,3 мкН·м.
37. Рамка гальванометра длиной $a = 4$ см и шириной $b = 1,5$ см, содержащая $N = 200$ витков тонкой проволоки, находится в магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Найти: 1) механический момент M , действующий на рамку, когда по витку течет ток $I = 1$ мА; 2) магнитный момент p_m рамки при этом токе. Ответ: 1) 12 мкН·м; 2) $120 \text{ мкА} \cdot \text{м}^2$.
38. Найти магнитный поток Φ , создаваемый соленоидом сечением $S = 10 \text{ см}^2$, если он имеет $n = 10$ витков на каждый сантиметр его длины при силе тока $I = 20$ А. Ответ: 25,2 мкВб.
39. Плоский контур, площадь S которого равна 25 см^2 , находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,04$ Тл. Определить магнитный поток Φ , пронизывающий контур, если плоскость его составляет угол $\beta = 30^\circ$ с линиями магнитной индукции. Ответ: 50 мкВб.
40. При двукратном обводе магнитного полюса вокруг проводника с током $I = 100$ А была совершена работа $A = 1$ мДж. Найти магнитный поток Φ , создаваемый полюсом. Ответ: 5 мкВб.
41. Соленоид длиной $l = 1$ м и сечением $S = 16 \text{ см}^2$ содержит $N = 2000$ витков. Вычислить полный магнитный поток Φ при силе тока I в обмотке 10 А. Ответ: 80,5 мВб.

42. Плоский контур, площадь S которого равна 300 см^2 , находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10 \text{ мТл}$. Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. В контуре поддерживается неизменный ток $I = 10 \text{ А}$. Определить работу A внешних сил по перемещению контура с током в область пространства, магнитное поле в которой отсутствует. Ответ: 3 мДж .

43. По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной $a = 10 \text{ см}$, течет ток $I = 20 \text{ А}$, сила которого поддерживается неизменной. Плоскость квадрата составляет угол $\alpha = 20^\circ$ с линиями индукции однородного магнитного поля ($B = 0,1 \text{ Тл}$). Вычислить работу A , которую необходимо совершить для того, чтобы удалить провод за пределы поля. Ответ: $6,84 \text{ мДж}$.

44. Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет $n = 10$ витков на каждый сантиметр длины. Определить плотность энергии w поля, если по обмотке течет ток $I = 16 \text{ А}$. Ответ: 161 Дж/м^3 .

45. Обмотка тороида содержит $n = 10$ витков на каждый сантиметр длины. Сердечник немагнитный. При какой силе тока I в обмотке плотность энергии w магнитного поля равна 1 Дж/м^3 ? Ответ: $1,26 \text{ А}$.

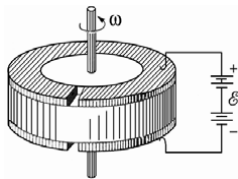
46. По обмотке соленоида индуктивностью $L = 0,2 \text{ Гн}$ течет ток $I = 10 \text{ А}$. Определить энергию U магнитного поля соленоида. Ответ: 10 Дж .

47. Индуктивность L катушки (без сердечника) равна 10^{-4} Гн . При какой силе тока I энергия U магнитного поля равна 100 мкДж ? Ответ: $1,4 \text{ А}$.

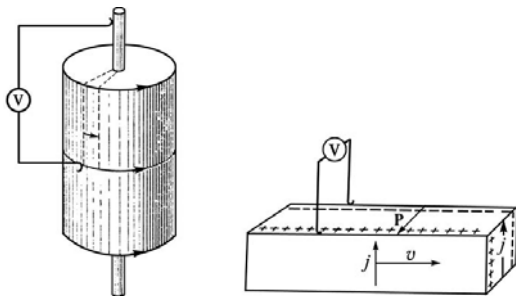
48. Соленоид содержит $N = 1000$ витков. Сила тока I в его обмотке равна 1 А , магнитный поток Φ через поперечное сечение соленоида равен $0,1 \text{ мВб}$. Вычислить энергию U магнитного поля. Ответ: 50 мДж .

49. Дать качественное объяснение опыту Вильсона. Полый цилиндр из диэлектрика находится в магнитном поле, направленном вдоль оси цилиндра. Цилиндр вращается вокруг своей оси. При этом обнаруживается поляризация цилиндра в радиальном направлении. Что изменится, если цилиндр обладает проводимостью? Можно ли воспользоваться таким цилиндром как источником тока?

50. Дать качественное объяснение опыту Рентгена – Эйхенвальда. Круглый эбонитовый диск вращается вокруг своей оси, сверху и снизу к диску плотно прижаты металлические кольца с разрезом (рисунок). Кольца соединены с



полюсами источника ЭДС, так что этот «конденсатор» заряжен до некоторой разности потенциалов. Диск вместе с кольцами приводят во вращение. При этом вблизи вращающегося диска с помощью магнитной стрелки можно обнаружить магнитное поле.



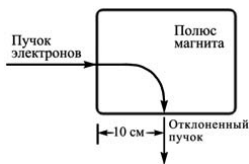
51. Дать качественное объяснение явлению униполярной индукции. Цилиндрическое проводящее тело, намагниченное вдоль оси цилиндра, вращается около своей оси (рисунок). Если расположить скользящие контакты на оси и поверхности цилиндра и замкнуть цепь, возникает электрический ток.

Задачи

1. Радиус электронного синхротрона 100 м. Если смотреть сверху, то электроны движутся между полюсами магнита против часовой стрелки со скоростью, почти равной скорости света. Энергия электронов равна 12 ГэВ.

- Каково направление поля \mathbf{B} ?
- Чему равна величина поля B в предположении, что она постоянна вдоль всего кольца?

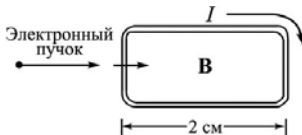
2. Пучок электронов, движущихся со скоростью 10^6 м/с, нужно повернуть на 90° с помощью магнита, как показано на рисунке.



- Каким должно быть направление поля \mathbf{B} , чтобы пучок отклонился вниз?
- Чему равен радиус кривизны траектории электронов между полюсами магнита? (Поле \mathbf{B} постоянно в области между полюсами и равно нулю вне полюсов.)

- 3) Какая сила в ньютонах действует на электрон в магнитном поле?
 4) Вычислите величину B .
 3. Найдите релятивистскую массу электрона, который движется в магнитном поле $B = 1$ Тл по окружности радиусом $R = 10$ см. Найдите отношение этой массы к массе покоя электрона.

4. Предположим, что в телевизионном кинескопе катушки вертикального отклонения пучка создают однородное магнитное поле 50 Гс. Внутри катушек магнитное поле, как показано на рисунке, направлено за плоскость чертежа. Вне катушек $B = 0$. Кинетическая энергия электронов равна 20000 эВ.



- а) Куда отклонится пучок: вверх или вниз?
 б) На какой угол он отклонится?

5. На стержень из немагнитного материала длиной $l = 50$ см намотан в один слой провод так, что на каждый сантиметр длины стержня приходится 20 витков. Определить энергию U магнитного поля внутри соленоида, если сила тока I в обмотке равна 0,5 А. Площадь S сечения стержня равна 2 см^2 .

6. Ион, несущий один элементарный заряд, движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,015$ Тл по окружности радиусом $R = 10$ см. Определить импульс p иона.

7. Частица, несущая один элементарный заряд, влетела в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,5$ Тл. Определить момент импульса L , которым обладала частица при движении в магнитном поле, если ее траектория представляла дугу окружности радиусом $R = 0,2$ см.

8. Электрон движется в магнитном поле с индукцией $B = 0,02$ Тл по окружности радиусом $R = 1$ см. Определить кинетическую энергию T электрона (в джоулях и электрон-вольтах).

9. Заряженная частица влетела перпендикулярно линиям индукции в однородное магнитное поле, созданное в среде. В результате взаимодействия с веществом частица, находясь в поле, потеряла половину своей первоначальной энергии. Во сколько раз будут отличаться радиусы кривизны R траектории начала и конца пути?

10. В циклотроне требуется ускорять ионы гелия (He^{2+}). Частота ν переменной разности потенциалов, приложенной к дуантам, равна 10 МГц. Какова должна быть индукция B магнитного поля,

чтобы период T обращения ионов совпадал с периодом изменения разности потенциалов?

11. Определить число N оборотов, которые должен сделать протон в магнитном поле циклотрона, чтобы приобрести кинетическую энергию $T = 10$ МэВ, если при каждом обороте протон проходит между дуантами разность потенциалов $U = 30$ кВ.

12. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле со скоростью $v = 0,8c$ (c – скорость света в вакууме). Магнитная индукция B поля равна $0,01$ Тл. Определить радиус окружности в двух случаях: 1) не учитывая увеличение массы со скоростью; 2) учитывая это увеличение.

13. Электрон движется в магнитном поле по окружности радиусом $R = 2$ см. Магнитная индукция B поля равна $0,1$ Тл. Определить кинетическую энергию T электрона. (Учесть зависимость массы от скорости.)

14. Электрон, влетевший в камеру Вильсона, оставил след в виде дуги окружности радиусом $R = 10$ см. Камера находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ Тл. Определить кинетическую энергию T электрона. (Учесть зависимость массы от скорости.)

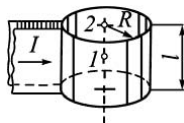
15. Заряженная частица движется по окружности радиусом $R = 1$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Параллельно магнитному полю возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 100$ В/м. Вычислить промежуток времени Δt , в течение которого должно действовать электрическое поле, для того чтобы кинетическая энергия частицы возросла вдвое.

16. Протон влетает со скоростью $v = 100$ км/с в область пространства, где имеются электрическое ($E = 210$ В/м) и магнитное ($B = 3,3$ мТл) поля. Напряженность \mathbf{E} электрического поля и магнитная индукция \mathbf{B} совпадают по направлению. Определить ускорение протона для начального момента движения в поле, если направление вектора его скорости \mathbf{v} : 1) совпадает с общим направлением векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} ; 2) перпендикулярно этому направлению.

17. По двум тонким проводам, изогнутым в виде кольца радиусом $R = 10$ см, текут одинаковые токи $I = 10$ А в каждом. Найти силу F взаимодействия этих колец, если плоскости, в которых лежат кольца, параллельны, а расстояние d между центрами колец равно 1 мм.

18. По двум одинаковым квадратным плоским контурам со стороной $a = 20$ см текут токи $I = 10$ А в каждом. Определить силу F взаимодействия контуров, если расстояние d между соответственными сторонами контуров равно 2 мм.

19. Тонкая лента шириной $l = 40$ см свернута в трубку радиусом $R = 30$ см. По ленте течет равномерно распределенный по ее ширине ток $I = 200$ А (рисунок). Определить магнитную индукцию B на оси трубки в двух точках: 1) в средней точке; 2) в точке, совпадающей с концом трубки.



20. По проводу, согнутому в виде правильного шестиугольника со стороной a , равной 20 см, течет ток $I = 100$ А. Найти индукцию B магнитного поля в центре шестиугольника. Для сравнения определить индукцию поля B_0 в центре кругового провода, совпадающего с окружностью, описанной около данного шестиугольника.

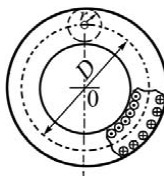
21. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура?

22. Определить максимальную магнитную индукцию B_{\max} поля, создаваемого электроном, движущимся прямолинейно со скоростью $v = 10$ Мм/с, в точке, отстоящей от траектории на расстоянии $d = 1$ нм.

23. На расстоянии $r = 10$ нм от траектории прямолинейно движущегося электрона максимальное значение магнитной индукции $B_{\max} = 160$ мкТл. Определить скорость v электрона.

24. По сечению проводника равномерно распределен ток плотностью $j = 2$ МА/м². Найти циркуляцию вектора напряженности вдоль окружности радиусом $R = 5$ мм, проходящей внутри проводника и ориентированной так, что ее плоскость составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с вектором плотности тока.

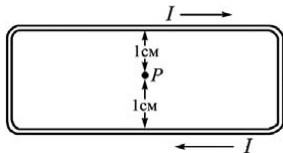
25. Диаметр D тороида без сердечника по средней линии равен 30 см. В сечении тороид имеет круг радиусом $r = 5$ см. По обмотке тороида, содержащей $N = 2000$ витков, течет ток $I = 5$ А (рисунок). Пользуясь законом полного тока, определить максимальное и минимальное значение магнитной индукции B в тороиде.



26. По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии $a = 10$ см друг от друга, текут одинаковые токи $I = 100$ А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу F , действующую на отрезок длиной $l = 1$ м каждого провода.

27. Электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите некоторого радиуса. Найти отношение магнитного момента p_m эквивалентного кругового тока к моменту импульса L орбитального движения электрона. Заряд электрона и его массу считать известными. Указать направления векторов \mathbf{p}_m и \mathbf{L} .

28. Сплошной шар радиусом $R = 10$ см несет заряд $q = 200$ нКл, равномерно распределенный по объему. Шар вращается относительно оси, проходящей через центр шара, с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Определить: 1) магнитный момент p_m кругового тока, обусловленного вращением шара; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса (p_m/L), если масса m шара равна 10 кг.



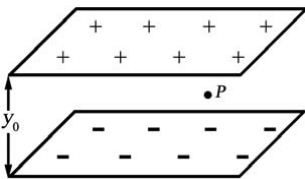
29. По длинной прямоугольной рамке течет ток 10 А (см. рисунок). Будем считать катушку достаточно длинной, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами.

а) Найдите величину и направление поля \mathbf{B} в точке P на расстоянии 1 см от каждого проводника.

б) Рамка движется вправо со скоростью v ; при этом ток возрастает в $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ раз. Чему тогда равно \mathbf{B} в точке P , если $v = 0,6c$?

в) Определите величину и направление поля \mathbf{E} в точке P для случая (б).

30. Две бесконечные плоскости с плотностями зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$ расположены на расстоянии $y_0 = 2$ см друг от друга; $\sigma = 10^{-5}$ Кл/м². Вычислите



а) поле в точке P , когда обе плоскости находятся в покое;

б) поле \mathbf{E} в точке P , когда обе плоскости движутся вправо со скоростью $v = 0,6c$;

в) поле \mathbf{B} в точке P , когда обе плоскости движутся вправо со скоростью $v = 0,6c$. Определите величину и направление поля.

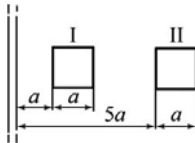
31. Магнитная стрелка, помещенная в центре кругового провода радиусом $R = 10$ см, образует угол $\alpha = 20^\circ$ с вертикальной плоскостью, в которой находится провод. Когда по проводу пустили ток $I = 3$ А, то стрелка повернулась в таком направлении, что угол α увеличился. Определить угол поворота стрелки.

32. На оси контура с током, магнитный момент которого p_m равен 10 мА·м², находится другой такой же контур. Вектор магнитного

момента второго контура перпендикулярен оси. Вычислить механический момент M , действующий на второй контур. Расстояние d между контурами равно 50 см. Размеры контуров малы по сравнению с расстоянием между ними.

33. Магнитное поле создано кольцевым проводником радиусом $R = 20$ см, по которому течет ток $I = 100$ А. На оси кольца расположено другое кольцо малых размеров с магнитным моментом $p_m = 10$ мА·м². Плоскости колец параллельны, а расстояние d между центрами равно 1 см. Найти силу, действующую на малое кольцо.

34. Определить, во сколько раз отличаются магнитные потоки, пронизывающие рамку при двух ее положениях относительно прямого проводника с током, представленных на рисунке.



35. Квадратная рамка со стороной $a = 20$ см расположена в одной плоскости с прямым бесконечно длинным проводом с током. Расстояние l от провода до середины рамки равно 1 см. Вычислить относительную погрешность, которая будет допущена при расчете магнитного потока, пронизывающего рамку, если поле в пределах рамки считать однородным, а магнитную индукцию – равной значению ее в центре рамки.

36. Торойд квадратного сечения содержит $N = 1000$ витков. Наружный диаметр D тороида равен 40 см, внутренний $d = 20$ см. Найти магнитный поток Φ в тороиде, если сила тока I , протекающего по обмотке, равна 10 А.

37. Виток, по которому течет ток $I = 20$ А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,016$ Тл. Диаметр d витка равен 10 см. Определить работу A , которую необходимо совершить, чтобы повернуть виток на угол $\alpha = \pi/2$ относительно оси, совпадающей с диаметром. То же, если угол $\alpha = 2\pi$.

38. Квадратная рамка со стороной $a = 10$ см, по которой течет ток $I = 200$ А, свободно установилась в однородном магнитном поле ($B = 0,2$ Тл). Определить работу, которую необходимо совершить при повороте рамки вокруг оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям магнитной индукции, на угол $\varphi = 2\pi/3$.

10. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

10.1. Введение

Все вещества в той или иной мере взаимодействуют с магнитным полем. У некоторых материалов магнитные свойства сохраняются и в отсутствие внешнего магнитного поля. Намагничивание материалов происходит за счет токов, циркулирующих внутри атомов – вращения электронов и движения их в атоме. Поэтому намагничивание вещества следует описывать при помощи реальных атомных токов, называемых «амперовскими» токами. Ампер первый выдвинул гипотезу о том, что магнетизм вещества связан с циркуляцией атомных токов. С точки зрения квантовой механики магнетизм вещества обусловлен собственными магнитными моментами электронов и ядер, связанными как бы с вращением заряженных частиц вокруг собственной оси – собственными моментами количества движения электронов и ядер (спинами, от английского *spin* – вращаться, вертеться) и с орбитальным движением электронов вокруг ядер. Легкие электроны движутся намного быстрее тяжелых ядер, поэтому магнитные моменты электронов в тысячи раз больше ядерных.

В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов вещества ориентированы обычно беспорядочно, так что создаваемые ими магнитные поля компенсируют друг друга. При наложении внешнего магнитного поля атомы стремятся сориентироваться своими магнитными моментами \mathbf{p}_m по направлению внешнего магнитного поля, и тогда компенсация магнитных моментов нарушается, тело приобретает магнитные свойства – намагничивается. Большинство тел намагничивается очень слабо, и величина индукции магнитного поля в таких веществах B мало отличается от величины индукции магнитного поля в вакууме B_0 . Если магнитное поле слабо усиливается в веществе, то такое вещество называется парамагнетиком $B/B_0 > 1$ (Ce^{3+} , Pr^{3+} , Ti^{3+} , V^{3+} , Fe^{2+} , Mg^{2+} , Li , Na), если ослабевает, то это диамагнетик $B/B_0 < 1$ (Bi , Cu , Ag , Au и др.). Но есть вещества, обладающие сильными магнитными свойствами. Такие вещества называются ферромагнетиками (Fe , Co , Ni и пр.). Эти вещества способны сохранять магнитные свойства и в отсутствие внешнего магнитного поля, представляя собой постоянные магниты.

10.2. Намагниченность вещества

Микроскопические плотности токов в намагниченном веществе чрезвычайно сложны и сильно изменяются даже в пределах одного атома. Но во многих практических задачах столь детальное описание является излишним, и нас интересуют средние магнитные поля, созданные большим числом атомов. В таких макроскопических задачах магнитные свойства вещества характеризуются средним магнитным моментом единицы объема – намагниченностью

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_{(V_m)} \mathbf{p}_m}{V},$$

здесь \mathbf{p}_m – вектор магнитного момента атомов, заключенных в объеме V_m ; V – величина всего объема, $V = \sum_m V_m$.

Единицей измерения вектора \mathbf{M} – намагниченности в СИ является ампер, деленный на метр: $[\mathbf{M}] = \frac{[\mathbf{p}]}{[V]} = \frac{[\text{А} \cdot \text{м}^2]}{[\text{м}^3]} = \frac{[\text{А}]}{[\text{м}]}$. Вектор \mathbf{M} , называемый вектором намагниченности или намагниченностью среды, может быть выражен через усредненные атомные и молекулярные токи плотностью \mathbf{j}_m , непрерывно меняющиеся внутри магнитных материалов (рис. 10.1). Наряду с токами проводимости плотностью \mathbf{j} они создают усредненное макроскопическое поле в веществе, характеризуемое вектором магнитной индукции \mathbf{B} .

Для вектора \mathbf{B} ввиду отсутствия магнитных зарядов справедливо уравнение

$$\oint (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0$$

– поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю, или в дифференциальной форме

$$\text{div} \mathbf{B} = 0.$$

Помимо этого, для вектора \mathbf{B} справедлива теорема о циркуляции, поскольку поле \mathbf{B} является вихревым и его источниками служат токи проводимости и молекулярные токи

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_m)$$

или в интегральной форме – циркуляция вектора \mathbf{B} по любому замкнутому контуру Γ равна сумме токов, пронизывающих

поверхность, которая ограничена контуром Γ , и умноженных на μ_0 :

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu_0 (I + I_m),$$

где I – полный ток проводимости; I_m – полный ток намагничивания.

Для того чтобы связать вектор \mathbf{M} с током I_m , рассмотрим равномерно намагниченный параллельно оси цилиндрический стержень. Равномерная намагниченность означает, что плотность атомных циркулирующих токов внутри материала j_m повсюду постоянна.

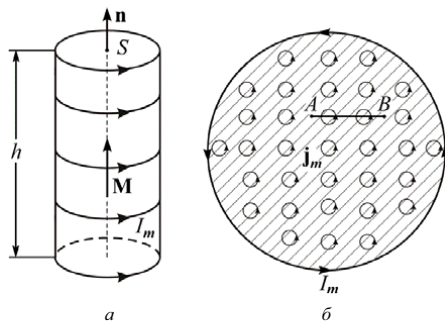


Рис. 10.1. Магнитный момент единицы объема \mathbf{M} определяется усредненными атомными и молекулярными токами: a – равномерно намагниченный параллельно оси стержень; b – атомные и молекулярные токи в сечении стержня, проведенном перпендикулярно оси; I_m – полный ток намагничивания, создаваемый всеми некомпенсированными атомными и молекулярными токами

Каждый атомный ток j_m в плоскости сечения стержня, перпендикулярной его оси, представляет микроскопический кружок, причем все микротоки текут в одном направлении – против часовой стрелки (рис. 10.1). В местах соприкосновения отдельных атомов и молекул молекулярные токи противоположно направлены и компенсируют друг друга. Некомпенсированными остаются лишь токи, текущие вблизи поверхности материала, создавая на поверхности материала некоторый макроскопический ток I_m , возбуждающий во внешнем пространстве магнитное поле, равное полю, созданному всеми молекулярными токами. Маг-

нитный момент такого тока $I_m \mathbf{S} \mathbf{n}$ равен магнитному моменту всего цилиндра

$$I_m \mathbf{S} \mathbf{n} = Sh \mathbf{M}.$$

Здесь \mathbf{n} – вектор нормали, проведенный к основанию цилиндра и параллельный вектору \mathbf{M} . Поверхностный ток намагничивания на единицу длины стержня равен

$$\frac{I_m}{h} = M$$

– величине вектора магнитного момента единицы объема стержня. Это очень похоже на положение дел с поляризацией вещества, где вектор поляризации был равен поверхностной плотности поляризационных зарядов (п. 3.2).

Ток с линейной плотностью I_m/h , текущий по боковой поверхности цилиндра, создает магнитное поле индукцией

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 I \frac{N}{h} \mathbf{n} = \mu_0 \frac{I_m}{h} \mathbf{n} = \mu_0 \mathbf{M},$$

где I – атомный ток в плоскости стержня, N – число атомов в стержне.

Если из вектора \mathbf{B} вычтем составляющую поля, возникшую благодаря молекулярным токам, то оставшаяся часть поля порождена только токами проводимости, для которой можно записать:

$$\oint_{\Gamma} ((\mathbf{B} - \mathbf{B}_m), d\mathbf{l}) = \mu_0 I.$$

Подставив в полученную формулу выражение для \mathbf{B}_m и разделив левую и правую части равенства на μ_0 , получим

$$\oint_{\Gamma} ((\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}), d\mathbf{l}) = \mu_0 I \quad \text{или} \quad \oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = I,$$

где новый введенный вектор \mathbf{H} называется вектором напряженности магнитного поля,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

Единицей измерения напряженности магнитного поля в СИ является А/м. В гауссовой системе единиц H измеряется в эрстедах: 1 А/м соответствует $4\pi \cdot 10^{-3}$ Э.

В дифференциальной форме уравнение, описывающее поведение вектора индукции магнитного поля в веществе, имеет вид

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \text{rot} \mathbf{M}.$$

Откуда получаем для вектора плотности молекулярных токов выражение

$$\mathbf{j}_m = \text{rot}\mathbf{M}.$$

Если намагниченность однородна $\mathbf{M} = \text{const}$, то $\mathbf{j}_m = 0$ – средняя плотность молекулярных токов равна нулю.

Определим индукцию магнитного поля \mathbf{B}_m , созданного молекулярными токами в полностью намагниченном куске железа.

Пусть магнитный момент каждого атома p_m и в единице объема содержится n атомов. Магнитный момент единицы объема

$$M = p_m n,$$

если все магнитные моменты атомов параллельны. По определению,

$$M = \frac{I_m}{h}.$$

Откуда можем найти поверхностный ток намагничивания на единицу длины, обусловленный внутриатомными токами, называемыми токами Ампера,

$$\frac{I_m}{h} = p_m n.$$

Для железа $n = 8,51 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, $p_m = 1,86 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$, откуда

$$\frac{I_m}{h} = 1,58 \cdot 10^6 \text{ А/м}.$$

Эта величина значительно превышает ток, которого можно достичь в обычных соленоидах. Соответственно, индукция магнитного поля, обусловленная таким поверхностным током, равна

$$B_m = \mu_0 \frac{I_m}{h} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,58 \cdot 10^6 \approx 1,99 \text{ Тл}.$$

Этот результат согласуется с измерениями.

Введенный вспомогательный вектор \mathbf{H} позволяет записать систему уравнений для постоянного магнитного поля в виде

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j},$$

$$\text{div}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0.$$

В этой системе явно отсутствуют токи намагничивания. Причем, если отсутствуют токи проводимости и свободные заряды, то полученные уравнения будут аналогичны уравнениям электростатики

$$\text{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \text{rot}\mathbf{E} = 0,$$

$$\text{div}\mathbf{B} = \mu_0 \text{div}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0, \quad \text{div}\mathbf{D} = 0.$$

Такое чисто алгебраическое соответствие привело в прошлом к тому, что именно вектор \mathbf{H} использовался для описания магнитного поля. Однако фундаментальными полями все же являются поля, задаваемые векторами \mathbf{E} и \mathbf{V} , поскольку именно эти величины определяют действия на электрические заряды и электрические токи.

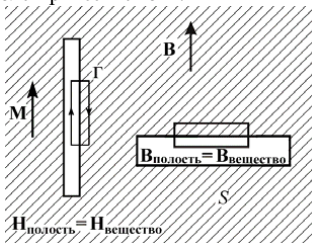


Рис. 10.2. Определение магнитной индукции в узкой длинной полости Γ и тонкой дискообразной полости S

Но приведенные соотношения, тем не менее, полезны, поскольку, как известно, одинаковые уравнения имеют одинаковые решения. Поэтому мы, в частности, зная \mathbf{H} , можем рассчитать индукцию магнитного поля в различных полостях магнитных веществ. Так, для длинной узкой полости, вырезанной параллельно вектору \mathbf{M} , имеем (рис. 10.2)

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 0 \quad \text{или} \quad \text{rot} \mathbf{H} = 0.$$

Следовательно, обходя вещество и полость по контуру Γ , получаем определение магнитной индукции в узкой длинной полости

$$\mathbf{H}_{\text{полость}} = \mathbf{H}_{\text{вещество}}$$

Величина вектора намагниченности в полости равна нулю, поэтому

$$\frac{\mathbf{V}_{\text{полость}}}{\mu_0} = \frac{\mathbf{V}_{\text{вещество}}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

или

$$\mathbf{V}_{\text{полость}} = \mathbf{V}_{\text{вещество}} - \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{H}_{\text{вещество}}$$

Измерив величину вектора индукции $\mathbf{V}_{\text{полость}}$ в узком канале, можно определить напряженность магнитного поля в окружающем магнетике $\mathbf{H}_{\text{вещество}}$.

Если в магнетике вырезать дискообразную тонкую полость, расположенную основаниями перпендикулярно вектору $\mathbf{M} + \mathbf{H}$, то из условия $\text{div}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0$ находим

$$\mathbf{H}_{\text{полость}} = \mathbf{H}_{\text{вещество}} + \mathbf{M}$$

или в величинах индукции

$$\mathbf{B}_{\text{полость}} = \mathbf{B}_{\text{вещество}}$$

– измерив величину индукции в тонкой дискообразной полости, расположенной основаниями перпендикулярно вектору индукции магнитного поля $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, можно определить величину индукции магнитного поля в магнетике.

И, наконец, в сферической полости, как известно, напряженность электрического поля равна

$$\mathbf{E}_{\text{полость}} = \mathbf{E}_{\text{вещество}} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0},$$

что соответствует в случае магнитного поля соотношению

$$\mathbf{H}_{\text{полость}} = \mathbf{H}_{\text{вещество}} + \frac{\mathbf{M}}{3} \quad \text{или} \quad \mathbf{B}_{\text{полость}} = \mathbf{B}_{\text{вещество}} - \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M}.$$

10.3. Магнитная восприимчивость и относительная магнитная проницаемость вещества

Магнитная восприимчивость – безразмерная величина, характеризующая связь намагниченности вещества с магнитным полем в веществе. В статических магнитных полях магнитная восприимчивость равна отношению намагниченности вещества M к напряженности H намагничивающего поля:

$$\chi = \frac{M}{H}.$$

Это определение дано в силу исторических причин, когда считалось, что фундаментальной характеристикой магнитного поля является величина \mathbf{H} :

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H},$$

хотя удобнее было определить через вектор индукции магнитного поля \mathbf{B} ($\mathbf{M} = \chi_1 \mathbf{B}$). Однако это различие не является принципиальным, и мы будем придерживаться сложившегося исторически определения, в котором χ является безразмерной величиной.

Магнитная восприимчивость, рассчитанная на один килограмм вещества, называется удельной:

$$\chi_{\text{уд}} = \frac{\chi}{\rho}, \quad [\text{м}^3/\text{кг}],$$

где ρ – плотность вещества, а магнитная восприимчивость одного моля – молярной или атомной:

$$\chi_{\text{мол}} = m_{\mu} \chi_{\text{уд}} = \chi \frac{m_{\mu}}{\rho} \quad [\text{м}^3/\text{моль}],$$

где m_{μ} – молярная масса вещества.

Магнитная восприимчивость может быть как положительной, так и отрицательной. Отрицательной магнитной восприимчивостью обладают диамагнетики, намагничивающиеся против поля. Положительной – парамагнетики и ферромагнетики. Магнитная восприимчивость в диамагнетиках и парамагнетиках мала по абсолютной величине ($\approx 10^{-6} \div 10^{-4}$) и слабо зависит от H . В ферромагнетиках χ может достигать величины $10^3 \div 10^5$ и сильно, нелинейно изменяется с H .

Магнитная проницаемость μ – безразмерная величина, характеризующая реакцию среды на воздействие внешнего магнитного поля напряжённостью H

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

Поскольку $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, то из определения $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ следует связь между магнитной восприимчивостью χ и относительной магнитной проницаемостью ($B = (1 + \chi)\mu_0 H$)

$$\mu = 1 + \chi.$$

В свободном пространстве величина индукции магнитного поля связана с напряжённостью магнитного поля соотношением

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}.$$

В веществе

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}.$$

Величина μ в диа- и парамагнетиках ($|\chi| \ll 1$) и относительно слабых магнитных полях ($\mathbf{p}_m \mathbf{B} / kT \ll 1$) практически не зависит от напряженности магнитного поля H и незначительно отличается от единицы. В ферромагнетиках ($\chi \gg 1$), напротив, μ сильно изменяется с увеличением H .

Магнитное поле, возникающее в магнетике, существенно зависит от формы магнетика. Например, в очень длинном цилиндрическом магнетике, по которому не течет ток проводимости, напряженность магнитного поля внутри магнетика \mathbf{H} равна напряженности магнитного поля \mathbf{H}_0 вне магнетика, так как $\text{rot} \mathbf{H} = 0$ в отсутствие токов (рис. 10.3).

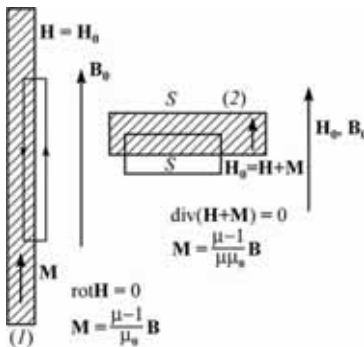


Рис. 10.3. Намагничивание длинного (1) и короткого (2) цилиндров во внешнем магнитном поле \mathbf{B}_0 . Магнитный момент длинного цилиндра в μ раз больше магнитного момента тонкого диска

Поэтому из определения χ следует

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} = \chi \mathbf{H}_0 = \frac{\mu - 1}{\mu_0} \mathbf{B}_0,$$

где $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ – вектор индукции магнитного поля вне магнетика.

Для очень короткого дискообразного магнетика в силу условия $\operatorname{div}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0$ и $\mathbf{M} = 0$ вне магнетика имеем

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H} + \mathbf{M},$$

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} = \chi(\mathbf{H}_0 - \mathbf{M}),$$

откуда получаем

$$\mathbf{M} = \frac{\chi}{\chi + 1} \mathbf{H}_0 = \frac{\mu - 1}{\mu \mu_0} \mathbf{B}_0.$$

При одинаковом внешнем магнитном поле \mathbf{B}_0 намагниченность магнетиков с большой проницаемостью μ во втором случае много меньше, чем в первом. Это можно наблюдать в следующем опыте. Если внести пучок тонких железных стержней, стянутых нитью, в поле магнита, величина которого подобрана так, что в целом металлический пучок, составленный из отдельных стержней, не поднимается этим магнитом. Пучок в этом случае подобен толстому стержню, и его намагниченность мала. Но если нитки, стягивающие пучок, убрать, то все тонкие стержни с силой притянутся к магниту. Теперь каждый стержень из пучка ведет себя подобно тонкому длинному цилиндру и намагничивается в μ раз сильнее.

10.4. Взаимодействие постоянных токов в однородной магнитной среде

Система уравнений для векторов \mathbf{H} и \mathbf{B} , полученная с учетом молекулярных токов в среде, имеет вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} & \text{или} & \oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = I, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 & \text{или} & \oint (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}.$$

В однородной магнитной среде уравнение для \mathbf{B} можно переписать в виде

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 & \text{или} & \oint_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{j} & \text{или} & \oint_\Gamma (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu\mu_0 I. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что если заданы токи проводимости, вектор \mathbf{B} в среде по сравнению с вакуумом увеличивается в μ раз. Так, в длинном соленоиде с сердечником индукция магнитного поля равна

$$B = \mu\mu_0 In,$$

где $n = N/h$ – число витков на единицу длины соленоида; N – полное число витков; h – длина соленоида; μ – магнитная проницаемость сердечника.

На элемент $d\mathbf{l}$ тока I в магнитной среде действует сила Ампера со стороны внешнего магнитного поля и магнитного поля молекулярных токов:

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_m)] = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

В частности, два параллельных тока в магнитной среде с проницаемостью μ будут взаимодействовать на единицу длины с силой (рис. 10.4):

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d},$$

в μ раз большей по сравнению с взаимодействием токов в вакууме. Это связано с тем, что магнитное поле первого тока I_1 в магнитной среде усиливается в μ раз по сравнению с вакуумом и равно на расстоянии d от первого проводника

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi d},$$

как это следует из уравнения для индукции поля в веществе

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_1 = \mu\mu_0 \mathbf{j}_1$$

или в интегральной форме

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{B}_1, d\mathbf{l}) = \mu\mu_0 I_1$$

согласно теореме о циркуляции для индукции магнитного поля в веществе.

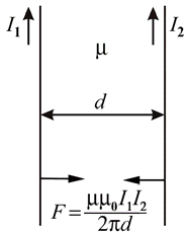


Рис. 10.4. В веществе с магнитной проницаемостью μ токи взаимодействуют с силой, в μ раз большей, чем в вакууме

Соответственно, в μ раз возрастает сила действия первого тока на второй. Магнитное поле, порождаемое каждым из токов I_1 и I_2 , не действует на сам этот ток, поскольку, согласно теореме о циркуляции,

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{B}_m, d\mathbf{l}) = \mu\mu_0 I_m$$

– внутри проводников $I_m = 0$ – токи намагничивания отсутствуют и дополнительное самодействие магнитного поля не проявляется.

Соответственно, в μ раз в магнитной среде возрастают коэффициенты взаимоиנדукции и самоиндукции контуров Γ_1 и Γ_2 :

$$L_{21} = L_{12} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1 \Gamma_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|},$$

$$L_{11} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi I^2} \iint_V \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{j}') dV dV'}{\Delta R}.$$

Энергию магнитного поля в веществе можно подсчитать, исходя из соотношения (п. 9.13):

$$dU = Id\Phi.$$

В частности, для случая поля в соленоиде с сердечником имеем

$$\Phi = BSN, \quad B = \mu\mu_0 I \frac{N}{h}.$$

Здесь h , S – длина и площадь поперечного сечения соленоида; N – полное число витков в соленоиде. Выразив I через B , получаем

$$dU = \frac{\mathbf{B}}{\mu\mu_0 N / h} d\mathbf{B} \cdot SN = (\mathbf{H}, d\mathbf{B}) V.$$

Или для плотности энергии магнитного поля

$$dw_m = (\mathbf{H}, d\mathbf{B}).$$

В случае линейной связи между \mathbf{B} и \mathbf{H} $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$ последнее выражение можно проинтегрировать:

$$w_m = \frac{(\mathbf{B}, \mathbf{H})}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right].$$

Зная плотность энергии магнитного поля, можно вычислить магнитную энергию, локализованную в произвольном объеме V :

$$U = \int_{(V)} w_m dV.$$

Отметим еще раз, что вопрос о локализации энергии именно в магнитном поле может быть решен лишь при рассмотрении динамики электромагнитных процессов.

10.5. Классификация магнетиков

Все известные вещества проявляют в магнитном поле магнитные свойства и являются, таким образом, магнетиками. Разнообразие типов магнетиков обусловлено различием магнитных свойств микрочастиц, образующих вещество, особенностями их взаимодействий, фазовыми состояниями вещества и другими факторами.

Магнетики можно разделить на три основные группы: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

Диамагнетизм (от греч. *dia* – расхождение и магнетизм) – свойство веществ намагничиваться навстречу приложенному магнитному полю.

В диамагнетиках индукция магнитного поля B становится слабее по сравнению с индукцией магнитного поля в свободном пространстве, но это ослабление очень незначительно. Диамагнетики намагничиваются против поля, и поэтому для них

$$\chi = \frac{B}{B_0} - 1 < 0.$$

Для диамагнетиков χ очень мала, $|\chi| \approx 10^{-5} \div 10^{-6}$.

Магнитная восприимчивость диамагнетиков

Вещество	$\chi, 10^{-6}$	Вещество	$\chi, 10^{-6}$
He	-2,02	Au	-29,59
Cu	-5,41	Bi	-284,0
Zn	-11,40	H ₂ O (жид.)	-13,0 (0 °C)
Ag	-21,50	CO ₂ (газ)	-21,0

Парамагнетизм (от греч. *para* – возле, рядом и магнетизм) – свойство веществ во внешнем магнитном поле намагничиваться в направлении этого поля, поэтому внутри парамагнетика к действию внешнего поля прибавляется действие наведенного внутреннего поля.

Магнитная восприимчивость парамагнетиков

Вещество	$\chi, 10^{-6}$	Вещество	$\chi, 10^{-6}$
Mg	13,25	Sr	91,2
Na	15,1	Ti	161,0
Rb	18,2	U	414,0
Ba	20,4	Pu	627,0
K	21,25	FeS	1074,0
Li	24,6	EuCl ₃	2650,0
Ca	44,0	CoCl ₃	121660,0
W	55,0		

У парамагнетиков магнитная восприимчивость положительна – индукция магнитного поля в парамагнетиках B увеличивается по сравнению с индукцией поля в свободном пространстве. Величина магнитной восприимчивости в парамагнетиках также очень мала $\chi > 0$, $\chi = 10^{-5} \div 10^{-1}$

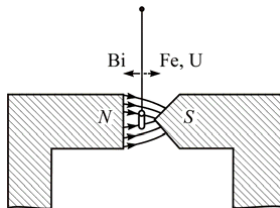


Рис. 10.5. Ферромагнетики (Fe, Co, Ni и др.) и парамагнетики (U, Pu, FeS) втягиваются в область более сильного магнитного поля, диамагнетики (Bi и др.) – выталкиваются из области сильного поля

У ферромагнетиков магнитная восприимчивость положительна и очень велика $\chi = 10 \div 10^5$. В ферромагнетиках происходит резкое усиление внешних магнитных полей. Причем для ферромагнетиков χ сложным образом зависит от величины магнитного поля. Типичными ферромагнетиками являются Fe, Co, Ni, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, а также соединения ферромагнитных материалов с неферромагнитными: Fe_3Al , Ni_3Mn , $ZnCMn_3$ и др.

Поведение диамагнитных и парамагнитных веществ в магнитном поле обусловлено особенностями строения атомов этих веществ. Атомы диамагнетиков не имеют постоянных магнитных моментов – суммарный магнитный момент каждого атома равен нулю. Спиновые и орбитальные магнитные моменты электронов скомпенсированы так, что у атома средний магнитный момент равен нулю. Если атом с нулевым магнитным моментом поместить в магнитное поле, то в таком атоме с точки зрения классической физики каждая электронная орбита, представляющая элементарный ток, будет стремиться сориентироваться магнитным моментом по полю. Однако, поскольку вращающийся по орбите электрон обладает собственным механическим моментом, то в силу гироскопического эффекта начнется прецессионное вращение орбиты электрона в сторону, противоположную первоначальному вращению электрона. Прецессионное вращение электронных орбит порождает в атоме момент, направленный в сторону, противоположную силовым линиям поля. В результате, поскольку собственный магнитный момент атома равен нулю, а наведенный благодаря прецессионному движению орбиты магнитный момент направлен против поля, внешнее магнитное поле в диамагнетике будет немного ослабляться (п. 10.7).

Атомы парамагнитных веществ обладают собственным ненулевым магнитным моментом. Такие атомы во внешнем магнитном поле, кроме диамагнитного эффекта, стремятся выстроиться своим магнитным моментом по направлению магнитного поля. Поскольку эффект от ориентации магнитных моментов по полю сильнее диамагнитного, то наведенное магнитное поле в парамагнетиках усиливает внешнее магнитное поле. Ориентацию парамагнитных атомов по направлению магнитного поля стремится разрушить тепловое движение атомов. Поэтому парамагнетизм проявляется слабее с ростом температуры и усиливается при низких температурах.

В ферромагнитных материалах в отсутствие внешнего магнитного поля существуют области со спонтанной намагниченностью – домены (от французского *domaine* – владение, область, среда). Обычно домены имеют размеры $10^{-3} \div 10^{-2}$ см, и их можно наблюдать в микроскоп при покрытии образцов ферромагнитным порошком.

Векторы магнитного поля отдельных доменов ориентированы так, что суммарный магнитный момент равен нулю. Во внешнем магнитном поле домены, содержащие большое число ориентированных элементарных магнитных моментов, выстраиваются по направлению магнитного поля. Поле в веществе резко усиливается, это еще сильнее заставляет ориентироваться домены, и магнитное поле в ферромагнетиках резко возрастает. В этом смысле поведение ферромагнетиков в магнитном поле подобно поведению сегнетоэлектриков во внешнем электрическом поле.

10.6. Магнитный момент и момент количества движения электронов в атомах

Пусть электрон движется по круговой орбите в атоме вокруг положительно заряженного ядра. Найдем соотношение между моментом импульса электрона на орбите

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}]$$

и магнитным моментом, обусловленным движением электрона по орбите,

$$\mathbf{p}_m = I \cdot S \cdot \mathbf{n}.$$

Здесь \mathbf{n} – вектор положительной нормали; $S = \pi r^2$ – площадь орбиты; I – ток, обусловленный движением электрона по орбите:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e}{T},$$

где e – элементарный заряд; $T = 2\pi r/v$ – период обращения электрона по орбите.

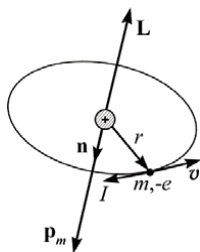


Рис. 10.6. Соотношение между орбитальными механическим \mathbf{L} и магнитным \mathbf{p}_m моментами электрона

$$\mathbf{p}_m = -\frac{e}{2m} \mathbf{L}$$

Подставляя полученные значения для I и T в выражение момента, получаем соотношение между орбитальными магнитным и механическим моментами электрона

$$\mathbf{p}_m = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 \cdot \mathbf{n} = -\frac{e}{2m} \mathbf{L}.$$

Знак «минус» означает, что векторы магнитного и механического моментов у электрона при орбитальном движении направлены перпендикулярно плоскости орбиты в противоположные стороны (рис. 10.6), поскольку заряд электрона отрицателен.

Полученное соотношение для орбитальных магнитного и механического моментов остается справедливым и при квантовомеханическом рассмотрении орбитального движения электрона.

Помимо орбитального движения, электрон обладает собственным механическим моментом – спином. Электрон как бы вращается вокруг собственной оси, и в результате этого у него возникают момент количества движения и магнитный момент. Согласно представлению классической физики,

$$\mathbf{p}_{m \text{ кл}} = -\frac{er^2}{5} \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{L}_{\text{кл}} = \frac{2}{5} mr^2 \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{p}_{m \text{ кл}} = -\frac{e}{2m} \mathbf{L}_{\text{кл}}.$$

Но по чисто квантовым причинам соотношение между \mathbf{p}_m и \mathbf{L} в два раза больше

$$\mathbf{p}_{m \text{ кв}} = \boldsymbol{\mu}_B = -\frac{e}{m} \mathbf{L}_{\text{кв}},$$

где $L_{\text{кв}} = \hbar/2$ – спин электрона; $\boldsymbol{\mu}_B$ – квантовый магнитный момент электрона – магнетон Бора. Поэтому минимальное значение магнитного момента электрона равно $\mu_B = \frac{e}{2m} \hbar = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$.

Полученный результат не зависит от расстояния до оси вращения. Поэтому можно ожидать, что такой же магнитный момент имеет электрон, вращающийся вокруг собственной оси. Согласно квантовой механике, все электроны обладают собственным магнитным моментом $\mu_e = \mu_B = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$. У атома железа магнитные моменты всех 26 орбитальных электронов, кроме двух, взаимокompенсированы. Поэтому магнитный момент атома железа $\mu_{\text{Fe}} = 2\mu_e = 1,86 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$, что согласуется с экспериментом (п. 10.2).

В общем случае в изолированном атоме направление магнитного момента всегда противоположно моменту импульса, отношение их можно записать в виде

$$\mathbf{p}_m = -g \left(\frac{e}{2m} \right) \mathbf{L}.$$

Множитель g характеризует состояние атома. Для чисто орбитального движения $g = 1$, для чисто спиновых $g = 2$, а для сложных систем, подобных атому, $1 < g < 2$. Величина g называется фактором Ланде, в честь немецкого физика А. Ланде, введшего его в 1921 г. Величина g рассчитывается квантовомеханически. Подобное же соотношение выполняется для протона и нейтрона

$$\mathbf{p}_m = g_{p,n} \left(\frac{e}{2m_{p,n}} \right) \mathbf{L}.$$

Но для протона $g = 2.2,79$, для нейтрона $g = 2 \cdot (-1,93)$. Интересно, но нейтрон в магнитном смысле не нейтрален. Он напоминает маленький магнит, созданный отрицательным вращающимся зарядом.

10.7. Диамагнетизм

Диамагнитные свойства атомов связаны с незатухающими микроскопическими токами атомов, индуцированными прецессионными движениями атомных орбит. В создании диамагнитных свойств атома участвуют все электроны атома.

Диамагнетизм универсален и присущ всем веществам. Однако во многих случаях диамагнетизм перекрывается парамагнетизмом и ферромагнетизмом и составляет лишь небольшую часть суммарной намагниченности вещества.

Первая теория диамагнетизма газа невзаимодействующих атомов в слабых магнитных полях была создана в 1905 г. П. Ланжевенем. Теория Ланжевена основана на вычислении магнитного момента, возникающего в результате ларморовой прецессии электрона, обращаемого по атомной орбите в магнитном поле.

На орбитальный магнитный момент \mathbf{p}_m электрона в магнитном поле \mathbf{B} действует момент силы $[\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]$, стремящийся развернуть \mathbf{p}_m параллельно вектору \mathbf{B} . Но поскольку атомный магнит является микроскопическим гироскопом с моментом количества движения \mathbf{L} , то под действием момента силы $[\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]$ он начнет прецессировать – вращаться вокруг оси, параллельной магнитному полю (рис.10.7).

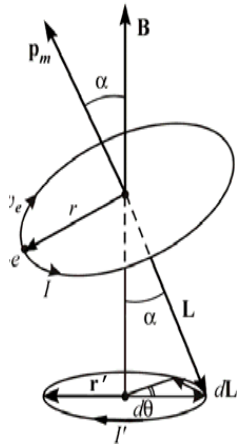


Рис. 10.7. Прецессия электронной орбиты атома во внешнем магнитном поле. I' – прецессионный ток. Электрон на орбите в магнитном поле индукцией \mathbf{B} совершает прецессионное движение, порождающее ток I' , направленный противоположно току I

Найдем угловую скорость прецессии. При повороте проекции вектора \mathbf{L} на угол $d\theta$ момент импульса изменяется на величину

$$dL = L \sin \alpha d\theta.$$

Из основного уравнения динамики вращательного движения следует

$$\frac{dL}{dt} = p_m B \sin \alpha \quad \text{или} \quad dL = p_m B \sin \alpha dt.$$

Приравнявая dL , получаем угловую скорость прецессии – вращения конца вектора \mathbf{L} в плоскости, перпендикулярной направлению вектора \mathbf{B} :

$$\omega_L = \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_m}{L} B.$$

Для орбитального движения электрона в атоме

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}.$$

Поэтому имеем для ларморовой частоты прецессии

$$\omega_L = -\frac{e}{2m} B$$

– частота прецессии пропорциональна величине вектора \mathbf{B} .

Итак, в соответствии с классической теорией электронных орбиты в атоме должны прецессировать в магнитном поле. Причем

направление прецессионного движения противоположно направлению первоначального вращения электрона. Порождаемый этим движением магнитный момент атома, диамагнитный момент, будет направлен против вектора \mathbf{B} , а ток, связанный с прецессионным движением электрона $I' = \frac{e}{T}$, где $T = \frac{2\pi}{\omega_L}$, направлен против орбитального микротока I .

Величина диамагнитного момента для одной орбиты в атоме равна

$$|\mathbf{p}'_m| = I'S = \frac{e}{T} \pi \bar{r}^2 = \frac{e}{(2\pi\bar{r}/\omega_L\bar{r})} \pi \bar{r}^2 = \frac{e\omega_L}{2} \bar{r}^2.$$

Здесь \bar{r}^2 – среднее от квадрата проекции радиус-вектора \mathbf{r} электрона на орбите на плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{B} . По определению, $\bar{r}^2 = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle$, $r^2 = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle$. Поскольку $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = r^2/3$, то имеем $\bar{r}^2 = 2r^2/3$. Подставим в выражение для \mathbf{p}'_m найденные значения ω_L и \bar{r}^2 :

$$\mathbf{p}'_m = -\frac{e^2 r^2}{6m} \mathbf{B},$$

диамагнитный момент направлен против вектора \mathbf{B} .

Полный магнитный момент атома

$$\mathbf{p}_m = \sum_i \mathbf{p}_{m_i} + \sum \mathbf{p}'_{m_i} = -\frac{e^2}{6m} \sum_i r_i^2 = -\frac{e^2 Z \bar{R}^2}{6m} \mathbf{B}.$$

Первая сумма – полный магнитный момент, связанный с орбитальным и спиновым движением электронов в диамагнитном атоме, равна нулю. Кроме того, введены обозначения: Z – число электронов в атоме (атомный номер), \bar{R}^2 – среднее значение квадрата эффективного радиуса электронной оболочки атома.

Магнитный момент единицы объема диамагнитного вещества равен

$$\mathbf{M} = -\frac{e^2 Z \bar{R}^2 N}{6m} \mathbf{B},$$

где N – число атомов в единице объема вещества, $N = \rho N_A / \mu$.

Из полученной формулы видно, что магнитный момент объема диамагнитного вещества не зависит от температуры, пока kT

мало по сравнению с расстоянием между основным и возбужденными электронными уровнями в атоме и \mathbf{M} увеличивается с атомным номером Z .

Если бы у нас дополнительное магнитное поле создавалось в длинном цилиндре микроскопическими токами I_m , то индукция магнитного поля в таком цилиндре была бы равна (п. 10.2)

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 I_m \frac{N}{L} \mathbf{n} = \mu_0 I_m \frac{NS}{LS} \mathbf{n} = \frac{\mu_0 \sum \mathbf{p}_m}{V} = \mu_0 \mathbf{M},$$

где L , S – длина и площадь основания цилиндра; $\sum I_m SN = p_m$ – магнитный момент цилиндра объемом $V = SL$; $\mathbf{M} = \sum \mathbf{p}_m / V$ – магнитный момент единицы объема цилиндра.

Рассматривая атомы и молекулы вещества как элементарные токи, можем записать для индукции магнитного поля в тонком длинном цилиндре, находящемся во внешнем магнитном поле индукцией \mathbf{B}_0 :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{B}_0(1 + \chi) = \mu \mathbf{B}_0.$$

В случае диамагнетика, по определению (п. 10.3), магнитная восприимчивость равна

$$\chi = \frac{\mu_0 M}{B} = -\frac{\mu_0 e^2 \bar{Z} \bar{R}^2 N}{6m}.$$

Молярная диамагнитная восприимчивость ($N = N_A$) для атомов инертных газов, рассчитанная по полученной формуле, приведена в таблице.

В таблице не молярная восприимчивость, так как нет размерности $\text{м}^3/\text{моль}$ и лучше записать вместо $\chi \cdot 10^6$, $\chi \cdot 10^{-6}$

Диамагнитная восприимчивость инертных газов

Вещество	Атомный номер, Z	$\chi \cdot 10^{-6}$, эксперимент	$\chi \cdot 10^{-6}$, теория
He	2	-2,0	-1,9
Ne	10	-7,0	-(5÷11)
Ar	18	-19,4	-(19÷25)
Kr	36	-28	-(32÷33)
Xe	54	-43	-(43÷48)

Атомы инертных газов не имеют валентных электронов, создающих парамагнитный момент. Разброс в теоретических значениях χ связан с нерешенностью задачи о распределении электронной плотности в многоэлектронном атоме.

10.8. Парамагнетизм

Парамагнитными свойствами наделены вещества, атомы которых обладают собственным постоянным магнитным моментом. Помещенные во внешнее магнитное поле парамагнитные атомы будут стремиться выстроиться своими магнитными моментами по полю. В результате парамагнетик приобретает магнитный момент и намагничивается в направлении, совпадающем с направлением внешнего магнитного поля. Магнитное поле в парамагнитном веществе усиливается. В этом отношении парамагнетизм противоположен диамагнетизму. Парамагнитные материалы вытягиваются в область более сильного магнитного поля, диамагнитные – выталкиваются (рис. 10.5).

Парамагнитными свойствами обладают атомы, у которых число электронов нечетно. Так, на незаполненной оболочке натрия имеется один электрон, который определяет спиновый и магнитный моменты атома. Но при образовании соединений этот электрон во внешней оболочке спаривается с другим электроном, направление спина которого противоположно, так что моменты количества движения и магнитные моменты валентных электронов полностью компенсируются. Поэтому молекулы зачастую не обладают магнитными моментами. Но если есть газ свободных радикалов – газ соединений с нечетным числом валентных электронов, то связи насыщаются не полностью и появляются ненулевой момент количества движения и магнитный момент. Примером такого газа является окись азота NO, трифенилметил $C(C_6H_5)_3$. У большинства материалов ненулевой собственный магнитный момент появляется, только если в них присутствуют атомы с незаполненными внутренними электронными оболочками. Такие атомы обладают отличным от нуля механическим и магнитным моментами \mathbf{p}_{mz} . Эти атомы относятся к «переходным элементам» таблицы Менделеева: Cr, Mn, Fe, Ni, Co, Pd, Pt и все редкоземельные элементы. Ненулевыми магнитными моментами обладают жидкий кислород и азот.

Если поместить парамагнитный материал во внешнее магнитное поле, то в зависимости от ориентации атом будет обладать различной магнитной энергией (п. 9.14):

$$U = -(\mathbf{p}_m, \mathbf{B}),$$

которая будет минимальна $-p_m B$, если атом ориентируется магнитным моментом по полю. Нарушать его ориентацию будет тепловое движение атомов и молекул kT . Рассчитать в этом случае магнитный момент единицы объема парамагнитного веществ-

ва M можно в точности так же, как рассчитывается вектор электронной поляризации \mathbf{P} (п. 3.5):

$$M = \frac{Np_m^2 B}{3kT}.$$

Эта формула верна, если $\frac{p_m B}{kT} \ll 1$ – магнитные поля слабые.

В этом случае магнитный момент единицы объема пропорционален индукции магнитного поля. Эффект парамагнетизма тем сильнее, чем ниже температура.

С точки зрения квантовой механики атомы, обладающие собственным механическим моментом – спином, например $L = \pm \frac{\hbar}{2}$,

обладают и ненулевым магнитным моментом $p_{mz} = \mp \frac{ge}{2m} L$. Во

внешнем магнитном поле энергия такого атома может принимать следующие дискретные значения (рис. 10.8):

$$U_{1,2} = \pm p_{mz} B,$$

где $p_{mz} = \frac{e\hbar}{2m}$ – магнитный момент атома с полуцелым спином.

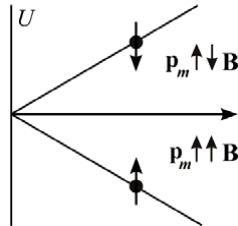


Рис. 10.8. Энергия атома с полуцелым спином в магнитном поле (Na, Ag) зависит от ориентации магнитного момента \mathbf{p}_m относительно направления поля \mathbf{B}

Вероятность ориентации атома по полю или против поля, согласно формуле Больцмана (Ч. 1, п. 9.6), пропорциональна

$$\exp(-U/kT).$$

Число атомов в единице объема со спином, ориентированным по направлению вектора \mathbf{B} , и магнитным моментом, ориентированным против вектора \mathbf{B} ,

$$N_1 = a \cdot \exp\left(-\frac{p_{mz}B}{kT}\right),$$

а число атомов, ориентированных спином против поля \mathbf{B} и магнитным моментом вдоль вектора \mathbf{B} ,

$$N_2 = a \cdot \exp\left(\frac{p_{mz}B}{kT}\right).$$

Полное число атомов в единице объема

$$N = N_1 + N_2 = a \cdot \left[\exp\left(-\frac{p_{mz}B}{kT}\right) + \exp\left(\frac{p_{mz}B}{kT}\right) \right].$$

Средний магнитный момент единицы объема

$$\begin{aligned} M &= \bar{\mu} \cdot N = \frac{-p_{mz}N_1 + p_{mz}N_2}{N_1 + N_2} \cdot N = \\ &= p_{mz}N \frac{\exp\left(\frac{p_{mz}B}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{p_{mz}B}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{p_{mz}B}{kT}\right) + \exp\left(\frac{p_{mz}B}{kT}\right)} = p_{mz}N \operatorname{th} \frac{p_{mz}B}{kT}, \end{aligned}$$

где $\bar{\mu}$ – средний магнитный момент атома в направлении вектора \mathbf{B} ; th – гиперболический тангенс. График полученной зависимости $M = M(B)$ приведен на рис. 10.9.

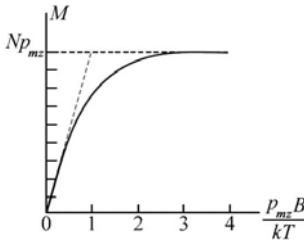


Рис. 10.9. Изменение намагниченности парамагнетика при изменении напряженности магнитного поля \mathbf{B}

В слабых магнитных полях $\frac{p_{mz}B}{kT} \ll 1$, $\operatorname{th} x \approx x$, и можно записать $(\bar{p}_m^2 = \bar{p}_{mz}^2 + \bar{p}_{my}^2 + \bar{p}_{mx}^2 = 3\bar{p}_{mz}^2)$:

$$M = \frac{Np_m^2 B}{3kT},$$

– магнитный момент единицы объема парамагнитного вещества ориентирован по полю \mathbf{B} , пропорционален величине этого поля и обратно пропорционален абсолютной температуре – закон Кюри.

При комнатной температуре в поле напряженностью ≈ 1 Тл $p_m B / (kT) \approx 2 \cdot 10^{-3}$, и при этих условиях можно уверенно пользоваться законом Кюри. Зная магнитный момент единицы объема, находим величину магнитной восприимчивости для парамагнетика

$$\chi = \mu_0 \frac{M}{B} = \frac{\mu_0 p_m^2 N}{3kT}.$$

В качестве примера определим удельную магнитную восприимчивость газа из парамагнитных молекул оксида азота при нормальных условиях. Молекула NO имеет магнитный момент $p_m = 1,8 \mu_B$. В «слабых» полях

$$\chi = \frac{\mu_0 p_m^2 N}{3kT}.$$

Удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд}$ связана с магнитной восприимчивостью соотношением

$$\chi_{уд} = \frac{\chi}{\rho},$$

где ρ – плотность вещества, причем $\frac{N}{\rho} = \frac{N_A}{m_\mu}$, m_μ – молярная масса вещества. Поэтому

$$\chi_{уд} = \mu_0 \frac{p_m^2 N_A}{3kT m_\mu} \left[\frac{\text{М}^3}{\text{КГ}} \right].$$

Поскольку $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$ А·м², $m_\mu = 30 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\chi_{уд}^{\text{NO}} = 6,2 \cdot 10^{-7}$ м³/кг.

При больших значениях величины индукции поля и низких температурах $p_m B > kT$ вектор M стремится к своему предельному значению Np_m – в сильных полях все магнитные моменты выстраиваются по направлению поля. Реально насыщение наблюдается при температурах ≤ 1 К.

Пусть такое насыщение достигнуто в соли редкоземельного металла, охлажденной до температуры в несколько градусов

Кельвина. Если при этом поле внезапно уменьшить, то благодаря тепловым флуктуациям атомы с низшего уровня энергии $U_1 = -p_{mz}B$ смогут переходить в более высокоэнергетическое состояние $U_2 = +p_{mz}B$. Энергия, необходимая для такого перехода, будет отниматься у кристаллической решетки, тем самым охлаждая ее. Так удастся понизить температуру от нескольких градусов до тысячных долей градусов от абсолютного нуля.

При столь низких температурах мы попадаем в область насыщения $\frac{Bp_{mz}}{kT} \approx 1$ для ядерного парамагнетизма, где $\mu_{B\text{я}} \approx \frac{e\hbar}{2m_p} \approx 10^{-3} \mu_B$, поскольку масса протона в 1836 раз больше массы электрона. Размагничивая систему магнитных ядер, можно достичь температуры, отличающейся лишь на миллионные доли градуса от абсолютного нуля.

Изучение парамагнетизма веществ позволяет определять магнитные моменты отдельных атомов, ионов, молекул, ядер; выяснять строение сложных молекул и молекулярных комплексов; осуществлять структурный анализ материалов, применяемых в технике.

10.9. Ферромагнетизм

К ферромагнетикам (*ferrum* – железо) относятся вещества, магнитная восприимчивость которых положительна и достигает значений $10^4 \div 10^5$. Намагниченность $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ и магнитная индукция $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ ферромагнетиков растут с увеличением напряженности магнитного поля \mathbf{H} нелинейно, и в полях $\approx 8 \cdot 10^3$ А/м намагниченность ферромагнетиков достигает предельного значения \mathbf{M}_m , а вектор магнитной индукции растет линейно с \mathbf{H} : $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{M}_m + \mu_0\mathbf{H}$.

Ферромагнитные свойства материалов проявляются только у веществ в твердом состоянии, атомы которых обладают постоянным спиновым или орбитальным магнитным моментом, в частности у атомов с недостроенными внутренними электронными оболочками. Типичными ферромагнетиками являются переходные металлы: железо, кобальт, никель и многие их сплавы. Существенным отличием ферромагнетиков от диа- и парамагнетиков является наличие у ферромагнетиков самопроизвольной (спонтанной) намагниченности в отсутствие внешнего магнитного поля. Наличие у ферромагнетиков самопроизвольного магнитного момента \mathbf{M} в отсутствие внешнего магнитного поля означает,

что электронные спины и магнитные моменты атомных носителей магнетизма ориентированы в веществе упорядоченным образом. параллельная ориентация магнитных моментов устанавливается при температурах ниже критической температуры – точки Кюри T_C , названной так по имени французского физика П. Кюри подробно изучившего поведение ферромагнетиков вблизи этой точки фазового перехода веществ. При $T > T_C$ ферромагнетик переходит в парамагнитное состояние.

Наличие температуры Кюри связано с разрушением при $T > T_C$ упорядоченного состояния в магнитной подсистеме кристалла – параллельной ориентации магнитных моментов. Для никеля температура Кюри равна 360°C . Если подвесить образец никеля вблизи пламени горелки так, чтобы он находился в поле сильного постоянного магнита, то ненагретый образец может располагаться горизонтально, сильно притягиваясь к магниту. По мере нагрева образца и достижения температуры $T > T_C$ ферромагнитные свойства у никеля исчезают и образец никеля падает. Остав до температуры ниже точки Кюри, образец вновь притянется к магниту. Нагревшись, вновь падает и т.д. Эти периодические колебания будут продолжаться все время, пока горит свеча или горелка (рис. 10.10).

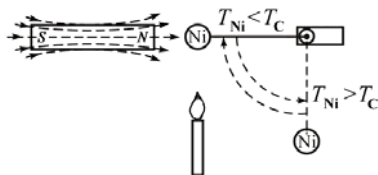


Рис. 10.10. Демонстрация наличия точки Кюри у ферромагнетиков: колебания подвешенного никелевого образца в пламени горелки

Выше температуры Кюри магнитная восприимчивость подчиняется закону Кюри – Вейса

$$\chi = \frac{C}{T - T_C},$$

где постоянная C зависит от рода вещества.

Поскольку в ферромагнетиках вектор намагниченности достигает насыщения с ростом H , то, исходя из определения $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ для ферромагнетиков, следует ожидать сложной нелинейной зависимости намагниченности M , магнитной проницаемости μ от H (рис. 10.11, 10.12):

$$\mu = 1 + \chi = 1 + \frac{M}{H}.$$

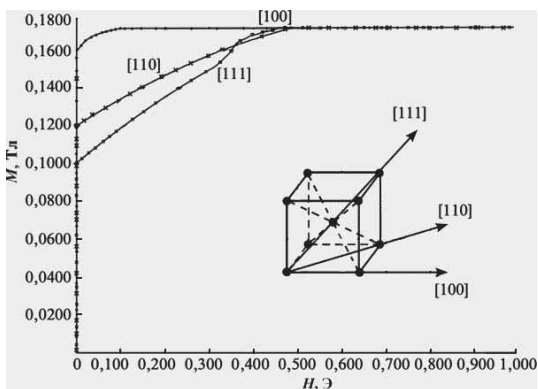


Рис.10.11. Зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля для трех главных кристаллографических осей монокристалла железа: [100] – ось легкого; [110] – ось трудного; [111] – ось труднейшего намагничивания

Впервые систематические исследования μ от H были проведены в 1872 г. А. Г. Столетовым (1839–1896) – выдающимся русским физиком, организатором физической лаборатории в Московском университете.

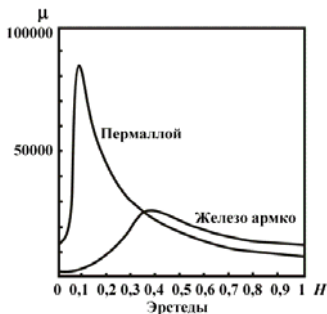


Рис. 10.12. Зависимость магнитной проницаемости ферромагнетиков от напряженности магнитного поля – кривая Столетова

Температура Кюри T_C ферромагнетиков

Материал	Fe	Co	Ni	Gd	Dy	Ho	Tm	Er	Sc ₃ In
Температура Кюри, К	1043	1403	631	289	87	20	25	19,6	5 ÷ 6

Функция $\mu(H)$ сначала растет с H , затем проходит через максимум, где достигает нескольких тысяч единиц и при больших H стремится к единице (рис. 10.12).

Если после достижения насыщения намагниченности M_m при $H = H_m$ в зависимости \mathbf{M} от \mathbf{H} или линейного участка B_m в зависимости \mathbf{B} от \mathbf{H} начать уменьшать напряженность внешнего магнитного поля, то кривая намагничивания не пойдет по прежнему пути, а будет проходить выше кривой намагничивания $0B_m$ (рис. 10.13).

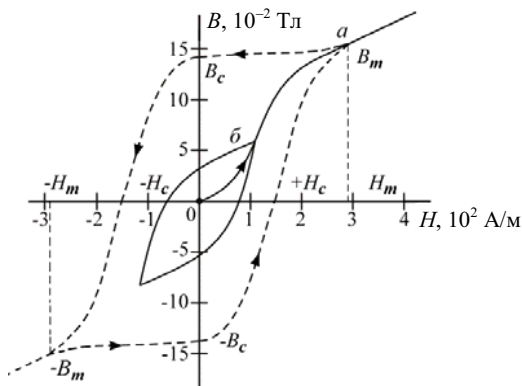


Рис. 10.13. Кривая без гистерезисного намагничивания ($0 - B_m$) и петля гистерезиса поликристаллического железа ($B_m - B_c - (-B_m) - (-B_c) - B_m$): a — предельная петля гистерезиса; b — петля гистерезиса частного цикла

В частности при $H = 0$ индукция поля в магнетике не обратится в ноль, а будет соответствовать остаточному намагничиванию $M_R = B_c / M_0$. Для полного размагничивания вещества необходимо приложить обратное магнитное поле $H = -H_c$, называемое коэрцитивной силой. Далее при увеличении H до $-H_m$ образец вновь намагничивается до насыщения $M = -M_m$. При дальнейшем изменении H от $-H_m$ до $+H_m$ намагниченность будет изменяться вдоль кривой $-B_m - B_c + B_m$.

В целом зависимость $B = B(H)$ при изменении H от $+H_m$ до $-H_m$ образует замкнутую петлю, называемую максимальной или предельной петлей гистерезиса. При циклическом намагничивании в полях $-H_1 \leq H \leq H_1$, где $H_1 < H_m$, зависимость $B = B(H)$ будет описываться замкнутой кривой, называемой частной кривой гистерезиса, лежащей целиком внутри предельной петли гистерезиса.

Для мягкого железа петля гистерезиса узкая – коэрцитивная сила мала, для стали и всех материалов, идущих на изготовление постоянных магнитов, – широкая, коэрцитивная сила велика (рис.10.14). Варьируя химическую, термическую и магнитную обработку материалов, можно менять коэрцитивную силу от 10^{-1} А/м для магнито-мягких материалов до 10^6 А/м для магнито-твердых материалов.

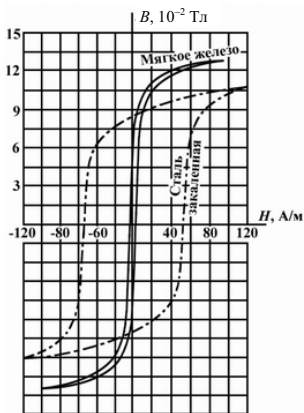


Рис. 10.14. Кривые гистерезиса мягкого железа и закаленной стали

Отставание \mathbf{M} от \mathbf{H} при намагничивании и размагничивании приводит к тому, что энергия, приобретаемая ферромагнетиком при намагничивании, не полностью отдается при размагничивании. Теряемая за один полный цикл в единице объема энергия равна интегралу

$$w_m = \oint (\mathbf{H}, d\mathbf{B}),$$

определяющему площадь петли гистерезиса. В конечном поле она превращается в теплоту, идущую на нагревание образца. Эти магнитные потери энергии называются гистерезисными.

Если поместить ферромагнитный материал, например железо, в соленоид, питаемый от сети переменного тока с частотой 50 Гц, то, испытывая 50 полных циклов перемагничивания в секунду, этот образец сильно нагреется уже через пару минут. Поместив на место ферромагнитного образца диамагнитный, например медный тех же размеров, мы увидим, что он будет оставаться холодным, поскольку у него отсутствуют гистерезисные потери.

Для того чтобы уменьшить гистерезисные потери, например в трансформаторах, следует применять материалы с узкой петлей гистерезиса, имеющей малую площадь $\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{B})$, т.е. магнитомягкие материалы с малыми величинами коэрцитивной силы.

Рассмотрим возможность возникновения у парамагнетика ферромагнитного состояния при температуре ниже критической – температуры Кюри. Если в парамагнитном кристалле существует взаимодействие, стремящееся расположить магнитные моменты ионов параллельно друг другу, то внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 создаст в кристалле некоторую конечную намагниченность, благодаря которой магнитные моменты, ориентируясь, начнут усиливать взаимодействие друг с другом, заставляя все новые и новые моменты выстраиваться в одном направлении, – возникнет ферромагнитное состояние. Первым понятие «ориентирующие магнитные моменты» поля в ферромагнетиках ввел в 1926 г. Пьер Вейс, это поле называют обменным или молекулярным. Его рассматривали как некоторое магнитное поле \mathbf{B}_E , пропорциональное намагниченности

$$\mathbf{B}_E = \lambda \mu_0 \mathbf{M}.$$

Здесь λ – постоянная величина, не зависящая от температуры, называемая постоянной усредненного поля.

Как оказалось, величина \mathbf{B}_E может достигать огромных значений $\approx 10^3$ Тл, и, соответственно, поле \mathbf{B}_E имеет немагнитную природу. Оно порождает у соседних электронов тенденцию выстраи-

вать магнитные моменты в одном направлении. Данный эффект является чисто квантовым (рис. 10.15).

При наличии внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 в парамагнитном веществе с восприимчивостью χ возникает намагниченность \mathbf{M} , создающая, в свою очередь, конечное обменное поле $\mathbf{B}_E = \lambda\mu_0\mathbf{M}$. Поскольку в парамагнетике действуют дезориентирующие магнитные моменты (тепловое возбуждение), то магнитная восприимчивость парамагнетика $\chi_p = C/T$, где C – постоянная Кюри, $C = N\mu_B^2\mu_0/(3k)$.

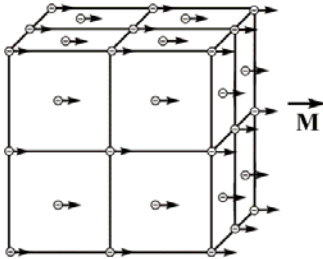


Рис. 10.15. Ферромагнитная атомная структура гранцентрированной кубической решетки ниже точки Кюри. Стрелками обозначены направления атомных магнитных моментов

По определению имеем

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H} = \chi \frac{\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_E}{\mu_0} = \chi \frac{\mathbf{B}_0 + \lambda\mu_0\mathbf{M}}{\mu_0}.$$

Откуда следует, что при наличии обменного взаимодействия магнитная восприимчивость может иметь особенность (напряженность магнитного поля в длинном цилиндрическом ферромагнетике H совпадает с напряженностью поля в вакууме H_0):

$$\chi = \frac{M}{B_0/\mu_0} = \frac{M}{H} = \frac{C}{T - C\lambda}.$$

При $T = T_C = C\lambda$, $\chi \rightarrow \infty$. Это означает, в частности, что M может оставаться конечным даже при отсутствии внешнего магнитного поля $H = 0$, $B_0 = 0$.

Из полученного соотношения вытекает закон Кюри – Вейса

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}, \quad T_C = C\lambda = \frac{\mu_B^2\mu_0\lambda N}{3k},$$

хорошо описывающий температурную зависимость восприимчивости в парамагнитной области.

Для железа, зная постоянную Кюри C , можно оценить величину λ – постоянную усредненного поля, $\lambda_{\text{Fe}} = 5000$ и величину обменного поля $B_E = \lambda M_S = 5000 \cdot 0,17 \approx 10^3$ Тл. Обменное поле в железе колоссально велико и превышает магнитное поле, созданное соседними ионами $B_i = \frac{\mu_0 \mu_B}{a^3} \approx 0,1$ Тл, где a – постоянная решетки.

В частности, в модели ферромагнетика с шаровой полостью индукция ориентирующего магнитного поля в полости равна (п. 10.2) $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \lambda \mu_0 \mathbf{M}$, где $\lambda = +1/3$. Величина λ имеет намного меньшее значение

$$\mathbf{B}_{\text{полость}} = \mu_0 \mathbf{H}_0 + \mu_0 \mathbf{M} - \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{H}_0 + \frac{1}{3} \mu_0 \mathbf{M},$$

чем требуется для количественного объяснения ферромагнитной упорядоченности (надо, чтобы $\lambda \geq 900$). Появление сильного взаимодействия между электронами в твердых телах имеет чисто квантовую природу и связано с тем, что, согласно принципу Паули, в одном квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. Но, с другой стороны, у электронов в близко расположенных атомах существует конечная вероятность обмениваться электронами, находящимися в тождественных квантовых состояниях. Этот обмен тождественными электронами приводит в целом к уменьшению полной энергии системы за счет появления в ней спиновой и магнитной упорядоченности. Энергия обменного взаимодействия для двух электронов в соседних атомах составляет величину порядка $10^{-2} \div 10^{-1}$ эВ, что достаточно для объяснения наблюдаемых больших значений λ и высоких температур перехода ферромагнетик–парамагнетик. Однако спиновое взаимодействие электронов внутренних оболочек атомов железа должно стремиться сорентировать спины антипараллельно, что не может привести к ферромагнитному состоянию. Вероятно, проблема решается следующим образом. Направленный вверх спин одного из электронов внутренней оболочки атома железа стремится сорентировать спин электронов проводимости антипараллельно. Ориентированный хотя бы частично электрон проводимости, перемещаясь по решетке, может заставить сорентироваться антипараллельно себе, но параллельно исходному атому железа спин электрона внутренней оболочки другого атома железа. Таким образом, спины и магнитные моменты соседних внутренних оболочек атомов железа оказываются сорентированными одинаковым образом при наличии лишь небольшо-

го числа ориентированных противоположным образом электронов проводимости благодаря обменным эффектам и в силу принципа Паули для частиц с полуцелым спином.

Если удастся объяснить большие значения усредненного поля, то можно количественно описать эффект самопроизвольного намагничивания парамагнитного образца и найти область температур, при которых это возможно.

Средний магнитный момент единицы объема парамагнетика равен (п. 10.8)

$$M = p_{mz} N \operatorname{th} \frac{p_{mz} B}{kT}.$$

В случае парамагнетика, способного перейти в ферромагнитное состояние, ориентирующее магнитное поле равно $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \lambda \mu_0 \mathbf{M} \approx \lambda \mu_0 \mathbf{M}$, поскольку внешнее поле \mathbf{B}_0 много меньше молекулярного $\mathbf{B}_E = \lambda \mu_0 \mathbf{M}$.

В результате для M получаем уравнение ($\mu_B^2 = 3p_{mz}^2$)

$$\frac{M}{p_{mz} N} = \operatorname{th} \frac{M}{p_{mz} N} \cdot \frac{\mu_B^2 \mu_0 \lambda N}{3kT}.$$

Вводя приведенную намагниченность $m = \frac{M}{p_{mz} N}$ и приведен-

ную температуру $t = \frac{3kT}{\mu_B^2 \mu_0 \lambda N} = \frac{T}{T_C}$, перепишем уравнение для m :

$$m = \operatorname{th} \frac{m}{t}.$$

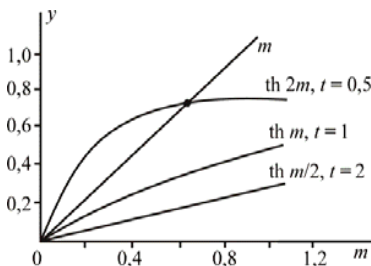


Рис. 10.16. Определение точки перехода парамагнетика в ферромагнитное состояние графическим решением уравнения

$$m = \operatorname{th} \frac{m}{t}, \text{ где } m = \frac{M}{p_{mz} N} \text{ — при}$$

веденная намагниченность, $t = T/T_C$ — приведенная температура. Находим отличие от нуля решением $m \neq 0$, при отсутствии внешнего магнитного поля

Построив графики $y = m$, $y = \text{th} \frac{m}{t}$ для левой и правой частей полученного уравнения при различных t , найдем из пересечения этих зависимостей возможные значения m для каждой t (рис. 10.16). Из графиков видно, что $t = 1$ является критической температурой ($T = T_C$). В этом случае еще имеется возможность пересечения функции $y = m$ с кривой $y = \text{th} m$ даже при слабом внешнем магнитном поле или возмущении. Это пересечение соответствует переходу парамагнетика в ферромагнитное состояние. Значение $t = 1$ соответствует критической температуре – температуре Кюри:

$$T_C = \frac{\mu_B^2 \mu_0 \lambda N}{3k}.$$

Это значение совпадает с ранее найденной величиной T_C . При $t = 0,5$ кривая $y = m$ пересекает функцию $y = \text{th} 2m$ при $m = = 0,94 p_{mz} N$ даже в отсутствие внешнего магнитного поля. В этом случае имеет место спонтанный переход парамагнетика в ферромагнитное состояние. Построенный таким образом график зависимости магнитного момента от температуры для никеля удовлетворительно описывает экспериментальные результаты для никеля, где $M(0) = p_{mz} N$ – магнитный момент при насыщении (0 К) (рис. 10.17).

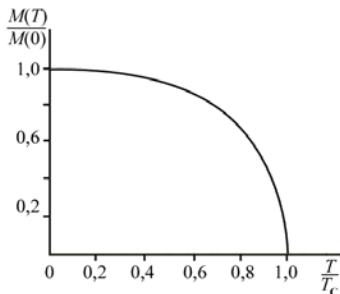


Рис. 10.17. Зависимость спонтанной намагниченности никеля от температуры, построенная на основе теории усредненного поля ($B_0 = 0$)

Однако подобным образом самопроизвольно при $T < T_C$ намагничиваются лишь очень маленькие монокристаллы ферромагнитных материалов, например никеля или железа. Для того чтобы постоянными магнитными свойствами – постоянным магнитом стал большой кусок железа, необходимо его намагнитить, т.е. поместить в сильное магнит-

ное поле, а затем это поле убрать. Оказывается, что при $T < T_C$ большой исходный кусок железа разбит на множество очень маленьких ($10^{-3} \div 10^{-2}$ см), полностью намагниченных областей – доменов. Векторы намагниченности доменов в отсутствие внешнего магнитного поля ориентированы таким образом, что полный магнитный момент ферромагнитного материала равен нулю. Если бы в отсутствие поля кристалл железа был бы единым доменом, то это привело бы к возникновению значительного внешнего магнитного поля, содержащего значительную энергию (рис. 10.18). Разбиваясь на домены, ферромагнитный кристалл уменьшает энергию магнитного поля. При этом, разбиваясь на косугольные области (рис. 10.18, з), можно легко получить состояние ферромагнитного кристалла, из которого магнитное поле вообще не выходит. Наличие доменных стенок – поверхностей, разделяющих домены с различно ориентированными магнитными моментами, повышает энергию системы пропорционально общей площади этих стенок. Но разбиение всего кристалла на домены уменьшает общую энергию системы пропорционально объему кристалла. Поскольку объем растет пропорционально кубу, а площадь – пропорционально квадрату линейных размеров, то в целом в монокристалле реализуется такое разбиение на доменные структуры, которое соответствует минимуму свободной энергии ферромагнетика. Если поместить ферромагнетик, разбитый на домены, во внешнее магнитное поле, то в нем начинается движение доменных стенок.

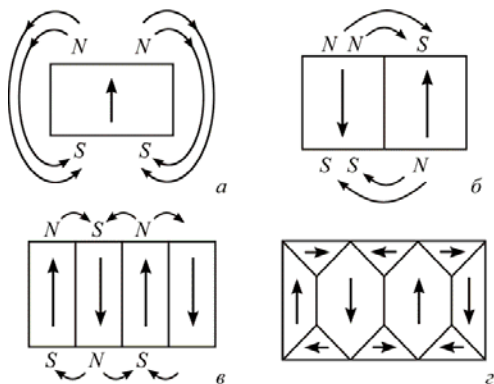


Рис. 10.18. Доменная структура ферромагнетика: а – полностью намагниченный кристалл с большим внешним магнитным полем; б, в – двухдоменная и трехдоменная структуры, уменьшающие внешнее магнитное поле; з – система с косугольными доменами без выхода магнитного поля из кристалла

Они перемещаются таким образом, чтобы областей с ориентацией вектора намагниченности по полю стало больше, чем областей с противоположной ориентацией. Такое движение доменных стенок понижает энергию ферромагнетика во внешнем магнитном поле. По мере нарастания магнитного поля весь кристалл превращается в один большой домен с магнитным моментом, ориентированным по полю (рис. 10.18).

В реальном куске железа содержится огромное число мелких кристалликов с различной ориентацией, в каждом из которых имеется несколько доменов. В слабом внешнем поле эти домены обратимо растут в направлении этого поля – кристалл намагничивается, но при выключении этого слабого внешнего поля кристалл размагничивается (рис. 10.19). При значительном росте внешнего магнитного поля происходит необратимое намагничивание материала, что связано с тем, что в сильных полях доменные стенки при перемещениях способны преодолеть оказываемое им сопротивление со стороны многочисленных дефектов твердого тела (границы зерен, дислокации, примеси и пр.). Движение доменной стенки в сильных полях, дефектных поликристаллах не

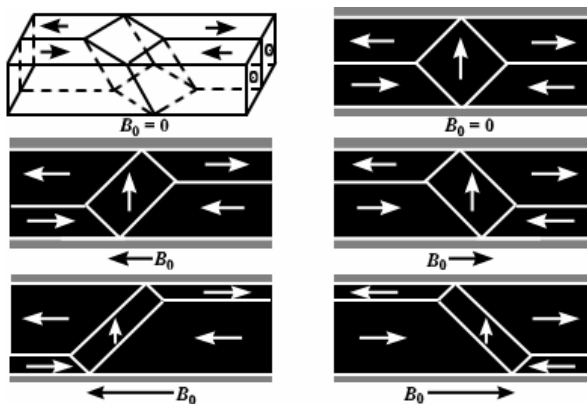


Рис. 10.19. Плавное обратимое смещение доменных стенок в кристалле железа. Домены с намагниченностью, параллельной направлению внешнего магнитного поля, растут за счет доменов другой ориентации. У образца, показанного на рисунке, поле направлено вдоль [001], поверхность кристалла параллельна плоскости [100]. Максимальная величина внешнего поля равна примерно 10 Гс. Образец вырезан из одного нитевидного кристалла с поперечным размером около 10^{-2} см

является плавным и обратимым, а скорее скачкообразно и необратимо. Необратимость процесса намагничивания реального ферромагнитного кристалла и проявляется в гистерезисном эффекте. При намагничивании на преодоление препятствий движению доменных стенок со стороны дефектов затрачивается энергия и самопроизвольное движение назад по тому же пути невозможно, а на продвижение по другому пути с преодолением сопротивления дефектов доменными стенками вновь должна затрачиваться энергия. Поэтому даже при выключении внешнего магнитного поля поликристаллический ферромагнитный образец больших размеров остается намагниченным (рис. 10.20).

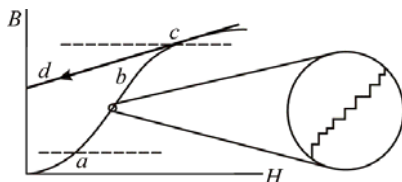


Рис. 10.20. Намагничивание поликристаллического ферромагнетика: *a* – область обратимого намагничивания; *b*, *c* – необратимое намагничивание; *d* – изменение намагничивания при выключении внешнего магнитного поля. Вставка – увеличенный детальный ход процесса намагничивания

Если поместить ферромагнитный образец в измерительную катушку, состоящую из нескольких тысяч витков проволоки, и медленно намагничивать образец, то в катушке удастся зарегистрировать импульсы тока, обусловленные скачкообразным изменением намагниченности \mathbf{M} образца. После усиления эти скачкообразные изменения вектора \mathbf{M} слышны как отдельные щелчки, сливающиеся в шум, если подносить магнит к ферромагнетик в измерительной катушке (рис. 10.21). Шум связан с движением доменных стенок по мере того, как увеличивается магнитное поле. Впервые этот эффект наблюдался в 1919 г. немецким профессором Г. Г. Баркгаузеном (1881–1956). Изучение эффекта Баркгаузена позволило лучше понять динамику доменной структуры и установить связь между числом скачков и основными характеристиками петли гистерезиса.

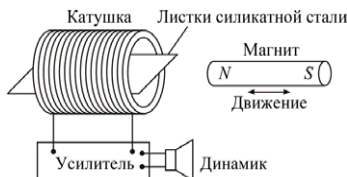


Рис. 10.21. Схема эксперимента на наблюдению эффекта Баркгаузена – скачкообразное изменение намагничивания ферромагнетика сопровождается щелчками в динамике

Доменную структуру поверхности монокристаллических ферромагнитных пластин удастся сделать видимой при помощи магнитного порошка, а направление намагниченности определить по характеру роста или сужения доменов при наложении внешнего магнитного поля (рис.10.19).

Ферромагнитные материалы играют огромную роль в самых различных областях современной техники. Магнито-мягкие материалы используются в электротехнике при изготовлении трансформаторов, электромоторов, генераторов, в слаботочной технике связи и радиотехнике; магнито-твердые материалы применяются при изготовлении постоянных магнитов.

Широкое распространение в радиотехнике, особенно в высокочастотной радиотехнике, получили ферриты – ферромагнитные неметаллические материалы – соединения окиси железа (Fe_2O_3) с окислами других металлов. Ферриты сочетают ферромагнитные и полупроводниковые свойства, именно с этим связано их применение как магнитных материалов в радиоэлектронике и вычислительной технике. Ферриты обладают высоким значениями намагниченности и температурами Кюри.

Наряду с ферромагнетиками и ферритами существует еще один класс магнитоупорядоченных материалов – антиферромагнетики. В кристаллических решетках таких веществ все или часть соседних атомных магнитных моментов направлены антипараллельно, так что суммарный магнитный момент практически равен нулю. Антиферромагнетиками являются твердый кислород (α -фаза), Ce, Pr, Nd, Sm, соединения MnO , Fe_2O_3 и др. Ось, вдоль которой ориентированы антиферромагнитно упорядоченные атомные магнитные моменты, называется осью антиферромагнетизма (рис. 10.22).

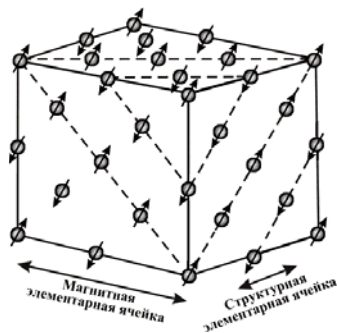


Рис. 10.22. Антиферромагнитная структура окисла переходного элемента типа MnO . Кружками показаны ионы Mn^{2+} , стрелками – расположение спинов ионов Mn^{2+}

Антиферромагнитное состояние устанавливается в кристаллах при температурах ниже определенной критической, называемой точкой Неёля T_N . При $T > T_N$ антиферромагнетик переходит в парамагнитное состояние с магнитной восприимчивостью, изменяющейся по закону Кюри – Вейса

$$\chi = \frac{C}{T - C\lambda_V},$$

где λ_V – постоянная Вейса – отрицательна.

Антиферромагнетики нашли практическое применение в современных системах накопления и считывания информации. Однако изучение физических свойств антиферромагнетиков важно и для развития физики магнитных явлений. Возможные применения могут найти антиферромагнитные полупроводники, в частности α - Fe_2O_3 и FeVO_3 , в которых можно заметно изменять скорость звука, прикладывая относительно слабые магнитные поля.

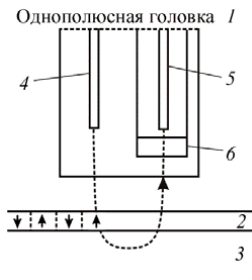


Рис. 10.23. Запись в винчестере с использованием однополюсной головки 1 и двухслойного магнитного покрытия: 2 – слой записи; 3 – слой мягких магнитов; 4 – основной магнитный полюс; 5 – вспомогательный магнитный полюс; 6 – считывающая головка

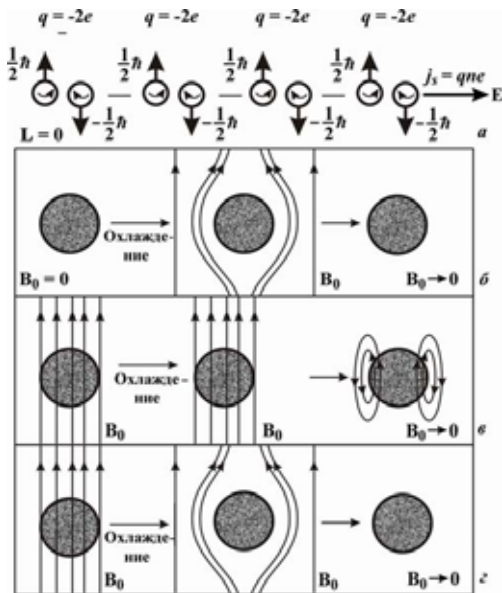
Магнитные материалы широко используются в традиционной технологии записи информации в винчестере. Магнитное вещество нанесено тонким слоем на основу твердого диска. Каждый бит информации представлен группой магнитных доменов (в идеальном случае – одним доменом). Для перемагничивания домена (изменения направления вектора его намагниченности) используется поле записывающей головки. Энергия, необходимая для этого, зависит от объема домена и наличия дополнительных стабилизирующих слоев, препятствующих самопроизвольной потере информации. При этом используется запись на вертикально ориентированные домены и достигается плотность записи до 40 Гб/см^2 (в обычных винчестерах в 10 раз меньше) (рис. 10.23).

10.10. Магнитные свойства сверхпроводников

Сверхпроводники – вещества с бесконечно большой проводимостью или нулевым электрическим сопротивлением – обладают и необычными магнитными свойствами, отличающими их от свойств идеальных проводников. Это связано с принципиально разными механизмами, лежащими в основе эффекта отсутствия сопротивления в идеальном проводнике и сверхпроводнике. В идеальном проводнике нет рассеяния электронов проводимости на дефектах решетки, что соответствует бесконечно большой длине свободного пробега электронов. В сверхпроводнике электроны объединяются в куперовские пары с нулевым спином (см. п. 6.8), а затем эти пары электронов при низких температурах конденсируются в сверхтекучую электропроводящую жидкость.

Рис. 10.24.

Куперовские пары электронов в сверхпроводнике образуются и конденсируются в сверхпроводящую жидкость при низких температурах – электронный бозеконденсат (а); в идеальный проводник после охлаждения магнитное поле не проникает (б); проводник, ставший идеальным проводником при охлаждении во внешнем магнитном поле, сохраняет в себе магнитное поле после выключения внешнего магнитного поля (в); сверхпроводник, охлаждаемый в магнитном поле, после перехода в сверхпроводящее состояние выталкивает из своего объема внешнее магнитное поле – эффект Мейснера – Оксенфельда (з)



В такой жидкости (рис. 10.24), в отличие от идеального проводника, нельзя помешать одному электрону делать то, что делают остальные электроны, поскольку все пары электронов стремятся попасть в одинаковое состояние. В частности, нельзя внешним магнитным полем изменить импульс отдельного электрона или равномерное распределение электронов в объеме сверхпроводника. В результате магнитное поле оказывается всегда вытолкнутым из объема сверхпроводника.

Это важное свойство сверхпроводников было открыто немецкими физиками В. Мейснером и Р. Оксенфельдом в 1933 г. спустя 22 года после открытия сверхпроводимости. Они первые установили, что независимо от условий эксперимента магнитное поле в объем сверхпроводника не проникает. Кроме того, они обнаружили, что сверхпроводник, охлажденный до температуры ниже критической, в постоянном магнитном поле самопроизвольно выталкивает магнитное поле из своего объема, переходя в состояние, при котором магнитная индукция в объеме сверхпроводника становится равной нулю, т.е. сверхпроводник является идеальным диамагнетиком с магнитной восприимчивостью $\chi = -1$. Выталкивание магнитного поля из сверхпроводника требует затрат энергии, а переход материала в сверхпроводящее состояние уменьшает энергию твердого тела. Выталкивание магнитного поля имеет место до тех пор, пока связанное с этим явлением увеличение энергии компенсируется более эффективным ее уменьшением, связанным с переходом металла в сверхпроводящее состояние. В сильных магнитных полях энергетически более выгодным становится не сверхпроводящее, а нормальное состояние, в котором поле свободно проникает в образец. В сильных магнитных полях при достижении некоторого критического значения магнитного поля B_C сверхпроводящее состояние металла разрушается. Величина B_C тем выше, чем ниже температура материала (рис. 10.25).

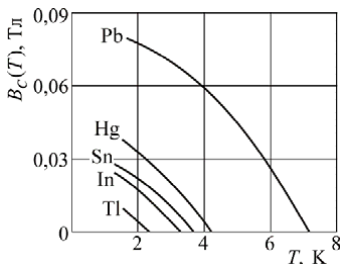


Рис. 10.25. Диаграммы перехода металлов в сверхпроводящее состояние от величины индукции критического магнитного поля. Область под кривой (слева) соответствует сверхпроводящему состоянию, область над кривой (справа) – нормальному

Магнитное поле не проникает в объем сверхпроводника, поскольку в тонком приповерхностном слое металла $\lambda \approx 10^{-5}$ см возбуждается экранирующий ток j_s , создающий в объеме металла магнитное поле H , равное и противоположное внешнему. В сверхпроводнике эти два поля складываются так, что суммарное поле в объеме равно нулю. Слой с экранирующим током имеет конечную толщину, иначе бы плотность тока была бы бесконечной. Поэтому и магнитное поле проникает в сверхпроводники лишь на конечное расстояние порядка λ , называемое глубиной проникновения. Величину λ и распределение магнитного поля в сверхпроводнике можно оценить следующим образом. Энергия единицы объема сверхпроводника в магнитном поле складывается из плотности энергии магнитного поля $w_m = \mu_0 H^2 / 2$ и плотности кинетической энергии сверхпроводящих электронов $w_k = n_s m v_s^2 / 2$, движущихся в сверхпроводнике с постоянной по времени скоростью v_s при наличии в нем бездиссипативного электрического тока с плотностью

$$\mathbf{j}_s = q n_s \mathbf{v}_s(r),$$

где n_s – концентрация куперовских пар, равная половине концентрации электронов проводимости; q – заряд куперовской пары, равный двум зарядам электрона.

Напряженность магнитного поля \mathbf{H} связана с плотностью тока \mathbf{j}_s уравнением $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_s$. Таким образом, для свободной энергии единицы объема сверхпроводника во внешнем магнитном поле можем записать ($\mu \approx 1$ для сверхпроводников):

$$w = w_m + w_k = \frac{\mu_0 H^2}{2} + \frac{n_s m v_s^2}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2} + \frac{n_s m_s (\text{rot} \mathbf{H})^2}{2 q^2 n_s^2}.$$

Величина свободной энергии должна быть минимальной:

$$\frac{\partial w}{\partial q} = \mu_0 H \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{n_s m}{q^2 n_s^2} \text{rot} \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial q} \text{rot} \mathbf{H} = 0.$$

Переменную дифференцирования w по q выберем из условия $\partial \mathbf{H} / \partial q = \text{rot} \mathbf{H}$, $\partial / \partial q \text{rot} \mathbf{H} = \text{rot} \text{rot} \mathbf{H}$.

В результате получаем уравнение для определения глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rot} \text{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \text{где } \lambda^2 = \frac{m}{\mu_0 q^2 n_s}.$$

Это уравнение было впервые получено братьями Францем и Гансом Лондонами в 1935 г. задолго до построения микроскопической теории сверхпроводимости. Если рассмотреть плоский

сверхпроводник, магнитное поле к которому направлено вдоль оси x , так что $H_y = H_z = 0$, где ось z направлена вглубь проводника, то имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} \mathbf{k}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение в уравнение Лондонов, получаем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{H},$$

откуда находим сходящееся при $z \rightarrow \infty$ решение (рис. 10.26):

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right).$$

Постоянная H_0 равна напряженности магнитного поля у поверхности образца, а величина λ имеет смысл глубины проникновения, на которой напряженность магнитного поля в сверхпроводнике уменьшается в e раз.

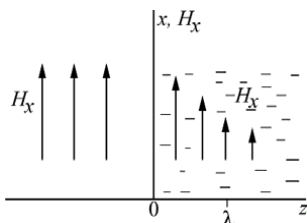


Рис. 10.26. Проникновение магнитного поля в полубесконечный сверхпроводник. Глубина проникновения λ определяет расстояние, на котором величина поля уменьшается в e раз. Обычно $\lambda = 500 \text{ \AA}$

Магнитное поле проникает в тонкие сверхпроводящие пленки толщиной меньше λ , оставаясь однородным по глубине. Поэтому наводимое в пленке магнитное поле H много меньше внешнего, а

плотность энергии сверхпроводящего состояния за счет слагаемого $\mu_0 H^2 / 2$ увеличивается довольно слабо. В результате разрушение сверхпроводимости в тонких сверхпроводящих пленках достигается при очень больших критических полях H_c , значительно превосходящих критические магнитные поля для массивных сверхпроводников.

В общем случае разрушение сверхпроводящего состояния внешним магнитным полем происходит не равномерно по объему проводника, а имеет вид сложно переплетающихся фаз сверхпроводящего и нормального состояний. В идеальном проводнике – проводнике, в котором нет никакого рассеяния электронов, в отличие от сверхпроводника, не возникает постоянного экрана сверхпроводящих поверхностных токов. В результате внешнее магнитное поле проникает в идеальный проводник со скоростью около одного сантиметра в час. Эффект Мейснера и отсутствие сопротивления являются двумя независимыми свойствами сверхпроводящего состояния.

10.11. Гиромагнитные явления

Магнитные свойства вещества связаны с орбитальными и спиновыми вращениями электронов в атомах. Вращающийся заряд, наряду с магнитными свойствами, обладает и свойствами микроскопического гироскопа – механического устройства, стремящегося сохранить направление своей оси вращения в пространстве или стремящегося повернуть спиновые или орбитальные механические моменты атомов по направлению оси вращения магнетика в пространстве. Поэтому намагничивание вещества сопровождается вращением тел и, наоборот, вращение тел сопровождается их намагничиванием (рис. 10.27). Данные эффекты называются гиромагнитными или магнитомеханическими.

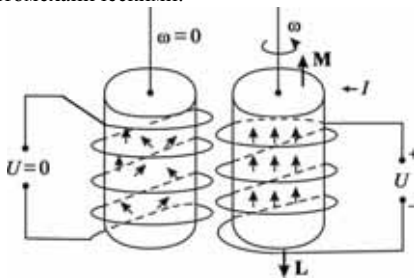


Рис. 10.27. При намагничивании металлического цилиндра в поле соленоида цилиндр приходит во вращение – эффект Эйнштейна – де Хааза

Рассмотрим магнитный стержень, подвешенный на очень тонкой струне в соленоиде. При этом система устроена так, что в ней можно изменять магнитное поле, не прикладывая к магниту никакого момента сил. В ней нет перекосов и магнитных неоднородностей, способных дать большой случайный магнитный момент.

При намагничивании тела N атомов в единице объема, каждый из которых обладает магнитным моментом, равным магнетону Бора μ_B , выстраиваются по направлению магнитного поля. При этом цилиндр приобретает магнитный момент

$$M = \mu_B NV,$$

где V – объем цилиндра. С магнитным моментом μ_B атома связан и механический момент (см. п. 10.6):

$$L_{\text{мех}} = \frac{2m_e}{ge} \mu_B.$$

Так что цилиндр объема V приобретает механический момент

$$L = L_{\text{мех}} NV.$$

Но поскольку повороты магнитных моментов атомов осуществляются под действием только внутренних сил, то полный момент импульса системы должен остаться постоянным, а для этого цилиндр как целое должен прийти во вращение с угловой скоростью ω , определяемый из условия

$$\omega \cdot I = L,$$

где $I = \rho Vr^2/2$ – момент инерции цилиндра; ρ – плотность вещества цилиндра; r – радиус цилиндра. Подставляя в условие сохранения момента импульса найденные значения L и I , получим

$$\omega \cdot \frac{\rho Vr^2}{2} = \frac{2m_e}{ge} \mu_B \cdot NV,$$

откуда следует

$$\omega = \frac{4m_e \mu_B N}{ge r^2} = \frac{2\hbar N_A}{g m_\mu r^2}.$$

Здесь N_A – число Авогадро; m_μ – молярная масса; $N = \rho N_A / m_\mu$.

Для железного цилиндра радиусом $r = 1$ мм, $m_\mu = 56 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $g = 1$, $\omega = 2,25 \cdot 10^{-3}$ рад/с.

Этот эффект был экспериментально открыт и теоретически объяснен А. Эйнштейном и голландским физиком В. де Хаазом в 1915 г.

Эффектом, обратным эффекту Эйнштейна – де Хааза, является эффект Барнета, открытый в 1909 г. Эффект Барнета состоит в намагничивании ферромагнетиков при их вращении в отсутствие магнитного поля. Эффект Барнета объясняется тем, что при вращении магнетика создается гироскопический момент, стремящийся повернуть спиновые и орбитальные механические моменты атомов по направлению оси вращения магнетика. С механическим моментом атомов связан их магнитный момент, поэтому при вращении появляются составляющая магнитного момента \mathbf{M} и намагниченность вдоль оси вращения ω .

В магнитном поле индукцией \mathbf{B} электронная оболочка приходит во вращение относительно решетки с угловой скоростью (см. п. 10.7):

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{\mu_B}{L_{\text{мех}}} \mathbf{B}.$$

Если бы это вращение было создано не магнитным полем, а другим способом, то оно породило бы магнитное поле индукцией

$$\mathbf{B} = -\frac{L_{\text{мех}}}{\mu_B} \boldsymbol{\Omega}.$$

Так, при вращении образца с частотой 100 об/с возникает магнитное поле индукцией $B \approx 7 \cdot 10^{-9}$ Тл, что составляет одну десятичную от величины индукции магнитного поля Земли.

Исследование магнитомеханических эффектов показало, что гиромагнитное отношение $\mu_B/L_{\text{мех}}$ всегда отрицательно, и, следовательно, магнетизм обусловлен движением отрицательных зарядов – электронов. Численные значения гиромагнитного отношения изменялись в пределах от $e/2m_e$ до e/m_e .

Так, было установлено, что в переходных 3d металлах, таких как железо, кобальт, никель, магнитный момент обусловлен спиновыми моментами электронов. Это говорит о том, что ферромагнетизм обусловлен спином электронов, а не их орбитальным движением.

В других металлах, например редкоземельных, магнитный момент создается как спиновыми, так и орбитальными моментами электронов.

10.12. Эффект Холла

Одним из проявлений магнитной составляющей силы Лоренца в веществе служит эффект, обнаруженный в 1879 г. американским физиком Э.Г. Холлом (1855–1938). Эффект состоит в возникнове-

нии на боковых гранях проводника с током, помещенного в поперечное магнитное поле, разности потенциалов, пропорциональной величине тока I и индукции магнитного поля B (рис. 10.28):

$$V_H = RBI/d.$$

Величина R называется постоянной или коэффициентом Холла.

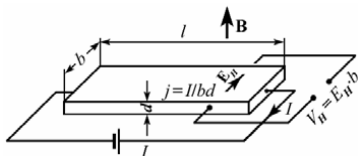


Рис. 10.28. На боковых гранях проводника с током $I = jbd$ в поперечном магнитном поле \mathbf{B} появляется поле Холла E_H и ЭДС Холла $V_H = RBI/d$ ($l \gg b, d$)

Эффект Холла обусловлен взаимодействием носителей заряда (электронов проводимости и дырок) с магнитным полем. В магнитном поле на электроны действует сила $\mathbf{F} = e[\mathbf{B}, \mathbf{v}]$ ($\mathbf{v} = \mathbf{j}/(ne)$ – средняя скорость направленного движения носителей в электрическом поле; n – концентрация носителей; e – их заряд), под влиянием которой частицы отклоняются в направлении, перпендикулярном \mathbf{j} и \mathbf{B} . В результате на боковой грани пластины происходит накопление зарядов и возникает поле Холла E_H . В свою очередь, поле Холла действует на заряды и уравнивает силу Лоренца. При равновесии $eE_H = eBv$, откуда ($I = jbd$):

$$R = 1/(ne).$$

Знак R совпадает со знаком носителей заряда.

Для *металлов*, у которых $n \approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $R \approx 10^{-3} \text{ см}^3/\text{Кл}$, у *полупроводников* $R \approx 10 \div 10^5 \text{ см}^3/\text{Кл}$. В поле $B \approx 1 \text{ Тл}$ у металлов $V_H \approx 10^{-5} \div 10^{-6} \text{ В}$.

Коэффициент Холла может быть выражен через *подвижность носителей заряда* $b_{\pm} = v_{\text{др}}/E$ (дрейфовая скорость носителей $v_{\text{др}} = eEt m^*$, где m^* – эффективная масса; τ – время между двумя последовательными соударениями с рассеивающими центрами) и удельную электропроводность $\sigma = j/E = en v_{\text{др}}/E$:

$$R = b_{\pm}/\sigma.$$

Сказанное справедливо и для изотропных проводников, в частности для *поликристаллов*. Для анизотропных кристаллов $R = r/en$, где коэффициент r – величина, близкая к 1, зависящая от направления \mathbf{B} относительно кристаллографических осей. В области сильных магнитных полей $r = 1$.

В полупроводниках в электропроводности участвуют одновременно электроны проводимости и дырки. При этом постоянная Холла выражается через парциальные проводимости электронов σ_3 и дырок σ_d и их концентрации n_3 и n_d . В случае слабых полей

$$R = \frac{1}{e} \frac{\sigma_3^2 / n_3 - \sigma_d^2 / n_d}{(\sigma_3 + \sigma_d)^2}.$$

Для сильных полей

$$R = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n_3 - n_d}.$$

При $n_3 = n_d = n$ для всех значений магнитного поля

$$R = \frac{1}{en} \cdot \frac{\sigma_3 - \sigma_d}{\sigma_3 + \sigma_d},$$

а знак R соответствует знаку основных носителей.

Эффект Холла – один из наиболее удобных методов изучения энергетического спектра носителей заряда в металлах и полупроводниках. Зная R , можно определить знак носителей заряда и оценить их концентрацию, что позволяет сделать заключение о количестве примесей в полупроводниках. Линейная зависимость R от H используется для измерения напряженности магнитного поля, для усиления постоянных токов, в измерительной технике.

При изучении эффекта Холла в *двумерном электронном газе* кремниевого *полевого транзистора*, помещенного при низких температурах в квантующее магнитное поле, К. фон Клитцинг (K. von Klitzing) в 1980 г. обнаружил, что холловское сопротивление ($R_H = V_H/I = B/en$), в отличие от классического эффекта Холла, при котором R_H монотонно зависит от B или концентрации носителей заряда, принимает дискретные значения:

$$R_H = \frac{2\pi\hbar}{ve^2}.$$

Здесь $2\pi\hbar/e^2 = 25812,8$ Ом; $v = p/q$ – целые или дробные рациональные числа. В зависимости $R_H(n, B)$ наблюдались «ступеньки». При этом высота ступенек определяется такими фундаментальными константами, как постоянная Планка и заряд электрона, и не зависит от свойств вещества. Это явление получило название *квантового эффекта Холла* (рис. 10.29).

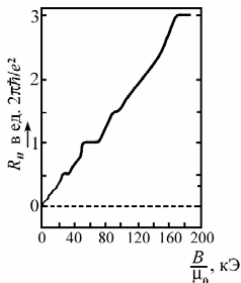


Рис. 10.29. Квантование холловского сопротивления в двумерном электронном газе кремниевого полевого транзистора

$$\left(\left[H = \frac{B}{\mu_0} \right] 1 \text{ А/м} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Э, см. п. 10.2} \right)$$

Практическое применение квантового эффекта Холла позволяет осуществить эталон Ома, согласованный с размером метра и секунды.

Основные выводы

Все вещества являются магнетиками и подвержены действию внешнего магнитного поля. Магнитные свойства материалов определяются природой атомных носителей магнетизма и характером их взаимодействий.

В парамагнетиках (Ce^{3+} , Br^{3+} , Ti^{3+} , V^{3+} и др.) внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 слабо усиливается ($B/B_0 > 1$). В диамагнетиках (Bi , Ag , Au , Cu и др.) внешнее магнитное поле незначительно уменьшается ($B/B_0 < 1$). В ферромагнетиках (Fe , Co , Ni и др.) внешнее магнитное поле увеличивается очень сильно ($B/B_0 = 10^3 \div 10^5$).

Магнитные свойства вещества характеризует средний магнитный момент единицы объема – вектор намагничивания

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{mi} .$$

Здесь \mathbf{p}_{mi} – магнитный момент i -й частицы; N – число частиц в объеме V . Вектор намагничивания измеряется в А/м (СИ).

Величина вектора намагничивания \mathbf{M} длинного тонкого цилиндра равна току намагничивания I_m , наведенному нескомпенсированными молекулярными токами, приходящимися на единицу длины цилиндра,

$$M = \frac{I_m}{h} .$$

Вектор \mathbf{M} может быть определен через плотность молекулярных токов \mathbf{j}_m

$$\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{j}_m .$$

Вектор напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

Единицей измерения \mathbf{H} в СИ служит А/м, в гауссовой системе единиц – эрстед Э, 1 А/м соответствует $4\pi \cdot 10^{-3}$ Э.

Магнитная восприимчивость χ – безразмерная величина характеризует связь намагниченности вещества \mathbf{M} с магнитным полем в веществе – напряженность намагничивающего поля

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}.$$

Для диамагнетиков ($\chi < 0$) и парамагнетиков ($\chi > 0$) абсолютная величина χ мала ($10^{-4} \div 10^{-6}$) и слабо зависит от H . У ферромагнетиков $\chi \approx 10^3 \div 10^5$ и сильно, нелинейно изменяется с H .

Удельная магнитная восприимчивость

$$\chi_{\text{уд}} = \frac{\chi}{\rho},$$

где ρ – плотность вещества.

Молярная магнитная восприимчивость

$$\chi_{\text{мол}} = m_{\mu} \chi_{\text{уд}} = \frac{m_{\mu}}{\rho} \chi$$

где m_{μ} – молярная масса.

Магнитная проницаемость μ вещества определяет реакцию среды на внешнее магнитное поле и показывает, как индукция магнитного поля в веществе B отличается от индукции магнитного поля в вакууме B_0 :

$$\mu = \frac{B}{B_0} = 1 + \chi.$$

Магнитное поле в магнетиках существенно зависит от формы магнетиков. В длинном цилиндрическом магнетике индукция магнитного поля в μ раз превосходит индукцию поля в коротком дискообразном магнетике.

В магнитной среде проводники с током взаимодействуют в μ раз сильнее, чем в вакууме,

$$F = \frac{\mu \mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}.$$

В магнитной среде соответственно в μ раз возрастают коэффициенты взаимной индукции и самоиндукции, а также плотность энергии магнитного поля

$$w_m = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Магнитный момент электрона в атоме \mathbf{p}_m связан с орбитальным моментом \mathbf{L} соотношением

$$\mathbf{p}_m = -g \left(\frac{e}{2m} \right) \mathbf{L}.$$

Для чисто орбитального движения $g = 1$, для чисто спинового $g = 2$, для сложных систем $1 < g < 2$, g называется фактором Ланде.

Магнетон Бора μ_B – элементарный магнитный момент,

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}.$$

Здесь e , m – заряд и масса электрона.

У диамагнетиков полный магнитный момент атомов, связанный с орбитальным и спиновым движением электронов, равен нулю. Магнитный момент в этом случае связан с прецессионным вращением электронной орбиты с ларморовой частотой

$$\boldsymbol{\omega}_L = -\frac{e}{2m} \mathbf{B}.$$

Магнитный момент единицы объема диамагнитного вещества

$$\mathbf{M} = -\frac{e^2 Z \bar{R}^2 N}{6m} \mathbf{B}.$$

Z – атомный номер; \bar{R}^2 – среднее значение квадрата эффективного радиуса электронной оболочки атома; N – число атомов в единице объема; e , m – заряд и масса электрона.

У парамагнетиков при $p_m B / (kT) \ll 1$ ($B \leq 1$ Тл)

$$M = \frac{N p_m^2 B}{3kT}.$$

p_m – магнитный момент атома, связанный с незаполненными внутренними электронными оболочками.

Ферромагнетики – вещества, способные к спонтанной намагниченности в отсутствие внешнего магнитного поля за счет существования в них особых областей доменов (размером $10^{-3} \div 10^{-2}$ см), где спины и магнитные моменты атомов ориенти-

рованы упорядоченным образом при $T < T_C$, где $T_C = \frac{\mu_B^2 \mu_0 \lambda N}{3k}$ –

температура Кюри; $\lambda \geq 900$ – постоянная усредненного поля.

Магнитное поле не проникает в объем сверхпроводника, поскольку в тонком приповерхностном слое – глубина проникновения $\approx 10^{-5}$ см – возбуждается экранирующий ток j_S , создающееся суммарное поле в объеме равно нулю. Глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 q^2 n_S}}$$

Здесь $q = 2e$ – заряд куперовских пар; $n_S = n/2$, n – концентрация электронов проводимости; e , m – заряд и масса электрона.

При намагничивании металлического цилиндра во внешнем магнитном поле цилиндр приходит во вращение с угловой скоростью

$$\omega = \frac{2\hbar N_A}{g m_\mu r^2}$$

– Эйнштейна – де Хааза эффект. Здесь g – фактор Ланде; r – радиус цилиндра; N_A – число Авогадро; m_μ – молярная масса.

Эффект Барнетта, при вращении ферромагнетика у него порождается дополнительный магнитный момент и магнитное поле индукцией

$$\mathbf{B} = -\frac{L_{\text{мех}}}{\mu_B} \boldsymbol{\Omega}.$$

Проявлением магнитной составляющей силы Лоренца в веществе служит эффект Холла – возникновение на боковых гранях проводника с током в поперечном магнитном поле разности потенциалов (ЭДС Холла), пропорциональной току I и индукции магнитного поля B :

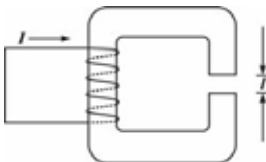
$$V_H = RBI/d.$$

Величина $R = 1/(ne)$ – постоянная Холла; n – концентрация носителей; e – их заряд; d – размер образца в направлении магнитного поля \mathbf{B} .

Упражнения

1. Определить намагниченность M тела при насыщении, если магнитный момент каждого атома равен магнетону Бора μ_B и концентрация атомов $6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Ответ: 556 кА/м.
2. Магнитная восприимчивость χ марганца равна $1,21 \cdot 10^{-4}$. Вычислить намагниченность M , удельную намагниченность $M_{уд}$ и молярную намагниченность M_m марганца в магнитном поле напряженностью $H = 100$ кА/м. Плотность марганца 7400 кг/м^3 , молярная масса $55 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Ответ: 12,1 А/м; 1,66 мА·м²/кг; 91 мкА·м²/моль.
3. Найти магнитную восприимчивость χ_{AgBr} , если его молярная магнитная восприимчивость $\chi_m = -7,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{моль}$. Плотность AgBr $18,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса 0,188 кг/моль. Ответ: $-7,3 \cdot 10^{-5}$.
4. Определить частоту ω_L ларморовой прецессии электронной орбиты в атоме, находящемся в магнитном поле Земли ($B = 50$ мкТл). Ответ: $4,4 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$.
5. Атом водорода находится в магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Вычислить магнитный момент p_m , обусловленный прецессией электронной орбиты. Принять, что среднее значение квадрата расстояния $\langle r^2 \rangle$ электрона от ядра равно $2/3 r_1^2$ (r_1 – радиус первой боровской орбиты). Ответ: $1,3 \cdot 10^{-29} \text{ А} \cdot \text{м}^2$.
6. Молярная магнитная восприимчивость χ_m оксида хрома Cr_2O_3 равна $5,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3/\text{моль}$. Определить магнитный момент p_m молекулы Cr_2O_3 (в магнетонах Бора), если температура $T = 300$ К. Ответ: 3,34 μ_B .
7. Удельная парамагнитная восприимчивость $\chi_{уд}$ трехоксида ванадия (V_2O_3) при $t = 17$ °С равна $1,89 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3/\text{кг}$. Определить магнитный момент p_m (в магнетонах Бора), приходящийся на молекулу V_2O_3 , если плотность ρ трехоксида ванадия равна $4,87 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Ответ: 2,24 μ_B .
8. Молекула кислорода имеет магнитный момент $p_m = 2,8 \mu_B$ (где μ_B – магнетон Бора). Определить намагниченность M газообразного кислорода при нормальных условиях в слабом магнитном поле ($B_0 = 10$ мТл) и в очень сильном поле. Ответ: 15,9 мА/м; 695 А/м.
9. Кусок железа внесли в магнитное поле напряженностью $H = 100$ А/м. Определить намагниченность M железа. Указание. Необходимо воспользоваться графиком на рис. 10.13. Ответ: 40 кА/м.
10. Прямоугольный ферромагнитный брусок объемом $V = 10 \text{ см}^3$ приобрел в магнитном поле напряженностью $H = 800$ А/м магнитный момент $p_m = 0,8 \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Определить магнитную проницаемость μ ферромагнетика. Ответ: 101.

11. В замкнутой сверхпроводящей обмотке электромагнита возбужден постоянный ток I (рисунок). В магнитопроводе из мягкого железа с магнитной проницаемостью μ имеется небольшой зазор толщиной l , так что рассеянием магнитного поля в зазоре можно пренебречь. Длина магнитопровода (вместе с зазором) равна L .

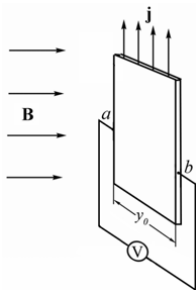


Чему будет равен ток I_0 в обмотке электромагнита, если в зазор вставить пластину толщиной l из того же железа? Ответ: $I_0 = LI/(L + \kappa l)$, где $\kappa = \mu - 1$.

12. Длинный сверхпроводящий цилиндр (из сверхпроводника I рода) внесен в постоянное однородное магнитное поле с индукцией B , направленное параллельно оси цилиндра. Определить силу f , действующую на единицу площади боковой поверхности цилиндра.

13. Кольцо из тонкой проволоки помещено в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-3}$ Тл, перпендикулярное плоскости кольца, и охлаждением переведено в сверхпроводящее состояние. Найти силу тока в кольце после выключения магнитного поля, если радиус кольца $R = 5$ см, а радиус проволоки $r = 1$ мм. *Указание.* Индуктивность тонкого проволочного кольца (если ток течет по его поверхности) в гауссовой системе дается выражением $L = 4\pi R[\ln(8R/r) - 2]$.

14. В однородное магнитное поле \mathbf{B} помещена проводящая пластина с плотностью тока \mathbf{j} , как показано на рисунке.



1) Ток обусловлен электронами проводимости, на каждый из которых в поперечном направлении действует магнитная сила. Какая из сторон, a или b , приобретет положительный заряд?

2) Пусть пластина — полупроводник p -типа, в котором носителями тока служат положительные заряды. Какая сторона приобретет положительный заряд в этом случае? (Это явление называется эффектом Холла, который используется для определения знака заряда носителя тока.)

Ответ: 1) b ; 2) a .

15 Пусть концентрация электронов проводимости в предыдущей задаче равна n . Выразите разность потенциалов V между сторонами a и b через j , B , n , y_0 и e . *Указание.* Действующая на электрон проводимости в поперечном направлении результирующая сила должна равняться нулю. Ответ: $V = Bjy_0/(ne)$.

Задачи

1. Найти магнитную восприимчивость χ и молярную магнитную восприимчивость χ_m платины, если удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд} = 1,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{кг}$. Плотность платины $21,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $0,195 \text{ кг/моль}$. Ответ: $2,8 \cdot 10^{-5}$; $2,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{моль}$.
2. Магнитная восприимчивость χ алюминия равна $2,1 \cdot 10^{-5}$. Определить его удельную магнитную $\chi_{уд}$ и молярную χ_m восприимчивости. Плотность алюминия 2700 кг/м^3 , молярная масса $27 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Ответ: $7,8 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{кг}$; $2,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{моль}$.
3. Висмутовый шарик радиусом $R = 1 \text{ см}$ помещен в однородное магнитное поле ($B_0 = 0,5 \text{ Тл}$). Определить магнитный момент p_m , приобретенный шариком, если магнитная восприимчивость висмута $\chi = -1,5 \cdot 10^{-4}$. Ответ: $250 \text{ мкА} \cdot \text{м}^2$.
4. Напряженность H магнитного поля в меди равна 1 МА/м . Определить намагниченность M меди и магнитную индукцию B , если известно, что удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд} = -1,1 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{кг}$. Плотность меди 8930 кг/м^3 . Ответ: $-9,8 \text{ А/м}$; $1,26 \text{ Тл}$.
5. Определить температуру T , при которой вероятность того, что данная молекула имеет отрицательную проекцию магнитного момента на направление внешнего магнитного поля, будет равна 10^{-3} . Магнитный момент молекулы считать равным одному магнетону Бора, а магнитную индукцию B поля – равной 8 Тл . Ответ: $0,78 \text{ К}$.
6. Во сколько раз число молекул, имеющих положительные проекции магнитного момента на направление вектора магнитной индукции внешнего поля ($B = 1 \text{ Тл}$), больше числа молекул, имеющих отрицательную проекцию, при температурах: 1) $T_1 = 300 \text{ К}$; 2) $T_2 = 1 \text{ К}$. Магнитный момент молекулы принять равным магнетону Бора. Ответ: 1) в $1,0022$ раза; 2) в $1,91$ раза.
7. При температуре $T_1 = 300 \text{ К}$ и магнитной индукции $B_1 = 0,5 \text{ Тл}$ была достигнута определенная намагниченность M парамагнетика. Найти магнитную индукцию B_2 , при которой сохранится та же намагниченность, если температуру повысить до $T_2 = 450 \text{ К}$. Ответ: $0,75 \text{ Тл}$.
8. Вычислить среднее число $\langle n \rangle$ магнетонов Бора, приходящихся на один атом железа, если при насыщении намагниченность железа равна $1,84 \text{ МА/м}$. Ответ: $2,36\mu_B$.
9. На один атом железа в незаполненной $3d$ -оболочке приходится четыре неспаренных электрона. Определить теоретическое значение намагниченности $M_{нас}$ железа при насыщении. Ответ: $3,13 \cdot 10^6 \text{ А/м}$.

10. Над плоской поверхностью сверхпроводника I рода на изолирующем слое толщиной $h = 5$ мм лежит тонкое сверхпроводящее кольцо радиусом $R = 10$ см, по которому течет постоянный ток I . При каком токе I кольцо начнет парить над сверхпроводником, если масса кольца $m = 1$ г

11. На какой высоте h постоянный магнитик с магнитным моментом $\mathbf{p}_m = 10^{-7}$ Тл·м³ и массой $m = 10$ г будет парить в горизонтальном положении над плоской горизонтальной поверхностью сверхпроводника I рода? Магнитик считать точечным диполем. *Указание.* Применить метод зеркальных изображений. Воспользоваться выражением для взаимной потенциальной энергии двух точечных диполей.

12. Шар радиусом R из сверхпроводника I рода внесен в постоянное однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B}_0 . Определить магнитное поле \mathbf{B} вне шара, если поле \mathbf{B}_0 еще не разрушает сверхпроводимость в шаре. Найти также поверхностную плотность сверхпроводящего тока i .

13. Бесконечно длинный цилиндр радиусом R из сверхпроводника I рода внесен в постоянное однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} , перпендикулярное к оси цилиндра. Определить магнитное поле \mathbf{B} вне цилиндра, если поле \mathbf{B}_0 еще не разрушает сверхпроводимость в цилиндре. Найти также поверхностную плотность тока сверхпроводимости i .

14. Сверхпроводящий шарик летит по направлению к соленоиду вдоль его оси. Индукция поля в центре соленоида $B = 10^{-1}$ Тл. Какова должна быть начальная скорость v шарика, чтобы он смог пролететь через соленоид насквозь? Диаметр соленоида много больше диаметра шарика. Плотность материала шарика $\rho = 8$ г/см³.

15. Для получения сверхсильных магнитных полей в катушках применяются обмотки из сверхпроводников II рода. Концы обмоток (пока проволока находится в нормальном состоянии) присоединяются к источнику тока. Затем катушки охлаждаются до гелиевых температур и переходят в сверхпроводящее (или смешанное) состояние. После этого катушки отключаются от источника тока и замыкаются накоротко.

16. Сверхпроводящий короткозамкнутый многослойный соленоид с внутренним радиусом $R_1 = 2$ см, наружным $R_2 = 4$ см и длиной $l = 20$ см создает внутри поле с индукцией $B_0 = 10$ Тл. Оценить количество жидкого гелия, которое испарится при переходе соленоида из сверхпроводящего (или смешанного) в нормальное состояние. Удельная теплота испарения гелия $Q = 0,7$ кал/см³.

17. При измерении эффекта Холла в металлическом натрии напряженность поперечного поля оказалась $E_H = 5$ мкВ/см при плотности тока $j = 200$ А/см² и индукции магнитного поля $B = 1,0$ Тл. Найти концентрацию электронов проводимости и её отношение к концентрации атомов Na в проводнике. Плотность натрия 968,4 кг/м³, молярная масса $23 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $2,5 \cdot 10^{28}$ м⁻³; 1 : 1.

18. При измерении эффекта Холла в металлическом проводнике оказалось, что при индукции магнитного поля $B = 0,1$ Тл напряженность поперечного поля E_H у данного образца в 3100 раз меньше напряженности E продольного электрического поля. Найти подвижность b_e электронов проводимости в проводнике.

Ответ: $3,2 \cdot 10^{-3}$ м²/(В·с).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Развитие представлений об электричестве и магнетизме	5
2. Электростатика	38
2.1. Закон Кулона	38
2.2. Принцип суперпозиции электрических полей	41
2.3. Электрические силовые линии	42
2.4. Электрические поля систем зарядов	43
2.4.1. Электрический диполь	43
2.4.2. Заряженная нить	47
2.4.3. Заряженная плоскость	48
2.5. Электрический потенциал	51
2.6. Связь между потенциалом и напряженностью	55
2.7. Безвихревой характер электростатического поля	59
2.8. Поток вектора напряженности	60
2.9. Теорема Гаусса в электростатике	64
2.10. Поле равномерно заряженной прямой нити и заряженного цилиндра	67
2.11. Электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости и плоскопараллельной пластинки	72
2.12. Поле шара с равномерно заряженной поверхностью и объемом	78
2.13. Теорема Ирншоу	86
2.14. Проводники в электрическом поле	87
2.15. Поле во внутренней полости проводника	89
2.16. Пробой при высоком напряжении	91
2.17. Электрический и ионный проекторы	93
Основные выводы	95
Упражнения	97
Задачи	101
3. Диэлектрики	106
3.1. Введение	106
3.2. Вектор поляризации или поляризованность	108
3.3. Уравнения электростатики для диэлектриков	112
3.4. Диэлектрик в электрическом поле	114
3.5. Газообразные диэлектрики	118
3.6. Диэлектрические свойства жидкостей	122

3.7. Твердые диэлектрики. Электреты. Пьезоэлектрики	124
3.8. Сегнетоэлектрические кристаллы	125
3.9. Электроконвекционные явления (электрофорез, электроэндосмос и др.)	128
Основные выводы	135
Упражнения	137
Задачи	139
4. Энергия системы зарядов и электрического поля	142
4.1. Электрическая емкость. Конденсаторы	142
4.2. Энергия взаимодействия электрических зарядов	149
4.3. Энергия в электрическом поле	156
Основные выводы	162
Упражнения	164
Задачи	165
5. Электрический ток	170
5.1. Плотность тока. Ток	170
5.2. Закон Ома	173
5.3. Сторонние электродвижущие силы	177
5.4. Стационарные токи в массивных проводниках	186
5.5. Токи в цепи при зарядке и разрядке конденсатора	189
5.6. Тепловое действие тока. Закон Джоуля – Ленца	191
Основные выводы	197
Упражнения	200
Задачи	202
6. Классическое и квантовое представления об электро- проводности металлов и полупроводников	205
6.1. Экспериментальные данные	205
6.2. Вывод законов Джоуля – Ленца в классической теории электронной проводимости металлов	207
6.3. Электропроводность металлов. Термометры сопротив- ления, болометры, тензометры	211
6.4. Квантовые представления об электронной проводимости металлов	216
6.5. Зонная модель электронной проводимости металлов	220
6.6. Зонная модель электронно-дырочной проводимости полупроводников	223
6.7. Электронно-дырочные переходы	229
6.8. Сверхпроводимость	231

Основные выводы	237
Упражнения	239
Задачи	241
7. Электрический ток в электролитах, газах и вакууме	244
7.1. Ток в электролитах. Электролиз. Законы Фарадея	244
7.2. Вторичные реакции на электродах. Применения электролиза	250
7.3. Подвижность ионов и электропроводность растворов	254
7.4. Гальванические элементы. Электрохимическая коррозия	256
7.5. Аккумуляторы	263
7.6. Топливный элемент	266
7.7. Ток в газах	271
7.8. Несамостоятельная проводимость газов	273
7.9. Самостоятельный газовый разряд. Закон Пашена	275
7.10. Тлеющий разряд	279
7.11. Искровой разряд. Молния	281
7.12. Коронный разряд	284
7.13. Дуговой разряд	287
7.14. Плазма	289
7.15. Плазменные телевизионные экраны и дисплеи	296
7.16. Ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия	298
7.17. Автоэлектронная и взрывная электронные эмиссии	305
Основные выводы	307
Упражнения	310
Задачи	313
8. Контактные явления	316
8.1. Контактная разность потенциалов	316
8.2. Эффект Зеебека – возникновение термоЭДС	320
8.3. Эффект Пельтье и эффект Томсона	324
Основные выводы	327
Упражнения	328
9. Магнитное поле	330
9.1. Введение	330
9.2. Сила Лоренца	333
9.3. Сила Ампера	339
9.4. Магнитное поле постоянного тока. Закон Био – Савара – Лапласа	341
9.5. Теорема о циркуляции	347

9.6. Магнитное взаимодействие токов. Закон Ампера	353
9.7. Относительность электрического и магнитного полей	356
9.8. Релятивистское преобразование величин \mathbf{B} и \mathbf{E}	358
9.9. Основные уравнения магнитостатики	363
9.10. Векторный потенциал магнитного поля	365
9.11. Вычисление векторного потенциала магнитного поля	369
9.12. Силы и моменты, действующие на рамку с током в магнитном поле	373
9.13. Энергия контура с током в магнитном поле	377
9.14. Магнитная энергия	380
9.15. Магнитное взаимодействие замкнутых контуров с токами. Моменты и силы	384
9.16. Энергия магнитного взаимодействия в контуре с током. Коэффициент самоиндукции	386
Основные выводы	389
Упражнения	494
Задачи	400
10. Магнитное поле в веществе	406
10.1. Введение	406
10.2. Намагниченность вещества	407
10.3. Магнитная восприимчивость и относительная магнитная проницаемость вещества	412
10.4. Взаимодействие постоянных токов в однородной магнитной среде	415
10.5. Классификация магнетиков	417
10.6. Магнитный момент и момент количества движения электронов в атомах	420
10.7. Диамагнетизм	422
10.8. Парамагнетизм	426
10.9. Ферромагнетизм	430
10.10. Магнитные свойства сверхпроводников	445
10.11. Гиромангнитные явления	449
10.12. Эффект Холла	451
Основные выводы	454
Упражнения	458
Задачи	460

Для заметок

Учебное издание

**Тюрин Юрий Иванович
Чернов Иван Петрович
Крючков Юрий Юрьевич**

Ф И З И К А

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Учебник

Редактор	<i>Е.В. Лукина</i>
Дизайн обложки	<i>О.Ю. Аршинова О.А. Дмитриев</i>

Подписано к печати 14.07.2008. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать XEROX. Усл. печ. л. 27.22. Уч.-изд. л. 24.62.


Заказ 7••. Тираж • 00 экз.



Томский политехнический университет
Система менеджмента качества

Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.