

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.П. Потылицын, М.И. Рязанов,
М.Н. Стриханов, А.А. Тищенко

ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Учебное пособие

Издательство
Томского политехнического университета
2008

УДК 539.12:535.4 (075.8)

ББК 22.338:22.343.4я73

П64

Потылицын А.П.

П64 Дифракционное излучение релятивистских частиц: учебное пособие / А.П. Потылицын, М.И. Рязанов, М.И. Стриханов, А.А. Тищенко. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 347 с.

ISBN 5-98298-328-4

В учебном пособии впервые систематизированы и изложены основы теории дифракционного излучения. Спецификой работы является излучение релятивистских и ультрарелятивистских заряженных частиц, а также их сгустков. Обсуждаются вопросы использования дифракционного излучения для невозмущающей диагностики пучков заряженных частиц на современных ускорителях.

Пособие разработано в рамках реализации Инновационной образовательной программы ТПУ по направлению «Атомная энергетика, ядерный топливный цикл, безопасное обращение с радиоактивными отходами и отработанным ядерным топливом, обеспечение безопасности и противодействие терроризму».

Книга адресована магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области электродинамики, физики пучков и ускорительной техники.

УДК 539.12:535.4 (075.8)

ББК 22.338:22.343.4я73

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Рецензенты

Доктор физико-математических наук
ведущий научный сотрудник ИСЭ СО РАН

В.В. Рыжов

Доктор физико-математических наук
ведущий научный сотрудник НИИ ЯФ ТПУ

Г.А. Науменко

ISBN 5-98298-328-4

© Потылицын А.П., Рязанов М.И.,
Стриханов М.И., Тищенко А.А., 2008
© Томский политехнический университет, 2008
© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2008

ВВЕДЕНИЕ

Дифракционное излучение, возникающее в оптическом диапазоне при пролете заряженных частиц в вакууме вдоль периодически деформированной поверхности (решетки), впервые экспериментально обнаружили С. Смит и Э. Парселл в начале пятидесятых годов прошлого века [53.1], а теоретически предсказано оно было И.М. Франком в начале сороковых годов [42.1]. В последующие 20 лет этот тип излучения был детально изучен на пучках нерелятивистских электронов в диапазоне сантиметровых волн. В это же время происходило развитие теоретических методов, позволяющих рассчитывать характеристики дифракционного излучения для различных конфигураций приборов и параметров пучка. Возникло новое направление СВЧ-электроники [76.1], активно развиваемое до сегодняшних дней [88.1, 03.1].

В настоящее время показано, что интенсивность дифракционного излучения релятивистских частиц в оптическом и ультрафиолетовом диапазоне может быть сравнима с интенсивностью переходного излучения, которое широко используется в физике высоких энергий и ускорительной физике. В отличие от переходного, дифракционное излучение не сопровождается непосредственным взаимодействием частиц пучка с твердотельной мишенью, что открывает перспективы невозмущающей диагностики пучков на современных ускорителях.

Дифракционное излучение может использоваться для анализа структуры объектов с микронными размерами, где традиционные рентгеновские методы оказываются неэффективными из-за отсутствия рентгеновских линз с требуемой светосилой.

Следует указать на потенциальные возможности когерентного дифракционного излучения, генерируемого пучком умеренно-релятивистских электронов, сгруппированным в сгустки длиной менее 1 мм. В этом случае спектр излучения охватывает терагерцевый диапазон, который представляет значительный интерес для прикладных исследований в физике, химии и биологии [06.1].

В современных работах дифракционное излучение релятивистских частиц освещено весьма кратко. Работы [76.1] и [88.1] полностью посвящены дифракционному излучению, которое генерируется в периодических структурах нерелятивистскими электронами, тогда как в монографии [03.1] в числе прочего, рассмотрены некоторые приложения дифракционного излучения как нерелятивистских, так и релятивистских частиц. Следует указать, что в упомянутой книге упор сделан на специфические особенности именно СВЧ-техники (модуляция пучка в процессе его взаимодействия с мишенью, сравнительно небольшие энергии

электронов, нелинейность физических явлений), тогда как проблемы собственно дифракционного излучения и результаты современных экспериментов в этой области остались не затронутыми. В работах более общего характера, посвященных излучению быстрых заряженных частиц в веществе [69.1, 98.1], дифракционному излучению посвящено по одной главе. Между тем в настоящее время появилось большое число теоретических и экспериментальных работ, в которых обосновано применение и разработаны оригинальные экспериментальные методы использования дифракционного излучения для невозмущающей диагностики электронных пучков и сгустков. Это привело к возрастанию интереса к свойствам дифракционного излучения, как со стороны теоретиков, так и со стороны экспериментаторов.

Успехи, достигнутые за последнее десятилетие в этом направлении физики, привели к существенному прогрессу в изучении и применении дифракционного излучения.

Адресуя книгу будущим физикам-теоретикам и к физикам-экспериментаторам, авторы пытались дать строгое обоснование используемых подходов наряду с кратким изложением результатов последних экспериментальных работ. Авторы надеются, что книга поможет молодым исследователям получить знания, позволяющие активно работать в данной области.

Ограниченный объем книги не позволил включить вопросы, связанные с влиянием наведенных в мишени токов на характеристики пучка. Экспериментальные данные подтверждают, что при малых по сравнению с кинетической энергией пучка потерях энергии на излучение такое упрощение оправданно. Это, с одной стороны, позволяет избежать учета нелинейных явлений, а с другой – развить основы невозмущающей диагностики пучков заряженных частиц.

Список литературы отражает круг доступных авторам работ, в той или иной мере использованных при написании книги.

Авторы пользуются приятной возможностью поблагодарить

Б.М. Болотовского, Н.Ф. Шульгу, Н.Н. Насонова, Г.А. Науменко и П.В. Каратаева за многочисленные стимулирующие дискуссии, а также признательны Л.В. Пузыревич, Д.В. Карловцу, А.Р. Вагнеру, А.Г. Кондратьевой за помощь в подготовке рукописи к изданию.

1. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

1. Общие свойства излучения релятивистских частиц

Как хорошо известно, процесс излучения состоит в образовании поперечных электромагнитных волн движущимися заряженными частицами. Рассмотрим процесс излучения, возникающего при движении одной релятивистской заряженной частицы по закону $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$ в веществе с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. В области оптических и более высоких частот отличием магнитной проницаемости среды от единицы можно пренебречь, считая среду немагнитной. Чтобы найти излученную энергию, вычислим сначала магнитное поле, создаваемое при таком движении заряженной частицы. Уравнения Максвелла для фурье-образов полей и токов по времени в однородной изотропной немагнитной среде имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) - i \frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \\ \varepsilon(\omega) \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= 4\pi \rho(\mathbf{r}, \omega), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \\ \operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где \mathbf{j} и ρ – соответственно, плотность тока и заряда, отвечающая движению заряженной частицы.

Взяв ротор от первого уравнения (1.1), легко получить уравнение для магнитного поля:

$$(\Delta + k^2) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega), \tag{1.2}$$

где введено обозначение

$$k^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon(\omega). \tag{1.3}$$

Уравнение (1.2), аналогично хорошо известному уравнению для векторного потенциала, созданного заданным током, и его решение имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \text{rot}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega). \quad (1.4)$$

На далеких расстояниях, при $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$, это решение можно представить как

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{i}{cr} \exp(ikr) \int d^3 r' [\mathbf{k} \mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega)] \exp(-i\mathbf{k} \mathbf{r}'). \quad (1.5)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{n}k$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, \mathbf{k} – волновой вектор поля излучения в точке наблюдения r .

Энергию поля, протекающую на далеких расстояниях внутри телесного угла $d\Omega$ в направлении вектора \mathbf{n} в интервале частот $d\omega$, можно получить следующим образом. За полное время движения зарядов в телесный угол $d\Omega$ излучается энергия:

$$\begin{aligned} dW(\mathbf{n}) &= r^2 d\Omega \frac{c}{4\pi} \int dt (\mathbf{n} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]) = \\ &= r^2 d\Omega \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' (\mathbf{n} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega')]) \int \frac{dt}{2\pi} \exp\{i(\omega + \omega')t\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Интеграл по времени представляет собой дельта-функцию $\delta(\omega + \omega')$, что позволяет снять одно интегрирование по частоте. Четность подынтегральной функции дает возможность заменить интеграл по всем частотам удвоенным интегралом по положительным частотам:

$$dW(\mathbf{n}) = cr^2 d\Omega \int_0^{\infty} d\omega (\mathbf{n} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, \omega)]). \quad (1.7)$$

На далеких расстояниях фурье-образы полей на частоте ω связаны такими же соотношениями, как и поля в плоской волне:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon^{-1/2}(\omega) [\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{n}],$$

так как кривизна волнового фронта порядка $1/r$. В результате распределение излученной энергии по углам запишется как

$$dW(\mathbf{n}) = cr^2 d\Omega \int_0^{\infty} d\omega \varepsilon^{-1/2}(\omega) |\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)|^2. \quad (1.8)$$

Подынтегральное выражение в (1.8) всюду положительно, поэтому можно написать распределение излученной энергии по углам и частотам, убрав знак интегрирования:

$$d^2W(\mathbf{n}, \omega) = cr^2 d\Omega d\omega \varepsilon^{-1/2}(\omega) |\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)|^2. \quad (1.9)$$

Подстановка $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ в форме (1.5) дает распределение по углам и частотам энергии излучения, создаваемого в среде произвольной заданной плотностью тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{\omega^2}{c^3} \sqrt{\varepsilon} \left| \int d^3r' \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') [\mathbf{n}\mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega)] \right|^2 \quad (1.10)$$

Нетрудно отсюда получить и распределение энергии, излученной зарядом e , движущимся по заданному закону $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$. В этом случае

$$(\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{R}}{dt})$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)),$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e}{2\pi} \int dt \mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))\exp(i\omega t). \quad (1.11)$$

При подстановке этого выражения в (1.10) интегрирование по координатам проводится с помощью дельта-функции и остается только интеграл по времени.

Распределение по углам и частотам энергии, излученной движущимся по закону $\mathbf{R}(t)$ зарядом, выражено формулой:

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2 \sqrt{\varepsilon}}{4\pi^2 c^3} \left| \int dt [\mathbf{n}\mathbf{v}(t)] \exp\{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{R}(t)\} \right|^2. \quad (1.12)$$

Полезно подчеркнуть, что для далеких расстояний, больших по сравнению с длиной волны и с размерами излучателя (эту область обычно называют волновой зоной), соотношение (1.12) является точным для лю-

бых (как нерелятивистских, так и ультрарелятивистских) скоростей заряженных частиц. Необходимо только знать закон движения этой частицы.

В некоторых случаях удобно представить излученную энергию в другой форме. Для этого подставим в (1.10) разложение плотности тока в интеграл Фурье по всем координатам и по времени:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \int d^3q \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t). \quad (1.13)$$

Тогда вместо (1.10) можно получить

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{(2\pi)^6}{c\sqrt{\varepsilon}} \left| [\mathbf{kj}(\mathbf{k}, \omega)] \right|^2. \quad (1.14)$$

Для вычисления спектра излучения это выражение удобно преобразовать следующим образом. Переписав (1.14) в виде

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{(2\pi)^6}{c\sqrt{\varepsilon}} \left(k^2 |\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)|^2 - |\mathbf{kj}(\mathbf{k}, \omega)|^2 \right), \quad (1.15)$$

можно, используя уравнение непрерывности для фурье-образов плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega)$ и плотности заряда $\rho(\mathbf{q}, \omega)$,

$$\mathbf{qj}(\mathbf{q}, \omega) = \omega\rho(\mathbf{q}, \omega),$$

преобразовать (1.15) к виду

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{(2\pi)^6}{c\sqrt{\varepsilon}} \left(k^2 |\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)|^2 - \omega^2 |\rho(\mathbf{k}, \omega)|^2 \right). \quad (1.16)$$

Для заряда, движущегося по закону $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$, фурье-образы по координатам и времени для плотностей тока и заряда вычисляются элементарно:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) &= e(2\pi)^{-4} \int dt \mathbf{v}(t) \exp\{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{R}(t)\}, \\ \rho(\mathbf{q}, \omega) &= e(2\pi)^{-4} \int dt \exp\{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{R}(t)\}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Подстановка этих выражений в (1.17) дает

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3 \sqrt{\varepsilon}} \int dt \int dt' \{ \mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t') \varepsilon(\omega) - c^2 \} \times \\ \times \exp \{ i\omega(t-t') - ik(\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t')) \}. \quad (1.18)$$

Преимущество такой формы записи в том, что единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$, вдоль которого направлен телесный угол $d\Omega$, содержится лишь в показателе экспоненты, в то время как в формуле (1.12) \mathbf{n} содержится и в показателе экспоненты и в предэкспоненциальном множителе. Поэтому интегрирование (1.18) по углам для вычисления спектра излучения $dW(\omega)$ сводится только к интегрированию экспоненты по углам. Учитывая, что

$$\int d\Omega \exp(i\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}) = 4\pi \frac{\sin g}{g}, \quad (1.19)$$

легко проинтегрировать (1.18) по углам и получить спектр излучения заряда, движущегося по закону $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$, в форме

$$\frac{dW(\omega)}{d\omega} = \frac{e^2 \omega}{\pi c^2 \varepsilon(\omega)} \iint dt dt' \{ \mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t') \varepsilon(\omega) - c^2 \} \times \\ \times \frac{\sin(k|\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t')|)}{|\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t')|} \exp \{ i\omega(t-t') \}. \quad (1.20)$$

Выразив экспоненту через синусы и косинусы, легко видеть, что интеграл с синусом равен нулю, так как подынтегральная функция в нем меняет знак при переобозначении t на t' . В оставшемся интеграле с косинусом удобно свести интегрирование к области $t > t'$ и воспользоваться соотношением

$$2 \sin g \cos(\omega\tau) = \sin(\omega\tau + g) - \sin(\omega\tau - g),$$

после чего (1.20) запишется как ($t' = t + \tau$)

$$\frac{dW(\omega)}{d\omega} = \frac{e^2 \omega}{\pi c^2 \varepsilon(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau \{c^2 - \mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t+\tau) \varepsilon(\omega)\} \times \\ \times \frac{\sin\{\omega\tau - k|\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t+\tau)|\} - \sin\{\omega\tau + k|\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t+\tau)|\}}{|\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t')|}. \quad (1.21)$$

Распределение излученной энергии по углам и частотам (1.12) и частотный спектр излучения (1.21) получены для движения частицы с зарядом e по закону $\mathbf{R}(t)$ в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. Распределение излученной энергии при таком же движении частицы в вакууме получается из (1.12) и (1.21) заменой $\varepsilon(\omega)$ на единицу. При этом следует учесть, что диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ входит в результат как явно в виде множителя, так и неявно – через величину $k = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)}$.

Движение ультрарелятивистских частиц с энергией $E = mc^2 \gamma$ mc^2 определяется, в основном, поперечной по отношению к скорости компонентой внешней силы, а влияние продольной компоненты внешней силы в γ^2 раз меньше (см., например, § 9 [97.1]). Это значит, что в первом приближении можно пренебречь продольной компонентой внешней силы и продольным ускорением. В этом приближении ускорение перпендикулярно скорости частицы и сохраняется абсолютная величина её скорости. Рассмотрим случай, когда, за промежуток времени, определяющий величину интеграла по τ , изменение скорости частицы относительно мало.

Учитывая, что скорость частицы в рассматриваемом приближении меняется только по направлению, можно записать:

$$\mathbf{v}(t+\tau) = \mathbf{v}(t) \{1 - \zeta^2(t) \tau^2 / 2\} + \mathbf{e}(t) \zeta(t) \tau v(t), \quad (1.22)$$

где $\mathbf{e}(t)$ – единичный вектор направления компоненты силы, поперечной к скорости частицы, $\mathbf{v}(t) \mathbf{e}(t) = 0$. Относительно малое изменение скорости означает, что характеризующая это изменение величина $\zeta(t) \tau \ll 1$. Запишем теперь радиус-вектор частицы в форме, учитывающей сохранение абсолютной величины скорости:

$$\mathbf{R}(t+\tau) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{v}(t) \tau \left[1 - \zeta^2(t) \tau^2 / 6 \right] + \mathbf{e}(t) \zeta(t) v(t) \tau^2 / 2;$$

$$|\mathbf{R}(t+\tau) - \mathbf{R}(t)| = \mathbf{v}(t)\tau \left\{ 1 - \zeta^2(t)\tau^2/24 \right\}. \quad (1.23)$$

Это позволяет преобразовать спектр излучения ультррелятивистской частицы (1.21) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dW(\omega)}{d\omega} &= \frac{e^2\omega}{\pi c^2 \varepsilon(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{v(t)} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \frac{c^2 - v^2(t) \varepsilon(\omega) [1 - \zeta^2 \tau^2/2]}{1 - \zeta^2 \tau^2/24} \times \\ &\times \left(\sin \left\{ (\omega - kv)\tau + kv\zeta^2 \tau^3/24 \right\} - \sin \left\{ (\omega + kv)\tau - kv\zeta^2 \tau^3/24 \right\} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Случай $\zeta = 0$ соответствует равномерному прямолинейному движению, при котором нет излучения и (1.24) обращается в нуль. Это нетрудно показать, переходя к новым переменным интегрирования: $u = (\omega - kv)\tau$ в интеграле с первым синусом и $u = (\omega + kv)\tau$ в интеграле со вторым синусом, после чего эти интегралы становятся одинаковыми, а их разность обращается в нуль.

2. Длина формирования излучения

Вернемся теперь к формуле (1.12) и рассмотрим случай, когда заряд движется с постоянной скоростью \mathbf{v} между моментами времени $t < -T/2$ и $t = T/2$. Это значит, что при $t < -T/2$ заряд покоится в точке $\mathbf{r} = -\mathbf{v}T/2$, а при $t > T/2$ заряд покоится в точке $\mathbf{r} = \mathbf{v}T/2$. В момент времени $t = -T/2$ заряд внезапно ускоряется до скорости \mathbf{v} , а в момент времени $t = T/2$ внезапно останавливается. Применимость приближения внезапной остановки или внезапного ускорения будет обсуждена ниже. Используя (1.12) для такого движения заряда после интегрирования по t , можно получить распределение излученной энергии в форме

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c^3} \varepsilon^{1/2}(\omega) [\mathbf{n}\mathbf{v}]^2 \frac{4\sin^2 \left\{ (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})T/2 \right\}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим сначала предельный переход к случаю $T \rightarrow \infty$. Тогда удобно воспользоваться известной формулой

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(xT)}{Tx^2} = \pi\delta(x).$$

При $T \rightarrow \infty$ (2.1) принимает вид

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c^3} \sqrt{\varepsilon(\omega)} [\mathbf{nv}]^2 T \delta(\omega - \mathbf{kv}), \quad (2.2)$$

что совпадает с распределением энергии черенковского излучения.

Следует отметить, что при предельном переходе $T \rightarrow \infty$ не учитываются слагаемые, не растущие вместе с T . Поэтому когда $\omega \neq \mathbf{kv}$, так что аргумент дельта-функции не проходит через нуль (т. е. $c^2 > v^2 \varepsilon(\omega)$), необходимо более аккуратное рассмотрение. В этом случае

$$2 \sin^2 \{(\omega - \mathbf{kv})T/2\} = 1 - \cos \{(\omega - \mathbf{kv})T\}.$$

так что, быстро осциллирующий косинус при $T \rightarrow \infty$, дает нулевой вклад при интегрировании по малому интервалу углов или частот. Поэтому при $c^2 > v^2 \varepsilon$

$$d^2W(\mathbf{n}, \omega) = 2d\omega d\Omega \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \frac{[\mathbf{nv}]^2}{(\omega - \mathbf{kv})^2} = 2d^2W_{st}(\mathbf{n}, \omega), \quad (2.3)$$

где $d^2W_{st}(\mathbf{n}, \omega)$ – распределение энергии излучения при внезапной остановке заряда, двигавшегося со скоростью \mathbf{v} , или равное ему распределение энергии излучения при внезапном ускорении покоящегося заряда до скорости \mathbf{v} .

В противоположном предельном случае малых T , т. е. при $(\omega - \mathbf{kv})T \ll 1$, из (2.1) следует

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \sqrt{\varepsilon(\omega)} [\mathbf{nv}]^2 (2T)^2. \quad (2.4)$$

В этом случае излученная энергия пропорциональна квадрату времени движения, следовательно поле в точке наблюдения пропорционально первой степени времени движения T . Это можно объяснить тем, что созданные на малом участке пути частицы поля пришли в точку наблюдения почти с одинаковыми фазами и когерентно складываются без взаимопогашения. Из (2.1) видно, что при $T = (2N + 1)\pi/(\omega - \mathbf{kv})$, где N – целое число, интенсивность излучения проходит через максимум,

но при $T = 2N\pi/(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$ интенсивность излучения обращается в нуль. Это можно объяснить так: по мере увеличения длины пути частицы vT в точку наблюдения приходят волны со все более и более различающимися фазами, так что частичное взаимопогашение различных волн возрастает. При $T = 2\pi/(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$ поля с двух половин пути приходят в точку наблюдения в противофазе и происходит полное взаимопогашение полей в точке наблюдения. Отсюда следует, что поле, регистрируемое в точке наблюдения, формируется на конечном участке пути заряженной частицы, длину которого по порядку величины можно оценить как

$$l_c = \frac{2\pi v}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (2.5)$$

Эта длина называется обычно длиной формирования излучения [69.1] или длиной когерентности [56.1]. Можно сказать, что длина когерентности – это длина такого участка пути частицы, из всех точек которого поля приходят в точку наблюдения с практически одинаковыми фазами и когерентно складываются. С этой точки зрения отсутствие излучения у равномерно движущегося заряда связано с полным взаимопогашением в точке наблюдения волн, испущенных с различных участков пути. Любое нарушение условий интерференции волн в точке наблюдения приводит к появлению излучения.

Так, например, если при столкновении с атомом заряженная частица внезапно изменяет скорость от значения \mathbf{v} до значения \mathbf{u} в момент времени $t = 0$, то в этом случае при $t > 0$ и $t < 0$ заряд движется равномерно и прямолинейно. На всех участках траектории заряда, кроме участка вблизи точки поворота, происходит взаимопогашение волн, испущенных из соседних длин когерентности. Этого не происходит только для соседних с точкой поворота участках траектории с длиной порядка $2\pi v/(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$ и $2\pi u/(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})$.

Именно на таком участке пути и формируется излучение при внезапном отклонении частицы. Внезапным можно считать такое изменение скорости частицы (в том числе и остановку заряда), которое происходит за время, малое по сравнению с эффективным временем формирования излучения $2\pi/(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$. Излучение при изменении скорости заряженной частицы из-за столкновения с атомом называется обычно тормозным излучением.

Из преобразований Лоренца следует, что испускаемые ультрарелятивистским источником в вакууме электромагнитные волны сосредото-

чены в области малых углов \mathcal{G} порядка $\gamma^{-2} = \sqrt{1 - (v/c)^2}$ вблизи направления скорости. Та же оценка получается из условия максимальности длины когерентности,

$$\mathcal{G}^2 \sim \gamma^{-2} = 1 - (v/c)^2. \quad (2.6)$$

Из (1.12) можно видеть, что переход от распределения по углам и частотам для излучения движущегося в вакууме заряда к распределению для движущегося по тому же закону заряда в среде получается умножением всего распределения на $\sqrt{\varepsilon}$ и заменой $c \rightarrow c/\sqrt{\varepsilon}$. В области частот, больших по сравнению с атомными, диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 - (\omega_p/\omega)^2; \quad \omega_p^2 = 4\pi n e^2/m \ll \omega^2. \quad (2.7)$$

В области больших частот для ультрарелятивистских частиц замена $c \rightarrow c/\sqrt{\varepsilon}$ превращает оценку для характерных углов вылета излучения (2.6) в

$$\mathcal{G}^2 \sim 1 - \varepsilon(v/c)^2 \cong \gamma^{-2} + (\omega_p/\omega)^2.$$

Длина формирования излучения в этой области частот по порядку величины равна:

$$l_c = \frac{2\pi v}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{2\lambda}{\mathcal{G}^2 + (\omega_p/\omega)^2 + \gamma^{-2}}.$$

Отсюда следует, что для частиц с энергией в области

$$mc^2 (\omega/\omega_p) \gg E \gg mc^2 \quad (2.8)$$

длины когерентности для излучения в среде и в вакууме совпадают. Это значит, что в области (2.8) существование среды не влияет на процесс излучения.

При достаточно большой энергии частицы, когда выполняется неравенство

$$E \gg mc^2 (\omega/\omega_p) \gg mc^2, \quad (2.9)$$

длина формирования излучения по порядку величины равна:

$$l_c \approx \frac{2\lambda}{\beta^2 + (\omega_p/\omega)^2}. \quad (2.10)$$

Важное отличие излучения нерелятивистских и ультрарелятивистских частиц состоит в том, что для нерелятивистской частицы $v \ll c$ и $\mathbf{k}\mathbf{v} \ll \omega$, так что длина формирования излучения $2\pi v/\omega$ всегда намного меньше длины волны излучения $2\pi c/\omega$. В ультрарелятивистском случае при излучении в вакууме длина когерентности всегда больше длины волны излучения, а при излучении в среде это справедливо для частот, больших по сравнению с атомными частотами.

При сверхвысоких энергиях частиц длина когерентности может стать настолько большой, что на процесс формирования излучения успевают повлиять другие процессы, сопровождающие прохождение частицы через вещество. Например, из-за многократного рассеяния частицы на атомах вещества движение частицы на длине когерентности при тормозном излучении происходит не по прямой и скорость прохождения частицей длины когерентности оказывается меньше ее фактической скорости. На частотах меньше оптических это приводит к подавлению интенсивности тормозного излучения, особенно сильному для малых частот, для которых длина формирования излучения больше. Этот эффект был впервые рассмотрен Ландау и Померанчуком в 1953 г. с помощью классической электродинамики [53.2, 53.3], а квантовая теория, включающая и обобщение на процесс образования пар, была создана в 1954 г. Мигдалом [54.1]. Экспериментально этот эффект был обнаружен только в 1996 г. [96.1] (см. также обзор [05.1]).

3. Излучение тяжелой заряженной частицы при столкновении с атомом

Рассматривая столкновение быстрой заряженной частицы с атомом, учтем, что причиной излучения может быть не только отклонение быстрой частицы, но и изменение состояния атомных электронов. Законы сохранения энергии и импульса не допускают излучения поперечной электромагнитной волны свободно движущимся зарядом. Для излучения необходима передача импульса некоторой другой частице или телу.

Если при излучении внутреннее состояние атома не меняется, то импульс передается от частицы атому, атом испытывает отдачу, частица отклоняется и излучает. Основным источником излучения здесь является отклоняющаяся частица. Такой процесс называется тормозным излучением [34.1], его интенсивность обратно пропорциональна квадрату массы частицы и поэтому для тяжелых частиц мала. Влияние атомных электронов на тормозное излучение рассматривалось в [39.1, 87.1].

Второй тип процесса возникает, если пролетающая частица почти не отклоняется при столкновении, а внутреннее состояние атома изменяется. Часть энергии быстрой частицы передается атомным электронам, возбуждая поляризационные токи, являющиеся источником поляризационного излучения. При этом энергия электронных колебаний настолько мала по сравнению с энергией быстрой частицы, что можно пренебречь потерями энергии быстрой частицы, считая её скорость постоянной. К излучению поляризационных токов или тормозному поляризационному излучению [87.2], в частности, относятся: черенковское излучение, когда скорость частицы больше скорости света в среде; переходное излучение, когда частица пересекает поверхность раздела сред; параметрическое рентгеновское излучение, когда частица пролетает сквозь кристалл; дифракционное излучение, когда заряженная частица движется в вакууме вблизи поверхности вещества, не пересекая её.

Переходное и дифракционное излучение чаще всего рассматривают в приближении равномерно движущейся частицы. Это приближение оправдано в том случае, когда полная излученная энергия много меньше кинетической энергии заряженной частицы. Итак, будем считать, что действующее на атомный электрон поле тяжелой заряженной частицы совпадает с полем равномерно и прямолинейно движущегося заряда Ze

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \int d^3q \mathbf{E}_0(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\mathbf{q}\mathbf{v}t), \quad \mathbf{E}_0(\mathbf{q}) = -i \frac{Ze}{2\pi^2} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{q}\mathbf{v}) - \mathbf{q}c^2}{q^2 c^2 - (\mathbf{q}\mathbf{v})^2},$$

а процесс излучения состоит в превращении фурье-компоненты собственного поля заряда $\mathbf{E}_0(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\mathbf{q}\mathbf{v}t)$ в излучаемую плоскую волну $\mathbf{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. Так как задача стационарна, то в рамках линейной электродинамики частота меняться не может, так что $\omega = \mathbf{q}\mathbf{v}$.

Рассмотрим в качестве примера излучение, возникающее при пролете заряда e с постоянной скоростью \mathbf{v} вблизи связанного в осцилляторе электрона. Под действием поля равномерно движущегося заряда $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ возбуждаются колебания связанного электрона. Будем считать

применимым дипольное приближение, подразумевая, что характерная длина волны поля велика по сравнению с амплитудой колебаний связанного электрона. Тогда поле частицы практически одинаково при всех положениях колеблющегося электрона и для действующей на электрон силы можно использовать поле в точке равновесного положения электрона \mathbf{R} . Так как длина волны поля намного больше атомных размеров, в качестве равновесного положения электрона можно выбрать точку расположения ядра атома.

Уравнение движения электрона в поле частицы в этом приближении имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0(\mathbf{R}, t) = \frac{e}{m} \int d\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{R}, \omega) \exp(-i\omega t). \quad (3.1)$$

Дипольный момент этого электрона,

$$\mathbf{d}(\mathbf{R}, t) = \int d\omega \mathbf{d}(\mathbf{R}, \omega) \exp(-i\omega t),$$

созданный в атоме полем частицы, связан с решением уравнения (3.1) для вынужденных колебаний $\mathbf{r}(t)$ как $\mathbf{d}(t) = e\mathbf{r}(t)$. Переходя в (3.1) к фурье-образам по времени, нетрудно получить для фурье-образа дипольного момента соотношение

$$\mathbf{d}(\mathbf{R}, \omega) = \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{R}, \omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}. \quad (3.2)$$

Фурье-образ плотности внутриатомного тока, созданного полем частицы, имеет в дипольном приближении вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = -\omega \sum_s \mathbf{d}_s(\mathbf{R}, \omega) \delta(\mathbf{r}_s - \mathbf{R}), \quad (3.3)$$

где суммирование проводится по всем электронам атома. Фурье-образ этого тока по координатам и времени запишется как

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{-i\omega}{(2\pi)^3} \alpha(\omega) \mathbf{E}_0(\mathbf{R}, \omega) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{R}). \quad (3.4)$$

Здесь введена поляризуемость атома:

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m} \sum_s \frac{f_s}{\omega_s^2 - \omega^2 - i\Gamma_s \omega}, \quad (3.5)$$

где f_s – вероятность обнаружить в атоме электрон с частотой ω_s .

Распределение энергии излучения по углам и частотам приобретает вид

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = (2\pi)^6 \left(\frac{1}{c\mathcal{E}^{1/2}} \right) \left[\mathbf{kj}(\mathbf{k}, \omega) \right]^2 = |\alpha(\omega)|^2 \frac{\omega^2}{c} \left[\mathbf{kE}_0(\mathbf{R}, \omega) \right]^2. \quad (3.6)$$

Рассмотрим излучение, возникающее при пролете ультрарелятивистской частицы вдоль оси z на расстоянии b от равновесного положения связанного электрона, совпадающего с началом координат. Направленная вдоль скорости компонента поля ультрарелятивистской частицы намного меньше поперечной компоненты поля, поэтому можно учесть только поперечную компоненту поля

$$E_{0x}(\mathbf{R}, t) = \frac{Zeyb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (3.7)$$

Фурье-образ поперечной компоненты поля имеет вид

$$E_{0x}(\mathbf{R}, \omega) = \frac{Ze}{\pi b v} \frac{\omega b}{\gamma v} K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right), \quad (3.8)$$

где $K_1(u)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка. В пределе малых и больших значений аргумента эта функция имеет вид

$$K_1(u) \cong \begin{cases} 1/u, & u \ll 1, \\ (\pi/2u) \exp(-u), & u \gg 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

Как и функция переменной $u = \omega b / \gamma v$, фурье-образ поля (3.8) при малых u стремится к постоянной величине, а при больших u экспоненциально убывает. Распределение излученной энергии по углам и частотам в рассматриваемом случае приобретает вид

$$d^2W(\mathbf{n}, \omega) = \frac{Z^2 \omega^4 (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi)}{\pi^2 c^3 v^2 b^2} |\alpha(\omega)|^2 \left\{ \frac{\omega b}{\gamma v} K_1 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) \right\}^2 d\omega d\Omega. \quad (3.10)$$

Выражение в фигурных скобках порядка единицы при $\omega b < \gamma v$ и быстро убывает при $\omega b > \gamma v$. Излученная энергия обратно пропорциональна квадрату прицельного параметра b при $\omega b < \gamma v$ и экспоненциально убывает при $\omega b > \gamma v$. Полезно подчеркнуть, что (3.10) не содержит массы быстрой частицы, а содержит только массу атомного электрона.

Таким образом, законы сохранения при тормозном излучении выполняются за счет передачи импульса от быстрой частицы среде (быстрая частица отклоняется), а при переходном или дифракционном излучении – за счет передачи среде импульса от поля заряженной частицы (быстрая частица не меняет скорость).

В общем случае, конечно, при столкновении частицы с атомом импульс среде передается и частицей и полем. Но при столкновении электрона с атомом можно пренебречь передачей импульса от поля среде, а при столкновении быстрого протона с атомом можно пренебречь передачей импульса от протона среде. Таким образом, тормозное и переходное излучение являются предельными случаями процесса излучения при столкновении с атомом. Естественно, что существуют более сложные случаи, когда нельзя пренебречь передачей импульса среде ни от поля, ни от самой частицы. Процессом такого типа может служить поляризационное тормозное излучение, отличающееся от тормозного излучения тем, что учитывается и отклонение быстрой частицы и изменение состояния связанных электронов атома [87.1]. Рассмотрение таких процессов излучения и ссылки на статьи по поляризационному тормозному излучению можно найти в монографии [87.2].

4. Переходное и дифракционное излучение

При пролете быстрой заряженной частицы вблизи поверхности вещества поле этой частицы возбуждает колебания атомных электронов, т. е. возникают поляризационные токи, создающие вторичное электромагнитное поле. Такое поле возникает, например, при движении частиц в элементах ускорителей, и основной интерес представляет его влияние на движение частиц. В частности, вторичное поле может привести к нестабильности в линейных ускорителях.

В работах по теории процессов в ускорителях созданное поляризационными токами вторичное поле часто называется кильватерным по-

лем (wake-field), однако при рассмотрении излучения, созданного поляризованными токами, термином “wake-field” пользуются редко, а чаще говорят о дифракционном излучении, излучении Смита–Парселла и т.д. При действии кильватерного поля на частицу в ускорителе важны и его продольная и поперечная части в точках, близких к траектории частицы. При рассмотрении переходного и дифракционного излучения представляет интерес только поперечная часть вторичного поля – поле излучения на далеких расстояниях от траектории частицы.

Как отмечалось выше, основой и переходного, и дифракционного излучения является процесс излучения электромагнитных волн при колебании атомных электронов, возбужденных полем пролетающей заряженной частицы.

Для быстрых частиц потерянная на излучение энергия намного меньше энергии частицы, так что можно с хорошей точностью считать скорость частицы постоянной. Излучение движущегося в среде по закону $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$ заряда можно рассматривать как превращение фурье-компоненты собственного поля заряда $\mathbf{E}_0(\mathbf{q}) \exp\{i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\}$ в монохроматическую плоскую волну $\mathbf{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ при взаимодействии с атомами среды. Величины \mathbf{q} и \mathbf{k} , $\mathbf{q}\mathbf{v}$ и ω , вообще говоря, не совпадают, поэтому в процессе взаимодействия импульс атома изменится на $\hbar(\mathbf{q} - \mathbf{k})$, а энергия изменится на $\hbar(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})$. Исключением является случай, когда диэлектрическая проницаемость однородной и стационарной среды $\varepsilon(\omega)$ и скорость частицы \mathbf{v} связаны неравенством $\varepsilon(\omega) \geq (c/v)^2$. Тогда при $\mathbf{q} = \mathbf{k}$ для одного значения угла θ выполняется равенство $\mathbf{k}\mathbf{v} = \omega(v/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta = \omega$. Такое излучение получило название черенковского излучения.

Рассмотрим случай, когда условия существования черенковского излучения не выполняются. Тогда излучение возможно, если от поля среде передается импульс $\Delta p = \hbar(\mathbf{q} - \mathbf{k})$ или от среды полю передается энергия $\Delta E = \hbar(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})$. Передача импульса возможна только в неоднородной среде, а передача энергии возможна лишь в нестационарной среде. Закон сохранения энергии для процесса излучения в нестационарной и неоднородной среде имеет вид:

$$\hbar\omega = \hbar\mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{v}\Delta p + \Delta E. \quad (4.1)$$

Отсюда следует, что для возникновения излучения существенна передача только продольной (т. е. направленной вдоль скорости частицы) компоненты импульса p_v . Минимальное значение величины $v\Delta p + \Delta E$, ниже которого излучения не возникает, равно

$$(v\Delta p_v + \Delta E)^{\min} = \hbar\omega - \hbar\mathbf{k}\mathbf{v} = \hbar\omega \left\{ 1 - (v/c)\sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos\theta \right\}. \quad (4.2)$$

Для частиц с энергией $E = \gamma mc^2 \gg mc^2$ для малых углов θ и больших частот, когда для диэлектрической проницаемости среды справедливо соотношение $\varepsilon(\omega) = 1 - (\omega_p/\omega)^2$, из (4.2) следует

$$(v\Delta p_v + \Delta E)^{\min} = \frac{\hbar\omega}{2} \left\{ \theta^2 + (\omega_p/\omega)^2 + \gamma^{-2} \right\}. \quad (4.3)$$

Передача импульса Δp_v от поля неоднородной среде наиболее эффективна, когда характерный размер неоднородностей вдоль направления скорости порядка $\hbar/\Delta p_v$. Если же этот размер больше, чем $\hbar/\Delta p_v^{\min}$, то продольный передаваемый импульс меньше необходимого для процесса излучения минимального продольного импульса и излучение ничтожно мало. Для нерелятивистской частицы пороговая величина размера неоднородности порядка $v/\omega \sim \lambda(v/c)$, т. е. намного меньше длины волны излучения. Наоборот, в ультрарелятивистском случае для больших частот пороговый размер неоднородности порядка $\lambda / \left[\theta^2 + (\omega_p/\omega)^2 + \gamma^{-2} \right]$, т. е. во много раз больше длины волны излучения.

Переходным излучение называется, если частица пересекает границу двух сред с различными диэлектрическими постоянными, а дифракционным – если частица границу не пересекает. Заметим, что при движении частицы параллельно плоской границе однородной среды дифракционное излучение не возникает, так как при такой геометрии невозможна передача среде продольного импульса, требуемая законами сохранения при излучении. Но если имеются неоднородности на поверхности или внутри среды, то дифракционное излучение возникает всегда.

Рассматривая задачу о переходном излучении в рамках макроскопической электродинамики, можно сказать следующее. В каждой из этих сред частица создает свое собственное макроскопическое электромагнитное поле. Однако, эти поля не удовлетворяют граничным услови-

ям на поверхности раздела сред. Как известно, общее решение неоднородного волнового уравнения, которому подчиняются эти поля, складывается из частного решения неоднородного волнового уравнения и общего решения однородного волнового уравнения. Собственное поле равномерно движущегося заряда – это частное решение неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения – это поле излучения. Оно содержит две произвольные постоянные, выбираемые так, чтобы удовлетворились граничные условия.

Таким образом, решение уравнений Максвелла в полубесконечной среде отличается от решения тех же уравнений в бесконечной среде добавлением поля излучения. Следовательно, пересекающий поверхность раздела двух сред равномерно движущийся заряд излучает электромагнитные волны. Такое излучение было теоретически предсказано Гинзбургом и Франком в 1946 г. и названо переходным излучением [46.1]. Переходное излучение изучалось во многих работах [83.1, 69.1, 84.1, 59.1, 59.2, 70.1, 93.1].

Рассмотрим простейший пример переходного излучения: излучение при пролёте заряженной частицы через поверхность раздела вакуум – идеальный проводник. Пусть частица с зарядом Ze вылетает из идеального проводника в вакуум со скоростью v , перпендикулярной поверхности $x = 0$ проводника.

Магнитное поле при такой симметрии задачи не имеет составляющей вдоль оси x , так что граничные условия для нормальных компонент магнитного поля H_x удовлетворяются автоматически. Граничные условия требуют равенства нулю тангенциальных компонент электрического поля на поверхности проводника. Этого можно добиться, поместив внутри проводника «заряд-изображение» $-Ze$, движущийся вдоль оси x со скоростью $-v$. Тогда поле, созданное реальным зарядом при $x > 0$ в вакууме, совпадает с полем в полупространстве $x > 0$, созданном при движении реального заряда и заряда изображения в бесконечном вакууме. Таким образом, решение задачи с одним зарядом и граничным условием сводится к решению задачи в вакууме с двумя зарядами – истинным зарядом и зарядом-изображением.

Итак, для решения задачи о переходном излучении нужно найти излучение двух зарядов $+Ze$ и $-Ze$, двигавшихся навстречу друг другу со скоростями $+v$ и $-v$ и внезапно остановившихся в момент времени $t = 0$. Соответствующая такому движению зарядов плотность тока имеет вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = Zev \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + \delta(\mathbf{r} + \mathbf{v}t) \} \quad (t < 0); \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (t > 0). \quad (4.4)$$

Распределение излученной энергии по углам и частотам можно получить с помощью (1.10) аналогично (1.12):

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{Z^2 e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} [\mathbf{nv}]^2 \times \left| \int_{-\infty}^0 dt \left[\exp\{i(\omega - \mathbf{kv})t\} + \exp\{i(\omega + \mathbf{kv})t\} \right] \right|^2. \quad (4.5)$$

В вакууме $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$, так что величины $(\omega - \mathbf{kv})$ и $(\omega + \mathbf{kv})$ положительны и интегрирование дает

$$d^2W(\mathbf{n}, \omega) = \frac{Z^2 e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} [\mathbf{nv}]^2 \left| \frac{1}{\omega - \mathbf{kv}} - \frac{1}{\omega + \mathbf{kv}} \right|^2 d\Omega d\omega, \quad (4.6)$$

или, обозначив $\mathbf{nv} = v \cos \theta$, $\beta = v/c$,

$$d^2W(\mathbf{n}, \omega) = \frac{Z^2 e^2 \beta^2}{\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} d\Omega d\omega. \quad (4.7)$$

Интегрирование этого выражения по углам дает спектр излучения:

$$dW(\omega) = (Z^2 e^2 / \pi c) \left\{ \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right\} d\omega. \quad (4.8)$$

В ультрарелятивистском случае, когда $\beta = 1 - (1/2)(mc^2/E)^2 = 1 - \gamma^{-2}/2$, получаем

$$\frac{dW(\omega)}{d\omega} = \frac{Z^2 e^2}{\pi c} \{ \ln(2\gamma) - 1 \}. \quad (4.9)$$

В нерелятивистском случае $\beta \ll 1$ спектр излучения даётся выражением

$$\frac{dW(\omega)}{d\omega} = \frac{Z^2 e^2}{\pi c} \frac{4}{3} \beta^2. \quad (4.10)$$

Применимость полученных выше формул ограничена условием большой величины мнимой части диэлектрической проницаемости на рассматриваемой частоте.

Из (4.9) следует, что потерянная на переходное излучение энергия логарифмически растет с энергией частицы.

Рассмотрим теперь переходное излучение при пересечении заряженной частицей границы диэлектрик–вакуум, ограничиваясь областью частот, которые намного выше, чем атомные. Тогда, вне узких полос, в которых существенно поглощение, диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m} \ll \omega^2. \quad (4.11)$$

Малая величина разности $1 - \varepsilon(\omega)$ позволяет использовать при решении задачи метод последовательных приближений. Процесс переходного излучения можно рассматривать как излучение при внезапной остановке заряда на поверхности раздела и внезапном начале движения в той же точке и в тот же момент времени от поверхности раздела в другой среде. При внезапной остановке движущегося в бесконечной среде по закону $\mathbf{r}_0(t)$ заряда распределение излучения по углам и частотам имеет вид ($\mathbf{v}_0(t) = d\mathbf{r}_0(t)/dt$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} &= \frac{Z^2 e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \varepsilon^{1/2}(\omega) \times \\ &\times \left| \int_{-\infty}^0 dt [\mathbf{n} \mathbf{v}_0(t)] \exp\left\{i\omega\left(t - \sqrt{\varepsilon} \mathbf{n} \mathbf{r}_0(t)/c\right)\right\} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

При внезапной остановке заряда на границе полубесконечной среды с вакуумом это распределение изменится из-за преломления и отражения на границе, что для больших частот приведет к поправкам, пропорциональным малой разности диэлектрических проницаемостей вакуума и среды $1 - \varepsilon(\omega)$. В первом приближении можно пренебречь величиной $1 - \varepsilon(\omega)$ всюду, кроме показателя экспоненты в (4.11). Тогда распределения излучения при внезапной остановке заряда в бесконечной и полубесконечной среде совпадают. При внезапном начале движения заряда в бесконечном вакууме распределение излучения имеет вид

$$\frac{d^2W(\mathbf{n},\omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{Z^2 e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_0^\infty dt [\mathbf{nv}_0(t)] \exp\{i\omega(1-\mathbf{nv}/c)t\} \right|^2. \quad (4.13)$$

Преломление и отражение на границе раздела среда–вакуум в области больших частот также приводит к изменению этого распределения на величину, пропорциональную разности диэлектрических проницаемостей сред $1-\varepsilon(\omega)$. В первом исчезающем приближении по $1-\varepsilon(\omega)$ распределения излучения в полубесконечной и бесконечной среде совпадут и в этом случае.

При вычислении распределения энергии переходного излучения в том же приближении также можно пренебречь разностью $1-\varepsilon(\omega)$ всюду, кроме показателя экспоненты. Тогда распределение энергии излучения по углам и частотам можно представить как

$$\begin{aligned} \frac{d^2W(\mathbf{n},\omega)}{d\omega d\Omega} = & \frac{Z^2 e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_0^\infty dt [\mathbf{nv}_0(t)] \exp\{i\omega(t-\mathbf{nr}_0(t))/c\} + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^0 dt [\mathbf{nv}_0(t)] \exp\{i\omega(t-\sqrt{\varepsilon}\mathbf{nr}_0(t)/c)\} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

При движении заряженной частицы с постоянной скоростью \mathbf{v} распределение энергии излучения по углам и частотам в этом приближении приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2W(\mathbf{n},\omega)}{d\omega d\Omega} = & \frac{Z^2 e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} [\mathbf{nv}]^2 \times \\ & \times \left| \int_{-\infty}^0 dt \exp\{i\omega(1-\sqrt{\varepsilon}\mathbf{nv}/c)t\} + \int_0^\infty dt \exp\{i\omega(1-\mathbf{nv}/c)t\} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Интегрирование по времени дает

$$\frac{d^2W(\mathbf{n},\omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{Z^2 e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} [\mathbf{nv}]^2 \left| \frac{1}{1-\sqrt{\varepsilon}\mathbf{nv}/c} - \frac{1}{1-\mathbf{nv}/c} \right|^2. \quad (4.16)$$

При $\omega \gg \omega_p$ можно считать $\sqrt{\varepsilon(\omega)} = 1 - \omega_p^2/2\omega^2$. В ультрарелятивистской области и углы вылета излучения малы, так что $\cos\theta = 1 - \theta^2/2$. Учитывая сказанное, можно преобразовать (4.16) к виду

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{Z^2 e^2}{4 c} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \frac{\theta^2}{\left(\theta^2 + \gamma^{-2} + \omega_p^2/\omega^2 \right)^2 \left(\theta^2 + \gamma^{-2} \right)^2}. \quad (4.17)$$

Интегрирование этого выражения по углам дает спектр излучения:

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{Z^2 e^2}{\pi c} \left\{ \left[1 + 2 \left(\frac{\omega}{\gamma \omega_p} \right)^2 \right] \ln \left[1 + \left(\frac{\omega}{\gamma \omega_p} \right)^2 \right] - 2 \right\}. \quad (4.18)$$

Проинтегрировав (4.18) по частотам, получаем полную энергию переходного излучения

$$\Delta W = \frac{Z^2 e^2}{3 c} \omega_p \frac{E}{mc^2} = \frac{1}{3} Z^2 \alpha \gamma \hbar \omega_p. \quad (4.19)$$

Отсюда следует, что потерянная на переходное излучение энергия линейно растет с энергией частицы. Этот результат получен теоретически в [59.1, 59.2] и подтвержден экспериментально в [70.1]. Линейная зависимость энергии излучения от энергии ультрарелятивистской частицы делает переходное излучение уникальным процессом для регистрации частиц сверхвысокой энергии. Дело в том, что при заметных различиях в энергии ультрарелятивистских частиц их скорости очень мало отличаются друг от друга. Так, например, разность скоростей одинаковых ультрарелятивистских частиц с энергиями E_1 и E_2 равна:

$$v_1 - v_2 = c \left(1 - \frac{m^2 c^4}{2E_1^2} \right) - c \left(1 - \frac{m^2 c^4}{2E_2^2} \right) = c \frac{m^2 c^4}{E_1^2} \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_2^2}. \quad (4.20)$$

Таким образом, если скорости ультрарелятивистских частиц отличаются на 1%, то их энергии будут отличаться на $(E/mc^2)^2\%$. Это означает, что при определении энергии ультрарелятивистской частицы по результатам измерения ее скорости получаемая погрешность энергии во много раз превышает погрешность измерения ее скорости.

Детектирование быстрых частиц по их электромагнитным взаимодействиям предполагает использование свойств созданной частицей плотности тока. Но плотность тока пропорциональна скорости частицы, так что фактически измеряется скорость частицы. Таким образом, при определении энергии ультрарелятивистской частицы по измеренной скорости погрешность увеличивается, приводя к трудностям в таком методе измерения. Регистрация интенсивности переходного излучения позволяет измерять непосредственно энергию ультрарелятивистской частицы. Этим и объясняется широкое применение переходного излучения для детектирования ультрарелятивистских частиц [93.1].

Дифракционное излучение возникает при равномерном движении заряженной частицы вблизи поверхности среды [53.1, 66.1, 62.1, 64.1, 68.1, 68.2, 73.1, 98.2, 98.3, 04.1]. С микроскопической точки зрения такое излучение представляет собой излучение возбужденных частицей электронов внутриатомных оболочек, рассмотренное для одного атома в предыдущем разделе. Как там показано, в таком излучении эффективно участвуют только атомы, находящиеся на расстоянии b от траектории частицы, не большем, чем $\gamma v/\omega$. Если расстояние от траектории движущейся в вакууме частицы до поверхности среды больше $\gamma v/\omega$, то интенсивность дифракционного излучения экспоненциально убывает. Поэтому для экспериментального наблюдения дифракционного излучения нужно, чтобы частица пролетала на достаточно близком расстоянии от поверхности. Для нерелятивистских частиц это условие выполняется только в радиодиапазоне, но для ультрарелятивистских частиц это выполнимо и для больших частот. В переходном излучении такого ограничения нет, так как при движении в конденсированной среде всегда есть много атомов вблизи траектории частицы.

Малая толщина приповерхностного слоя молекул, принимающих участие в формировании дифракционного излучения, становится преимуществом в задачах по исследованию поверхностных свойств вещества. При измерении спектра излучения оказывается возможным исследовать изменение свойств вещества в зависимости от толщины исследуемого приповерхностного слоя.

Другим преимуществом дифракционного излучения перед переходным является его слабое влияние как на характеристики движения заряженной частицы (отсутствует взаимодействие частицы с атомами среды на малых расстояниях, так называемые «близкие столкновения»), так и на свойства исследуемого вещества.

Процесс дифракционного излучения, кроме лоренц-фактора частицы γ и длины волны излучения λ , характеризуется еще несколькими

характерными длинами. К ним относятся: расстояние от частицы до поверхности среды h , радиус затухания собственного поля частицы $\lambda\beta\gamma$, характерный размер неоднородностей поверхности a (не меньший, чем межмолекулярное расстояние $n_0^{-1/3}$) и длина формирования излучения l_c . В различных конкретных случаях между этими параметрами могут существовать различные неравенства, позволяющие выбрать определенный метод приближенного решения задачи. Различные соотношения между характерными параметрами приводят к различным подходам к описанию дифракционного излучения со своими особенностями, рассмотрение которых проведено в следующих разделах.

5. Кильватерное поле в линейных ускорителях

Важной проблемой современной физики ускорителей является увеличение плотности числа частиц в ускоряемом пучке, улучшающее условия проведения экспериментов по взаимодействию частиц высокой энергии. Этому мешают нестабильности пучка, возникающие из-за взаимодействия ускоряемых частиц между собой и с ускоряющими структурами.

При ускорении сгустков ультрарелятивистских частиц прямое взаимодействие частиц между собой внутри сгустка играет малую роль. Как известно, в лабораторной (неподвижной) системе отсчета сила взаимодействия двух зарядов, движущихся с одинаковой скоростью, заметно уменьшается при стремлении скорости к скорости света. Действительно, рассмотрим в лабораторной системе отсчета силу Лоренца \mathbf{F} , действующую на заряд e_1 со стороны заряда e_2 :

$$\mathbf{F} = e_1\mathbf{E}_2 + \frac{e_1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}_2]. \quad (5.1)$$

Предположим, что частицы пучка движутся с одинаковой скоростью \mathbf{v} . В таком случае в сопутствующей системе координат магнитное поле отсутствует, так что в лабораторной системе имеем

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}\mathbf{E}_2].$$

Проведем радиус-вектор \mathbf{R} от заряда e_2 к e_1 в сопутствующей системе координат. Угол между скоростью \mathbf{v} и вектором \mathbf{R} обозначим через \mathcal{G} . В таком случае поле, созданное зарядом e_2 в той точке, где находится в

данный момент времени заряд e_1 , в лабораторной системе координат имеет вид [97.1]

$$\mathbf{E}_2 = \frac{e_2 \mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{3/2}}. \quad (5.2)$$

Отсюда получаем для силы \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \frac{e_1 e_2}{R^3} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{3/2}} \left\{ \mathbf{R} + \frac{[\mathbf{v}[\mathbf{v}\mathbf{R}]]}{c^2} \right\}. \quad (5.3)$$

Разложим вектор \mathbf{R} на две составляющие: вдоль скорости \mathbf{R}_{\parallel} и перпендикулярно скорости \mathbf{R}_{\perp} :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\parallel} + \mathbf{R}_{\perp},$$

где

$$\mathbf{R}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{R})}{v^2}, \quad \mathbf{R}_{\perp} = \frac{[\mathbf{v}[\mathbf{R}\mathbf{v}]]}{v^2}.$$

Тогда выражение (5.3) принимает вид:

$$\mathbf{F} = \frac{e_1 e_2}{R^3} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{3/2}} \left\{ \mathbf{R}_{\perp} + \mathbf{R}_{\parallel} - \frac{v^2}{c^2} \mathbf{R}_{\perp} \right\}. \quad (5.4)$$

Последнее слагаемое в фигурных скобках в (5.4) отвечает второму слагаемому в (5.1), т. е. представляет собой силу, действующую со стороны магнитного поля, возникающего в лабораторной системе отсчета (т. е. магнитного поля, действующего на частицы в движущемся пучке с точки зрения неподвижного наблюдателя). Как видно из (5.2), кулоновские силы расталкивания растут с увеличением скорости частиц пучка. Этому условию отвечает то, что в (5.4) первые два слагаемые в фигурных скобках убывают с ростом скорости частицы при любых ϑ . Одна-

ко, возникающие магнитные силы не только компенсируют возрастание кулоновского расталкивания в движущемся пучке, но и приводят к тому, что полная сила отталкивания электронов пучка убывает с увеличением скорости. Действительно, поскольку

$$|\mathbf{R}_\perp| = R \sin \vartheta, \quad |\mathbf{R}_\parallel| = R \cos \vartheta,$$

для составляющих силы вдоль скорости (F_\parallel) и перпендикулярно к ней (F_\perp) получаем:

$$F_\parallel = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos \vartheta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{3/2}}, \quad F_\perp = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 \sin \vartheta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{3/2}}. \quad (5.5)$$

Отсюда видно, что электроны, расположенные в одной плоскости поперечного сечения пучка ($\vartheta = \pi/2$), отталкиваются с силой

$$F_\perp = \frac{e^2}{R^2} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{e^2}{R^2} \gamma^{-1}, \quad (5.6)$$

а следующие друг за другом по одной линии, параллельной оси пучка ($\vartheta = 0$), с силой

$$F_\parallel = \frac{e^2}{R^2} \left(1 - v^2/c^2\right) = \frac{e^2}{R^2} \gamma^{-2}. \quad (5.7)$$

Выражения (5.6) и (5.7) представляют собой максимальные значения F_\perp и F_\parallel . Таким образом, в движущемся ультрарелятивистском сгустке силы отталкивания между частицами пучка убывают с ростом скорости частиц пучка (с точки зрения наблюдателя в лабораторной системе отсчета).

Наличие сил расталкивания между заряженными частицами пучка компенсируется специальными методами ускорительной техники, которые позволяют стабилизировать сгустки в процессе ускорения. Поэтому в образовании неустойчивости пучка в линейном ускорителе главную роль играет взаимодействие частиц из-за вторичных полей, созданных поляризационными токами в проводящих элементах ускорителя. Здесь

есть некоторая аналогия с задачей о дифракционном излучении, хотя имеются также и существенные отличия. Устойчивость пучка определяется силами, действующими на частицу, поэтому представляет интерес не поперечное поле дифракционного излучения на далеких расстояниях, а полное поле, и продольное и поперечное, на близких расстояниях. В задаче об устойчивости пучка частиц в ускорителе, как правило, имеется цилиндрическая симметрия, которая чаще всего отсутствует в задаче о дифракционном излучении.

Возникновение неустойчивости пучка частиц в ускорителе связано, главным образом, с пролетом частиц через те элементы ускорителя, где изменяется форма или свойства канала, в котором движется пучок частиц. Причиной этого может быть как конструкция ускорителя, так и неидеальность материала, из которого изготовлены элементы ускорителя. Именно по этим причинам и возникают поляризационные токи, которые становятся главным источником вторичных полей. Эти вторичные поля приводят к изменению импульса частиц, что обычно и приводит к неустойчивости пучка. Однако, асимметрия в геометрии элементов ускорителя может способствовать и подавлению неустойчивостей [99.1].

Важность проблемы неустойчивостей пучка частиц в линейных ускорителях привела к интенсивному исследованию этой проблемы в большом числе работ. Возникающие при этом задачи имеют свою специфику, которая потребовала создания новых методов решения и привела к появлению новой терминологии. Так как скорости частиц в пучке близки к скорости света, то при движении двух частиц в ускорителе поле движущейся впереди частицы действует на вторую, движущуюся за ней частицу, но действием поля второй частицы на первую можно пренебречь. Таким образом, главную роль играет поле, которое действует только на частицы, движущиеся в кильватере за лидирующей частицей. Такое поле было названо кильватерным полем (wake field) [89.1, 90.1, 93.2, 91.1].

Следуя классификации, представленной в [95.1], кильватерные поля, рассчитываемые в пренебрежении конечной проводимостью материала элементов ускорителя, называются “геометрическими кильватерными полями” (geometric wake), тогда как при учёте реальных характеристик материалов – “resistive wake”.

Неустойчивости пучка частиц связаны с изменением импульса этих частиц. Пусть две частицы движутся в ускорителе. Пренебрегая отличием скорости ультрарелятивистской частицы от скорости света, будем считать, что в момент времени t первая частица с зарядом q на-

ходится в точке $x=0$, $y=0$, $z=ct$, а вторая частица с единичным зарядом в точке $x=\rho_x$, $y=\rho_y$, $z=s \equiv ct-l$. Изменение импульса второй частицы из-за действия поля первой имеет вид:

$$\Delta \mathbf{p} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \mathbf{E}(\rho_x, \rho_y, s, t) + \left[\mathbf{e}_z \mathbf{B}(\rho_x, \rho_y, s, t) \right] \right\}, \quad (5.8)$$

где \mathbf{e}_z – орт оси z , а интегрирование проводится вдоль невозмущенной орбиты второй частицы.

Учитывая цилиндрическую симметрию задачи, удобно рассматривать отдельно изменение продольного импульса Δp_z , т. е. направленного вдоль пути частицы и поперечного импульса $\Delta \mathbf{p}_{tr}$, т. е. перпендикулярного пути частицы. Представим эти величины в форме

$$\Delta p_z = -(q/c) w_l(\mathbf{c}, l); \quad \Delta \mathbf{p}_{tr} = (q/c) \mathbf{w}_{tr}(\mathbf{c}, l), \quad (5.9)$$

$$w_l(\mathbf{c}, l) = -\frac{c}{q} \int_{-\infty}^{\infty} dt E_z(\rho_x, \rho_y, s, t), \quad (5.10)$$

$$\mathbf{w}_{tr}(\mathbf{c}, l) = \frac{c}{q} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \mathbf{E}_{tr}(\rho_x, \rho_y, s, t) + \left[\mathbf{e}_z \mathbf{B}(\rho_x, \rho_y, s, t) \right]_{tr} \right\}. \quad (5.11)$$

Величины $w_l(\mathbf{c}, l)$ и $\mathbf{w}_{tr}(\mathbf{c}, l)$ обычно называются продольной и поперечной кильватерными функциями. Так как действием второй частицы на первую для ультрарелятивистских частиц можно пренебречь, то $w_l(\mathbf{c}, l) = 0$ и $\mathbf{w}_{tr}(\mathbf{c}, l) = 0$ при $l < 0$. Продольная и поперечная кильватерные функции связаны друг с другом соотношением (теорема Паннофского-Венцеля)

$$\frac{\partial \mathbf{w}_{tr}}{\partial l} = \frac{\partial w_l}{\partial \mathbf{c}}. \quad (5.12)$$

Отсюда следует, что продольная и поперечная кильватерные функции могут быть выражены через производные одной и той же функции $W(\mathbf{c}, l)$:

$$w_l(\mathbf{c}, l) = \frac{\partial W(\mathbf{c}, l)}{\partial l}, \quad \mathbf{w}_{tr}(\mathbf{c}, l) = \frac{\partial W(\mathbf{c}, l)}{\partial \mathbf{c}}. \quad (5.13)$$

Необходимо подчеркнуть, что кильватерные функции $w_l(\mathbf{r}, l)$, $w_{tr}(\mathbf{r}, l)$ и $W(\mathbf{r}, l)$ были определены выше относительно орбиты лидирующей частицы. Естественно, что эти функции зависят также и от координат лидирующей частицы \mathbf{c}' . Чтобы учесть эту зависимость, следует писать $w_l(\mathbf{c}', \mathbf{c}, l)$, $w_{tr}(\mathbf{c}', \mathbf{c}, l)$ и $W(\mathbf{c}', \mathbf{c}, l)$.

С фурье-образами кильватерных функций связаны продольный и поперечный импедансы:

$$\begin{aligned} Z_l(\mathbf{c}, l) &= \frac{1}{c} \int_0^{\infty} dl w_l(\mathbf{c}, l) \exp(i\omega l/c) \\ Z_{tr}(\mathbf{c}, l) &= -\frac{1}{c} \int_0^{\infty} dl w_{tr}(\mathbf{c}, l) \exp(i\omega l/c). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Используя (5.10) и (5.11) можно выразить импедансы через фурье-образы полей. Например, если скорость частицы имеет только одну компоненту v_z , то для продольного импеданса можно получить:

$$Z_l(\mathbf{r}, l) = -\frac{1}{q} \int_0^{\infty} dz E_z(\mathbf{r}, z, \omega) \exp(-i\omega z/c). \quad (5.15)$$

Зная импеданс, нетрудно найти изменение продольного и поперечного импульса частицы. В качестве примера приведем вычисление импеданса при движении ультрарелятивистских частиц в полубесконечном цилиндрическом, идеально проводящем волноводе радиусом a [91.1]. Пусть ось волновода совпадает с осью z - и заряженная частица влетает в открытый конец волновода в плоскости $z=0$, двигаясь в дальнейшем вдоль оси волновода. Из-за осевой симметрии задачи плотность поляризационного тока имеет только одну z -компоненту. В пределе $\gamma \rightarrow \infty$ фурье-образ по времени электрического поля внутри волновода можно представить в форме

$$\begin{aligned} E_z(\rho, z, \omega) &= -iQ \exp(ikz) K_0(\tau\rho) - \\ &- (q/2cka) \int_{-\infty}^{\infty} dp F(p) \chi_p^2 J_0(\chi_p \rho/a) H_0^{(1)}(\chi_p) \exp(ipz). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Здесь

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad \tau = \frac{k}{\gamma}, \quad Q = \frac{qk}{\pi c \gamma^2}, \quad \chi_p = a\sqrt{k^2 - p^2 + 2ik\varepsilon},$$

$J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода, $H_0(x)$ – функция Ганкеля первого рода, $K_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода. Функция $F(p)$ определяется из граничных условий, которые можно записать в форме

$$E_z(a, z, \omega) = 0, \quad \text{при } z > 0. \quad (5.17)$$

Вводя обозначения

$$L(p) = \pi \chi_p^2 J_0(\chi_p) H_0^{(1)}(\chi_p), \quad \Lambda = -2iaK_0(\tau a)(k/\gamma)^2, \quad (5.18)$$

можно записать граничное условие в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp F(p) L(p) \exp(ipz) = \Lambda \exp(ikz), \quad \text{при } z < 0. \quad (5.19)$$

Уравнения (5.16) и (5.19) образуют систему линейных интегральных уравнений для определения функции $F(p)$. Предположим, что искомая функция $F(p)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) произведение функций $F(p)L(p)$ в верхней полуплоскости комплексной переменной p имеет только один полюс при $p = k$, величина вычета в этом полюсе равна $\Lambda/2i\pi$, и в остальных точках верхней полуплоскости произведение $F(p)L(p)$ является аналитической функцией;

2) в верхней полуплоскости $F(p)$ является аналитической функцией и в пределе $|p| \rightarrow \infty$ обращается в нуль.

Тогда, как показано в [66.2], решение системы уравнений (5.16) – (5.19), удовлетворяющее условиям (1) и (2), можно получить в виде

$$F(p) = \frac{i\Lambda}{2\pi \Gamma_+(ka)(ka)^{1/2}} \frac{\Gamma_-(pa)}{(ka - pa)^{3/2}}. \quad (5.20)$$

Функции Γ_{\pm} определены уравнением

$$\Gamma_{\pm}(x) = [2\eta I_0(\eta) K_0(\eta)]^{\pm 1/2} \times \exp \left\{ -\frac{x}{i\pi} \int_0^{ka} dt \frac{\ln[\pi\sigma I_0(\sigma) K_0(\sigma)]}{x^2 - t^2} + \right. \\ \left. + \frac{x}{i\pi} PV \int_{ka}^{\infty} dt \frac{\ln[2\zeta I_0(\zeta) K_0(\zeta)]}{t^2 - x^2} \right\}, \quad (5.21)$$

где использованы обозначения

$$\eta = \sqrt{x^2 - k^2 a^2}, \quad \sigma = \sqrt{k^2 a^2 - t^2}, \quad \zeta = \sqrt{t^2 - k^2 a^2}.$$

На основе выражения (5.20) продольный импеданс в ультрарелятивистском случае был получен в [87.3] в виде

$$Z(k) = \frac{2kaK_0(ka/\gamma)}{c\gamma^2 I_0(ka/\gamma)} \left\{ \frac{\gamma I_1(ka/\gamma)}{I_0(ka/\gamma)} - \frac{\Gamma'_+(ka)}{\Gamma_-(ka)} - \frac{1}{4ka} \right\}. \quad (5.22)$$

В предельном случае ($ka \gg 1$)

$$Z(k) \approx \frac{2}{c} \ln \left(\frac{2\gamma}{ka} \right). \quad (5.23)$$

Приведенный пример является одним из немногих случаев, когда задача об импедансе решается аналитически. В большинстве случаев форма или свойства канала, в котором движутся частицы, изменяются достаточно сложным образом, так что приходится вводить упрощающие предположения и использовать численные методы решения задачи. Всё это приводит к трудностям в решении задач о кильватерном поле, но насущная необходимость решения проблемы неустойчивостей пучка частиц в линейных ускорителях привела к решению многих конкретных проблем в этой области.

Так, в [90.1] исследовано влияние проводящего цилиндра конечной длины на сжатие сгустка частиц, движущихся внутри цилиндрического канала линейного ускорителя. Обозначая радиус и толщину скин-слоя секции линейного ускорителя и сжимающего пучок цилиндра через d , δ_d , b и δ_b соответственно, считая толщину цилиндра τ намного

меньшей его радиуса b и предполагая выполненным неравенство $\delta_b \ll d(\beta\gamma)^{-2}$, авторы [01.1] получили условие сжатия пучка в виде

$$\tau \gg \frac{d\delta_b}{b\delta_d}. \quad (5.25)$$

Эффективность сжатия пучка рассмотрена также в [05.2]. Кильватерное поле при движении частиц внутри цилиндрического канала с диэлектрическими ускоряющими структурами изучалось в [03.2].

Развитые в теории кильватерного поля для линейных ускорителей методы применялись также и при рассмотрении процесса переходного излучения.

В [04.2] рассмотрено переходное излучение пучка частиц, пролетающего через тонкую металлическую фольгу. Рассматривались случаи, когда длина сгустка сравнима с его поперечными размерами и когда эта длина намного меньше поперечных размеров сгустка. Распределение частиц в сгустке по поперечным координатам предполагалось гауссовским.

Сила, действующая на пролетающий параллельно поверхности полубесконечного диэлектрика заряд, рассмотрена в [98.4] с учетом возможности черенковского излучения в диэлектрике.

Полезно остановиться на сходстве задач о неустойчивости пучка частиц в линейном ускорителе и о дифракционном излучении. И в тех и в других задачах общим является то, что нужно сначала вычислить плотность поляризованного тока в веществе. Когда плотность поляризованного тока вычислена, то в физике ускорителей необходимо найти поле на конечном расстоянии от источника, в то время как характеристики дифракционного излучения определяются полем на бесконечности, т. е. приходится решать различные задачи. Из сказанного следует, что применение методов, развитых в физике ускорителей для расчета дифракционного излучения может оказаться весьма плодотворным, однако необходима некоторая адаптация этих методов.

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

6. Дифракционное излучение как излучение поляризационных токов

Как отмечено выше, дифракционное излучение можно рассматривать как излучение поляризационных токов, возбужденных в веществе полем движущегося заряда. Расстояние между траекторией заряда и поверхностью вещества обычно велико по сравнению со средним межмолекулярным расстоянием в среде. Между тем, хорошо известно, что поле заряда, движущегося в вакууме со скоростью v и энергией $E = \gamma mc^2$ убывает с расстоянием h в перпендикулярном скорости направлении по экспоненциальному закону $\exp(-h\omega/\gamma v)$. Поэтому поляризационные токи сосредоточены в близком к поверхности слое, и свойства дифракционного излучения существенно зависят от свойств этого слоя. В частности, излучения не возникает при равномерном движении заряженной частицы параллельно бесконечной плоской поверхности однородной среды, так как при такой геометрии передача продольного импульса веществу, требуемая законами сохранения при излучении невозможна. Но если вещество неоднородное или его поверхность не плоская, то поле может передать веществу продольный импульс и излучение становится возможным.

Как известно, при рассмотрении электромагнитного поля в среде однородной средой можно считать только такую, в которой не только средняя плотность числа атомов постоянна, но и межмолекулярные расстояния малы по сравнению с длиной волны поля. Поэтому одну и ту же среду можно считать однородной в оптическом диапазоне частот, но её нужно рассматривать как неоднородную в области больших частот. Это значит, что дифракционное излучение от одной и той же поверхности приходится рассматривать различным образом в разных областях частот.

Движущийся в однородной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, по закону $x=0$, $y=0$, $z=vt$, заряд e создает векторный потенциал, фурье-образ по координатам и времени которого имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{ev}{2\pi^2} \frac{\delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})}{q^2 - (\omega/c)^2 \varepsilon(\omega)}. \quad (6.1)$$

Чтобы найти, как зависит от расстояния фурье-компонента поля такого заряда с частотой ω , рассмотрим фурье-образ векторного потенциала по времени:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e\mathbf{v}}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x dq_y \frac{\exp\{iq_x x + iq_y y + i(\omega z/v)\}}{q_x^2 + q_y^2 + (\omega/v)^2 [1 - (v/c)^2 \varepsilon(\omega)]}. \quad (6.2)$$

Ограничимся случаем, когда на рассматриваемой частоте черенковского излучения нет и выполняется условие

$$(v/c)^2 \varepsilon(\omega) < 1. \quad (6.3)$$

В этом случае знаменатель подынтегрального выражения положителен. Главный вклад в интеграл вносит область значений q_x^2 и q_y^2 , меньших или порядка $(\omega/v)^2 [1 - (v/c)^2 \varepsilon(\omega)]$, когда знаменатель близок к его минимальному значению. Однако, если при этом x или y достаточно велики, так что $q_x x \gg 1$ или $q_y y \gg 1$, то экспонента в числителе быстро осциллирует, существенно уменьшая величину интеграла. Этого не происходит, если координаты x и y меньше или порядка предельных значений x_0 и y_0 , определяемых из условий

$$x_0^2 (\omega/v)^2 [1 - (v/c)^2 \varepsilon(\omega)] = 1, \quad y_0^2 (\omega/v)^2 [1 - (v/c)^2 \varepsilon(\omega)] = 1.$$

Следовательно, фурье-компонента векторного потенциала по времени велика в области, где x и y меньше или порядка x_0 и y_0 , и мала вне этой области. Вычисление интеграла показывает, что зависимость от x имеет вид $\exp(-x/x_0)$. Ту же зависимость имеет и скалярный потенциал, и электрическое и магнитное поля заряда. Таким образом, фурье-компонента поля с частотой ω равномерно движущегося внутри вещества заряда убывает в перпендикулярном скорости направлении как $\exp\left\{-\frac{x\omega}{v} \sqrt{1 - (v/c)^2 \varepsilon(\omega)}\right\}$. Если диэлектрическая проницаемость

$\varepsilon(\omega)$ не близка к единице, то разность $1 - (v/c)^2 \varepsilon(\omega)$ не мала и по порядку величины сравнима с единицей. Поэтому показатель экспоненты

сравним с $-x\omega/v$, т. е. слабо зависит от энергии быстрой частицы. Однако, в частном случае частот, больших по сравнению с атомными частотами, диэлектрическая проницаемость близка к единице и имеет вид $\varepsilon(\omega) = 1 - (\omega_p/\omega)^2$. Тогда в случае ультрарелятивистских скоростей и больших частот $1 - (v/c)^2 \varepsilon(\omega) \approx (\omega_p/\omega)^2 + \gamma^{-2}$ и фурье-компонента поля частоты ω движущегося в веществе заряда убывает в перпендикулярном скорости направлении x как $\exp\left\{-\frac{x\omega}{v}\sqrt{(\omega_p/\omega)^2 + \gamma^{-2}}\right\}$.

Таким образом, если при движении заряда в вакууме эффективный радиус действия поля ультрарелятивистской частицы на частоте ω линейно растет с энергией частицы, то при движении заряда в среде радиус действия поля частицы зависит от энергии частицы более сложным образом. При условии (6.3) увеличение радиуса действия поля происходит только в частном случае частот, намного больших, чем атомные частоты. Это значит, что поляризационные токи, созданные полем равномерно движущейся заряженной частицы сосредоточены, в основном, в слое толщиной порядка $\lambda(v/c)$ и лишь в области больших частот они сосредоточены в более широком слое толщиной порядка $\lambda(v/c)\left((\omega_p/\omega)^2 + \gamma^{-2}\right)^{-1/2}$.

Источником дифракционного излучения является созданный полем частицы поляризационный ток, фурье-образ которого по координатам и времени можно представить в форме

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{i\omega}{4\pi} \{1 - \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \equiv \sigma(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (6.4)$$

где $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ – диэлектрическая проницаемость, $\sigma(\mathbf{r}, \omega)$ – проводимость вещества.

Если слой, в котором возникают поляризационные токи, достаточно тонкий, то влияние поляризационных токов можно рассматривать как малое возмущение, что позволяет решить задачу методом последовательных приближений. Для этого представим поля в виде ряда по степеням поляризационного тока. Тогда в нулевом приближении можно вообще пренебречь поляризационными токами в микроскопических уравнениях Максвелла, так что поле в этом приближении совпадет с полем равномерно движущегося в вакууме заряда. Поляризационные токи в уравнениях Максвелла первого приближения считаются созданными

полем нулевого приближения, и вместо точного поля (поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ является точным решением уравнений Максвелла в среде), созданного быстрой частицей в среде, в выражение для поляризаационного тока (6.4) можно подставить поле этой частицы в вакууме $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega)$.

Учтем, что если объем однородного вещества ограничен плоскостью $x = 0$, то при равномерном движении заряженной частицы параллельно оси z поле излучения не создается. Если же объем ограничен более общим условием $x < \zeta(y, z)$, то дифракционное излучение возникает. Найдем на поверхности среды $x = \zeta(y, z)$ точку с минимальным значением координаты x и выберем оси координат так, чтобы плоскость $x = 0$ проходила через эту точку. Тогда все неоднородности находятся внутри слоя между поверхностями $x = \zeta(y, z)$ и $x = 0$.

Интенсивность дифракционного излучения сильно зависит от соотношения длины экспоненциального убывания поля быстрой частицы $\lambda(v/c) \left[1 - (v/c)^2 \varepsilon(\omega) \right]^{-1/2}$, длины волны λ и толщины неоднородного слоя $\zeta(y, z)$. В нерелятивистском случае поле частицы быстро убывает с глубиной проникновения в среду. Тогда становится возможной ситуация, когда толщина неоднородного слоя намного больше глубины проникновения поля, $\zeta(y, z) \gg \lambda(v/c)$. В этом случае дифракционное излучение будет зависеть только от наиболее близких к траектории частицы участков поверхности и по дифракционному излучению нельзя получить сведения о свойствах всей поверхности. Получить такую информацию можно лишь при выполнении неравенства

$$\lambda(v/c) > \zeta(y, z). \quad (6.5)$$

Исследование дифракционного излучения началось именно с нерелятивистского случая [53.1]. Результаты исследований в этой области подведены в [76.1].

Для нерелятивистских частиц $\gamma \approx 1$, а параметр (v/c) может быть настолько малым, что для оптических частот глубина проникновения поля будет меньше межмолекулярных расстояний или сравнима с ними. Тогда для описания дифракционного излучения оптических частот нельзя использовать макроскопическую электродинамику. Но при тех же скорости частицы и поверхности среды для дифракционного излучения меньших частот, например в радиодиапазоне, макроскопическая электродинамика может быть применимой.

Исследование дифракционного излучения релятивистских частиц началось немного позже, но в более широком диапазоне, включая оптические частоты [66.1, 62.1, 64.1, 68.1, 68.2, 73.1, 98.2, 98.3, 04.1].

Следует отметить, что во многих работах, из-за сложности решения задач о дифракционном излучении от поверхностей сложной формы, проводились приближенные численные расчеты интенсивности дифракционного излучения от поверхностей конкретного профиля. Так, в [97.2] приводятся результаты вычислений потерь энергии электрона, пролетающего вблизи неоднородного диэлектрика. В [99.2] приведены результаты численного расчета потерь энергии пучка электронов, пролетающего вблизи диэлектрической сферы и возникающего при этом излучения. В [02.1], основываясь на результатах численных расчетов, обсуждена зависимость излучения, возникающего при пролете электрона у поверхности диэлектрика, от формы этой поверхности.

7. Длина формирования дифракционного излучения

Приведенная в параграфе 2 оценка длины формирования излучения быстрой частицы относится к случаю, когда источником излучения является сама заряженная частица. Непосредственным источником дифракционного излучения, строго говоря, являются поляризациянные токи, созданные в среде полем равномерно движущегося в вакууме заряда. Поэтому полезно провести оценку длины формирования с учетом особенностей дифракционного излучения. Обычно дифракционное излучение рассматривается с помощью уравнений макроскопической электродинамики с использованием граничных условий на поверхности раздела сред. Если размеры этих неоднородностей малы, то феноменологическая теория может быть неприменимой для описания такого излучения. Тогда следует использовать микроскопическую теорию. Оценим с помощью такой теории длину формирования дифракционного излучения.

С микроскопической точки зрения дифракционное излучение является результатом рассеяния поля равномерно движущегося заряда на атомах вещества. Такое рассеяние на одном атоме с образованием поля излучения было рассмотрено в параграфе 3.

Рассмотрим рассеяние одной фурье-компоненты собственного поля быстрой частицы на двух одинаковых атомах вещества, лежащих в точках \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 на оси z . Пусть быстрая заряженная частица равномерно движется в вакууме параллельно оси z по закону $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{v}t$ в плоскости $x = b$. Выбрав ось x вдоль \mathbf{b} , можно представить поле, созданное при таком движении частицы, в форме:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) &= \int d^3q \int d\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{q}, \omega) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\mathbf{q}\mathbf{v}t), \\
\mathbf{E}_0(\mathbf{q}, \omega) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{q}) \delta(\omega - q_z v), \\
\mathbf{E}_0(\mathbf{q}) &= -\frac{ie}{2\pi^2} \frac{\mathbf{v}\omega/c^2 - \mathbf{q}}{q^2 - \omega^2/c^2} \exp(-iq_x b).
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Рассмотрим в качестве падающей волны фурье-компоненту поля частицы $\mathbf{E}_0(\mathbf{q}, \omega) \exp\{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\mathbf{q}\mathbf{v}t\}$. Повторяя рассуждения, приведшие к выводу (3.4), можно получить выражение для фурье-образа плотности тока, возбужденного в атомах, расположенных в точках \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 фурье-компонентой поля частицы:

$$\mathbf{j}(k, \omega) = \frac{-i\omega}{(2\pi)^3} \alpha(\omega) \mathbf{E}_0(\mathbf{q}, \omega) \left[\exp\{i(\mathbf{q} - \mathbf{k})\mathbf{R}_1\} + \exp\{i(\mathbf{q} - \mathbf{k})\mathbf{R}_2\} \right]. \tag{7.2}$$

Распределение по углам и частотам излучения, созданного фурье-компонентой поля быстрой частицы, приобретает вид ($\mathbf{k} = \frac{\omega \mathbf{r}}{c r}$):

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{c} |\alpha(\omega)|^2 \left[\mathbf{k} \mathbf{E}_0(\mathbf{q}, \omega) \right]^2 2 \left[1 + \cos\{(\mathbf{q} - \mathbf{k})(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)\} \right]. \tag{7.3}$$

В рассматриваемом случае вектор $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ направлен вдоль оси z , поэтому $(\mathbf{q} - \mathbf{k})(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = (q_z - k_z)(Z_1 - Z_2) = L(\omega/v - k_z)$. В зависимости от величины значения аргумента косинуса $(\mathbf{q} - \mathbf{k})(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = L(\omega/v - k_z)$ множитель $2 \left[1 + \cos\{L(\omega/v - k_z)\} \right]$ принимает значения от нуля до четырех. При $L(\omega/v - k_z) \ll 1$ этот множитель равен четырем. Тогда излученная двумя атомами энергия в четыре раза больше, чем излученная одним атомом. Это значит, что излученные обоими атомами волны когерентны, т. е. приходят к детектору с одинаковыми фазами, их амплитуды складываются. В результате поле у детектора удваивается, а пришедшая к детектору энергия учетверяется.

Если же выполнено неравенство $L(\omega/v - k_z) \gg 1$, то $\cos\{L(\omega/v - k_z)\}$ представляет собой быстро осциллирующую функцию. Детектор регистрирует энергию излучения, пришедшую в конечном интервале частот и углов. Интегрирование по этому интервалу вы-

ражения с быстро осциллирующей функцией дает нуль. Поэтому при выполнении неравенства $L(\omega/v - k_z) \gg 1$ энергия излучения от двух атомов вдвое больше, чем энергия излучения от одного атома. В этом случае пришедшие к детектору волны от разных атомов некогерентны, т. е. имеют существенно различные фазы, поэтому интерференционное слагаемое в энергии пренебрежимо мало и складываются интенсивности, а не амплитуды полей.

Итак, условие когерентности излучения двух атомов можно записать в форме

$$L \ll l_c, \quad (7.4)$$

где длина

$$l_c \sim \frac{2\pi}{\omega/v - k_z} = \frac{\lambda}{\beta^{-1} - n_z} \quad (7.5)$$

называется длиной когерентности или длиной формирования дифракционного излучения. Отметим, что величина l_c изменяется от $\beta\lambda$ в случае нерелятивистских скоростей или излучения в направлении, перпендикулярном скорости частицы, до $\gamma^2\lambda$ в случае излучения вдоль скорости ультрарелятивистской частицы.

Однако, как видно из выражения (7.3), когерентность излучения двух атомов также может быть при выполнении условия

$$L(\omega/v - k_z) = 2\pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.6)$$

С использованием переменных $\beta = v/c$ и $k_z = (\omega/c)n_z$ это условие можно переписать в виде

$$\beta^{-1} - n_z = \frac{\lambda n}{L},$$

или, с учетом (7.5),

$$L = l_c n. \quad (7.7)$$

Таким образом, два атома вещества излучают когерентно, если расстояние L между ними равно целому числу длин когерентности l_c .

Рассмотрим теперь условия когерентности при упорядоченном расположении атомов, например, в монокристалле. Пусть N атомов расположены на прямой линии на одинаковом расстоянии $|\mathbf{d}| = d$ друг от друга, так что $\mathbf{R}_g = g\mathbf{d}$, где $g = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Фурье-образ плотности тока, возбужденного в этих атомах фурье-компонентой поля частицы запишется, аналогично (7.2), как

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{-i\omega}{(2\pi)^3} \alpha(\omega) E_0(\mathbf{q}, \omega) \sum_{g=0}^{N-1} \exp\{i(\mathbf{q} - \mathbf{k})g\mathbf{d}\}. \quad (7.8)$$

Рассматривая случай, когда вектор \mathbf{d} направлен вдоль оси z , можно записать:

$$(\mathbf{q} - \mathbf{k})\mathbf{d} = d \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega}{c} \cos \theta \right) = d \frac{\omega}{c} (\beta^{-1} - \cos \theta),$$

где θ – угол между направлением излучения кванта и осью z . Отношение интенсивности излучения от N атомов к интенсивности излучения от одного атома имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_N(\mathbf{n}, \omega)}{d^2 W_1(\mathbf{n}, \omega)} &= \left| \sum_{g=0}^{N-1} \exp \left\{ i g d \frac{\omega}{c} (\beta^{-1} - \cos \theta) \right\} \right|^2 = \\ &= \frac{\sin^2 \left(\frac{dN}{2} \frac{\omega}{c} (\beta^{-1} - \cos \theta) \right)}{\sin^2 \left(\frac{d}{2} \frac{\omega}{c} (\beta^{-1} - \cos \theta) \right)}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Функция, стоящая в правой части (7.9), имеет ряд резких максимумов, определяемых условием

$$d \frac{\omega}{c} (\beta^{-1} - \cos \theta) = 2\pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.10)$$

Высота каждого пика, отвечающего фиксированному n , пропорциональна N^2 , а ширина пропорциональна N^{-1} . Дисперсионное соотношение (7.10) описывает излучение Смита–Парселла, которое будет рассмотрено детально в главе 6.

Отметим, что, хотя здесь речь идет об излучении отдельных атомов, картина остается справедливой и для излучения отдельных неоднородностей, например стрипов дифракционной решетки или неровностей на поверхности мишени.

Формулу (7.10) можно также записать в виде требования на совпадение периода структуры с целым числом длин когерентности:

$$d = l_c n. \quad (7.11)$$

Условие когерентности излучения (7.11) удобно использовать в случае периодических структур, тогда как условие (7.4) удобнее использовать при качественном анализе явлений, где участвует одна неоднородность либо неоднородности расположены хаотически.

8. Излучение при пролете релятивистской частицы вблизи экрана

Полезно рассмотреть, как проявляются особенности дифракционного излучения ультрарелятивистских частиц на простом примере излучения при пролете частицы вблизи плоского экрана.

Пусть экран из однородного вещества занимает область пространства, определенную неравенствами $-a < z < 0$, $x < 0$, и вблизи экрана, в вакууме, движется частица с зарядом e по закону $z = vt$, $y = 0$, $x = b > 0$.

Рассмотрим дифракционное излучение в области оптических и меньших частот, т. е. когда длина волны намного больше межмолекулярных расстояний и можно считать вещество экрана однородным. В этом случае фурье-образ поляризационного тока (6.4) запишется как

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{i\omega}{4\pi} \{1 - \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\mathbf{r}, \omega) E(\mathbf{r}, \omega), \\ \sigma(\mathbf{r}, \omega) &= \sigma(\omega) \theta(z + a) \theta(-z) \theta(-x); \quad \theta(x) = \frac{x + |x|}{2|x|}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Как отмечено выше, формирование дифракционного излучения происходит не во всем экране, а лишь в малой части экрана – ближайшем к траектории частицы слое экрана толщиной порядка $\lambda(v/c) \left[1 - (v/c)^2 \varepsilon(\omega)\right]^{-1/2}$. Полное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ в (8.1) является суммой

собственного поля быстрой частицы $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega)$ и поля излучения $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega)$. Небольшой объем части экрана, в которой образуется поле излучения, дает возможность считать, что $\mathbf{E}_1 \ll \mathbf{E}_0$, и для решения задачи использовать метод последовательных приближений. В первом приближении можно считать, что поляризационный ток создан только собственным полем быстрой частицы, пренебрегая влиянием поля излучения. Тогда плотность поляризационного тока известна и задача сводится к вычислению излучения заданного тока. Чтобы использовать выражение для распределения излученной энергии по углам и частотам (1.14), нужно найти фурье-образ плотности поляризационного тока (8.1) по координатам и времени. При этом учтем, что поле заряда, движущегося по закону $z = vt$, $y = 0$, $x = b$, имеет вид (7.1). Из (8.1) и (7.1), нетрудно получить фурье-образ поляризационного тока по координатам и времени в виде ($Q \equiv \omega/v - q_z$):

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\sigma(\omega)}{4\pi^2 v} \int_{-a}^0 dz \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^{\infty} ds_x \exp(is_x x + iQz) \mathbf{E}(q_x + s_x, q_y, \omega/v). \quad (8.2)$$

Проинтегрируем сначала по s_x , используя соотношение [62.2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{(1; s)}{s^2 + G^2} \exp(isp) = (1; iG) \frac{\pi}{G} \exp(-pG). \quad (8.3)$$

Вводя обозначение

$$G(q_y) = \left[q_y^2 + \gamma^{-2} (\omega/c)^2 \right]^{1/2}, \quad (8.4)$$

нетрудно преобразовать (8.2) в ультрарелятивистском случае, пренебрегая поправками порядка γ^{-2} , к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{\sigma(\omega)}{4\pi^2 v} \left\{ i\mathbf{e}_x + \frac{q_y \mathbf{e}_y}{G(q_y)} \right\} \times \\ &\times \int_{-a}^0 dz \int_{-\infty}^0 dx \exp\{iQz - (b-x)G(q_y) - iq_x x\}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y – орты осей x и y . Интегрирование по x и z дает

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{e\sigma(\omega)}{8\pi^3 v} \frac{[1 - \exp(iQa)] \exp\{-bG(q_y)\}}{G(q_y) Q \{G(q_y) + iq_x\}} \{\mathbf{e}_x G(q_y) - i\mathbf{e}_y q_y\}. \quad (8.6)$$

Энергия, излученная поляризационным током (8.6) в вакууме, за всё время наблюдения в интервале частот $d\omega$, в элементе телесного угла $d\Omega$ в направлении вектора $\mathbf{k} = \frac{\omega \mathbf{r}}{c r}$, равна:

$$d^2W(\mathbf{n}, \omega) = \frac{1}{c} (2\pi)^6 \left[\mathbf{kj}(\mathbf{k}, \omega) \right]^2 d\omega d\Omega. \quad (8.7)$$

Подстановка (8.6) в (8.7) дает распределение дифракционного излучения ультрарелятивистской частицы по углам и частотам

$$\begin{aligned} \frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2}{v} |\sigma(\omega)|^2 \frac{[\mathbf{k}\mathbf{e}_y]^2 k_y^2 + [\mathbf{k}\mathbf{e}_x]^2 G^2(k_y)}{G^2(k_y) \{G^2(k_y) + k_x^2\}} \times \\ &\times \frac{4 \sin^2\left(\frac{a}{2}(\omega/v - k_z)\right)}{(\omega/v - k_z)^2} \exp\{-2bG(k_y)\}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

В ультрарелятивистском случае излучение сосредоточено в области малых углов θ вблизи скорости частицы, $k_z \approx k(1 - \theta^2/2)$; $k_y \approx k\theta \sin \varphi$; $k_x \approx k\theta \cos \varphi$. Поэтому $(\omega/v) - k_z \approx (\omega/2)(\theta^2 + \gamma^{-2})$. Функция $G(k)$ порядка k при $\theta \sim 1$ и $\sin^2 \varphi \sim 1$, так что $\exp(-2bG) \sim \exp(-2bk)$, а при малых θ и малых $\sin^2 \varphi$ функция $G(k) \sim k/y$, так что $\exp(-2bG) \sim \exp(-2bk/y)$. Таким образом, вклад в излучение от области углов $\theta \sim 1$ и $\sin^2 \varphi \sim 1$ экспоненциально мал и основной вклад в излучение вносит область малых углов $\theta \leq \gamma^{-1}$ и углов φ , близких к нулю или к π . Такая зависимость от φ означает, что направления вылета излучения сосредоточены, в основном, вблизи плоскости xz , т. е. плоскости симметрии задачи.

Интенсивность излучения сильно зависит от отношения толщины экрана a к длине когерентности $\lambda\gamma^2$. Если толщина экрана намного

меньше длины когерентности, т. е. $a[(\omega/v) - k_z]/2 \ll 1$, то распределение интенсивности излучения (8.8) принимает вид

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{v} 4a^2 |\sigma(\omega)|^2 \frac{[\mathbf{ke}_y]^2 k_y^2 + [\mathbf{ke}_x]^2 G^2(k_y)}{G^2(k_y) \{G^2(k_y) + k_x^2\}} \times \quad (8.9)$$

$$\times \exp\{-2bG(k_y)\}.$$

Для оптических частот и $\gamma \sim 10^3$ длина когерентности может составить несколько сантиметров, так что условие $a \ll \lambda\gamma^2$ легко выполнимо. Если же $a[(\omega/v) - k_z]/2 = \pi/2$, то (8.8) преобразуется к виду

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{v} 4 |\sigma(\omega)|^2 \frac{[\mathbf{ke}_y]^2 k_y^2 + [\mathbf{ke}_x]^2 G^2(k_y)}{G^2(k_y) \{G^2(k_y) + k_x^2\} (\omega/v - k_z)^2} \times \quad (8.10)$$

$$\times \exp\{-2bG(k_y)\}.$$

Однако, если частота и направление излучения удовлетворяют условию $a(\omega/v - k_z) = 2K\pi$, где K – целое число, то интенсивность излучения равна нулю. Это значит, что при фиксированной частоте излучения имеются углы, соответствующие максимумам и минимумам интенсивности. Происхождение этих максимумов и минимумов связано с когерентностью излучения, образованного в разных участках экрана. Подчеркнем, что при дифракционном излучении нерелятивистской частицы длина когерентности порядка $\lambda(v/c)$ и задача создания экрана с толщиной, сравнимой с длиной когерентности для оптических и более высоких частот, практически не выполнима.

В области углов $\theta \leq \gamma^{-1}$, пренебрегая поправками порядка γ^{-2} , можно представить (8.9) в виде

$$\frac{d^2W(\omega, \theta, \varphi)}{\theta d\theta d\varphi d\omega} = \frac{e^2}{v} |\sigma(\omega)|^2 \frac{4a^2}{k^2} \frac{2\theta^2 \sin^2 \varphi + \gamma^{-2}}{(\theta^2 \sin^2 \varphi + \gamma^{-2})(\theta^2 + \gamma^{-2})} \times \quad (8.11)$$

$$\times \exp\{-2bk\sqrt{\theta^2 \sin^2 \varphi + \gamma^{-2}}\}.$$

Отсюда видно, что если расстояние между траекторией ультрарелятивистской частицы и диэлектрическим экраном b (импакт-параметр) велико, по сравнению с $\gamma\lambda$, то интенсивность излучения незначительна.

Этот результат получен в предположении, что поле излучения мало по сравнению с собственным полем частицы. Хотя это допущение всегда справедливо для частот, превышающих оптические частоты, в главе 4 будет показано, что в ультрафиолетовом и мягком рентгеновском диапазоне частот требуется более аккуратный подход, подобный развитому в параграфе 4 для расчета характеристик переходного излучения на частотах, превышающих оптические.

В области оптических и меньших частот нужно учитывать мнимую часть диэлектрической проницаемости. Это наиболее существенно для проводящих сред, когда $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$ и $\varepsilon'(\omega) \ll \varepsilon''(\omega)$. В этом случае поле частицы сильно меняется в веществе на толщине скин-слоя $\delta \sim \frac{c}{\omega} \sqrt{\varepsilon''(\omega)}$, так что метод последовательных приближений не применим. Следовательно, выражения (8.8) – применимы в области частот, где $\varepsilon''(\omega) \ll \varepsilon'(\omega) < 1$.

9. Дифракционное излучение ультрарелятивистских частиц

Как известно, в ультрарелятивистском случае излучение сосредоточено вблизи направления скорости частицы в области малых углов θ . В этом случае толщина приповерхностного слоя с поляризационными токами для ультрарелятивистской частицы может быть порядка или много меньше длины волны, в то время как длина формирования дифракционного излучения $l_c \sim \lambda(\beta^{-1} - \cos\theta)^{-1}$ для характерного угла вылета излучения $\theta \ll 1$ намного больше длины волны поля λ . Интенсивность дифракционного излучения мала, когда линейные размеры неоднородностей либо намного меньше, либо намного больше длины формирования излучения. Это значит, что дифракционное излучение наиболее интенсивно, когда размеры поверхностных неоднородностей порядка длины формирования излучения. Отсюда следует, что дифракционное излучение ультрарелятивистской частицы от среды, у которой неоднородности поверхности имеют линейный размер b , наиболее интенсивно для частот порядка $4\pi(c/b)(\gamma^{-2} + \theta^2)^{-1}$. Это намного отличает-

ся от дифракционного излучения нерелятивистской частицы, где максимум интенсивности лежит в области частот порядка $4\pi(v/b)$.

Рассмотрим теперь дифракционное излучение в рентгеновской области частот, когда частота излучения намного больше атомных частот, а длина волны меньше или порядка размера атома. Следует заметить, что дифракционное излучение рентгеновских частот имеет смысл рассматривать только для ультрарелятивистских частиц, так как такое излучение для нерелятивистских частиц ничтожно мало из-за быстрого убывания поля частицы в перпендикулярном скорости направлении.

В рентгеновской области частот макроскопическая электродинамика становится неприменимой, усреднение по объему не проводится, но проводится усреднение плотности числа электронов по квантовомеханическому состоянию и по тепловому движению атомов. Полученная при этом плотность поляризованного тока, зависящая от координат атомов, вводится в микроскопические уравнения Максвелла для учета обратного влияния поляризованного тока на поле. В рентгеновской области частот это влияние мало и может рассматриваться как малое возмущение. Так как атомные частоты малы по сравнению с частотой поля, то силами связи электронов в атоме при взаимодействии с полем можно пренебречь, рассматривая электроны как свободные при вычислении поляризованного тока. В этом приближении микроскопические уравнения Максвелла можно записать в форме, аналогичной уравнениям макроскопической электродинамики неоднородной среды, вводя аналог диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = 1 - \chi(\mathbf{r}, \omega) \equiv 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \sum_a f(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a), \quad (9.1)$$

где суммирование проводится по всем молекулам вещества, \mathbf{R}_a – радиус-вектор центра инерции молекулы, $f(\mathbf{r})$ – усредненная по квантовомеханическому электронному состоянию и по тепловому движению молекул плотность числа электронов в молекуле. Микроскопическую плотность числа электронов в среде можно представить как

$$n_e = \sum_a f(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a). \quad (9.2)$$

Формально можно ввести и электрическую индукцию с помощью соотношения

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (9.3)$$

однако эта величина также является микроскопической величиной и зависит от координат атомов среды. Формальное совпадение (9.3) с соотношением для индукции и поля неоднородной среды в макроскопической электродинамике естественно, так как для поля с длиной волны порядка размеров атома среду нельзя считать однородной. При пролете заряда параллельно плоской поверхности неоднородной среды поле может передать импульс неоднородностям среды, что и является причиной возникновения дифракционного излучения. Такая задача является наиболее простым примером дифракционного излучения в области рентгеновских частот.

В этой области диэлектрическая проницаемость близка к единице, что дает возможность использовать теорию возмущений по степеням малой величины $\chi(\mathbf{r}, \omega) = 1 - \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$. В первом приближении можно ограничиться только линейными по $\chi(\mathbf{r}, \omega)$ членами разложения. В нулевом приближении можно пренебречь величиной $\chi(\mathbf{r}, \omega)$, т. е. пренебречь поляризационными токами в среде.

Для задачи о дифракционном излучении это означает, что полем нулевого приближения является поле равномерно движущегося в бесконечном вакууме заряда. Если заряд движется по закону $x = b, y = 0, z = vt$, то поле заряда имеет вид (7.1).

Источником дифракционного излучения является индуцированный полем частицы \mathbf{E} в веществе поляризационный ток, фурье-образ которого по времени можно представить в форме

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{i\omega}{4\pi} \chi(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ie^2}{m\omega} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega) \sum_a f(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a). \quad (9.4)$$

Переходя в (9.4) к фурье-образам по координатам с использованием (7.1) и соотношения

$$f(\mathbf{r}) = \int d^3q f(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}), \quad (9.5)$$

нетрудно получить

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{ie^2}{m\omega} \int d^3p \mathbf{E}_0(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta(\omega - k_z v + p_z v) f(\mathbf{p}) \sum_a \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{R}_a). \quad (9.6)$$

В кристалле $\mathbf{R}_a = \mathbf{e}_x a_x l + \mathbf{e}_y a_y m + \mathbf{e}_z a_z s$, где $l = 1, 2, \dots, L$, $m = 1, 2, \dots, M$, $s = 1, 2, \dots, S$, так что

$$\sum_a \exp(-i \mathbf{p} \mathbf{R}_a) = \frac{\exp(-i p_x a_x L) - 1}{\exp(-i p_x a_x) - 1} \times \frac{\exp(-i p_y a_y M) - 1}{\exp(-i p_y a_y) - 1} \times \frac{\exp(-i p_z a_z S) - 1}{\exp(-i p_z a_z) - 1}. \quad (9.7)$$

Каждый множитель в (9.7) быстро осциллирует при изменении вектора \mathbf{p} и практически не дает вклада в интеграл, кроме областей значений \mathbf{p} , где аргументы экспонент малы, $p_x a_x L \ll 1$, $p_y a_y M \ll 1$, $p_z a_z S \ll 1$. Тогда правая часть (9.7) равна произведению LMS , т. е. числу молекул N во всем объеме кристалла. Если выполняются неравенства $L \gg 1$, $M \gg 1$, $S \gg 1$, то значения вектора \mathbf{p} , при которых сумма (9.7) не мала, совпадают со значениями векторов обратной решетки

$$\mathbf{g} \left(\frac{2\pi}{a_x} n_1, \frac{2\pi}{a_y} n_2, \frac{2\pi}{a_z} n_3 \right),$$

где n_1, n_2, n_3 – произвольные целые числа. Тогда можно записать:

$$\sum_a \exp(-i \mathbf{p} \mathbf{R}_a) = N \delta(\mathbf{p} - \mathbf{g}). \quad (9.8)$$

Подстановка (9.8) в (9.6) дает

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i e^2}{m \omega} N \sum_{\mathbf{g}} \mathbf{E}_0(\mathbf{k} - \mathbf{g}) \delta(\omega - k_z v + g_z v) f(\mathbf{g}). \quad (9.9)$$

Входящая сюда дельта-функция означает, что фурье-образ поляризационного тока отличается от нуля только для фиксированных значений угла θ между вектором \mathbf{k} и скоростью частицы \mathbf{v} :

$$\cos \theta = \frac{c}{v} \left(1 + \frac{v g_z}{\omega} \right). \quad (9.10)$$

Энергия, излученная заданным током в вакууме за полное время наблюдения в интервале частот $d\omega$ в элемент телесного угла $d\Omega$ в направлении вектора \mathbf{k} , равна:

$$d^2W(\mathbf{n}, \omega) = \frac{(2\pi)^6}{c} \left[\mathbf{k} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) \right]^2 d\omega d\Omega. \quad (9.11)$$

Подстановка (9.9) в (9.11) приводит к появлению квадрата дельта-функции:

$$\delta^2(\omega - k_z v + g_z v) = \frac{T}{2\pi} \delta(\omega - k_z v + g_z v),$$

где T – полное время наблюдения. Это означает, что угловое распределение дифракционного излучения от кристалла представляет собой набор узких пиков вблизи углов, удовлетворяющих неравенству (9.10) для различных значений g_z . Поэтому каждый пик можно анализировать независимо. Детальное рассмотрение дифракционного излучения ультрарелятивистской частицы в рентгеновской области частот при пролете вблизи монокристалла проведено в параграфе 20.

В промежутке между областью оптических частот и рентгеновскими частотами находится область частот, в которой свойства электромагнитных волн отличаются и от оптических, и от рентгеновских волн. Это область ультрафиолетового и мягкого рентгеновского излучения. В этой области длина волны поля больше размеров атома,

$$\lambda \gg \frac{\hbar^2}{m e^2}, \text{ т.е. } \hbar\omega \ll \alpha m c^2 \quad (9.12)$$

($\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$ – постоянная тонкой структуры), а частота больше атомных частот:

$$\hbar\omega \gg \alpha^2 m c^2. \quad (9.13)$$

В области частот, где одновременно выполняются оба условия (9.12) и (9.13),

$$\alpha m c^2 \gg \hbar\omega \gg \alpha^2 m c^2, \quad (9.14)$$

применима макроскопическая электродинамика, в которой свойства среды описываются обычной диэлектрической проницаемостью. Так как длина волны намного больше размеров атома, то применимо приближение однородной среды. Неравенство (9.13) позволяет пренебречь силами связи электронов в атоме, тогда диэлектрическая проницаемость среды в области частот (9.14) может быть представлена как

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2, \quad \omega_p = \sqrt{4\pi N Z e^2 / m}, \quad (9.15)$$

где N – число атомов на единицу объема среды, Z – заряд ядра атома. Толщина слоя вещества, в котором сосредоточены созданные ультрарелятивистской частицей с энергией $E = \gamma mc^2$ поляризационные токи, в области частот (9.14) принимает вид ($\beta = v/c$)

$$a \sim \frac{\lambda \beta}{\sqrt{(\omega_p / \omega)^2 + \gamma^{-2}}}. \quad (9.16)$$

Толщина этого слоя велика по сравнению с длиной волны излучения.

Пусть ультрарелятивистская заряженная частица пролетает вблизи неплоской поверхности однородной среды, занимающей область пространства $\zeta(y, z) > x$, а изменения профиля поверхности ограничены областью $x > 0$. Тогда зависимость диэлектрической проницаемости от координат связана только с профилем поверхности среды и можно записать

$$1 - \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = (\omega_p / \omega)^2 \theta[\zeta(y, z) - x], \quad \theta(u) = \frac{u + |u|}{2|u|}. \quad (9.17)$$

Как показано в параграфе 6, в этом случае источником дифракционного излучения являются поляризационные токи в слое между плоскостью $x = 0$ и поверхностью $x = \zeta(y, z)$. Фурье-образ плотности поляризационного тока тогда можно представить как

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{i\omega_p^2}{4\pi\omega} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \theta(x) \theta[\zeta(y, z) - x], \quad (9.18)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ – фурье-образ поля, созданного пролетающей частицей внутри среды. Для того, чтобы найти это поле обычными методами макроскопической электродинамики, нужно найти общие решения уравнений Максвелла внутри среды и в вакууме и сшить эти решения на поверхности однородной среды $x = \zeta(y, z)$. Точное решение можно получить для поверхностей простейшего профиля, а в остальных случаях приходится использовать приближенные методы. В случае, когда $\omega_p^2 / \omega^2 \ll 1$, можно использовать малость этой величины для решения методом последовательных приближений по ω_p^2 / ω^2 . Детальное исследование этой задачи проведено в главе 4.

10. Влияние возбуждения среды на дифракционное излучение

Выше рассматривалось дифракционное излучение при пролете заряда вблизи поверхности стационарной среды. Свойства такой среды не зависят от времени и её энергия сохраняется. Если диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon(\omega) < (c/v)^2$, то черенковское излучение невозможно, законы сохранения энергии и импульса в процессе излучения выполняются за счет передачи импульса среде, а передача импульса возможна лишь в неоднородной среде. Если же свойства среды меняются во времени, то энергия среды не сохраняется. Свойства нестационарной среды в макроскопической электродинамике рассматривались в [60.1, 79.1, 87.4]. В такой среде возможен обмен энергией между средой и полем. В частности, законы сохранения энергии и импульса при излучении могут быть выполнены без передачи импульса среде, только за счет передачи энергии от среды полю. Это значит, что при равномерном движении заряда параллельно плоской поверхности однородной нестационарной среды возникает дифракционное излучение [98.5]. Если среда нестационарна и неоднородна, то в процессе излучения возможна и передача импульса $\Delta \mathbf{p}$ среде и передача энергии ΔE от среды. Тогда закон сохранения энергии при излучении поперечной волны с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} имеет вид (4.1).

$$h(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}) = \mathbf{v} \Delta \mathbf{p} + \Delta E. \quad (10.1)$$

Очевидно, что если $\mathbf{v} \Delta \mathbf{p} \ll \Delta E$, то основную роль в процессе излучения играет передача энергии от среды полю и в первом приближении можно не учитывать передачу импульса среде. В этом приближении задача

сводится к вычислению дифракционного излучения от однородной нестационарной среды.

Рассмотрим в качестве примера среду, возбужденную в результате какого-то взаимодействия. Ограничимся случаем, когда ионизацией среды при возбуждении можно пренебречь, т. е. приходящаяся на один атом энергия возбуждения мала по сравнению с потенциалом ионизации. Это означает, что возбуждение слабое. После прекращения такого взаимодействия энергия электронного возбуждения мигрирует по веществу в виде долгоживущих элементарных возбуждений вещества – электромагнитных продольных плоских волн.

Как известно, связь частоты ω и волнового вектора \mathbf{q} продольной плоской электромагнитной волны определяется условием обращения в нуль диэлектрической проницаемости как функции частоты и волнового вектора $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 0$. При малых \mathbf{q} решение этого уравнения имеет вид

$$\omega(\mathbf{q}) = \omega_p + (\delta/2)q^2,$$

где δ – постоянная, а ω_p – значение частоты, обращающее диэлектрическую проницаемость в нуль при $q = 0$ [92.1]: $\varepsilon(\omega_p, q = 0) = 0$. Поэтому электрическое поле продольной плоской волны при малых q имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp\{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega_p t - i(\alpha/2)q^2 t\}. \quad (10.2)$$

Скорость распространения такой волны $\mathbf{u} = \delta\mathbf{q}$.

Рассмотрим дифракционное излучение, возникающее при пролете ультрарелятивистской заряженной частицы параллельно плоской поверхности однородной среды, возбуждение которой описывается продольной волной (10.2). При такой геометрии задачи в отсутствие продольной волны дифракционное излучение невозможно. В присутствии продольной волны среда становится нестационарной и неоднородной. В такой среде закон сохранения энергии при излучении имеет вид (10.1). Характерная величина передаваемого среде импульса порядка $\hbar\mathbf{q}$, а характерная величина полученной от среды энергии порядка $\hbar\omega(q)$. Неравенство $v\Delta p \ll \Delta E$ принимает вид $qv \ll \omega_p + (\delta/2)q^2$ и при выполнении этого неравенства излучение в первом приближении можно рассматривать как дифракционное излучение от однородной нестационарной среды, заменив поле продольных волн на $\mathbf{E}_p \exp(-i\omega_p t)$. Но так

как пренебрегается передачей импульса от поля среде, то $\mathbf{q} = \mathbf{k}$ и должно выполняться неравенство $\mathbf{k}\mathbf{v} \ll \omega_p + \delta k^2/2$, которое всегда выполняется для нерелятивистских частиц, а для ультрарелятивистских частиц выполняется только в области частот $\omega \ll \omega_p$. Этим определяется область применимости приближенного метода решения.

Во избежание несущественных усложнений будем считать, что расстояние от траектории частицы до поверхности среды не мало, поле частицы в среде слабое, так что слой, в котором существует поляризационный ток, достаточно тонок. В этом случае влияние поляризационного тока можно рассматривать методом последовательных приближений по степеням поляризационного тока. В нулевом приближении можно пренебречь поляризационными токами в микроскопических уравнениях Максвелла, так что поле в этом приближении совпадет с полем равномерно движущегося в вакууме заряда. В первом приближении учитываются слагаемые, линейные по поляризационному току. При этом в уравнениях для поля первого приближения можно считать, что поляризационный ток создан полем нулевого приближения, т. е. полем равномерно движущегося заряда в вакууме $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$. Таким образом, вычисление поля первого приближения сводится к задаче о поле, созданном заданным током в вакууме.

Найдем теперь плотность поляризационного тока в среде в случае достаточно тонкого слоя с поляризационным током. Считая, что действующие на связанный в атоме электрон поля намного меньше внутриатомных полей, можно рассматривать электрон как квазиупруго связанный. Уравнения движения квазиупруго связанного в атоме электрона под действием поля быстрой частицы

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \int d^3q \int d\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{q}, \omega) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t)$$

и поля $\mathbf{E}_p \exp(-i\omega_p t)$ запишутся как

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} + \omega_\mu^2 \mathbf{r}(t) = \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E}_p \exp(-i\omega_p t) + \right. \\ \left. + \int d^3q \int d\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{q}, \omega) \exp\{i\mathbf{q}\mathbf{r}(t)\} \right\}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

где e – элементарный заряд, а m и ω_μ – соответственно, масса и частота колебаний связанного в атоме электрона. Учитывая, что длина волны

поля намного больше амплитуды колебаний, можно решать это уравнение методом последовательных приближений по степеням поля:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) + \dots,$$

где $\mathbf{r}_0(t)$ не зависит от поля, $\mathbf{r}_1(t)$ – линейно по полю, $\mathbf{r}_2(t)$ – квадратично по полю и т. д. В нулевом приближении по полю это уравнение превращается в уравнение свободных колебаний электрона. В первом приближении в (10.3) остаются только линейные по полю слагаемые. При этом, так как длина волны поля намного больше размеров атома, величину $\mathbf{r}_0(t)$ можно заменить радиус-вектором ядра атома \mathbf{R}_a :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_1(t)}{dt^2} + \omega_\mu^2 \mathbf{r}_1(t) = \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E}_p \exp(-i\omega_p t) + \right. \\ \left. + \int d^3 q \int d\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{q}, \omega) \exp\{i\mathbf{q}\mathbf{R}_a - i\omega t\} \right\}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Решение этого уравнения позволяет найти плотность поляризационного тока $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, возникающего в случае однородной стационарной среды. Но, как показано выше, при рассматриваемой геометрии задачи в случае однородной стационарной среды не возникает дифракционного излучения. В рассматриваемом приближении, когда ищется линейное по поляризационному току решение, ток $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ можно не рассматривать, а перейти к вычислению дополнительного поляризационного тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, возникающего из-за возбуждения среды. Для этого нужно решить уравнение второго приближения для движения квазиупруго связанного в атоме электрона под действием поля быстрой частицы $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ в возбужденной среде. Это уравнение содержит квадратичные по полю слагаемые:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2(t)}{dt^2} + \omega_\mu^2 \mathbf{r}_2(t) = \frac{ie}{m} \int d^3 p (\mathbf{p} \mathbf{r}_1(t)) \int d\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{p}, \omega) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}_a - i\omega t). \quad (10.5)$$

Переход к фурье-образам координат по времени в (10.4) дает

$$(\omega_\mu^2 - \omega) \mathbf{r}_1(\omega) = \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E}_p \delta(\omega - \omega_p) + \int d^3 p \mathbf{E}_0(\mathbf{p}, \omega) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}_a) \right\}, \quad (10.6)$$

так что

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_{1p}(t) + \mathbf{r}_{10}(t); \quad \mathbf{r}_{1p}(t) = \frac{e}{m} \mathbf{E}_p \frac{\exp(-i\omega_p t)}{\omega_\mu^2 - \omega_p^2}, \quad (10.7)$$

$$\mathbf{r}_{10}(t) = \frac{e}{m} \int d^3 p \int d\omega \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{p}, \omega)}{\omega_\mu^2 - \omega^2} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}_a - i\omega t). \quad (10.8)$$

Подстановка $\mathbf{r}_1(t)$ в (10.5) приводит к появлению в правой части (10.5) двух слагаемых, одно из которых квадратично по \mathbf{E}_0 , а второе пропорционально и полю частицы \mathbf{E}_0 , и полю продольной волны \mathbf{E}_p . Соответственно, решение уравнения (10.5) состоит из двух частей, $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_{2p}(t) + \mathbf{r}_{20}(t)$. Интересующее нас излучение связано с решением $\mathbf{r}_{2p}(t)$, уравнение для которого следует из (10.5):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_{2p}(t)}{dt^2} + \omega_\mu^2 \mathbf{r}_{2p}(t) &= \frac{ie}{m} \int d^3 p (\mathbf{p} \mathbf{r}_{1p}(t)) \times \\ &\times \int d\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{p}, \omega) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}_a - i\omega t). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Подстановка (10.7) в (10.9) позволяет получить $\mathbf{r}_{2p}(t)$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{2p}(t) &= i \left(\frac{e}{m} \right)^2 (\omega_\mu^2 - \omega_p^2) \int d^3 q (\mathbf{p} \mathbf{E}_p) \times \\ &\times \int d\omega \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{p}, \omega - \omega_p)}{\omega_\mu^2 - \omega^2} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}_a - i\omega t). \end{aligned} \quad (10.10)$$

Отсюда нетрудно получить в дипольном приближении плотность тока в атоме при таком движении электронов (суммирование по всем электронам атома):

$$\mathbf{j}_a(\mathbf{r}, t) = e \sum_\mu \frac{d\mathbf{r}_{2p}(t)}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a). \quad (10.11)$$

Просуммировав это выражение по всем атомам среды, можно получить плотность поляризационного тока, являющуюся источником дифракционного излучения:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a) \int d^3 p \mathbf{E}_0(\mathbf{p}) (\mathbf{p} \mathbf{E}_p) \int d\omega U(\omega) \times \\ \times \delta(\omega - \omega_p - p_z v) \exp(i \mathbf{p} \mathbf{R}_a - i \omega t), \quad (10.12)$$

где введено обозначение

$$U(\omega) = \sum_{\mu} \frac{e^3 \omega}{m^2 (\omega_{\mu}^2 - \omega_p^2) (\omega_{\mu}^2 - \omega^2)} \quad (10.13)$$

и учтено, что поле движущегося по закону $y=0$, $x=b$, $z=vt$ заряда имеет вид (7.1). Считая, что длина волны поля намного больше межатомных расстояний, можно усреднить плотность тока по координатам атомов среды, получив

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = n_0 \int d^3 R \eta(-X) \int d^3 p (\mathbf{p} \mathbf{E}_p) \int d\omega U(\omega) \times \\ \times \delta(\omega - \omega_p - p_z v) \mathbf{E}_0(\mathbf{p}) \exp(i \mathbf{p} \mathbf{R} - i \omega t), \quad (10.14)$$

где n_0 – среднее число атомов на единицу объема, $\eta(x) = (x + |x|)/2|x|$ – единичная ступенчатая функция.

Фурье-образ поляризационного тока (10.14) по координатам и времени нетрудно получить:

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = U(\omega) \delta(\omega - \omega_p - k_z v) \int_0^{\infty} dX \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \{ \mathbf{k} \mathbf{E}_p + (p_x - k_x) \mathbf{e}_x \mathbf{E}_p \} \mathbf{E}_0(p_x, k_y, k_z) \exp\{i(k_x - p_x) X\}, \quad (10.15)$$

где \mathbf{e}_x – орт оси x . Подстановка (7.1) в (10.15) дает ($\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) &= \beta(\omega) \delta(\omega - \omega_p - k_z v) \int_0^\infty dX \exp(ik_x X) \times \\
&\times \int_{-\infty}^\infty dp_x \exp\{-ip_x(X+b)\} \{ \mathbf{kE}_p + (p_x - k_x) \mathbf{e}_x \mathbf{E}_p \} \frac{ie}{2\pi^2 c^2} \times \\
&\times \frac{\mathbf{e}_x(p_x - k_x) + \mathbf{e}_y k_y + \mathbf{e}_z(\omega - \omega_p)/v\gamma^2}{p_x^2 + k_y^2 + [(\omega - \omega_p)/v\gamma]^2}.
\end{aligned} \tag{10.16}$$

Вводя обозначение

$$G(k_y) = \sqrt{k_y^2 + \left(\frac{\omega - \omega_p}{v\gamma}\right)^2}$$

и интегрируя по p_x с помощью известного соотношения [62.2]

$$\int_{-\infty}^\infty du (1; u; u^2) \frac{\exp(iua)}{u^2 + G^2} = (1; iG \operatorname{sgn} a; -G^2) \frac{\pi}{G} \exp(-|a|G), \tag{10.17}$$

можно получить вместо (10.16)

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) &= U(\omega) \delta(\omega - \omega_p - k_z v) \int_0^\infty dX \exp\{ik_x X - (X+b)G\} \times \\
&\times \{ \mathbf{kE}_p + (iG - k_x) \mathbf{e}_x \mathbf{E}_p \} \frac{ie}{2\pi G} \left\{ \mathbf{e}_x(iG - k_x) + \mathbf{e}_y k_y + \mathbf{e}_z \frac{\omega - \omega_p}{v\gamma^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Интегрирование по X дает

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) &= U(\omega) \delta(\omega - \omega_p - k_z v) \frac{\exp(-bG)}{ik_x - G} \times \\
&\times \{ \mathbf{kE}_p + (iG - k_x) \mathbf{e}_x \mathbf{E}_p \} \frac{ie}{2\pi G} \left\{ \mathbf{e}_x(iG - k_x) + \mathbf{e}_y k_y + \mathbf{e}_z \frac{\omega - \omega_p}{v\gamma^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{10.18}$$

Распределение по углам и частотам энергии, излученной заданным током, на далеких расстояниях имеет вид

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = (2\pi)^6 \frac{1}{c} \left[\mathbf{kj}(\mathbf{k}, \omega) \right]^2. \quad (10.19)$$

Подстановка (10.18) в (10.19) позволяет получить распределение энергии дифракционного излучения от однородной среды, возбужденной одной продольной волной (T – полное время наблюдения):

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} &= (2\pi)^3 T e^2 |U(\omega)|^2 \exp(-2bG) \times \\ &\times \delta(\omega - \omega_p - k_z v) \left\{ \left((\mathbf{k} - k_x \mathbf{e}_x) \mathbf{E}_p \right)^2 + (G \mathbf{e} \mathbf{E}_p)^2 \right\} \times \\ &\times \left\{ [\mathbf{k} \mathbf{e}_x]^2 G^2 + \left[\mathbf{k} (\mathbf{e}_y k_y - \mathbf{e}_x k_x + \mathbf{e}_z (\omega - \omega_p) / v \gamma^2) \right]^2 \right\} \times \\ &\times G^{-2} (k_y^2 + G^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Во многих случаях возбуждение среды распределяется однородно и изотропно. Это соответствует изотропному распределению продольных волн в среде, тогда распределение энергии дифракционного излучения можно получить из (10.20) интегрированием по направлениям поля продольной волны \mathbf{E}_p . В этом случае распределение энергии дифракционного излучения приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} &= (2\pi)^3 T e^2 |U(\omega)|^2 \exp(-2bG) \times \\ &\times \delta(\omega - \omega_p - k_z v) \times \frac{1}{2} \mathbf{E}_p^2 \{ G^2 + k_y^2 + k_z^2 \} \times \\ &\times \frac{\left\{ [\mathbf{k} \mathbf{e}]^2 G^2 + \left[\mathbf{k} (\mathbf{e}_y k_y - \mathbf{e}_x k_x + \mathbf{e}_z (\omega - \omega_p) / v \gamma^2) \right]^2 \right\}}{G^2 (k_x^2 + G^2)}. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Возбуждение среды может быть создано акустической волной. В этом случае первоначально однородная и стационарная среда становится неоднородной и нестационарной. Если же в среде возбуждается поверхностная акустическая волна, то изменяется и профиль поверхности среды. Излучение при движении заряда вблизи поверхности среды, вдоль которой распространяется поверхностная акустическая волна,

было исследовано в [91.2, 91.3]. Рассматривая влияние акустической волны как малое возмущение, авторы получили распределение энергии дифракционного излучения по углам и частотам и показали, что такое излучение можно наблюдать в диапазоне миллиметровых и субмиллиметровых волн.

11. Дифракционное излучение при отражении быстрой заряженной частицы от поверхности монокристалла

Падающая на поверхность монокристалла под малым углом скольжения ζ (углом между скоростью частицы и поверхностью) быстрая заряженная частица зеркально отражается от поверхности, если $\zeta < \theta_L = (U/E)^{1/2}$ [69.2] (здесь θ_L – угол Линдхарда, U – потенциальный барьер поверхности, E – энергия частицы).

Изменение скорости при отражении приводит к тормозному излучению. С другой стороны, поляризация поверхности заряженной частицей приводит к появлению поляризационных токов, также приводящих к излучению. Поэтому такое излучение возникает как результат совместного действия механизмов и тормозного и дифракционного излучений [93.3].

Оценка интенсивности такого излучения представляет интерес потому, что эффективная поверхность монокристалла, от которой происходит отражение электронов, может, вообще говоря, не совпадать с эффективной поверхностью, от которой отражается электромагнитное поле. Действительно, электроны отражаются от поверхностного слоя атомов, а электромагнитное поле отражается электронами вещества. Между тем в металлах плотность электронов проводимости вблизи поверхности испытывает небольшие фриделевские осцилляции и обращается в нуль снаружи от поверхностного слоя ионов на расстоянии $z \sim \hbar/p_F$, где \hbar – постоянная Планка, p_F – граничный импульс Ферми, плоскость $z = 0$ совпадает с поверхностным слоем ионов. Эффективные поверхности кристалла, определяемые по отражению частиц и света, вообще говоря, находятся на некотором расстоянии b друг от друга. Интенсивность рассматриваемого излучения зависит от этого расстояния и позволяет получить информацию о нем.

При этом следует учесть, что процесс формирования излучения протекает за конечное время порядка $\tau = 1/(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$ (ω и \mathbf{k} – частота и волновой вектор излучения, \mathbf{v} – скорость частицы). Расстояние от частицы до поверхности за время τ меняется на $\tau \zeta v$.

В случае, когда $b \ll \tau \zeta v$, расстояние между эффективными отражающими поверхностями для частиц и для света не скажется на интенсивности излучения. Подчеркнем, что случай, когда $\zeta > \theta_L$ и заряженная частица влетает в кристалл, а не отражается от него, ниже не рассматривается.

Рассмотрим теперь излучение, возникающее при отражении частицы с зарядом e от плоской поверхности полубесконечного ($z < 0$) кубического кристалла с диэлектрической проницаемостью ε_1 . Частица движется в однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ε_2 . Обозначив через \mathbf{v} тангенциальную к поверхности, а через \mathbf{u} нормальную к поверхности компоненту скорости, можно представить фурье-образ плотности тока заряда, зеркально отражающегося от поверхности $z = 0$, в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(q_x, q_y, z, \omega) &= (2\pi)^{-3} \iiint dx dy dt \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \exp(-iq_y y + i\omega t) = \\ &= \frac{e}{4\pi^3 u} \left\{ \mathbf{v} \cos[(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})z/u] + i\mathbf{u} \sin[(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})z/u] \right\}. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Частное решение уравнений Максвелла для собственного поля частицы имеет вид

$$E_{0z}(\mathbf{q}, z, \omega) = \frac{e}{\pi^2 \varepsilon_2 c^2} \frac{\omega \varepsilon_2 u^2 - c^2 (\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})}{u^2 k_2^2 - (\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})^2} \sin[(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})z/u], \quad (11.2)$$

$$H_{0z}(\mathbf{q}, z, \omega) = \frac{ie u}{\pi^2 c} \times \frac{[\mathbf{q}\mathbf{v}]}{u^2 k_2^2 - (\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})^2} \cos[(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})z/u], \quad (11.3)$$

$$k_{1(2)} = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon_{1(2)} - q^2}. \quad (11.4)$$

Полное поле вне кристалла состоит из собственного поля частицы и поля \mathbf{E}_2 поперечных волн, уходящих от поверхности. Поле внутри кристалла состоит только из поля \mathbf{E}_1 поперечных волн, уходящих от поверхности:

$$\mathbf{E}_{1(2)}(\mathbf{q}, z, \omega) = \mathbf{E}_{1(2)}(\mathbf{q}, \omega) \exp\left\{- (+) i k_{1(2)} z\right\}. \quad (11.5)$$

Из условий поперечности полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 и граничных условий на поверхности кристалла $z=0$ нетрудно получить соотношения, определяющие нормальные компоненты полей излучения:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1 k_2 + \varepsilon_2 k_1) E_{1(2)z}(\mathbf{q}, \omega) = \\ & = +(-)\varepsilon_{2(1)} k_{2(1)} E_{0z}(\mathbf{q}, 0, \omega) + \varepsilon_{2(1)} (\mathbf{q} \mathbf{E}_0(\mathbf{q}, 0, \omega)), \end{aligned} \quad (11.6)$$

$$(k_2 + k_1) H_{1(2)z}(\mathbf{q}, \omega) = +(-)k_{2(1)} H_{0z}(\mathbf{q}, 0, \omega) + (\mathbf{q} \mathbf{H}_0(\mathbf{q}, 0, \omega)). \quad (11.7)$$

Остальные компоненты выражаются через нормальные компоненты с помощью уравнений Максвелла. Распределение излученной энергии по углам и частотам в той среде, где движется частица, можно получить в виде

$$\frac{d^2 W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{4\pi^2 \omega^4 \varepsilon_2^{3/2}}{q^2 c^3} \left(\varepsilon_2 |E_{2z}|^2 + |H_{2z}|^2 \right) \cos^2 \theta. \quad (11.8)$$

Подстановка явных выражений для фурье-образов полей дает распределение излученной энергии в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} &= \frac{4e^2 \varepsilon_2^{3/2} u^2 \cos^2 \vartheta}{\pi^2 c^3 \left| \left(1 - (v/c) \varepsilon_2^{1/2} \sin \vartheta \cos \varphi \right)^2 - (u/c)^2 \varepsilon_2 \cos^2 \vartheta \right|^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \vartheta| (v/c)^2 \sin^2 \varphi}{\left| \varepsilon_2^{1/2} \cos \vartheta + [\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \vartheta]^{1/2} \right|^2} + \right. \\ & \left. + \frac{|\varepsilon_1|^2 |\sin \vartheta - (v/c) \varepsilon_2 \cos^2 \varphi|^2}{\left| \varepsilon_1 \varepsilon_2^{1/2} \cos \vartheta + \varepsilon_2 [\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \vartheta]^{1/2} \right|^2} \right\}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Распределение излучения в кристалле, от которого отражается частица, заметно отличается от (11.9). Вычисления проводятся аналогично и дают, при $\text{Im} \varepsilon_1 = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} &= \frac{4e^2 \varepsilon_2^{3/2} u^2 \cos^2 \vartheta}{\pi^2 c^3 \left| \left(1 - (v/c) \varepsilon_2^{1/2} \sin \vartheta \cos \varphi \right)^2 - (u/c)^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta) \right|^2} \times \\
&\times \left\{ \frac{|\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta| (v/c)^2 \sin^2 \varphi}{\left| \varepsilon_1^{1/2} \cos \vartheta + [\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta]^{1/2} \right|^2} + \right. \\
&\left. + \frac{|\varepsilon_1 \sin \vartheta - (v/c) \varepsilon_1^{1/2} \varepsilon_2 \cos^2 \varphi|^2}{\left| \varepsilon_2 \varepsilon_1^{1/2} \cos \vartheta + \varepsilon_1 [\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta]^{1/2} \right|^2} \right\}. \quad (11.10)
\end{aligned}$$

Аналогичным образом рассматривается задача о генерации поверхностных волн при зеркальном отражении быстрой заряженной частицы от поверхности монокристалла [93.4].

Зависимость интенсивности излучения от различия между поверхностями эффективного отражения частиц и поля можно проследить на примере отражения от металла, когда удобно использовать метод изображений. Пусть отражение электромагнитного поля происходит от плоскости $z = 0$. Если плоскости отражения частиц и поля совпадают, то распределение излученной энергии по углам и частотам имеет вид

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{4}{\pi^2} \frac{e^2 u^2}{c^2} \times \frac{(v/c)^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + [\sin \vartheta - (v/c) \cos \varphi]^2}{\left(\left[1 - (v/c)^2 \sin \vartheta \cos \varphi \right]^2 - \left[(u/c) \cos \vartheta \right]^2 \right)^2}. \quad (11.11)$$

Если частица отражается не долетая до эффективной плоскости отражения поля на расстоянии b от нее, то законы движения реального заряда

и фиктивного заряда-изображения запишутся как $\left(\theta(t) = \frac{t + |t|}{2|t|} \right)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_+(t) &= \mathbf{b} + (\mathbf{v} + \mathbf{u})t\theta(t) + (\mathbf{v} - \mathbf{u})t\theta(-t); \\
\mathbf{r}_-(t) &= -\mathbf{b} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})t\theta(t) + (\mathbf{v} + \mathbf{u})t\theta(-t). \quad (11.12)
\end{aligned}$$

Отношение распределений излученной энергии по углам и частотам при конечном положительном b и $b = 0$ можно получить в форме

$$\frac{d^2W(b)}{d^2W(b=0)} = \cos^2 \left(b \frac{\omega}{c} \cos \vartheta \right). \quad (11.13)$$

В случае, когда частица отражается от «внутренних» слоев вещества, т. е. при отрицательных b , законы движения заряда и заряда-изображения имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_+(t) &= (\mathbf{v} + \mathbf{u})t\theta(t - |b|/u) + (\mathbf{v} - \mathbf{u})t\theta(-t - |b|/u); \\ \mathbf{r}_-(t) &= (\mathbf{v} - \mathbf{u})t\theta(t - |b|/u) + (\mathbf{v} + \mathbf{u})t\theta(-t - |b|/u). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Отношение распределений излученной энергии запишется как

$$\frac{d^2W(-|b|)}{d^2W(b=0)} = \cos^2 \{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})|b|/u\}. \quad (11.15)$$

Таким образом, измерение углового распределения рассматриваемого излучения дает возможность измерить величину и знак смещения эффективных плоскостей отражения света и частиц от поверхности.

3. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НА ОПТИЧЕСКИХ И БОЛЕЕ НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

12. Дифракционное излучение от круглого отверстия в непрозрачном экране

Одной из наиболее исследованных задач в теории дифракционного излучения (ДИ) является расчет характеристик излучения, возникающего при пролете заряженной частицы сквозь круглое отверстие в идеально проводящем, бесконечно тонком экране. Таким экраном может служить отверстие в тонкой металлической пластинке, причем излучение должно рассматриваться на частотах, ниже частоты плазмонов, то есть в оптике, инфракрасном диапазоне, миллиметровом и так далее.

По-видимому, первыми рассмотрели подобную задачу Бобринев и Брагинский [58.1] в 1958 году. Однако их результаты пригодны лишь для нерелятивистских частиц. Годом позже были опубликованы результаты Днестровского и Костомарова, получивших аналитические выражения для нерелятивистского случая [59.3] и, впервые, для ультрарелятивистского [59.4].

Рассмотрим круглое отверстие в бесконечно тонком, идеально проводящем экране. Пусть экран расположен в плоскости $xу$, а заряженная частица летит сквозь центр круга вдоль оси z . Задача о расчете характеристик возникающего излучения может быть поставлена в рамках обычной электродинамики. Мы разделяем пространство на три области (два полупространства и разделяющий их экран), затем ставим условия сшивки полей на границах, причем поле в каждом из полупространств удовлетворяет системе уравнений Максвелла ($k = \omega/c$):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= -ik\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= ik\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad \operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{H} – разность полного поля и собственного поля заряженной частицы.

Решение данной системы уравнений можно найти с помощью векторной формулы Грина: если \mathbf{A} и \mathbf{B} – две произвольные функции, непрерывные вместе со своими первыми и вторыми производными в объеме V и на поверхности S , окружающей этот объем, то

$$\int_V (\mathbf{A} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}) dV = \int_S ([\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A}] - [\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}]) ds, \quad (12.2)$$

где $ds = \mathbf{n} ds$, \mathbf{n} – единичная нормаль к поверхности S .

Ввиду исследования излучения нас будут интересовать фурье-образы векторов электрического $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ и магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$. Соответственно, в качестве вектора \mathbf{A} будем брать вектор $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ или $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$. В качестве вектора \mathbf{B} возьмем функцию Грина соответствующего волнового уравнения для поля, умноженную на произвольный единичный вектор \mathbf{e} :

$$\mathbf{B} = G(R)\mathbf{e} \equiv \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{e}, \quad R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \quad (12.3)$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения, \mathbf{r}' – радиус-вектор точек, по которым проводится интегрирование. Также выберем в качестве V то полупространство, в котором измеряем излучение, а в качестве S – плоскость $z=0$ с опирающейся на нее полусферой бесконечного радиуса. Поскольку поле излучения убывает с ростом расстояния до источника излучения, то реально поверхностью S является только плоскость $z=0$. С помощью формулы (12.2) можно получить следующие выражения для полей излучения [65.1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(ik [\mathbf{nH}(\mathbf{r}', \omega)] G(R) + [[\mathbf{nE}(\mathbf{r}', \omega)] grad G(R)] \right) dS' - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{nE}(\mathbf{r}', \omega)) grad G(R) dS' + \frac{i}{4\pi k} \oint_C grad G(R) (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2, d\mathbf{l}), \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left(ik [\mathbf{nE}(\mathbf{r}', \omega)] G(R) - [[\mathbf{nH}(\mathbf{r}', \omega)] grad G(R)] \right) dS' - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{nH}(\mathbf{r}', \omega)) grad G(R) dS' - \frac{i}{4\pi k} \oint_C grad G(R) (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, d\mathbf{l}). \quad (12.4) \end{aligned}$$

В слагаемых, представляющих собой контурные интегралы, интегрирование ведется по контуру C , разделяющему экран S_1 и отверстие S_2 . Поля \mathbf{E}_i и \mathbf{H}_i , при $i=1,2$ относятся, соответственно, к S_i .

Поверхностные интегралы в (12.4) получаются непосредственно из формулы Грина (подробный вывод приведен в книге [65.3]). Что же до контурных интегралов, то, как показал Б.В. Хачатрян [65.1], только при

их наличии формулы (12.4) удовлетворяют системе уравнений (12.1). Физический смысл контурных интегралов заключается в том, что они учитывают скачкообразное изменение поверхностной плотности тока на контуре C , приводящее к наличию некоторой линейной плотности тока. Заметим, что аналогичная ситуация возникает в теории дифракции [48.1, 39.2]. В интересующем нас случае нормального пролета сквозь центр отверстия эти контурные интегралы равны нулю [65.1]. Действительно, при наличии аксиальной симметрии задачи очевидно, что линейная плотность токов вдоль кромки отверстия (контур C) не возбуждается. Однако из этих же соображений следует, что при сильном нарушении симметрии, например в случае нецентрального пролета или в случае несимметричного отверстия, вклад контурных интегралов в (12.4) может быть существен (что, например, в [65.2, 69.1] не учитывалось).

В рассматриваемом ультрарелятивистском случае $\gamma \gg 1$ можно считать, что излучение идет под очень малыми углами к траектории, а собственное поле частицы

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{e\omega}{\pi v^2 \gamma} \left(\frac{\mathbf{c}}{\rho} K_1\left(\frac{\omega\rho}{v\gamma}\right) - \frac{i}{\gamma} \frac{\mathbf{v}}{v} K_0\left(\frac{\omega\rho}{v\gamma}\right) \right) \exp\left(i\frac{\omega}{v}z\right) \simeq \\ &\simeq \frac{e\omega}{\pi v^2 \gamma} \frac{\mathbf{c}}{\rho} K_1\left(\frac{\omega\rho}{v\gamma}\right) \exp\left(i\frac{\omega}{v}z\right) \end{aligned} \quad (12.5)$$

практически поперечно ($\mathbf{r} = (x, y)$). Это приводит к тому, что в правой части (12.4) можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными (\mathbf{nE}) и (\mathbf{nH}) .

Нас интересует поле излучения на расстояниях, заведомо превышающих длину волны $r \gg \lambda$. При таком условии нетрудно получить соотношение

$$\text{grad}G(R) \simeq -ikG(R),$$

и поэтому

$$\begin{aligned} [[\mathbf{nH}] \text{grad} G] &\simeq -ik G[\mathbf{nE}] \\ [[\mathbf{nE}] \text{grad} G] &\simeq ik G[\mathbf{nH}]. \end{aligned}$$

Таким образом, формулы (12.4) в интересующем нас случае сводятся к сравнительно простым выражениям

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= -\frac{ik}{2\pi} \int_S [\mathbf{nH}(\mathbf{r}', \omega)] G(R) dS' \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{ik}{2\pi} \int_S [\mathbf{nE}(\mathbf{r}', \omega)] G(R) dS'.\end{aligned}\quad (12.6)$$

Чтобы окончательно сформулировать задачу, следует поставить еще граничные условия. Наиболее очевидным является условие равенства нулю тангенциальной компоненты полного электрического поля на поверхности экрана, что в наших обозначениях может быть записано как

$$E_\rho|_{S_1} = -E_\rho^0|_{S_1}. \quad (12.7)$$

В качестве граничного условия на поверхности отверстия S_2 можно выбрать условие Кирхгофа:

$$\mathbf{E}|_{S_2} = 0, \quad \mathbf{H}|_{S_2} = 0, \quad (12.8)$$

т. е. потребовать, чтобы в отверстии полное электромагнитное поле было равно полю пролетающей частицы, то есть было таким же, как в отсутствие экрана. В таком случае из (12.6), с учетом (12.7) и (12.8), можно найти:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{ik}{2\pi} \int_{S_1} [\mathbf{nH}^0(\mathbf{r}, \omega)] G(R) dS_1, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= -\frac{ik}{2\pi} \int_{S_1} [\mathbf{nE}^0(\mathbf{r}, \omega)] G(R) dS_1.\end{aligned}\quad (12.9)$$

Эти выражения совпадают с формулировкой принципа Гюйгенса в методе Кирхгофа. Расчет характеристик излучения таким методом относительно несложен и был проведен в работах [65.2, 69.1, 06.2, 00.2]. Для полноты картины рассмотрим дифракционное излучение, возникающее при пролете ультрарелятивистской заряженной частицы сквозь кольцо с меньшим радиусом a и большим b . Отметим статью [06.2], где характеристики ДИ от кольца вычисляются на основе формул (12.9) и статью

[99.3], где развита точная теория излучения от кольца, представляющего собой плоский экран, заключенный между двумя радиусами.

Электрическая составляющая поля излучения, в соответствии с (12.9), определяется как

$$E_{x,y}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{ik}{2\pi} \int_a^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi' E_{x,y}^0(\mathbf{r}, \omega) G(R), \quad (12.10)$$

где $E_{x,y}^0$ определяется из (12.5) при $z = 0$. Функция $G(R)$ в волновой зоне принимает вид

$$G(R) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \xrightarrow[kr \gg 1]{r \gg r'} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'}, \quad (12.11)$$

где $\mathbf{k} = k\mathbf{r}/r$ – волновой вектор плоской волны, приходящей в точку наблюдения. В цилиндрической системе координат

$$\mathbf{k}\mathbf{r}' = k\rho \sin\theta \cos(\varphi - \varphi'). \quad (12.12)$$

Здесь θ – полярный угол излучения, отсчитываемый от оси z ; φ – угол между проекцией волнового вектора излучения на плоскость xu и осью x . Таким образом, поле (12.10) принимает вид

$$E_{x,y}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{ik}{\pi} \frac{e\omega}{v^2\gamma} \frac{e^{ikr}}{r} \int_a^b \rho d\rho K_1\left(\frac{\omega\rho}{v\gamma}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi' \begin{Bmatrix} \cos\varphi' \\ \sin\varphi' \end{Bmatrix} e^{-ik\rho \sin\theta \cos(\varphi-\varphi')}. \quad (12.13)$$

Внутренний интеграл берется по формуле

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \begin{Bmatrix} \cos\varphi' \\ \sin\varphi' \end{Bmatrix} e^{-ik\rho \sin\theta \cos(\varphi-\varphi')} = \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix} J_1(k\rho \sin\theta),$$

после чего внешний интеграл по ρ берется аналитически:

$$\int_a^b \rho d\rho K_1\left(\frac{\rho\omega}{v\gamma}\right) J_1(\rho k \sin\theta) = \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \frac{F(a) - F(b)}{1 - \beta^2 \cos^2\theta},$$

где

$$F(a) = \frac{a\omega}{v\gamma} J_1(ak \sin \theta) K_2\left(\frac{a\omega}{v\gamma}\right) - ak \sin \theta J_2(ak \sin \theta) K_1\left(\frac{a\omega}{v\gamma}\right). \quad (12.14)$$

Воспользовавшись формулами, понижающими порядок цилиндрических функций

$$J_2(x) = \frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x), \quad K_2(x) = K_0(x) + \frac{2K_1(x)}{x},$$

получаем формулу для $F(a)$ в следующем виде

$$F(a) = ak \sin \theta J_0(ak \sin \theta) K_1\left(\frac{a\omega}{v\gamma}\right) + \frac{a\omega}{v\gamma} J_1(ak \sin \theta) K_0\left(\frac{a\omega}{v\gamma}\right). \quad (12.15)$$

В результате получаем

$$E_{x,y}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e^{ikr}}{r} \frac{ie}{\pi c \gamma} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \frac{F(b) - F(a)}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}. \quad (12.16)$$

Полезно отметить, что

$$F(0) = \gamma \sin \theta, \quad F(\infty) = 0.$$

Отсюда, например, при $a=0$, $b=\infty$ получаем обычную формулу для переходного излучения от бесконечного экрана:

$$E_{x,y}^{ПИ}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{ie}{\pi c} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \frac{\sin \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}. \quad (12.17)$$

Для дифракционного излучения от отверстия в бесконечном экране ($b \rightarrow \infty$) получаем

$$E_{x,y}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{ie}{\pi c} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \frac{\sin \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \times$$

$$\times \left[\frac{ak}{\gamma} K_1 \left(\frac{a\omega}{v\gamma} \right) \right] J_0(ak \sin \theta), \quad (12.18)$$

где учтено, что при $\theta \sim \gamma^{-1}$ в (12.15) второе слагаемое много меньше первого. В ультрарелятивистском случае при $a \ll \gamma\lambda$ выражение в квадратных скобках порядка единицы. При этом для характерных углов излучения $\theta \sim \gamma^{-1}$ получается $ka\theta \ll 1$ и $J_0(ka\theta) \simeq 1$, так что формула (12.18) переходит в (12.17).

Отметим, что выражение (12.18) совпадает с результатами более точной теории, развитой в [59.3, 59.4] (см. формулу (12.28) ниже). Кроме того, выражение (12.18) с хорошей точностью совпадает с приведенным Тер-Микаеляном и Хачатряном [65.2, 69.1] (однако, в выражения для полей дифракционного излучения от круглого отверстия, приведенные в [65.2] и [69.1], вкралась опечатка, поскольку размерность полей излучения там неверная).

Оценим полные потери на дифракционное излучение по формуле

$$W = \int \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} d\omega d\Omega = cr^2 \iint |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 d\omega d\Omega, \quad (12.19)$$

где поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ берем из (12.18). Как было отмечено, выражение в квадратных скобках порядка $\gamma \sin \theta$ в области частот $\omega < \omega_c$, где характерная частота в спектре ω_c равна:

$$\omega_c = \frac{c\gamma}{a}. \quad (12.20)$$

Поэтому для качественной оценки полных потерь в интеграле (12.18) будем использовать приближение

$$\left[\frac{ak}{\gamma} K_1 \left(\frac{ak}{\gamma} \right) \right] J_0(ak\theta) \simeq 1,$$

после чего оставшийся интеграл по $d\omega$ дает ω_c , а интеграл по полярному углу порядка единицы. Интегрирование по азимутальному углу дает 2π . Следовательно, в результате получаем

$$W \approx cr^2 \left(\frac{1}{r} \frac{e}{\pi c \gamma} \right)^2 2\pi\omega_c = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{c} \omega_c \sim \frac{e^2 \gamma}{a} = \alpha \hbar c \frac{\gamma}{a}. \quad (12.21)$$

Результат этой, достаточно грубой оценки, с точностью до константы, совпадает с оценками в более точных подходах [59.4, 91.4].

Для расчетов применяется не только векторная теория метода Кирхгофа [65.1, 65.2, 69.1], но и скалярная [00.1]. При этом скалярная теория является хорошим приближением в случае релятивистских частиц и малых углов излучения:

$$\theta \sim \gamma^{-1} \ll 1. \quad (12.22)$$

Именно этот диапазон наиболее интересен с точки зрения дифракционного излучения. Векторная теория дает более точные результаты и кроме того, позволяет найти поляризацию поля излучения; однако для расчета спектрально-угловой плотности излучения при условии (12.22) оба подхода дают примерно одинаковый результат [00.1].

Пределы применимости метода Гюйгенса–Кирхгофа ограничены условием

$$\lambda \ll a \leq \gamma \lambda. \quad (12.23)$$

Левая часть этого неравенства обусловлена обычной теорией дифракции [88.2], а правая часть характерна для дифракционного излучения и связана с тем, что на краях отверстия рассеивается поле заряженной частицы, ограниченное в пространстве величиной $\gamma \lambda$. Заметим, что принцип Гюйгенса применим лишь для описания рассеяния падающего поля вперед (см. § 98 [88.2]), и в случае излучения им можно пользоваться только для расчета ДИ вперед. В пользу этого замечания говорит и тот факт, что при преобразовании выражения (12.4) к (12.9) мы предполагали, что излучение идет под очень малыми углами к траектории. Отсюда следует ожидать, что формулы типа (12.9) могут быть применимы для расчета излучения Смита–Парселла (которое распространяется под большими углами к траектории) лишь в достаточно грубом приближении.

Из сказанного выше становится ясно, почему представляют интерес более строгие методы решения. Прежде всего, необходимо отказаться от условия (12.8) и заменить его условием

$$H_\varphi|_{S_2} = 0. \quad (12.24)$$

Условие (12.24) является следствием принятой модели: экран является бесконечно тонким, так что равна нулю поперечная к экрану компонента плотности поляризационных токов, наведенных на экране полем пролетающей заряженной частицы. Однако реальный металлический экран имеет конечную толщину. В хорошем приближении можно сказать, что плотность поляризационных токов пропорциональна проводимости материала мишени σ и полю пролетающей заряженной частицы \mathbf{E}^0 :

$$j_i \propto \sigma E_i^0, \quad (12.25)$$

где индекс i пробегает значения $\{x, y, z\}$. Возможность пренебрежения j_z связана с тем, что продольная компонента собственного поля ультрарелятивистской заряженной частицы много меньше поперечной: $E_z^0 \ll E_x^0, E_y^0$. Отсюда видно, что принятое условие (12.24) является приближенным. Погрешность, связанная с его использованием, может быть особенно заметна, например, в нерелятивистском случае или при наклонном пролете, а также при скользящем пролете ультрарелятивистской частицы сквозь отверстие (наименьший угол между траекторией частицы и плоскостью экрана сравним с γ^{-1}), поскольку в этих случаях в плоскости отверстия компонента H_φ заметно отличается от нуля.

Итак, при условии (12.24) из (12.6), с учетом (12.7), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = & \frac{ik}{2\pi} \int_{S_2} [\mathbf{nE}(\mathbf{r}, \omega)] G(R) dS_2 - \\ & - \frac{ik}{2\pi} \int_{S_1} [\mathbf{nE}^0(\mathbf{r}, \omega)] G(R) dS_1. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Отсюда, для точек поверхности S_2 , при учете (12.24) можно записать:

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \cos(\varphi - \varphi_2) E_\rho(\mathbf{r}_2, \omega) G(R) dS_2 = \\ = \int_{S_1} \cos(\varphi - \varphi_1) E_\rho^0(\mathbf{r}_1, \omega) G(R) dS_1. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Здесь φ – угол цилиндрической системы координат, а косинусы появляются при взятии проекции на \mathbf{e}_φ из-за скалярных произведений $\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_{\varphi_1}$ и $\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_{\varphi_2}$. Уравнение (12.27) является интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода. Его решение позволяет найти поле $E_\rho(\mathbf{r}_2, \omega)$, после чего поле излучения находится по формуле (12.26). Решение уравнения (12.27) было проведено численно Днестровским и Костомаровым в работе [59.3]. Были получены аналитические выражения для двух предельных случаев нерелятивизма и ультрарелятивизма. В нерелятивистском случае (см. [59.3]) результаты совпадают с результатом работы [58.1]. Для ультрарелятивистского случая в [59.3, 59.4] при $\theta \ll 1$ получено следующее выражение:

$$H_\varphi(\theta, \omega) = -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{2e}{c} \left[\frac{ka}{\gamma} K_1\left(\frac{ka}{\gamma}\right) \right] J_0(ka\theta) \frac{1}{\gamma^{-2} + \theta^2}. \quad (12.28)$$

Это выражение дает в точности тот же результат, что и (12.18), за исключением множителя $(2\pi)^{-1}$, который обусловлен другой формой записи преобразований Фурье и не влияет на конечный результат.

Другой метод решения был применен авторами работы [91.4]. Они также исходили из уравнения (12.27), однако решали его не численно, а аналитически. Суть их метода заключается в переходе в сфероидальную систему координат, с последующим разложением всех искомым функций по системе спецфункций, после чего из уравнения (12.27) можно определить коэффициенты этого разложения. Получающиеся выражения для полей достаточно громоздки, и мы не будем их приводить здесь. Отметим лишь, что результаты более точной теории, развитой в [91.4], приводят к тому, что выражение для полных потерь на излучение отличается от полученного Днестровским и Костомаровым на множитель $3\pi/8 \approx 1,18$:

$$W \simeq \frac{3\pi}{8} \frac{e^2 \gamma}{a}. \quad (12.29)$$

Следует отметить также ряд работ, в которых рассматривалось переходное излучение заряженной частицы, пролетающей сквозь сплошной тонкий, идеально проводящий диск [00.3, 03.3, 02.2]. В случае, когда размеры диска b меньше, чем характерный размер спадания собственного поля релятивистского заряда $\gamma \lambda$, спектр переходного излучения изменяется. Это может быть истолковано как результат дифракции части собственного поля заряда на краях диска. Отметим, что

выражение (12.16) при $a = 0$ и конечных b находится в хорошем качественном согласии с результатами точной теории, развитой в [00.3, 03.3, 02.2].

Для бесконечно тонкого, идеально проводящего экрана имеет место так называемая теорема Бабине [88.3, 65.3] (она же в [88.2] называется принципом двойственности). Она устанавливает связь между полями излучения, дифрагировавшего на краях двух экранов, которые при наложении друг на друга образуют непрерывную плоскость. Такие экраны называются дополнительными. Рассеянное поле может быть и полем пролетающего заряда, так что в случае переходного и дифракционного излучений от дополнительных, бесконечно тонких и идеально проводящих экранов теорема Бабине также имеет силу [00.1].

Пусть S_1 и S_2 – дополнительные экраны, так что $S_1 + S_2$ является плоскостью.

В случае скалярной теории, когда поле описывается некоторой скалярной функцией ψ , принцип Бабине имеет очень простой вид:

$$\psi_1 + \psi_2 = \psi_0, \quad (12.30)$$

где ψ_1 – поле, рассеянное на экране S_1 , а ψ_2 – поле, рассеянное на дополнительном экране S_2 .

В случае использования векторной теории теорема Бабине формулируется немного сложнее. Пусть на экран S_1 падает поле $\mathbf{E}_1^0, \mathbf{H}_1^0$. Дополнительная к ней дифракционная система состоит из полей $\mathbf{E}_2^0 = -\mathbf{H}_1^0$ и $\mathbf{H}_2^0 = \mathbf{E}_1^0$, падающих на экран S_2 . Теорема может быть сформулирована так: если рассеянные экраном S_1 поля первой задачи есть \mathbf{E}_1 и \mathbf{H}_1 , то поля \mathbf{E}_2 и \mathbf{H}_2 , рассеянные дополнительным экраном S_2 , могут быть найдены как

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_1^0, \\ \mathbf{H}_2 &= -(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^0). \end{aligned} \quad (12.31)$$

Доказательство этой теоремы можно найти в параграфе 7 главы 9 в [65.3] и параграфе 94 главы 17 в [88.2]. В принципе, ее использование позволяет найти поле дифракционного излучения от круглого отверстия в бесконечно тонком идеально проводящем экране по найденному в работах [00.3, 03.3] полю переходного излучения от тонкого, идеально проводящего диска.

В заключение отметим ряд вопросов, возникающих в рамках задачи об излучении при пролете заряда сквозь отверстие, которые представляются еще недостаточно подробно исследованными.

Во-первых, не получено строгого решения задачи в компактной аналитической форме для произвольных энергий частиц. Работы [59.3, 59.4] опираются на численное решение системы интегральных уравнений, а в работе [91.4] решение получено в виде разложения по системе спецфункций и имеет довольно громоздкий вид. Между тем, по-видимому, задача должна решаться в относительно компактной форме с использованием метода Винера–Хопфа для решения парных систем интегральных уравнений, развитого В.А. Фоком и Л.А. Вайнштейном (см. [66.2, 66.3]).

Во-вторых, представляет интерес нецентральный пролет пучка заряженных частиц сквозь отверстие. Для решения этой задачи, например, с использованием векторной формулы Грина, необходим аккуратный учет контурных интегралов, что отвечает учету поляризационных токов, возникающих на кромке отверстия при нецентральном пролете.

В-третьих, желателен выход за рамки модели идеально проводящей мишени. Проводимость реальных мишеней хоть и велика, но конечна. Представляется, что последовательным обобщением на пути учета реальных свойств металлического экрана является постановка граничного условия в форме условия Леонтовича (см., например гл. 4 монографии [88.2]), вместо обращения в нуль тангенциальной компоненты на поверхности проводника (12.7). Граничное условие Леонтовича на поверхности реального проводника с большой, но конечной проводимостью σ имеет вид:

$$[\mathbf{nE}] = -\zeta [\mathbf{n}[\mathbf{nH}]], \quad (12.32)$$

где \mathbf{n} есть нормаль к поверхности, а $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ – волновой импеданс; μ и ε – соответственно, магнитная и диэлектрическая проницаемость металла. Для хороших проводников, не являющихся ферромагнетиками, $\mu = 1$, $\varepsilon = i4\pi\sigma/\omega$ и волновой импеданс принимает вид

$$\zeta = \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}. \quad (12.33)$$

Для хороших проводников $\zeta \ll 1$. Приближению идеальной проводимости отвечает $\zeta = 0$, что соответствует равенству нулю тангенциальной компоненты электрического поля $[\mathbf{nE}] = 0$.

13. Дифракционное излучение от наклонной идеально-проводящей полуплоскости

Одной из точно решаемых задач является исследование процесса генерации дифракционного излучения (ДИ) при пролете заряженной частицы вблизи наклонной, идеально проводящей полуплоскости [62.1]. Следует отметить, что подобное описание с хорошей точностью можно использовать для длин волн более 0,5 мкм, если в качестве мишени, вблизи которой пролетает заряд, используется полированная металлическая поверхность.

Рассмотрим случай, когда заряженная частица пролетает вблизи полубесконечного, идеально проводящего экрана таким образом, что проекция траектории частицы на плоскость экрана (мишени) образует прямой угол с краем мишени (см. рис. 13.1). Этот случай будем называть перпендикулярной геометрией.

Для задачи выбрана следующая система координат (см. рис. 13.1): ось z совпадает с ребром экрана, ось x расположена в плоскости экрана. Таким образом, в этой системе вектор скорости частицы \mathbf{v} записывается как

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} c, \quad \mathbf{v} = \{\beta_x, \beta_y, \beta_z\} = \beta (\sin \psi_0 \cos \varphi_0, \sin \psi_0 \sin \varphi_0, \cos \psi_0).$$

Для перпендикулярной геометрии ($\psi_0 = \pi/2$), вектор β имеет только две компоненты:

$$\mathbf{v} = \beta (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0, 0) = \{\beta_x, \beta_y, 0\}.$$

Для рассматриваемой геометрии введены следующие обозначения:

h – минимальное расстояние между траекторией частиц и краем экрана (прицельный параметр);

ψ_0, φ_0 – полярный и азимутальный углы скорости частицы;

ψ, φ – полярный и азимутальный углы волнового вектора;

\mathbf{k} – волновой вектор,

$$\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\} = \omega \mathbf{n} = \omega \{\sin \psi \cos \varphi, \sin \psi \sin \varphi, \cos \psi\},$$

ω – частота излучения.

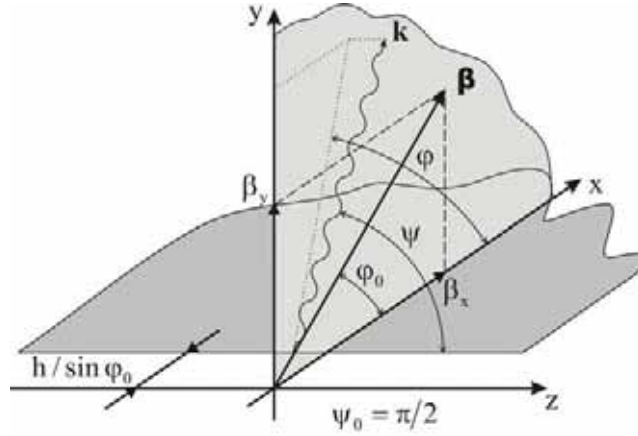


Рис. 13.1. Генерация дифракционного излучения при наклонном пролёте заряженной частицы над проводящей полуплоскостью (перпендикулярная геометрия)

В работе [62.1] для этого частного случая было найдено решение уравнений Максвелла методом Винера–Хопфа и получены потенциалы и φ , описывающие излучение в вакууме выше и ниже экрана, выраженные через ρ и \mathbf{j} – плотность заряда и тока, наведенные пролетающим зарядом на экране. В рассматриваемом случае для бесконечно тонкого, идеального проводящего экрана $A_y = 0$. В данном параграфе вплоть до конечных формул используется система единиц $\hbar = m = c = 1$.

Следуя [62.1], запишем выражения для напряженности поля ДИ. В цитируемой работе были получены формулы для фурье–компонент величин ρ и \mathbf{j} , которые запишем для удобства через скорость частицы и ее лоренц– фактор γ :

$$\rho = -\frac{B_{q\omega}}{\sqrt{\omega \sin \psi (1 + \cos \varphi)}} \times \left\{ \frac{1}{\sin \psi} - \frac{\alpha_0 \cos \varphi_0 + i \gamma^{-2} \sin \varphi_0}{\alpha_0 \beta} \frac{\sin \psi (1 + \cos \varphi)}{-\sin \psi \cos \varphi + \frac{\cos \varphi_0}{\beta} + i \frac{\alpha_0}{\beta} \sin \varphi_0} \right\}, \quad (13.1)$$

$$j_x = \frac{B_{q\omega}}{\sqrt{\omega \sin \psi (1 + \cos \varphi)}} \times \frac{\sin \psi + \frac{\cos \varphi_0}{\beta} + i \frac{\alpha_0}{\beta} \sin \varphi_0}{-\sin \psi \cos \varphi + \frac{\cos \varphi_0}{\beta} + i \frac{\alpha_0}{\beta} \sin \varphi_0}, \quad (13.2)$$

$$j_y = 0,$$

где

$$B_{q\omega} = \frac{e}{4\pi^2} \frac{\beta \sqrt{\omega \left[\sin \psi - \frac{\cos \varphi_0}{\beta} - i \frac{\alpha_0}{\beta} \sin \varphi_0 \right]}}{\omega (\alpha_0 \cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)} \exp(-\kappa),$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\gamma^{-2} + \beta^2 \cos^2 \psi} = \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi},$$

$$\kappa = \frac{2\pi h}{\beta \lambda} \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}.$$

В (13.1), (13.2) e – заряд частицы. Компонента индуцированного тока j_z при $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$ находится из уравнения непрерывности $\mathbf{n}\mathbf{j} = \rho$:

$$j_z = \frac{\rho - n_x j_x}{n_z}. \quad (13.3)$$

Из уравнений Максвелла легко находятся фурье-компоненты электрического поля ДИ в волновой зоне:

$$E_i = \omega (j_i - \rho n_i), \quad i = x, y, z; \quad (13.4)$$

или, в явном виде, выразив через ρ и j_x :

$$E_x = \omega (j_x - \rho \sin \psi \cos \varphi),$$

$$E_y = -\omega \rho \sin \psi \sin \varphi,$$

$$E_z = \omega \left(\frac{\rho - j_x \sin \psi \cos \varphi}{\cos \psi} - \rho \cos \psi \right). \quad (13.5)$$

Для решения задач, связанных с поляризацией излучения, необходимо перейти к системе координат, связанной с волновым вектором. Поэтому выбираем систему единичных ортов следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_2 &= \frac{[\mathbf{z}_0 \mathbf{n}]}{\sin \psi} = \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0\}, \\
\mathbf{e}_1 &= -[\mathbf{n} \mathbf{e}_2] = \{\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, -\sin \psi\}, \\
\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{k}}{\omega}.
\end{aligned} \tag{13.6}$$

Единичный вектор \mathbf{z}_0 направлен вдоль положительного направления оси z . Запишем компоненты напряженности поля в этой системе координат:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \mathbf{E} \mathbf{e}_1 = \omega \frac{j_x \cos \varphi - \rho \sin \psi}{\cos \psi}, \\
E_2 &= \mathbf{E} \mathbf{e}_2 = -\omega j_x \sin \varphi, \\
E_n &= \mathbf{E} \mathbf{n} = 0.
\end{aligned} \tag{13.7}$$

Очевидно, что для получения спектрально-углового распределения дифракционного излучения можно использовать выражение для напряженности поля в любой из вышеприведенных систем координат:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} &= 4\pi^2 |\mathbf{E}|^2 = 4\pi^2 \left\{ |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 \right\} = 4\pi^2 \left\{ |E_1|^2 + |E_2|^2 \right\} = \\
&= 4\pi^2 \omega^2 \left\{ |j_x \sin \varphi|^2 + \left| \frac{j_x \cos \varphi - \rho \sin \psi}{\cos \psi} \right|^2 \right\} = \\
&= 4\pi^2 \omega^2 \left\{ |j_x|^2 - |\rho|^2 + \left| \frac{\rho - \sin \psi \cos \varphi \cdot j_x}{\cos \psi} \right|^2 \right\} = \\
&= 4\pi^2 \omega^2 \left\{ |j_x|^2 + |j_z|^2 - |\rho|^2 \right\} = 4\pi^2 \omega^2 \left\{ |\mathbf{j}|^2 - |\rho|^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{13.8}$$

С точностью до обозначений, полученное выражение совпадает с формулой (1.16) для излучения в вакууме ($\varepsilon(\omega) = 1, |\mathbf{k}| = \omega$):

$$\frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} = \text{const} \cdot \omega^2 \left\{ |\mathbf{j}(\mathbf{n}, \omega)|^2 - |\rho(\mathbf{n}, \omega)|^2 \right\}.$$

Действительно, из (13.4) следует

$$|E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 = \omega^2 \{ |\mathbf{j}|^2 + |\rho|^2 - 2\rho \mathbf{n}\mathbf{j} \}.$$

С учетом уравнения непрерывности (1.15) $\mathbf{n}\mathbf{j} = \rho$ вместо последнего выражения получаем:

$$|\mathbf{E}|^2 = \omega^2 \{ |\mathbf{j}|^2 - |\rho|^2 \}.$$

После подстановки в (13.8) ρ, j_x, j_z спектрально-угловая плотность излучения для перпендикулярной геометрии записывается в виде:

$$\frac{d^2W}{\hbar d\omega d\Omega} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{\beta}{\sin\psi} \exp\left(-\frac{4\pi\hbar}{\lambda\beta} \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\psi}\right) \times \frac{(1 - \beta^2 \sin^2\psi)(1 + \beta_x \sin\psi)(1 - \cos\varphi) + \cos^2\psi(1 - \beta_x \sin\psi)(1 + \cos\varphi)}{(1 - \beta^2 \sin^2\psi) \left[(1 - \beta_x \sin\psi \cos\varphi)^2 - \beta_y^2 \sin^2\psi \sin^2\varphi \right]}. \quad (13.9)$$

Здесь $\lambda = 2\pi c/\omega$ – длина волны излучения. Как следует из формулы, плотность дифракционного излучения экспоненциально падает с уменьшением длины волны.

Зависимость от угла φ_0 (угол между вектором скорости начальной частицы и мишенью) выражена через компоненты $\beta_x = \beta \cos\varphi_0$ и $\beta_y = \beta \sin\varphi_0$. Как было показано в [98.2], интенсивность ДИ достигает максимума вдоль направлений, для которых знаменатель в (13.9) минимален и определяемых для ультрарелятивистского случая ($\gamma \gg 1$) условиями:

$$\psi = \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi = \pm \varphi_0.$$

Знак «+» соответствует направлению излучения, совпадающему с направлением движения начальной частицы – ДИ «вперед» (ДИВ), знак «-» – направлению зеркального отражения импульса частицы относительно плоскости мишени – ДИ «назад» (ДИН). Используем новые угловые переменные (для случая ДИН), определенные в системе координат, связанной с ортами $\mathbf{e}_{1,2}$:

$$\begin{aligned}\theta_x &= \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) \sim \gamma^{-1}, \\ \theta_y &= (\varphi + \varphi_0) \sim \gamma^{-1}.\end{aligned}\tag{13.10}$$

В этих переменных вместо громоздкой формулы (13.9) получается простая формула для интенсивности дифракционного излучения ультрарелятивистских частиц, в пренебрежении членами $\sim \gamma^{-2}$ [98.2]:

$$\begin{aligned}\frac{d^2W}{\hbar d\omega d\Omega} &= \frac{\alpha}{4\pi^2} \exp\left(-\frac{4\pi h}{\gamma\lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta_x^2}\right) \frac{\gamma^{-2} + 2\theta_x^2}{(\gamma^{-2} + \theta_x^2)(\gamma^{-2} + \theta_x^2 + \theta_y^2)} = \\ &= \frac{\alpha}{4\pi^2} \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta_x^2}\right) \frac{\gamma^{-2} + 2\theta_x^2}{(\gamma^{-2} + \theta_x^2)(\gamma^{-2} + \theta_x^2 + \theta_y^2)}.\end{aligned}\tag{13.11}$$

Выражение (13.11) записано в более удобном (безразмерном) виде после перехода к энергии фотона излучения $\hbar\omega$ и с использованием постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$. Далее, в (13.11) введена характерная частота спектра дифракционного излучения:

$$\omega_c = \frac{\gamma c}{2h},\tag{13.12}$$

которая для идеально проводящей мишени определяется лоренц-фактором частицы γ и прицельным параметром h . Можно предполагать, что при пролете частицы вблизи экрана из материала с конечной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, в общем случае характерная частота ω_c будет зависеть также и от диэлектрической проницаемости.

Следует отметить, что углы θ_x, θ_y отсчитываются в перпендикулярных направлениях либо от направления зеркального отражения (для ДИ назад), либо от импульса электрона (для ДИ вперед) и по порядку величины сравнимы с характерными углами излучения релятивистской частицы γ^{-1} . Отметим также, что $d\Omega = \sin\psi d\psi d\varphi = d\theta_x d\theta_y$.

Из (13.11) легко вычисляются радиационные потери для каждого конуса:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta_x \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta_y \int_0^{+\infty} d\omega \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{3}{8} \alpha \hbar \omega_c.\tag{13.13}$$

Полная энергия ДИ (для обоих конусов излучения) получается удвоением полученного выражения

$$W_{\Sigma} = \frac{3}{4} \alpha \hbar \omega_c. \quad (13.14)$$

Основные характеристики ДИ в релятивистском случае для рассматриваемой геометрии следуют из (13.15):

- а) радиационные потери не зависят от угла наклона мишени φ_0 ;
- б) в случае, когда частота обрезания спектра ω_c меньше, чем максимальная частота, для которой еще справедлива модель идеального проводника (ленгмюровская частота металла), радиационные потери пропорциональны лоренц-фактору γ (аналогично полным потерям на переходное излучение);
- в) интенсивность излучения пропорциональна квадрату заряда ($\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$).

Более общим является случай, когда заряженная частица с зарядом Z и любой энергией (в том числе нерелятивистская) пролетает над идеально проводящей полуплоскостью под произвольными углами (другими словами, имея все три ненулевые компоненты импульса в системе координат, показан на рис. 13.2),

$$= \{\beta_x, \beta_y, \beta_z\} = \beta \{\sin \psi_0 \cos \varphi_0, \sin \psi_0 \sin \varphi_0, \cos \psi_0\}.$$

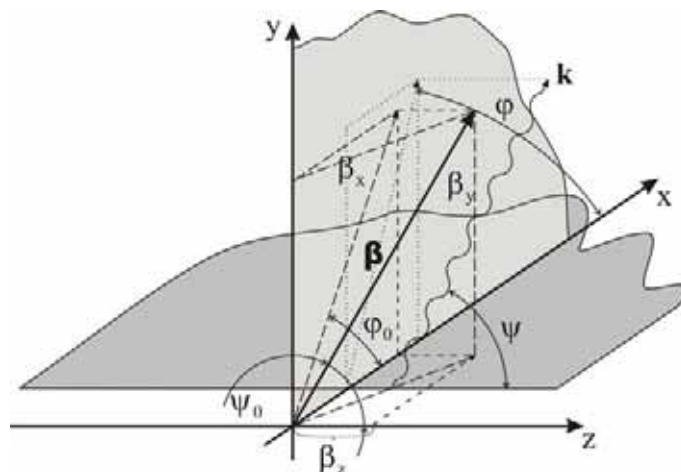


Рис. 13.2. Генерация дифракционного излучения для общего случая

Подход, позволяющий найти характеристики ДИ, в общем случае был развит в работе [03.4] и основан на применении преобразования

Лоренца к кинематике, соответствующей перпендикулярной геометрии. Если в системе, которая движется со скоростью $\beta_z c$ вдоль оси z , реализуется перпендикулярная геометрия ДИ, то в лабораторной системе генерация ДИ будет как раз соответствовать общему случаю, когда все три компоненты скорости частицы не равны нулю (рис. 13.3).

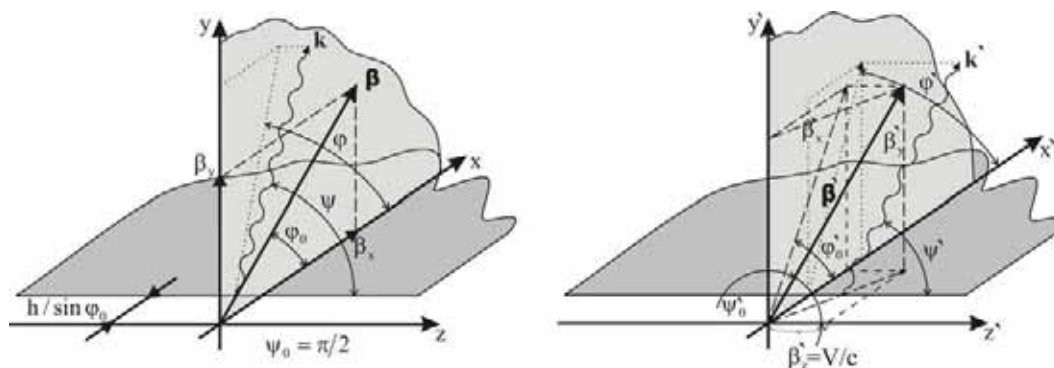


Рис. 13.3. Лоренц-преобразование от инерциальной системы, соответствующей перпендикулярной геометрии движущейся вдоль оси z со скоростью v

Применение преобразований Лоренца в общем случае предполагает изменение граничных условий на поверхности мишени в движущейся системе отсчета. Как известно (см., например, гл. 4 книги [66.2]), граничные условия на поверхности реального проводника с большой, но конечной проводимостью σ имеют вид:

$$[\mathbf{nE}] = -\zeta [\mathbf{n}[\mathbf{nH}]],$$

где \mathbf{n} есть нормаль к поверхности, а $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ – волновой импеданс; μ и ε – соответственно, магнитная и диэлектрическая проницаемость металла. Это условие называют граничным условием Леонтовича. Для хороших проводников, не являющихся ферромагнетиками, $\mu = 1$, $\varepsilon = i4\pi\sigma/\omega$ и волновой импеданс принимает вид:

$$\zeta = \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} = \frac{\omega}{c\delta} \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

где δ – толщина скин-слоя. Отсюда видно, что граничные условия на поверхности проводящего экрана не являются лоренц-инвариантными, что, вообще говоря, следует учитывать. Однако для реальных хороших

проводников $\zeta \ll 1$. Приближению идеальной проводимости отвечает $\zeta = 0$, что соответствует равенству нулю тангенциальной компоненты электрического поля:

$$[\mathbf{nE}] = 0.$$

Поэтому в приближении идеально проводящей мишени граничные условия можно считать инвариантными относительно преобразований Лоренца, в системе отсчета, движущейся параллельно поверхности мишени.

Кинематические переменные после преобразования Лоренца (после перехода из движущейся в лабораторную систему) будем обозначать штрихами. Таким образом, скорость частицы в штрихованной системе записывается следующим образом:

$$\beta' = \left\{ \beta'_x = \beta_x \sqrt{1 - \beta_z'^2}, \beta'_y = \beta_y \sqrt{1 - \beta_z'^2}, \beta'_z = \frac{v}{c} \right\} = \left\{ \gamma^{-1} \beta_x, \gamma^{-1} \beta_y, \beta \right\}. \quad (13.16)$$

Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца. Поэтому решение этих уравнений имеет вид (13.4) и в штрихованной системе координат:

$$\mathbf{E}' = \omega' (\omega' \mathbf{j}' - \mathbf{k}' \rho').$$

При этом в силу лоренц-инвариантности уравнений Максвелла и отмеченной выше инвариантности граничных условий на поверхности идеально проводящего экрана, связь величин ρ' и \mathbf{j}' с характеристиками движения частицы остается такой же, как в лабораторной системе, и дается формулами, аналогичными (13.1) и (13.2). Связь штрихованных компонент в новой системе с нештрихованными определяется известными формулами (см., например, [89.2]):

$$\begin{aligned} \sin \psi' &= \frac{\sqrt{1 - \beta_z'^2} \sin \psi}{1 + \beta_z' \cos \psi}, \\ \cos \psi' &= \frac{\cos \psi + \beta_z'}{1 + \beta_z' \cos \psi}, \\ \varphi' &= \varphi, \end{aligned}$$

$$\omega' = \omega \frac{\sqrt{1 - \beta_z'^2}}{1 - \beta_z' \cos \psi}, \quad (13.17)$$

а 4-й вектор $j_\mu = (\rho, \mathbf{j})$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\rho + \beta_z' j_z}{\sqrt{1 - \beta_z'^2}}, \\ j_x' &= j_x, \quad j_y' = j_y = 0, \\ j_z' &= \frac{j_z + \beta_z' \rho}{\sqrt{1 - \beta_z'^2}}. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Так как компоненты четырех вектора j_μ зависят от угла ψ (см. рис. (13.1)), то, используя (13.17), получим выражения для j_x' и ρ' в явном виде через углы вылета фотона ДИ в лабораторной системе:

$$\begin{aligned} \rho' &= -\frac{B'_{q\omega'}}{\sqrt{\omega' \sin \psi' (1 + \cos \varphi)}} \times \\ &\times \left\{ \frac{1 - \beta_x'}{\sqrt{1 - \beta_z'^2} \sin \psi'} - \frac{\alpha^* \beta_x' + i\gamma^{-2} \beta_y' (1 - \beta_z' \cos \psi')}{\alpha^*} \right\} \times \\ &\times \frac{\sin \psi' (1 + \cos \varphi) \sqrt{1 - \beta_z'^2}}{-\left(\beta_x'^2 + \beta_y'^2\right) \sin \psi' \cos \varphi + \beta_x' (1 - \beta_z' \cos \psi') + i\alpha^* \beta_y'}. \end{aligned} \quad (13.19)$$

$$\begin{aligned} j_x' &= -\frac{B'_{q\omega'}}{\sqrt{\omega' \sin \psi' (1 + \cos \varphi)}} \times \\ &\times \frac{\left(\beta_x'^2 + \beta_y'^2\right) \sin \psi' + \beta_x' (1 - \beta_z' \cos \psi') + i\alpha^* \beta_y'}{-\left(\beta_x'^2 + \beta_y'^2\right) \sin \psi' \cos \varphi + \beta_x' (1 - \beta_z' \cos \psi') + i\alpha^* \beta_y'}. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Здесь

$$B'_{q\omega'} = \frac{e}{4\pi^2} \frac{\beta_\perp' \sqrt{\omega' \left[\beta_\perp'^2 \sin \psi' - \beta_x' (1 - \beta_z' \cos \psi') - i\alpha^* \beta_y' \right]}}{\omega' (\alpha^* \beta_x' + i\beta_y' (1 - \beta_z' \cos \psi'))} \exp(-\kappa'),$$

$$\alpha'_0 = \frac{\sqrt{(1 - \beta'_z \cos \psi')^2 - \beta'^2_{\perp} \sin^2 \psi'}}{1 - \beta'_z \cos \psi'} = \frac{\alpha^*}{1 - \beta'_z \cos \psi'},$$

$$\kappa' = \frac{2\pi h}{\lambda' \beta'_{\perp}} \sqrt{(1 - \beta'_z \cos \psi')^2 - \beta'^2_{\perp} \sin^2 \psi'}.$$

В (13.20) и далее используется обозначение $\beta'_{\perp} = \sqrt{\beta'^2_x + \beta'^2_y}$. Выражения для полей $E'_{1,2}$ имеют тот же вид, что и (13.7):

$$E'_1 = \omega' \frac{j'_x \cos \varphi - \rho' \sin \psi'}{\cos \psi'},$$

$$E'_2 = -\omega' j'_x \sin \varphi,$$

$$E'_n = 0. \quad (13.21)$$

Для получения спектрально-углового распределения ДИ в общем случае можно суммировать квадраты компонент поля (13.21), но вычисления в таком случае получаются весьма громоздкими. Чтобы получить выражение для спектрально-угловой плотности ДИ, в общем случае воспользуемся тем, что спектрально-угловая плотность излучения пропорциональна произведению ω^2 на квадрат модуля 4-вектора плотности тока (см. формулу (1.16)). Последний является лоренц-инвариантом и поэтому

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{\omega'^2} \frac{d^2 W'}{d\omega' d\Omega'} = \text{inv}$$

относительно преобразований Лоренца. Тогда, преобразовывая углы, частоту и компоненты скорости при переходе к штриховой системе, получим:

$$\frac{d^2 W}{\hbar d\omega d\Omega} = Z^2 \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{\beta_{\perp} (1 - \beta_z \cos \psi)}{\sin \psi} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{4\pi h}{\lambda \beta_{\perp}} \sqrt{(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_{\perp}^2 \sin^2 \psi}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{\left[(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_{\perp}^2 \sin^2 \psi\right]} \left[(1 - \beta_z \cos \psi - \beta_x \sin \psi \cos \varphi)^2 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_y^2 \sin^2 \psi \sin^2 \varphi \Big]^{-1} \left[\left((1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_\perp^2 \sin^2 \psi \right) \times \right. \\
& \times \left(1 + \frac{\beta_x \sin \psi}{1 - \beta_z \cos \psi} \right) (1 - \cos \varphi) + (\cos \psi - \beta_z)^2 \times \\
& \left. \times \left(1 - \frac{\beta_x \sin \psi}{1 - \beta_z \cos \psi} \right) (1 + \cos \varphi) \right]. \tag{13.22}
\end{aligned}$$

Поскольку формула (13.22) получена для основной (лабораторной) системы, для упрощения записи штрихи в этой формуле и далее опускаются.

В формуле (13.22) явным образом записана зависимость от заряда пролетающей частицы Z .

Следует отметить, что в частном случае $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\beta_x = 0$ ($\beta_\perp = \beta_y$),

т. е., когда проекция скорости частицы на плоскость мишени параллельна ее краю (так называемая параллельная геометрия), выражение (13.22) полностью совпадает с результатом, полученным в статьях [63.1, 64.2], где рассматривалась подобная геометрия.

Радиационные потери для общего случая получим интегрируя выражение (13.22) по азимутальному и полярному углу и по частоте. Интересно отметить, несмотря на сложность выражения интеграл можно взять аналитически.

Для интегрирования по азимутальному углу представим выражение (13.22) в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 W}{\hbar d\omega d\Omega} &= \frac{Z^2 \alpha \beta_\perp (1 - \beta_z \cos \psi)}{4\pi^2 \sin \psi} \times \\
& \times \exp \left(-\frac{4\pi h}{\lambda \beta_\perp} \sqrt{(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_\perp^2 \sin^2 \psi} \right) \times \\
& \times \frac{1}{\left[(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_\perp^2 \sin^2 \psi \right]} \times \frac{A + B \cos \varphi}{\left[(a \cos \varphi - \mu)^2 + \nu^2 \right]}, \tag{13.23}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \left[(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_{\perp}^2 \sin^2 \psi \right] \left(1 + \frac{\beta_x \sin \psi}{1 - \beta_z \cos \psi} \right) + \\
&+ (\cos \psi - \beta_z)^2 \left(1 - \frac{\beta_x \sin \psi}{1 - \beta_z \cos \psi} \right) = \\
&= \left[(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_{\perp}^2 \sin^2 \psi \right] \left(1 + \frac{\beta_x \sin \psi}{1 - \beta_z \cos \psi} \right) + \\
&+ \left[(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_{\perp}^2 \sin^2 \psi - \gamma^{-2} \sin^2 \psi \right] \cdot \left(1 - \frac{\beta_x \sin \psi}{1 - \beta_z \cos \psi} \right); \tag{13.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= - \left[(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_{\perp}^2 \sin^2 \psi \right] \left(1 + \frac{\beta_x \sin \psi}{1 - \beta_z \cos \psi} \right) + \\
&+ \left[(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_{\perp}^2 \sin^2 \psi - \gamma^{-2} \sin^2 \psi \right] \left(1 - \frac{\beta_x \sin \psi}{1 - \beta_z \cos \psi} \right); \tag{13.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= \beta_{\perp} \sin \psi, \quad \mu = \frac{\beta_x}{\beta_{\perp}} (1 - \beta_z \cos \psi); \\
v &= \frac{\beta_y}{\beta_x} \sqrt{\mu^2 - \frac{\beta_x^2}{\beta_{\perp}^2} a^2} = \frac{\beta_y}{\beta_{\perp}} \sqrt{(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_{\perp}^2 \sin^2 \psi}. \tag{13.26}
\end{aligned}$$

Для начала понизим степень в подынтегральном выражении:

$$\begin{aligned}
\frac{A + B \cos \varphi}{\left[(a \cos \varphi - \mu)^2 + v^2 \right]} &= \frac{\lambda_1}{a \cos \varphi - \mu + iv} + \frac{\lambda_2}{a \cos \varphi - \mu - iv} = \\
&= \frac{\lambda_1}{a \cos \varphi - \delta} + \frac{\lambda_1^*}{a \cos \varphi - \delta^*}, \\
\lambda_1 &= \frac{i}{2v} \left(A + \frac{\delta}{a} B \right), \quad \delta = \mu - iv.
\end{aligned}$$

Тогда из теории вычетов получаем

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{A + B \cos \varphi}{\left[(a \cos \varphi - \mu)^2 + v^2 \right]} = -4\pi \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\delta^2 - a^2}} \right).$$

Отметим, что корень извлекается точно:

$$\begin{aligned}\sqrt{\delta^2 - \alpha^2} &= \sqrt{\left[\frac{\beta_x}{\beta_\perp} \sqrt{(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_\perp^2 \sin^2 \psi} - \frac{i\beta_y}{\beta_\perp} (1 - \beta_z \cos \psi) \right]^2} = \\ &= \frac{\beta_x}{\beta_y} v - i \frac{\beta_y}{\beta_x} \mu.\end{aligned}$$

Следовательно, взяв реальную часть, получим:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\delta^2 - \alpha^2}} \right) = -\frac{1}{2v} \frac{\left(A + \mu \frac{B}{a} \right) \mu \frac{\beta_y}{\beta_x} - \frac{\beta_x}{\beta_y} v^2 \frac{B}{a}}{\left(\frac{\beta_y}{\beta_x} \mu \right)^2 + \left(\frac{\beta_x}{\beta_y} v \right)^2}.$$

Подставив в последнюю формулу выражения (13.24) – (13.26) получим следующий результат для числителя:

$$\frac{\beta_y}{\beta_\perp} \frac{(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_x^2 \sin^2 \psi}{(1 - \beta_z \cos \psi)} \left\{ 2(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - (1 + \beta_\perp^2 - \beta_z^2) \sin^2 \psi \right\}$$

для знаменателя:

$$-2 \frac{\beta_y}{\beta_\perp} \left[(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_x^2 \sin^2 \psi \right] \sqrt{(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_\perp^2 \sin^2 \psi}.$$

Таким образом, результат азимутального интегрирования выражения (13.23) записывается достаточно простой формулой:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 W}{\hbar d\omega \sin \psi d\psi} &= Z^2 \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\beta_\perp}{\sin \psi} \frac{2(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - (1 + \beta_\perp^2 - \beta_z^2) \sin^2 \psi}{\left[(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_\perp^2 \sin^2 \psi \right]^{3/2}} \times \\ &\times \exp \left(-\frac{4\pi h}{\lambda \beta_\perp} \sqrt{(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_\perp^2 \sin^2 \psi} \right).\end{aligned}\tag{13.27}$$

После интегрирования по энергии получаем следующее выражение:

$$\frac{dW}{d\psi} = Z^2 \frac{\alpha \hbar c}{2\pi} \frac{\beta_{\perp}^2}{2h} \frac{2(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - (1 + \beta_{\perp}^2 - \beta_z^2) \sin^2 \psi}{\left[(1 - \beta_z \cos \psi)^2 - \beta_{\perp}^2 \sin^2 \psi \right]^2}. \quad (13.28)$$

Для вычисления полных потерь энергии рассмотрим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} d\psi \frac{2(1 - a \cos \psi)^2 - (1 + b^2 - a^2) \sin^2 \psi}{\left[(1 - a \cos \psi)^2 - b^2 \sin^2 \psi \right]^2} = \\ & = \left(1 - \frac{1 - a^2 - b^2}{4b} \frac{\partial}{\partial b} \right) I(a, b), \end{aligned} \quad (13.29)$$

где

$$I(a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1 - a \cos \psi)^2 - b^2 \sin^2 \psi}.$$

При условии, что a и b действительны и $a^2 + b^2 < 1$, интеграл $I(a, b)$ легко берется через вычеты:

$$I(a, b) = \frac{2\pi}{1 - a^2} \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}.$$

Подставив $I(a, b)$ в (13.29), продифференцировав по b и положив $a = \beta_z$, $b = \beta_{\perp}$, получаем для полных потерь энергии:

$$W = \frac{3}{4} Z^2 \alpha \hbar c \beta^2 \frac{\gamma}{2h} \frac{\beta_{\perp}^2}{\gamma^{-2} \beta_z^2 + \beta_{\perp}^2}. \quad (13.30)$$

Для перпендикулярной геометрии ($\beta_z = 0$) из (13.30) следует формула

$$W_{\perp} = \frac{3}{4} Z^2 \alpha \beta^2 \hbar \omega_c, \quad (13.31)$$

не зависящая от угла наклона φ_0 , которая совпадает с ранее полученной формулой (13.14) с точностью γ^{-2} . Для другого частного случая – па-

параллельной геометрии ($\beta_x = 0$, $\beta_\perp = \beta_y$, $\beta_z/\beta_y = \text{ctg}\psi_0$) – выражение (13.30) сводится к следующему:

$$W_{\parallel} = \frac{3}{4} Z^2 \alpha \hbar c \beta^2 \frac{\gamma}{2h} \frac{\beta_y^2}{\beta_y^2 + \gamma^{-2} \beta_z^2} = W_{\perp} \frac{1}{1 + \gamma^{-2} \text{ctg}^2 \psi_0}. \quad (13.32)$$

Отсюда вытекает, что, вообще говоря, $W_{\perp} > W_{\parallel}$. При $\psi_0 \ll 1$ имеем

$$W_{\parallel} = W_{\perp} \frac{\psi_0^2}{\psi_0^2 + \gamma^{-2}}.$$

Таким образом, W_{\parallel} изменяется от W_{\perp} при $\psi_0 \sim 1$, до $W_{\perp}/2$, при $\psi_0 \sim \gamma^{-1}$. В ультрарелятивистском случае для не слишком малых углов пролёта частицы вблизи мишени ($\psi_0 \gg \gamma^{-1}$) с точностью до γ^{-2} имеем

$$W_{\parallel} = W_{\perp},$$

т. е. радиационные потери не зависят от угла ψ_0 . В ультрарелятивистском случае радиационные потери определяются зарядом частицы Z , ее лоренц-фактором γ и прицельным параметром h . Другими словами, в этом случае радиационные потери совпадают с потерями при пролёте той же частицы с тем же прицельным параметром вблизи полубесконечной идеальной полуплоскости, которая ориентирована перпендикулярно траектории частицы (т. е. совпадающей с проекцией исходной мишени на плоскость, перпендикулярную скорости частицы).

На рис. 13.4 показано двумерное распределение интенсивности ДИ для общего случая, вычисленное по формуле (13.22), где видно, что два максимума излучения совпадают с направлением импульса электрона и его зеркальным отражением от мишени (ДИ вперед и ДИ назад). Для умеренно-релятивистского случая $\gamma = 50$ максимум излучения совпадает с направлением импульса электрона с точностью лучшей, чем γ^{-1} .

На рис. 13.4,а) показано распределение для прицельного параметра $h=50$ мкм и длины волны $\lambda = 1500$ мкм, а на рис. 13.4,б) – для $h = 10$ мкм, $\lambda = 0,5$ мкм. Поскольку прицельный параметр и длина волны входят в показатель экспоненты в виде безразмерной переменной $z = \frac{4\pi h}{\gamma \beta \lambda}$,

то удобнее в дальнейшем использовать эту величину для расчета харак-

теристик ДИ. Так, для случая (рис. 13.4а) $z = 0,008$; для случая (см. рис. 24.4б) $z = 5$.

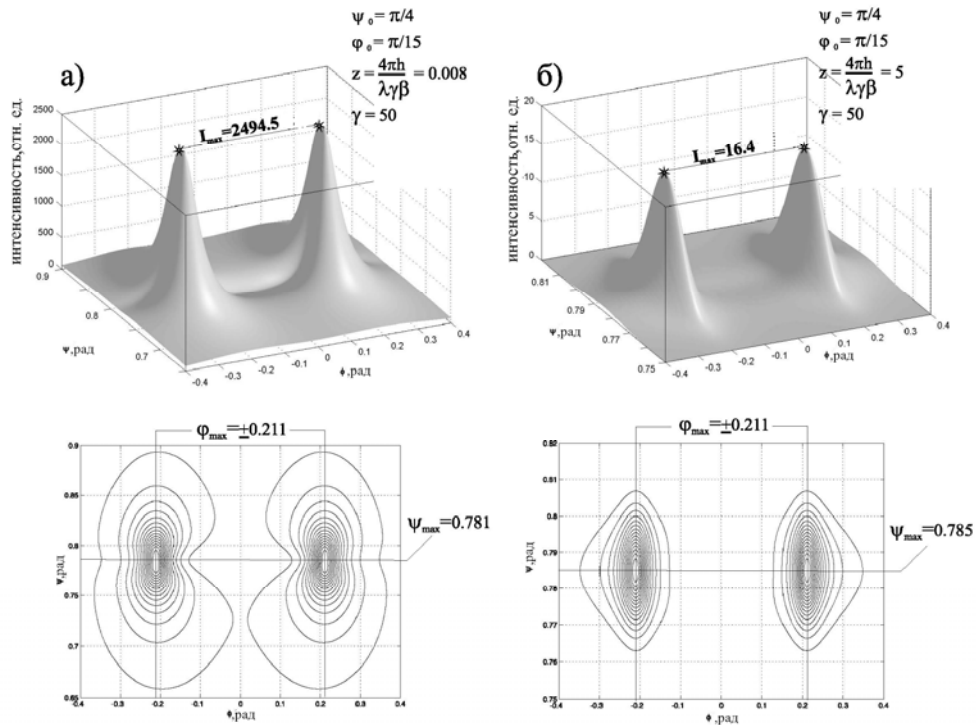


Рис. 13.4. Угловые распределения ДИ для различных значений безразмерной переменной $z = 4\pi h / \gamma\beta\lambda$ (вверху) и линии уровня (внизу)

Как видно из рисунка, максимумы в распределении незначительно смещены от направлений, соответствующих импульсу электрона (ψ_0, φ_0) и зеркального отражения ($\psi_0, -\varphi_0$):

$$\frac{\psi_0 - \psi_{\max}}{\psi_0} = 0,006, \quad \frac{\Delta\varphi}{\varphi_0} = 0,008 \quad \text{для } z = 0,008 \text{ и}$$

$$\frac{\psi_0 - \psi_{\max}}{\psi_0} = 0,001, \quad \frac{\Delta\varphi}{\varphi_0} = 0,0075 \quad \text{для } z = 5.$$

Очевидно, что с ростом γ положение максимумов будет более точно совпадать с направлением ψ_0, φ_0 (ДИ вперед) и $\psi_0, -\varphi_0$ (ДИ назад). Таким образом, как и в частных случаях, рассмотренных ранее [98.2], максимумы в общем случае совпадают с направлениями $\psi_0, \pm\varphi_0$ с точностью лучшей, чем γ^{-1} .

В полной аналогии со случаем перпендикулярной геометрии можно ввести новые угловые переменные:

$$\begin{aligned}\theta_x &= \psi - \psi_0, \\ \theta_y &= (\varphi \mp \varphi_0) \sin \psi_0.\end{aligned}\quad (13.33)$$

В последней формуле верхний знак соответствует ДИ вперед, нижний – ДИ назад. В большинстве статей переменные обозначаются именно так, т. е. переменная θ_x характеризует распределение вдоль края полуплоскости (рис. 13.5), поэтому в дальнейшем ось x будем направлять в этом направлении. В переменных (13.33) громоздкое выражение (13.22) значительно упрощается.

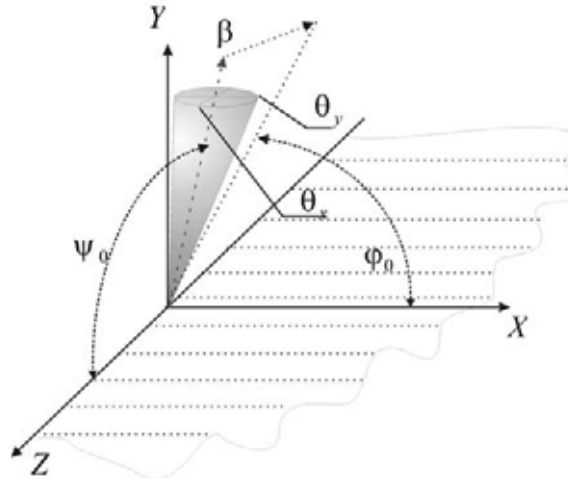


Рис. 13.5. Угловые переменные, описывающие конус испускания фотонов ДИВ в ультррелятивистском случае

Преобразуем показатель экспоненты в (13.22), выражая компоненты скорости через угол ψ_0 : $\beta_z = \beta \cos \psi_0$, $\beta_\perp = \beta \sin \psi_0$. Тогда подкоренное выражение в (13.22) можно записать в следующем виде (пренебрегая членами выше γ^{-2}):

$$\left[1 - \beta \cos(\psi_0 + \psi)\right] \left[1 - \beta \cos(\psi_0 - \psi)\right] = \sin^2 \psi_0 (\gamma^{-2} + \theta_x^2).$$

В используемом ультррелятивистском приближении в показателе экспоненты исчезает явная зависимость от угла ψ_0 :

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{4\pi h}{\lambda\beta_{\perp}}\sqrt{(1-\beta_z\cos\psi)^2-\beta_{\perp}^2\sin^2\psi}\right) \sim \\ & \sim \exp\left(-\frac{4\pi h}{\lambda\beta_{\perp}}\sqrt{1+\gamma^2\theta_x^2}\right) = \exp\left(-z\sqrt{1+\gamma^2\theta_x^2}\right). \end{aligned}$$

В последнем выражении выделена зависимость от длины волны через параметр $z = \frac{4\pi h}{\lambda\beta\gamma} = \frac{\omega}{\omega_c}$. Далее, разлагая числитель и знаменатель в (13.22) по степеням γ^{-1} и $\theta_{x,y}$, и сохраняя члены не выше γ^{-2} , получим выражение в точности совпадающее с выражением (13.11) (для $z = 1$):

$$\frac{d^2W}{\hbar d\omega d\Omega} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \exp\left(-\frac{4\pi h}{\gamma\lambda}\sqrt{1+\gamma^2\theta_x^2}\right) \frac{\gamma^{-2} + 2\theta_x^2}{(\gamma^{-2} + \theta_x^2)(\gamma^{-2} + \theta_x^2 + \theta_y^2)}. \quad (13.34)$$

Иначе говоря, выражение для интенсивности ДИ для общего случая в ультрарелятивистском приближении совпадает с формулой для интенсивности ДИ для перпендикулярной геометрии с той разницей, что угловые переменные θ_x, θ_y определены из соотношения (13.33).

14. Излучение при пролете заряда через щель в идеально-проводящем экране

Характеристики ДИ при пролёте заряженной частицы через щель в экране, перпендикулярном траектории частицы, рассматривались в работах [69.1, 97.3], причём в последней указывалось на возможность использования ДИ от щели для невозмущающей диагностики пучков.

Однако для экспериментальной реализации предложенного метода необходимо использовать ДИ назад (ДИН) от щели в наклонной мишени.

Поле ДИ при пролете заряда через щель шириной a в наклонном, идеально проводящем экране (рис. 14.1) можно рассматривать как суперпозицию полей ДИ от верхней и нижней полуплоскости [00.4]. В общем случае частица пролетает не по центру щели, например на расстоянии h_1 от верхнего края щели, и, соответственно, на расстоянии h_2 – от нижнего.

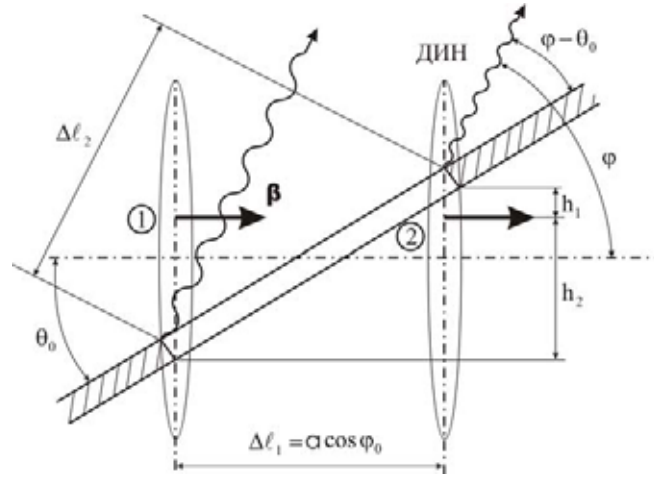


Рис. 14.1. Схема, иллюстрирующая определение фазовых сдвигов для дифракционного излучения назад на щели

Ясно, что интерференционные эффекты в результирующем излучении будут проявляться при условии

$$h_1 + h_2 = a \sin \theta_0 \leq \frac{\beta \gamma \lambda}{2\pi}, \quad (14.1)$$

т. е., главным образом, для ультрарелятивистских частиц. Именно этот случай будет рассматриваться ниже.

Обозначив через \mathbf{E}_B (\mathbf{E}_H) поле ДИ от верхней (нижней) полуплоскости, мы запишем поле ДИ от щели в общем виде следующим образом:

$$\mathbf{E}_{\text{slit}} = \mathbf{E}_B \exp(i\varphi_B) + \mathbf{E}_H \exp(-i\varphi_H). \quad (14.2)$$

Выражения для фазовых сдвигов φ_B , φ_H можно получить исходя из описания процесса ДИ от щели, как формирующегося только на краях полуплоскостей независимо. Как показано в работе [00.5], на расстояниях, превышающих $\gamma^2 \lambda$, источник может рассматриваться как точечный (см. главу 8). Таким образом, для оптического ДИ, возникающего при пролете электрона через макроскопическую щель с шириной большей, чем длина волны, простое соотношение для сдвига фаз между излучением на нижнем и верхнем краю щели можно получить из элементарного построения (рис. 14.1). ДИ на краю нижней полуплоскости формируется в момент, когда заряд находится в точке 1, тогда как ДИ на верхней полуплоскости – в момент, соответствующий прохождению

заряда через точку 2. Временной интервал между этими волнами Δt_2 зависит от ширины щели a , угла наклона θ_0 и угла излучения φ :

$$\Delta t_2 = \frac{a}{c} \cos(\varphi - \theta_0).$$

С учетом времени, необходимого для перемещения заряда из точки 1 в точку 2 со скоростью β : $\Delta t_1 = \frac{\Delta l_1}{\beta c} = \frac{a \cos \theta_0}{\beta c}$, получаем соотношение для разности фаз для ДИ с длиной волны λ , испущенного обеими полуплоскостями:

$$\varphi_{\text{slit}} = \frac{2\pi a}{\lambda} \left(\cos(\varphi - \theta_0) - \frac{\cos \theta_0}{\beta} \right). \quad (14.3)$$

Выражая ширину щели a через прицельные параметры h_1 и h_2 : $a = \frac{h_1 + h_2}{\sin \theta_0}$, вместо (14.3) получим сдвиг фаз φ_{slit} как сумму двух фазовых сдвигов:

$$\varphi_{\text{slit}} = \varphi_B + \varphi_H,$$

где φ_B (φ_H) – сдвиг фаз для излучения от верхнего (нижнего) края мишени, вычисленный относительно траектории частицы:

$$\varphi_B = \frac{2\pi h_1}{\lambda \sin \theta_0} \left(\cos(\varphi - \theta_0) - \frac{\cos \theta_0}{\beta} \right),$$

$$\varphi_H = \frac{2\pi h_2}{\lambda \sin \theta_0} \left(\cos(\varphi - \theta_0) - \frac{\cos \theta_0}{\beta} \right).$$

Вводя угловую переменную $\theta_y = \varphi - 2\theta_0$ и пренебрегая членами $\sim \gamma^{-2}$ по сравнению с единицей, можно получить более простые выражения:

$$\varphi_B \sim -\frac{2\pi h_1}{\lambda} \theta_y, \quad \varphi_H \sim -\frac{2\pi h_2}{\lambda} \theta_y. \quad (14.4)$$

Как было показано в предыдущем параграфе, в ультрарелятивистском приближении выражения для полей ДИ зависят от переменных θ_x, θ_y одинаковым образом для любой геометрии, поэтому для простоты будем рассматривать перпендикулярную геометрию ($\psi_0 = \pi/2$).

Для пролета ультрарелятивистской частицы вблизи экрана, перпендикулярного скорости частицы в геометрии, показанной на рис. 13.1. ($\varphi_0 = \pi/2$ – нижняя полуплоскость), выражения (13.20) для ДИ назад (ДИН), в пренебрежении членами $\sim \gamma^{-2}$, записываются в виде

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{ie}{4\pi^2} \frac{\theta_x}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2}} \frac{\exp\left[\frac{-2\pi h_2}{\gamma\lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta_x^2}\right]}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} + i\theta_y}, \\
 E_2 &= \frac{e}{4\pi^2} \frac{\exp\left[-\frac{2\pi h_2}{\gamma\lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta_x^2}\right]}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} + i\theta_y}.
 \end{aligned} \tag{14.5}$$

Следует указать, что в ультрарелятивистском приближении компоненты поля ДИН для наклонной полуплоскости совпадают с полученными формулами, с той разницей, что углы θ_x, θ_y отсчитываются от направления зеркального отражения.

Поле дифракционного излучения на верхней полуплоскости получается из поля для нижней после процедуры комплексного сопряжения с одновременным изменением знака и при замене $h_2 \rightarrow h_1$. Тогда с учётом фазовых сдвигов (14.4) окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 E_{1,\text{slit}} &= \frac{ie}{4\pi^2} \frac{\theta_x}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2}} \left(\frac{\exp\left[-\frac{2\pi h_1}{\lambda} \left(\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} - i\theta_y\right)\right]}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} - i\theta_y} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\exp\left[-\frac{2\pi h_2}{\lambda} \left(\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} + i\theta_y\right)\right]}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} + i\theta_y} \right),
 \end{aligned}$$

$$E_{2,\text{slit}} = \frac{e}{4\pi^2} \left(-\frac{\exp\left[-\frac{2\pi h_1}{\lambda} \left(\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} - i\theta_y\right)\right]}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} - i\theta_y} + \frac{\exp\left[-\frac{2\pi h_2}{\lambda} \left(\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} + i\theta_y\right)\right]}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} + i\theta_y} \right). \quad (14.6)$$

Полученные выражения для ДИ назад от наклонной щели полностью совпадают с результатом М.Л. Тер-Микаеляна [69.1] для пролета релятивистской частицы через щель в экране, перпендикулярном скорости частицы (см. формулы (31.18), (31.19) в цитируемой монографии). Этого и следовало ожидать, поскольку в используемом приближении отсутствует явная зависимость от угла наклона экрана φ_0 .

В работе [01.2] Р.Фиорито и Д. Рул рассматривали задачу генерации ДИ на щели в наклонном неидеальном экране, исходя из модели дифракции пакета реальных волн, которым аппроксимировалось почти поперечное поле релятивистского заряда. В пренебрежении неидеальностью экрана (т. е. при замене коэффициентов Френеля на единицу в формулах цитируемой статьи) полученные в [01.2] результаты совпадают с выражением [14.6].

Следует отметить, что в пределе $h_1 \rightarrow 0, h_2 \rightarrow 0$ (т. е. при устремлении ширины щели к нулю) формулы [14.6] переходят в известные выражения для полей переходного излучения на бесконечной границе идеальный проводник – вакуум, как и следовало ожидать:

$$E_1 = \frac{ie}{2\pi^2} \frac{\theta_x}{\gamma^{-2} + \theta_x^2 + \theta_y^2},$$

$$E_2 = \frac{ie}{2\pi^2} \frac{\theta_y}{\gamma^{-2} + \theta_x^2 + \theta_y^2}. \quad (14.7)$$

Для вычисления спектрально-угловой плотности ДИ на щели будем использовать безразмерные угловые переменные: $t_x = \gamma \theta_x$, $t_y = \gamma \theta_y$. Как и ранее, спектр ДИ будем описывать через переменную $z = \omega/\omega_c$, где характерная частота

$$\omega_c = \frac{c\gamma}{2a \sin \theta_0} \quad (14.8)$$

зависит от ширины проекции щели на плоскость, перпендикулярную скорости частицы ($a \sin \theta_0 = h_1 + h_2$). В отличие от ДИ, генерируемого на полуплоскости, характерная частота ДИ для щели определяется не прицельным параметром, а проекцией ширины щели на плоскость, перпендикулярную скорости частицы. Несимметричный пролет частицы относительно центра щели характеризуется параметром

$$l = \frac{h_1}{a \sin \theta_0} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{h_2}{a \sin \theta_0}. \quad (14.9)$$

При пролете по центру щели $l = 0$, тогда как для траекторий, касающихся краёв щели, $l = \pm 0,5$. Т. е. интервал изменения параметра l :

$$-0,5 \leq l \leq 0,5.$$

Из формул легко получить спектрально-угловое распределение дифракционного излучения вперед:

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{\hbar d\omega d\Omega} &= 4\pi^2 (|E_1|^2 + |E_2|^2) = \frac{\alpha}{2\pi^2} \gamma^2 \frac{\exp(-z\sqrt{1+t_x^2})}{(1+t_x^2)(1+t_x^2+t_y^2)} \times \\ &\times \left\{ (1+2t_x^2) \operatorname{ch}(2zl\sqrt{1+t_x^2}) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{(1+t_x^2+t_y^2)} \left[(1+t_x^2-t_y^2) \cos(zt_y) - 2t_y\sqrt{1+t_x^2} \sin(zt_y) \right] \right\}. \quad (14.10) \end{aligned}$$

Здесь используются переменные $t_{x,y} = \gamma \theta_{x,y}$.

На рис. (14.2, 14.3) представлены спектрально-угловые распределения ДИ на щели для разных значений параметра z . Можно отметить, что в случае симметричного прохождения пучка частиц через щель, минимум излучения приходится, как и в случае переходного излучения, на угол $\theta_x = \theta_y = 0$, а максимум на $\theta_x \approx \theta_y \approx \gamma^{-1}$. Как следует из приведенных выше распределений при $z \geq 1$, в плоскости, перпендикулярной плоскости щели, наблюдается яркая интерференционная картина (рис. 14.2),

затухающая с уменьшением спектральной переменной z (рис. 14.3). Интересно также отметить, что при значении $z \geq 1$ распределения ДИ в перпендикулярных плоскостях (при $t_x = 0$ и $t_y = 0$) не являются симметричными, тогда как при устремлении $z \rightarrow 0$ картина распределения ДИ приобретает вид, все более схожий с аналогичным распределением переходного излучения, которое характеризуется азимутальной симметрией.

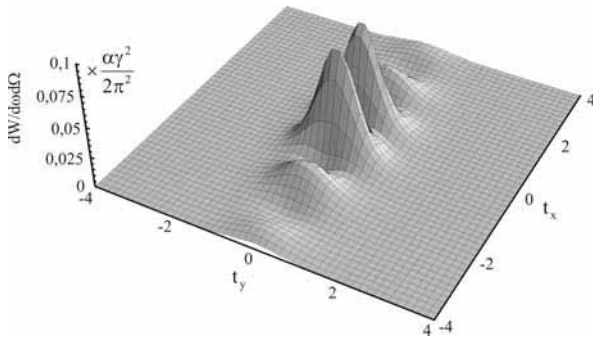


Рис. 14.2. Двумерное распределение ДИ для симметричного пролета по центру щели, при $z = 2,5$

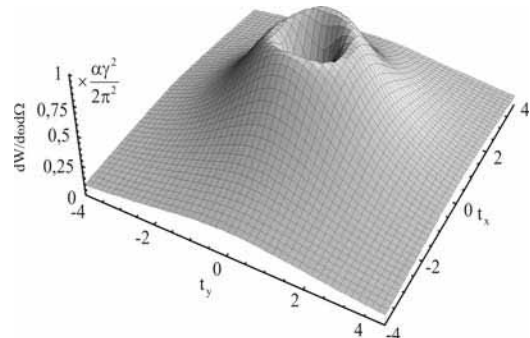


Рис. 14.3. Двумерное распределение ДИ для симметричного пролета по центру щели, при $z = 0,2$

Действительно, как было показано ранее, при условии $z \equiv 0$ ($h_1 = h_2 = 0$, т. е. ширина щели равна нулю) характеристики ДИ и ПИ являются идентичными. С другой стороны, при $\lambda\gamma \gg a$, $a \neq 0$, $z = \frac{2\pi a \sin \theta_0}{\lambda\gamma} \rightarrow 0$ характеристики ДИ вновь становятся аналогичными ПИ.

В случае $\lambda\gamma \leq a$ напряженность поля ДИ экспоненциально убывает с ростом a , в отличие от случая $\lambda\gamma \geq a$, когда напряженность поля является практически постоянной на всем интервале изменения a , т. е. фактически имеем одинаковую картину при пересечении частицей экрана (ПИ) и при пролете частицы через щель (ДИ).

Радиационные потери легко находятся из выражения, если предварительно проинтегрировать это выражение по частоте:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \hbar \int_0^{\infty} d\omega \frac{d^2W}{\hbar d\omega d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi^2} \gamma^2 \hbar \omega_c \frac{1}{\sqrt{(1+t_x^2)(1+t_x^2+t_y^2)}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1+2t_x^2}{(1-4l^2)(1+t_x^2)} - \frac{1+t_x^2-3t_y^2}{(1+t_x^2+t_y^2)^2} \right\}.$$

Проинтегрировав полученный результат по угловым переменным $d\Omega = d\theta_x d\theta_y = \gamma^{-2} dt_x dt_y$, получим полную интенсивность дифракционного излучения (радиационные потери):

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} dt_x \int_{-\infty}^{\infty} dt_y \frac{dW}{d\Omega} = \frac{\alpha \hbar \omega_c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt_x \frac{1+2t_x^2}{(1+t_x^2)^2 (1-4l^2)} = \frac{3}{4} \frac{\alpha \hbar \omega_c}{1-4l^2}. \quad (14.11)$$

Как следует из полученной формулы, при пролете по центру щели $\left(l = 0, h_1 = h_2 = \frac{a \sin \theta_0}{2} \right)$ радиационные потери соответствуют удвоенному значению потерь для одного края полуплоскости, как и следовало ожидать. При $l \rightarrow \pm 0,5$ (пролёт по одному из краев щели, т. е. $h_1 \rightarrow 0$ или $h_2 \rightarrow 0$) выражение (14.11) обращается в бесконечность. Формально это связано с тем, что, как видно из (14.10), при $h_{1,2} \rightarrow 0$ ($l \rightarrow \pm 0,5$) в спектральной плотности излучения появляются слагаемые, не зависящие от ω . Поэтому формальное интегрирование по частоте от 0 до ∞ дает расходящийся результат. Абсолютно аналогичная ситуация возникает при расчете характеристик ПИ от идеального проводника. Следует заметить, что для реальных мишеней (например, из металлических фольг) в случае $\omega \geq \omega_p$ (ω_p – плазменная частота мишени) приближение идеального проводника не работает. Учет дисперсии диэлектрической проницаемости на высоких частотах приводит к конечности вклада высокочастотной части спектра в полные потери (более подробно см. главу 4, посвященную ДИ на частотах, которые выше плазменной).

На рис. 14.4 показана зависимость интенсивности ДИ от параметра l для разных длин волн. Точно так же, как и для полных радиационных потерь, при пролете по центру щели ($l = 0$) наблюдается минимум, тогда как при приближении к краю щели интенсивность ДИ возрастает.

Этот же факт иллюстрируется на рис. 14.5, где показана частотная зависимость спектрально-угловой плотности для $l = 0$ и $l = 0,4$.

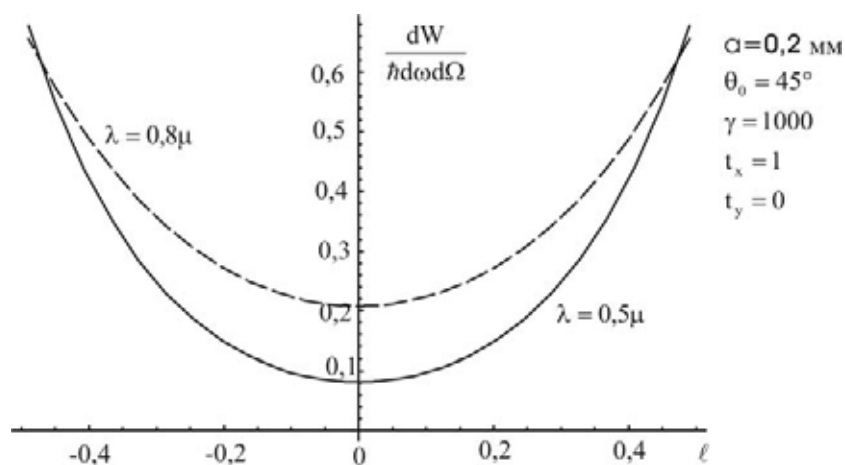


Рис. 14.4. Зависимость выхода ДИ с различными длинами волн от поперечной координаты пролёта электрона через щель

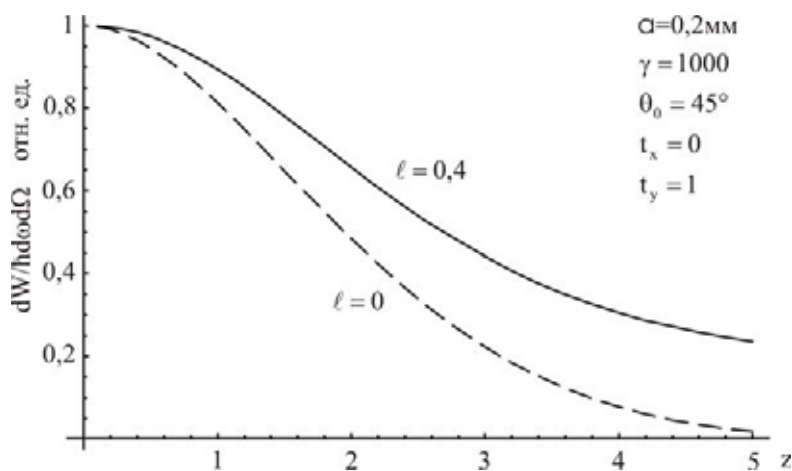


Рис. 14.5. Спектр ДИ для различных значений параметра ℓ для фиксированных углов наблюдения

Наконец, на рис. 14.6. показан спектр ДИ, полученный при интегрировании спектрально-угловой плотности (см. выражение) по фиксированному телесному углу ($-t_{x \max} \leq t_x \leq t_{x \max}$, $-t_{y \max} \leq t_y \leq t_{y \max}$).

В отличие от ДИ на полуплоскости, интерференционные эффекты для суперпозиции полей от обоих краев щели приводят к нетривиальным зависимостям характеристик ДИ от расстояния между траекторией частицы и центром щели. Зависимость угловых распределений ДИ на

щели от этого параметра позволяет успешно использовать ДИ для определения поперечного размера пучка, пролетающего через щель (подробнее см. гл. 9).

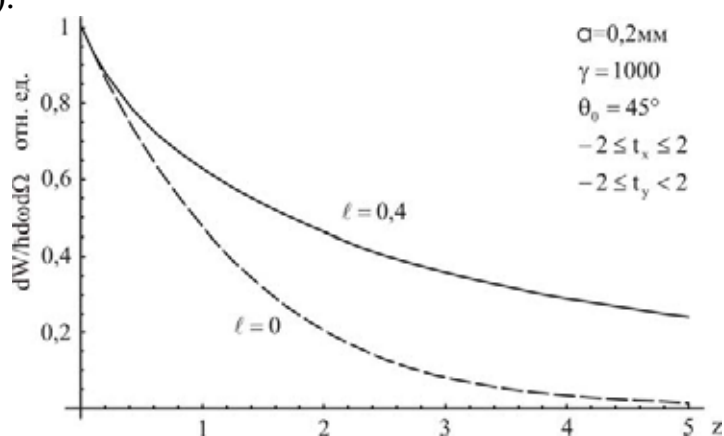


Рис. 14.6. То же самое для конечной угловой апертуры

Для расширения диагностических возможностей в работе [05.3] предложено использовать интерференционную картину ДИ (интерферограмму), формируемую двумя лучами дифракционного излучения, один из которых, генерируется на фиксированной половине щели, через которую проходит пучок электронов, а другой – на подвижной половине (рис. 14.7).

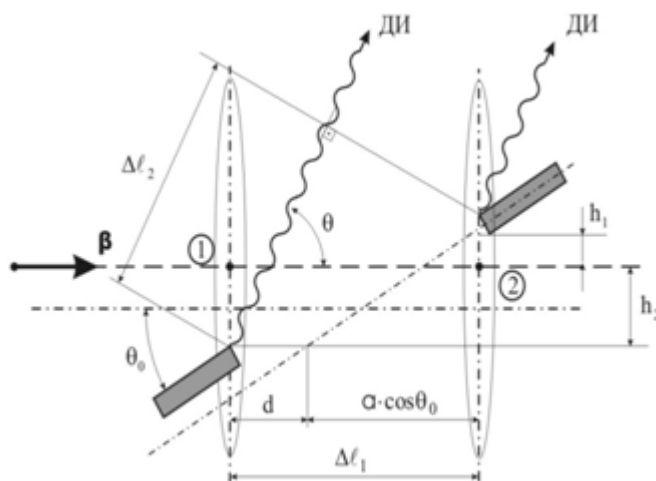


Рис. 14.7. Схема генерации ДИ назад при сдвиге половин щелевой мишени на расстояние d

В этом случае фазовые сдвиги φ_H, φ_B (см. выражение (14.2)) можно получить исходя из наглядного описания процесса излучения на ще-

ли, как формирующегося только на краях полуплоскостей, поскольку будем рассматривать излучение в «дальней» зоне. Будем использовать следующие обозначения (см. рис. 14.1, 14.7): a – ширина щели, образованная двумя половинками мишени, расположенными в одной плоскости; d – сдвиг нижней (подвижной) половины мишени относительно этого положения; θ_0 – угол наклона мишени относительно импульса электрона; h_1, h_2 – расстояние между траекторией электрона и верхним (нижним) краем щели ($h_1 + h_2 = a \sin \theta_0$).

ДИ формируется на краю нижней половины мишени, когда электрон проходит точку 1, тогда как на верхнем краю мишени ДИ формируется в момент, когда электрон находится в положении 2. Несложное геометрическое построение дает следующий результат:

$$\Delta\varphi = \varphi_B + \varphi_H = \frac{2\pi}{\lambda} \left[a \cos(\theta - \theta_0) + d \cos \theta - \frac{a \cos \theta_0 + d}{\beta} \right]. \quad (14.12)$$

в θ – угол вылета фотона с длиной волны λ , $\beta = v/c$ – скорость электрона в единицах скорости света. Введем угол $\theta_y = \theta - 2\theta_0$, который отсчитывается от направления зеркального отражения, причем $\theta_y \sim \gamma^{-1}$. Тогда, в пренебрежении членами $\sim \gamma^{-2}$, вместо (14.12) можно записать:

$$\Delta\varphi = \varphi_B + \varphi_H = -\frac{2\pi(h_1 + h_2)}{\lambda} \left[\theta_y + 2\frac{d}{a} (\sin \theta_0 + \theta_y \cos \theta_0) \right]$$

или

$$\varphi_{B(H)} = -\frac{2\pi h_{(2)}}{\lambda} \left[\theta_y + 2\frac{d}{a} (\sin \theta_0 + \theta_y \cos \theta_0) \right]. \quad (14.13)$$

В этом же приближении, используя формулы (14.6) и (14.13), можно получить формулы для компонент поля ДИ на мишени в целом:

$$\begin{aligned}
E_1 = \frac{ie}{4\pi^2} \frac{\theta_x}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2}} & \left\{ \frac{\exp \left[-\frac{2\pi h_1}{\lambda} \left(\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} + i\theta_y \left(1 + \frac{2d \cos \theta_0}{a} \right) + i \frac{2d \sin \theta_0}{a} \right) \right]}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} + i\theta_y} \right\} + \\
& + \left\{ \frac{\exp \left[-\frac{2\pi h_2}{\lambda} \left(\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} - i\theta_y \left(1 + \frac{2d \cos \theta_0}{a} \right) - i \frac{2d \sin \theta_0}{a} \right) \right]}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} - i\theta_y} \right\}, \\
E_2 = \frac{e}{4\pi^2} & \left\{ -\frac{\exp \left[-\frac{2\pi h_1}{\lambda} \left(\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} + i\theta_y \right) \left(1 + \frac{2d \cos \theta_0}{a} \right) + i \frac{2d \sin \theta_0}{a} \right]}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} + i\theta_y} \right\} + \\
& + \left\{ \frac{\exp \left[-\frac{2\pi h_2}{\lambda} \left(\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} - i\theta_y \right) \left(1 + \frac{2d \cos \theta_0}{a} \right) - i \frac{2d \sin \theta_0}{a} \right]}{\sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2} - i\theta_y} \right\}. \quad (14.14)
\end{aligned}$$

Используя формулы (14.14) для стандартной процедуры вычисления спектрально-угловой плотности можно получить зависимость интенсивности ДИ от сдвига d . Для пролета электрона по центру щели $\left(h_1 = h_2 = \frac{a \sin \theta_0}{2} \right)$ эта зависимость может быть представлена формулой [05.3]:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 W}{\hbar d \omega d \Omega} &= \frac{\alpha \gamma^2}{2\pi^2} \frac{1 + 2t_x^2 - \cos(2\beta + \chi)}{(1 + t_x^2)(1 + t_x^2 + t_y^2)} \exp \left(-\frac{2\pi a \sin \theta_0 \sqrt{1 + t_x^2}}{\gamma \lambda} \right), \\
2\beta &= \frac{2\pi a \sin \theta_0}{\gamma \lambda} \left[t_y \left(1 + \frac{2d}{a} \cos \theta_0 \right) + \frac{2\gamma d}{a} \sin \theta_0 \right], \\
\chi &= \operatorname{arctg} \frac{2t_y \sqrt{1 + t_x^2}}{1 + t_x^2 - t_y^2}. \quad (14.15)
\end{aligned}$$

Выход фотонов ДИ в направлении зеркального отражения ($t_x = t_y = 0$) описывается простой формулой:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega}(t_x = t_y = 0) = \frac{\alpha\gamma^2}{\pi^2} \exp\left(-\frac{2\pi a \sin \theta_0}{\lambda\gamma}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi d \sin^2 \theta_0}{\lambda}\right). \quad (14.16)$$

Как и следовало ожидать, в этом случае для $d = 0$ (щель в плоской мишени) выход ДИ строго равен нулю. Однако для $d = \frac{\lambda}{4\sin^2 \theta_0}$ выход достигнет максимального значения:

$$\frac{d^2W_{\max}}{d\omega d\Omega} = \frac{\alpha\gamma^2}{\pi^2} \exp\left(-\frac{2\pi a \sin \theta_0}{\lambda\gamma}\right) = \frac{\alpha\gamma^2}{\pi^2} \exp(-z).$$

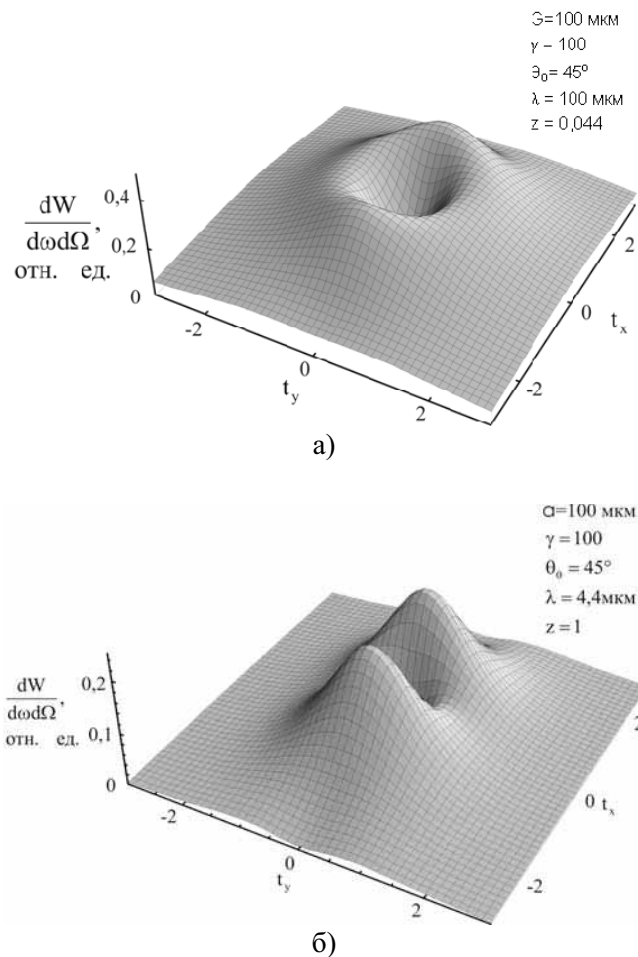


Рис. 14.8. Двумерное угловое распределение ДИ назад от плоской щелевой мишени

На рис. 14.8 приведены угловые распределения дифракционного излучения для случая $\gamma = 100$, $\theta_0 = 45^\circ$, $d = 0$, при $z = 0,04$ (рис. 14.8,а) и для $z = 1$ (см. рис. 14.8,б). Можно отметить, что в первом случае наблюдается распределение, близкое к распределению фотонов переходного излучения (со слабым нарушением азимутальной симметрии), тогда как во втором случае распределение обладает ярко выраженными максимумами на линии $t_x = 0$.

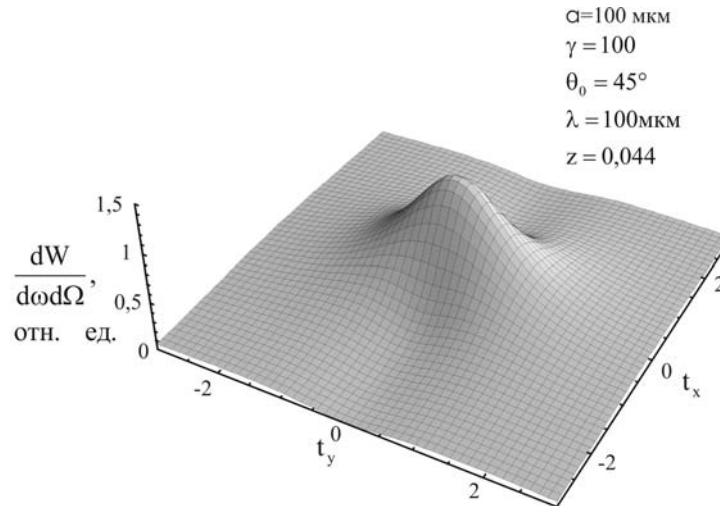
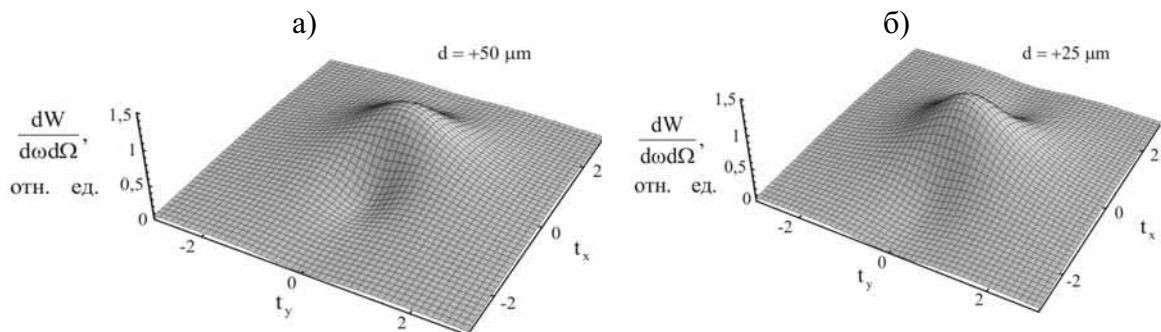


Рис. 14.9. Двумерное угловое распределение ДИ назад при сдвиге половин целевой мишени на расстоянии, равное половине длин волн для $z = 0,044$

На рис. 14.9 показаны угловые распределения дифракционного излучения для ненулевого значения $d = 50$ мкм при следующих параметрах: $\gamma = 100$, $a = 100$ мкм, $\theta_0 = 45^\circ$, $\lambda = 100$ мкм. Как отмечалось выше, при $d = \frac{\lambda}{4 \sin^2 \theta_0} = \frac{\lambda}{2}$ в распределении наблюдается единственный максимум при $t_x = t_y = 0$.



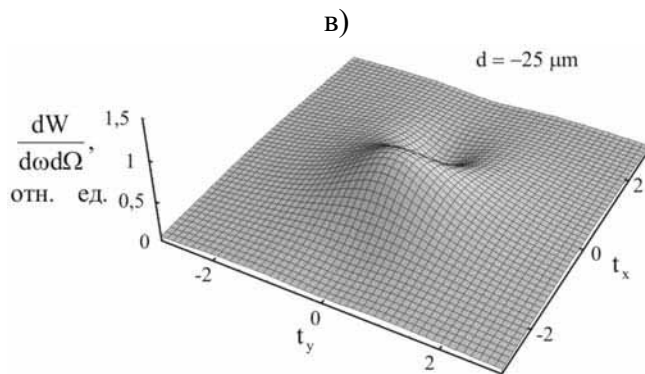


Рис. 14.10. Эволюция углового распределения ДИ назад при измерении величины сдвига d . Остальные параметры те же, что на рис. 14.9

На рис. 14.10 показана эволюция углового распределения дифракционного излучения для тех же параметров, при изменении расстояния d от $+50$ мкм до -25 мкм. Следует отметить, что при $d = 25$ мкм наблюдается асимметричное распределение по углу θ_y , причем форма распределения не изменяется при замене $d \rightarrow -d$, $t_y \rightarrow -t_y$.

Как показано на последних рисунках, дополнительная степень свободы (сдвиг полуплоскостей, образующих щель) приводит к добавочным интерференционным эффектам в ДИ на щели, которые могут быть использованы для диагностики длины электронного сгустка.

15. Поляризационные характеристики дифракционного излучения

В отличие от переходного излучения (ПИ), для которого характерна высокая степень азимутальной симметрии (в особенности для ультрарелятивистских частиц), в случае ДИ, генерируемого частицей, пролетающей вблизи полуплоскости, азимутальная симметрия отсутствует. Поэтому следует ожидать, что поляризационные характеристики ДИ будут существенным образом отличаться от аналогичных характеристик ПИ.

Прежде чем вычислять поляризационные характеристики ДИ рассмотрим поляризацию переходного излучения.

Если ультрарелятивистский заряд пересекает границу раздела между вакуумом и идеально проводящей средой, то собственное поле заряда «отражается» от поверхности раздела в конусе углов вблизи направления зеркального отражения. В статье [69.3] в рамках классической электродинамики были найдены поля переходного излучения, из которых легко находятся поляризационные характеристики ПИ.

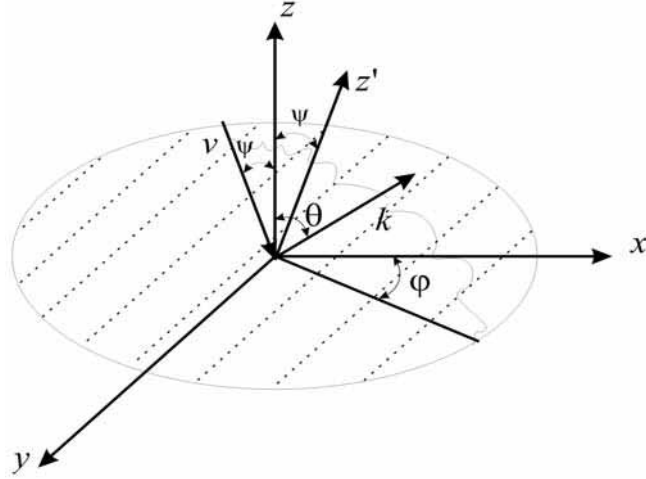


Рис. 15.1. Геометрия задачи при расчете поляризационных характеристик переходного излучения назад

На рис. 15.1 показана геометрия задачи и используемые угловые переменные. Запишем, следуя [69.3], выражения для компонент напряженности электрического поля ПИ:

$$\begin{aligned}
 E_x &= \omega^2 \left[-\Pi_z \cos \theta_x \cos \theta_z - \Pi_y \cos \theta_x \cos \theta_y \right], \\
 E_y &= \omega^2 \left[-\Pi_z \cos \theta_y \cos \theta_z - \Pi_y \sin^2 \theta_y \right], \\
 E_z &= \omega^2 \left[-\Pi_z \sin^2 \theta_x - \Pi_y \cos \theta_y \cos \theta_x \right].
 \end{aligned} \tag{15.1}$$

В (15.1) ω – частота ПИ, через $\cos \theta_{x,y,z}$ обозначены косинусы углов между волновым вектором \mathbf{k} и осями координат:

$$\mathbf{k} = \omega \{ \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z \} = \omega \{ \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \}.$$

Компоненты вектора Герца Π_y, Π_x для границы раздела между вакуумом и идеально проводящей средой записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \Pi_y &= -C_0 (1 - \beta_y \cos \theta_y), \\
 \Pi_z &= -C_0 \beta_y \cos \theta_z, \\
 C_0 &= \frac{\exp(i\omega R)}{R} \frac{e\beta_z}{\pi\omega^2} \frac{1}{(1 - \beta_y \cos \theta_y)^2 - \beta_z^2 \cos^2 \theta_z}.
 \end{aligned} \tag{15.2}$$

В (15.2) $\beta_{y,z}$ – компоненты вектора скорости частицы (см. рис. 15.1)

$$\boldsymbol{\beta} = \beta \{0, \sin \psi_0, \cos \psi_0\}.$$

Для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned} E_x &= C_0 \omega^2 \cos \theta_x \cos \theta_z, \\ E_y &= C_0 \omega^2 (\cos \theta_y \cos \theta_z - \beta_y \cos \theta_z), \\ E_z &= C_0 \omega^2 (-\sin^2 \theta_z + \beta_y \cos \theta_y). \end{aligned} \quad (15.3)$$

Дальнейшие вычисления будем проводить в более удобной системе координат (штрихованной), где ось z' направлена вдоль направления зеркального отражения. Штрихованная система получается из исходной поворотом вокруг оси x на угол $\pi - \psi_0$. Компоненты любого вектора a_i преобразуются стандартной матрицей поворота:

$$a_{x'} = a_x, \quad a_{y'} = -a_y \cos \psi - a_z \sin \psi, \quad a_{z'} = a_y \sin \psi - a_z \cos \psi.$$

Выбор системы связан с тем фактом, что ПИ «назад» для идеально проводящей среды сконцентрировано в конусе углов $\sim \gamma^{-1}$ вблизи направления зеркального отражения. В новой системе будем использовать переменные $\theta_{x'}, \theta_{y'} \sim \gamma^{-1}$, связанные с углами θ, φ в исходной системе следующими соотношениями:

$$\theta_{x'} = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sin \psi_0, \quad \theta_{y'} = \theta - (\pi - \psi_0). \quad (15.4)$$

Таким образом, в штрихованной системе с точностью до членов $\sim \gamma^{-2}$ можно получить:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \{k_{x'}, k_{y'}, k_{z'}\} = \omega \left\{ \theta_{x'}, \theta_{y'}, 1 - \frac{\theta_{x'}^2 + \theta_{y'}^2}{2} \right\}, \\ \mathbf{E} &= \{E_{x'}, E_{y'}, E_{z'}\} = -C_0 \omega^2 \cos \psi_0 \{ \theta_{x'}, \theta_{y'}, -\theta_{x'}^2 - \theta_{y'}^2 \}. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Через переменные (15.4) в ультрарелятивистском приближении величина C_0 выражается следующим образом:

$$C_0 = \frac{\exp(i\omega R)}{R} \frac{e\beta_z}{\pi\omega^2} \frac{1}{(1 - \beta_y \cos\theta_y - \beta_z \cos\theta_z)(1 - \beta_y \cos\theta_y + \beta_z \cos\theta_z)} =$$

$$= \frac{\exp(i\omega R)}{R} \frac{e\beta \cos\psi_0}{\pi\omega^2} \frac{1}{\cos^2\psi_0 (\gamma^{-2} + \theta_{x'}^2 + \theta_{y'}^2)}.$$

С учетом полученного выражения из (15.5) легко вычисляется спектрально-угловая плотность переходного излучения:

$$\frac{d^2W}{\hbar d\omega d\Omega} = R^2 |\mathbf{E}|^2 = R^2 |C_0|^2 \omega^4 \cos^2\psi_0 (\theta_{x'}^2 + \theta_{y'}^2) =$$

$$= \frac{\alpha}{\pi^2} \frac{\theta_{x'}^2 + \theta_{y'}^2}{(\gamma^{-2} + \theta_{x'}^2 + \theta_{y'}^2)^2}. \quad (15.6)$$

Поляризационные характеристики любого излучения (в т. ч. ПИ) должны вычисляться в системе, где одна из осей совпадает с импульсом фотона. Однако, с точностью $\sim \gamma^{-1}$ для этой цели можно использовать штрихованную систему (фиксированную), в которой импульс фотона составляет угол $\sim \gamma^{-1}$ с осью z' . Как следует из (15.5), в этой системе $E_{z'}/E_{x',y'} \sim \gamma^{-1}$, $\mathbf{E}\mathbf{k} \sim \gamma^{-4}$.

Наиболее полным образом поляризация излучения характеризуется тремя параметрами Стокса:

$$\xi_1 = \frac{E_x^* E_y + E_x E_y^*}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, \quad \xi_2 = i \frac{E_x^* E_y - E_x E_y^*}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, \quad \xi_3 = \frac{|E_x|^2 - |E_y|^2}{|E_x|^2 + |E_y|^2}. \quad (15.7)$$

Подставляя в (15.7) выражения для компонент поля ПИ, из (15.5) получим:

$$\xi_1 = \frac{2\theta_x \theta_y}{\theta_x^2 + \theta_y^2} = \sin 2\chi,$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= 0, \\
\xi_3 &= \frac{\theta_x^2 - \theta_y^2}{\theta_x^2 + \theta_y^2} = \cos 2\chi, \\
\chi &= \operatorname{arctg} \frac{\theta_y}{\theta_x}.
\end{aligned} \tag{15.8}$$

Другими словами, в рассматриваемом случае (бесконечная граница раздела вакуум – идеальный проводник) поляризация ПИ является линейной и не зависит от угла наклона мишени ψ_0 . Степень линейной поляризации $P_l = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2} = 1$ не зависит от угла вылета фотона ПИ [58.2]. Плоскость поляризации проходит через направление зеркального отражения и импульс фотона, т. е. линейная поляризация является «радикальной», подобно поляризации черенковского излучения.

Для вычисления параметров Стокса ДИ частицы, пролетающей вблизи наклонной полуплоскости, выбираем поляризационные орты в виде (13.6). Следует отметить, что орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ определены в плоскости, перпендикулярной единичному вектору $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$. В общем случае поляризационные характеристики ДИ вычисляются именно в этой системе координат, которая не является фиксированной и никак не связана с системой xuz , определенной относительно экрана, показанной на рис. 15.1.

Однако в ультрарелятивистском случае, когда углы вылета фотонов ДИ сконцентрированы в двух узких конусах с углом при вершине $\sim \gamma^{-1}$ (ДИВ и ДИН) разброс векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ относительно их средних значений $\langle \mathbf{e}_1 \rangle, \langle \mathbf{e}_2 \rangle$ также будет порядка γ^{-1} . Для перпендикулярной геометрии вектор $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ направлен вдоль оси z , вектор $\langle \mathbf{n} \rangle$ направлен вдоль скорости частицы (ДИ вперед), либо вдоль направления зеркального отражения (ДИ назад), а вектор $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$ перпендикулярен им обоим. В этом случае с точностью $\sim \gamma^{-1}$ можно говорить об угле поворота плоскости линейной поляризации ДИ относительно плоскости, проведенной через $\langle \mathbf{n} \rangle$ и край мишени.

Используя выражение для компонент поля ДИ (13.7) вычисление параметров Стокса не представляет труда [03.5]:

$$\xi_1 = \frac{\alpha_0^2 \sin \varphi \cos \psi_0}{D},$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= -\frac{\beta\alpha_0 \sin\varphi \sin\theta_0 \sin\psi_0 \cos\psi_0}{D}, \\
\xi_3 &= \frac{\cos^2\psi_0 \cos^2(\varphi/2)[1 - \beta \sin\psi_0 \cos\theta_0]}{D} - \\
&\quad - \frac{\alpha_0^2 \sin^2(\varphi/2)[1 + \beta \sin\psi_0 \cos\theta_0]}{D}, \\
D &= \cos^2\psi_0 \cos^2\frac{\varphi}{2}(1 - \beta \sin\psi_0 \cos\theta_0) + \alpha_0^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}(1 + \beta \sin\psi_0 \cos\theta_0), \\
\alpha_0 &= \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\psi}. \tag{15.9}
\end{aligned}$$

Из полученных выражений следует, что поляризационные характеристики ДИ не зависят от прицельного параметра h и от частоты фотона.

Можно убедиться, что параметры Стокса удовлетворяют соотношению

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1,$$

как и следовало ожидать, поскольку рассматривается излучение одиночного заряда.

Рассмотрим частные случаи. Так, например, как следует из (15.9), для параллельного пролета ($\varphi_0 = 0$) циркулярная поляризация отсутствует, тогда как для остальных ориентаций мишени относительно пучка все три параметра Стокса не равны нулю (за исключением выделенных направлений вылета фотона). Таким образом, в отличие от ПИ, ДИ обладает эллиптической поляризацией.

Следует отметить также, что в плоскости, перпендикулярной мишени ($\cos\psi = 0$), циркулярная поляризация меняет знак, т. е. справа и слева от вертикальной плоскости циркулярная поляризация остается знакопостоянной (право- или лево-поляризованное излучение).

Рассмотрим случай $\varphi_0 = \pi/2$ (траектория частицы перпендикулярна поверхности мишени). Для углов $|\psi - \pi/2| \gg \gamma^{-1}$, $\cos\psi_0 \gg \gamma^{-1}$ будем иметь более простые выражения:

$$\xi_1' = -\cos\psi \sin\varphi, \quad \xi_2' = -\sin\psi \sin\varphi, \quad \xi_3' = \cos\varphi,$$

из которых следует, что излучение под углами $\varphi \sim \pm\pi/2$ (ДИ вперед и ДИ назад), $\psi \sim \pi/2$ будет практически полностью циркулярно-поляризованным.

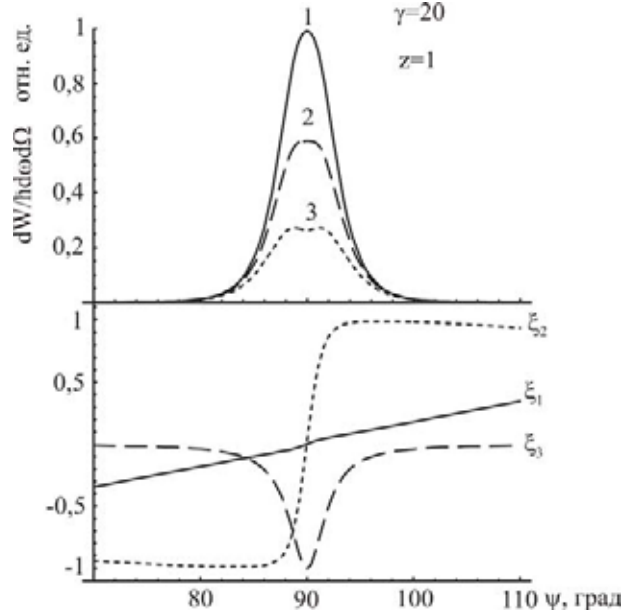


Рис. 15.2. Интенсивность ДИ для $\varphi = 90^\circ$ (кривая 1), $\varphi = 88,55^\circ$ (кривая 2), $\varphi = 87,1$ (кривая 3) и три параметра Стокса (для $\varphi = 90^\circ$)

На рис. 15.2 приведены все три параметра Стокса, для рассматриваемой геометрии. В ультрарелятивистском приближении для углов наклона мишени $\varphi_0 \gg \gamma^{-1}$, $|\pi/2 - \varphi_0| \gg \gamma^{-1}$ поля ДИ записываются в виде (14.6). В этом приближении параметры Стокса выражаются следующим образом:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \pm \frac{2\theta_x \sqrt{\gamma^{-2} + \theta_x^2}}{\gamma^{-2} + 2\theta_x^2}, \quad \xi_3 = -\frac{\gamma^{-2}}{\gamma^{-2} + 2\theta_x^2}. \quad (15.9)$$

Верхний знак в выражении для ξ_2 соответствует ДИ вперед, нижний – ДИ назад. Сразу следует отметить, что с точностью до членов γ^{-1} параметры Стокса (15.9) не зависят от угла вылета фотона θ_y . Далее, для любого угла θ_x величина $\xi_3 < 0$, т. е. плоскость линейной поляризации совпадает с плоскостью, перпендикулярной плоскости мишени. Универсальные графики для ξ_2 и ξ_3 приведены на рис. 15.3.

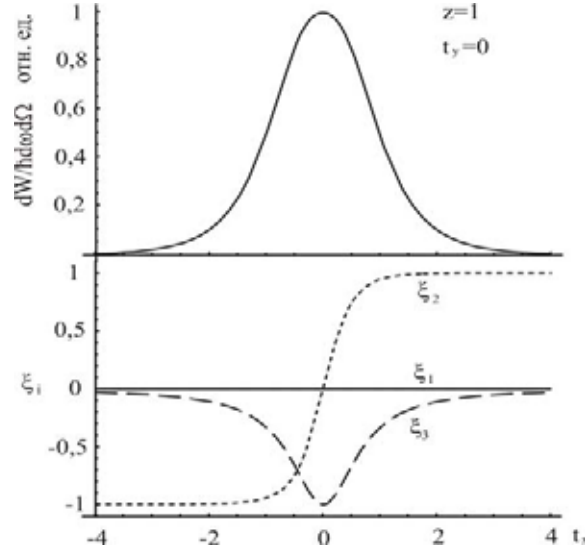


Рис. 15.3. Интенсивность ДИ для $z=1$ (вверху) и универсальные зависимости для параметров Стокса в ультррелятивистском случае

В ультррелятивистском случае раствор конуса углов ДИ вперед имеет величину порядка γ^{-1} относительно импульса электрона, поэтому с точностью γ^{-2} можно говорить о средней поляризации пучка ДИ вперед (или ДИ назад), прошедшего через заданную апертуру. В этом случае для вычисления параметров Стокса в (15.7) следует использовать билинейные комбинации полей $\langle E_i^* E_k \rangle$, усредненные по всем переменным в заданном диапазоне:

$$\langle E_i^* E_k \rangle = \int_{\Delta\Omega} d\Omega \int_{\Delta\omega} d\omega E_i^*(\varphi, \psi, \omega) E_k(\varphi, \psi, \omega), \quad i, k = 1, 2.$$

Вычислим параметры Стокса ДИ при пролете заряда через щель, используя поля. Как было показано ранее, с точностью $\sim \gamma^{-1}$ направление орта \mathbf{e}_1 совпадает с краем мишени. Проекционный угол θ_x определяется, как и ранее, в плоскости, содержащей вектор скорости частицы и направление вдоль края мишени, угол θ_y – в перпендикулярной. Используя те же безразмерные переменные, что и в формуле, получим выражения для параметров Стокса, в которых лоренц-фактор не входит в явном виде:

$$\xi_1 = \frac{1}{D} \left\{ 2t_x \sqrt{1+t_x^2} \left[(1+t_x^2 - t_y^2) \sin(z t_y) - 2t_y \sqrt{1+t_x^2} \cos(z t_y) \right] \right\},$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \frac{1}{D} 2t_x \sqrt{1+t_x^2} (1+t_x^2+t_y^2) \operatorname{sh}\left(2lz\sqrt{1+t_x^2}\right), \\
\xi_3 &= \frac{1}{D} \left\{ (1+2t_x^2) \left[(1+t_x^2-t_y^2) \cos(zt_y) - 2t_y \sqrt{1+t_x^2} \sin(zt_y) \right] - \right. \\
&\quad \left. - (1+t_x^2+t_y^2) \operatorname{ch}\left(2lz\sqrt{1+t_x^2}\right) \right\}, \\
D &= (1+2t_x^2)(1+t_x^2+t_y^2) \operatorname{ch}\left(2lz\sqrt{1+t_x^2}\right) - \\
&\quad - (1+t_x^2-t_y^2) \cos(zt_y) + 2t_y \sqrt{1+t_x^2} \sin(zt_y). \tag{15.10}
\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что параметры Стокса ДИ и в этом случае удовлетворяют условию $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$, как и должно быть.

Рассмотрим некоторые частные случаи. При стремлении ширины щели к нулю параметры Стокса (15.10) должны описывать характеристики переходного излучения. Подставляя значение $z = \omega a \gamma^{-1} \sin \theta_0 = 0$ в (15.10), имеем:

$$\xi_1 = \frac{2t_x t_y}{t_x^2 + t_y^2}, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \frac{t_x^2 - t_y^2}{t_x^2 + t_y^2}, \tag{15.11}$$

что совпадает с (15.8), как и следовало ожидать. При пролете частицы вблизи края щели ($l \rightarrow \pm 0,5$), т. е. для $z \gg 1$, имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}\left(2lz\sqrt{1+t_x^2}\right) &\rightarrow \frac{1}{2} \exp\left(z\sqrt{1+t_x^2}\right), \\
\operatorname{sh}\left(2lz\sqrt{1+t_x^2}\right) &\rightarrow \frac{1}{2} \exp\left(z\sqrt{1+t_x^2}\right), \\
\exp\left(z\sqrt{1+t_x^2}\right) &\gg \cos(zt_y), \sin(zt_y)
\end{aligned}$$

и, следовательно, вместо (15.11) получаем

$$\xi_1 \approx 0, \quad \xi_2 \approx -\frac{2t_x \sqrt{1+t_x^2}}{1+2t_x^2}, \quad \xi_3 = -\frac{1}{1+2t_x^2}. \tag{15.12}$$

Параметры Стокса в этом случае описываются теми же формулами, что и в случае ДИ на полуплоскости. Таким образом, для достаточно коротких длин волн

$$\frac{2\pi c}{\omega_p} \ll \lambda \ll \frac{2\pi a}{\gamma} \sin \theta_0$$

при пролете заряда вблизи одного края щели другой край щели на поляризацию ДИ влияния не оказывает.

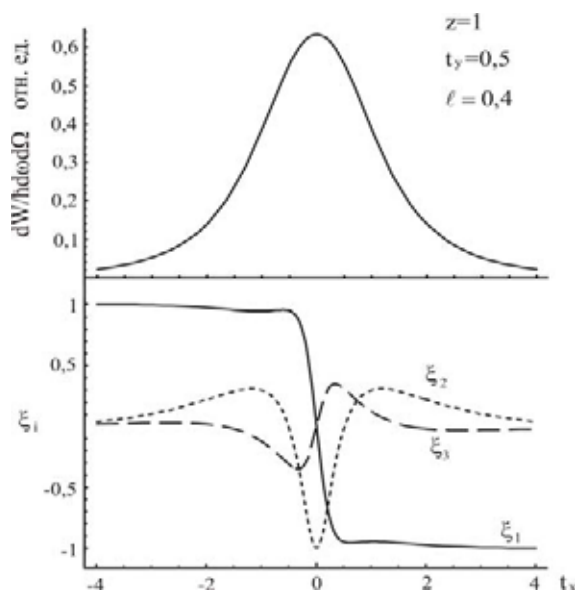


Рис. 15.4. Зависимость от угла вылета $t_x = \gamma\theta_x$ интенсивности ДИ (вверху) и трех параметров Стокса; $t_y = 0,5; z = 1; l = 0,4$

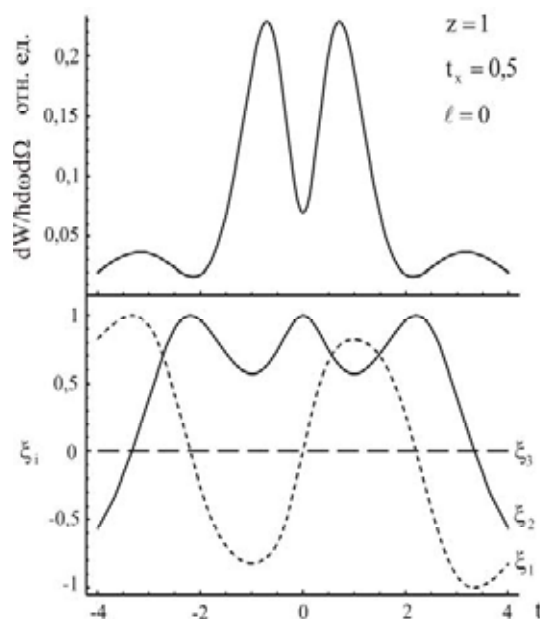


Рис. 15.5. Аналогичная зависимость от угла вылета $t_y = \gamma\theta_y$ при пролете по центру щели; $t_x = 0,5; z = 1; l = 0$

При пролете по центру щели ($l = 0$) циркулярная поляризация исчезает и ДИ будет обладать почти 100 %-й линейной поляризацией в плоскости, перпендикулярной краю щели $\xi_1 \approx 0, \xi_2 \approx 0, \xi_3 \approx -1$ (если $z \gg 1$). Из (15.12) следует, что знак циркулярной поляризации определяется углом вылета фотона θ_x . Как следует из рис. 15.4, ДИ может быть почти полностью циркулярно-поляризованным при соответствующей потере интенсивности.

На рис. 15.5 показана зависимость параметров ξ_1, ξ_3 от угла вылета фотона в вертикальной плоскости для пролета частицы через центр щели. В этом случае, как следует из формулы (15.10), циркулярная поляризация равна нулю.

На рис. 15.6 и 15.7 показана эволюция параметров Стокса при изменении эксцентриситета l для фотонов с разной длиной волны. Следует отметить знакопеременный характер параметра ξ_3 , а значения эксцентриситета, для которых ξ_3 обращается в нуль, определяется энергией фотона ДИ.

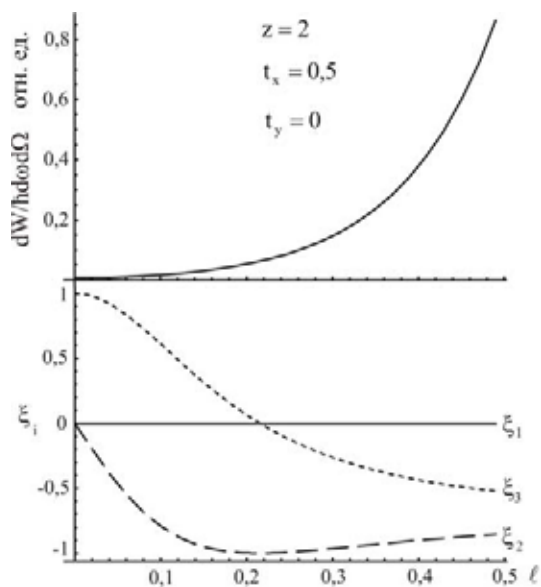


Рис. 15.6. Зависимость интенсивности ДИ (вверху) и параметров Стокса от эксцентриситета l , $t_x = 0,5$, $t_y = 0$, $z = 2$

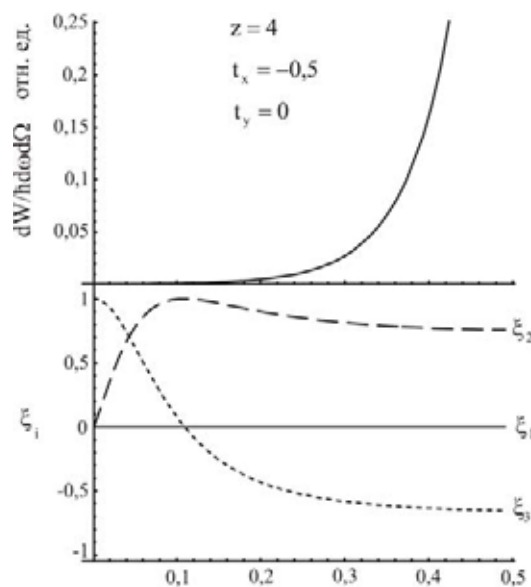


Рис. 15.7. Зависимость интенсивности ДИ и параметров Стокса от эксцентриситета l , $t_x = 0,5$, $t_y = 0$, $z = 5$

В отличие от ПИ, ДИ обладает более широким спектром характеристик, зависящих от геометрии задачи (кроме угловых распределений, во многом аналогичных ПИ, спектр ДИ характеризуется энергией ω_c , а излучение является эллиптически поляризованным). Можно предположить, что поляризационные характеристики ДИ на щели могут быть использованы для разработки новых средств невозмущающей диагностики пучков.

4. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В УЛЬТРАФИОЛЕТОВОМ И МЯГКОМ РЕНТГЕНОВСКОМ ДИАПАЗОНЕ

16. Поляризационный ток и поле излучения

подавляющее большинство задач о дифракционном излучении, теоретически исследованных на сегодняшний день, решались для идеально проводящих мишеней. Модель идеальной проводимости применима при больших значениях мнимой части диэлектрической проницаемости, т. е. для большинства металлов на частотах оптического, инфракрасного и радиодиапазона. Однако, диэлектрическая проницаемость резко убывает вблизи частоты

$$\omega_L = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m} = c\sqrt{2\pi\alpha\lambda_e n_e}, \quad (16.1)$$

где λ_e – комптоновская длина волны электрона, n_e – число электронов проводимости в единице объема, m и e – масса и заряд электрона. Эту частоту обычно называют ленгмюровской. На частотах $\omega > \omega_L$ диэлектрическая проницаемость металлов близка к единице, и модель идеальной проводимости становится непригодной. Для большинства металлов значение ω_L лежит в близком ультрафиолете, а для некоторых, типа меди или золота, даже в видимой части спектра, что и обуславливает их красноватый цвет: из поля падающей волны от поверхности отражаются только гармоники с $\omega < \omega_L$ (см. [98.6], 525).

На частотах, превышающих собственные частоты электронов в атоме, внешнее поле взаимодействует со связанными в атомах электронами так же, как с электронами проводимости. Поэтому, начиная с некоторой частоты

$$\omega_p = \sqrt{4\pi NZe^2 / m} = c\sqrt{2\pi\alpha\lambda_e NZ}, \quad (16.2)$$

отклик диэлектриков и проводников на внешнее поле становится одинаковым и определяется только общим числом электронов в единице объема вещества NZ , где N – плотность числа атомов, Z – номер атомного элемента в таблице Менделеева. Заметим, что в оптике металлов и в физике плазмы частоту (16.1) называют и ленгмюровской, и плазменной, а величину (16.2) не рассматривают вообще. Характерные значения ω_p для типичных материалов мишени составляют несколько десятков эВ [93.5].

Удобно представить диэлектрическую проницаемость в виде

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi'(\omega) + i\chi''(\omega). \quad (16.3)$$

На частотах

$$\omega \gg \omega_p \quad (16.4)$$

вне области поглощения действительная часть диэлектрической восприимчивости $\chi'(\omega)$ имеет вид

$$\chi'(\omega) = -\omega_p^2 / \omega^2 < 0,$$

причем $\chi'(\omega) \gg \chi''(\omega)$. Вблизи полос характеристического рентгеновского излучения атомов или узких линий мессбауэровских ядерных переходов возможно выполнение условия $\chi'(\omega) > 0$, причем $\chi'(\omega)$ и $\chi''(\omega)$ могут быть одного порядка [87.5].

Следует отметить, что в выражении (16.3) нет зависимости от координат. Это ограничивает применимость результатов, полученных с применением формулы (16.3) диапазоном длин волн

$$a_B < \lambda < 2\pi c / \omega_p, \quad (16.5)$$

где a_B – боровский размер атома. На языке энергий излученных квантов этот интервал соответствует энергии от десятков эВ до десятков КэВ. Для более коротковолнового излучения следует учитывать флуктуации диэлектрической проницаемости, обусловленные неоднородностью распределения электронов в веществе, и строить теорию подобно учету рассеяния в макроскопической электродинамике [92.1, 84.2]. Заметим, что учёт зависимости диэлектрической проницаемости от координат может потребоваться и для излучения на длинах волн, попадающих в диапазон (16.5) – а именно, в случае кристаллической среды, где из-за периодичности возможны эффекты когерентности, приводящие к новым явлениям в излучении, например, к существованию рентгеновского параметрического излучения. Однако, как показано в параграфе 6, рассмотрение дифракционного излучения в жестком рентгеновском диапазоне частот не представляет значительного интереса, поскольку требует

или слишком высоких энергий частиц, или слишком маленького расстояния между траекторией частицы и поверхностью мишени.

ДИ возникает в результате динамической поляризации материала мишени полем пролетающей частицы. Для нахождения поля ДИ выясним, какая величина играет роль плотности поляризационных токов. Для этого рассмотрим сначала бесконечную среду. Потом, найдя плотность индуцированных токов, перейдем к рассмотрению конечной мишени.

В бесконечной однородной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ магнитное поле определяется из уравнения

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \varepsilon(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, \omega), \quad (16.6)$$

где $k^2 = \omega^2/c^2$. Величина \mathbf{j}_0 – плотность тока, отвечающая движению заряженной частицы. Поле заряда в вакууме $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, \omega)$ определяется плотностью токов $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, \omega)$ из уравнения

$$\Delta \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, \omega). \quad (16.7)$$

Обозначим

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0. \quad (16.8)$$

Собственное поле заряда в вакууме \mathbf{H}_0 не дает вклада в поле излучения на далеких расстояниях, поэтому в поле \mathbf{H}' содержатся все возможные виды излучений при равномерном движении. Вычитая (16.7) из (16.6) получаем уравнение на \mathbf{H}' :

$$\Delta \mathbf{H}'(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \varepsilon(\omega) \mathbf{H}'(\mathbf{r}, \omega) = k^2 [1 - \varepsilon(\omega)] \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, \omega). \quad (16.9)$$

Отметим, что при получении уравнения (16.9) мы пока не делали никаких приближений. Воспользовавшись уравнением $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, \omega) = -i(c/\omega) \times \text{rot } \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega)$, в прозрачной среде, т. е. при $\text{Im } \varepsilon(\omega) \ll \text{Re } \varepsilon(\omega)$, на далеких расстояниях $r \gg k^{-1}$ получим решение уравнения (16.9) в виде расходящейся сферической волны:

$$\mathbf{H}^r(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{\omega}{4\pi c} [\varepsilon(\omega) - 1] \frac{e^{ik'r}}{r} \times \\ \times \left[\mathbf{k}' \int d^3 r' \exp(-i\mathbf{k}'\mathbf{r}') \mathbf{E}_0(\mathbf{r}', \omega) \right], \quad (16.10)$$

где $\mathbf{k}' = \sqrt{\varepsilon}(\omega/c) \mathbf{n}$ – волновой вектор поля излучения в среде, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ – единичный вектор в направлении наблюдения. Учтывая, что фурье-образы электрической и магнитной составляющих поля излучения связаны так же, как в плоской волне, т. е.

$$\mathbf{E}^r(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} [\mathbf{n} \mathbf{H}^r(\mathbf{r}, \omega)], \quad (16.11)$$

можно записать уравнение поля излучения в виде

$$\mathbf{E}^r(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \frac{\omega^2}{4\pi c^2} [\varepsilon(\omega) - 1] \frac{e^{ik'r}}{r} \times \\ \times \left[\mathbf{n} \left[\mathbf{n} \int d^3 r' \exp(-i\mathbf{k}'\mathbf{r}') \mathbf{E}_0(\mathbf{r}', \omega) \right] \right]. \quad (16.12)$$

Фурье-образ собственного поля заряженной частицы можно представить в виде

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{q}, \omega) = \int \frac{d^3 r'}{(2\pi)^3} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}') \mathbf{E}_0(\mathbf{r}', \omega) = \\ = -\frac{ie}{2\pi^2} \frac{\mathbf{q} - \mathbf{v}\omega/c^2}{q^2 - \omega^2/c^2} \delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}). \quad (16.13)$$

Отметим, что выражение (16.12) дает обычное излучение Вавилова – Черенкова в безграничной однородной среде. В самом деле, подстановка (16.13) в (16.12) дает

$$\mathbf{E}^r(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ie\omega}{c^2 r} [\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{v}]] \exp(ik'r) \delta(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k}'). \quad (16.14)$$

Из формулы (16.12) следует, что величина

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\omega}{4\pi i} (\varepsilon(\omega) - 1) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega) \quad (16.15)$$

играет роль плотности токов, индуцированных в бесконечном однородном веществе полем пролетающей заряженной частицы.

Перейдем к рассмотрению мишени конечного размера. Далее мы рассматриваем ситуацию, когда $|\chi'(\omega)|, \chi''(\omega) \ll 1$, так что имеется малый параметр

$$|\varepsilon(\omega) - 1| \ll 1, \quad (16.16)$$

чем воспользуемся для решения задачи о дифракционном излучении в ультрафиолетовой и рентгеновской части спектра [04.3, 05.4].

Собственное поле пролетающей частицы поляризует мишень. В результате динамической поляризации электроны каждого элементарного объема мишени излучают. Поле электромагнитной волны ДИ распространяется в веществе мишени, испытывает, вообще говоря, преломление и отражение на гранях мишени, и дальше идет от поверхности мишени в вакууме. На частотах, удовлетворяющих условию (16.16), коэффициент преломления отличается от единицы на величину, которая много меньше единицы. С другой стороны, плотность поляризационных токов уже пропорциональна величине $|\varepsilon(\omega) - 1| \ll 1$. Следовательно, учет преломления и отражения даст члены второго порядка малости по параметру (16.17), которыми можно пренебречь. Таким образом, в диапазоне частот (16.4) можно пренебречь отражением и преломлением излучения на поверхности пластинки. При этом ясно, что мы можем ошибиться по отношению к излучению, выходящему через угол мишени, т. е. через часть поверхности, чья форма и, возможно, оптические свойства, далеки от оптических свойств плоскости, описываемых формулами Френеля. Однако в силу относительно небольшого вклада этой части излучения такую ошибку можно не принимать во внимание.

Итак, мы предполагаем здесь прямолинейное распространение излучения от точек излучения внутри пластинки до ее поверхности в виде плоской волны с действительным волновым вектором $\sqrt{\varepsilon} \mathbf{k}$ и далее прямолинейное распространение от поверхности до точки наблюдения в виде плоской волны с волновым вектором \mathbf{k} . Такой подход был успешно использован Дьюрандом (Durand) [75.1] для анализа ПИ на высоких частотах. Также подобный метод был использован в рамках эйконального приближения в теории ПИ [79.2]. Поле излучения тогда определя-

ется интегрированием плотности поляризованных токов (16.15) по объему мишени V и может быть найдено по формуле (16.12). Подчеркнем, что используемое выражение описывает поле излучения в волновой зоне, т. е. достаточно далеко от мишени.

17. Дифракционное излучение вперед

Рассмотрим в качестве мишени пластинку с размерами $a \times \infty \times b$ (рис. 17.1). Пусть частица с зарядом e движется над пластинкой равномерно со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0) = (v \cos \alpha, v \sin \alpha, 0)$. В момент времени $t = 0$ она находится в точке $(0, 0, h)$.

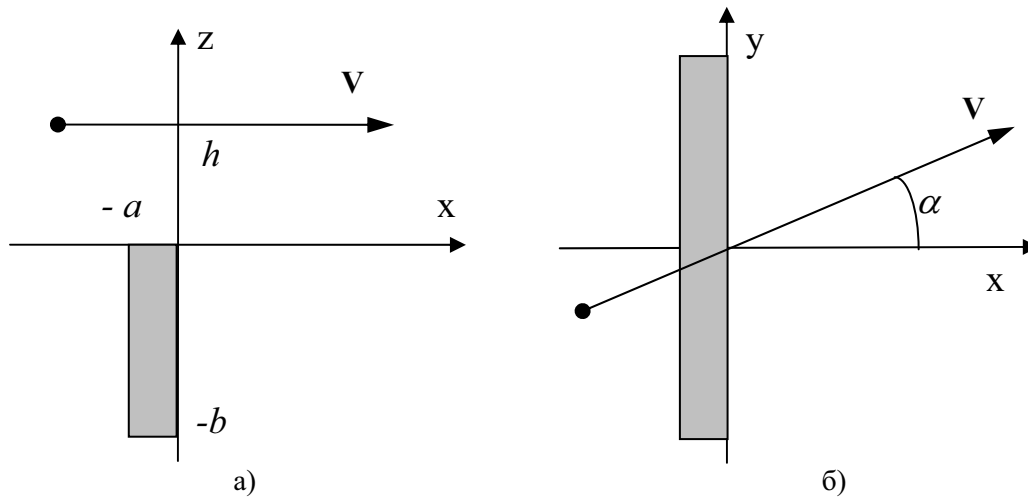


Рис. 17.1. Геометрия прохождения заряженной частицы вблизи мишени: а) вид сбоку; б) вид сверху

Интегрируя в формуле (17.1) по координате x в пределах $(-a, 0)$, по y в пределах $(-\infty, \infty)$, и по z в пределах $(-b, 0)$, получаем поле излучения в виде

$$\mathbf{E}_{DR}^r(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e^{ikr}}{r} \frac{ie}{2\pi} \frac{\chi(\omega)}{v_x} \exp(-h\rho) \times \times \frac{\exp(-ia\varphi) - 1}{\varphi} \left[\mathbf{k} \left[\mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{L}}{\rho} - i\mathbf{e}_z \right) \right] \right] \frac{1 - \exp(-b\rho) \exp(ib\sqrt{\epsilon}k_z)}{\rho - i\sqrt{\epsilon}k_z}. \quad (17.1)$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi = \frac{\omega - \sqrt{\varepsilon} \mathbf{v} \mathbf{k}}{v_x}, \quad \rho^2 = \left(\frac{\omega - \sqrt{\varepsilon} v_y k_y}{v_x} \right)^2 + \varepsilon k_y^2 - \omega^2 / c^2$$

$$\mathbf{L} = \frac{\omega - \sqrt{\varepsilon} v_y k_y}{v_x} \mathbf{e}_x + \sqrt{\varepsilon} k_y \mathbf{e}_y - \mathbf{v} \omega / v^2, \quad (17.2)$$

где $v_x \neq 0$, h есть прицельный параметр, т. е. кратчайшее расстояние между траекторией частицы и поверхностью мишени; b и a ширина и толщина пластинки, соответственно. По своему физическому смыслу φ – это разность фаз излучения, приходящего от разных граней пластинки.

Для простоты рассмотрим излучение вдали от линий поглощения, т. е. при

$$\chi(\omega) = -\omega_p^2 / \omega^2 \ll 1.$$

Спектрально-угловое распределение плотности излученной энергии может быть найдено по формуле

$$d^2W(\mathbf{n}, \omega) = cr^2 d\Omega d\omega |\mathbf{E}^r(\mathbf{r}, \omega)|^2, \quad (17.3)$$

что, с учетом (17.1), дает

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d(\hbar\omega)} = \alpha \left(\frac{\omega_p^2}{2\pi\omega^2} \right)^2 \times$$

$$\times F_b \frac{\sin^2(\varphi a/2) \exp\{-2h\rho\}}{(c/\omega)^2 (\rho^2 + \varepsilon k_z^2)} \frac{1 - n_z^2 + (L^2 - (\mathbf{L}\mathbf{n})^2) / \rho^2}{(1 - \mathbf{n}\mathbf{v} \sqrt{\varepsilon}/c)^2}, \quad (17.4)$$

где α – постоянная тонкой структуры, F_b – фактор, определяющий зависимость ДИ от толщины мишени b :

$$F_b(b, \omega) = 1 - 2 \exp\{-b\rho\} \cos(\sqrt{\varepsilon} b k_z) + \exp\{-2b\rho\}. \quad (17.5)$$

Рассмотрим простейший случай нормального пролета частиц вблизи полубесконечной пластинки, при этом поглощением будем пока пре-

небрегать. Тогда скорость направлена вдоль оси x , т. е. $\alpha = 0$, $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$.
Из (17.4) получаем:

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d(\hbar\omega)} = \alpha \left(\frac{\omega_p^2}{2\pi\omega^2} \right)^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{a\omega}{2v} (1 - \sqrt{\varepsilon} \beta n_x) \right)}{(1 - \sqrt{\varepsilon} \beta n_x)^2} \times \\ \times F_b \frac{1 - n_z^2 + n_y^2 (1 - n_y^2) / (\gamma^{-2} + n_y^2)}{\gamma^{-2} + 1 - n_x^2} \exp\{-2h\rho\}, \quad (17.6)$$

где ρ принимает вид:

$$\rho = \frac{\omega}{c\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 n_y^2}. \quad (17.7)$$

Введем сферическую систему координат (см. рис. 17.2) посредством

$$n_x = \cos\theta, \quad n_y = \sin\theta \sin\phi, \quad n_z = \sin\theta \cos\phi. \quad (17.8)$$

Нетрудно видеть, что ДИ имеет резкий максимум при $\phi \approx 0$ и сосредоточено в узком конусе углов $\theta \sim \gamma^{-1}$. При $\alpha = 0$, $b \gg c\gamma/\omega$ и $\theta \ll 1$ получаем из (17.4) спектрально-угловое распределение излученной энергии:

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d(\hbar\omega)} = \frac{\alpha}{\pi^2} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \frac{\sin^2 \left[\frac{a\omega}{4c} (\theta^2 + \gamma^{-2} + \omega_p^2/\omega^2) \right]}{(\theta^2 + \gamma^{-2} + \omega_p^2/\omega^2)^2 (\theta^2 + \gamma^{-2})} \times \\ \times \frac{1 + 2\gamma^2 n_y^2}{1 + \gamma^2 n_y^2} \exp \left\{ -\frac{2h\omega}{c\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 n_y^2} \right\}. \quad (17.9)$$

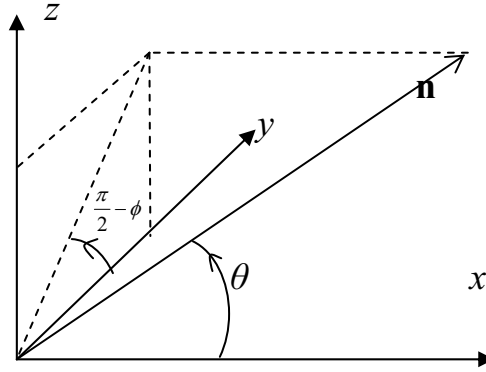


Рис. 17.2. Углы наблюдения

При получении (17.9) мы пренебрегли членами порядка γ^{-2} и ω_p^2/ω^2 , по сравнению с единицей. Сравним полученное выражение, описывающее излучение при условии, что траектория частицы отстоит на величину прицельного параметра h от поверхности мишени, с переходным излучением, возникающим когда частица пролетает сквозь бесконечную пластинку такой же ширины. Из формулы (16.17) нетрудно получить спектрально-угловую плотность ПИ от бесконечной пластинки толщиной a :

$$\frac{d^2W_{\text{ПИ}}(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d(\hbar\omega)} = \frac{e^2}{c} \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{\theta^2 \sin^2 \left[\frac{a\omega}{4c} (\theta^2 + \gamma^{-2} + \omega_p^2/\omega^2) \right]}{(\gamma^{-2} + \theta^2 + \omega_p^2/\omega^2)^2 (\gamma^{-2} + \theta^2)^2}. \quad (17.10)$$

Это выражение хорошо известно в теории рентгеновского ПИ [93.5, 87.5]. Отношение выражений (17.9) и (17.10) дает

$$\frac{d^2W_{\text{ДИ}}(\mathbf{n}, \omega)}{d^2W_{\text{ПИ}}(\mathbf{n}, \omega)} = \frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{4\gamma^2 \theta^2} \frac{1 + 2\gamma^2 n_y^2}{1 + \gamma^2 n_y^2} \exp \left\{ -\frac{2\hbar\omega}{c\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 n_y^2} \right\}. \quad (17.11)$$

Отсюда видно, что при $\theta \geq \gamma^{-1}$ и выполнении условия (17.11) максимум спектральной плотности ПИ в $2 \exp\{2\omega/\omega_c\}$ раз превышает максимум ДИ. Отметим, что для области частот меньше плазменной, наблюдается аналогичная ситуация [98.2]. На рис. 17.3 показаны угловые распределения излучения ПИ и ДИ, построенные по формулам (17.9) и (17.10), соответственно.

Интересно сравнить спектрально-угловые распределения ДИ и ПИ. Главные особенности излучения в случае, когда траектория частицы не пересекает мишени (по сравнению со случаем пересечения мишени), таковы.

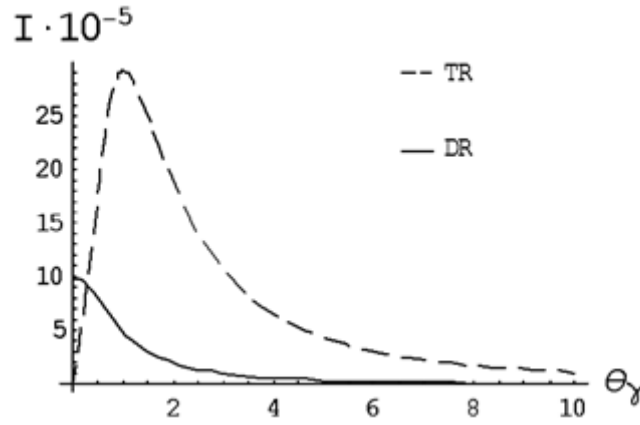


Рис. 17.3. Угловое распределение интенсивности переходного и дифракционного излучения вперед для мишени из бериллия ($\omega_p = 4.1 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$, $\hbar\omega_p = 26,10 \text{ эВ}$, $\omega = 10\omega_p$, $h = 30 \text{ мкм}$; $\gamma = 8 \times 10^4$, толщина мишени $a = 5 \text{ мкм}$)

Во-первых, спектр дифракционного излучения обрезан за счет экспоненциального множителя $\exp(-2\omega/\omega_c)$. Если

$$h < c/\omega_p, \quad (17.12)$$

то граничная частота в спектре,

$$\omega_c^{\text{ПИ}} \approx \gamma\omega_p, \quad (17.13)$$

совпадает с той, которая известна из теории рентгеновского переходного излучения. Условие (17.12) довольно экзотично. Оно означает, что траектория частицы почти касается поверхности пластинки. В случае

$$h > c/\omega_p, \quad (17.14)$$

частота обрезания определяется убывающей экспонентой и не зависит от диэлектрических свойств мишени:

$$\omega_c \approx c\gamma/h. \quad (17.15)$$

В дальнейшем мы предположим что неравенство (17.14) выполнено и частота обрезания определяется величиной (17.15). Это значение как правило, много меньше $\gamma\omega_p$. Например, при $h = 30$ мкм, $\gamma = 10^5$ – граничная энергия в спектре ДИ вперед, $\hbar\omega_c \approx 0,65$ кэВ.

Во-вторых, дифракционное излучение распределено в конусе с раствором угла $\theta \sim \gamma^{-1}$, однако, в отличие от переходного, имеет максимум под нулевым углом, в то время как переходное вдоль скорости частицы строго обращается в нуль.

Отметим, что при $\omega_c \ll \gamma\omega_p$ синус в (17.9) сильно осциллирует при небольших изменениях частоты ω и его квадрат может быть заменен средним значением $1/2$ при условии

$$\pi^2 ah \gg \left(2\pi c/\omega_p\right)^2 \gamma. \quad (17.16)$$

В таком случае формула (17.9) практически не зависит от ω_p и мы приходим к выражению, аналогичному для оптического ДИ [98.2] от двух идеально проводящих и бесконечно тонких экранов, расположенных при $x = 0$ и $x = a$:

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d(\hbar\omega)} \approx \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{\gamma^{-2} + 2n_y^2}{(\theta^2 + \gamma^{-2})(\gamma^{-2} + n_y^2)} \exp\left\{-2\frac{\omega}{\omega_c} \sqrt{1 + \gamma^2 n_y^2}\right\}. \quad (17.17)$$

Условие (17.16) выполнено, например, если $\omega_p = 4 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$ ($\hbar\omega_p = 26,1$ эВ, бериллий), $h \geq 50$ мкм, $a \geq 10$ мкм, $\gamma \leq 10^5$.

Теперь рассмотрим зависимость ДИ от ширины пластинки b . Эта зависимость определяется фактором $F_b^0(b, \omega)$ (см. (17.5)). При $b \gg \rho^{-1}$ ($\rho^{-1} = c\gamma/\omega$ при $n_y = 0$) мы имеем

$$F_b \approx 1,$$

т. е., как и следовало ожидать, зависимость от ширины пластинки исчезает для достаточно больших b . При $b \ll \rho^{-1}$ мы имеем

$$F_b \approx 2(1 - \cos bk_z),$$

что означает появление осцилляций с периодом λ/n_z , где λ – длина волны излучения. Таким образом, зависимость ДИ от ширины мишени b определяется отношением b к некоторому b_{eff} :

$$b_{\text{eff}} \sim \rho^{-1} = \frac{c\gamma}{\omega\sqrt{1+\gamma^2 n_y^2}}. \quad (17.18)$$

Величина b_{eff} – это характерное расстояние, на котором спадает собственное поле ультрарелятивистской заряженной частицы. Если условие $n_y \leq \gamma^{-1}$ выполнено, то мы имеем $b_{\text{eff}} \sim \gamma\lambda$. Например, при $n_y = 0$, $\gamma \sim 6 \times 10^4$ и $\omega \sim 10^{17} \sim \text{с}^{-1}$ получаем $b_{\text{eff}} \approx 180$ мкм. Максимум ДИ лежит в промежутке между частотами ω_p и $\omega_c \approx c\gamma/h$ и зависит от ширины мишени b . Формально это обусловлено тем, что поведение функции $F_b(b, \omega)$ при фиксированных b определяется отношением частоты ω к некоторой эффективной частоте

$$\omega_m \sim \gamma c/b. \quad (17.19)$$

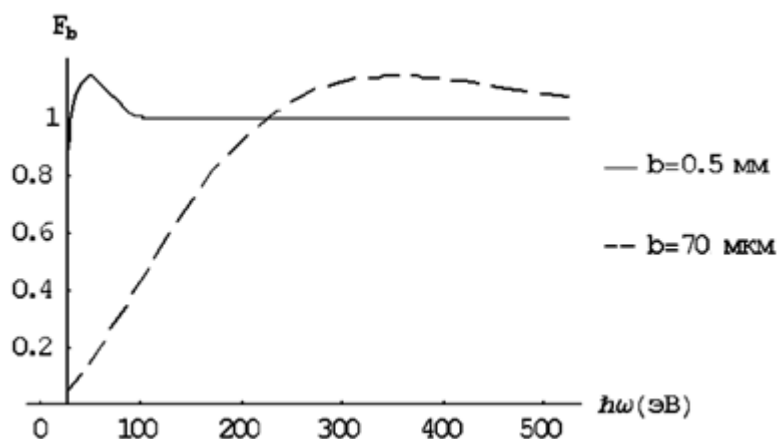


Рис. 17.4. Фактор $F_b(b, \omega)$ для бериллия, $h = 50$ мкм; $\gamma = 6 \times 10^4$

На рис. 17.4 фактор $F_b(b, \omega)$ изображен в зависимости от энергии излученных квантов, в диапазоне от $\hbar\omega_p$ до $20\hbar\omega_p$ для значений $\alpha = 0$ при $\theta = \gamma^{-1}$, $n_y = 0$, $\omega_p = 4,1 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$, $\hbar\omega_p = 26,1$ эВ (бериллий), $h = 50$ мкм; $\gamma = 6 \times 10^4$. Толщина a удовлетворяет условию (17.16). Для

этих параметров частота обрезания $\hbar\omega_c = 219$ эВ, тогда как частота. Для этих параметров $\omega_m \sim c\gamma/b$ равна $3,48 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$.

Рис. 17.5 показывает спектр ДИ вперед при различных значениях ширины мишени b . При $b \gg b_{\text{eff}}$ и дальнейшем возрастании b график меняется незначительно. Видно, что мягкая часть спектра излучения ($\omega \sim \omega_p$) немного подавлена при $b \leq b_{\text{eff}}$. Такое поведение обусловлено функцией $F_b(b, \omega)$, см. рис. 17.4.

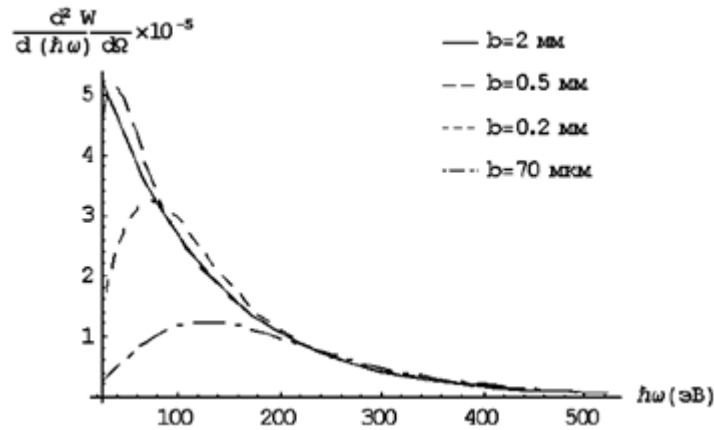


Рис. 17.5. Зависимость спектра дифракционного излучения от ширины мишени b . Параметры такие же, как на рис. 17.4

Используя формулу (17.9), можно оценить полные потери на ДИ в диапазоне частот $\omega > \omega_p$. Грубо оценить потери можно, взяв максимум $d^2W(\mathbf{n}, \omega)/d\Omega d(\hbar\omega)$ и умножив его на ширину диапазона $\Delta\Omega\Delta(\hbar\omega)$, в котором излучение максимально. Оценка порядка величины $(\Delta\omega)_{\text{eff}} \sim \omega \sim \omega_c \sim c\gamma/h$, $(\Delta\Omega)_{\text{eff}} \sim \gamma^{-2}$. При выполненном условии (17.6) мы получаем

$$W \sim \alpha \hbar\omega_c \left(1 - 2 \exp\left\{-\frac{b}{h}\right\} \cos\left(\frac{b}{h}\right) + \exp\left\{-\frac{2b}{h}\right\} \right). \quad (17.20)$$

Для $b \gg h$ имеем

$$W \sim \alpha \hbar\omega_c = e^2 \frac{\gamma}{h}. \quad (17.21)$$

Таким образом, полные потери на дифракционное излучение прямо пропорциональны лоренц-фактору γ и обратно пропорциональны прицельному параметру h . Заметим, что подобная оценка для ПИ дает $W_{\text{пи}} \sim \frac{1}{3} \frac{e^2}{c} \gamma \omega_p$, что существенно превышает (17.21). Это обусловлено, главным образом, разницей в частоте обрезания спектра для ПИ и ДИ: $c\gamma/h \ll \gamma \omega_p$. Как было сказано выше, при условии (17.12) частота обрезания для ДИ и ПИ одинакова, и следовательно, потери будут одного порядка. Проведенная оценка потерь на излучение достаточно груба и пригодна только для качественного анализа.

18. Дифракционное излучение назад

Теперь мы перейдем к обсуждению полной формы выражения (17.4). Прежде всего исследуем максимумы излучения. Легко видеть, что интенсивность ДИ достигает максимума, когда показатель экспоненты $\exp(-2h\rho)$ минимален, а предэкспоненциальный множитель максимален.

Исследование ρ при фиксированных h , ω и γ дает нам условие, при котором экспонента достигает своего максимума:

$$n_y = \frac{\beta_y}{\beta^2 \sqrt{\varepsilon}} = \frac{\sin \alpha}{\beta \sqrt{\varepsilon}}. \quad (18.1)$$

Компоненты скорости частицы определяются через угол α как $\beta_x = \beta \cos \alpha$, $\beta_y = \beta \sin \alpha$ (см. рис. 17.1). Подставляя (18.1) в формулы (17.2), которые удобно здесь записать в виде

$$\varphi = \frac{\omega}{v_x} \left(1 - \sqrt{\varepsilon} \quad n \right), \quad \rho^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[\left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon} \beta_y n_y}{\beta_x} \right)^2 + \varepsilon n_y^2 - 1 \right],$$

$$\mathbf{L} = \frac{\omega}{c} \left\{ \frac{1 - \sqrt{\varepsilon} \beta_y n_y}{\beta_x} - \frac{\beta_x}{\beta^2}, \sqrt{\varepsilon} n_y - \frac{\beta_y}{\beta^2} \right\},$$

получаем

$$\varphi = \frac{\omega}{v_x} \left(\beta^{-2} \beta_x - \sqrt{\varepsilon} n_x \right), \quad \mathbf{L} = 0, \quad \rho = \frac{\omega}{c\gamma}. \quad (18.2)$$

Принимая во внимание (18.1), мы можем видеть из формулы (17.5), что интенсивность излучения пропорциональна фактору

$$\frac{1 - n_z^2 + \left(L^2 - (\mathbf{Ln})^2 \right) / \rho^2}{\left(c^2 / \omega^2 \right) \rho^2 + n_z^2} = \frac{1 - n_z^2}{\gamma^{-2} + n_z^2}. \quad (18.3)$$

Этот фактор максимален при

$$n_z = 0. \quad (18.4)$$

Другими словами, излучение максимально в плоскости x, y . Используя (18.4) и (18.1), можно показать, что существует два направления максимального излучения:

$$n_x = \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\beta^2 \varepsilon}} = \pm \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - (1 - \varepsilon \beta^2)}}{\beta \sqrt{\varepsilon}}. \quad (18.5)$$

Здесь знак «+» отвечает максимуму излучения вдоль траектории частицы и знак «-» отвечает излучению под углом зеркального отражения от поверхности мишени (см. рис. 18.1). Далее мы предполагаем, что

$$\omega \leq \omega_c = c\gamma/h \ll \gamma\omega_p. \quad (18.6)$$

Случай скользящего падения $\cos \alpha \leq \sqrt{1 - \varepsilon \beta^2}$ требует отдельного рассмотрения. Для достаточно больших углов α , удовлетворяющих условию

$$\cos^2 \alpha \gg 1 - \varepsilon \beta^2 \approx \omega_p^2 / \omega^2, \quad (18.7)$$

формула (18.5) принимает вид

$$n_x \approx \pm \frac{\cos \alpha}{\beta \sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{2 \cos^2 \alpha} \right). \quad (18.8)$$

Пренебрегая вторым слагаемым в (18.8), можно видеть, что существует два направления излучения в плоскости $xу$:

$$\begin{aligned} \phi = 0, \theta = \alpha & \quad - \text{max ДИВ}, \\ \phi = 0, \theta = \pi - \alpha & \quad - \text{max ДИН}. \end{aligned} \quad (18.9)$$

Первое из этих условий дает максимум дифракционного излучения вперед (ДИ вперед).

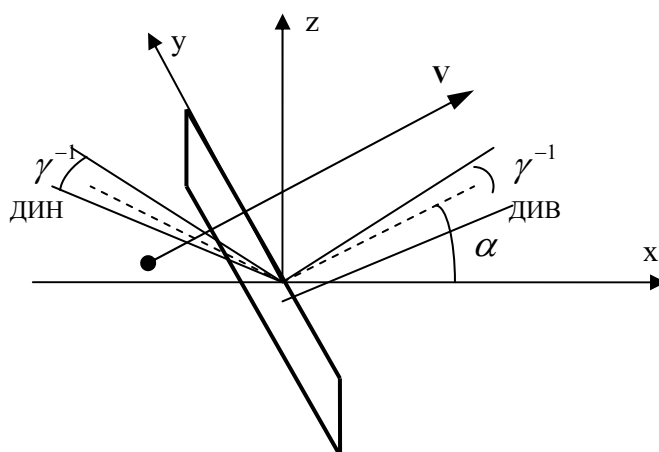


Рис. 18.1. Конусы ДИ вперед и ДИ назад

Второе условие отвечает излучению под углом зеркального отражения (рис. 18.1). Обычно оно называется дифракционным излучением назад (ДИ назад). ДИ назад – достаточно удобный инструмент для невозмущающей диагностики пучков заряженных частиц [01.3], поскольку угол наблюдения излучения по отношению к направлению пучка может быть произвольно велик. ДИ назад в оптическом диапазоне детально исследовано в статьях [98.2, 00.4]. В частности, показано, что ДИ назад излучается в узком конусе, подобно ДИ вперед.

На рис. 18.2 построено угловое распределение ДИ назад, излученного под углом $\theta = \pi - \alpha$, $\alpha = 70^\circ$. Частота наблюдения: $\omega = 10\omega_p$. Ширина пластинки равна $b = 0,5$ мм. Остальные параметры те же, что и на рис. 17.4. Рисунок построен по формуле с учетом того, что условие выполнено.

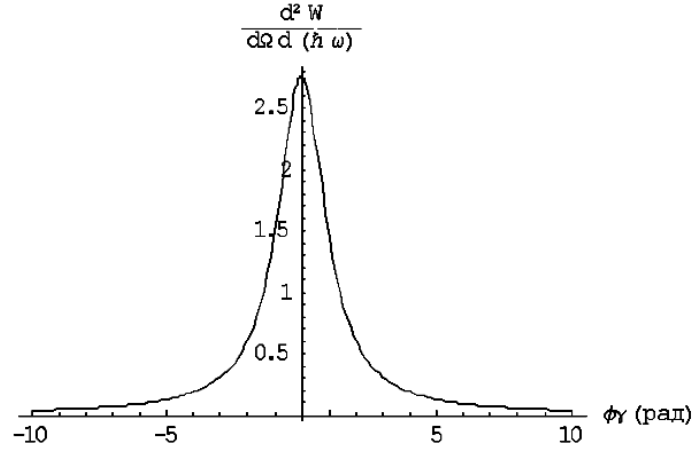


Рис. 18.2. Азимутальное распределение ДИ назад

Используя (18.1) и (18.8), можно получить для ДИ вперед (знак «+» в (18.8))

$$1 - \mathbf{nv} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} \approx \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \quad (18.10)$$

и для ДИ назад (знак «-» в (18.8))

$$1 - \mathbf{nv} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} \approx 2 \cos^2 \alpha. \quad (18.11)$$

Те же самые выражения (18.10) и (18.11) могут быть получены с использованием (18.9). Максимум как ДИ вперед, так и ДИ назад получается из (17.4) с учетом формул (18.2), (18.10) и (18.11). Для максимума ДИ вперед имеем:

$$\frac{d^2 W_{\max}^{\text{ДИВ}}}{d\Omega d(\hbar\omega)} = \alpha \frac{\gamma^2}{2\pi^2} \left[1 - \exp\left\{-\frac{b\omega}{c\gamma}\right\} \right]^2 \exp\left\{-\frac{2h\omega}{c\gamma}\right\}, \quad (18.12)$$

и для ДИ назад находим:

$$\frac{d^2 W_{\max}^{\text{ДИН}}}{d\Omega d(\hbar\omega)} = \alpha \frac{\gamma^2}{2\pi^2} \frac{(\omega_p/\omega)^4}{16 \cos^4 \alpha} \left[1 - \exp\left\{-\frac{b\omega}{c\gamma}\right\} \right]^2 \exp\left\{-\frac{2h\omega}{c\gamma}\right\}. \quad (18.13)$$

При получении формул (18.12), (18.13) квадрат синуса был заменен $1/2$ в соответствии с неравенством (17.16). Сравнивая (18.12) и (18.13), можно видеть, что ДИ назад много слабее, чем ДИ вперед при условии, что (18.7) выполнено. Однако, интенсивность в максимуме ДИ назад растет с ростом угла α , как видно из рис. 18.3, на котором показана эта зависимость для излучения под углом $\phi = 0, \theta = \pi - \alpha$ и частотах $\omega = 10\omega_p$ ($\hbar\omega_p = 26,1$ эВ). Прицельный параметр равен $h = 50$ мкм, $\gamma = 6 \times 10^4$, $b = 0,5$ мм. Толщина пластинки a считается удовлетворяющей соотношению (17.16). Угол α изменяется от 0 до 70° , при дальнейшем увеличении α интенсивность излучения продолжает расти, однако нужно иметь в виду, что при скользящем падении, при нарушении неравенства (18.7) теория теряет применимость.

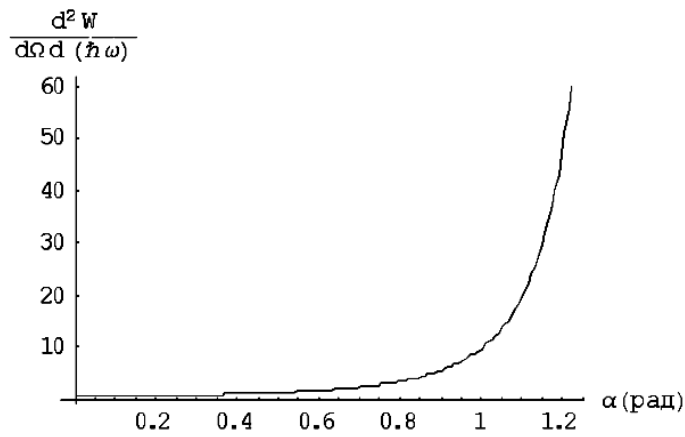


Рис. 18.3. Рост интенсивности в максимуме ДИ назад с возрастанием угла α

Эти две особенности отличают рентгеновское ДИ от оптического, для которого спектральные характеристики ДИ назад и ДИ вперед практически совпадают (см. параграф 13).

Фактор $\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^4 \left[1 - \exp\left\{-\frac{b\omega}{c\gamma}\right\}\right]^2$ определяет спектр ДИ назад в диапазоне частот от ω_p до ω_c , который близок к зависимости ω^{-4} , если

$$b\omega \gg c\gamma, \quad (18.14)$$

и ω^{-2} , если

$$b\omega \ll c\gamma. \quad (18.15)$$

Условия (18.6) и (18.15) выполняются одновременно, если $b \ll h$. Это может быть на практике очень тонкая пластинка ($a \gg b$) или тонкая нить ($a \sim b$).

19. Рентгеновское дифракционное излучение в условиях эффекта Вавилова-Черенкова

Как известно [87.5, 82.1], в ультрафиолетовой и рентгеновской части спектра в области поглощения, где $\chi''(\omega) \neq 0$, возможно выполнение условия излучения Вавилова – Черенкова: $v\sqrt{\text{Re}\varepsilon} > c$. В мягком ультрафиолетовом диапазоне (несколько эВ) условие

$$\chi'(\omega) > 0 \quad (19.1)$$

может быть выполнено, когда энергия связи валентных электронов больше, чем энергия излучаемых квантов. В более жесткой части спектра условие (19.1) выполняется вблизи краев фотопоглощения электронами различных оболочек атома (К, L, M-край; как правило, десятки и сотни эВ). Данные по свойствам атомов в этой спектральной области могут быть найдены в [73.2, 93.6, 78.1, 83.2]. Кроме того, возможно выполнение условия (19.1) в гамма-диапазоне, вблизи линии мессбауэровского ядерного перехода [87.5, 82.1, 76.2, 78.1]. Теория и эксперименты до 1987 г. наиболее полно описаны в книге [87.5]. После этого теория была развита на случай скользящего падения [91.5] (см. также [05.5, 06.3]), чтобы объяснить резкое возрастание черенковского излучения в этом случае [90.2]. Ряд работ были посвящены развитию теории излучения в кристаллах при черенковских условиях [89.3, 05.6, 06.14, 92.2]. Последние эксперименты в этой области посвящены разработке компактных источников интенсивного узкополосного рентгеновского излучения [01.4, 03.6] на основе ускорителей с энергией в несколько МэВ.

Выражение (17.1) остается справедливым и при учете мнимой части диэлектрической проницаемости. При расчёте характеристик ДИ с учетом поглощения и анализа спектра возникающего черенковского излучения будем следовать работе [06.4].

Рассмотрим для простоты случай $\alpha = 0$. Поле излучения в этом случае можно записать в виде

$$\mathbf{E}^r(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{e\chi}{4\pi\beta c} \frac{\exp(-h\rho)}{\rho - ik_z\sqrt{\varepsilon}} \frac{\exp(-ia\varphi) - 1}{\varphi} \left[\mathbf{k} \left[\mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{L}}{\rho} - i\mathbf{e}_z \right) \right] \right], \quad (19.2)$$

где

$$\varphi = \frac{k}{\beta} \left(1 - n_x \beta \sqrt{\varepsilon} \right), \quad \rho = \frac{\omega}{c\beta\gamma} \sqrt{1 + \varepsilon\gamma^2 \beta^2 n_y^2}, \quad \mathbf{L} = \left\{ 0, \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} n_y, 0 \right\}. \quad (19.3)$$

Учитывая близость реальной части диэлектрической проницаемости к единице, можно записать:

$$\sqrt{\varepsilon} = 1 + \frac{\chi' + i\chi''}{2}. \quad (19.4)$$

При этом имеем

$$\varphi = \frac{\omega}{2\beta c} \left(\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi' \right) - i \frac{\omega}{2c} \chi'', \quad (19.5)$$

$$\left| \rho - ik_z \sqrt{\varepsilon} \right|^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left(\gamma^{-2} + \theta^2 \right). \quad (19.6)$$

Нетрудно видеть, что излучение имеет максимум при $\theta \ll 1$. С учетом (19.5) и (19.6) спектрально-угловое распределение излучения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d(\hbar\omega)} &= \alpha \frac{|\chi|^2}{\pi^2} \frac{1 + 2\theta^2 \gamma^2 \sin^2 \phi}{1 + \theta^2 \gamma^2 \sin^2 \phi} \exp\left(-\frac{2h\omega}{c\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta^2 \sin^2 \phi} \right) \times \\ &\times \frac{\left| 1 - \exp\left(-i \frac{a\omega}{2c} \left(\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi' \right) \right) \exp\left(-\frac{a\omega}{2c} \chi'' \right) \right|^2}{\left(\gamma^{-2} + \theta^2 \right) \left[\left(\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi' \right)^2 + \chi''^2 \right]}, \end{aligned} \quad (19.7)$$

где направляющие косинусы выбраны в виде $n_x = \cos\theta$, $n_y = \sin\theta \sin\phi$, $n_z = \sin\theta \cos\phi$. Выражение (19.7) при $\chi'' = 0$ переходит в (17.9).

Пусть ширина пластинки существенно превосходит длину поглощения фотона в веществе:

$$a \gg \frac{2c}{\omega\chi''}. \quad (19.8)$$

В этом случае экспонентой в выражении (19.7) можно пренебречь. Сравним полученное выражение, описывающее излучение при условии, что траектория частицы проходит на расстоянии прицельного параметра h от поверхности мишени, с переходным излучением, возникающим тогда, когда частица пролетает сквозь бесконечную пластинку такой же ширины [87.5]:

$$\frac{d^2 W_{\text{ПИ}}(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d(\hbar\omega)} = \alpha \frac{\chi^2 \theta^2 \left| 1 - \exp \left\{ -\frac{a\omega}{2c} (\gamma^{-2} + \theta^2 + 1 - \varepsilon) \right\} \right|^2}{\pi^2 (\gamma^{-2} + \theta^2)^2 |\gamma^{-2} + \theta^2 + 1 - \varepsilon|^2}. \quad (19.9)$$

Из сравнения выражений (19.7) и (19.9) с (17.11) видим, что отношение выходов рентгеновского ПИ и ДИ не меняется в результате учета поглощения и выражается все той же формулой (17.11).

Рассмотрим знаменатель выражения (19.7)

$$(\gamma^{-2} + \theta^2) \left[(\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi')^2 + \chi''^2 \right].$$

Первый множитель минимален при $\theta = 0$, что дает пик излучения с шириной $\Delta\theta \sim \gamma^{-1}$. Второй множитель минимален при $\theta = \sqrt{\chi' - \gamma^{-2}}$, ширина соответствующего пика $\Delta\theta = \chi'' / \sqrt{\chi' - \gamma^{-2}}$. Этот пик существует лишь в области частот, где $\chi'(\omega) > \gamma^{-2}$ и $\chi''(\omega) \neq 0$ и описывает рентгеновское черенковское излучение, то есть, дифракционное излучение в условиях эффекта Вавилова–Черенкова. Таким образом, можно записать, что излучение максимально при

$$\begin{aligned} \theta_{\text{ДИ}} &= 0, & \Delta\theta &= \gamma^{-1}, \\ \theta_{\text{ВЧ}} &= \sqrt{\chi' - \gamma^{-2}}, & \Delta\theta &= \chi'' / \sqrt{\chi' - \gamma^{-2}}. \end{aligned} \quad (19.10)$$

Мы будем предполагать здесь, что условие (17.4) $h > c/\omega_p$ выполнено. В таком случае из выражения (19.7) следует, что для обеспечения заметной интенсивности излучения необходимо выполнение еще одного условия,

$$\gamma \theta \sin \phi \leq 1, \quad (19.11)$$

в дополнение к условиям (19.10).

Типичные значения χ' в окрестности линии поглощения не превышают 10^{-2} . Таким образом, для ультрарелятивистских частиц с $\gamma \gg (\chi')^{-1/2} \sim 10$ положение и ширина черенковского пика определяются только свойствами материала мишени: $\theta_{\text{вч}} \approx \sqrt{\chi'}$, $\Delta\theta \approx \chi''/\sqrt{\chi'}$.

Рис. 19.1 показывает два пика излучения от электрона с энергией 5 ГэВ. Пик при $\theta = 85,6$ мрад с шириной $\Delta\theta = 3,2$ мрад соответствует черенковскому эффекту; пик при $\theta = 0$ с шириной $\Delta\theta = \gamma^{-1}$ соответствует ДИ вперед. При этом пик при нулевом угле, т. е. ДИ вперед, превышает пики черенковского ДИ на два порядка.

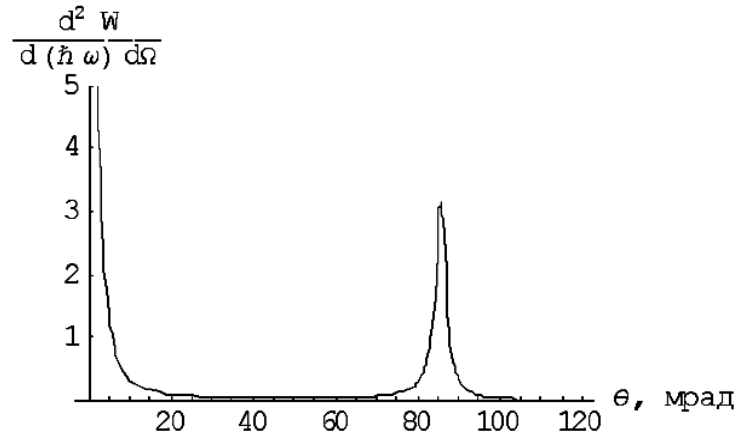


Рис. 19.1. Угловое распределение ДИ электронов с энергией 5 ГэВ от углеродной мишени ($\hbar\omega = 284$ эВ, $\chi' = 7,34 \times 10^{-3}$, $\chi'' = 2,76 \times 10^{-4}$, $\rho_C = 2,20$ г/см³). Прицельный параметр $h = 10$ мкм, $\phi = 0$,

$$\text{толщина мишени } a \gg \frac{2c}{\omega\chi''} \sim 5 \text{ мкм}$$

Как можно видеть из рис. 19.1, черенковское излучение испускается под довольно большими углами $\theta_{\text{вч}}$. Поэтому ограничение на углы $\gamma\theta \sin\phi \leq 1$, следующее из минимизации показателя экспоненты, в условиях черенковского эффекта дает условие

$$\phi \approx (\gamma\theta_{\text{вч}})^{-1} \approx \gamma^{-1}/\sqrt{\chi'} \ll 1. \quad (19.12)$$

Другими словами, конус излучения Вавилова – Черенкова распадается на два разделенных луча вдоль направлений $\theta = \theta_{\text{вч}}$, $\phi = 0, \pi$, с шириной $\Delta\theta \approx \chi''/\sqrt{\chi'}$ и $\Delta\phi \approx \gamma^{-1}/\sqrt{\chi'}$. На рис. 19.2 схематично изображены пик излучения вперед, и два луча, оставшихся от конуса

пик излучения вперед, и два луча, оставшихся от конуса черенковского излучения. Верхний и нижний лучи отвечают углам $\theta = \theta_{\text{вч}}$ и $\phi = 0, \pi$, соответственно; они обусловлены черенковским механизмом излучения. Их ширина равна: $\Delta\theta \approx \chi''/\sqrt{\chi'}$ и $\Delta\phi \approx \gamma^{-1}/\sqrt{\chi'}$. Центральный луч отвечает ДИ вперед, его максимум приходится на $\theta = 0$, а ширина равна $\Delta\theta = \gamma^{-1}$, $\Delta\phi \ll 1$.

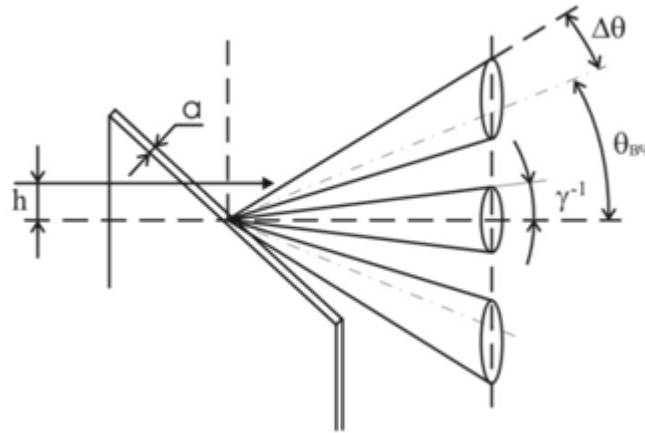


Рис. 19.2. Конус излучения ДИ вперед и две ветви излучения Вавилова–Черенкова

20. Дифракционное излучение от кристаллической мишени

В этом параграфе мы воспользуемся методом, примененным в параграфе 16. Рассмотрим генерацию излучения в бесконечном кристалле, определим плотность поляризационных токов, а затем перейдем к рассмотрению кристаллической мишени, ограниченной в пространстве.

Рассмотрим неоднородное вещество. Уравнения Максвелла могут быть записаны в виде

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)) - i \frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega);$$

$$\varepsilon(\omega) \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 4\pi (\rho_0(\mathbf{r}, \omega) + \rho(\mathbf{r}, \omega));$$

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega);$$

$$\text{div } \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (20.1)$$

В данном случае зависящая от координат часть функции отклика включена в плотность токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$, а не зависящая определяется функцией $\varepsilon(\omega)$. Величина \mathbf{j}_0 – плотность тока, описывающая движение заряженной частицы. Уравнение на поле $\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0$ получается аналогично уравнению (16.9) и имеет вид

$$\Delta \mathbf{H}'(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \varepsilon(\omega) \mathbf{H}'(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) + k^2 (1 - \varepsilon(\omega)) \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, \omega). \quad (20.2)$$

Решение этого уравнения на далеких расстояниях представляет собой сумму двух слагаемых, из которых первое, определяемое первым членом в правой части уравнения, дает ПИ и ДИ, в зависимости от геометрии задачи, и уже исследовано нами выше.

Для простоты далее рассмотрим случай, когда $\varepsilon'' = 0$. В области частот (16.4) средняя диэлектрическая проницаемость кристалла имеет вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2. \quad (20.3)$$

При условии (16.4) величина $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$ в кристалле может быть записана как

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{i\omega}{4\pi} \sum_{\mathbf{g} \neq 0} \chi_{\mathbf{g}} e^{i\mathbf{g}\mathbf{r}} \mathbf{E}_{\text{act}}(\mathbf{r}, \omega). \quad (20.4)$$

Здесь суммирование ведется по всем векторам обратной решетки $\mathbf{g} \neq 0$.

Следуя [06.5], будем использовать обозначения $\chi_{\mathbf{g}} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} f(\mathbf{g})$ и

$$f(\mathbf{g}) = \frac{F(\mathbf{g}) S(\mathbf{g})}{Z N_{\text{cell}}} e^{-W(\mathbf{g})}, \quad (20.5)$$

где $F(\mathbf{g})$ есть атомный форм-фактор ($F(0) = Z$), Z число электронов в атоме, $W(\mathbf{g})$ – фактор Дебая – Валлера, $S(\mathbf{g})$ – геометрический структурный фактор, характеризующий кристалл с элементарной ячейкой из

N_{cell} атомов. В приближении Дебая $W(\mathbf{g}) = g^2 u^2 / 2$, где u^2 есть средний квадрат амплитуды атомных тепловых колебаний.

Поле \mathbf{E}_{act} , действующее на каждый атом вещества, складывается из собственного поля заряда (16.13) и суммы вторичных полей от всех остальных атомов вещества. Отметим, что вклад вторичных полей приводит к «перенормировке» собственного поля заряда в веществе. Решая систему уравнений (20.1) в однородном веществе, мы получаем

$$\mathbf{E}_0^m(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{ie}{2\pi^2 \varepsilon(\omega)} \frac{\mathbf{q} - \mathbf{v} \varepsilon(\omega) \omega / c^2}{q^2 - k^2 \varepsilon(\omega)} \delta(\omega - \mathbf{q} \mathbf{v}). \quad (20.6)$$

Решение уравнения (20.2) при $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) \neq 0$ найдем приближенно. Для этого в первом приближении заменим поле \mathbf{E}_{act} полем (20.6). Тогда плотность поляризационного тока, определяющая излучение, имеет вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{i\omega}{4\pi} \int d^3 q \mathbf{E}_0^m(\mathbf{q}, \omega) \exp\{i\mathbf{q} \mathbf{r}\} \sum_{\mathbf{g} \neq 0} \chi_{\mathbf{g}} e^{i\mathbf{g} \mathbf{r}}. \quad (20.7)$$

Конечно, кроме (20.7), следует учитывать и плотность тока, связанную с не зависящей от координат частью диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$. Соответствующая плотность поляризационного тока дается формулой (16.15), а вклад в поле излучения дается выражением (16.14). Условие излучения Вавилова – Черенкова $c = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{n} \mathbf{v}$ на частотах диапазона (16.4) выполняется лишь вблизи линий поглощения. Вне этих узких спектральных диапазонов в области (16.4) $\sqrt{\varepsilon} < 1$, так что решение (16.14) дает нуль и поле излучения, получающееся в результате решения (20.2), с учетом (20.7) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^r(\mathbf{r}, \omega) = & -\frac{[\mathbf{n} \mathbf{H}^r(\mathbf{r}, \omega)]}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} = ie \frac{e^{ik'r}}{r} \sum_{\mathbf{g} \neq 0} \chi_{\mathbf{g}} \frac{[\mathbf{k}' [\mathbf{k}' (\mathbf{g} / \varepsilon(\omega) + \mathbf{v} \omega / c^2)]]}{(\mathbf{k}' - \mathbf{g})^2 - k^2 \varepsilon(\omega)} \times \\ & \times \delta(\omega - (\mathbf{k}' - \mathbf{g}) \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (20.8)$$

Формула (20.8) совпадает с формулой (3) из обзора [01.5]. Наличие дельта-функций определяет уравнение дисперсии:

$$\omega = \mathbf{v} \mathbf{k}' - \mathbf{g} \mathbf{v}. \quad (20.9)$$

Формулы (20.8) и (20.9) хорошо известны в теории параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) [01.5, 06.5]. Они получаются в рамках подхода, подобного кинематической теории рассеяния рентгеновских лучей в кристаллах. На существование ПРИ указывалось теоретически в работах [69.1, 71.1, 71.2], а первые эксперименты по обнаружению ПРИ были проведены на Томском синхротроне в 1985 г. [85.1, 85.2, 86.1]. Формально кинематическая теория пригодна лишь для достаточно тонких кристаллов [87.5, 92.1, 83.1], с толщиной $a \leq l_e \sim 1/|k\chi_g|$. При $\omega \sim 10$ КэВ это условие для “легких” кристаллов типа кремния соответствует толщине $l_e \sim 10$ мкм, однако и для толстых кристаллов кинематическая теория ПРИ применима, поскольку динамические эффекты в излучении по большей части компенсируются эффектами многократного рассеяния заряженной частицы в материале мишени [96.3]. Результаты кинематической теории параметрического излучения неоднократно подтверждены экспериментальными данными [93.7, 93.8, 96.2]. Результаты последних исследований ПРИ (как теоретических, так и экспериментальных) детально описаны в книге [06.5].

Итак, в качестве поляризованного тока в кинематическом приближении можно рассматривать сумму токов (16.15) и (20.7). Тогда поле излучения находится по формуле

$$\mathbf{E}^r(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\mathbf{k} \left[\mathbf{k} \int_V d^3r' \exp\{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'\} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \mathbf{E}_{0\perp}(\mathbf{r}', \omega) + \mathbf{E}_{0\perp}^m(\mathbf{r}', \omega) \sum_{\mathbf{g} \neq 0} \chi_{\mathbf{g}} e^{i\mathbf{g}\mathbf{r}'} \right) \right] \right]. \quad (20.10)$$

В (20.10) по сравнению с (16.12) и (20.8), поля $\mathbf{E}_0^m, \mathbf{E}_0$ заменены своими поперечными компонентами $\mathbf{E}_{0\perp}^m, \mathbf{E}_{0\perp}$, поскольку поле ультра-релятивистской частицы с лоренц-фактором

$$\gamma \gg 1 \quad (20.11)$$

практически поперечно к направлению ее скорости.

Поперечная компонента собственного поля заряда \mathbf{E}_0^m , движущегося в веществе, находится как $(\mathbf{E}_{0\perp}^m)_i = (\delta_{ij} - v_i v_j / v^2) (\mathbf{E}_0^m)_j$. Пусть заряд летит со скоростью $\mathbf{v} = \{v \cos \alpha, v \sin \alpha, 0\}$ так, что в момент времени

$t = 0$ он пролетает через начало координат. Поперечная часть собственного поля $\mathbf{E}_{0\perp}^m$ при таких начальных условиях имеет вид

$$\mathbf{E}_{0\perp}^m(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{ie}{2\pi^2} \frac{\mathbf{q} - \mathbf{v}\omega/v^2}{q^2 - k^2\varepsilon(\omega)} \delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}), \quad (20.12)$$

где в силу (16.9) $\varepsilon = 1$ везде, кроме полюсного множителя $(q^2 - k^2\varepsilon)^{-1}$. Величина $\mathbf{E}_{0\perp}$ определяется из (20.12) при $\varepsilon(\omega) = 1$.

Для примера применения формулы (20.10) к мишени ограниченного размера и для удобства дальнейшего сравнения дифракционного излучения с переходным и параметрическим, рентгеновским излучениями, рассмотрим излучение при пролете ультрарелятивистской заряженной частицы сквозь пластину, как показано на рис. 20.1.

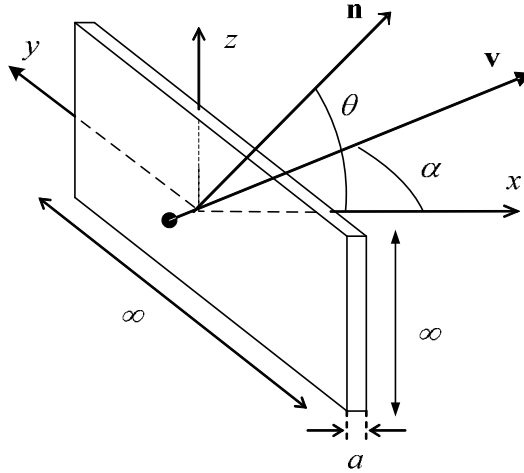


Рис. 20.1. Геометрия пролета заряженной частицы при генерации ПИ и ПРИ

В качестве действующего поля в первом приближении возьмем поле (20.12). Вычисляя интегралы в (20.10), нетрудно получить поле излучения как сумму переходного и параметрического излучений:

$$\mathbf{E}_{\text{ПИ+ПРИ}}^r(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_{\text{ПИ}}^r(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}_{\text{ПРИ}}^r(\mathbf{r}, \omega), \quad (20.13)$$

где

$$\mathbf{E}_{\text{ПИ}}^r(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{ie}{2\pi} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{v_x} \frac{1 - e^{-ia\varphi}}{\varphi} \frac{\left[\mathbf{k} \left[\mathbf{k} (\mathbf{L} + k'_z \mathbf{e}_z) \right] \right]}{\rho^2 + k_z'^2}, \quad (20.14)$$

$$\mathbf{E}_{\text{ПРИ}}^r(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{ie}{2\pi} \frac{1}{v_x} \sum_{\mathbf{g} \neq 0} \chi_{\mathbf{g}} \frac{1 - e^{-ia\varphi_{\mathbf{g}}}}{\varphi_{\mathbf{g}}} \frac{\left[\mathbf{k} \left[\mathbf{k} (\mathbf{L}_{\mathbf{g}} + (k'_z - g_z) \mathbf{e}_z) \right] \right]}{\rho_1^2 + (k'_z - g_z)^2}. \quad (20.15)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{g}} &= \frac{\omega - \mathbf{v}\mathbf{k}' + \mathbf{g}\mathbf{v}}{v_x}, \quad \rho_1^2 = \left(\frac{\omega - v_y(k'_y - g_y)}{v_x} \right)^2 + (k'_y - g_y)^2 - \varepsilon \omega^2 / c^2, \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}} &= \frac{\omega - v_y(k'_y - g_y)}{v_x} \mathbf{e}_x + (k'_y - g_y) \mathbf{e}_y - \mathbf{v}\omega / v^2, \end{aligned} \quad (20.16)$$

при этом

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{\mathbf{g}}(\mathbf{g} = 0), \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}_{\mathbf{g}}(g_y = 0), \\ \rho^2 &= \left(\frac{\omega - v_y k'_y}{v_x} \right)^2 + k_y'^2 - \omega^2 / c^2. \end{aligned} \quad (20.17)$$

Обычно при рассмотрении параметрического рентгеновского излучения даже в рамках кинематического подхода [95.2, 97.4, 01.6] (не говоря уже о динамической теории [03.7, 97.4, 01.7, 01.6]) учитывают эффекты дифракции ПИ, т. е. получают поле поляризационного излучения в виде суммы «параметрическое рентгеновское + дифрагированное переходное излучение». В работах [97.4, 01.6] показано, что вклад эффектов дифракции ПИ может быть одного порядка по сравнению с ПРИ. Однако, в данной работе мы ограничимся рассмотрением дифракции собственного поля заряда на неоднородностях вещества – т. е. рассмотрением ПИ и ПРИ, а вопросы дифракции реальных фотонов полей ПИ и ПРИ затрагивать не будем. Формально эффекты дифракции реальных фотонов поля излучения мы потеряли, когда предположили, что излучение распространяется сквозь среду с некоторым средним значением $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$, не зависящим от координат.

Отметим, что учет отличия дифрагированного ПИ от обычного ПИ несущественно меняет качественную картину поляризационного излучения для тонких кристаллов, однако такое отличие может оказаться решающим для толстых кристаллов с толщиной $a \gg l_e \sim 1 / |k\chi_{\mathbf{g}}|$. В этом случае в рамках динамического приближения возможно появление принципиально новых динамических эффектов в излучении. Так, например, именно для дифрагированного ПИ возможен эффект Боррмана

(аномально малое поглощение дифрагированного ПИ, распространяющегося под брэгговским углом) [99.4, 01.8].

Теперь перейдем к случаю пролета заряда в вакууме вблизи тонкой кристаллической пластинки конечной ширины b (см. рис. 17.1). Здесь действующее поле также заменяется в первом приближении полем пролетающего заряда, но следует учесть, что заряд пролетает в вакууме, а поле ищем в среде. Пусть заряд пролетает на высоте h над средой, расположенной при $z < 0$. В отсутствие излучения полное поле в вакууме равно просто собственному полю заряда (мы снова берем только поперечную компоненту поля):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{0\perp}(z, \mathbf{q}_{\perp}, \omega) = & -\frac{ie}{2\pi} \exp\left\{-(h-z)\sqrt{q_{\perp}^2 - k^2}\right\} \times \\ & \times \left(\frac{\mathbf{q}_{\perp} - \mathbf{v}\omega/v^2}{\sqrt{q_{\perp}^2 - k^2}} - i\mathbf{e}_z \right) \delta(\omega - \mathbf{q}_{\perp} \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (20.18)$$

Решение уравнений Максвелла в однородной безграничной среде в отсутствие внешних источников можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{0\perp}^m(z, \mathbf{q}_{\perp}, \omega) = & \mathbf{B}(\mathbf{q}_{\perp}, \omega) \exp\left\{z\sqrt{q_{\perp}^2 - \varepsilon k^2}\right\} + \\ & + \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\perp}, \omega) \exp\left\{-z\sqrt{q_{\perp}^2 - \varepsilon k^2}\right\}. \end{aligned} \quad (20.19)$$

Поскольку $\omega = \mathbf{q}_{\perp} \mathbf{v}$, то при $z < 0$ второе слагаемое в (20.19) описывает не физическое экспоненциально растущее «вглубь» среды решение. Для устранения этого решения положив $\mathbf{C}(\mathbf{q}_{\perp}, \omega) = 0$ и пренебрегая, как и раньше, в силу (16.9), отличием множителя $\varepsilon(\omega)$ от единицы, находим коэффициент \mathbf{B} из обычных граничных условий (равенство на границе тангенциальных компонент электрического поля и нормальных компонент индукции):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{q}_{\perp}, \omega) = & -\frac{ie}{2\pi} \exp\left\{-h\sqrt{q_{\perp}^2 - k^2}\right\} \times \\ & \times \left(\frac{\mathbf{q}_{\perp} - \mathbf{v}\omega/v^2}{\sqrt{q_{\perp}^2 - k^2}} - i\mathbf{e}_z \right) \delta(\omega - \mathbf{q}_{\perp} \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (20.20)$$

Вычисляя интегралы в (20.10) с учетом (20.18) – (20.20), нетрудно получить поле излучения в виде суммы поля обычного ДИ и параметрического ДИ (сокращенно ПДИ), в полной аналогии с формулами (20.13) – (20.15):

$$\mathbf{E}_{\text{ДИ+ПДИ}}^r(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_{\text{ДИ}}^r(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}_{\text{ПДИ}}^r(\mathbf{r}, \omega), \quad (20.21)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{ДИ}}^r(\mathbf{r}, \omega) = & -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{ie}{4\pi} \frac{1}{v_x} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1 - e^{-ia\varphi}}{\varphi} \times \\ & \times \exp\{-h\rho\} \left[\mathbf{k} \left[\mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{L}}{\rho} - i\mathbf{e}_z \right) \right] \right] \frac{1 - \exp\{-b\rho\} \exp\{ibk'_z\}}{\rho - ik'_z}, \end{aligned} \quad (20.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{ПДИ}}^r(\mathbf{r}, \omega) = & -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{ie}{4\pi} \frac{1}{v_x} \sum_{\mathbf{g} \neq 0} \chi_{\mathbf{g}} \frac{1 - e^{-ia\varphi_{\mathbf{g}}}}{\varphi_{\mathbf{g}}} \times \\ & \times \exp\{-h\rho_2\} \left[\mathbf{k} \left[\mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{L}_{\mathbf{g}}}{\rho_2} - i\mathbf{e}_z \right) \right] \right] \frac{1 - \exp\{-b\rho_1\} \exp\{ib(k'_z - g_z)\}}{\rho_1 - i(k'_z - g_z)}. \end{aligned} \quad (20.23)$$

Здесь используется обозначение

$$\rho_2^2 = \left(\frac{\omega - v_y(k'_y - g_y)}{v_x} \right)^2 + (k'_y - g_y)^2 - \omega^2/c^2. \quad (20.24)$$

Обратим внимание на отличие выражения ρ_2 от выражения для ρ_1 , определенного второй из формул (20.16).

Итак, в случае кристаллической мишени, к уже рассмотренным ДИ и ПИ добавляются параметрическое ДИ и ПРИ, если частица, соответственно, пролетает вблизи мишени или пересекает ее. Рассмотрим формулы (20.23) и (20.15). Нетрудно видеть, что максимальный вклад дают те \mathbf{g} , которые удовлетворяют соотношению $\varphi_{\mathbf{g}} = 0$, т. е. условию (20.9). В связи с этим можно рассматривать каждый из дифракционных максимумов отдельно, причем полная излученная энергия будет суммой по всем возможным \mathbf{g} .

Спектрально-угловое распределение интенсивности излучения вблизи максимума, отвечающего некоторому фиксированному вектору обратной решетки \mathbf{g} , в случае дифракционного излучения можно представить в виде

$$\frac{d^2 W_{\mathbf{g}}^{\text{ПДИ}}(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d(\hbar\omega)} = F_1 F_b(\mathbf{g}) \frac{\exp\{-2h\rho_2\}}{4} \frac{1 - n_z^2 + (L_{\mathbf{g}}^2 - (\mathbf{nL}_{\mathbf{g}})^2) / \rho_2^2}{4(c/\omega)^2 (\rho_1^2 + (k'_z - g_z)^2)}, \quad (20.25)$$

где

$$F_1 = \alpha \frac{|\chi_{\mathbf{g}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega a}{2v_x} (1 - \sqrt{\varepsilon} \mathbf{nv}/c + \mathbf{gv}/\omega) \right)}{\pi^2 (1 - \sqrt{\varepsilon} \mathbf{nv}/c + \mathbf{gv}/\omega)^2}, \quad (20.26)$$

а фактор F_b определяет зависимость излученной энергии от ширины пластинки b :

$$F_b(b, \omega, \mathbf{g}) = 1 - 2 \exp\{-b\rho_1\} \cos(b(k'_z - g_z)) + \exp\{-2b\rho_1\}. \quad (20.27)$$

Аналогично, для ПРИ в случае пролета заряда сквозь бесконечную пластинку, получаем из (20.15):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_{\mathbf{g}}^{\text{ПРИ}}(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d(\hbar\omega)} &= \\ &= F_1 \frac{(1 - n_z^2)(k'_z - g_z)^2 + (L_{\mathbf{g}}^2 - (\mathbf{nL}_{\mathbf{g}})^2) + 2(k'_z - g_z)n_z(\mathbf{nL}_{\mathbf{g}})}{(c/\omega)^2 (\rho_1^2 + (k'_z - g_z)^2)^2}. \end{aligned} \quad (20.28)$$

Для реальной кристаллической мишени в формулах (20.25) и (20.28) фактически возникает сумма дельта-функций, в силу предельного соотношения

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\omega a}{2v_x} (1 - \sqrt{\varepsilon} \mathbf{nv}/c + \mathbf{gv}/\omega) \right)}{(1 - \sqrt{\varepsilon} \mathbf{nv}/c + \mathbf{gv}/\omega)^2} \rightarrow \pi N \frac{\omega d_x}{2v_x} \delta(1 - \sqrt{\varepsilon} \mathbf{nv}/c + \mathbf{gv}/\omega), \quad (20.29)$$

справедливого при выполнении условия

$$\frac{\omega a}{2v_x} \approx N \frac{\omega d_x}{2v_x} \approx N \frac{d_x}{\lambda} \frac{\pi}{\cos \alpha} \gg 1, \quad (20.30)$$

где N – число периодов, а d_x – размер элементарной ячейки вдоль оси x . Отсюда следует, что в спектрально-угловом распределении параметрического ДИ возникает набор резких пиков. Условие (20.9) определяет связь между частотой излучения, энергией частицы, параметрами решетки и углами наблюдения. При этом ширина отдельных пиков обратно пропорциональна числу периодов N , а высота прямо пропорциональна N^2 .

Интегрирование (20.28) по частотам с помощью дельта-функции дает

$$\begin{aligned} \frac{dN(\mathbf{n})}{d\Omega} &= \frac{1}{\hbar \omega_B} \int_0^\infty d\omega \frac{d^2 W(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d\omega} = \\ &= \alpha \frac{\omega_B |\chi_{\mathbf{g}}|^2}{4\pi v_x} \frac{a}{2 \sin^2 \theta_B} \frac{\left[\mathbf{k}(\mathbf{g} + \mathbf{v}\omega/v^2) \right]^2}{\left((\mathbf{k}' - \mathbf{g})_{\perp}^2 + \frac{\omega_B^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon) \right)^2}. \end{aligned} \quad (20.31)$$

Вводя углы θ_x и θ_y относительно направления излучения квантов вблизи направления брэгговского отражения, можно преобразовать последнюю формулу к виду

$$\frac{dN(\mathbf{n})}{d\Omega} = \frac{e^2}{\hbar c} a \frac{\omega_B |\chi_{\mathbf{g}}|^2}{4\pi v_x} \frac{1}{2 \sin^2 \theta_B} \frac{\theta_x^2 \cos^2 2\theta_B + \theta_y^2}{\left(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \gamma^{-2} + \omega_p^2 / \omega_B^2 \right)^2}.$$

Эта формула хорошо известна в кинематической теории параметрического излучения [01.5, 06.5].

Отметим, что, в отличие от дифракционного излучения от аморфной мишени (см.), параметрическое ДИ имеет разные характерные расстояния убывания для зависимости от прицельного параметра h и от толщины пластинки b . Чтобы лучше увидеть это, представим коэффициенты ρ_1^2 и ρ_2^2 в виде

$$\begin{aligned}
\rho_1^2 &= \frac{\omega^2}{v_x^2} \left[1 - \varepsilon(\omega) \beta^2 - 2\beta_y (c/\omega) (k'_y - g_y) + \right. \\
&\quad \left. + (\beta c/\omega)^2 (k'_y - g_y)^2 + \varepsilon(\omega) \beta_y^2 \right], \\
\rho_2^2 &= \frac{\omega^2}{v_x^2} \left[1 - \beta^2 - 2\beta_y (c/\omega) (k'_y - g_y) + \right. \\
&\quad \left. + (\beta c/\omega)^2 (k'_y - g_y)^2 + \varepsilon(\omega) \beta_y^2 \right].
\end{aligned} \tag{20.32}$$

Условие минимальности при фиксированных h , ω и γ для ρ_1^2 и ρ_2^2 имеет один и тот же вид:

$$k'_y - g_y = \frac{\omega}{c} \frac{\beta_y}{\beta^2} = \frac{\omega}{c} \frac{\sin \alpha}{\beta}, \tag{20.33}$$

при этом

$$\begin{aligned}
(\rho_1^2)_{\min} &= \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \varepsilon \beta^2) = \frac{\omega^2}{v^2} (\gamma^{-2} + \omega_p^2 / \omega^2), \\
(\rho_2^2)_{\min} &= \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2) = \frac{\omega^2}{v^2} \gamma^{-2}.
\end{aligned} \tag{20.34}$$

Отсюда характерная величина прицельного параметра h определяется как

$$h_{\text{eff}} \sim (\rho_2)_{\min}^{-1} = \gamma \lambda. \tag{20.35}$$

В то же время характерный размер излучающего слоя кристаллической структуры определяется из условия

$$b_{\text{eff}} \sim (\rho_1)_{\min}^{-1} = \begin{cases} \gamma \lambda, & \omega \geq \gamma \omega_p, \\ c/\omega_p, & \omega \ll \gamma \omega_p. \end{cases} \tag{20.36}$$

Величины (20.35) и (20.36) фактически есть характерные расстояния, на которых убывает собственное поле ультрарелятивистской заряженной частицы в вакууме и в веществе, соответственно. Разница между ними

обусловлена довольно сильной экранировкой собственного поля ультрарелятивистской заряженной частицы в веществе на высоких частотах $\omega_p \ll \omega \ll \gamma\omega_p$ (в то время как для поля излучения это же вещество практически прозрачно). При этом для обычного ДИ (рассмотренного в предыдущих параграфах этой главы) величины h_{eff} и b_{eff} совпадают и равны $\gamma\lambda$, поскольку в этом случае ДИ определяется только внешней формой и размерами мишени и ее средней диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. Действительно, из формулы (20.10) видно, что обычное ДИ определяется рассеянием на мишени собственного поля заряженной частицы в вакууме (первое слагаемое), в то время как параметрическое ДИ есть результат рассеяния на кристаллической структуре мишени поля заряда в веществе.

Отметим, что для тех частиц пучка, которые пролетают вблизи поверхности мишени на расстоянии $h \leq c/\omega_p$, частота обрезания спектра $\omega_c \approx \gamma c/h \geq \gamma\omega_p$ и спектр параметрического ДИ подобен спектру ПРИ.

Условие (20.33) может и не выполняться. Например, в силу требования $n_y^2 \leq 1$ условие (20.33) может быть выполнено, только если $cg_y/\omega \approx \lambda/d_y < 1$, где d_y – период решетки вдоль оси y . При $d_y \sim 0.5$ нм условие $\lambda < d_y$ соответствует энергии фотона $\hbar\omega > 2.5$ КэВ. Невыполнение условия (20.33) означает лишь, что в таком случае функции ρ_1^2 и ρ_2^2 не имеют минимума в виде точки экстремума.

Рассмотрим теперь характеристики максимумов параметрического дифракционного излучения. При выполнении условия (20.33) показатель экспоненты $\exp\{-2h\rho_2\}$ минимален, а $\mathbf{A}_g = 0$. Подставляя (20.33) в (20.25) и (20.28), получаем:

$$\frac{d^2 W_g^{\text{ПДИ}}(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d(\hbar\omega)} = \alpha \frac{|\chi_g|^2}{\pi^2 \cos^2 \alpha} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega a}{2c} \Phi\right)}{\Phi^2} \times$$

$$\times \frac{1 - n_z^2}{\gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \beta^2 \left(\sqrt{\varepsilon} n_z - \frac{cg_z}{\omega}\right)^2} \frac{F_b(\mathbf{g})}{4} \exp\left\{-\frac{2h\omega}{c\gamma}\right\}, \quad (20.37)$$

$$\frac{d^2 W_g^{ПРИ}(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega d(\hbar\omega)} = \alpha \frac{|\chi_g|^2}{\pi^2 \cos^2 \alpha} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega a}{2c} \Phi\right)}{\Phi^2} \times$$

$$\times \frac{1 - n_z^2}{\gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \beta^2 \left(\sqrt{\varepsilon} n_z - \frac{c g_z}{\omega}\right)^2} \left(\sqrt{\varepsilon} n_z - \frac{c g_z}{\omega}\right)^2. \quad (20.38)$$

Здесь

$$\Phi = \beta^{-1} \cos \alpha + \frac{\lambda}{d_x} m - \sqrt{\varepsilon} n_x,$$

причем компонента вектора обратной решетки взята в виде

$$g_x = 2\pi m / d_x,$$

где m – целое, d_x – период решетки вдоль оси x . Отметим, что в уравнениях (20.37) и (20.38) углы, задаваемые n_z и n_x , не произвольны, на них наложено ограничение (20.33). Отсюда следует, что максимумы и параметрического ДИ, и ПРИ сосредоточены в узких пиках, определяемых равенством $\Phi = 0$, т. е.

$$-\beta \frac{\lambda}{d_x} m = \cos \alpha - \beta \sqrt{\varepsilon} n_x. \quad (20.39)$$

Однако существует также дополнительное условие

$$k'_z - g_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} n_z - g_z = 0, \quad (20.40)$$

при котором параметрическое ДИ максимально, а ПРИ обращается в нуль.

В соответствии с $n_x = \cos \theta$. Пусть $\theta = \pi - \alpha$. Тогда из (20.39) получаем обычное брэгговское условие

$$-\frac{\lambda}{d_x} m = 2 \cos \alpha. \quad (20.41)$$

Иначе говоря, на брэгговской частоте $\omega_B = \frac{\pi c}{d_x \cos \alpha}$ максимум излучения сосредоточен вблизи $\theta = \pi - \alpha$. Теперь рассмотрим излучение вдоль скорости частицы, т. е. при $\theta = \alpha$. В этом случае условие (20.39) принимает вид

$$-2 \frac{\lambda}{d_x} m = (\gamma^{-2} + \omega_p^2 / \omega^2) \cos \alpha. \quad (20.42)$$

Условие (20.42) фактически приводит к подавлению параметрического ДИ вдоль скорости частицы. Действительно, при $\omega \ll \gamma \omega_p$ соотношение (20.42) принимает вид

$$-\frac{4\pi c}{d_x \omega_p} m = \frac{\omega_p}{\omega} \cos \alpha. \quad (20.43)$$

Величина $4\pi c / \omega_p \sim 10^{-5}$ см при характерных значениях $\omega_p \approx 4 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$. Период кристаллической структуры $d_x \sim 10^{-7} \ll 4\pi c / \omega_p$, поэтому левая часть (20.43) больше единицы. Поскольку при этом правая часть меньше единицы, выполнение условия (20.43) для кристаллов невозможно.

На высоких частотах $\omega \sim \gamma \omega_p$ (20.42) принимает вид

$$d_x \approx \gamma \frac{2\pi c}{\omega_p} \left(\frac{-m}{\cos \alpha} \right). \quad (20.44)$$

Это условие также не выполнимо для кристаллов. Из сказанного выше видно, что в кинематическом приближении параметрическое излучение от кристалла вдоль скорости частицы на частотах $\omega \leq \gamma \omega_p$ подавлено. В действительности такое излучение исследуется как теоретически [03.7, 97.5], так и экспериментально [04.4], но для его расчета требуется использование динамической теории параметрического излучения. Физически оно может рассматриваться как результат вторичной дифракции волны, рассеянной под брэгговским углом.

Отметим, что при $\omega \gg \gamma \omega_p$ условие (20.42) принимает вид

$$\lambda = \gamma^{-2} d_x \left(\frac{\cos \alpha}{-2m} \right). \quad (20.45)$$

Это условие вполне выполнимо, что означает принципиальную возможность параметрического излучения вдоль скорости даже и в рамках кинематического приближения.

Заметим, что выражение (20.42) следует из законов сохранения. Поэтому в случае мишеней, обладающих периодической структурой с периодом порядка микрон и больше, параметрическое рентгеновское излучение (и ПРИ, и ПДИ) вдоль скорости частицы вполне возможно даже и в рамках кинематической теории. Примером таких структур могут служить искусственные слоистые среды.

Вкратце результаты, касающиеся дифракционного излучения от кристаллической мишени, можно сформулировать следующим образом. Спектр параметрического ДИ состоит из пиков, удовлетворяющих тому же условию, что и пики ПРИ (см. (20.9)). При этом спектр параметрического ДИ имеет частоту обрезания, характерную для любого ДИ: $\omega_c \approx c\gamma/h$. Кроме того, можно еще отметить качественное отличие b_{eff} –

толщины эффективно излучающего слоя для ДИ и для параметрического ДИ. Именно $b_{\text{eff}}^{\text{ДИ}} \sim \gamma\lambda$, тогда как $b_{\text{eff}}^{\text{ПДИ}} \sim \begin{cases} \gamma\lambda, & \omega \geq \gamma\omega_p, \\ c/\omega_p, & \omega \ll \gamma\omega_p. \end{cases}$ Как упоминалось выше, такое различие связано с экранировкой собственного поля заряженной частицы в веществе на расстояниях $\geq c/\omega_p$ в диапазоне частот $\omega_p \ll \omega \ll \gamma\omega_p$.

Интересно отметить, что поля ПИ и ДИ связаны с плотностью поляризованного тока:

$$\frac{i\omega}{4\pi} (\varepsilon(\omega) - 1) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega)$$

(см. (16.12)), где \mathbf{E}_0 – поле заряда в вакууме. Этот результат является точным (если не считать возможных поправок, связанных с эффектами локального поля) и совпадает с хорошо известными выражениями для поля излучения Вавилова–Черенкова и ПИ при $\omega \gg \omega_p$. В то же время при рассмотрении ПРИ известная формула Гер-Микаеляна (20.8) получается при выборе в качестве первого приближения в поляризованном токе (20.4) поля заряда в веществе (см. (20.6)), а не в вакууме.

Изложенные выше результаты получены в рамках подхода, подобного кинематической теории параметрического излучения, и применимы для достаточно тонких кристаллических мишеней [87.5, 01.5], с толщиной, не превышающей длины экстинкции $l_e \sim 1/|k\chi_g|$. Если рассматривать излучение как результат рассеяния виртуальных фотонов собственного поля заряженной частицы на неоднородностях вещества, то примененный нами подход можно описать так: мы учли рассеяние виртуальных фотонов в материале мишени (рассеяние на гранях мишени дает ПИ или ДИ; рассеяние на кристаллической структуре дает ПРИ или параметрическое ДИ), но не рассматривали рассеяние реальных фотонов поля излучения (т. е. такие эффекты как дифрагированное ПИ и ДИ, а также дифрагированное ПРИ и параметрическое ДИ).

Следует отметить, что не рассмотренные здесь эффекты дифракции ДИ могут оказаться сравнимыми с параметрическим ДИ, как это имеет место для дифрагированного ПИ и ПРИ [97.4, 01.6]. Кроме того, как известно, динамические эффекты в ПРИ сильно маскируются эффектами многократного рассеяния заряженных частиц в материале мишени [96.3]. В случае параметрического ДИ такого рассеяния нет, и динамические эффекты, вероятно, могут играть значительную роль для мишеней с толщиной больше $l_e \sim 1/|k\chi_g|$.

5. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НА РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЕ

21. Дифракционное излучение на резонансной частоте от неплоской поверхности

С микроскопической точки зрения дифракционное излучение представляет собой результат рассеяния собственного поля равномерно движущегося заряда на атомах среды. Сечение рассеяния электромагнитной волны на атоме максимально вблизи резонанса, так что интенсивность дифракционного излучения должна возрасти на резонансных частотах. Как известно, на близких расстояниях поле излучателя, в основном, продольное (поперечное поле намного меньше продольного). Передача энергии от возбужденного атома невозбужденному атому в плотных средах происходит поэтому, в основном, не через излучение и поглощение резонансных поперечных волн, а через продольное поле путем резонансного диполь-дипольного взаимодействия.

В результате взаимодействие резонансного фотона с атомом с подавляющей вероятностью приводит к исчезновению фотона и появлению электронного возбуждения, в дальнейшем мигрирующего по веществу в виде экситона. По этой причине резонансный фотон, т. е. фотон с энергией, близкой к энергии экситона, не проникает вглубь вещества. Из-за того же невозможно излучение резонансных поперечных волн атомом из глубины плотной среды. Таким образом, вероятность образования дифракционного излучения на резонансной частоте при рассеянии на атоме в плотной среде намного меньше вероятности образования экситона, поэтому дифракционное излучение образуется в результате рассеяния собственного поля частицы на атомах приповерхностного слоя. Толщина этого слоя определяется коэффициентом поглощения поперечных резонансных волн. Малая толщина этого слоя позволяет ограничиться приближением однократного рассеяния резонансной компоненты собственного поля быстрой частицы на атомах среды. Такое приближение в задаче об отражении резонансных электромагнитных волн от поверхности среды было предложено Ферми (см., например, [71.3]). Это дало возможность решить задачу об отражении без использования обычных макроскопических граничных условий и привело к хорошему согласованию с экспериментом.

Следует учесть, что поле заряда, движущегося с постоянной скоростью v и энергией $E \equiv \gamma mc^2$, убывает с расстоянием h в перпендикулярном скорости направлении как $\exp(-h\omega/\gamma v)$. Поэтому поляризационные токи, являющиеся источником дифракционного излучения,

экспоненциально убывают с удалением от поверхности. Это увеличивает вклад в резонансное излучение от близких к поверхности атомов и тем самым повышает точность приближения однократного рассеяния резонансной компоненты поля быстрой частицы на атомах среды. Обычно дифракционное излучение рассматривается методами макроскопической электродинамики, с учетом влияния границ с помощью граничных условий [66.3, 76.1, 00.1, 98.2]. Эти методы удобны в задачах о дифракционном излучении от поверхностей сравнительно простого профиля. Однако, для сред с поверхностью сложного профиля точный учет граничных условий приводит к существенным трудностям и требует разработки специальных приближенных методов для каждого конкретного вида профиля поверхности.

Обобщение развитого в [71.3] метода рассмотрения резонансного рассеяния волн на задачу о дифракционном излучении на резонансных частотах [05.7] позволяет сравнительно просто рассматривать дифракционное излучение на резонансных частотах для поверхностей сложного профиля.

Рассмотрим дифракционное излучение на частоте, близкой к собственной частоте среды, в случае, когда частица движется по закону $x = a$, $y = 0$, $z = vt$ мимо однородной среды с плотностью числа молекул n_0 , а объем среды ограничен условием $X_a < \zeta(Y_a, Z_a)$. Как уже отмечалось, при $\zeta = \text{const}$, т. е. при равномерном движении заряда параллельно поверхности однородной среды, излучения не возникает. Экспоненциальное убывание поля равномерно движущегося заряда приводит к тому, что поляризационные токи в глубине среды не дают вклада в дифракционное излучение, а источником излучения от однородной среды являются поляризационные токи вблизи неровностей поверхности.

Найдем на поверхности среды $X = \zeta(Y, Z)$ точку с минимальным значением координаты X и выберем оси координат так, чтобы плоскость $X = 0$ проходила через эту точку. Как отмечено выше, поляризационные токи в области $X < 0$ не влияют на дифракционное излучение. Это позволяет при вычислении плотности поляризационного тока учесть только плотность тока в слое между поверхностью $X = \zeta(Y, Z)$ и плоскостью $X = 0$. Во избежание несущественных усложнений рассмотрим дифракционное излучение от среды, поверхность которой имеет вид $X = \zeta(Z)$. Амплитуда поперечной резонансной волны, излученной находящейся в точке \mathbf{R}_a молекулой, экспоненциально убывает по мере движения в среде из-за неупругого рассеяния. Направление на

точку наблюдения зададим единичным вектором \mathbf{n} с компонентами n_x, n_y, n_z . Пусть это направление пересекает поверхность среды в точке $\mathbf{R}_a + \mathbf{R}'(X', Y', Z')$, координату z которой, $Z_a + Z' \equiv Z_a + Z'(\mathbf{R}_a)$, можно определить из уравнения

$$\zeta(Z_a + Z') = X_a + Z' \frac{n_x}{n_z}. \quad (21.1)$$

Расстояние между излучающей молекулой и точкой пересечения с поверхностью равно $|\mathbf{R}'(X', Y', Z')| = |Z'(\mathbf{R}_a)/n_z|$. Учесть убывание амплитуды резонансной волны на пути внутри вещества можно, умножив плотность внутримолекулярного тока на величину $\exp\{-g|Z'(\mathbf{R}_a)/2n_z|\}$, где g – коэффициент поглощения. Следовательно, поглощение резонансной поперечной волны внутри вещества можно учесть, если заменить обычное выражение для фурье-образа плотности поляризованного тока в приближении однократного рассеяния

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) = -i \frac{\omega}{(2\pi)^3} \alpha(\omega) \sum_a \int d^3 p E_0(\mathbf{p}, \omega) \exp\{-i(\mathbf{p} - \mathbf{q})\mathbf{R}_a\} \quad (21.2)$$

Выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{j}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)(\mathbf{q}, \omega) = & -i \frac{\omega}{(2\pi)^3} \alpha(\omega) \sum_a \int d^3 p E_0(\mathbf{p}, \omega) \times \\ & \times \exp\{-i(\mathbf{p} - \mathbf{q})\mathbf{R}_a - g|Z'(\mathbf{R}_a)/n_z|\}. \end{aligned} \quad (21.3)$$

Здесь $\alpha(\omega)$ – поляризуемость молекулы, $E_0(\mathbf{p}, \omega)$ – фурье-образ по координатам и времени электрического поля пролетающей вблизи поверхности вещества частицы, \mathbf{R}_a – радиус-вектор центра масс молекулы, суммирование проводится по всем молекулам среды. Длина волны поля излучения, соответствующая резонансной частоте, намного больше атомных размеров. В этом случае в однородной среде можно пренебречь влиянием флуктуаций поляризованного тока, заменив (21.3) его усредненным по координатам молекул значением:

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) = -i \frac{\omega}{(2\pi)^3} \alpha(\omega) \int d^3 p \mathbf{E}_0(\mathbf{p}, \omega) \times \left\langle \sum_a \exp \left\{ -i(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \mathbf{R}_a - g |Z'(\mathbf{R}_a)/n_z| \right\} \right\rangle. \quad (21.4)$$

Энергия излучения, вылетевшего из вещества за все время пролета частицы, в интервале частот $d\omega$ вблизи резонансной частоты в элемент телесного угла $d\Omega$ в направлении вектора \mathbf{k} может быть получена в виде

$$\frac{d^2 W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{c} (2\pi)^6 \left| \left[\mathbf{k} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) \right] \right|^2 = \frac{\omega^2}{c} \left| \alpha(\omega) \int d^3 p \left[\mathbf{k} \mathbf{E}_0(\mathbf{p}, \omega) \right] \times \left\langle \sum_a \exp \left\{ -i(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \mathbf{R}_a - g |Z'(\mathbf{R}_a)/2n_z| \right\} \right\rangle \right|^2. \quad (21.5)$$

Вводя обозначение

$$S(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} dY \int_{-\infty}^{\infty} dZ \times \int_0^{\varepsilon(Y, Z)} dX \exp \left\{ -i(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \mathbf{R} - gZ'(\mathbf{R})/2n_z \right\}, \quad (21.6)$$

можно записать

$$\left\langle \sum_a \exp \left\{ -i(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \mathbf{R}_a - gZ'(\mathbf{R}_a)/2n_z \right\} \right\rangle = (2\pi)^3 n_0 S(\mathbf{p} - \mathbf{k}). \quad (21.7)$$

Из (21.6) можно видеть, что область больших значений переменной X не дает заметного вклада в интеграл по двум причинам: из-за убывающей экспоненты $\exp \left\{ -gZ'(\mathbf{R})/2n_z \right\}$ и из-за верхнего предела. Поэтому возможны два качественно различных случая. В первом случае толщина эффективного излучающего слоя меньше длины поглощения резонансной волны, тогда главную роль играет верхний предел, а убывающая экспонента не успевает сильно измениться в интервале интегрирования. В этом случае можно пренебречь убывающей экспонентой, что эквивалентно использованию тока в форме (21.2) вместо (21.3). Тогда $S(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ вместо (21.6) принимает вид

$$S(\mathbf{p}-\mathbf{k})=(2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{\infty}dY\int_{-\infty}^{\infty}dZ\int_0^{\zeta(Y,Z)}dX\exp\{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{R}\}. \quad (21.8)$$

Во втором случае длина поглощения резонансной волны мала по сравнению с толщиной эффективного слоя неоднородностей. В этом случае верхний предел при интегрировании по X в (21.6) играет небольшую роль и можно интегрировать по X в (21.6) до бесконечности. Влияние профиля поверхности на результат в этом случае сказывается в том, что зависимость $Z'(\mathbf{R}_a)$ находится из уравнения (21.1), которое полностью определяется профилем поверхности. Тогда (21.6) запишется как

$$S(\mathbf{p}-\mathbf{k})=(2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{\infty}dY\int_{-\infty}^{\infty}dZ\times \\ \times\int_0^{\zeta(Y,Z)}dX\exp\{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{R}-gZ'(\mathbf{R})/2n_z\}. \quad (21.9)$$

Оценку (21.9) можно провести, зная свойства функции $Z'(\mathbf{R})$, т. е. используя конкретный вид профиля поверхности вещества.

Рассмотрим первый случай, когда толщина слоя неоднородностей меньше длины, на которой поглощается поперечная резонансная волна. Это значит, что при прохождении слоя неоднородностей волна изменяется незначительно и в первом приближении можно пренебречь убыванием амплитуды излученной волны в веществе из-за рассеяния. В этом случае распределение излученной энергии принимает вид

$$\frac{d^2W(\mathbf{n},\omega)}{d\omega d\Omega}=2\pi^6\frac{\omega^2}{c}\left|n_0\alpha(\omega)\int d^3p[\mathbf{k}\mathbf{E}_0(p)]\times\right. \\ \left.\times S(\mathbf{p}-\mathbf{k})\delta(\omega-p_zv)\right|^2, \quad (21.10)$$

где $S(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ определено в (21.6). Заметим, что в частном случае $\zeta(Y,Z)=\zeta(Y)$, когда поверхность не меняется в направлении оси z , $S(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ пропорционально $\delta(p_z-k_z)$ и, следовательно, $\delta(\omega-p_zv)\delta(p_z-k_z)=0$, если в среде на этой частоте нет черенковского излучения. Таким образом, при $\zeta(Y,Z)=\zeta(Y)$ излучение не возникает из-за невозможности передачи среде продольного импульса.

Рассмотрим теперь дифракционное излучение от среды, поверхность которой имеет вид $X = \zeta(Z)$. Тогда в интеграле (21.5) появляется произведение дельта-функций, $\delta(p_y - k_y)$ и $\delta(\omega - p_z v)$, с помощью которых проводится интегрирование по p_y и p_z . В результате этого (21.5) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{c} (2\pi)^2 \left| n_0 \alpha(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dZ \exp\{-i(k_z - \omega/v)Z\} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\zeta(Z)} dX \exp(ik_x X) \int_{-\infty}^{\infty} dp_x [\mathbf{k} \mathbf{E}_0(p_x, k_y, \omega/v)] \exp(-ip_x X) \right|^2. \quad (21.11)$$

Поле равномерно движущегося заряда продольное, поэтому на резонансной частоте оно проникает в среду с намного меньшими потерями, чем поперечное поле. Это значит, что продольное поле убывает из-за взаимодействия с веществом на расстояниях, намного превышающих длину поглощения резонансного поперечного поля $1/g$. Но формирование дифракционного излучения происходит в приповерхностном слое толщиной $1/g$. Поэтому при вычислении дифракционного излучения можно не учитывать убывание собственного поля быстрой частицы из-за рассеяния на молекулах среды.

Фурье-образ поля заряда, движущегося по закону $x = a, y = 0, z = vt$, можно представить в форме

$${}_0(\mathbf{q}, \omega) = {}_0(\mathbf{q}) \delta(\omega - q_z v); \\ {}_0(\mathbf{q}) = -\frac{ie}{2\pi^2} \frac{\omega \mathbf{v} - \mathbf{q} c^2}{q^2 c^2 - \omega^2} \exp(-iq_x a). \quad (21.12)$$

Входящий в (21.11) интеграл по p_x имеет вид (\mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y – орты осей x и y)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_x {}_0\left(p_x, k_y, \frac{\omega}{v}\right) \exp\{-ip_x (X_a - a)\} = \\ = \frac{ie}{2\pi Q} \mathbf{L} \exp\{-Qa + QX_a\}, \quad (21.11)$$

где

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_y k_y - iQ \mathbf{e}_x - \mathbf{v} \frac{\omega}{v^2 \gamma^2}, \quad Q = \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2 \beta^2 \gamma^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (21.12)$$

Таким образом, после интегрирования (21.11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} &= e^2 \frac{\omega^2}{Q^2 c} \exp(-2aQ) |n_0 \alpha(\omega) [\mathbf{kL}(\mathbf{k})]|^2 \times \\ &\times \left| \frac{1}{Q - ik_x} \int_{-\infty}^{\infty} dZ \exp\{-i(k_z - \omega/v)Z\} \exp\{(Q + ik_x)\zeta(Z)\} \right|^2. \end{aligned} \quad (21.13)$$

Если длина волны намного больше толщины слоя неоднородностей поверхности, то $k_x \zeta \ll 1$, $Q \zeta \ll 1$ и (21.13) можно упростить:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} &= e^2 \frac{\omega^2}{Q^2 c} \exp(-2aQ) |n_0 \alpha(\omega) [\mathbf{kL}(\mathbf{k})]|^2 \times \\ &\times \left| (Q - ik_x) \int_{-\infty}^{\infty} dZ \zeta(Z) \exp\{-i(k_z - \omega/v)Z\} \right|^2. \end{aligned} \quad (21.14)$$

Распределение излучения в этом случае определяется фурье-образом профиля поверхности $\zeta(k_z - \omega/v)$.

22. Дифракционное излучение на резонансной частоте от клина

Пусть заряженная частица равномерно движется в вакууме по закону $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t$ в плоскости $x = a$. Выбрав ось z вдоль \mathbf{v} , а ось x вдоль \mathbf{a} можно представить созданное при таком движении поле в форме .

Рассмотрим дифракционное излучение такой частицы при пролете вблизи однородного диэлектрического клина, в единице объема которого находится n_0 молекул, а поверхность клина задана соотношением ($\xi, \eta > 0$)

$$\begin{cases} x = \xi z, & \text{при } z < 0; \\ x = -\eta z, & \text{при } z > 0. \end{cases} \quad (22.1)$$

Как было отмечено выше, фурье-компонента частоты ω поля равномерно движущегося заряда внутри среды экспоненциально убывает в перпендикулярном скорости направлении x как $\exp(-\kappa x)$, $\kappa = (\omega/v)\sqrt{1-(v/c)^2} \varepsilon(\omega)$. Отсюда следует, что формирование дифракционного излучения в основном происходит в близкой к траектории частицы малой части клина вблизи его ребра. Ширина клина на таком расстоянии от ребра порядка $\kappa^{-1}(\eta^{-1} + \xi^{-1})$.

Учтем, что амплитуда резонансной поперечной волны, образовавшейся при рассеянии поля быстрой частицы на молекуле клина, убывает по мере движения из-за поглощения в веществе клина. Поэтому дифракционное излучение от клина на резонансной частоте образуется вблизи ребра клина в тонком приповерхностном слое толщиной порядка $1/g$.

Пусть поперечная резонансная волна возникла при рассеянии поля частицы на находящейся в точке \mathbf{R}_a молекуле. Направление на точку наблюдения задается единичным вектором \mathbf{n} , это направление пересекает поверхность клина, в точке $\mathbf{R}_a + \mathbf{R}'(X', Y', Z')$, где $X'/Z' = n_x/n_z$, $Y'/Z' = n_y/n_z$. Длина пути излучения до точки вылета равна $R' = |Z'/n_z|$. Излучение вылетает через ту или другую грань клина в зависимости от направления вылета и положения молекулы. Излучение вперед от молекул с $Z_a > 0$ вылетает через правую грань клина при $n_z > 0$, а излучение вперед от молекул с $Z_a < 0$ вылетает через правую грань клина только если выполнено неравенство $n_z > n_x(Z_a/X_a)$. Рассматривая излучение вперед от широкого клина, можно пренебречь вкладом в излучение от молекул с $Z_a < 0$, кроме случая, когда η стремится к нулю, так как тогда дифракционное излучение от молекул с $Z_a < 0$ также стремится к нулю.

Для координат точки вылета излучения из клина соотношение (21.1) имеет вид

$$X_a + X' = -\eta(Z_a + Z'),$$

откуда следует, что

$$Z' = -\frac{X_a + \eta Z_a}{\eta + n_x/n_z}. \quad (22.2)$$

Аналогично рассматривая излучение от широкого клина, можно пренебречь вкладом молекул с $Z_a > 0$. Излучение «назад», при $n_z < 0$, выходит в вакуум через плоскость клина $x = \xi z$ и

$$Z' = \frac{X_a - \xi Z_a}{\xi - n_x/n_z}. \quad (22.3)$$

Учесть убывание амплитуды резонансной волны на пути внутри вещества можно умножив плотность внутримолекулярного тока на величину $\exp\{-g|Z'(\mathbf{R}_a)/2n_z|\}$, где g – коэффициент поглощения. Поглощение резонансной поперечной волны внутри клина можно, учесть, если заменить обычное выражение для фурье-образа плотности поляризационного тока в приближении однократного рассеяния

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) = & -i \frac{\omega}{(2\pi)^3} \alpha(\omega) \times \\ & \times \sum_a \int d^3 p \ p_0(\mathbf{p}, \omega) \exp\{-i(\mathbf{p} - \mathbf{q})\mathbf{R}_a\} \end{aligned} \quad (22.4)$$

выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) = & -i \frac{\omega}{(2\pi)^3} \alpha(\omega) \sum_a \int d^3 p \ p_0(\mathbf{p}, \omega) \times \\ & \times \exp\{-i(\mathbf{p} - \mathbf{q})\mathbf{R}_a - g|Z'(\mathbf{R}_a)/2n_z|\}. \end{aligned} \quad (22.5)$$

Здесь $\alpha(\omega)$ – поляризуемость молекулы, \mathbf{R}_a – радиус-вектор центра масс молекулы, суммирование проводится по всем молекулам вещества.

Считая вещество клина однородным, а длину волны намного большей, чем межмолекулярные расстояния, можно пренебречь влиянием флуктуаций поляризационного тока, заменив (22.5) его усредненным по координатам молекул значением. Для излучения «вперед»

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) &= -i \frac{\omega}{(2\pi)^3} \alpha(\omega) \int d^3 p \rho_0(\mathbf{p}, \omega) \times \\
&\times \left\langle \sum_a \exp \left\{ -i(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \mathbf{R}_a - g |Z'(\mathbf{R}_a)/2n_z| \right\} \right\rangle = \\
&= -i \frac{\omega}{(2\pi)^3} n_0 \alpha(\omega) \int_{-\infty}^0 dX \int d^3 p \rho_0(\mathbf{p}, \omega) \times \\
&\times \int_{X/\xi}^{-X/\eta} dz \exp \left\{ -i(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \mathbf{R} - g |Z'(\mathbf{R}_a)/2n_z| \right\}. \tag{22.6}
\end{aligned}$$

Рассматривая дифракционное излучение с микроскопической точки зрения как рассеяние собственного поля частицы на атомах среды, под полем $\rho_0(\mathbf{p}, \omega)$ следует понимать поле движущегося в вакууме со скоростью \mathbf{v} заряда.

Из (22.2), (22.3) видно, что $Z'(\mathbf{R}_a)$ не зависит от Y_a , поэтому интегрирование по Y в (22.6) приводит к дельта-функции $\delta(p_y - k_y)$. Интегрирование по p_y и p_z проводится с помощью дельта-функций $\delta(\omega - p_z v)$ и $\delta(p_y - k_y)$, после чего интегрирование по p_x сводится к интегралу (21.11) (\mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y – орты осей x и y). В результате фурье-образ плотности поляризованного тока примет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{e}{v} \frac{\omega}{(2\pi)^3} n_0 \alpha(\omega) \frac{\mathbf{L}}{Q} \int_{-\infty}^0 dX \exp \left\{ (ik_x + Q)X - aQ \right\} \times \\
&\times \int_{X/\xi}^{-X/\eta} dZ \exp \left\{ i(k_z - \omega/v)Z - g |Z'(\mathbf{R})/2n_z| \right\}. \tag{22.7}
\end{aligned}$$

В случае излучения вперед

$$g |Z'(\mathbf{R})/2n_z| = \frac{g}{2} \frac{|X_a + \eta Z_a|}{n_x + \eta n_z} \equiv h |X_a + \eta Z_a|, \tag{22.8}$$

имеем

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e}{v} \frac{\omega}{(2\pi)^3} n_0 \alpha(\omega) \frac{\mathbf{L}}{Q} \frac{\exp(-aQ)}{[h\eta + i(k_z - \omega/v)]} \times$$

$$\times \frac{(\eta + \xi) \{h + i(k_z - \omega/v)\}}{[Q\eta + i\eta k_x - i(k_z - \omega/v)][Q\xi + h(\xi + \eta) + ik_x \xi + i(k_z - \omega/v)]}. \quad (22.9)$$

Энергия излучения, выходящего из вещества за время пролета частицы, в интервале частот $d\omega$ вблизи резонансной частоты в элемент телесного угла $d\Omega$ в направлении вектора \mathbf{k} получается по аналогии с (21.5):

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{c} \frac{\omega^2}{Q^2 v^2} \left| n_0 \alpha(\omega) [\mathbf{kL}(\mathbf{k})] \right|^2 \frac{\exp(-2aQ)}{[h^2 \eta^2 + (k_z - \omega/v)^2]} \times$$

$$\times \frac{(\eta + \xi)^2 \{h^2 + (k_z - \omega/v)^2\}}{[Q^2 \eta^2 + (\eta k_x - k_z + \omega/v)^2][[Q\xi + h(\xi + \eta)]^2 + (k_x \xi + k_z - \omega/v)^2]}. \quad (22.10)$$

Зависимость излученной энергии от расстояния a между траекторией частицы и ребром клина определяется экспонентой

$$\exp(-2aQ) = \exp\left(-2a\sqrt{k_y^2 + \frac{\omega^2}{v^2 \gamma^2}}\right),$$

убывающей с расстоянием в нерелятивистском случае намного быстрее, чем в ультрарелятивистском, аналогично поведению собственного поля быстрой частицы. Эта экспонента существенна и для зависимости интенсивности излучения от азимутального угла φ . В нерелятивистском случае $Q \simeq \omega/v \gg k_y$ и экспонента $\exp(-2aQ)$ одного порядка при различных φ . В ультрарелятивистском случае при очень малых k_y величина $Q \simeq \omega/\gamma v$, а при не малых k_y будет $Q \simeq k_y \gg \omega/\gamma v$. Поэтому в ультрарелятивистском случае экспонента $\exp(-2aQ)$ сильно подавляет излучение при конечных k_y . В результате при движении ультрарелятивистской частицы перпендикулярно ребру клина все излучение практически сосредоточено вблизи плоскости xz .

Как известно, излучение ультрарелятивистской частицы сосредоточено в области малых углов вблизи направления скорости частицы.

Поэтому $k_x^2 + k_y^2 \ll k_z^2$, $Q \sim k/\gamma$ и разность $k_z - \omega/v \approx k/\gamma^2$ в ультрарелятивистском случае очень мала. Отсюда следует, что знаменатель в (22.10) становится малым, когда η и ξ меньше или порядка γ^{-1} . Однако, если $\eta \ll \gamma^{-1}$ и $\xi \ll \gamma^{-1}$, то и числитель дроби в (22.10) становится очень малым. Следовательно, максимум фурье-образа плотности тока, а вместе с ним и максимальная интенсивность излучения как функция угла раствора клина соответствует значениям $k\eta \approx \omega/v - k_z$ и $k\xi \approx \omega/v - k_z$. Если клин узкий, т. е. $\xi \gg 1$, $\eta \gg 1$ и $\kappa/g \equiv 2kh(\eta n_z + n_x) > \eta^{-1} + \xi^{-1}$, то формирование дифракционного излучения происходит в области вблизи ребра по всей ширине клина. Так как в этом случае длина поглощения больше размеров области формирования излучения, то нет необходимости учитывать поглощение резонансных волн. Тогда теряется отличие резонансных волн от нерезонансных, так что можно получить интенсивность дифракционного излучения для всех частот, рассматривая процесс излучения микроскопически, как результат рассеяния собственного поля быстрой частицы. В этом случае (22.10) принимает вид

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{c} \frac{\omega^2}{Q^2 v^2} |n_0 \alpha(\omega) [\mathbf{kL}(\mathbf{k})]|^2 \exp(-2aQ) \times$$

$$\times \frac{(\eta + \xi)^2}{\left[Q^2 \eta^2 + (\eta k_x - k_z + \omega/v)^2 \right] \left[Q^2 \xi^2 + (k_x \xi + k_z - \omega/v)^2 \right]}. \quad (22.11)$$

В случае широкого клина, когда величины ξ и η меньше или порядка единицы, формирование излучения происходит в приповерхностных слоях каждой грани клина. Тогда учет убывания амплитуды резонансной волны из-за поглощения в веществе клина необходим и распределение дифракционного излучения от клина по углам и частотам имеет вид (22.10).

Интересно сравнить излучение для предельных случаев $\xi = 0$ (первая грань клина параллельна скорости частицы) и $\xi = \infty$ (первая грань клина перпендикулярна скорости частицы).

В случае $\xi = 0$ распределение излученной энергии (22.10) запишется как

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{c} \frac{\omega^2}{Q^2 v^2} \left| n_0 \alpha(\omega) [\mathbf{kL}(\mathbf{k})] \right|^2 \exp(-2aQ) \times$$

$$\frac{(\eta + \xi)^2 \left\{ h^2 + (k_z - \omega/v)^2 \right\}}{\left[h^2 \eta^2 + (k_z - \omega/v)^2 \right] \left[Q^2 \eta^2 + (\eta k_x - k_z + \omega/v)^2 \right]}. \quad (22.12)$$

В предельном случае $\xi = \infty$ распределение излучения (22.10) имеет вид

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{c} \frac{\omega^2}{Q^2 v^2} \left| n_0 \alpha(\omega) [\mathbf{kL}(\mathbf{k})] \right|^2 \exp(-2aQ) \times$$

$$\frac{h^2 + (k_z - \omega/v)^2}{\left[h^2 \eta^2 + (k_z - \omega/v)^2 \right] \left[Q^2 \eta^2 + (\eta k_x - k_z + \omega/v)^2 \right] \left[(Q + h)^2 + k_x^2 \right]}. \quad (22.13)$$

Сравнивая (22.12) и (22.13), нетрудно видеть, что при $h\eta < \omega/v - k_z \sim k/\gamma^2$ интенсивность дифракционного излучения сильнее зависит от энергии частицы в том случае, когда первая грань клина параллельна скорости частицы.

6. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ СРЕД С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

23. Излучение Смита–Парселла

Заряд,двигающийся в вакууме с постоянной скоростью вблизи идеально проводящей, периодически деформированной мишени (решетки, рис. 23.1), индуцирует на её поверхности изменяющийся во времени заряд и ток, что и является причиной возникновения дифракционного излучения.

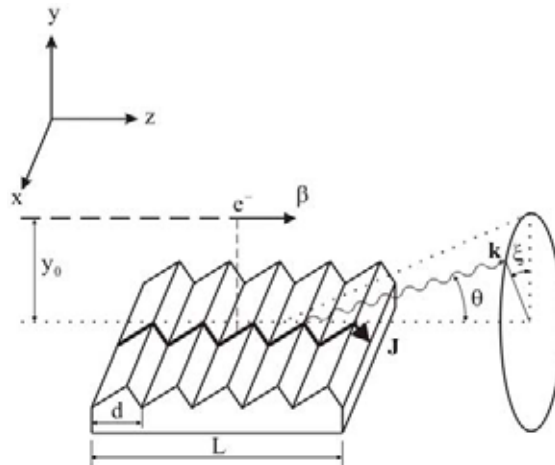


Рис. 23.1. Геометрия генерации излучения Смита – Парселла

Рассматривая заряд, движущийся по прямолинейной траектории со скоростью βc , и его изображение, которое движется по периодической траектории с периодом d (рис. 23.1) как электрический диполь с собственной частотой $\Omega = 2\pi \beta c/d$, можно получить выражение для частоты излучения $\omega(\theta)$ под фиксированным углом θ исходя из формулы Доплера. На возможность существования подобного эффекта обратил внимание И.М. Франк [42.1], который дал формулу для частоты $\omega(\theta)$ (см. выражение (3.7) в цитированной работе).

В отсутствие преломления формула И.М. Франка сводится к следующей формуле:

$$\omega(\theta) = \frac{\Omega}{1 - \beta \cos \theta} = \frac{2\pi \beta c}{d(1 - \beta \cos \theta)};$$

или, после перехода к длине волны,

$$\lambda = d \left(\frac{1}{\beta} - \cos \theta \right).$$

В 1953 г. С. Смит (S.J. Smith) и Э. Парселл (E.M. Purcell) впервые наблюдали монохроматическое электромагнитное излучение в световом диапазоне при пропускании электронного пучка с энергией ~ 300 кэВ вблизи периодической мишени (стандартной оптической решетки) с периодом $d = 1,67$ мкм [53.1]. Диаметр электронного пучка составлял примерно 150 мкм; пучок проходил практически вплотную к оптической решетке длиной 48 мм. Излучение детектировалось под углом $\theta \approx 20^\circ$ с помощью простой оптической схемы (коллимирующая линза, анализирующая решетка) фотографическим методом. Для электронов с энергией 309 кэВ в спектре излучения наблюдалась яркая линия с длиной волны $\lambda \approx 0,56$ мкм.

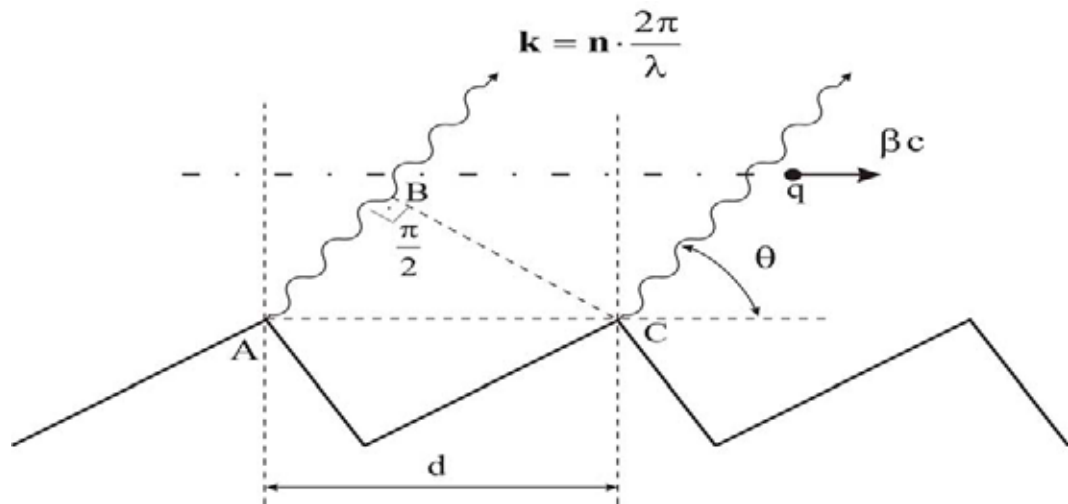


Рис. 23.2. Иллюстрация вывода соотношения Смита–Парселла

С. Смит и Э. Парселл получили формулу для длины волны линии в спектре излучения, исходя из наглядных фазовых соотношений (рис. 23.2).

$$\mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Электромагнитное излучение возбуждается полем пролетающей частицы в каждом элементе решетки. Для простоты рассмотрим плоские волны, испущенные под углом θ из двух последующих гребней решетки, инициированные одной и той же заряженной частицей, пролетающей параллельно решетке со скоростью βc . Эти волны будут иметь

одинаковую фазу (т. е. интерферировать конструктивно), если время, за которое плоская волна, испущенная из точки А (см. рис. 23.2) достигает точки В $\left(t_1 = \frac{d \cos \theta}{c}\right)$, будет связано со временем, необходимым частице для прохождения расстояния d и возбуждения плоской волны в точке С $\left(t_2 = \frac{d}{\beta c}\right)$, следующим образом:

$$c(t_1 - t_2) = n\lambda, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где λ – длина волны. Другими словами, сдвиг фаз волн с частотой ω , испущенных из точек А и С, должен удовлетворять соотношению

$$\Delta\varphi = k\Delta z - \omega\Delta t = 2\pi n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ – модуль волнового вектора, $\omega = 2\pi c/\lambda$. Отсюда вытекает так называемое «дисперсионное» соотношение

$$\lambda_n = \frac{d}{n} \left(\cos \theta - \frac{1}{\beta} \right), \quad (23.1)$$

где n – порядок дифракции.

Последнее соотношение для $n = -1$ («фундаментальной» гармоники) С. Смит и Э. Парселл записали в виде формулы

$$\lambda = d \left(\frac{1}{\beta} - \cos \theta \right), \quad (23.1)$$

совпадающей с формулой, полученной И.М. Франком из других соображений.

Формула (23.1) для длины волны фундаментальной гармоники дает значение $\lambda = 0,566$ мкм для $\beta = 0,782$ ($E = 309$ кэВ), что хорошо согласуется с экспериментом. При увеличении энергии электронов до $E = 340$ кэВ в эксперименте наблюдался сдвиг линии излучения в область меньших длин волн. С точностью до ошибок измерений данные эксперимента [53.1] хорошо описывались формулой (23.1).

После этого первого наблюдения монохроматического излучения, возникающего при прямолинейном и равномерном движении заряда в

вакууме вблизи периодической мишени (периодической решетки), это явление стали называть *эффектом Смита–Парселла*.

В одном из последних экспериментов [01.9] авторы детально исследовали излучение Смита–Парселла в оптическом диапазоне, генерируемое электронным пучком с энергией $E < 60$ кэВ и током $I < 10$ мА. Диаметр пучка не превышал 200 мкм, излучение детектировалось под углом $\theta = 80^\circ$ фотоумножителем. Спектр излучения исследовался с помощью монохроматора с разрешением (FWHM, полная ширина на полувысоте) $\Delta\lambda = 20$ нм.

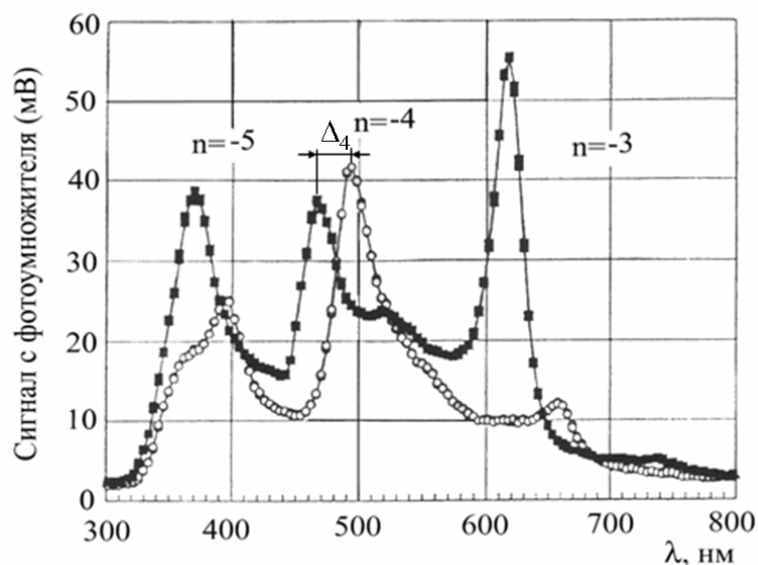


Рис. 23.3. Спектры излучения Смита – Парселла, генерируемые пучком электронов с энергией 20 кэВ (светлые кружки) и 22,5 кэВ (прямоугольники)

На рис. 23.3 приведены измеренные спектры излучения Смита–Парселла для оптической решетки с треугольным профилем и периодом $d = 0,556$ мкм. Как следует из приведенных результатов, экспериментально наблюдались излучения вплоть до $n = -5$.

На рис. 23.4 показана зависимость положений спектральных линий различного порядка в зависимости от энергии электронов. Сплошными линиями показаны результаты расчетов по формуле (23.1). Для нерелятивистского эффекта Смита–Парселла из дисперсионного соотношения (23.1) легко получить выражение для сдвига линии в спектре при изменении кинетической энергии электрона E_k :

$$\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_n} = -\frac{1}{1 - \beta \cos\theta} \frac{\Delta E_k}{2E_k}. \quad (23.3)$$

Для геометрии эксперимента [01.9], т. е. для $\theta = 80^\circ$, последнее соотношение может быть записано в виде

$$\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_n} \approx \frac{\Delta E_k}{2E_k},$$

которое хорошо согласуется с экспериментом (см., например, на рис. 23.3 и 23.4 сдвиг спектральной линии для $n = 4$).

Вплоть до 90-х годов XX столетия основное направление исследований излучения Смита–Парселла (ИСП), как теоретических, так и экспериментальных, было связано с излучением нерелятивистских электронов.

В обзоре [68.2] и в книгах [76.1, 88.1] представлено множество экспериментальных результатов, относящихся, в основном, к сантиметровому диапазону длин волн, а также приводятся результаты численных методов расчета характеристик излучения в этом же диапазоне. К заметным приложениям эффекта Смита–Парселла следует отнести создание мощного источника монохроматического излучения в миллиметровом и сантиметровом диапазоне – оротрона [66.4] и генераторов дифракционного излучения [85.3], с использованием интенсивных электронных пучков низкой энергии (см. также [03.1]).

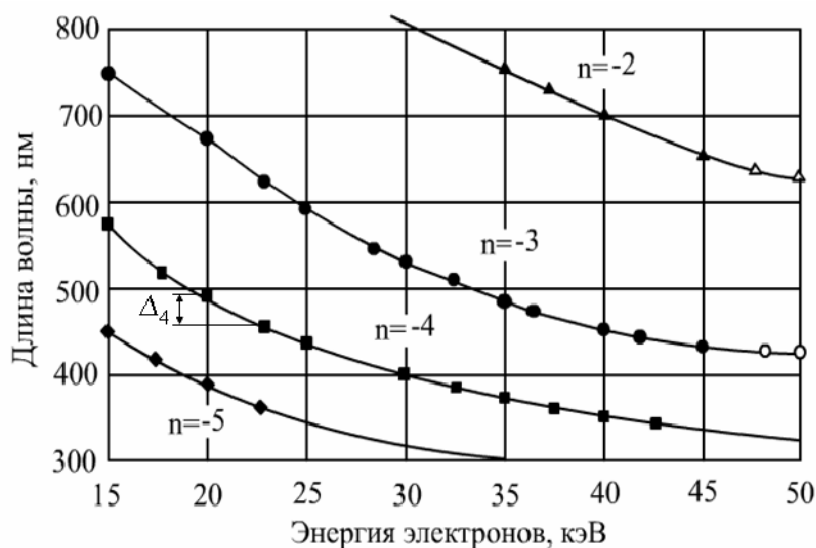


Рис. 23.4. Сравнение расчетного положения линий излучения Смита–Парселла (сплошные линии) с экспериментом (точки)

В последнее десятилетие интерес к излучению Смита–Парселла заметно возрос в связи с возможностью его использования для диагностики релятивистских электронных пучков [03.8], а также в связи с возможностью создания лазера на свободных электронах (ЛСЭ) на основе эффекта Смита–Парселла [79.3, 98.7]. В настоящей главе описываются подходы для расчета характеристик ИСП в «одночастичном» приближении, т. е. для движущегося точечного заряда. В отличие от моделей, представленных в [76.1, 88.1], такой подход позволяет естественным образом учитывать характеристики электронного пучка (например, расходимость) при вычислении спектрально-угловых распределений ИСП в приложении к задачам диагностики или продольную структуру модулированного электронного пучка, если эффект Смита–Парселла планируется использовать для создания ЛСЭ.

24. Скалярная теория дифракции собственного поля электрона на плоской полупрозрачной решетке

Одна из первых моделей для расчета спектрально-углового распределения излучения Смита–Парселла была предложена в статье [65.4] (см. также обзор [68.2]). В этой модели рассматривалась решетка с периодом d и числом элементов $N \gg 1$, выполненная из идеально проводящих, бесконечно тонких полосок (стрипов) шириной a (см. рис. 24.1), расположенных в одной плоскости. Над решеткой на прицельном расстоянии h пролетает заряд q со скоростью $v = \beta c$. Характеристики излучения рассчитывались в полупространстве под решеткой (именно поэтому авторы называли подобную решетку плоской полупрозрачной). Авторы предположили, что в соответствии с теоремой Гельмгольца–Кирхгофа величина поля в полупространстве под решеткой определяется его значениями на щелях (в плоскости решетки):

$$g(x, y, z) = \int \frac{kg_0(x', 0, z')}{2\pi i R} e^{ikR} dS_n. \quad (24.1)$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$, g_0 , g – компоненты поля, описывающие излучение с частотой $\omega = 2\pi c/\lambda$ от плоской решётки на расстоянии R под решеткой; dS_n – проекция элемента площади решетки на направление волнового вектора. В этом приближении пренебрегается влиянием самой решетки на характеристики поля на щелях (приближение Кирхгофа).

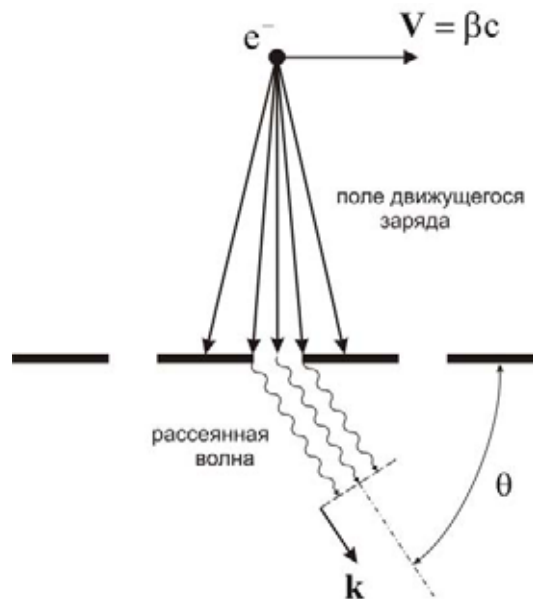


Рис. 24.1. Схема генерации излучения Смита–Парселла на плоской полупрозрачной решётке

Силовые линии реального поля заряда вблизи идеально проводящей поверхности показаны на рис. 24.2,б). Следует отметить, что в области, расположенной вблизи перпендикуляра, опущенного из точки расположения заряда на поверхность, степень искажения поля проводником невелика. Другими словами, для покоящегося заряда в области $\rho \ll h$ (h – расстояние от заряда до поверхности, рис. 24.2,а)) электрическое поле является почти «радиальным», совпадающим с вакуумным распределением поля исходного заряда.

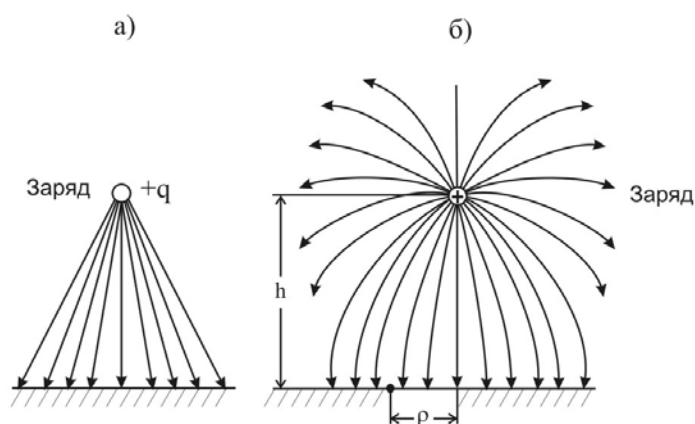


Рис. 24.2. Силовые линии электрического поля заряда вблизи проводящей плоскости: а) – в пренебрежении влиянием проводящей плоскости; б) – реальное распределение электрического поля

Пусть заряд движется со скоростью $v = \beta c$ вдоль оси z . Тогда, следуя работе [68.2], его поле на плоскости решетки можно описывать скалярной функцией

$$g_0(x, 0, z) = \frac{iq}{2\pi c} \int \frac{dk_x}{\sigma(k_x, \omega)} e^{i(\sigma h + k_x \kappa + z\omega/v)},$$

$$\sigma(k_x, \omega) = i \sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2} + k_x^2}. \quad (24.2)$$

После вычисления интеграла (24.1) с учетом периодичности решетки, квадрат модуля функции $g(x, y, z)$ дает спектрально-угловое распределение излучения Смита–Парселла:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2 (d-a)^2}{2\pi c} \frac{vT}{d} \frac{\sin^2 \left[\frac{d-a}{2} \frac{\omega}{v} (1 - \beta \cos \theta) \right]}{\left[\frac{d-a}{2} \frac{\omega}{v} (1 - \beta \cos \theta) \right]^2} \times$$

$$\times \sin^2 \theta \exp \left\{ -2h \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2 (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \xi)} \right\} \times$$

$$\times \sum_n \delta \left[\frac{\omega}{v} (1 - \beta \cos \theta) d - 2\pi n \right]. \quad (24.3)$$

Здесь $T = N \frac{d}{\beta c}$ – время пролета заряда над решеткой; n – порядок дифракции. Чтобы получить угловое распределение энергии излучения для n -го порядка дифракции, необходимо проинтегрировать последнее выражение по частоте, что легко выполняется с использованием δ – функции:

$$\frac{dW_n(\theta, \xi)}{d\Omega} = \frac{2\pi q^2 (d-a)^2}{c^3} N \left(\frac{v}{d} \right) \frac{\sin^2 \left(n\pi \frac{d-a}{d} \right)}{\left(\pi \frac{d-a}{d} \right)^2} \times$$

$$\times \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \exp \left\{ -\frac{4\pi nh}{d(1 - \beta \cos \theta)} \sqrt{\gamma^{-2} + \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi} \right\}. \quad (24.4)$$

Как следует из полученной формулы для первого порядка дифракции (фундаментальной гармоники), максимальный выход излучения достигается для ширины стрипа $a = d/2$. В этом случае ($n = 1$) формула (24.4) для излучения электрона ($q^2 = e^2 = \alpha \hbar c$) записывается в виде

$$\frac{dW_1(\theta, \xi)}{d\Omega} = \frac{2\alpha}{\pi} \beta^3 \frac{\hbar c}{d} N \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \times \exp \left\{ -\frac{4\pi h}{\gamma d (1 - \beta \cos \theta)} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi} \right\}. \quad (24.5)$$

Таким образом, простая наглядная модель позволила получить аналитическую формулу, из которой следуют важные физические следствия. Экспоненту можно записать в виде

$$\exp \left\{ -\frac{4\pi h}{\gamma \beta \lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi} \right\},$$

откуда вытекает жесткое ограничение на эффективный прицельный параметр (импакт-параметр):

$$h \leq h_{\text{эфф}} \approx \frac{\gamma \beta \lambda}{4\pi}. \quad (24.6)$$

Ясно, что в нерелятивистском случае ($\gamma \sim 1$, $\beta \ll 1$) условие (24.6) практически невозможно выполнить в оптическом диапазоне ($\lambda \leq 1$ мкм). Как правило, в подобных экспериментах $h \gg h_{\text{эфф}}$, что ведет к экспоненциальному подавлению выхода ИСП. По мере увеличения энергии электронов (с увеличением лоренц-фактора), либо при переходе от оптического диапазона к инфракрасному (или субмиллиметровому) условие (24.6) становится менее жестким.

Если импакт-параметр удовлетворяет условию $h \leq h_{\text{эфф}}$, то в релятивистском случае излучение Смита–Парселла сосредоточено в плоскости, перпендикулярной решетке, т. е. в области азимутальных углов $\xi \leq \gamma^{-1}$, поскольку для больших азимутальных углов вновь наблюдается экспоненциальное подавление выхода (из-за возрастания подкоренного выражения в показателе экспоненты).

В последние годы были предложены более реальные модели для описания эффекта Смита–Парселла в релятивистском случае [98.3, 98.8, 05.8], однако большинство полученных результатов (в т. ч. численными методами) качественно согласуются с приведенными выводами, основанными на формуле, полученной Б.М. Болотовским и А.К. Бурцевым более 40 лет назад.

25. Эффект Смита–Парселла как излучение индуцированных поверхностных токов

Одной из простых моделей, описывающих эффект Смита–Парселла, является модель поверхностных токов [98.8]. В этой модели заряд, равномерно движущийся вблизи периодически деформированной поверхности (решетки), индуцирует на ней изменяющийся в пространстве и во времени ток, который и генерирует излучение Смита–Парселла (см. рис. 23.1).

В соответствии с формулами параграфа 1 спектрально-угловое распределение излучения определяется плотностью индуцированного (наведенного) тока $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ следующим выражением:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int dt \int d^3r \left[\mathbf{n} \left[\mathbf{n} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \right] e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \right] \right|^2, \quad (25.1)$$

где $\mathbf{n} = \{ \sin \theta \sin \xi, \sin \theta \cos \xi, \cos \theta \}$ – единичный вектор в направлении вылета фотона, $\mathbf{k} = \mathbf{n} \omega / c$ – импульс фотона. Поскольку ток $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, индуцированный на периодически расположенных элементах решетки, является периодической функцией переменных z и t ,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^N \mathbf{J}_0 \left(x, y, z - md, t - \frac{md}{v} \right), \quad (25.2)$$

то интеграл (25.1) сводится к следующему:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \sum_{m=1}^N e^{im d \omega \left(\frac{1}{v} - \frac{n_z}{c} \right)} \right|^2 \left| \int dt \int dx dy dz \mathbf{J}_0(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \right|^2. \quad (25.3)$$

В (25.2), (25.3) индекс «0» у вектора \mathbf{J} обозначает, что интегрирование ведется по объему, занимаемому одним элементом, и по интерва-

лу времени, соответствующему пролету частицы над одним периодом решетки. Квадрат суммы в (25.3) сводится к стандартному выражению:

$$F_3 = \left| \sum_{m=1}^N e^{im d \omega \left(\frac{1-n}{v} - \frac{n}{c} \right)} \right|^2 = \frac{\sin^2 \left[\left(\frac{1}{\beta} - \cos \theta \right) \frac{N \omega d}{2c} \right]}{\sin^2 \left[\left(\frac{1}{\beta} - \cos \theta \right) \frac{\omega d}{2c} \right]} \approx \sum_{n \neq 0} \frac{N \omega}{|n|} \delta(\omega - \omega_n). \quad (25.4)$$

Из аргумента δ -функции определяется дисперсионное соотношение Смита–Парселла:

$$\omega_n = \frac{2\pi |n| c}{d(1/\beta - \cos \theta)}, \quad n - \text{целое.}$$

В подобной постановке задача решается наиболее просто, когда решетка представляет собой набор из $N \gg 1$ параллельных, идеально проводящих полосок (стрипов), разделенных вакуумными промежутками, причем пренебрегается искажением поля движущегося заряда, которое вызывается наличием проводящей поверхности вблизи заряда. Это же приближение использовалось Б.М. Болотовским и А.К. Бурцевым, однако модель, предлагаемая в [98.8], позволяет вычислить спектрально-угловое распределение излучения в полупространстве над решеткой (рис. 25.1), поскольку ток \mathbf{J} индуцируется на поверхности стрипов, обращенных к пролетающему заряду.

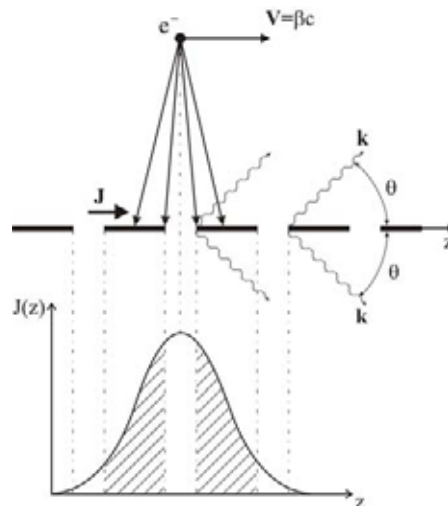


Рис. 25.1. Геометрия излучения Смита–Парселла при его генерации индуцированным током на плоской решётке

Электрическое поле движущегося заряда «сплющивается» в направлении движения тем сильнее, чем больше энергия частицы. Продольная E_z и поперечная E_y компоненты поля заряда q , движущегося со скоростью v вдоль оси z на расстоянии ρ от его траектории, равны:

$$\begin{aligned} E_z(\mathbf{r}, t) &= \frac{q\gamma vt}{(\rho^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ E_y(\mathbf{r}, t) &= \frac{q\gamma \rho}{(\rho^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (25.5)$$

Выражения (25.5) справедливы для поля: а) в лабораторной системе отсчета в точке с координатами $\mathbf{r} = \{ \quad, 0 \}$, где $\quad \equiv \{x, y\}$, б) в точке с координатами $\mathbf{r} = \{ \quad, vt \}$ относительно мгновенного положения заряда (см., например, § 38 в книге [97.1] и § 1 в книге [69.1]).

Атомы и молекулы вещества, являющиеся непосредственными источниками поляризованного излучения, расположены в лабораторной (неподвижной) системе координат. Поэтому характерные значения времени $t_{\text{эфф}}$ действия поля в данной точке \mathbf{r} в лабораторной системе определяются знаменателями выражений (25.5) и равны:

$$t_{\text{эфф}} \sim \frac{\rho}{\gamma v}.$$

Поэтому соотношение между компонентами поля определяется лоренц-фактором частицы:

$$\frac{E_z}{E_y} \sim \gamma^{-1}.$$

Другими словами, для ультрарелятивистских частиц конфигурация поля незначительно отличается от поперечного поля волны электромагнитного излучения (для которой $E_z = 0$).

На рис. 25.2 схематически показана эффективная область на поверхности проводника, на которой наводится поверхностный заряд (рисунок соответствует фиксированному моменту времени). Ясно, что эффективный размер области в направлении движения существенно

меньше прицельного параметра (если $\gamma \gg 1$), т. е. в этом случае можно пренебречь искажением поля начального заряда.

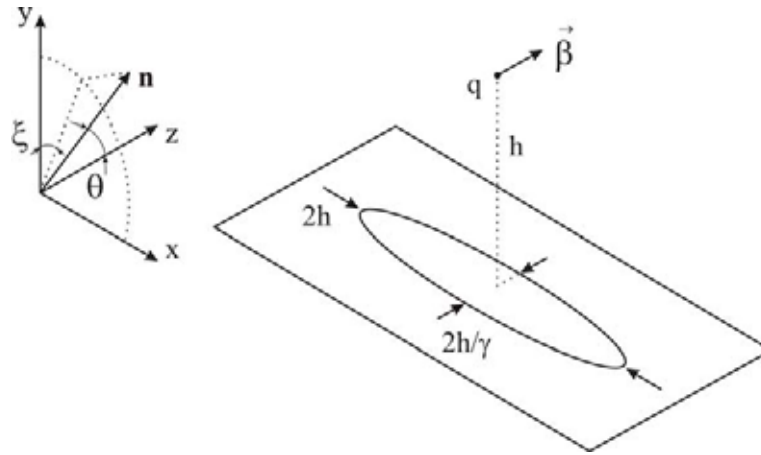


Рис. 25.2. Угловые переменные, описывающие направление волнового вектора (слева), и эффективная область мишени, в которой индуцируется поверхностный заряд (справа)

Как известно, поверхностная плотность заряда, индуцированного на идеально проводящей плоскости, пропорциональна перпендикулярной компоненте напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} \sigma(x, y, z) &= \text{const} \cdot E_y(x, y, z) = \\ &= \text{const} \cdot q \gamma \frac{y - y_0}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \gamma^2 (z - z_0 - vt)^2 \right]^{3/2}} \delta(y - y_1). \end{aligned} \quad (25.6)$$

Численное значение константы зависит от системы единиц, мы принимаем $\text{const} = (2\pi)^{-1}$. Здесь $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ – координаты заряда в момент времени $t = 0$. Дельта-функция отражает тот факт, что проводящая плоскость расположена параллельно координатной плоскости xz на расстоянии y_1 от начала координат. Если заряженная частица движется с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \{0, 0, c\beta\}$ вдоль оси z , то наведенный ток определяется выражением

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{r}, t) = \sigma c \beta \hat{\mathbf{z}}. \quad (25.7)$$

Здесь через $\hat{\mathbf{z}}$ обозначается единичный вектор вдоль оси z . Фурье-компонента наведенного тока находится стандартным образом:

$$\mathbf{J}_0(\omega, \mathbf{n}) = \frac{q\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \times \\ \times \frac{(y - y_0)\delta(y - y_1)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \gamma^2(z - z_0 - vt)^2 \right]^{3/2}} c\beta \hat{\mathbf{z}}. \quad (25.8)$$

Дельта-функция снимает одно интегрирование. Чтобы вычислить оставшиеся интегралы, введем новые переменные:

$$u = \gamma(vt - z + z_0), \\ \bar{x} = x_0 - x, \\ h = (y_0 - y_1), \\ \kappa = \frac{\omega}{v} - k_z.$$

Таким образом, необходимо вычислить 3-кратный интеграл:

$$\mathbf{J}_0(\omega, \vec{n}) = \hat{\mathbf{z}} \frac{q}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{h}{\left[h^2 + \bar{x}^2 + u^2 \right]^{3/2}} \times \\ \times \exp \left\{ i \left[\frac{\omega u}{\gamma v} - \frac{\omega z_0}{v} + k_x(\bar{x} - x_0) + \kappa z - k_y y_1 \right] \right\}. \quad (25.9)$$

Интегрирование по z ведется по ширине стрипа ($z_2 - z_1 = a$). Внутренний двукратный интеграл (по $d\bar{x} du$) сводится к табличному, который записывается в полярных координатах следующим образом:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\exp \left\{ i \left[\frac{\omega u}{\gamma v} + k_x \bar{x} \right] \right\}}{\left(h^2 + \bar{x}^2 + u^2 \right)^{3/2}} = \\ = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \frac{\exp \{ i\mu \rho \cos \varphi \}}{\left(h^2 + \rho^2 \right)^{3/2}}, \quad (25.10)$$

где $\mu = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\gamma v}\right)^2 + k_x^2}$. Азимутальный интеграл в (25.10) выражается через функцию Бесселя нулевого порядка, и следовательно,

$$I = 2\pi \int_0^\infty \rho d\rho \frac{J_0(\mu\rho)}{[h^2 + \rho^2]^{3/2}} = \frac{2\pi}{h} \exp\left[-h\sqrt{\left(\frac{\omega}{\gamma v}\right)^2 + k_x^2}\right].$$

Для излучения в вакууме $k_y = \frac{\omega}{c} \sin\theta \sin\xi$ (см. рис. 25.1). Таким образом, для фурье-компоненты наведенного тока имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_0(\mathbf{n}, \omega) &= \hat{\mathbf{z}} q \exp\left(-\frac{\omega h}{\gamma \beta c} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi}\right) \times \\ &\times \exp(-ik_y y_1) \frac{e^{i\kappa z_2} - e^{i\kappa z_1}}{i\kappa}. \end{aligned} \quad (25.11)$$

После возведения в квадрат, вместо выражения (25.3) получаем формулу для $n=1$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_1}{d\omega d\Omega} &= q^2 \frac{\omega^3}{4\pi^2 c^3} N \delta(\omega - \omega_1) \sin^2 \theta \frac{|e^{i\kappa z_2} - e^{i\kappa z_1}|^2}{\kappa^2} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{2\omega_1 h}{\gamma \beta c} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi}\right). \end{aligned} \quad (25.12)$$

Для ширины стрипа a (25.12) можно получить угловое распределение излучения Смита–Парселла единичного электрона ($q = -e$) для $n=1$:

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{d\Omega} &= \frac{\alpha}{2\pi} N \frac{\hbar c}{d} \frac{\sin^2 \theta}{(\beta^{-1} - \cos \theta)^3} 4 \sin^2\left(\frac{\pi a}{d}\right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{4\pi h}{\gamma \beta d (\beta^{-1} - \cos \theta)} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi}\right). \end{aligned} \quad (25.13)$$

В последней формуле использовано соотношение $\alpha = e^2/\hbar c$.

Полученное выражение обладает симметрией относительно замены $\xi \rightleftharpoons \pi \pm \xi$, т. е. описывает спектрально-угловое распределение излучения не только над решеткой, но и под ней, что позволяет провести сравнение с моделью Б.М. Болотовского, описанной в предыдущем параграфе. Следует отметить, что вывод полученной формулы основан на подходе, в котором последовательно используется понятие индуцированного тока на поверхности идеально плоской решетки.

Как в модели, основанной на скалярной теории дифракции, так и в описанной модели, пренебрегалось искажением поля проводящей решеткой, поэтому полученные результаты полностью совпадают в ультрарелятивистском случае (формула (24.7) совпадает с выражением (25.13) при $\beta \rightarrow 1$). Модель индуцированных токов может применяться не только к плоской решетке, но и к объемной, каждый элемент которой можно представить в виде набора различным образом ориентированных стрипов. Так, например, для решетки, состоящей из стрипов, ориентированных перпендикулярно траектории частицы (см. рис. 26.4), авторы статьи [98.8] получили следующее выражение для спектрально-углового распределения излучения Смита–Парселла для k -го порядка дифракции:

$$\frac{d^2 W_n}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi^2} \frac{\omega^3}{c^3} \frac{Nd^2}{|n|} \exp\left(-\frac{2h}{\lambda_e}\right) \delta(\omega - \omega_n) \left| \left[\mathbf{n} \left[\mathbf{n} \mathbf{G}_n^\perp \right] \right] \right|^2, \quad (25.14)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{2\pi c}{\lambda_n}, \\ \mathbf{n} &= \{ \sin \theta \sin \xi, \sin \theta \cos \xi, \cos \theta \}, \\ \lambda_e &= \frac{\gamma \beta \lambda_n}{2\pi \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi}}. \end{aligned}$$

В (25.14) вектор \mathbf{G}_n^\perp определен следующим образом:

$$\mathbf{G}_n^\perp = A \left\{ 1, i\lambda_e \frac{\omega_n}{c} \sin \theta \sin \xi, 0 \right\},$$

$$A = \frac{\exp\left[\left(-\frac{1}{\lambda_e} - i\frac{\omega_n}{c}\sin\theta\cos\xi\right)a\right] - 1}{\left(\frac{1}{\lambda_e} - i\frac{\omega_n}{c}\sin\theta\cos\xi\right)d}.$$

При вычислении квадрата модуля в (25.14) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{n}[\mathbf{nG}_n^\perp]\right]^2 &= \left[1 + \cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta\cos^2\xi + \cos^2\theta}{1 + \gamma^2\beta^2\sin^2\theta\sin^2\xi}\right] \times \\ &\times \frac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{a}{2\lambda_e}\right) + \sin^2\left(\frac{a\omega}{2c}\sin\theta\cos\xi\right)}{\left(\sin^2\theta + \frac{1}{\gamma^2\beta^2}\right)} \left(\frac{c}{\omega d}\right)^2 4\exp\left(-\frac{a}{\lambda_e}\right). \end{aligned} \quad (25.15)$$

После подстановки полученного выражения в (25.15) интегрирование по частоте с учетом δ -функции проводится элементарно. Таким образом, для фундаментальной гармоники ($|n|=1$) в ультрарелятивистском приближении формулу для углового распределения излучения Смита–Парселла получаем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{d\Omega} &= \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\hbar c}{d(\beta^{-1} - \cos\theta)} N \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{4\pi(h + a/2)\sqrt{1 + \gamma^2\beta^2\sin^2\theta\sin^2\xi}}{\gamma\beta d(\beta^{-1} - \cos\theta)}\right\} \frac{1 + \cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta\cos^2\xi + \cos^2\theta}{1 + \gamma^2\beta^2\sin^2\theta\sin^2\xi}}{\sin^2\theta + \gamma^{-2}\beta^{-2}} \times \\ &\times \left\{\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi a\sqrt{1 + \gamma^2\beta^2\sin^2\theta\sin^2\xi}}{\gamma\beta d(\beta^{-1} - \cos\theta)}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi a\sin\theta\cos\xi}{d(\beta^{-1} - \cos\theta)}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (25.16)$$

В отличие от углового распределения излучения от плоской решетки (см. формулу (25.13)), где зависимость от азимутального угла ξ входит только в показатель экспоненты, что приводит к одномодальному азимутальному распределению с максимумом при $\xi = 0$, для рас-

смаатриваемого случая зависимость от азимута ξ носит более сложный характер. Однако, как и в случае плоской решетки, при замене $\xi \rightleftharpoons \pi \pm \xi$, выражение (25.16) не изменяется, т. е. характеристики излучения в полупространстве «над решеткой» те же, что и «под решеткой», для $\theta = \text{const}$.

26. Эффект Смита–Парселла как резонансное дифракционное излучение

Связь между излучением Смита–Парселла и резонансным дифракционным излучением (РДИ) легко проследить на примере той же самой идеально плоской решетки, которая рассматривалась в параграфе 24. Опираясь на результаты, изложенные в главе 3, можно получить поле дифракционного излучения, которое генерируется при параллельном пролете частицы вблизи проводящего стрипа шириной a . Тогда стандартным образом можно получить суммарное поле излучения для N периодически расположенных стрипов. Если ширина стрипа a намного превышает длину волны, то в качестве разумного приближения для поля излучения, генерируемого на входной границе стрипа, можно выбрать поле \mathbf{E} , которое генерируется на полуплоскости (см. выражения (13.5) для параллельного пролета, т. е. $\varphi_0 = 0$):

$$\mathbf{E}_{\text{ВХ}} = \mathbf{E}_{\infty}. \quad (26.1)$$

В этом же приближении поле излучения, генерируемое на «выходной» границе стрипа, связано с полем (26.1) следующим образом [98.3]:

$$\mathbf{E}_{\text{ВЫХ}} = -\mathbf{E}_{\text{ВХ}} \exp(i\varphi_s). \quad (26.2)$$

Сдвиг фазы φ_s на стрипе вычисляется в полной аналогии со сдвигом фаз на щели (формула (14.3) для $\theta_0 = 0$):

$$\varphi_s = \frac{2\pi a}{\lambda} \left(\cos \theta - \frac{1}{\beta} \right), \quad (26.3)$$

где θ – полярный угол вылета фотона относительно импульса электрона. Тогда поле ДИ на единичном стрипе записывается в следующем виде

$$\mathbf{E}_{\text{стрип}} = \mathbf{E}_{\infty} (1 - e^{i\varphi_0}). \quad (26.4)$$

Результирующее поле от N периодически расположенных стрипов (решетки) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_N &= \mathbf{E}_{\text{стрип}} + \mathbf{E}_{\text{стрип}} e^{i\varphi_0} + \mathbf{E}_{\text{стрип}} e^{i2\varphi_0} + \dots + \mathbf{E}_{\text{стрип}} e^{i(N-1)\varphi_0} = \\ &= \mathbf{E}_{\text{стрип}} \left\{ 1 + \exp(i\varphi_0) + \exp(i2\varphi_0) + \dots + \exp(i(N-1)\varphi_0) \right\}. \end{aligned} \quad (26.5)$$

В выражении (26.5) через φ_0 обозначена фаза, обусловленная сдвигом стрипа на период d :

$$\varphi_0 = \frac{2\pi d}{\lambda} \left(\cos \theta - \frac{1}{\beta} \right). \quad (26.6)$$

В фигурных скобках в формуле (26.5) стоит сумма N первых членов геометрической прогрессии, что позволяет провести суммирование аналитически:

$$\mathbf{E}_N = \mathbf{E}_{\text{стрип}} \frac{1 - \exp(iN\varphi_0)}{1 - \exp(i\varphi_0)}. \quad (26.7)$$

Тогда, с учётом полученного результата выражение для спектрально-углового распределения резонансного дифракционного излучения на решетке принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_{\text{рди}}}{d\omega d\Omega} &= cr^2 |\mathbf{E}_N|^2 = |E_{\text{стрип}}|^2 \left| \frac{1 - \exp(iN\varphi_0)}{1 - \exp(i\varphi_0)} \right|^2 = \\ &= |\mathbf{E}_{\infty}|^2 F_2 F_3 = \frac{d^2 W_{\text{ди}}}{d\omega d\Omega} F_2 F_3. \end{aligned} \quad (26.8)$$

Здесь $\frac{d^2 W_{\text{ди}}}{d\omega d\Omega}$ – спектрально-угловое распределение ДИ на параллельной полуплоскости, F_2 – фактор, учитывающий интерференцию полей от «входной» и «выходной» границ стрипа, F_3 – фактор, учитывающий интерференцию от N идентичных элементов решетки. Спектрально-

угловое распределение излучения дается формулой (13.9) при $\beta_y = 0, \beta_x = \beta$:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{\exp\left(-\frac{4\pi h}{\lambda \beta \gamma} \sqrt{1 + \beta^2 \gamma^2 \cos^2 \psi}\right)}{\beta \sin \psi} \times$$

$$\times \frac{\cos^2 \psi \cos^2 \frac{\varphi}{2} (1 - \beta \sin \psi) + (\gamma^{-2} + \beta^2 \cos^2 \psi) \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 + \beta \sin \psi)}{(\gamma^{-2} + \beta^2 \cos^2 \psi) (\sin \psi \cos \varphi - 1/\beta)^2}. \quad (26.9)$$

Угловые переменные ψ, φ показаны на рис. 26.1,а.

С учетом соотношения (2) фактор F_2 записывается следующим образом:

$$F_2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi_s}{2} \right) = 4 \sin^2 \left[\frac{\pi a}{\lambda} \left(\cos \theta - \frac{1}{\beta} \right) \right]. \quad (26.10)$$

Аналогично, с учетом (26.6) и (26.8), можно получить выражение для фактора F_3 :

$$F_3 = \frac{\sin^2(N\varphi_0/2)}{\sin^2(\varphi_0/2)} \approx 2\pi N \delta(\varphi_0 - 2\pi k). \quad (26.11)$$

Последнее соотношение справедливо для достаточно «длинной» решётки ($N \gg 1$).

Для ультрарелятивистских частиц дифракционное излучение концентрируется вблизи плоскости, перпендикулярной плоскости мишени в интервале углов $\sim \gamma^{-1}$. При переходе к угловым переменным θ_x, θ_y , отражающим специфику задачи (см. рис. 26.1,б),

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \theta_x, \quad \varphi = \theta_y,$$

выражение (26.9) существенно упрощается.

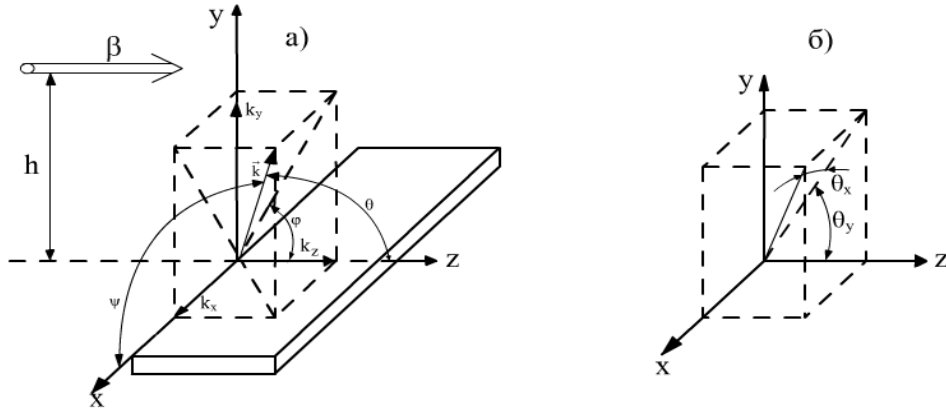


Рис. 26.1. Угловые переменные для описания дифракционного излучения при параллельном пролете заряда над проводящей полуплоскостью

В пренебрежении слагаемыми порядка γ^{-2} , θ_x^2 вместо (26.9) имеем:

$$\frac{d^2 W_{ди}}{\hbar d\omega d\theta_x d\theta_y} = \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{1}{1 - \cos\theta_y} \exp\left(-\frac{4\pi h}{\gamma\lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta_x^2}\right). \quad (26.12)$$

Последнее выражение справедливо для углов излучения $\theta_y \gg \gamma^{-1}$, тогда как для углов $\theta_y \sim \gamma^{-1}$ из (26.9) получаем:

$$\frac{d^2 W_{ди}}{\hbar d\omega d\theta_x d\theta_y} = \frac{\alpha}{\pi^2} \exp\left(-\frac{4\pi h}{\gamma\lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta_x^2}\right) \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{\gamma^{-2} + \theta_x^2 + \theta_y^2}. \quad (26.13)$$

Можно отметить, что по своей структуре полученная формула аналогична формуле, описывающей спектрально-угловое распределение переходного излучения при пересечении границы вакуум – идеально проводящая среда, если $h \ll \gamma\lambda/4\pi$.

Запишем также связь между часто используемыми углами вылета фотона относительно направления движения электрона (относительно оси z , см. рис. 26.1):

$$\begin{aligned} \cos\psi &= \sin\theta_x = \sin\theta \sin\xi, \\ \operatorname{tg}\varphi &= \operatorname{tg}\theta_y = \operatorname{tg}\theta \cos\xi; \end{aligned} \quad (26.14)$$

а также обратный переход:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos \theta_x \cos \theta_y = \sin \psi \cos \varphi, \\ \operatorname{tg} \xi &= \frac{\sin \theta_x}{\cos \theta_x \sin \theta_y} = \frac{\cos \psi}{\sin \psi \sin \varphi}.\end{aligned}\quad (26.15)$$

В (26.14) через θ и ξ обозначены полярный и азимутальный углы в системе, связанной с импульсом электрона. Через переменные θ_x, θ_y фазы φ_s, φ_0 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_s &= \frac{2\pi}{\lambda} a \left(\cos \theta_x \cos \theta_y - \frac{1}{\beta} \right), \\ \varphi_0 &= \frac{2\pi}{\lambda} d \left(\cos \theta_x \cos \theta_y - \frac{1}{\beta} \right).\end{aligned}$$

Из аргумента δ -функции в (26.11) следует стандартное соотношение

$$\lambda_n = \frac{d(\cos \theta - 1/\beta)}{n}.$$

Чтобы не употреблять отрицательные порядки дифракции ($n < 0$), часто последнюю формулу записывают так, как её привели Смит и Парселл:

$$\lambda_n = \frac{d(1/\beta - \cos \theta)}{n}.$$

Интегрируя (26.8) с помощью δ -функции, легко получить угловую плотность энергии, излучаемой на длине волны, соответствующей n -му порядку дифракции:

$$\frac{dW_n}{d\theta_x d\theta_y} = \frac{4\alpha\hbar c}{\pi} N \frac{1}{\lambda_n(1 - \cos \theta_y)} \exp \left\{ -\frac{4\pi h}{\gamma\lambda_n} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta_x^2} \right\}. \quad (26.16)$$

Эта формула записана для соотношения $a = d/2a$, максимизирующего множитель F_2 . Для $|n|=1$ из (26.16) можно получить угловую плотность энергии в ультрарелятивистском случае:

$$\frac{dW_1}{d\Omega} = \frac{4\alpha\hbar c}{\pi d} N \frac{1}{(1 - \cos\theta)^2} \exp\left\{-\frac{4\pi h\sqrt{1 + \gamma^2 \sin^2\theta \sin^2\xi}}{\gamma d(1 - \cos\theta)}\right\}. \quad (26.17)$$

Сравнивая полученную формулу с аналогичным выражением (25.13), выведенным по модели индуцированных токов, можно убедиться, что после умножения выражения (26.16) на множитель $(1 + \cos\theta)/2$ результаты совпадают.

Отсюда следует, что различные подходы дают близкий результат для угла вылета фотонов $\theta \leq \pi/4$, тогда как для больших значений угла θ скалярная теория дифракции, так же как и модель индуцированного тока [98.8], дает меньшее значение для спектрально-угловой плотности по сравнению с моделью РДИ.

Запишем последнее выражение для $|n|=1$ и $\theta_x = 0$ ($\xi = 0$) в виде инженерной формулы:

$$\frac{dW}{d\theta_x d\theta_y} = N \frac{1,86 \cdot 10^{-3}}{d} \frac{1}{(1 - \cos\theta)^2} \exp\left[-\frac{12,57h}{\gamma d(1 - \cos\theta)}\right].$$

В формуле параметры h и d подставляются в микрометрах, а результат получается в электронвольтах на стерадиан.

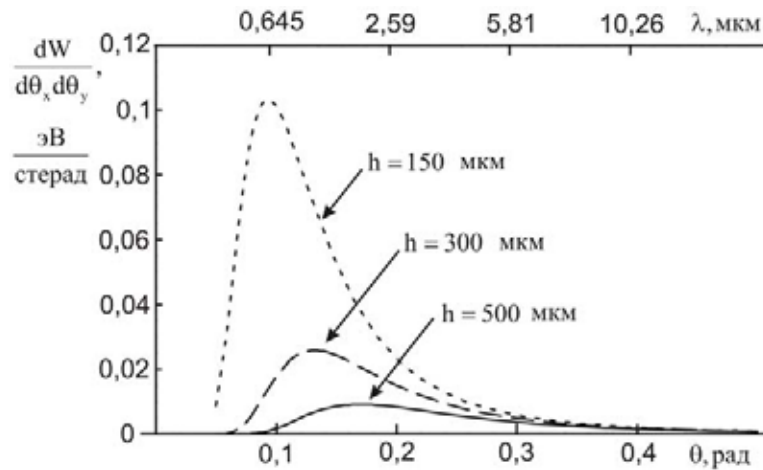


Рис. 26.2. Зависимость углового распределения излучаемой энергии от прицельного параметра h в расчете на один период решетки для следующих условий: $\gamma = 1675$, $d = 130$ мкм, $a = 65$ мкм, $n = 1$.

На верхней шкале показана длина волны фотона излучения Смита–Парселла, соответствующая первому порядку дифракции

На рис. 26.2 приведены результаты вычисления угловой плотности излучения Смита–Парселла для периода решетки $d=130$ мкм ($a=65$ мкм) и лоренц-фактора $\gamma=1673$ ($E=855$ МэВ) в расчете на один период решетки.

Как видно из рисунка, угол наблюдения, соответствующий максимуму излучения, зависит от импакт-параметра h . Для углов $\theta \ll 1$ эту зависимость можно получить аналитически:

$$\theta_m \approx \sqrt{\frac{4\pi h}{\gamma d}},$$

что соответствует величине $\theta_m = 0,093 = 5,3^\circ$ для рассматриваемых параметров и $h = 150$ мкм и хорошо согласуется с расчетом по точной формуле. Данному углу наблюдения соответствует длина волны $\lambda = 0,56$ мкм, т. е. видимый свет ($\hbar\omega_{sp} = 2,24$ эВ).

В полной аналогии с развитым подходом может быть рассмотрена так называемая «объёмная» решетка, стрипы которой наклонены относительно центральной плоскости решетки на угол σ_0 . Характеристики РДИ и для такой решетки могут быть вычислены по той же формуле (26.18), где первый множитель $dW/\hbar d\omega d\Omega$ вычисляется из (26.19) (3.2.9) для компонент скорости частицы $\beta_x = \beta \cos \theta_0$, $\beta_y = \beta \sin \theta_0$. Второй множитель F_2 определяется из простой схемы (рис. 26.3).

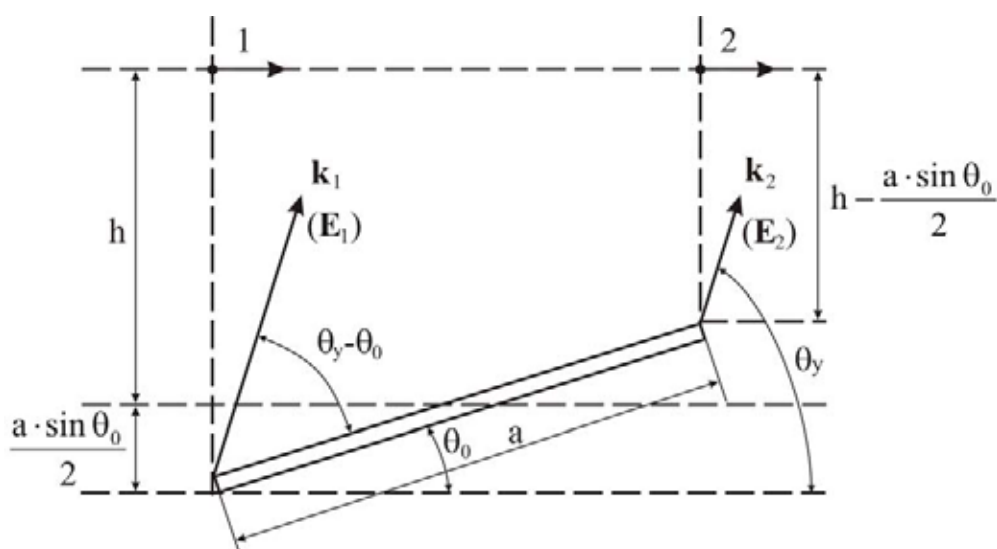


Рис. 26.3. Схема генерации дифракционного излучения на наклонном стрипе

Напряженность поля ДИ от наклонного стрипа по принципу суперпозиции представляет собой сумму полей ДИ от входного (нижнего) и выходного (верхнего) краев стрипа с соответствующим фазовым множителем:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{стрип}} &= \mathbf{E}_{\text{низ}} + \mathbf{E}_{\text{верх}} e^{i\Delta\varphi}, \\ \mathbf{E}_{\text{низ}} &= \mathbf{E}_{\text{ДИ}} \left(h + \frac{a \sin \theta_0}{2} \right), \\ \mathbf{E}_{\text{верх}} &= -\mathbf{E}_{\text{ДИ}} \left(h - \frac{a \sin \theta_0}{2} \right).\end{aligned}\quad (26.18)$$

Фазовый сдвиг $\Delta\varphi$ в (26.18) зависит, во-первых, от разности фаз $\Delta\varphi_1$ между волнами, испускаемыми в направлении $\mathbf{n} = \{\sin \theta \sin \xi, \sin \theta \cos \xi, \cos \theta\}$ из точек 1' и 2' – проекций точек 1 и 2, лежащих на траектории заряда, на поверхность стрипа (см. рис. 26.3):

$$\Delta\varphi_1 = -\frac{\omega}{c} \mathbf{n} \mathbf{r} + \frac{\omega}{c} \mathbf{n} (\mathbf{r} + \mathbf{S}_0) = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \mathbf{S}_0,$$

где через \mathbf{S}_0 обозначен вектор, соединяющий точки 1', 2':

$$\mathbf{S}_0 = \{0, a \sin \theta_0, a \cos \theta_0\}.$$

Тогда имеем:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{a\omega}{c} (\sin \theta \cos \xi \sin \theta_0 + \cos \theta \cos \theta_0).$$

Дополнительный фазовый сдвиг $\Delta\varphi_2 = 2\pi c\Delta t/\lambda$ будет зависеть от времени Δt , необходимого для прохождения электроном расстояния от точки 1 до точки 2 с конечной скоростью βc :

$$\Delta t = \frac{a \cos \theta_0}{\beta c}.$$

Следовательно, результирующий фазовый сдвиг

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = \frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{\cos\theta_0}{\beta} - \cos\theta \cos\theta_0 - \sin\theta \sin\theta_0 \cos\xi \right). \quad (26.19)$$

Для наиболее интересного случая, когда импульс электрона перпендикулярен краям стрипа (перпендикулярная геометрия), имеем

$$\mathbf{E}_{\text{ДИ}} \left(h + \frac{a \sin\theta_0}{2} \right) = \mathbf{E}_{\text{ДИ}}(h) \exp \left(-\frac{\pi a \sin\theta_0}{\lambda \beta_{\perp}} \sqrt{1 - \beta_{\perp}^2 \sin^2 \psi} \right).$$

Далее для упрощения записи индекс \perp у величины β опускается. Используя последнюю формулу, выражение (26.18) можно записать в более симметричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{стрип}} = \mathbf{E}_{\text{ДИ}}(h) e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} & \left\{ \exp \left[-\frac{\pi a \sin\theta_0}{\lambda \beta} \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi} \right] e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}} - \right. \\ & \left. - \exp \left[\frac{\pi a \sin\theta_0}{\lambda \beta} \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi} \right] e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (26.20)$$

Возводя по модулю в квадрат полученное выражение, можно получить спектрально-угловое распределение ДИ от наклонного стрипа:

$$\frac{d^2 W_{\text{стрип}}}{d\Omega d\omega} = \frac{d^2 W_{\text{ДИ}}}{d\Omega d\omega} F_2. \quad (26.21)$$

Здесь $\frac{d^2 W_{\text{ДИ}}}{d\Omega d\omega}$ – спектрально-угловое распределение ДИ от идеальной наклонной полуплоскости (см. выражение (13.9)), а множитель F_2 записывается в виде

$$F_2 = \left| \exp \left(-\chi - i\frac{\Delta\varphi}{2} \right) - \exp \left(\chi + i\frac{\Delta\varphi}{2} \right) \right|^2 = 4 \left(\text{sh}^2 \chi + \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \right). \quad (26.22)$$

Введено обозначение:

$$\chi = \frac{\pi a \sin\theta_0}{\lambda \beta} \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi} = \frac{\pi a \sin\theta_0}{\lambda \beta \gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi}. \quad (26.23)$$

Запишем спектрально-угловое распределение (13.9) через стандартные угловые переменные θ, ξ (см. рис. 25.2 Для стрипа, повернутого на угол θ_0 вокруг оси x (см. рис. 26.1, 26.3), вместо соотношений (26.14) будем иметь:

$$\begin{aligned}\cos\psi &= \sin\theta\sin\xi, \\ \operatorname{tg}(\varphi + \theta_0) &= \operatorname{tg}\theta\cos\xi.\end{aligned}\quad (26.24)$$

Из последнего уравнения можно легко найти выражение для $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos\xi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\xi}}. \quad (26.25)$$

Выразив из (26.24) и (26.25) $\sin\psi$ и $\sin\varphi$ и подставив полученные выражения в формулу (13.9), получаем искомую зависимость $d^2W(\theta, \xi, \theta_0)/d\omega d\Omega$. Для удобства далее будем использовать безразмерное спектрально-угловое распределение $d^2W/\hbar d\omega d\Omega$.

$$\frac{d^2W}{\hbar d\omega d\Omega} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \beta \exp\left(-\frac{4\pi h}{\gamma\beta\lambda} \sqrt{1 + \gamma^2\beta^2\sin^2\theta\sin^2\xi}\right) \Lambda(\theta, \xi, \theta_0), \quad (26.26)$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda(\theta, \xi, \theta_0) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\xi}} \frac{1}{(\gamma^{-2} + \beta^2\sin^2\theta\sin^2\xi)(1 - \beta\cos\theta)} \times \\ &\times \frac{1}{1 - \beta(\cos 2\theta_0\cos\theta + \sin 2\theta_0\sin\theta\cos\xi)} \times \\ &\times \left\{ (\gamma^{-2} + \beta^2\sin^2\theta\sin^2\xi) \left(1 + \beta\cos\theta_0\sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\xi} \right) \times \right. \\ &\times \left(1 - \frac{\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos\xi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\xi}} \right) + \\ &+ \sin^2\theta\sin^2\xi \left(1 - \beta\cos\theta_0\sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\xi} \right) \times \\ &\times \left. \left(1 + \frac{\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos\xi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\xi}} \right) \right\}. \quad (26.27)\end{aligned}$$

Здесь, как обычно, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\xi$. Зависимость от азимута ξ входит в выражение для спектрально-угловой плотности ДИ (см. выше приведенную формулу), а также в сомножитель F_2 (см. формулы (26.22),(26.23)).

Для «длинной» решетки из наклонных стрипов ($N \gg 1$) из спектрально-углового распределения РДИ (см. формулу (26.26)), используя δ -функцию, которая содержится в F_3 , можно получить угловое распределение излучения РДИ n -го порядка. При интегрировании по частоте используем формулу

$$d\omega = \frac{c}{d\left(\frac{1}{\beta} - \cos\theta\right)} d\varphi_0, \quad (26.28)$$

и получаем

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} = \frac{\alpha \hbar c}{2\pi d} N \frac{\beta \exp\left(-\frac{4\pi h}{\gamma \beta \lambda_n} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi}\right)}{\left(\frac{1}{\beta} - \cos\theta\right)} \times \\ \times \Lambda(\theta, \xi, \theta_0) F_2(\lambda_n). \end{aligned} \quad (26.29)$$

Заметим, что в формуле (26.29) зависимость от порядка дифракции входит только через длину волны $\lambda_n = \frac{d}{n} \left(\frac{1}{\beta} - \cos\theta\right)$.

В случае плоской решетки ($\theta_0 = 0$) для азимута $\xi = 0$ из (26.29) можно получить следующую формулу:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{2\alpha \hbar c}{\pi d} N \beta^2 \exp\left(-\frac{4\pi h}{\gamma \beta \lambda_n}\right) \frac{(1 + \beta)(1 - \cos\theta)}{(1 - \beta \cos\theta)^3} \sin^2\left(\frac{\pi a}{d} n\right). \quad (26.30)$$

Для первого порядка дифракции ($n = 1$) последний сомножитель в (26.30) достигает максимального значения (единицы), как отмечалось ранее, при выполнении соотношения $a = d/2$. Однако, в этом случае в спектре излучения будут наблюдаться только нечетные порядки, поскольку для четных порядков этот сомножитель обращается в нуль. Для второго порядка дифракции, $n = 2$, максимум выражения (26.30) дости-

гается либо при $a = 0,25d$, либо при $a = 0,75d$. В общем случае из условия $\sin^2\left(\frac{\pi a}{d}n\right) = 1$ вытекает соотношение между шириной стрипа и периодом для максимума выхода излучения Смита–Парселла для n -ого порядка:

$$\frac{a}{d} = \frac{1}{2n}.$$

Сравнение угловых распределений излучения Смита–Парселла, рассчитанных по модели индуцированных поверхностных токов (ИПТ) и по модели резонансного дифракционного излучения (РДИ) для $n = 1$ и $\xi = 0$ (см. формулы (25.13) и (26.30)), можно провести, вычислив их отношение:

$$\eta_{\parallel} = \frac{dW_{1 \text{ ИПТ}}}{dW_{1 \text{ РДИ}}} = \frac{\beta}{1 + \beta}(1 + \cos\theta).$$

Таким образом, в ультрарелятивистском случае обе модели дают близкий результат для углов излучения $\theta \leq \pi/4$.

Для нулевого азимутального угла выражение (26.29) сводится к следующему:

$$\begin{aligned} \frac{dW_n}{d\Omega} = & \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\hbar c}{d} N \beta^2 \exp\left(-\frac{4\pi h}{\gamma\beta\lambda_n}\right) \times \frac{(1 + \beta \cos\theta_0)[1 - \cos(\theta - \theta_0)]}{(1 - \beta \cos\theta)^2 [1 - \beta \cos(\theta - 2\theta_0)]} \times \\ & \times \left\{ \operatorname{sh}^2\left[\frac{\pi a \sin\theta_0}{\gamma\beta\lambda_n}\right] + \sin^2\left[\frac{\pi a}{\lambda_n}\left(\cos(\theta - \theta_0) - \frac{\cos\theta_0}{\beta}\right)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (26.31)$$

Рассмотрим решётку из стрипов, расположенных перпендикулярно траектории частицы ($\theta_0 = \pi/2$). Для частного случая $\xi = 0$ из (26.31) следует формула для углового распределения излучения Смита–Парселла первого порядка:

$$\frac{dW_{\perp}}{d\Omega} = \frac{2\alpha \hbar c}{\pi d} N \beta^2 \frac{1 - \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2 (1 + \beta \cos \theta)} \times \exp\left(-\frac{4\pi h}{\gamma \beta \lambda_1}\right) \left\{ \operatorname{sh}^2 \left[\frac{\pi a}{\gamma \beta \lambda_1} \right] + \sin^2 \left[\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda_1} \right] \right\}. \quad (26.32)$$

Вновь вычисляя отношение между выражениями, описывающими угловое распределение излучения Смита–Парселла в плоскости $\xi = 0$ в модели индуцированных поверхностных токов (см. формулу 25.16) и в модели РДИ (формула (26.32)) в ультрарелятивистском приближении, можно получить

$$\eta_{\perp} = 1 + \sin \theta.$$

Т. е. как и для плоской решётки в области углов $\theta \leq \pi/4$, обе модели дают схожий результат.

Следует отметить, что в формуле (25.16) через h (следуя статье [05.8]) обозначается расстояние между траекторией частицы и краем стрипа, тогда как в этом параграфе под импакт-параметром h подразумевается расстояние между траекторией частицы и плоскостью, проведенной через центральные линии стрипов (см. рис. 26.3).

Для решетки, состоящей из наклонных стрипов, схема которой показана на рис. 26.4, развитый подход применим для области полярных углов $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$, которые определяются из элементарного построения:

$$\operatorname{tg} \theta_{\min} = \frac{a \sin \theta}{d + a \cos \theta_0}; \quad \operatorname{tg} \theta_{\max} = \frac{a \sin \theta}{d - a \cos \theta_0}.$$

Так, например, для соотношения между шириной стрипа и периодом $a/d = 1/2$ для угла наклона стрипа $\theta_0 = 45^\circ$ (рис. 26.4,а)

$$\theta_{\min} = 14,64^\circ; \quad \theta_{\max} = 151,33^\circ.$$

Для перпендикулярных стрипов (рис. 26.4,б)

$$\theta_{\min} = 26,56^\circ; \quad \theta_{\max} = 153,44^\circ.$$

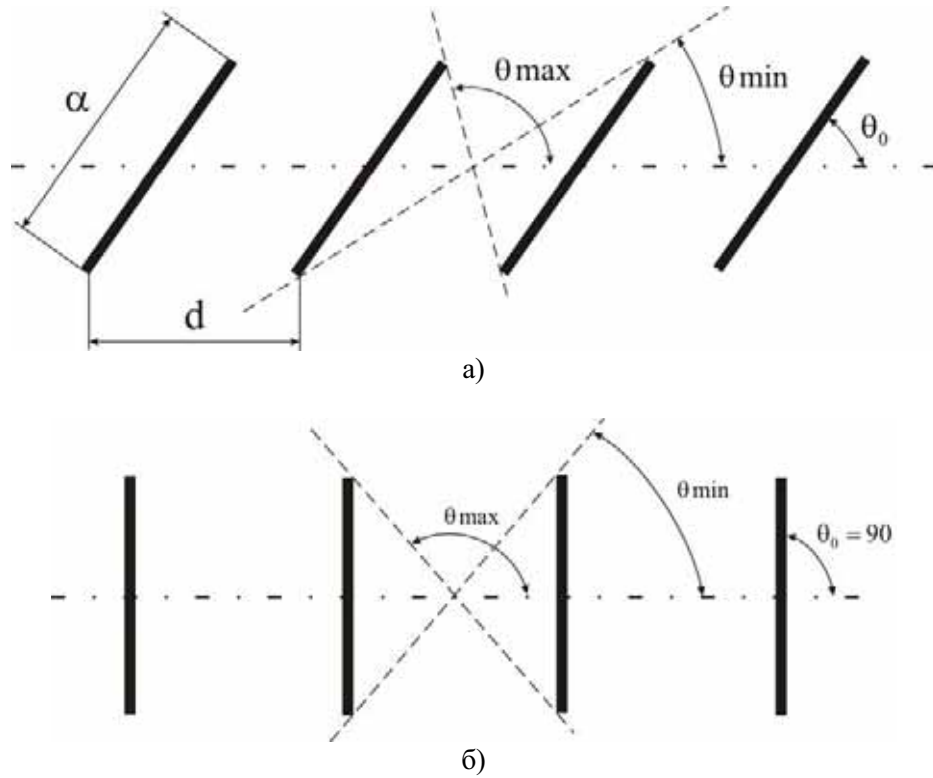


Рис. 26.4. Схемы решёток, состоящих из наклонных проводящих стрипов, разделенных вакуумными промежутками

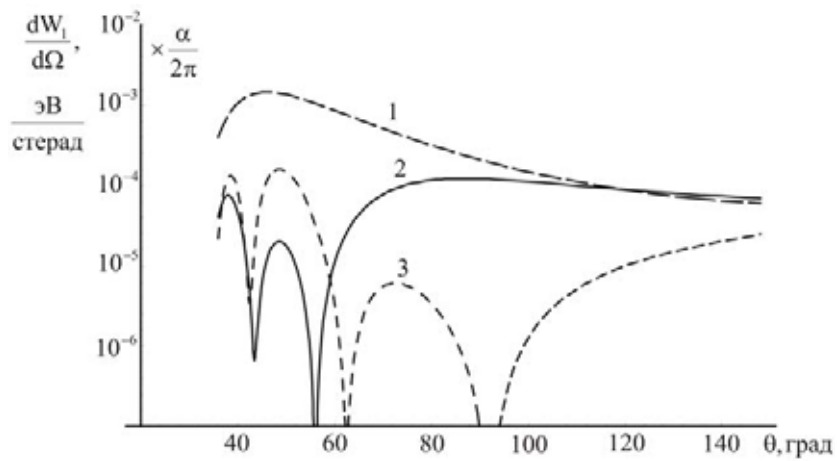


Рис. 26.5. Угловое распределение первой гармоники излучения Смита–Парселла в плоскости, перпендикулярной решетке ($\xi = 0$) с углами наклона стрипов $\theta_0 = 0$ (кривая 1), $\theta_0 = \pi/4$ (кривая 2), $\theta_0 = \pi/2$ (кривая 3).

Расчет проводился для следующих параметров: $\gamma = 100$, $d = 6$ мм,
 $a = 3$ мм, $h = 15$ мм

На рис. 26.5 приведены результаты расчета углового распределения излучения Смита–Парселла для первого порядка дифракции $dW_1/d\Omega$ в зависимости от полярного угла θ в плоскости, перпендикулярной средней плоскости решётки ($\xi = 0$). Расчет проводился для трех типов решеток: плоской ($\theta_0 = 0$), с углами наклона стрипов $\theta_0 = 45^\circ$ и 90° (см. рис. 26.4). Остальные параметры выбирались следующими: $\gamma = 100$ мм, $d = 6$ мм, $a = 3$ мм, $h = 15$ мм, $\xi = 0$.

Как следует из рисунка, интенсивность излучения вдоль поверхности стрипа ($\theta = \theta_0$) стремится к нулю (см. выражение (26.27)). Для перпендикулярной решетки дополнительные минимумы обусловлены обращением в нуль второго слагаемого в выражении (26.29)

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = k\pi, \quad k - \text{целое.}$$

Для углов $\theta_0 = \pi/2$, $\xi = 0$ и первого порядка дифракции и (26.21) следует

$$\frac{a}{\lambda_1} \sin \theta_k = \frac{a \sin \theta_k}{d \left(\frac{1}{\beta} - \cos \theta_k \right)} = k. \quad (26.33)$$

В ультрарелятивистском случае отсюда можно получить значения полярных углов θ_k , где угловая плотность излучения $dW_1/d\Omega$ принимает минимальные значения:

$$\theta_{\min, k} = 2 \arctg \left(\frac{a}{d k} \right).$$

Для рассматриваемого случая $a/d = 1/2$ последнее соотношение даёт значения (см. рис. 26.5):

$$\theta_{\min, 1} = 53,13^\circ, \quad \theta_{\min, 2} = 28,07^\circ.$$

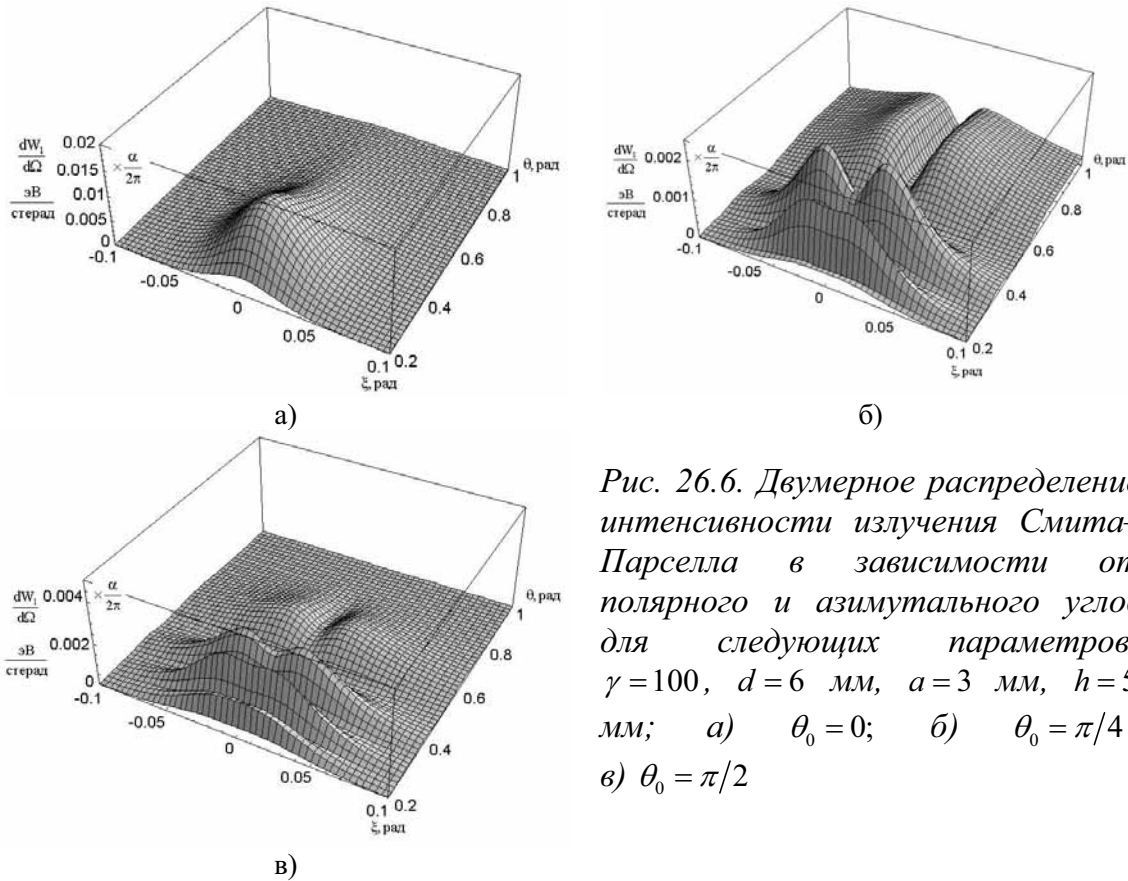


Рис. 26.6. Двумерное распределение интенсивности излучения Смита–Парселла в зависимости от полярного и азимутального углов для следующих параметров: $\gamma=100$, $d=6$ мм, $a=3$ мм, $h=5$ мм; а) $\theta_0=0$; б) $\theta_0=\pi/4$; в) $\theta_0=\pi/2$

На рис. 26.6 приведены двумерные распределения $dW_1/d\Omega$ для рассмотренных решеток. Во-первых, следует отметить, что при выполнении соотношения $a/d=1/2$ максимальный выход излучения обеспечивает «плоская» решетка ($\theta_0=0$). Далее, при $\theta_0 \neq 0$, в угловых распределениях излучения наблюдается, как правило, двумодальное распределение по азимутальному углу при наличии ряда локальных максимумов по полярному углу. Углы θ_{\max} , соответствующие этим максимумам, можно найти из следующих соображений.

В выражении (26.23) квадрат тригонометрического синуса определяет не только минимумы, но и положения максимумов (с хорошим приближением), поскольку остальные множители меняются более плавно. Приближенное условие максимума угловой плотности $dW_1/d\Omega$ записывается по аналогии с (26.33):

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ где } k - \text{целое,}$$

ИЛИ

$$\frac{a}{\lambda_1} \sin \theta_k = \frac{2k+1}{2}.$$

Отсюда имеем:

$$\theta_{\max, k} \approx 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{2k+1} \frac{a}{d} \right). \quad (26.34)$$

Для соотношения $a/d = 1/2$ и $k = 0, 1$ имеем:

$$\theta_{\max, 0} = 90^\circ, \quad \theta_{\max, 1} = 36,84^\circ.$$

На рис. 26.7 приведены результаты расчетов зависимости $dW_1/d\Omega$ для двух азимутальных углов $\xi = 0$ и $\xi = 0,013$ и различных значений импакт-параметра.

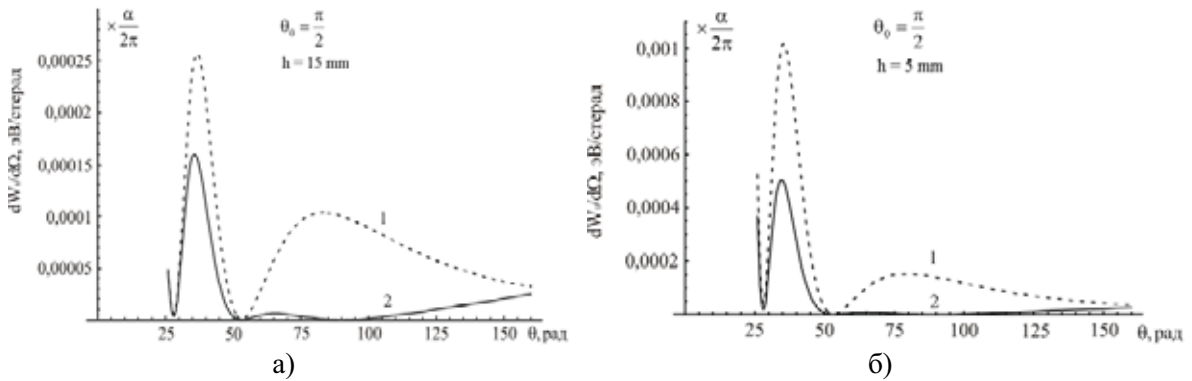


Рис. 26.7. Зависимость интенсивности излучения Смита–Парселла $dW_1/d\Omega$ от полярного угла для азимутальных углов $\xi = 0$ (кривая 1) и $\xi = 0,013$ (кривая 2), для параметров $\gamma = 100$, $d = 6$ мм, $a = 3$ мм и различных значений импакт-параметра ($h = 15$ мм; рис. 26.7,а и $h = 5$ мм, рис. 26.7,б)

Как следует из рисунка, положение максимумов на угловой шкале практически не зависит от прицельного параметра h . Точное значение угла $\theta_{\max, 1}$ для обоих случаев:

$$\theta_{\max, 1} (h = 15, \xi = 0) = 37,7^\circ,$$

$$\theta_{\max, 1} (h = 3, \xi = 0) = 36,2^\circ,$$

что хорошо согласуется с оценкой, полученной по приближенной формуле (26.34). Легко показать, что в общем случае приближенные значе-

ния углов, максимизирующих выход излучения Смита–Парселла, даются формулой:

$$\theta_{\max, m} = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 + \frac{2m+1}{2} \frac{d}{a}} \right], \quad m - \text{целое} \quad (26.35)$$

Для основного максимума ($m=0$) для соотношения $a/d=1/2$ из (26.35) следует связь между $\theta_{\max, 0}$ и θ_0 :

$$\theta_{\max, 0} = \theta_0,$$

тогда как с увеличением индекса m величина $\theta_{\max, m}$ уменьшается.

Таким образом, прямая зависимость $\theta_{\max} \sim \theta_0/2$, на которую указывали авторы работы [05.8], является, вообще говоря, некорректной, поскольку в распределении $dW_1/d\Omega$ появляется несколько максимумов. Глобальный максимум зависит от отношения $h/\gamma d$, входящего в экспоненциальный множитель (см. рис. 26.8).

Появление максимумов в азимутальной зависимости излучения в плоскостях $\pm \xi_{\max} \neq 0$ связано с тем фактом, что экспоненциальный множитель убывает с ростом ξ^2 , тогда как функция $\Lambda(\theta, \xi)$ (см. формулу (26.27)), наоборот, возрастает. Для типичного случая (см. рис. 26.6,б), когда $\theta_{\max} \approx \theta_0$, функцию $\Lambda(\theta, \xi)$, с точностью до γ^{-2} включительно, можно упростить:

$$\Lambda(\theta = \theta_0, \xi) \approx \frac{1}{1 - \cos \theta_0} \frac{\gamma^2 \sin^2 \theta \sin \xi^2}{1 + \gamma^2 \sin^2 \theta \sin \xi^2}.$$

При введении проекционного угла $\theta_x \approx \gamma \sin \theta \sin \xi \approx \xi \gamma \sin \theta$, азимутальная зависимость выхода излучения Смита–Парселла имеет вид

$$\frac{dW_n}{d\Omega} \Rightarrow \exp \left(-\frac{4\pi h}{\gamma \lambda n} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta_x^2} \right) \frac{\gamma^2 \theta_x^2}{1 + \gamma^2 \theta_x^2}. \quad (26.36)$$

Из полученной зависимости следует, например, что положение максимума ξ_m в азимутальной зависимости $dW_1/d\Omega$ определяется только параметром $z = \frac{4\pi h}{\gamma\lambda}$.

На рис. 26.9 приведена зависимость величины $\xi_m \gamma \sin \theta$ от параметра z , которая с хорошей точностью аппроксимируется зависимостью

$$\gamma \xi_m \sin \theta = \frac{1}{0,4 + 0,528z - 0,072z^2}. \quad (26.37)$$

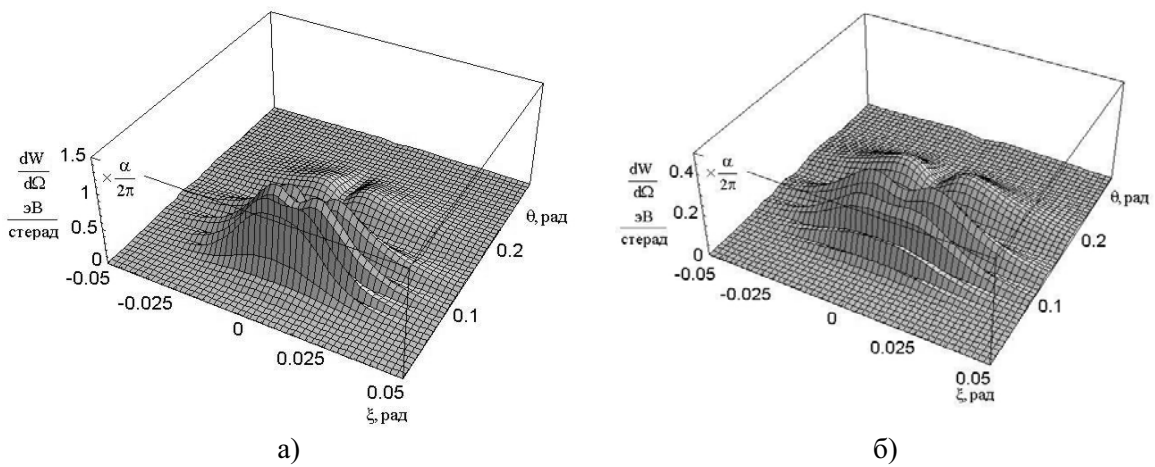


Рис. 26.8. То же, что на рис. 26.6 для наклона стрипа $\theta_0 = \pi/8$ и параметров $d = 4$ мм; $a = 2$ мм; $h = 2$ мм; рис. 26.8а – $\gamma = 1000$; 26.8б – $\gamma = 500$

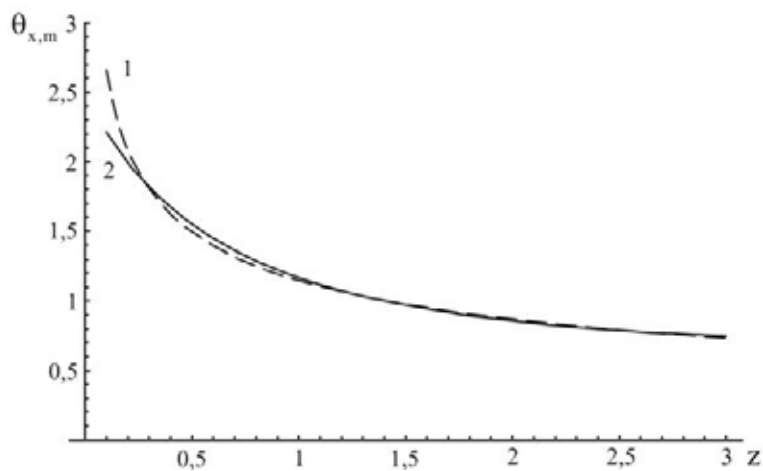


Рис. 26.9. Зависимость величины $\xi_m \gamma \sin \theta$ от параметра $z = 4\pi h/\gamma\lambda$.
Кривая (1) – точный расчет, кривая (2) – аппроксимация (26.36)

На рис. 26.10 приведены типичные азимутальные зависимости для рассматриваемых решеток и тех же параметров, что на рис. 26.6 для полярного угла вылета $\theta = 0,7 \approx \pi/4$.

Как ожидалось, угол ξ_m практически не зависит от угла наклона стрипа θ_0 . По оценке (26.37) для параметра $z = 0,44$, соответствующего рассматриваемому случаю, получаем значение $\xi_m = 0,24$, что в пределах 10 % погрешности совпадает с точными значениями ξ_m (рис. 26.10).

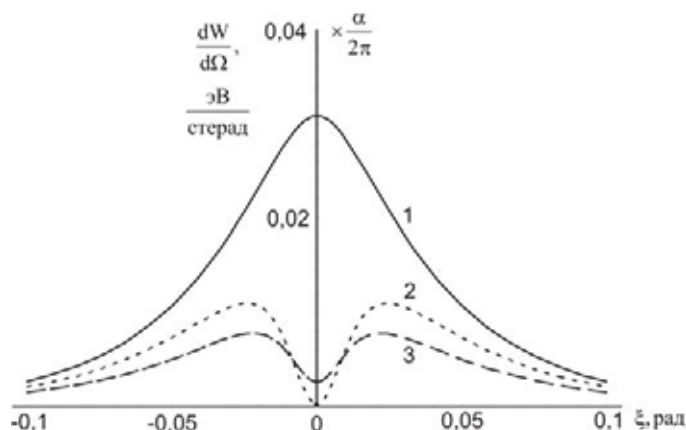


Рис. 26.10. Азимутальное распределение интенсивности излучения Смита–Парселла для угла наклона стрипа $\theta_0 = 0$ (кривая 1); $\theta_0 = \pi/4$ (кривая 2); $\theta_0 = \pi/2$ (кривая 3). Остальные параметры: $\gamma = 100$; $d = 6$ мм; $a = 3$ мм; $h = 5$ мм, $\theta = 0,7$

В заключение следует отметить, что двумодальное азимутальное распределение излучения Смита–Парселла не является характерным признаком этого типа излучения, как утверждалось в статье [84.3]. Во-первых, для плоской решетки азимутальное распределение является одномодальным для любого полярного угла, и, во-вторых, для объемной решетки в ультррелятивистском случае распределение становится одномодальным для малых полярных углов, где нельзя использовать приближенную формулу (26.36) (см. рис. 26.8).

27. Резонансное дифракционное излучение электронов, пролетающих вблизи наклонной плоской решетки

В предыдущем параграфе было показано, что в рамках рассмотренных моделей резонансное дифракционное излучение (РДИ) для плоской решетки обладает рядом преимуществ по сравнению с решеткой с наклонными стрипами (высокая интенсивность, одномодальное азиму-

тальное распределение). Для фиксированного угла наблюдения θ_y относительно электронного пучка, пролетающего параллельно решетке, положение линии в спектре определяется периодом и скоростью частицы в соответствии с формулой Смита–Парселла. Чтобы изменить длину волны излучения Смита–Парселла, необходимо менять угол наблюдения, что не всегда бывает удобным. В работе [00.6] предлагался другой способ «сдвига линии» – изменением угла наклона решетки θ_0 при неизменных углах наблюдения θ, ξ (рис. 27.1):

$$\mathbf{n} = \{ \sin \theta \sin \xi, \sin \theta \cos \xi, \cos \theta \}.$$

Рассмотрим РДИ для геометрии, показанной на рис. 27.1, т. е. при наклонном пролете электронов под плоской решеткой.

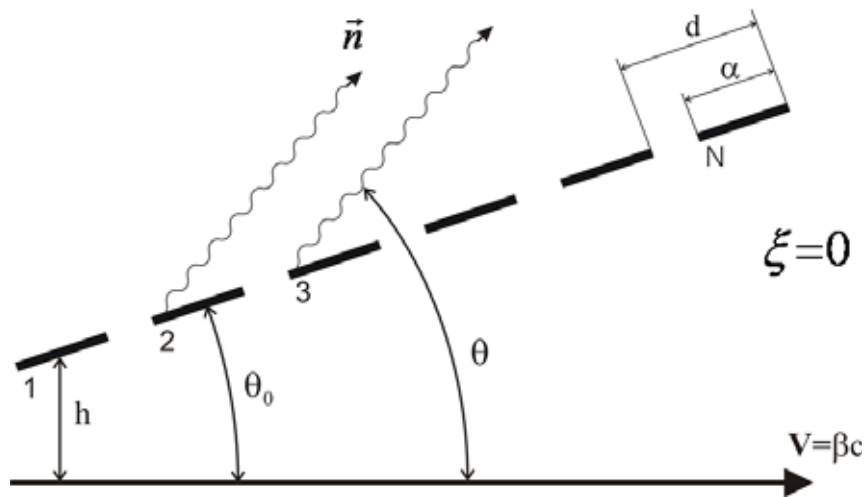


Рис. 27.1. Геометрия РДИ при наклонном пролете электронов вблизи плоской решетки

Введем напряженность поля на ближнем к траектории электрона стрипе (который в дальнейшем будем обозначать индексом 1). Прицельный параметр h , как и ранее, отсчитывается от центральной линии стрипа. Переписывая формулу (26.20) через переменные θ, ξ (углы, характеризующие волновой вектор $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ в системе координат, связанной с импульсом электрона), получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{\text{стрип}} = \mathbf{E}_{\text{ДИ}}(h) \exp(i\varphi_a) \times \\ \times \left\{ \exp \left[-\frac{\pi a \sin \theta_0}{\gamma \beta \lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi} - i\varphi_a \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[\frac{\pi a \sin \theta_0}{\gamma \beta \lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi} + i\varphi_a \right] \right\}. \end{aligned} \quad (27.1)$$

Здесь фазовый сдвиг φ_a дается выражением:

$$\varphi_a = \frac{\pi a}{\lambda} \left(\frac{\cos \theta_0}{\beta} - \cos \theta \cos \theta_0 - \sin \theta \sin \theta_0 \cos \xi \right). \quad (27.2)$$

Напряженность поля на следующем стрипе (№ 2) вычисляется для прицельного параметра $h + d \sin \theta_0$, а также для другого фазового сдвига φ_0 :

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1(h + d \sin \theta_0) \exp(-i\varphi_0) = \mathbf{E}_{\text{стрип}}(h) \exp(-\chi_0 - i\varphi_0), \quad (27.3)$$

где

$$\chi_0 = \frac{2\pi d \sin \theta_0}{\gamma \beta \lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi}, \quad (27.4)$$

$$\varphi_0 = \frac{2\pi d}{\lambda} \left(\frac{\cos \theta_0}{\beta} - \cos \theta \cos \theta_0 - \sin \theta \sin \theta_0 \cos \xi \right). \quad (27.5)$$

Параметр χ_0 характеризует «спадание» напряженности собственного поля электрона по мере увеличения расстояния между последующим стрипом и траекторией электрона. Аналогично вычисляется поле для k -го стрипа:

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{E}_{\text{стрип}}(h) \exp[-(k-1)(\chi_0 + i\varphi_0)]. \quad (27.6)$$

Результирующее поле от решетки, состоящей из N стрипов, находится через сумму:

$$\mathbf{E}_{\text{рди}} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_N = \mathbf{E}_{\text{стрип}} \sum_{k=1}^N \exp[-(k-1)(\chi_0 + i\varphi_0)]. \quad (27.7)$$

Как обычно, спектрально-угловая плотность РДИ определяется квадратом модуля поля (27.7):

$$\frac{d^2W_{РДИ}}{\hbar d\Omega d\omega} = \frac{d^2W_{ДИ}}{\hbar d\omega d\Omega} F_2 F_N. \quad (27.8)$$

В выражении (27.8) первый и второй сомножители описывают дифракционное излучение от одного наклонного стрипа (см. формулы (26.22) и (26.26)), тогда как множитель F_N записывается через формулу для геометрической прогрессии:

$$F_N = \left| \sum_{k=1}^N \exp[-(k-1)(\chi_0 + i\varphi_0)] \right|^2 = \left| \frac{1-c^N}{1-c} \right|^2, \quad (27.9)$$

где $c = \exp(-\chi_0 - i\varphi_0)$.

После простых преобразований, вместо (27.9) можно получить:

$$F_N = \exp[-(N-1)\chi_0] \frac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{N\chi_0}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{N\varphi_0}{2}\right)}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{\chi_0}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}. \quad (27.10)$$

Следует отметить, что по своей структуре выражение (27.10) совпадает с аналогичной формулой, описывающей резонансное переходное излучение с учетом поглощения [75.1]. После несложных преобразований вместо (27.10), можно получить более удобную формулу:

$$F_N = \frac{1 + e^{-2N\chi_0} - 2e^{-N\chi_0} \cos(N\varphi_0)}{1 + e^{-2\chi_0} - 2e^{-\chi_0} \cos\varphi_0}. \quad (27.11)$$

Легко видеть, что для параллельного пролета ($\theta_0 = 0, \chi_0 = 0$) вместо (27.10) имеем стандартный резонансный множитель, характеризующий, в том числе, излучение Смита–Парселла:

$$F_N(\theta_0 = 0) = \frac{\sin^2(N\varphi_0/2)}{\sin^2(\varphi_0/2)}.$$

Другими словами, в этом случае монохроматичность излучения определяется числом периодов N решетки. Однако, в общем случае, для $\theta_0 \neq 0$, монохроматичность линии РДИ будет зависеть не только от N , но и от других параметров задачи (от угла θ_0 , от лоренц-фактора, длины волны и т. д.).

Рассмотрим характеристики РДИ для так называемой «длинной» решетки:

$$N\chi_0 \gg 1. \quad (27.12)$$

В этом предельном случае вместо (27.12) имеем:

$$F_N = \frac{1}{1 - 2e^{-\chi_0} \cos \varphi_0 + e^{-2\chi_0}}. \quad (27.13)$$

Ясно, что максимального значения выражение (27.13) достигает при выполнении условия

$$\cos \varphi_0 = 1, \quad \varphi_0 = 2n\pi, \quad n - \text{целое}. \quad (27.14)$$

При выполнении этого условия резонанса множитель F_N будет зависеть только от параметра χ_0 :

$$F_N^{\max} = \frac{1}{(1 - e^{-\chi_0})^2}. \quad (27.15)$$

Для малых значений параметра $\chi_0 \ll 1$ вместо (27.15) можно получить более простую формулу:

$$F_N^{\max} \approx \frac{1}{\chi_0^2}.$$

Условие резонанса (27.14) определяет также длину волны РДИ, соответствующую максимуму излучения, которая наиболее просто записывается для $\xi = 0$:

$$\lambda_n = \frac{d[(\cos \theta_0 / \beta) - \cos(\theta - \theta_0)]}{n}, \quad n - \text{целое}. \quad (27.16)$$

Это выражение является обобщением формулы Смита–Парселла (23.1), в которую оно переходит при $\theta_0 = 0$.

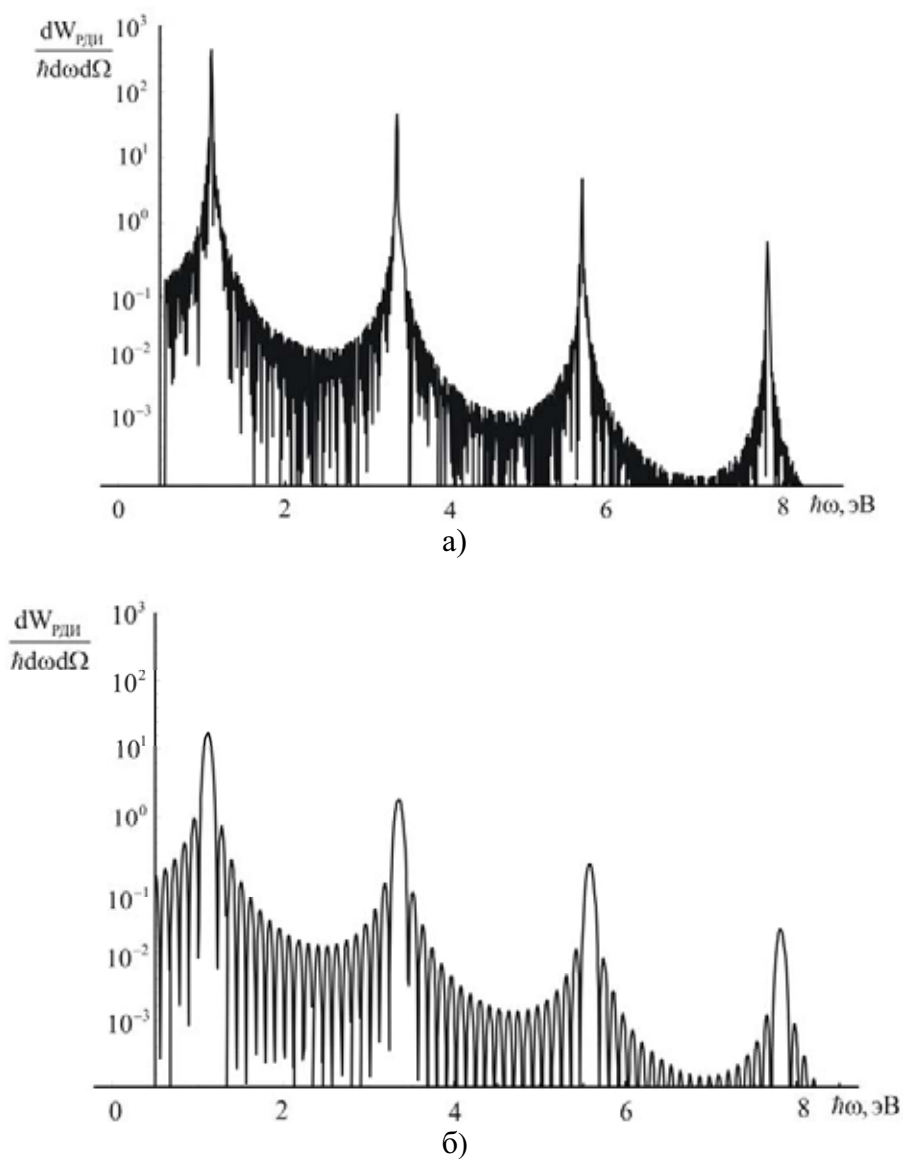


Рис. 27.2. Спектрально-угловое распределение РДИ при параллельном пролёте ($\theta_0 = 0$) для фиксированных углов наблюдения и различного числа периодов ($N = 50$ – рис. 27.2, а; $N = 10$ – рис. 27.2, б; кинематические переменные: $\gamma = 1000$; $d = 400$ мкм; $a = 200$ мкм; $h = 100$ мкм, $\theta = 0,075$ рад; $\xi = 0$

На рис. 27.2 показано спектральное распределение РДИ при параллельном пролёте над решеткой для угла наблюдения $\theta = 0,075$ рад = $4,3^\circ$

(расчет проводился для следующих параметров: $\gamma=1000$; $d=400$ мм; $a=200$ мм; $h=100$ мм; $\xi=0$).

На рис. 27.2,*а* приведено распределение для 50 периодов, а на рис. 27.2,*б* – для $N=10$.

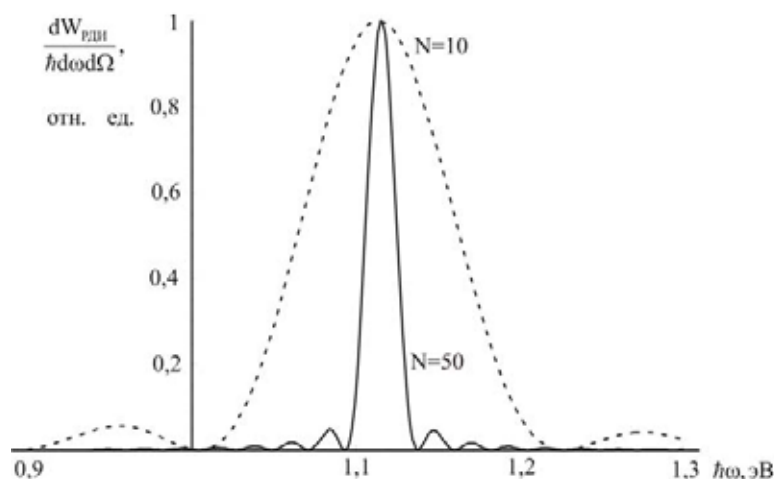


Рис. 27.3. Форма спектральной линии для первого порядка дифракции ($n=1$) для тех же параметров, что и на рис. 27.2. Для удобства сравнения интенсивность спектральной линии с $N=50$ уменьшена в 25 раз

Как видно из рис. 27.3, интенсивность спектрально-углового распределения в максимуме определяется величиной N^2 , тогда как ширина спектральной линии – величиной $1/N$. Действительно, полная ширина на полувысоте линии (FWHM) для $N=50$ составляет величину $\Delta\hbar\omega=0,02$ эВ. С уменьшением числа периодов до $N=10$ величина FWHM возрастает до значения $\Delta\hbar\omega=0,1$ эВ. Таким образом, монохроматичность линии РДИ для первого порядка

$$\frac{\Delta\hbar\omega}{\hbar\omega_1}(N=10)=\frac{0,1}{1,115}\approx 9\%; \quad \frac{\Delta\hbar\omega}{\hbar\omega_1}(N=50)=1,8\%.$$

С увеличением порядка дифракции n монохроматичность улучшается как $1/n$. Например, для седьмого порядка дифракции можно получить:

$$\frac{\Delta\hbar\omega}{\hbar\omega_7}(N=10)=1,4\%.$$

Эволюция спектрального распределения РДИ при наклоне рассмотренной решетки с $N = 50$ и неизменным прицельным параметром $h = 100$ мкм показана на рис. 27.4.

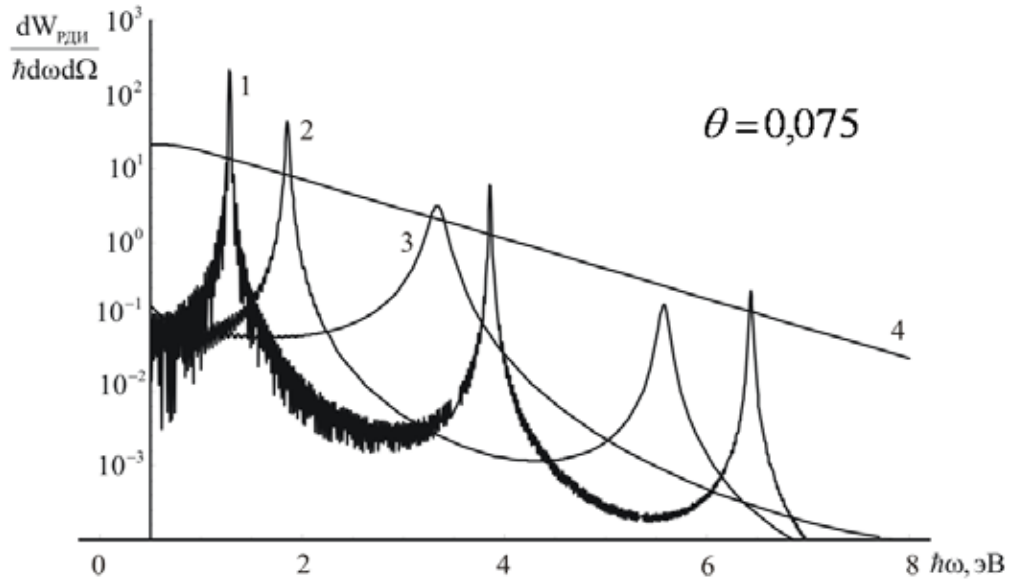


Рис. 27.4. Эволюция спектрального распределения РДИ для $h = 100$ мкм, $N = 50$ и тех же параметров, что на рис. 27.2. Углы наклона: $\theta_0 = 0,005$ – кривая 1; $\theta_0 = 0,015$ – кривая 2; $\theta_0 = 0,025$ – кривая 3; $\theta_0 = 0,0375$ – кривая 4

Как видно из рисунка, с увеличением угла наклона θ_0 возрастает непрерывная составляющая в спектре излучения. Далее, в соответствии с формулой (26.16) положения спектральных максимумов даются выражением

$$\hbar\omega_n = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_n} = \frac{2\pi\hbar c n}{d \left[\cos(\theta - \theta_0) - \frac{\cos\theta_0}{\beta} \right]}. \quad (27.17)$$

Для ультрарелятивистского случая полученную формулу можно переписать:

$$\hbar\omega_n = \frac{\pi\hbar c n}{d \sin \frac{\theta}{2} \sin \left(\theta_0 - \frac{\theta}{2} \right)}. \quad (27.18)$$

Легко видеть, что по мере приближения величины угла наклона θ_0 к половинному значению полярного угла наблюдения $\theta/2$ положение максимума сдвигается в жесткую часть спектра при существенном уменьшении интенсивности линии в максимуме (см. рис. 27.4). При выполнении условия $\theta_0 = \theta/2$ спектральная интенсивность РДИ заметно возрастает, однако в спектре отсутствуют какие - бы то ни было максимумы (кривая 4 на рис. 27.4). По мере дальнейшего увеличения угла наклона θ_0 в спектре вновь появляются максимумы, однако существенно меньшей интенсивности (рис. 27.5).

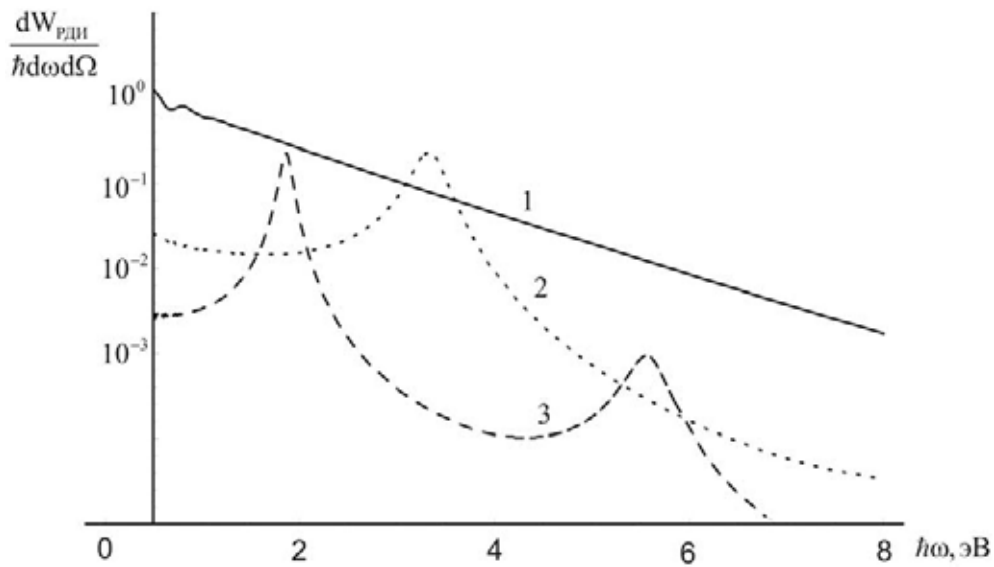


Рис. 27.5. То же, что и на рис. 27.4, для $\theta_0 = 0,04$ (кривая 1); $\theta_0 = 0,05$ (кривая 2) и $\theta_0 = 0,06$ (кривая 3)

Следует указать, что при условии $\theta = \theta_0$ (т. е. излучение направлено вдоль поверхности решетки) интенсивность РДИ обращается в нуль (вместе с множителем $dW/d\Omega h d\omega$). При дальнейшем увеличении угла наклона ($\theta_0 > \theta$) в спектре вновь появляются максимумы на непрерывной “подложке”, однако интенсивность РДИ будет, вообще говоря, заметно меньше.

На рис. 27.6 показаны спектральные распределения РДИ для двух значений, $\theta_0 = 0,03$ и $\theta_0 = 0,045$, при тех же остальных параметрах, что и ранее. Для выбранных значений угла наклона θ_0 положения максимумов в спектре РДИ будут совпадать, поскольку совпадают значения

$\left| \theta_0 - \frac{\theta_y}{2} \right|$, однако интенсивность РДИ уменьшается с увеличением θ_0 , как отмечалось ранее. Далее, можно указать, что монохроматичность спектрального пика в этом случае ($\Delta\hbar\omega/\hbar\omega \sim 10\%$) уже практически не зависит от числа периодов решетки (рис. 27.6,а и рис. 27.6,б), так же как интенсивность излучения в максимуме.

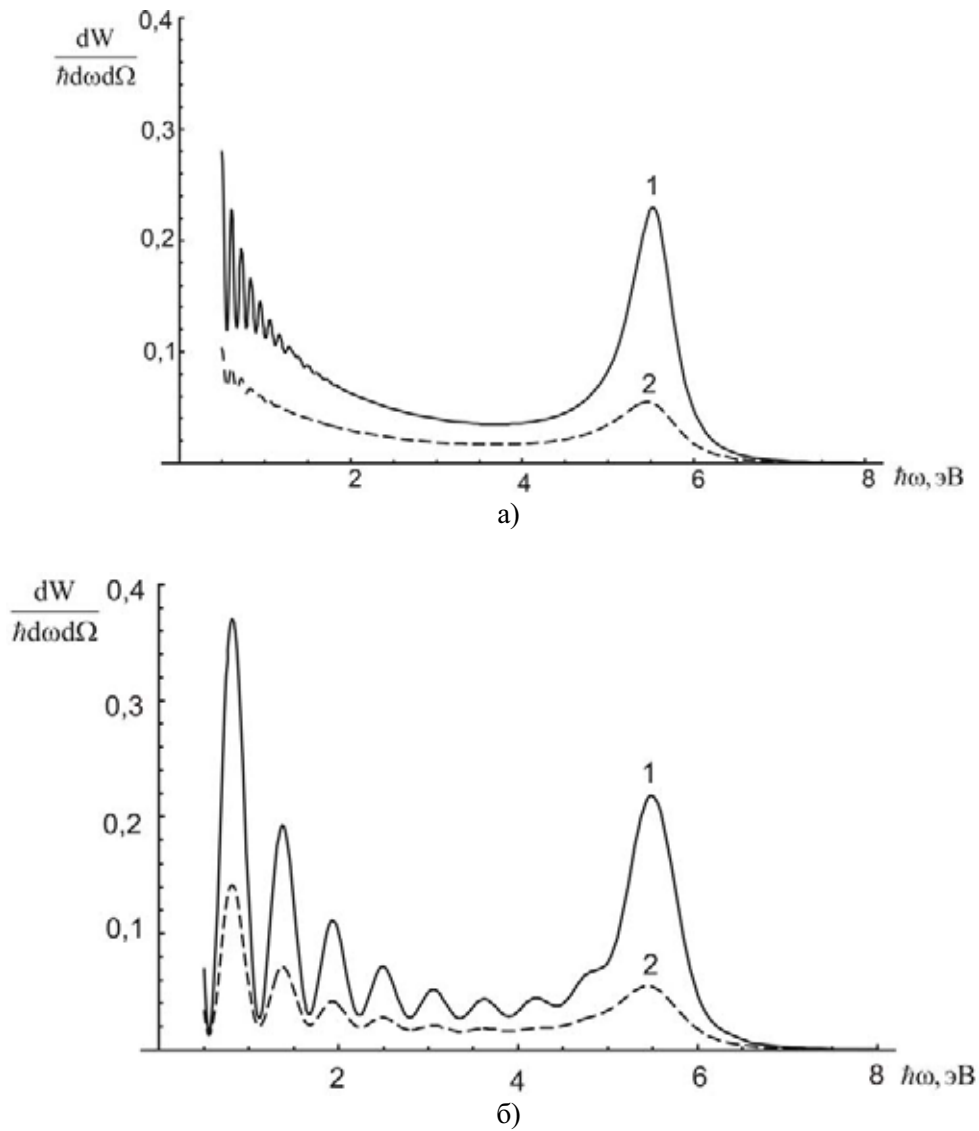


Рис. 27.6. То же, что и на рис. 27.3, $\theta_0 = 0,03$ и $\theta_0 = 0,045$ для $N = 50$ и $N = 10$

Развитый подход позволяет учесть влияние конечного эмиттанта электронного пучка на характеристики излучения Смита–Парселла. Рассмотрим, в первую очередь, влияние угловой расходимости элек-

тронного пучка. Для этого удобно использовать угловые переменные θ_x, θ_y , определённые в системе, связанной с решеткой (рис. 26.1,б):

$$\sin \theta_x = \sin \theta \sin \xi; \quad \operatorname{tg} \theta_y = \operatorname{tg} \theta \cos \xi. \quad (27.19)$$

В этих переменных величины, входящие в исходную формулу (27.8), выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_{\text{ДИ}}}{\hbar d\omega d\Omega} &= \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{\beta}{\cos \theta_0} \exp \left\{ -\frac{4\pi h}{\gamma\beta\lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta_x} \right\} \times \\ &\left(1 + \beta \cos \theta_0 \cos \theta_x \right) + \frac{\sin^2 \theta_x (1 - \beta \cos \theta_0 \cos \theta_x) (1 + \cos \theta_y)}{(\gamma^{-2} + \beta^2 \sin^2 \theta_x)} \\ &\times \frac{1}{\left[1 - \beta \cos \theta_x \cos(\theta_y - \theta_0) \right] \left[1 - \beta \cos \theta_x \cos(\theta_y + \theta_0) \right]}, \quad (27.20) \end{aligned}$$

$$F_2 = 4 \left(\sinh^2 \chi_0 + \sin^2 \varphi_a \right),$$

$$F_N = \frac{1 + \exp(-2N\chi_0) - 2 \exp(-N\chi_0) \cos(N\varphi_0)}{1 + \exp(-2\chi_0) - 2 \exp(-\chi_0) \cos \varphi_0},$$

где

$$\chi = \frac{\pi a \sin \theta_0}{\gamma\beta\lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta_x},$$

$$\chi_0 = \frac{\pi d \sin \theta_0}{\gamma\beta\lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta_x},$$

$$\varphi_a = \frac{\pi a}{\lambda} \left(\frac{\cos \theta_0}{\beta} - \cos \theta_x \cos(\theta_y - \theta_0) \right),$$

$$\varphi_0 = \frac{2\pi d}{\lambda} \left(\frac{\cos \theta_0}{\beta} - \cos \theta_x \cos(\theta_y - \theta_0) \right).$$

В первой формуле через h , как и ранее, обозначается расстояние между центральной линией ближайшего стрипа и траекторией электрона. Однако при проведении конкретных расчетов для заданного эмиттанта пучка удобнее использовать параметр h_0 , т. е. расстояние между решеткой и «фокусом» электронного пучка (см. рис. 27.7).

Для увеличения эффективности взаимодействия между пучком и решеткой, точка «фокуса» располагается над серединой решетки. Для

чётного числа периодов N решетки связь между прицельными параметрами h и h_0 дается формулой:

$$h_0 = h + \frac{d}{2}(N-1)\operatorname{tg}\theta_0. \quad (27.21)$$

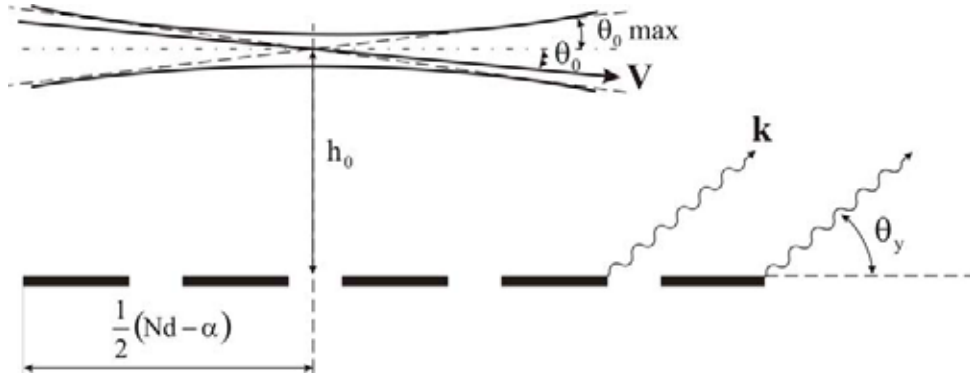


Рис. 27.7. Генерация РДИ расходящимся пучком

В рассматриваемой геометрии, т. е. когда фиксируется угол наблюдения θ_y относительно решетки, зависимость длины волны РДИ от кинематических переменных при выполнении условия резонанса (27.14) будет следующей:

$$\lambda_n(\theta_0) = \frac{d}{n} \left(\frac{\cos\theta_0}{\beta} - \cos\theta_y \cos\theta_x \right). \quad (27.22)$$

Сдвиг частоты линии в спектре РДИ электронов, пролетающих над решеткой под углом $\theta_{0\max}$, по сравнению с параллельным пролетом, легко находится из вышеприведенной формулы:

$$\Delta\omega_n = \omega_n(\theta) - \omega_n(\theta) = 2\pi c \left(\frac{1}{\lambda(\theta_{0\max})} - \frac{1}{\lambda(\theta)} \right). \quad (27.23)$$

В релятивистском случае, когда расходимость пучка не слишком велика ($\theta_{0\max} \ll 1$) и для угла регистрации $\theta_y \gg \gamma^{-1}$, $\theta_{0\max}$, из (27.23) следует простое соотношение:

$$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n(\theta)} \approx \frac{\theta_{0\max}^2}{2(1 - \cos\theta_y)}. \quad (27.24)$$

Другими словами, от расходимости пучка в плоскости, перпендикулярной решетке, сдвиг линии и, следовательно, уширение линии зависят квадратичным образом и возрастает с уменьшением угла наблюдения. Далее, отметим, что «вертикальная» расходимость сдвигает линию в жёсткую часть спектра. В статье [97.6] было показано, что при движении электрона в плоскости, параллельной решётке, но под углом $\frac{\pi}{2} - \theta_x$ относительно стрипов (гребней) решётки (при условии $\theta_x \ll 1$) сдвиг линии происходит в мягкую часть спектра, поскольку излучение Смита–Парселла в этом случае будет соответствовать излучению на решётке с периодом $d/\cos\theta_x$. Таким образом, «горизонтальная» расходимость электронного пучка ведёт к уширению линии:

$$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n(\theta)} \approx -\frac{\theta_x^2}{2}, \quad (27.25)$$

которое не зависит от угла наблюдения.

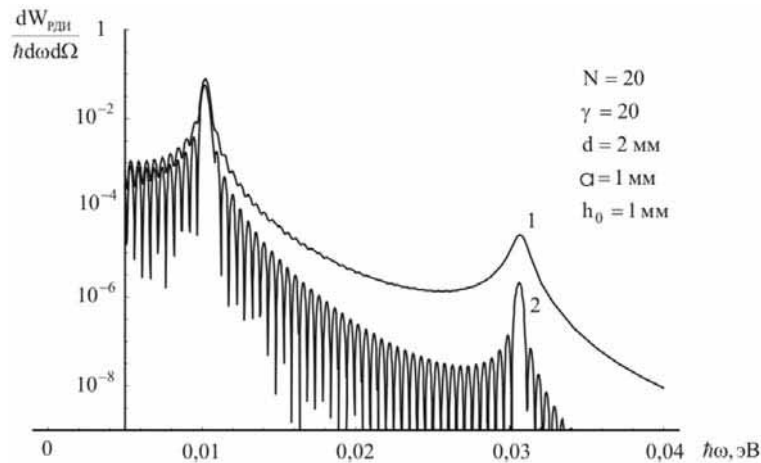


Рис. 27.8. Спектральное распределение излучения Смита–Парселла для угла наблюдения $\theta_y = 20^\circ$ при параллельном пролете электрона над решеткой с числом периодов $N = 20$ (кривая 1) и для наклонного пролета при $\theta_{0\max} = 0,02$ рад (кривая 2)

Спектры излучения Смита–Парселла, регистрируемые под фиксированным углом θ_y для параллельного пролета $\theta_0 = 0$ и для угла $\theta_{0\max} = 0,02$ рад, для решеток с различным числом периодов приведены на рис. 27.8 и 27.9. Расчеты проводились для параметров: $\gamma = 20$; $d = 2$ мм; $a = 1$ мм; $h_0 = 1$ мм; $\theta_x = 0$; $\theta_y = 20^\circ$.

Как видно из рис. 27.9, при наклонном пролёте вблизи «длинной» решётки электроны более эффективно взаимодействуют с ближайшей частью решетки, что, в конечном результате приводит к увеличению интенсивности излучения при одновременном ухудшении монохроматичности.

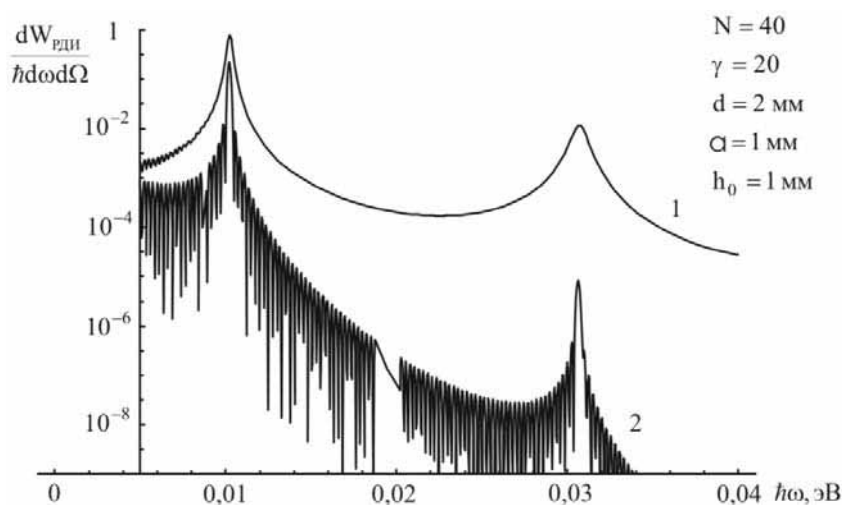


Рис. 27.9. То же самое для числа периодов $N = 40$

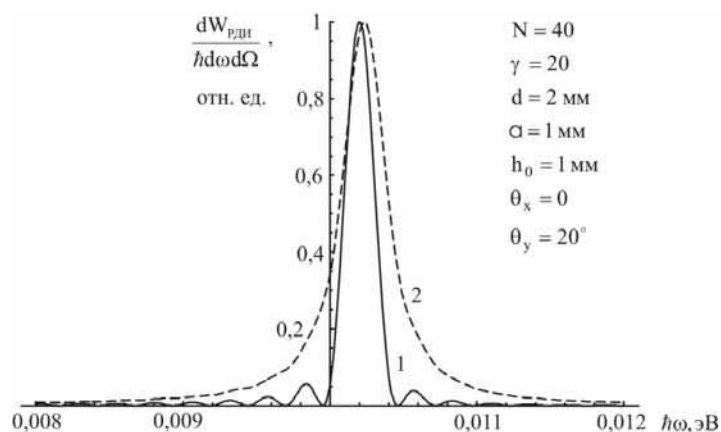


Рис. 27.10. Форма линии для спектров излучения Смита–Парселла, показанных на рис. 27.9

На рис. 27.10 показана нормализованная форма линии излучения Смита–Парселла для рассмотренного случая «длинной» решётки ($N = 40$) для параллельного пролёта ($\theta_0 = 0$) и наклонного ($\theta_0 = 0,02$). Как видно из рисунка, сдвиг максимума не превышает 0,35 % в соответствии с формулой (27.26). Монохроматичность линии при $\theta_0 = 0$ составляет 2,2 %, тогда как при $\theta_0 = 0,02$ линия уширяется почти в 1,5 раза до 3,2 %. Видно, что расходимость электронного пучка в плоскости, перпендикулярной решетке, приводит к заметному уширению линии излучения Смита–Парселла при ее несущественном сдвиге по энергетической шкале.

28. Излучение Смита–Парселла от тонкого слоя диэлектрика на проводящей подложке

Рассмотрим излучение, возникающее при пролете заряженной частицы над тонким слоем диэлектрика, расположенным на металлической подложке. Будем при этом следовать работе [04.1]. Кроме того, отметим работу [94.1], в которой рассмотрена такая же задача; подходы [04.1] и [94.1] различаются деталями.

Как известно, заряд, равномерно движущийся в вакууме параллельно плоской поверхности однородного вещества, излучает только при выполнении условий излучения Вавилова–Черенкова [97.9]. Если же условия Вавилова–Черенкова не выполнены, то излучения не возникает, так как невозможна передача продольного (вдоль направления скорости) импульса. В случае неоднородной поверхности становится возможной передача продольного импульса неоднородностям вещества, что приводит к возникновению ДИ. Далее мы будем считать, что условия Вавилова–Черенкова не выполняются.

Рассмотрим тонкий слой диэлектрика на идеально проводящей подложке. Так как в отсутствие слоя излучение не возникает, то всё излучение связано с неоднородным слоем. Граничные условия на поверхности металла удовлетворяются введением заряда-изображения [69.3]. Поле вне проводника совпадает с суммарным полем двух равномерно движущихся в вакууме зарядов, реального заряда e и фиктивного заряда-изображения $-e$. Это поле поляризует неоднородный слой, и возникающие в слое поляризационные токи становятся источниками дифракционного излучения. Магнитная составляющая поля может быть найдена из уравнения:

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega), \quad (28.1)$$

после чего электрическая составляющая находится как

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i \frac{c}{\omega} \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{4\pi i}{\omega} \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega).$$

Здесь $k^2 = \omega^2/c^2$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$ – фурье-образ полной плотности тока, включая ток заряженной частицы и токи, индуцированные в веществе полем этой частицы:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_0^{\text{im}} + \mathbf{j}_{\text{layer}} + \mathbf{j}_{\text{layer}}^{\text{im}}, \quad (28.2)$$

где \mathbf{j}_0 – плотность тока, отвечающая движению заряженной частицы; \mathbf{j}_0^{im} – плотность тока заряда-изображения; $\mathbf{j}_{\text{layer}}$ – плотность токов, индуцированных в слое диэлектрика; $\mathbf{j}_{\text{layer}}^{\text{im}}$ – плотность токов слоя-изображения. Второе и четвертое слагаемые соответствуют учету граничных условий на поверхности идеального проводника.

В отсутствие слоя $\mathbf{j}_{\text{layer}} = \mathbf{j}_{\text{layer}}^{\text{im}} = 0$. Обозначим решение уравнения (28.1) для этого случая буквой \mathbf{H}_0 :

$$\Delta \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi}{c} \text{rot}(\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{j}_0^{\text{im}}(\mathbf{r}, \omega)). \quad (28.3)$$

Поле \mathbf{H}_0 не может быть полем излучения вне подложки, поскольку в случае равномерного движения заряда над ровной поверхностью подложки-полупространства излучения нет. Поэтому можно вычесть поле \mathbf{H}_0 из поля \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0,$$

причем эффектов излучения мы при этом не теряем. Вычитая (28.3) из (28.1), получаем:

$$\Delta \mathbf{H}'(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \mathbf{H}'(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi}{c} \text{rot}(\mathbf{j}_{\text{layer}}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{j}_{\text{layer}}^{\text{im}}(\mathbf{r}, \omega)). \quad (28.4)$$

В дипольном приближении фурье-образ поляризаационного тока имеет вид

$$\mathbf{j}_{\text{layer}}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega n_{\text{mic}}(\mathbf{r})\alpha(\omega)\mathbf{E}_{\text{act}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (28.5)$$

где $\alpha(\omega)$ – поляризуемость отдельной молекулы, $n_{\text{mic}}(\mathbf{r})$ – микроскопическая плотность числа молекул в слое. Действующее на молекулы слоя поле \mathbf{E}_{act} по принципу суперпозиции может быть представлено в виде суммы полей, создаваемых независимыми источниками:

$$\mathbf{E}_{\text{act}} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0^{\text{im}} + \mathbf{E}_{\text{layer}} + \mathbf{E}_{\text{layer}}^{\text{im}}, \quad (28.6)$$

где $\mathbf{E}_{\text{layer}}$ определяет вклад всех остальных молекул слоя, иначе говоря, взаимовлияние различных частей слоя, поляризованных полем внешних источников, а $\mathbf{E}_{\text{layer}}^{\text{im}}$ учитывает действие подложки. В первом приближении для достаточно тонкого слоя с не слишком большой диэлектрической проницаемостью вкладом $\mathbf{E}_{\text{layer}} + \mathbf{E}_{\text{layer}}^{\text{im}}$ можно пренебречь по сравнению с $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0^{\text{im}}$ (явный вид неравенств мы сформулируем позже). Таким образом, плотность поляризаационных токов, приводящих к излучению, можно записать в виде:

$$\mathbf{j}_{\text{layer}}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega n_{\text{mic}}(\mathbf{r})\alpha(\omega)\left[\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}_0^{\text{im}}(\mathbf{r}, \omega)\right]. \quad (28.7)$$

Поле $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ возникает в полупространстве $y > 0$ при равномерном движении заряда e по закону $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t$ параллельно поверхности $y = 0$ идеального проводника (вектор \mathbf{a} перпендикулярен поверхности среды). Поле \mathbf{E}_0^{im} находится в соответствии с методом изображений как поле фиктивного заряда-изображения $-e$, движущегося по закону $\mathbf{r} = -\mathbf{a} + \mathbf{v}t$. Выбрав ось z вдоль \mathbf{v} , а ось y вдоль \mathbf{a} , можно представить фурье-образ суммарного поля реального заряда и заряда-изображения в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}_0^{\text{im}}(\mathbf{r}, \omega) = & i \int d^3q \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \times \\ & \times \mathbf{L}(q_x, q_y) \delta(\omega - q_z v) \sin(aq_y), \end{aligned} \quad (28.8)$$

где

$$\mathbf{L}(q_x, q_y) = \frac{ie}{\pi^2} \frac{\mathbf{Q} + \mathbf{v} \frac{\omega}{v^2 \gamma^2}}{Q^2 + \left(\frac{\omega}{v\gamma}\right)^2}, \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \quad \mathbf{Q} = (q_x, q_y).$$

Подстановка (28.8) в (28.7) дает

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{layer}}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{\omega \alpha(\omega)}{(2\pi)^3} \int d^3 q \mathbf{L}(q_x, q_y) \delta(\omega - q_z v) \times \\ &\times \sin(aq_y) \sum_a \exp\{i(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \mathbf{R}_a\}, \end{aligned} \quad (28.9)$$

где вектор $\mathbf{R}_a = \{X_a, Y_a, Z_a\}$ определяет положение a -й молекулы и суммирование проводится по всем молекулам слоя.

Теперь запишем выражение для поляризационного тока молекул-изображений $\mathbf{j}_{\text{layer}}^{\text{im}}$. Как в реальной молекуле, излучают ускоренные внешним полем связанные электроны, так и в молекуле-изображении излучают изображения связанных электронов. Фурье-образ тока молекул-изображений может быть найден из (28.9) путем замен: $Y_a \rightarrow -Y_a$, $j_y \rightarrow j_y$, $j_x \rightarrow -j_x$, $j_z \rightarrow -j_z$. Первая из этих замен дает зеркально-симметричное положение молекулы-изображения относительно поверхности проводника. Остальные замены связаны с применением метода изображений к связанным в молекуле электронам. Они отвечают изменению знака нормальной к поверхности компоненты скорости и знака зарядов, связанных в молекуле-изображении. Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{layer}}^{\text{im}}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{\omega \alpha(\omega)}{(2\pi)^3} \int d^3 q \mathbf{L}(q_x, q_y) \delta(\omega - q_z v) \sin(aq_y) \times \\ &\times \sum_a \exp\{i(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \mathbf{R}_a + 2i(\mathbf{e}\mathbf{k})(\mathbf{e}\mathbf{R}_a)\}, \end{aligned} \quad (28.10)$$

где \mathbf{e} – единичный вектор нормали к поверхности, т. е. $\mathbf{e} \equiv \mathbf{e}_y$. Полная энергия излучения в интервале частот $d\omega$ в элементе телесного угла $d\Omega$ определяется как

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = (2\pi)^6 (1/c) \left\| \left[\mathbf{kj}_{\text{layer}}(\mathbf{k}, \omega) \right] + \left[\mathbf{kj}_{\text{layer}}^{\text{im}}(\mathbf{k}, \omega) \right] \right\|^2. \quad (28.11)$$

Выражение (28.11) является микроскопическим, поскольку зависит от координат отдельных молекул слоя. Однако для длинноволнового излучения в волновой зоне учет микроскопического строения слоя является излишним, так что целесообразно усреднить по всем молекулам слоя. Пусть известна зависимость средней плотности числа электронов проводимости в слое от координат $n(\mathbf{r})$. В макроскопической электродинамике фурье-образы токов $\mathbf{j}_{\text{layer}}(\mathbf{k}, \omega)$ и $\mathbf{j}_{\text{layer}}^{\text{im}}(\mathbf{k}, \omega)$ в (28.11) можно заменить их средними значениями $\langle \mathbf{j}_{\text{layer}}(\mathbf{k}, \omega) \rangle$ и $\langle \mathbf{j}_{\text{layer}}^{\text{im}}(\mathbf{k}, \omega) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}_{\text{layer}}(\mathbf{k}, \omega) \rangle &= \alpha(\omega) \int d^3q \mathbf{L}(q_x, q_y) \delta(\omega - q_z v) \sin(aq_y) n(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \\ \langle \mathbf{j}_{\text{layer}}^{\text{im}}(\mathbf{k}, \omega) \rangle &= \alpha(\omega) \int d^3q \mathbf{L}(q_x, q_y) \times \\ &\times \delta(\omega - q_z v) \sin(aq_y) n(\mathbf{k} - \mathbf{q} - 2\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{k})), \end{aligned} \quad (28.12)$$

где введён фурье-образ плотности числа молекул

$$n(\mathbf{k} - \mathbf{q}) = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} n(\mathbf{r}) \exp\{-i\mathbf{r}(\mathbf{k} - \mathbf{q})\}.$$

Таким образом, распределение излученной энергии по углам и частотам может быть записано в виде

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{c} |\alpha(\omega)|^2 \left\| \left[\mathbf{kJ}(\mathbf{k}, \omega) \right] \right\|^2, \quad (28.13)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega)$ определено как

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) &= (2\pi)^3 \int d^3q \mathbf{L}(q_x, q_y) \sin(aq_y) \delta(\omega - q_z v) \times \\ &\times \left\{ n(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + n(\mathbf{k} - \mathbf{q} - 2\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{k})) \right\}. \end{aligned} \quad (28.14)$$

Полученное распределение излучения (28.13) справедливо при произвольной зависимости плотности числа молекул в слое от координат.

Опираясь на полученное выражение, рассчитаем излучение от поверхностного слоя в виде дифракционной решетки на поверхности идеального проводника, занимающего полупространство $y < 0$ (рис. 28.1). Пусть решетка однородна вдоль оси x , а ее профиль вдоль оси z состоит из N периодически расположенных полосок. Период равен d , ширина отдельной полоски есть w , а высота ее и форма определяется функцией $f(z)$. Средняя плотность числа молекул в полосках одинакова и равна n_0 .

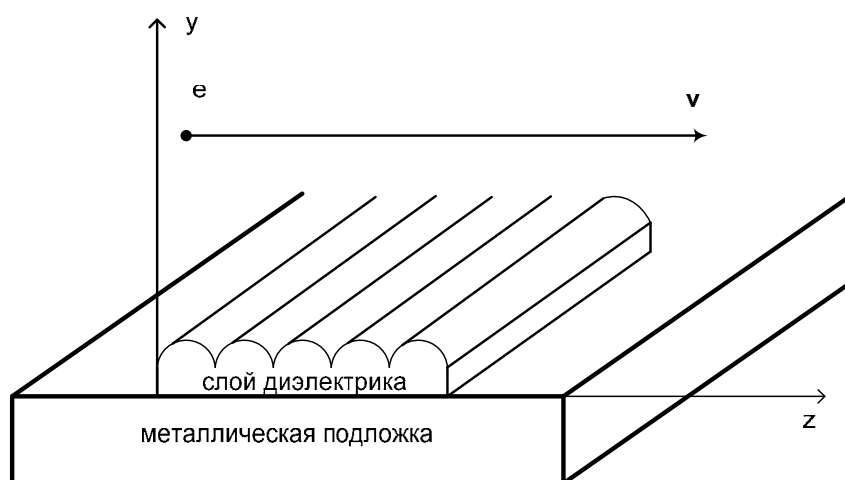


Рис. 28.1. Геометрия задачи. Металлическая подложка занимает нижнее полупространство. Слой диэлектрика состоит из N отдельных полосок с профилем, описываемым некоторой произвольной функцией $f(z)$. Полоски расположены вдоль оси z с периодом d и образуют дифракционную решетку, однородную вдоль оси x . Заряд летит параллельно оси z

Средняя плотность числа молекул находится путем усреднения микроскопической плотности по координатам всех молекул слоя:

$$\begin{aligned}
 n(\mathbf{r}) &= \langle n^{mic}(\mathbf{r}) \rangle = \left\langle \sum_{s=0}^{N-1} \sum_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_{bs}) \right\rangle = \\
 &= n_0 \sum_{s=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dX_{bs} \int_0^w dZ_{bs} \int_0^{f(Z_{bs})} dY_{bs} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_{bs}), \quad (28.15)
 \end{aligned}$$

где угловые скобки означают усреднение.

Вектор $\mathbf{R}_s = \{0, 0, sd\}$ в аргументе дельта-функции учитывает периодичность расположения полосок, число s нумерует полоски, вектор \mathbf{R}_{bs} нумерует b -ю молекулу s -й полоски (рис. 28.2). Отсюда

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \sum_{s=0}^{N-1} \xi(y, z - sd),$$

$$\xi(y, z - sd) = \int_0^w dz' \delta(z - sd - z') \int_0^{f(z')} dy' \delta(y - y'), \quad (28.16)$$

так что фурье-образ плотности молекул в слое имеет вид

$$n(\mathbf{q}) = n_0 \delta(q_x) \xi(q_y, q_z) \sum_{s=0}^{N-1} \exp(-isdq_z). \quad (28.17)$$

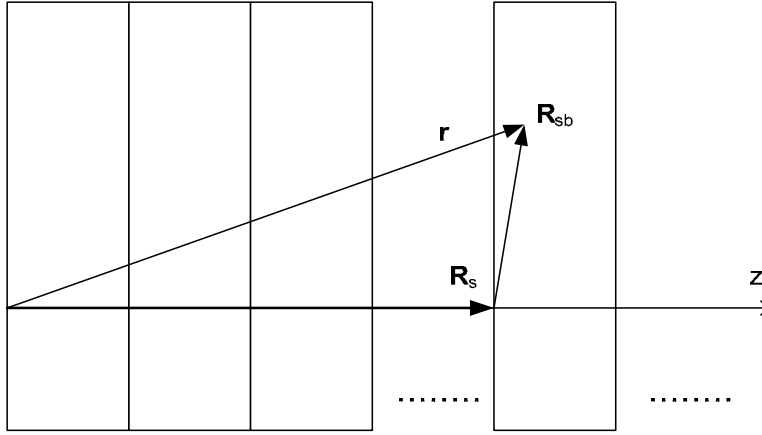


Рис. 28.2. Полоски (отдельные неоднородности) диэлектрического слоя, вид сверху

Подстановка (28.17) в (28.14) и интегрирование по q_z и q_x дает

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{n_0}{v} \sum_{s=0}^{N-1} \exp\{-isd\varphi\} \int_{-\infty}^{\infty} dq_y L(q_y, k_x) k \sin(aq_y) \times$$

$$\times \left[\xi(k_y - q_y, -\varphi) + \xi(-k_y - q_y, -\varphi) \right].$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_0^w dz e^{iz\varphi} \left\{ \eta \cos[k_y f(z)] \operatorname{sh}[\eta f(z)] + \right. \\
&\quad \left. + k_y \sin[k_y f(z)] \operatorname{ch}[\eta f(z)] \right\}, \\
F_2 &= \int_0^w dz e^{iz\varphi} \left\{ \eta \cos[k_y f(z)] \operatorname{ch}[\eta f(z)] - \eta + \right. \\
&\quad \left. + k_y \sin[k_y f(z)] \operatorname{sh}[\eta f(z)] \right\},
\end{aligned} \tag{28.18}$$

где φ и η определены, соответственно, формулами

$$\varphi \equiv \frac{\omega}{v} - k_z = k(\beta^{-1} - n_z), \tag{28.19}$$

$$\eta = \frac{\omega}{c\beta\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 n_x^2}, \tag{28.20}$$

можно привести выражение для \mathbf{J} к виду

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{4en_0}{v} \frac{\exp\{-a\eta\}}{\eta^2 + k_y^2} \left(iF_1 \mathbf{e}_y - \frac{F_2}{\eta} \left(k_x \mathbf{e}_x + \frac{\omega}{v\gamma^2} \mathbf{e}_z \right) \right) \times \\
&\times \sum_{s=0}^{N-1} \exp\{isd\varphi\}.
\end{aligned} \tag{28.21}$$

Здесь F_1 и F_2 – факторы, определяемые формой профиля отдельного зубца.

Факторы F_1 и F_2 особенно легко вычисляются для дифракционной решетки, состоящей из стрипов прямоугольного сечения. В этом случае профиль зубцов имеет форму прямоугольника со сторонами b (толщина стрипа) и w (ширина стрипа). Тогда $f(z) = b$, и выражения (28.18) приобретают вид

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{e^{i\omega\varphi} - 1}{i\varphi} \left\{ \eta \cos(bk_y) \operatorname{sh}(b\eta) + k_y \sin(bk_y) \operatorname{ch}(b\eta) \right\}, \\
F_2 &= \frac{e^{i\omega\varphi} - 1}{i\varphi} \left\{ \eta \cos(bk_y) \operatorname{ch}(b\eta) - \eta + k_y \sin(bk_y) \operatorname{sh}(b\eta) \right\}.
\end{aligned} \tag{28.22}$$

Подстановка (28.21) в (28.13) дает

$$\frac{d^2W(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{c} \left(\frac{3}{\pi} \right)^2 \left| \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 2} \right|^2 \frac{\beta^2}{(1 - \beta^2 n_z^2)^2} \frac{\sin^2(\varphi d N / 2)}{\sin^2(\varphi d / 2)} \times$$

$$\times \left[\left[\mathbf{n} \left(F_1 \mathbf{e}_y + i F_2 \frac{\beta \gamma n_x \mathbf{e}_x + \gamma^{-1} \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 n_x^2}} \right) \right] \right]^2 \exp \left\{ -\frac{2a\omega}{c\beta\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 n_x^2} \right\}, \quad (28.23)$$

где мы выразили поляризуемость отдельной молекулы $\alpha(\omega)$ через диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$ материала слоя по формуле Клаузиуса–Моссотти [02.3]:

$$\alpha(\omega) = \frac{3}{4\pi n_0} \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 2}. \quad (28.24)$$

Формула (28.23) описывает спектрально-угловую плотность излученной энергии в случае, когда на поверхности идеального проводника расположен диэлектрический периодически неоднородный слой. Энергия частицы при этом может быть любой. Свойства слоя характеризуются:

- 1) диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$;
- 2) параметрами, определяющими геометрию отдельной неоднородности – зубца: w – ширина, $f(z)$ – профиль зубца;
- 3) параметрами, определяющими структуру всей решетки: d – период решетки, N – количество зубцов.

Результаты получены в первом порядке по теории возмущений путем замены действующего поля суммой полей пролетающего заряда и заряда-изображения. Оценка поправок второго порядка по теории возмущений дает ограничения на область применимости полученных результатов:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varepsilon(\omega) - 1| \ll 1, \quad b \gg \gamma \beta \lambda, \\ |\varepsilon(\omega) - 1| \frac{b}{\gamma \beta \lambda} \ll 1, \quad b \ll \gamma \beta \lambda. \end{array} \right. \quad (28.25)$$

Таким образом, в области прозрачности диэлектрика, где $|\varepsilon - 1| \approx 4n_0\alpha \ll 1$, сделанное приближение описывает рассмотренное из-

лучение с хорошей точностью при любой толщине слоя. При этом для достаточно тонкого слоя ($b < \gamma \beta \lambda$) область применимости расширяется с уменьшением толщины слоя b . Например, при $b = 100 \text{ } \mu\text{m}$, $\lambda = 100 \text{ } \mu\text{m}$ и $\gamma = 25$ (что отвечает энергии электрона в 12.5 МэВ) второе из неравенств (28.25) выполняется достаточно хорошо при диэлектрической проницаемости порядка нескольких единиц.

Макроскопическое усреднение, проведенное при получении (28.13), предполагает, что число молекул, содержащееся в отдельной неоднородности слоя, много больше единицы. Это ограничивает снизу размеры отдельной неоднородности. Область применимости полученных результатов ограничена также предположением об идеальной проводимости металлической подложки. Это ограничивает диапазон рассматриваемых частот сверху значением ленгмюровской частоты материала подложки (металл), которая лежит в оптическом или ближнем ультрафиолетовом диапазоне частот. Полученные результаты также непригодны на резонансных частотах и не учитывают возможность черенковского излучения.

Спектрально-угловые характеристики излучения (28.23) определяются двумя факторами. Первый – это множитель $(1 - \beta^2 n_z^2)^{-2}$, дающий в ультрарелятивистском случае максимум излучения вперед под малыми углами $\sim \gamma^{-1}$. Второй фактор – функция $\frac{\sin^2(\varphi d N / 2)}{\sin^2(\varphi d / 2)}$. Эта функция имеет максимумы в точках $\varphi d = 2\pi m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, что дает дисперсионное соотношение Смита–Парселла:

$$m \frac{\lambda}{d} = \beta^{-1} - \cos \theta, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (28.26)$$

где полярный угол θ вводится посредством соотношения $n_z = \cos \theta$. Угловая ширина отдельных пиков, как известно из оптики [98.6], равна $\Delta \theta = \lambda / (Nd)$. Физически соотношение (28.26) возникает из-за того, что пролетающий заряд может передать периодически неоднородной среде только дискретный импульс.

При $N \gg 1$ пики становятся резкими настолько, что отношение квадратов синусов может быть заменено суммой дельта-функций:

$$\frac{\sin^2(\varphi d N/2)}{\sin^2(\varphi d/2)} \xrightarrow{N \gg 1} 2\pi N \sum_m \delta(\varphi d - 2\pi m). \quad (28.27)$$

При фиксированных периоде d и длине волны λ дифракционный порядок m ограничен двойным неравенством:

$$\frac{d}{\lambda}(\beta^{-1} - 1) \leq m \leq \frac{d}{\lambda}(1 + \beta^{-1}), \quad (28.28)$$

которое получается из условия $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ при учёте (28.26).

В нерелятивистском случае при $\beta \ll 1$ получаем, что излучение Смита–Парселла имеет место на длинах волн, значительно превышающих период решетки:

$$\lambda \sim \frac{d}{\beta m} \gg d. \quad (28.29)$$

В ультрарелятивистском случае при $\gamma \gg 1$ имеем

$$\begin{aligned} \beta^{-1} - 1 &\approx \gamma^{-2}/2, \\ 1 + \beta^{-1} &\approx 2, \end{aligned}$$

и поэтому условие (28.28) приблизительно можно записать в виде

$$d \gamma^{-2}/2 \leq \lambda m \leq 2d. \quad (28.30)$$

Отсюда видно, что в ультрарелятивистском случае излучение Смита–Парселла от решетки с периодом d возможно только на длинах волн меньших, чем два периода решетки:

$$\lambda \leq \frac{2d}{m},$$

причем с повышением порядка дифракции m «пороговая» длина волны уменьшается.

7. КОГЕРЕНТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СГУСТКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

29. Когерентное излучение коротких электронных сгустков

В одной из первых работ [82.2], где рассматривалось синхротронное излучение (СИ) электронного сгустка, содержащего N_e электронов, отмечалось, что в области длин волн, сравнимых с длиной электронного сгустка (банча) l_B , излучение становится когерентным, т. е. интенсивность излучения сгустка квадратично зависит от числа электронов в сгустке (от «заселённости» сгустка). Если сгусток содержит N_e электронов, вращающихся с постоянной угловой скоростью ω по орбите радиусом R , тогда мощность СИ на n -й гармонике сгустка в целом определяется выражением [54.2]

$$P_B^{(n)} = P_0^{(n)} \left| \sum_{i=1}^N e^{-in\varphi_k} \right|^2, \quad (29.1)$$

где $P_0^{(n)}$ – мощность СИ на n -й гармонике одиночного электрона, φ_k – угловая координата k -ого электрона в сгустке. Если характерная длина волны СИ на n -й гармонике превышает длину сгустка $l_B \sim R\varphi_{k\max}$, то мощность СИ сгустка рассчитывается по формуле

$$P_B^{(n)} = P_0^{(n)} \left\{ N_e + N_e (N_e - 1) \sum_{k \neq q} \cos[n(\varphi_k - \varphi_q)] \right\} \approx P_0^{(n)} \{ N_e + N_e^2 f_n \}. \quad (29.2)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках описывает некогерентное излучение, тогда как второе – когерентное.

Количественная характеристика доли частиц, излучающих когерентно (т. е. в фазе), определяется так называемым «форм-фактором» сгустка f_n [54.2], который для числа электронов в сгустке $N \gg 1$ может быть заменен непрерывным распределением $S(\varphi)$, тогда

$$f_n \approx \left[\int \cos(n\varphi) S(\varphi) d\varphi \right]^2, \quad (29.3)$$

где через $S(\varphi)$ обозначено нормированное распределение электронов в сгустке в зависимости от азимутального угла φ . Для электронов, распределенных равномерно в заданном интервале углов,

$$S(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \varphi \leq \left| \frac{\alpha}{2} \right| \\ 0, & \varphi > \left| \frac{\alpha}{2} \right| \end{cases},$$

вычисление форм-фактора (29.3) даёт следующий результат:

$$f_n = \frac{\sin^2(n\alpha/2)}{(n\alpha/2)^2}. \quad (29.4)$$

Как следует из последнего выражения, форм-фактор f_n принимает значение от 1 ($\alpha \rightarrow 0$, полная когерентность) до 0 ($\alpha = 2\pi$, когерентность отсутствует). Отметим, что форм-фактор (29.4) явным образом не зависит от длины волны. Ясно, что такое приближение является слишком грубым. Более корректное приближение использовалось в работах [91.6, 91.7, 78.2], где форм-фактор, описывающий когерентное синхротронное излучение (КСИ) зависит от частоты испускаемого фотона:

$$f_{КСИ}(\mathbf{k}) = \left| \int_V \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) S(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2. \quad (29.5)$$

В (29.5) через $S(\mathbf{r})$ обозначается нормированное распределение электронов в сгустке (относительно центра сгустка), \mathbf{k} – волновой вектор. Интегрирование ведется по объему сгустка V .

В полной аналогии с выражением (29.2) спектрально-угловое распределение когерентного синхротронного излучения электронного сгустка можно представить в следующем виде [91.6, 91.7]:

$$\frac{dW_{КСИ}(\mathbf{n}, \omega)}{\hbar d\omega d\Omega} = N_e [1 + N_e f_{КСИ}(\mathbf{k})] \frac{dW_0(\omega)}{\hbar d\omega d\Omega}.$$

Здесь через $\frac{dW_0(\mathbf{n}, \omega)}{\hbar d\omega d\Omega}$ обозначено спектрально-угловое распределение излучения одного электрона.

Форм-фактор, записанный в виде (29.5), вообще говоря, зависит от направления волнового вектора $\mathbf{k} = 2\pi/\lambda \{\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta\}$. В ультрарелятивистском случае фазу $\varphi = \mathbf{k}\mathbf{r}$ в показателе экспоненты в (29.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi = \mathbf{k}\mathbf{r} &= \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin\theta \cos\varphi + y \sin\theta \sin\varphi + z \cos\theta) = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} (\rho \sin\theta \cos(\varphi - \chi) + z \cos\theta). \end{aligned} \quad (29.6)$$

В (29.6) координаты каждого электрона в сгустке обозначаются через x, y, z в декартовой системе и через ρ, χ, z - в цилиндрической системе. Для ультрарелятивистских пучков, как правило, длина сгустка много больше его поперечных размеров. В таком случае распределение $S(\mathbf{r})$ можно представить в виде суперпозиции продольного и поперечного распределений:

$$S(\mathbf{r}) = S_L(z)S_T(\rho).$$

Кроме того, излучение происходит под углами $\theta \sim \gamma^{-1}$, поэтому $\cos\theta$ в (29.6) можно заменить единицей. В этом случае форм-фактор (29.5) факторизуется, т. е. сводится к произведению продольного и поперечного форм-факторов:

$$f_{КСИ} = f_{КСИ}^L f_{КСИ}^T. \quad (29.7)$$

После интегрирования по азимутальному углу χ для цилиндрически симметричной формы сгустка получим:

$$\begin{aligned} f_{КСИ}^L &= \left| \int dz S_L(z) \exp\left(-i\frac{\omega}{c}z\right) \right|^2, \\ f_{КСИ}^T &= \left| 2\pi \int \rho d\rho S_T(\rho) J_0\left(\frac{2\pi\rho}{\lambda} \sin\theta\right) \right|^2. \end{aligned}$$

Здесь и далее через $J_n(x)$ обозначается функция Бесселя n -го порядка.

В качестве примера вычислим форм-фактор (29.7) для простейшего случая, когда в электронном сгустке частицы равномерно распределены по цилиндру радиусом r_0 и длиной ℓ_B :

$$S_L(z) = \begin{cases} 1/\ell_B, & 0 \leq z \leq \ell_B, \\ 0, & z > \ell_B, \end{cases}$$

$$S_T(\rho) = \begin{cases} 1/\pi r_0^2, & 0 \leq \rho \leq r_0, \\ 0, & \rho > r_0. \end{cases}$$

Для подобного распределения интегралы, входящие в (29.7), берутся аналитически:

$$f_{КСИ}^L = \left(\frac{\lambda}{\pi \ell_B} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi \ell_B}{\lambda},$$

$$f_{КСИ}^T = 4 \left(\frac{\lambda}{2\pi r_0 \sin \theta} \right)^2 J_1^2 \left(\frac{2\pi r_0 \sin \theta}{\lambda} \right). \quad (29.8)$$

Как следует из (29.8), условия полной когерентности (пропорциональность интенсивности СИ квадрату заряда сгустка) сводятся к следующим выражениям:

$$\lambda \gg \pi \ell_B,$$

$$\lambda \gg 2\pi r_0 \sin \theta \approx 2\pi r_0 / \gamma. \quad (29.9)$$

Для ультрарелятивистских электронов характерный полярный угол вылета фотона СИ определяется обратным лоренц-фактором, поэтому второе условие в (29.9), как правило, значительно более слабое, чем первое, которым и определяется диапазон длин волн, где реализуется режим когерентного синхротронного излучения.

Чтобы вычислить формфактор сгустка для описания когерентных эффектов в случае иного механизма излучения, нежели рассмотренное синхротронное (например, переходного), рассмотрим простую схему, иллюстрирующую переходное излучение двух электронов, движущихся параллельно друг другу с одной и той же скоростью (см. рис. 29.1) в плоскости $x = 0$ и пересекающих наклонную мишень, угол между нормалью к которой и вектором скорости электрона равен ψ (как и прежде, рассматриваем ультрарелятивистский случай).

Когерентное переходное излучение (КПИ) в этой геометрии не будет обладать азимутальной симметрией для обоих конусов излучения (КПИ вперед и КПИ назад). Для начала рассмотрим следующую простую геометрию (рис. 29.1).

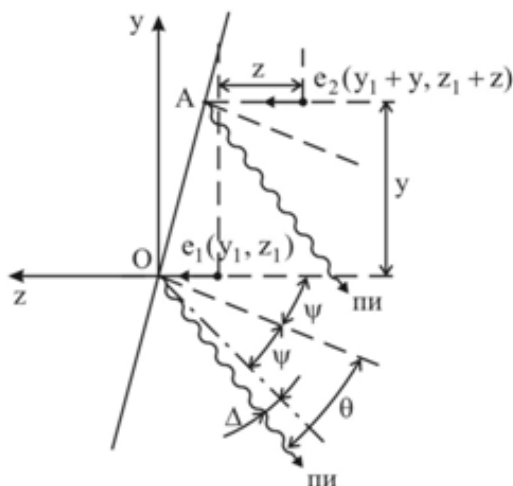


Рис. 29.1. Переходное излучение двух электронов, пересекающих наклонную границу раздела сред

Найдем сдвиг фаз между волнами, испускаемыми двумя электронами в процессе ПИ, если оба электрона движутся в плоскости рисунка ($x = 0$) и испускают фотоны в этой же плоскости.

В момент времени $t_1 = 0$ первый электрон e_1 , движущийся со скоростью βc , пересекает границу раздела сред в точке O ($y_1 = 0; z_1 = 0$). Нормаль к границе раздела наклонена под углом ψ относительно импульса электрона. Поле переходного излучения первого электрона на больших расстояниях от точки O можно записать в виде

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_1 - i\omega t},$$

где \mathbf{E}_0 – амплитуда поля излучения от одного электрона, \mathbf{k} – волновой вектор, \mathbf{R}_1 – вектор проведенный из точки пересечения зарядом границы раздела сред в точку наблюдения, ω – частота фотона переходного излучения.

В момент времени $t_2 = t_1 + \tau$, мишень в точке $A(y_2 = y; z_2 = y \operatorname{tg} \psi)$, пересекает второй электрон e_2 , поле излучения которого записывается следующим образом:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 e^{ikR_2 - i\omega(t-\tau)}.$$

В дальней зоне переходное излучение можно рассматривать как излучение точечного источника. Поэтому фотоны, испущенные из разных точек мишени, приходят в дальнюю зону под одним и тем же углом θ , который отсчитывается от нормали к мишени. Тогда из элементарных геометрических построений (см. рис. 29.1) легко получить:

$$|\mathbf{R}_2| = |\mathbf{R}_1| + \frac{y \sin \theta}{\cos \psi}, \quad \tau = \frac{z}{\beta c} - \frac{y \operatorname{tg} \psi}{\beta c}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае разность фаз для полей излучения электронов e_1 и e_2 определяется соотношением

$$\varphi(y, z) = \frac{\omega}{c} \left(\frac{y \sin \theta}{\cos \psi} - \frac{y \operatorname{tg} \psi}{\beta} + \frac{z}{\beta} \right). \quad (29.10)$$

Выражение (29.10) не зависит от координаты x . Переход к случаю $x \neq 0$ осуществляется наиболее просто при вычислении фазы (29.10) в векторной записи:

$$\varphi = -(\mathbf{k} \Delta \mathbf{r} - \omega \Delta t),$$

где \mathbf{k} – волновой вектор, $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$, $\Delta t = \frac{z - y \operatorname{tg} \psi}{\beta}$. Значение временного сдвига Δt не зависит от координат x (вдоль оси, совпадающей с осью вращения мишени на угол ψ , рис. 29.1).

Для удобства расчётов будем использовать штрихованную систему, где ось z' совпадает с направлением зеркального отражения, ось y' расположена в плоскости рисунка. В этой системе рассматриваемые векторы записываются следующим образом:

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \{ \sin \theta \sin \xi, \sin \theta \cos \xi, \cos \theta \},$$

$$\Delta \mathbf{r} = \left\{ -x, -\frac{y}{\cos \psi}, 0 \right\}.$$

Тогда сдвиг фаз в общем случае определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ x \sin \theta \sin \xi + \frac{y \sin \theta \cos \xi}{\cos \psi} + \frac{z - y \operatorname{tg} \psi}{\beta} \right\} = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \rho \sin \theta \left[\sin \chi \sin \xi + \frac{\cos \chi \cos \xi}{\cos \psi} \right] + \frac{z - \rho \cos \chi \operatorname{tg} \psi}{\beta} \right\}.\end{aligned}\quad (29.11)$$

В последнем выражении используются координаты в цилиндрической системе ρ, χ, z для описания распределения электронов в сгустке относительно его центра тяжести.

Таким образом, используя найденный фазовый сдвиг для различных частиц сгустка, можно вычислить форм-фактор, описывающий когерентное переходное излучение (КПИ), для любого распределения частиц в сгустке $S(\mathbf{r})$:

$$f_{\text{КПИ}} = \left| \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \exp\{i\varphi(\mathbf{r})\} \right|^2. \quad (29.12)$$

Рассмотрим когерентное переходное излучение сгустка электронов с однородным распределением частиц внутри цилиндрического сгустка объемом $V = \pi r_0^2 \ell_B$, пересекающего перпендикулярную мишень ($\xi = 0$).

Подставляя $S(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi r_0^2 \ell_B}$ в (29.12), получаем форм-фактор в виде

$$f_{\text{КПИ}} = f_{\text{КПИ}}^T \times f_{\text{КПИ}}^L,$$

где

$$\begin{aligned}f_{\text{КПИ}}^T &= \left| \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} J_0 \left(\frac{\omega}{c} \rho \sin \theta \right) \rho d\rho \right|^2 = \left[\frac{\lambda}{\pi r_0 \sin \theta} J_1 \left(\frac{2\pi r_0 \sin \theta}{\lambda} \right) \right]^2, \\ f_{\text{КПИ}}^L &= \left| \frac{1}{\ell_B} \int_0^{\ell_B} e^{i\frac{\omega z}{\beta c}} dz \right|^2 = \left| \frac{2\beta c}{\omega \ell_B} \sin \left(\frac{\ell_B \omega}{2\beta c} \right) \right|^2 = \left[\frac{\beta \lambda}{\pi \ell_B} \sin \left(\frac{\pi \ell_B}{\beta \lambda} \right) \right]^2.\end{aligned}\quad (29.13)$$

Таким образом, результирующее выражение записывается следующим образом:

$$f_{\text{КПИ}} = \left(\frac{\beta\lambda^2}{\pi^2 r_0 \ell_B \sin \theta_0} J_1 \left(\frac{2\pi r_0 \sin \theta}{\lambda} \right) \sin \left(\frac{\pi \ell_B}{\lambda} \right) \right)^2. \quad (29.14)$$

Из сравнения с форм-фактором (29.8) для КСИ можно видеть формальное совпадение полученных результатов. В общем случае для произвольной (хотя и азимутально-симметричной) формы сгустка форм-фактор не разделяется на произведение продольного и поперечного форм-факторов.

Если рассматривать КПИ ультрарелятивистских частиц, пересекающих наклонную мишень, т. е. когда излучение сосредоточено в конусе углов вблизи направления зеркального отражения, то более естественно использовать угловые переменные, соответствующие этой геометрии (рис. 29.1):

$$\theta = \psi + \Delta, \quad \Delta \sim \gamma^{-1}.$$

Тогда, пренебрегая членами γ^{-2} , $\varphi \sim \gamma^{-1}$ в соотношении (29.12), получим аргумент функции $f_{\text{КПИ}}^T$:

$$\varphi_T \approx \frac{2\pi}{\lambda} (\rho \Delta \cos \chi),$$

и, следовательно, вместо (29.14) имеем:

$$f_{\text{КПИ}} = \left(\frac{\beta\lambda^2}{\pi^2 r_0 \ell_B \Delta} J_1 \left(\frac{2\pi r_0 \Delta}{\lambda} \right) \sin \left(\frac{\pi \ell_B}{\lambda} \right) \right)^2. \quad (29.15)$$

Нетрудно видеть, что форм-фактор (29.15) формально совпадает с выражением (29.8) для $f_{\text{КСИ}} = f_{\text{КСИ}}^L \cdot f_{\text{КСИ}}^T$ в приближении $\sin \theta = \Delta$, однако в (29.8) полярный угол θ отсчитывается от направления касательной к траектории электрона, тогда как в (29.12), (29.15) полярный угол θ может принимать любые значения, вплоть до углов $\theta \sim \pi/2$.

В книге [83.1] получен форм-фактор для однородного цилиндрического сгустка длины ℓ_B и радиусом r_0 , пересекающего перпендикулярную мишень:

$$f_{\text{КПИ}} = \left(\frac{4\beta J_1[r_0 \omega \cos \vartheta] \sin\left(\frac{\omega \ell_B}{2\beta}\right)}{r_0 \ell_B \omega^2 \cos \vartheta} \right)^2. \quad (29.16)$$

В цитируемой книге авторы использовали угол ϑ , который связан с переменной Δ в формуле (29.15) следующим образом:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \Delta.$$

Легко видеть, что форм-фактор (29.16), полученный для перпендикулярного пролета сгустка через мишень, совпадает с формулой (29.13), однако более общая формула (29.12) с фазой (29.11) справедлива для любого угла наклона мишени.

Если распределение частиц описывается произвольной функцией $S(\mathbf{r})$ или форма сгустка такова, что формфактор нельзя представить в виде произведения поперечного и продольного форм-факторов даже в случае азимутальной симметрии, то надо использовать общую формулу (29.12).

Для иллюстрации вычислим форм-фактор, описывающий процесс когерентного переходного излучения (КПИ) при пролете через перпендикулярную мишень сферического однородного сгустка радиусом R ($V = \frac{4\pi}{3} R^3$):

$$S(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{V}, & r \leq R \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (29.17)$$

По аналогии с предыдущими вычислениями для сохранения общности расчет будем проводить в цилиндрической системе (хотя более удобной для данной задачи является сферическая). В силу азимутальной симметрии задачи форм-фактор записывается в виде:

$$S(\rho, z) = \begin{cases} \frac{1}{V}, & \rho^2 + z^2 \leq R \\ 0, & \rho^2 + z^2 > R. \end{cases}$$

Проводя стандартное интегрирование по азимуту, из (29.12) имеем:

$$f_{\text{КПИ}} = \left| \frac{2\pi}{V} \int_{-R}^R dz \int_0^{a(z)} \rho d\rho J_0 \left(\frac{2\pi\rho \sin\theta}{\lambda} \right) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right|^2. \quad (29.18)$$

После интегрирования по поперечному радиусу сгустка от нуля до его границы $a(z)$ можно получить:

$$f_{\text{КПИ}} = \left| \frac{\lambda}{V \sin\theta} \int_{-R}^R dz a(z) J_1 \left(\frac{2\pi \sin\theta}{\lambda} a(z) \right) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right|^2. \quad (29.19)$$

Для сферы $a(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$. В релятивистском случае ($\sin\theta \sim \gamma^{-1} \ll 1$) можно разложить функцию Бесселя в ряд и оставить только первый член. Тогда (29.19) сводится к простому интегралу:

$$\begin{aligned} f_{\text{КПИ}} &= \left| \frac{\pi}{V} \int_{-R}^R dz (R^2 - z^2) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right|^2 = \\ &= \left(3 \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \right)^2, \quad x = \frac{2\pi R}{\lambda}. \end{aligned} \quad (29.20)$$

Полученное выражение совпадает с результатами статьи [07.1] для сферического сгустка (см. формулу (13) при $\alpha = 1$ и $\theta \ll 1$).

На рис. 29.2 показан форм-фактор для сферического (кривая 1) и цилиндрического (кривая 2) сгустков. В последнем случае расчет проводился по формуле (29.14) для цилиндра длиной $2R$ и радиусом R .

Из-за резкого (ступенчатого) падения плотности заряда на входной и выходной поверхности цилиндрического сгустка в поведении форм-фактора наблюдаются локальные максимумы в области малых длин волн ($\lambda = 1,4R$; $\lambda = 0,8R$; ...). Эти максимумы менее выражены для сферического сгустка благодаря более плавному уменьшению плотности распределения заряда по оси z . Как будет показано далее (§ 32), подобные максимумы полностью отсутствуют для гауссовского распределения зарядов в сгустке.

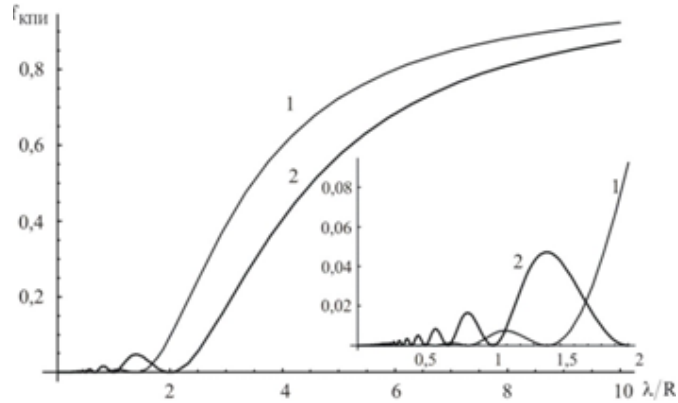


Рис. 29.2. Зависимость форм-факторов от отношения λ/R для сферического (кривая 1) и цилиндрического (кривая 2) сгустков. На врезке – та же зависимость в области малых значений λ/R

Б.М. Болотовский и А.В. Серов в статье [02.4] предложили наглядный способ описания переходного излучения сгустка заряженных частиц как интерференцию излучений тонких слоев сгустка, последовательно пересекающих границу раздела сред (рис. 29.3).

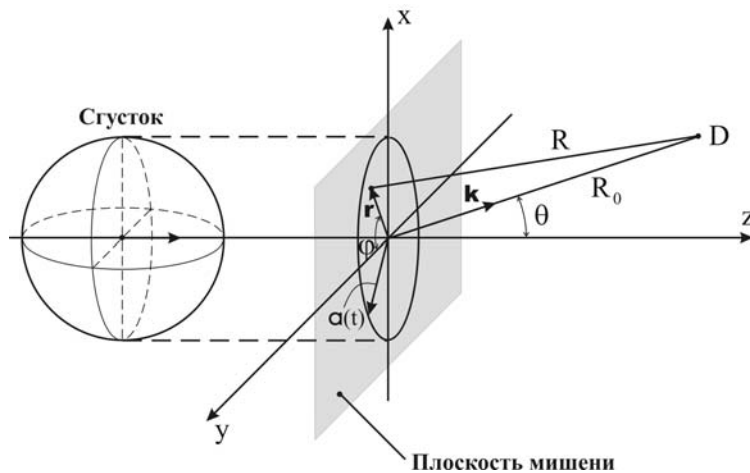


Рис. 29.3. Излучение от тонкого слоя сгустка, пересекающего границу раздела двух сред

На рисунке плоскость $x y$ представляет собой идеальную, бесконечно тонкую проводящую мишень. Круг радиусом $a(t)$ представляет собой слой сгустка, излучающий в момент времени t . Радиус круга $a(t)$ меняется со временем, причем скорость его изменения может превышать скорость света.

Для поля КПИ в [02.4] было получено следующее выражение:

$$E(\omega, \theta) = \frac{\sigma}{\pi \sin \theta} \left(\frac{\beta \sin \theta}{\omega(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \right) \times \int_0^{l_B} a(t) J_1 \left[\frac{\omega}{c} a(t) \sin \theta \right] \exp(i \omega t) dt, \quad (29.21)$$

где σ – поверхностная плотность заряда, β – скорость частицы, θ – угол, между направлением движения частицы и волновым вектором.

Полученное из (29.12) выражение для форм-фактора для угла наклона мишени $\psi = 0$ согласуется с выражением (29.21) при перпендикулярном пролёте (с точностью до несущественной постоянной (см. формулу (29.19))).

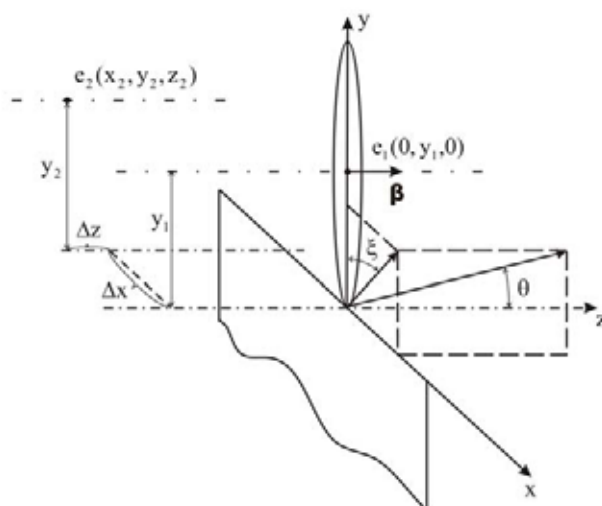


Рис. 29.4. Схема генерации дифракционного излучения двумя заряженными частицами

Чтобы получить выражение для форм-фактора в случае когерентного дифракционного излучения (КДИ), рассмотрим схему на рис. 29.4. Как отмечалось выше, в дальней зоне КДИ, так же, как и КПИ, может рассматриваться как излучение точечного источника. Тогда суперпозиция полей дифракционного излучения вперёд от двух электронов (первый из которых расположен в центре сгустка с координатами $x = y = z = 0$, а второй имеет произвольные координаты x, y, z) записывается в следующем виде:

$$\mathbf{E}_{1+2} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2(-i\Delta\varphi),$$

где фазовый сдвиг $\Delta\varphi$ определяется только координатами x, z :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \left(x \sin \theta \sin \xi + \frac{z}{\beta} \right).$$

Напряженность поля дифракционного излучения зависит от координаты y следующим образом:

$$E(y) = E(0) \exp\left(-\frac{2\pi y}{\gamma\beta\lambda}\right) \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi}.$$

Таким образом, если сгусток описывается независимым продольным распределением $S_L(z)$ и поперечным $S_T(x, y)$, то форм-фактор когерентного дифракционного излучения представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_{\text{кди}} &= \left| \int dx dy dz S_L(z) S_T(x, y) \exp\left(-\frac{2\pi y \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi}}{\gamma\beta\lambda}\right) \right| \times \\ &\times \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda} \left(x \sin \theta \sin \xi + \frac{z}{\beta}\right)\right]^2 = f_{\text{кди}}^T f_{\text{кди}}^L, \end{aligned} \quad (29.22)$$

где поперечный и продольный форм-факторы вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} f_{\text{кди}}^T &= \left| \int dx dy S_T(x, y) \exp\left(-\frac{2\pi y}{\gamma\beta\lambda} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \xi}\right) \right| \times \\ &\times \exp\left(-\frac{2\pi i x \sin \theta \sin \xi}{\lambda}\right)^2, \end{aligned} \quad (29.23)$$

$$f_{\text{кди}}^L = \left| \int dz S_L(z) \exp\left(-\frac{2\pi i z}{\lambda \beta}\right) \right|^2. \quad (29.24)$$

Если поперечный размер сгустка значительно меньше продольного (что как правило, выполняется для электронных пучков, ускоренных до

ультрарелятивистских энергий), то поперечный форм-фактор (см. выражение (29.23)) с хорошей точностью совпадает с единицей. В этом случае форм-фактор сгустка полностью определяется продольным форм-фактором (29.24), который не зависит от углов испускания фотона ДИ.

30. Когерентное синхротронное излучение в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне длин волн

В первом же эксперименте [89.4], выполненном на пучке электронов с энергией 180 МэВ и длиной сгустка (банча) $\ell_B \sim 1$ мм с заселенностью (числом электронов в сгустке) $\sim 10^6$, авторы наблюдали усиление выхода когерентного синхротронного излучения (КСИ) с длиной волны $\lambda_{СИ} \approx 500$ мкм ($f = 0,6$ ТГц) примерно на 5 порядков по сравнению с некогерентным СИ.

Как правило, пучок когерентного синхротронного излучения (КСИ) воздействует на исследуемый объект конечных размеров, расположенный на фиксированном расстоянии L от источника синхротронного излучения. Оставляя в стороне эффекты ближней зоны (связанные с искажением характеристик синхротронного излучения, рассчитанных для волновой («дальней») зоны [02.5], при расположении исследуемого объекта на расстояниях $L \ll \gamma^2 \lambda$), рассмотрим влияние конечного телесного угла на спектр КСИ и на его мощность.

Для количественного анализа спектра КСИ в этом случае необходимо использовать формулы теории синхротронного излучения, позволяющие рассчитывать характеристики излучения для вылета фотона СИ под произвольными углами относительно вектора мгновенной скорости электрона (см., например, [73.3]). В качестве угловой переменной будем использовать величину $t = \gamma \theta$ (θ – полярный угол вылета фотона в системе, где вектор мгновенной скорости электрона направлен вдоль оси z), а в качестве спектральной переменной – величину $y = \omega/\omega_c$, где ω_c – характерная частота в спектре СИ:

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{\gamma^3 c}{R}. \quad (30.1)$$

Здесь через R обозначается радиус орбиты. Через эти переменные спектрально-угловое распределение мощности синхротронного излучения (после интегрирования по азимутальному углу относительно векто-

ра мгновенной скорости) в расчете на один электрон записывается в виде

$$\frac{dP}{tdy} = P_0 \frac{27\sqrt{3}}{8\pi} \sqrt{1+t^2} (1+2t^2) y^2 K_{1/3} \left[y(1+t^2)^{3/2} \right], \quad (30.2)$$

где $P_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2 c \gamma^4}{R^2} = \frac{2}{3} \alpha \hbar c^2 \frac{\gamma^4}{R^2}$ – мощность синхротронного излучения релятивистского электрона.

На рис. 30.1 показан спектр СИ излучения после интегрирования выражения (30.2) по всему интервалу измерений величины t ($0 \leq t \leq \infty$) (кривая 1) в сравнении со спектром синхротронного излучения, полученным для конуса излучения $0 \leq t \leq t_{\max} = 2,4$ (кривая 2). Последнее значение близко к аппаратурному угловому захвату в эксперименте [03.9] (± 30 мрад $\approx 2,4 \gamma^{-1}$).

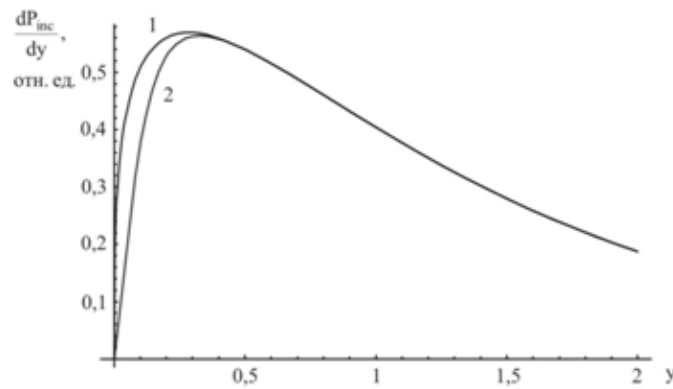


Рис. 30.1. Спектральное распределение мощности некогерентного синхротронного излучения в полный конус (кривая 1) и в конус углов $\theta \leq 2,4\gamma^{-1}$ (кривая 2) относительно вектора мгновенной скорости электрона

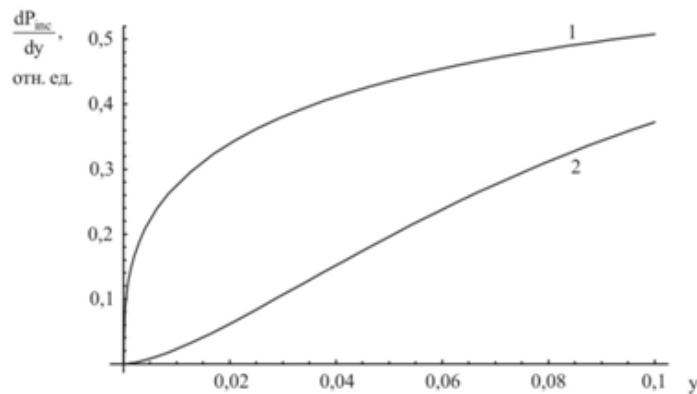


Рис. 30.2. То же, что на рис. 30.1, но для более мягкой части спектра

На рис. 30.2 показано поведение спектров СИ в области $y \ll 1$ ($\omega \ll \omega_c$). Если зависимость в этой области полного спектра (кривая 1) описывается функцией $y^{1/3}$, то кривая 2 зависит от переменной y практически линейно.

Для продольного форм-фактора

$$f_{КСИ}^L = \exp\left(-\frac{2\pi^2\sigma^2}{\lambda^2}\right),$$

соответствующего гауссовскому продольному распределению электронов в сгустке

$$S(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma^2}\right),$$

линейная зависимость спектра синхротронного излучения в фиксированном конусе от частоты позволяет получить аналитическую оценку мощности когерентного синхротронного излучения. После этого потери энергии на излучение с дуги $\sim 2\pi R\gamma^{-1}$ (т. е. за время $\tau_0 \sim 2\pi R/\gamma c$) легко находятся. Если нижнюю кривую на рис. 30.2 аппроксимировать линейной зависимостью с подгоночной константой $C_{inc} = 3,92$:

$$\frac{dP_{inc}}{dy} = P_0 C_{inc} y, \quad (30.3)$$

то выражение для мощности когерентного синхротронного излучения, отнесённое к каждому электрону в сгустке, записывается в виде

$$\frac{dP_{КСИ}}{dy} = N_e P_0 C_{inc} f_{КСИ}^L y = N_e P_0 C_{inc} y \exp\left[-\frac{9}{8}\left(\gamma^3 \frac{\sigma}{R}\right)^2 y^2\right]. \quad (30.3)$$

После интегрирования по спектру (по переменной y) получим мощность, теряемую каждым электроном в сгустке:

$$P_{coh}^{СИ} = N_e P_0 C_{inc} \frac{4}{9} \frac{1}{\gamma^6} \left(\frac{R}{\sigma}\right)^2 = N_e C_{inc} \frac{8}{27} \alpha \hbar c^2 \frac{1}{\gamma^2 \sigma^2}. \quad (30.4)$$

Как следует из полученного выражения, мощность когерентного синхротронного излучения не зависит от радиуса траектории и обратно пропорциональна квадрату лоренц-фактора. Отсутствие зависимости от радиуса объясняется тем, что для разумных значений длины сгустка $l_B \sim 2,36\sigma$ спектр КСИ лежит в области $y \ll 1$, т. е. в области частот, практически не зависящей от R ($\lambda \sim \sigma \gg R/\gamma^3$).

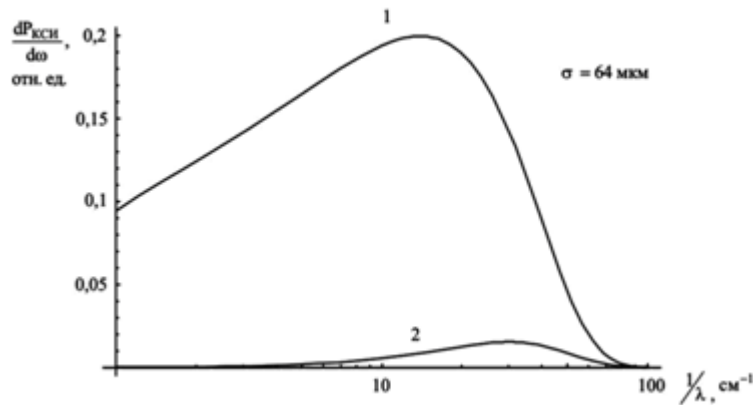


Рис. 30.3. Зависимость интенсивности когерентного синхротронного излучения для $\sigma = 64$ мкм в полный конус (кривая 1) и в конус углов $\theta \leq 2,4\gamma^{-1}$ (кривая 2)

На рис. 30.3 показан спектр когерентного синхротронного излучения, рассчитанный для условий, близких к описываемому эксперименту [03.9] (кривая 2):

$$N_e = 6 \cdot 10^8, \quad \gamma = 80, \quad t_{\max} = 2,4,$$

$$R = 1 \text{ м}, \quad \sigma = 64 \text{ мкм}, \quad l_B = 2,36 \sigma.$$

На этом же рисунке показан спектр когерентного синхротронного излучения, после интегрирования по всем углам. Можно отметить, что оба спектра совпадают для частот в области $\sim 100 \text{ см}^{-1}$, где когерентный эффект исчезает.

Для наглядности на рис. 30.4 показан суммарный спектр синхротронного излучения (когерентное + некогерентное). Зная мощность когерентного синхротронного излучения пучка (30.4) и время «высвечивания» в детектор, которое можно оценить, исходя из экспериментальных условий:

$$t_e = 2 \frac{2\pi R}{c\gamma},$$

вычислим радиационные потери в расчёте на 1 электрон (имея в виду, что подгоночный параметр $C_{inc} = 3,92$):

$$W_{КСИ} = P_{\text{ког}} \cdot t_e \approx 6 \cdot 10^3 \text{ эВ}.$$

Тогда, для сгустка с заселенностью $N_e = 6 \cdot 10^8$ и частотой повторения $f_0 = 37,4 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, получим среднюю мощность:

$$\bar{P} = W_{КСИ} N_e f_0 \approx 20 \text{ Вт}.$$

Полученное значение хорошо согласуется с экспериментом [03.9].

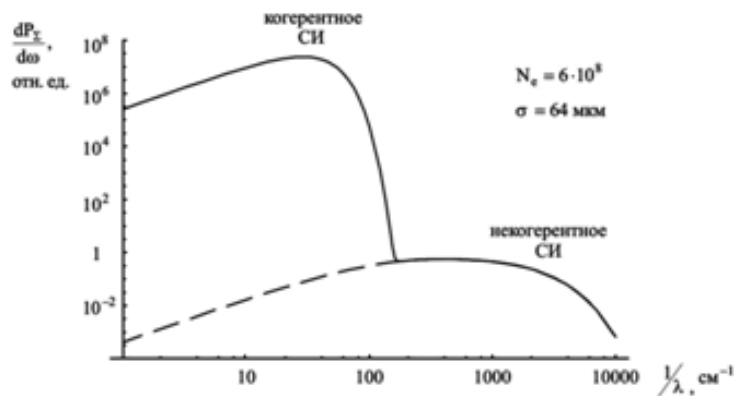


Рис. 30.4. Суммарный спектр синхротронного излучения в конус углов $\theta \leq 2,4/\gamma$ электронного сгустка с $N_e = 6 \cdot 10^8$ и $\sigma = 64$ мкм. Верхняя кривая – когерентное излучение, нижняя – некогерентное

31. Когерентное дифракционное излучение

Для сравнения со спектром КСИ найдём спектр когерентного дифракционного излучения (КДИ) при пролёте релятивистской частицы по центру круглого отверстия радиусом ρ [98.2] (см. параграф 12). В этом случае мощность излучения не будет являться универсальной характеристикой, поскольку временной масштаб процесса дифракционного излучения определяется двумя характерными параметрами:

$$\tau_{\text{ДИ}} \approx 1/\omega_0 = \rho/c\gamma, \quad \tau_B \approx \ell_B/c, \quad (31.1)$$

первый из которых определяет время «вспышки» ДИ при пролёте через отверстие одиночного заряда, а второй – время прохождения через отверстие электронного сгустка длиной ℓ_B . Ясно, что в обоих случаях временной масштаб зависит от параметров задачи, поэтому более естественно рассматривать спектрально-угловое распределение энергии, потерянной на ДИ. Как было показано в главе 3, радиационные потери энергии одиночной частицы определяются радиусом отверстия ρ и лоренц-фактором и, например, для конуса излучения ДИ «вперед» (ДИВ) составляют:

$$W_{\text{ДИВ}} = \frac{1}{2}W \approx \frac{1}{2}\alpha \hbar c \frac{\gamma}{\rho}.$$

Для расчёта спектра ДИВ удобно использовать выражение для поля ДИ, из которого легко получить спектрально-угловое распределение интенсивности:

$$\frac{d^2W_{\text{ДИ}}}{dyt dt} = \frac{4\alpha\hbar}{\pi} \omega_c \frac{t^2}{(1+t^2)^2} [yK_1(y)J_0(yt)]^2, \quad (31.2)$$

где $t = \gamma\theta$, $y = \omega/\omega_c$; $\omega_c = c\gamma/\rho$ – частота обрезания спектра ДИ. Как и в случае синхротронного излучения, спектральный состав излучения зависит от угла вылета фотонов дифракционного излучения.

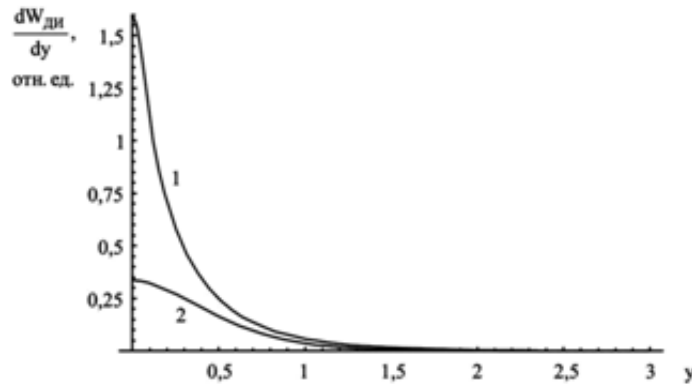


Рис. 31.1. Спектральное распределение интенсивности дифракционного излучения при пролёте релятивистского заряда через отверстие радиусом $\rho = 1$ мм (кривая 1 – излучение в полный конус, кривая 2 – в конус углов $\theta \leq 2,4/\gamma$)

На рис. 31.1 приведены спектры дифракционного излучения для излучения в полный конус (кривая 1) и для конуса с $t_{\max} = 2,4$ (кривая 2). Как и в случае синхротронного излучения в последнем случае наблюдается существенное уменьшение интенсивности излучения в «мягкой» части.

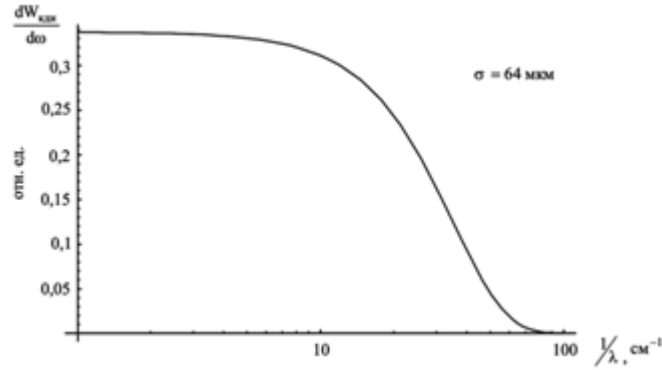


Рис. 31.2. Зависимость интенсивности когерентного дифракционного излучения от волнового вектора для тех же параметров, что и на рис. 31.1 и $\sigma = 64$ мкм

Частотный спектр когерентного ДИ показан на рис. 31.2 для радиуса отверстия $\rho = 1$ мм и для угловой апертуры $t_m = 2,4$ для параметров электронного сгустка, для которых проводился расчёт характеристик когерентного синхротронного излучения. Как видно из рисунка 31.2, в области $y \ll 1$, т. е. в области когерентности, спектр дифракционного излучения можно аппроксимировать константой $C_{ди}$. В этом случае спектр интенсивности когерентного дифракционного излучения можно получить интегрированием выражения (31.2) по угловой переменной:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 W_{кди}}{dy} &= N_e \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^2 \sigma^2 y^2 \right] \int \frac{d^2 W_{ди}}{dy dt} dt = \\
 &= N_e \frac{4\alpha \hbar}{\pi} \omega_c \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^2 \sigma^2 y^2 \right] \times \int_0^{t_m} dt \frac{t^2}{(1+t^2)^2} [y K_1(y) J_0(yt)]^2 \approx \\
 &\approx N_e \frac{4\alpha \hbar}{\pi} \omega_0 C_{ди} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^2 \sigma^2 y^2 \right].
 \end{aligned} \tag{31.3}$$

После интегрирования по спектру в пределах $0 \leq y < \infty$ (что не приводит к большим погрешностям из-за быстрого убывания гауссиана для больших значений y , где аппроксимация спектральной плотности константой уже некорректна) можно получить радиационные потери каждого электрона в сгустке через механизм КДИ:

$$W_{\text{КДИ}} \approx N_e \frac{4\alpha\hbar}{\pi} \omega_c C_{\text{ДИ}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{\gamma\sigma} = N_e \frac{4\alpha\hbar c}{\sqrt{2\pi}} C_{\text{ДИ}} \frac{1}{\sigma}. \quad (31.4)$$

Как и для ранее рассмотренного механизма КСИ, полученное выражение не зависит от одного из основных размерных параметров – радиуса отверстия. Этот факт объясняется тем, что в рассмотренном случае величина $\gamma\lambda_{\text{кор}} \sim \gamma\sigma$ намного превышает радиус отверстия, что соответствует переходному излучению с постоянным спектром интенсивности.

Для используемых параметров оценка (31.4) даёт значение $W_{\text{КДИ}} \sim 6 \cdot 10^4$ эВ, что на порядок превышает потери энергии через механизм КСИ.

На рис. 31.3 приведён результирующий спектр дифракционного излучения электронного сгустка с указанными параметрами в логарифмическом масштабе. Сравнивая этот рисунок с рис. 30.4 можно отметить заметное превышение спектральной плотности когерентного дифракционного излучения в области частот $< 100 \text{ см}^{-1}$ по сравнению с КСИ, что и обуславливает полученное превышение радиационных потерь КДИ.

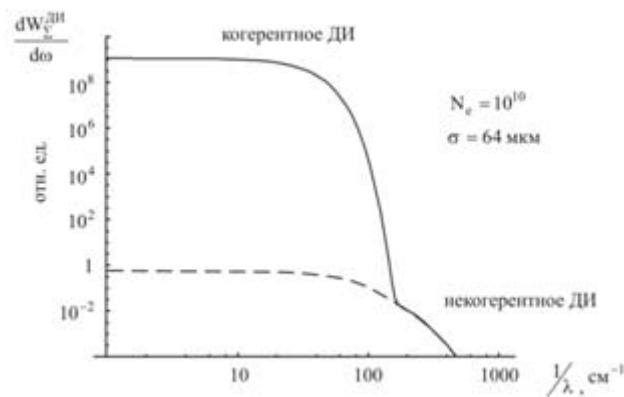


Рис. 31.3. Спектр когерентного дифракционного излучения электронного сгустка с $N_e = 10^{10}$, остальные параметры те же, что и на рис. 31.2

В последние годы диапазону длин волн, лежащему между традиционной СВЧ-электроникой (с частотами менее 100 ТГц) и фотоникой (с частотами выше 100 ТГц, т. е. инфракрасный и оптический диапазон), уделяется большое внимание [03.10].

Существующие лабораторные источники обеспечивают выход излучения в ТГц-диапазоне с мощностью менее 1 мВт (излучение ртутной лампы по своим характеристикам близко к излучению чёрного тела с температурой $\sim 2000^\circ\text{K}$). Следует указать, что частоте 1 ТГц соответствует длина волны $\lambda = 300$ мкм, поэтому когерентное излучение электронного сгустка с длиной $\ell_B \sim 300$ мкм будет содержать значительную компоненту терагерцевого диапазона. Дополнительными преимуществами подобного источника (независимо от механизма излучения) является направленность излучения и короткая длительность ($\sim \ell_B/c$) [03.10].

Первый реальный источник ТГц-излучения на основе электронного ускорителя со средней мощностью более чем на 3 порядка выше, чем стандартные источники, был создан в 2002 году [02.6].

В этой работе терагерцевый источник был создан на пучке электронов с энергией 40 МэВ, представляющем собой очередность коротких сгустков с зарядом 0,1 нК, длительностью 500 фсек и частотой 37,4 МГц, проходящих через магнитное поле с радиусом кривизны траектории $R = 1$ м.

Генерация излучения в терагерцевом диапазоне короткими электронными сгустками в ряде случаев может быть более эффективной, если будет происходить через механизм когерентного дифракционного излучения (КДИ) вместо когерентного синхротронного излучения (КСИ). КДИ назад обладает дополнительным преимуществом, а именно выбором наклона мишени пучок КДИ может быть направлен под любым углом к импульсу электронов, вплоть до прямого угла, что существенно снижает фоновые загрузки.

Именно эта последняя характеристика КДИ назад является весьма перспективной для невозмущающей диагностики длины электронного сгустка. При использовании термина «невозмущающая диагностика», как правило, имеется в виду отсутствие взаимодействия исследуемого пучка с твёрдой мишенью, т. е. полное отсутствие ионизационных потерь и многократного рассеяния. Очевидно, тем не менее, что энергия начальной частицы уменьшается за счёт радиационных потерь. Далее, если, например, дифракционная мишень наклонена под углом 45° к начальному пучку, то конус обратного дифракционного излучения будет направлен вдоль направления зеркального отражения, т. е.

под углом 90° . В этом случае фотоны конуса КДИ назад кроме энергии будут «уносить» поперечный импульс, что из-за эффекта отдачи будет приводить к передаче поперечного импульса начальной частице, т. е. к отклонению траектории частицы от первоначального направления. Угол отклонения для наиболее интересного случая обратного КДИ, генерируемого мишенью, наклонной под углом 45° , можно оценить из простой модели [99.6].

Если длина релятивистского сгустка σ такова, что выполняется условие $\gamma\sigma/2\pi \leq h$, h – прицельный параметр, то радиационные потери в конус КДИ назад каждого электрона (совпадающие в конусе КДИ вперёд) в сгустке с числом электронов N_e можно оценить следующим образом (см., например, формулу (31.4)):

$$\Delta W_{\text{КДИ}} \sim N_e \alpha \hbar c / \sigma. \quad (31.5)$$

Тогда импульс, уносимый фотонами КДИ назад в направлении, перпендикулярном электронному пучку, оценивается из (31.5):

$$K_{\text{КДИ}} \sim \frac{\Delta W_{\text{КДИ}}}{c}.$$

Следовательно, поперечный импульс, приобретаемый начальным электроном, определяется длиной сгустка и числом электронов в сгустке:

$$\Delta p_{\perp} \sim K_{\text{КДИ}} \sim N_e \alpha \hbar / \sigma. \quad (31.6)$$

Полученное выражение позволяет оценить угол отклонения начального электрона:

$$\Delta \theta \sim \frac{\Delta p_{\perp}}{p_0} \sim \frac{N_e \alpha \hbar / \sigma}{\gamma m c} = \frac{N_e r_0}{\gamma \sigma}, \quad (31.7)$$

где $r_0 = 2,82 \cdot 10^{-13}$ см – классический радиус электрона.

В физике ускорителей рассматриваются процессы прохождения коротких сгустков заряженных частиц через структуры различной геометрии, изготовленные из проводящих материалов. В этом случае на частицы в сгустке воздействуют поля, создаваемые токами, наведенными

ми на элементах структуры проходящим пучком. Подобное воздействие рассчитывается через кильватерные поля (wake-field) [90.3].

В работе [96.4] рассматривалось прохождение электронного сгустка через «пирамидальный» коллиматор. Если угол при вершине пирамиды будет равен 45° и электронный сгусток проходит не по оси коллиматора, а в непосредственной близости от стенки коллиматора, оценка угла отклонения даётся формулой

$$\Delta\theta \sim \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{N_e r_0}{\gamma \ell_B}. \quad (31.8)$$

В формуле (31.8) ℓ_B – длина сгустка. Сравнивая выражения (31.7) и (31.8), можно отметить хорошее согласие, что позволяет использовать формулы типа (31.7) для оценки степени «возмущения» начального пучка диагностической дифракционной мишенью.

В заключение укажем, что для реальных условий эксперимента спектральные зависимости, показанные на рис. 30.4 и 31.3, должны быть откорректированы в «мягкой» части спектра вследствие эффекта подавления выхода излучения в первом случае (КСИ) – из-за эффекта «экранирования» поля электрона полюсами магнита, расположенными на фиксированном расстоянии [02.7], а во втором случае (КДИ) – из-за конечности внешнего диаметра мишени [00.2].

32. Когерентное излучение Смита–Парселла

Следует отметить, что форм-фактор (29.22) описывает также когерентное излучение Смита–Парселла (КИСП), поскольку, как отмечалось выше, излучение Смит–Парселла можно рассматривать как резонансное дифракционное. В работах [98.8, 98.9] выражения для $f_{КИСП}$ были получены несколько другим путем, однако результирующее выражение совпадает с (29.22).

Для релятивистских энергий, представляющих наибольший интерес, эффективный поперечный размер пучка

$$\langle y \rangle = \frac{\int y S_T(x, y) dx dy}{\int S_T(x, y) dx dy}$$

как правило, удовлетворяет соотношению

$$\langle y \rangle \ll \gamma \lambda,$$

поэтому первый экспоненциальный множитель в подынтегральном выражении можно заменить на единицу. В этом случае выражение для поперечного форм-фактора существенно упрощается:

$$f_{\text{КИСП}}^T = \left| \int d\mathbf{r}_T b(\mathbf{r}_T) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} x \sin \theta \sin \xi\right) \right|^2.$$

Для простейшего поперечного распределения (цилиндрический сгусток с равномерным заполнением, как и ранее) интеграл вычисляется аналитически:

$$f_{\text{КДИ}}^T = \left[\frac{\lambda}{\pi r \sin \theta \sin \xi} J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda} r_0 \sin \theta \sin \xi\right) \right]^2.$$

В этом случае продольный формфактор для КИСП совпадает со второй из формул (29.13) и не зависит от угла излучения θ .

В ряде работ (см., например, [98.9]) формфактор для случая КИСП записывается по аналогии с когерентным синхротронным излучением, т. е. при использовании выражения (29.5). Ясно, что в этой модели при вычислении продольного форм-фактора под интегралом остается множитель $\exp\left(-\frac{2\pi i}{\lambda} z \cos \theta\right)$, что приводит к продольному формфактору вида

$$f_{\text{КИСП}}^L \sim \exp\left(-\frac{4\pi^2 \sigma_0^2}{\lambda^2} \cos^2 \theta\right), \quad (32.1)$$

если продольное распределение электронов в сгустке описывается гауссианом с дисперсией σ_0^2 (см., например, [98.9]). Исходя из записанной формулы, можно сделать ошибочный вывод, что излучение Смита–Парселла под углом $\theta = \pi/2$ будет когерентным для любой длины волны безотносительно к длине сгустка.

Если распределение частиц в электронном сгустке описывается гауссовскими распределениями как в продольном, так и в поперечном направлениях, т. е.

$$S_L(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_L} \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_L^2}\right),$$

$$S_T(r_T) = \frac{1}{\pi \sigma_T^2} \exp\left(-\frac{r_T^2}{\sigma_T^2}\right), \quad (32.2)$$

то выражение для формфактора будет следующим:

$$f_{\text{КИСП}} = f_{\text{КИСП}}^L \cdot f_{\text{КИСП}}^T = \exp\left\{-\frac{2\pi^2 \sigma_L^2}{\lambda^2}\right\} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{2\pi^2 \sigma_T^2}{\lambda^2} \sin^2 \theta \sin^2 \xi\right\}. \quad (32.3)$$

Как следует из полученной формулы, для излучения в плоскости, перпендикулярной решетке ($\xi = 0$), поперечный форм-фактор будет равен единице для любой длины волны. Однако, при отклонении от этой плоскости ситуация усложняется.

При выполнении условия

$$\lambda \gg \pi \sigma_T \sin \theta \sin \xi \quad (32.4)$$

поперечный форм-фактор будет близок к единице (пространственная когерентность не нарушается). Однако, в отличие от рассмотренных в параграфе 29 механизмов излучения, для механизма КИСП существует строгая зависимость между длиной волны и углом излучения, поэтому условие (32.4) можно записать в виде:

$$\sigma_T \ll \frac{d \operatorname{tg}(\theta/2)}{n\pi \sin \xi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (32.5)$$

откуда вытекает, что пространственная когерентность может нарушаться для достаточно малых полярных углов θ и ненулевых азимутальных углов. На рис. 32.1 показано влияние поперечного размера сгустка на интенсивность КИСП для «поперечной» решетки, в которой стрипы расположены перпендикулярно траектории электрона.

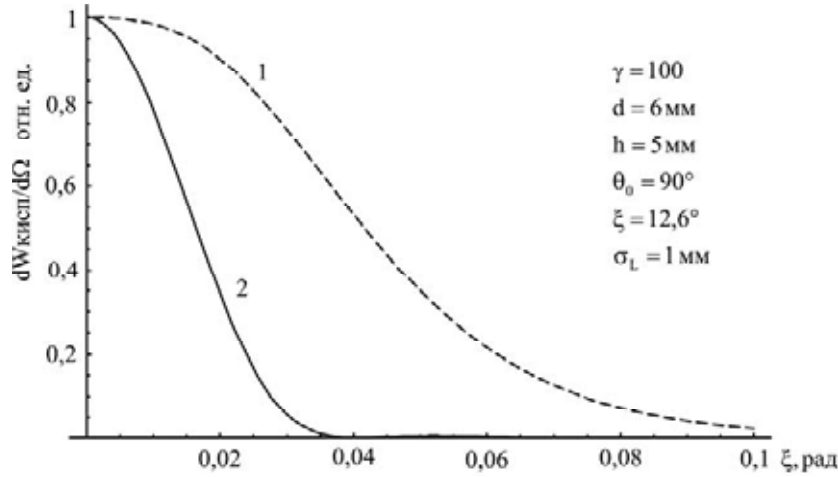


Рис. 32.1. Азимутальное распределение когерентного излучения Смита–Парселла для электронных сгустков различного диаметра (кривая 1 – $\sigma_T = 10$ мм, кривая 2 – $\sigma_T = 1$ мм)

Критерий (32.5) может быть важен для нерелятивистских и умеренно-релятивистских электронов (например, если $\gamma \leq 10$). В ультрарелятивистском случае, когда $\sin \xi \sim \gamma^{-1}$, условие (32.5) будет выполняться практически всегда, а основным критерием когерентности будет условие близости к единице продольного форм-фактора:

$$\lambda \gg \pi \sigma_0; \quad (32.6)$$

или, вновь используя дисперсионное соотношение Смита–Парселла:

$$\sigma_0 \ll \frac{d(\beta^{-1} - \cos \theta)}{\pi n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (32.7)$$

В ряде статей ([98.9, 98.10]) условие (32.7) предлагается использовать для измерения длины ультракороткого электронного сгустка ($\sigma_0 \leq 1$ мм), где традиционные методы практически непригодны.

На рис. 32.2 приведены зависимости выхода когерентного излучения Смита–Парселла от полярного угла наблюдения для различных длин электронного сгустка. Как следует из рисунка, угол, соответствующий максимуму КИСП, зависит от соотношения между длиной сгустка σ_0 и периодом решетки [97.7]. Используя детектор с достаточно широкой полосой пропускания, можно измерить длину короткого электронного сгустка по результатам измерения угловой зависимости КИСП

от решетки с выбранным периодом (на рис. 32.2 показаны результаты расчета для $\sigma_0 = 40; 60; 80$ мкм и решетки с периодом 0,6 мм).

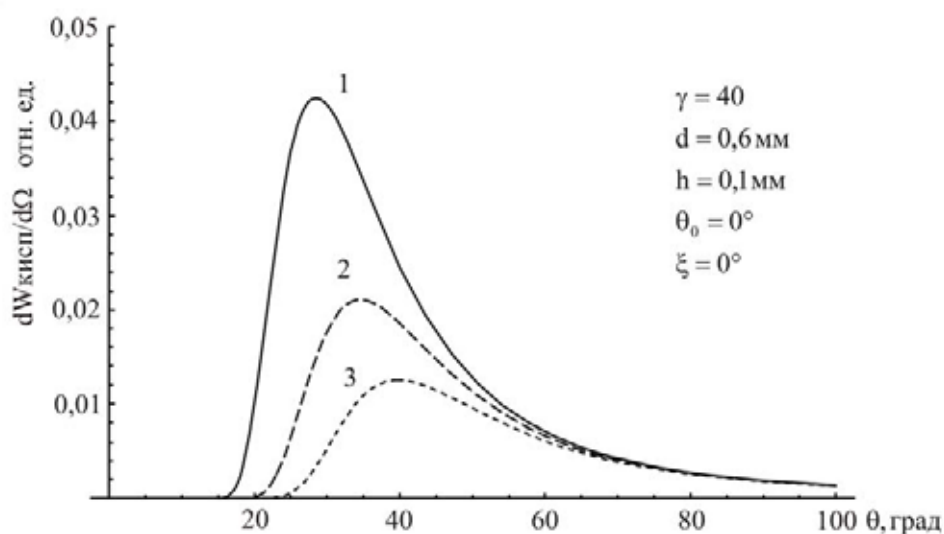


Рис. 32.2. Угловое распределение когерентного излучения Смита-Парселла электронных сгустков различной длины σ_0 (кривая 1) равна 40 мкм, 60 мкм (кривая 2) и 80 мкм (кривая 3)

Как видно из рисунка, при измерении выхода КИСП в интервале углов от $\theta_{\min} = 20^\circ$ до $\theta_{\max} = 50^\circ$ детектором с полосой чувствительности от $\lambda_{\min}(\theta = 20^\circ) = 36$ мкм до $\lambda_{\max}(\theta = 50^\circ) = 214$ мкм легко определить положение максимума с точностью до нескольких градусов, что позволит измерить длину электронного сгустка с требуемой точностью. Аналогичные подходы для измерения длины электронного сгустка рассматривались также в статьях [99.5], [01.10].

8. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ПРЕДВОЛНОВОЙ ЗОНЕ

33. Переходное излучение в предволновой зоне

Понятие предволновой зоны (“prewave zone”) для переходного излучения было введено в статье [00.5], а в работе [03.11] этот эффект был подтвержден экспериментально. Прежде чем рассматривать дифракционное излучение в предволновой (ближней) зоне, рассмотрим этот эффект для переходного излучения (ПИ). Суть этого эффекта заключается в том, что для сравнительно малых расстояний a между детектором и мишенью нельзя использовать приближение точечного источника ПИ (справедливое для больших расстояний a , когда собственным размером источника волн ПИ на поверхности мишени порядка $\gamma\lambda$ можно пренебречь). Именно это приближение точечного источника (приближение волновой или дальней зоны) используется в большинстве работ, посвященных ПИ, начиная с монографий [69.1, 84.1]. Критерий нарушения применимости приближения дальней зоны можно получить, опираясь на простейшие геометрические построения (рис. 33.1).

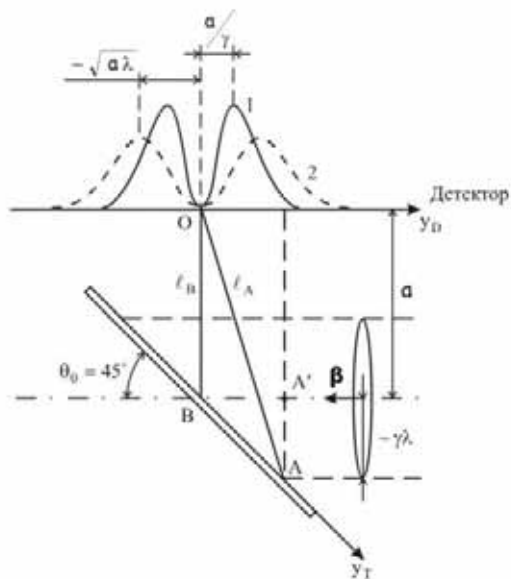


Рис. 33.1. Формирование «изображения» углового распределения переходного излучения на плоскости детектора. Кривая 1 – детектор расположен в дальней зоне ($a \gg \gamma^2 \lambda$), кривая 2 – детектор расположен в предволновой зоне ($a < \gamma^2 \lambda$)

При пересечении ультрарелятивистской частицей мишени, наклонённой под углом θ_0 (для определённости выберем $\theta_0 = 45^\circ$, рис. 33.1), эффективная область мишени, возбуждаемая полем частицы и испус-

кающая электромагнитное излучение с длиной волны λ , будет представлять собой эллипс с большой осью $\gamma\lambda/\sin\theta_0$ вдоль оси Y_T и малой осью $\gamma\lambda$ вдоль оси x_T . Координаты точки на мишени будут обозначаться через X_T, Y_T , а на детекторе – через X_D, Y_D (оси X_T, X_D – перпендикулярны плоскости рисунка).

Рассмотрим интерференцию в точке О детектора волн, испущенных из точек А и В мишени, которые возбуждаются при пролёте ультрарелятивистской частицы через точку В (см. рис. 33.1).

Волны из точек А и В будут интерферировать при выполнении условия, наложенного на сдвиг фаз:

$$\Delta\varphi = k\Delta r - \omega\Delta t \ll \pi. \quad (33.1)$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ – модуль волнового вектора, $\Delta r = \ell_A - \ell_B$, $\Delta t = \gamma\lambda/\beta c$ – время, за которое частица проходит расстояние А'В (см. рис. 33.1). Предполагая, что выполняется соотношение $\gamma\lambda \ll a$, величину Δr разложим по малому параметру $\gamma\lambda/a$ и, оставляя члены не выше второго порядка малости, получим:

$$\Delta r = \sqrt{(a + \gamma\lambda)^2 + (\gamma\lambda)^2} - a \approx \gamma\lambda + \frac{\gamma^2\lambda^2}{2a}.$$

Условие (33.1) записано для центральной точки В излучающей области и точки А, лежащей на периферии этой области. Таким образом, при выполнении условия (33.1) все точки в области возбуждения мишени (в области «засветки») испускают волны длиной λ когерентно, т. е. размерами «светящегося» пятна можно пренебречь (приближение дальней зоны). Из (33.1) следует условие дальней зоны, которое связывает Лоренц-фактор частицы, длину волны излучения и расстояние между детектором и мишенью:

$$a \gg \gamma^2\lambda. \quad (33.2)$$

Следует отметить, что в оптике, где, в основном, рассматривается излучение нерелятивистских зарядов, волновая зона определяется как расстояние, значительно превышающее длину волны, а также размер области движения зарядов, испускающих излучение [97.1]. Условие (33.2) характеризует расстояние a в $\gamma \gg 1$ раз, превышающее характер-

ный размер излучающей области $\gamma\lambda$, поэтому противоположное условие

$$a < \gamma^2\lambda \quad (33.3)$$

характеризует так называемую «предволновую» зону. В отличие от волновой зоны, в предволновой зоне существен учет размеров источника.

Отметим, что размер предволновой зоны $\gamma^2\lambda$ формально совпадает с размером длины формирования излучения (см. § 7). Эти две величины имеют как различия, так и сходство. Различия заключаются в том, что длина формирования излучения – это расстояние вдоль траектории заряженной частицы, и для рассматриваемого в этой главе излучения назад (другие термины: обратного излучения, излучение под углом зеркального отражения от поверхности) длина когерентности всего лишь порядка λ (за исключением случая скользящего падения) – т. е. собственно длина формирования и размер предволновой зоны в ультрарелятивистском случае резко различаются по величине. Однако, эти величины и схожи, поскольку обе получаются из условия когерентности излучения точками излучающей области и обе по своему смыслу являются зоной формирования излучения от элементарных излучателей (электронов, связанных в веществе мишени), возбуждаемых полем заряженной частицы.

Запишем формулу (2.5) через длину волны:

$$l_c(\theta) = \frac{\beta\lambda}{1 - \beta\cos\theta}.$$

Для излучения в направлении прямо-вперёд получим:

$$l_c(0) \approx 2\gamma^2\lambda,$$

тогда как для угла излучения $\theta = 2\theta_0 = 90^\circ \gg \gamma^{-1}$ (как для геометрии, показанной на рис. 33.1) длина формирования будет сравнима с длиной волны:

$$l_c(90^\circ) \approx \lambda.$$

Таким образом, практически всегда для ПИ «назад» детектор будет располагаться на расстоянии от мишени, значительно превышающем

длину формирования, однако, в зависимости от значения лоренц-фактора и длины волны регистрируемого излучения детектор может располагаться в «предволновой» зоне (т. е. когда выполняется условие (33.3)). Другими словами, при выполнении условия (33.3) детектор расположен в зоне, где волна, излучаемая мишенью, не является сферической.

В эксперименте [03.11], выполненном на пучке электронов с энергией 900 МэВ ($\gamma = 1760$), детектирующая система была размещена на расстоянии $a = 100$ см от мишени. Для длины волны $\lambda = 1,6$ мкм величина $\gamma^2 \lambda \approx 500$ см существенно превышала это расстояние. Обнаруженное в эксперименте уширение углового распределения ПИ «назад» на плоскости детектора (т. е. сдвиг максимума распределения на угол, превышающий величину γ^{-1}) является убедительным доказательством существования эффекта предволновой зоны ПИ. В дальнейшем эффект предволновой зоны будем характеризовать безразмерным параметром R :

$$R = \frac{a}{\gamma^2 \lambda},$$

т. е. для «дальней» зоны $R \gg 1$.

Чтобы проиллюстрировать процедуру вычисления компонент поля ПИ в предволновой зоне для получения распределения интенсивности ПИ на поверхности детектора, для начала рассмотрим геометрию ПИ «назад» при пересечении частицей перпендикулярной, идеально проводящей бесконечной границы раздела ($\theta_0 = 90^\circ$), т. е. мишень и детектор расположены перпендикулярно траектории частицы. В простейшем приближении, пренебрегая продольной компонентой поля релятивистского электрона и описывая поперечные компоненты поля $E_{x,y}^0$ пакетом электромагнитных волн, выражение для компонент отраженного поля на поверхности детектора записывается по известным законам оптики [62.3]:

$$\begin{Bmatrix} E_X^D(X_D, Y_D) \\ E_Y^D(X_D, Y_D) \end{Bmatrix} = \text{const} \int dX_T dY_T \begin{Bmatrix} E_X^0(X_T, Y_T) \\ E_Y^0(X_T, Y_T) \end{Bmatrix} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (33.4)$$

В выражении (33.4) координаты X , Y на мишени и детекторе обозначаются индексами T , D . Координаты X_D, Y_D входят в фазу через расстояние r , где

$$r = \sqrt{a^2 + (X_T - X_D)^2 + (Y_T - Y_D)^2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Практический интерес представляет ситуация, когда выполняется условие

$$a \gg \gamma \lambda. \quad (33.5)$$

В этом случае $X_{T,D} \ll a$, $Y_{T,D} \ll a$, что позволяет разложить величину r по степеням $\frac{X_{T,D}}{a}$, $\frac{Y_{T,D}}{a}$ и, оставляя величины первого и второго порядка малости в показателе экспоненты и основной член ($r \approx a$) в знаменателе, можно получить [06.8]:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E_X^D(X_D, Y_D) \\ E_Y^D(X_D, Y_D) \end{array} \right\} &= \text{const} \times \exp \left[i \frac{k}{2a} (X_D^2 + Y_D^2) \right] \times \\ &\times \int dX_T dY_T \left\{ \begin{array}{l} X_D \\ Y_D \end{array} \right\} \frac{K_1 \left(k \sqrt{X_T^2 + Y_T^2} / \gamma \beta \right)}{\gamma \beta} \times \\ &\times \exp \left[i \frac{k}{2a} (X_T^2 + Y_T^2) \right] \exp \left[-i \frac{k}{a} (X_T X_D + Y_T Y_D) \right]. \end{aligned} \quad (33.6)$$

В формулу (33.6) вместо поперечного поля электрона $E_{x,y}^0$ подставлено его выражение (3.8). В силу симметрии задачи последующие вычисления будем проводить в полярной системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{T,D} \\ Y_{T,D} \end{array} \right\} = R_{T,D} \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi_{T,D} \\ \sin \varphi_{T,D} \end{array} \right\}, \quad dX_T dY_T = R_T dR_T d\varphi_T.$$

Кроме того, будем использовать относительные переменные:

$$r_T = \frac{2\pi R_T}{\gamma \lambda}, \quad r_D = \frac{\gamma}{a} R_D. \quad (33.7)$$

Используя известные представления функций Бесселя, азимутальный интеграл в (33.6), вычисляем аналитически:

$$\begin{aligned}
X_T X_D + Y_T Y_D &= R_T R_D \cos(\varphi_T - \varphi_D), \\
\int d\varphi_T \begin{Bmatrix} \cos \varphi_T \\ \sin \varphi_T \end{Bmatrix} \exp \left\{ -\frac{k}{a} R_T R_D \cos(\varphi_T - \varphi_D) \right\} &= \\
= \int d\varphi_T \begin{Bmatrix} \cos \varphi_T \\ \sin \varphi_T \end{Bmatrix} \exp \left\{ -r_T r_D \cos(\varphi_T - \varphi_D) \right\} &= \begin{Bmatrix} \cos \varphi_D \\ \sin \varphi_D \end{Bmatrix} J_1(r_T r_D). \quad (33.8)
\end{aligned}$$

Тогда, опуская несущественный фазовый множитель перед интегралом в (33.6), получим выражение для радиальной компоненты поля ПИ:

$$\begin{aligned}
E_x^D &= E_D \cos \varphi_D, \quad E_y^D = E_D \sin \varphi_D, \\
E_D(r_D, R) &= \text{const} \int_0^\infty r_T dr_T K_1(r_T) J_1(r_T r_D) \exp \left(i \frac{r_T^2}{4\pi R} \right). \quad (33.9)
\end{aligned}$$

В волновой зоне ($R \gg 1$) экспоненту в подынтегральном выражении можно заменить единицей. В этом случае интегрирование по r_T проводится аналитически:

$$E_D(r_D, \infty) = \int_0^\infty r_T dr_T K_1(r_T) J_1(r_T r_D) = \frac{r_D}{1 + r_D^2},$$

т. е. радиальное распределение интенсивности ПИ на детекторе описывается выражением

$$I(r_D) = \text{const} |E_D(r_D)|^2 = \text{const} \frac{r_D^2}{(1 + r_D^2)^2}. \quad (33.10)$$

После обратного перехода к размерной переменной R_D (см. формулу (33.7)), выразив радиус R_D через угол вылета фотона ПИ θ , получим следующее соотношение

$$r_D = \gamma \theta, \quad (33.11)$$

и, соответственно, известное угловое распределение фотонов ПИ, регистрируемых детектором:

$$I(\theta) = \text{const} \frac{\gamma^2 \theta^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} = \text{const} \frac{\gamma^2 \theta_x^2 + \gamma^2 \theta_y^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2}. \quad (33.12)$$

В последней формуле используются декартовы угловые переменные $\theta_x = \frac{X_D}{a}$, $\theta_y = \frac{Y_D}{a}$. Вычислим поле ПИ в предволновой зоне, чтобы сравнить с результатом (33.10). Для упрощения расчетов будем пользоваться аппроксимацией

$$r_T K_1(r_T) = (1 + 0,57 r_T - 0,04 r_T^2) e^{-r_T} \quad (33.13)$$

которая дает погрешность в несколько процентов на интервале $0 \leq r_T \leq 5$ (рис. 33.2).

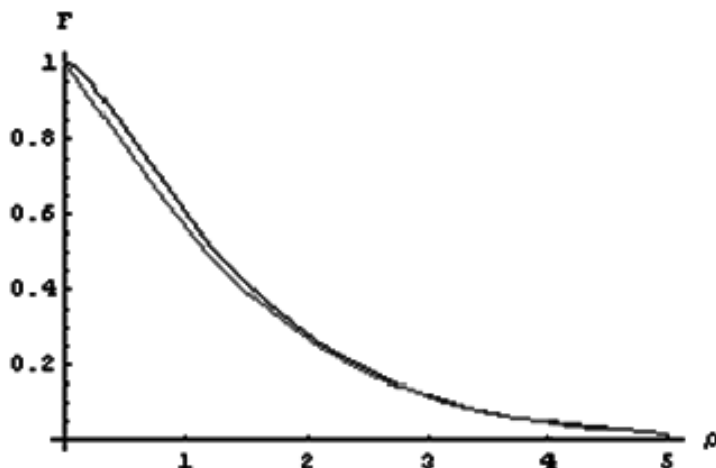


Рис. 33.2. Аппроксимация функции $r_T K_1(r_T)$ (верхняя кривая) формулой (33.13) — нижняя кривая

При вычислении интеграла (33.9), интегрирование по переменной r_T можно вести в пределах

$$0 \leq r_T \leq r_{T \max} = 5,$$

поскольку увеличение верхнего предела интегрирования, например до $r_{T \max} = 10$, приводит к изменению значений интегралов менее чем на 1 %.

На рис. 33.3 показаны зависимости интенсивности $I \sim |E_D(r_D, R)|^2$, для различных значений R , которые хорошо согласуются с результатами расчетов В. Верзилова (рис. 3 в статье [00.5]).

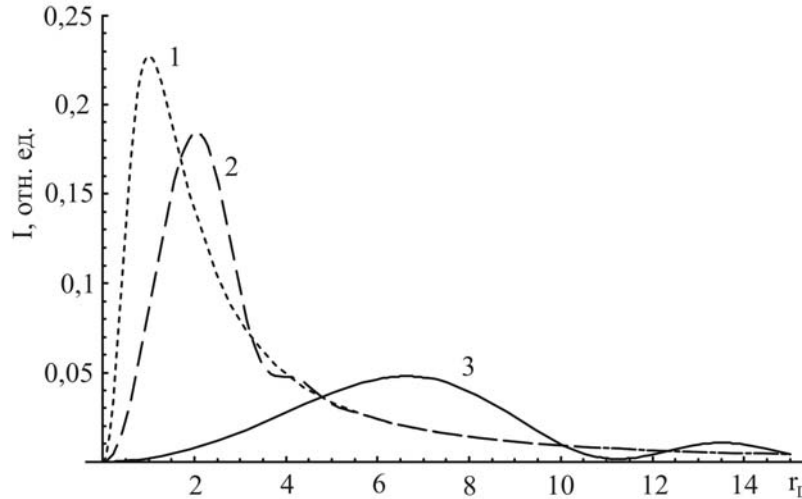


Рис. 33.3. Радиальное распределение интенсивности переходного излучения на поверхности детектора для различных расстояний между детектором и мишенью. Кривая 1 – $R = 10/2\pi$; кривая 2 – $1/2\pi$; кривая 3 – $0,1/2\pi$

Максимального значения интенсивность ПИ на детекторе $|E_D(r_D, R)|^2$ достигает при таком значении радиуса $r_D = r_0$, при котором происходит максимальное «перекрытие» осциллирующих подынтегральных функций $J_1(r_T r_D)$ и $Re \left[\exp \left(i \frac{r_T^2}{4\pi R} \right) \right]$. Поскольку основной вклад в интеграл (33.9) дает область $r_T \leq 1$, это требование сводится к требованию совпадения первых «нулей» обеих функций. Таким образом, имеем два соотношения:

$$r_T r_0 = 3,832, \quad \frac{r_T}{4\pi R} = \frac{\pi}{2}, \quad (33.14)$$

из которых находится связь между r_0 и R :

$$r_0 = \frac{3,832}{\sqrt{2} \pi \sqrt{R}} = \frac{0,863}{\sqrt{R}}.$$

Возвращаясь к размерным единицам, получим:

$$R_D^0 = 0,863\sqrt{a\lambda}. \quad (33.15)$$

Оценка (33.15) дает значения $r_0 = 2,16$ и $6,84$ для $R = \frac{1}{2\pi}$; $\frac{0,1}{2\pi}$, которые удовлетворительно согласуются с точными значениями $r_0 = 2,05$ и $6,65$ (см. рис. 33.3). Из первого уравнения (33.14) следует, что в предволновой зоне основной вклад в интенсивность ПИ дает область мишени

$$R_T \leq \sqrt{\frac{a\lambda}{2}},$$

т. е. в рассматриваемом случае оценка (33.15) не зависит от лоренц-фактора. Как можно видеть из рис. 33.3, во-первых, распределение интенсивности ПИ «уширяется» по мере перехода из волновой зоны ($R \sim 1$) в предволновую ($R \sim 0,01$), во-вторых, в предволновой зоне положение максимума в распределении интенсивности зависит от длины волны.

Автор статей [99.7], [02.8], развивая несколько иной подход к проблеме предволновой зоны, получил результат, близкий к (33.15):

$$R_D^0 \approx \sqrt{a\lambda}.$$

Кроме цитированной работы [03.11], экспериментальное исследование ПИ в предволновой зоне проводилось в работе [06.7] на электронном пучке с энергией $E = 6$ МэВ ($\gamma \approx 12$). На этом же пучке в эксперименте [03.12] исследовались угловые распределения оптического переходного излучения. В оптическом диапазоне ($\lambda \sim 0,5$ мкм) значение параметра $\gamma^2\lambda \approx 0,07$ мм заведомо позволяло использовать формулы дальней зоны для расчёта угловых зависимостей оптического ПИ и сравнить их с экспериментом (рис. 33.4).

Как видно из приведенного рисунка экспериментальные данные удовлетворительно описываются известной теорией с учётом расходимости электронного пучка [98.2].

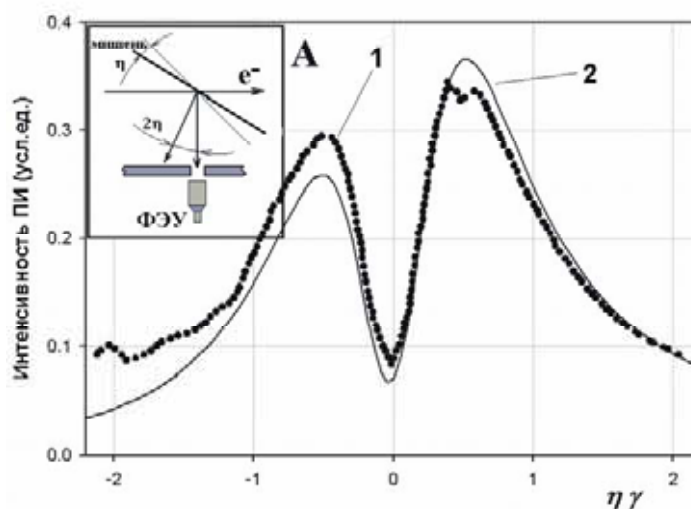


Рис. 33.4. Зависимость интенсивности оптического ПИ назад электронов с энергией 6.1 МэВ от угла наклона мишени η . Кривая 1 – эксперимент, кривая 2 – расчёт по модели [98.2]

Однако при переходе в миллиметровый диапазон, который соответствует когерентному ПИ (в описываемом эксперименте длина электронного сгустка составляла 6–8 мм, поэтому когерентные эффекты проявлялись в диапазоне длин волн $\lambda > 10$ мм), критерий дальней зоны соответствует расстоянию между детектором и мишенью:

$$a \gg \gamma^2 \lambda = 1440 \text{ мм.}$$

В описываемом эксперименте это расстояние составляло 360 мм = $0,25 \gamma^2 \lambda$.

На рис. 33.5 показано измеренное угловое распределение когерентного ПИ для расстояния $a \approx 0,25 \gamma^2 \lambda$ в сравнении с теоретической зависимостью, вычисленной по формуле (33.9) с учетом конечной угловой апертуры детектора. Как следует из рисунка, угловое распределение ПИ в предволновой зоне существенно шире, чем характерный угол излучения γ^{-1} .

Как предлагалось в статьях [06.7, 05.9], использование дополнительных оптических элементов в системе детектирования (в цитируемой работе [06.7] – параболического зеркала, в фокусе которого расположен детектор, в работе [05.9] для этой цели предлагалось использовать фокусирующую линзу) позволяет устранить эффект ближней зоны и полу-

чить угловое распределение (33.12), типичное для дальней зоны, при любом расстоянии между детектором и мишенью.

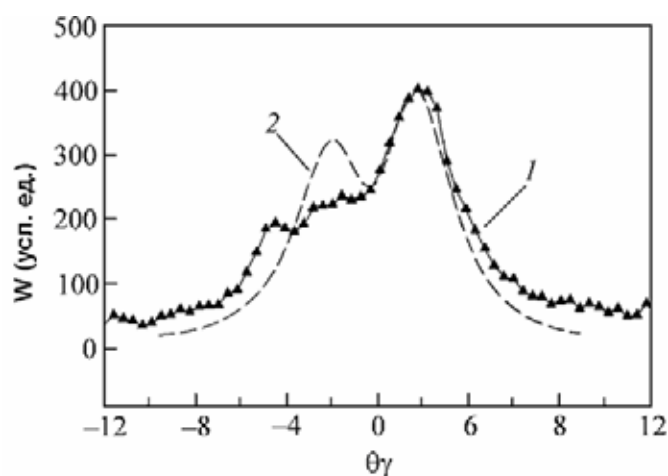


Рис. 33.5. Угловая зависимость интенсивности КПИ в ближней зоне ($a \approx 0,25 \gamma^2 \lambda$): 1 – эксперимент, 2 – расчётная зависимость для условий эксперимента

На рис. 33.6 показаны результаты измерений распределения интенсивности КПИ «назад» при использовании фокусирующего параболического зеркала, расположенного в предволновой зоне, и детектора, размещенного в фокусе зеркала [06.7]. В рассматриваемой геометрии эффект предволновой зоны устраняется практически полностью.

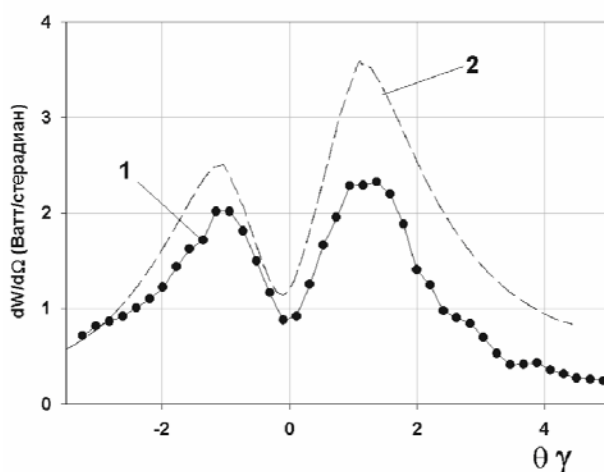


Рис. 33.6. 1 – угловая зависимость мощности КПИ в макро импульсе микротрона в единицу телесного угла, измеренная с использованием параболической оптики, 2 – теоретическая зависимость в приближении дальней зоны

34. Дифракционное излучение в предволновой зоне и возможность его фокусировки

Поле дифракционного излучения «назад», которое генерируется заряженной частицей, пролетающей по центру круглого отверстия радиусом ρ в перпендикулярной, идеально проводящей мишени, записывается в полной аналогии с формулой (33.9):

$$E_D^{ДИ}(r_D, R, \rho_0) = \text{const} \int_{\rho_0}^{\infty} r_T dr_T K_1(r_T) J_1(r_T r_D) \exp\left(i \frac{r_T^2}{4\pi R}\right). \quad (34.1)$$

Здесь через ρ_0 обозначен радиус отверстия в относительных единицах:

$$\rho_0 = \frac{2\pi\rho}{\gamma\lambda}.$$

На рис. 34.1 показано распределение интенсивности ДИ на поверхности детектора для различных значений параметра R при фиксированном радиусе отверстия $\rho_0 = 0,33$. Как и в случае ПИ, распределение «уширяется» с уменьшением параметра R . Следует указать, что интенсивность ДИ с фиксированной длиной волны (так же как и ПИ), которая регистрируется детектором,

$$I(\lambda, \rho_0) = \text{const} \int_{\rho_0}^{\infty} \left| E_D^{ДИ}(r_D, R, \rho_0) \right|^2 r_D dr_D,$$

не зависит от параметра R , т. е. от того, где расположен детектор, в волновой или предволновой зоне, и определяется только радиусом отверстия ρ_0 . Так, например, для рассматриваемого случая $\rho_0 = 0,33$ выход ДИ составляет $\sim 32\%$ от интенсивности ПИ.

Как отмечалось ранее (см. параграф 12), авторы статьи [59.4.] впервые рассмотрели характеристики дифракционного излучения, возникающего при пролёте релятивистской частицы по центру круглого отверстия в бесконечном проводящем экране. В указанной статье рассматривалось ДИ в дальней зоне в зависимости от параметра $x = 2\pi\rho/\beta\gamma\lambda$, т. е. от соотношения между радиусом отверстия ρ и «поперечным» размером поля $\gamma\lambda$.

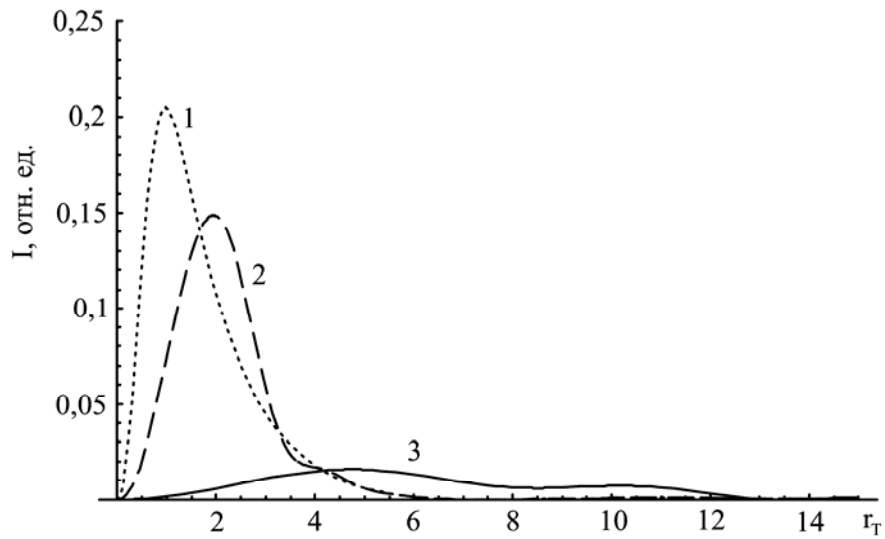


Рис. 34.1. Радиальное распределение интенсивности дифракционного излучения при пролёте заряда через отверстие радиусом $\rho_0 = 0,33$. Кривая 1 – $R = 10/2\pi$; кривая 2 – $R = 1/2\pi$; кривая 3 – $R = 0,1/2\pi$

В ультрарелятивистском случае параметр x совпадает с используемым ранее обозначением радиуса отверстия в относительных единицах $x = \rho_0$ (см. (33.7)). Далее, используя приближение $\sin \theta = \theta$, можно записать спектрально-угловое распределение ДИ, полученное в цитируемой работе в виде (см. также формулу (12.18)):

$$\frac{d^2W}{\hbar d\omega d\Omega} = \frac{2\alpha}{\pi^2} \frac{\theta^2}{(\gamma^{-2} + \theta^2)^2} \left[\rho_0 K_1(\rho_0) J_0(\rho_0 \gamma \theta) \right]^2.$$

В дальней зоне ($R \geq 1$) можно сравнить приведённое распределение с угловым распределением ДИ для поля (34.1). В этом случае, как уже отмечалось, полярный угол заменяется выражением $\theta = r_d/\gamma$. На рис. 34.2,а показаны угловые распределения ДИ, вычисленные по обеим моделям в дальней зоне ($R = 1$) для отверстия с радиусом $\rho_0 = 0,33$. Для дальней зоны можно отметить хорошее согласие между моделями, тогда как для предволновой зоны ($R = 0,1$) (рис. 34.2,б) модель [59.4] уже непригодна.

Сравнивая распределения ПИ и ДИ от азимутально-симметричных мишеней, представленных на рис. 33.3 и 34.1, можно видеть, что наличие отверстия в мишени не приводит к заметным изменениям в форме

распределений при некотором уменьшении регистрируемой интенсивности излучения.

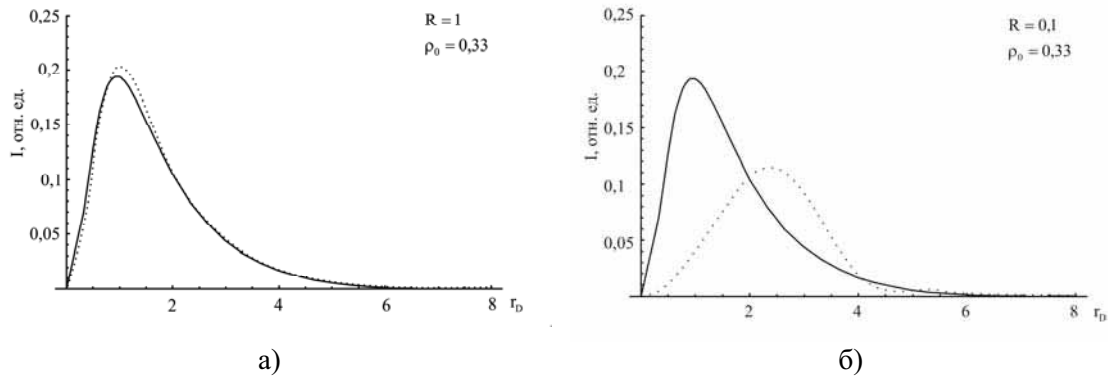
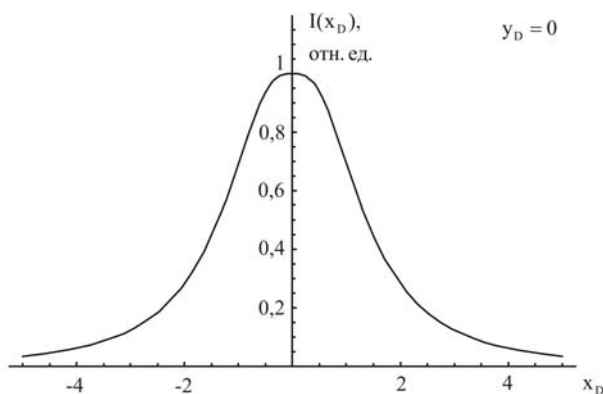


Рис. 34.2. а) Угловое распределение ДИ в дальней зоне ($R = 1$) при пролёте по центру отверстия ($\rho_0 = 0,33$). б) То же самое в предволновой зоне ($R = 0,1$). Сплошная кривая – модель Днестровского–Костомарова [59.4]; точки – расчёт по формуле (34.1)

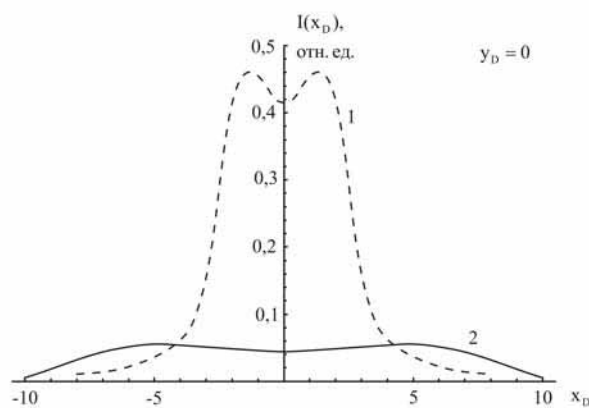
В обоих случаях наблюдается азимутально-симметричное воронкообразное распределение с нулевым минимумом в направлении зеркального отражения. Однако в случае генерации ДИ при перпендикулярном пролёте частицы над полуплоскостью с прицельным параметром h азимутальная симметрия резко нарушается. В волновой зоне, когда источник излучения может рассматриваться как точечный, угловое распределение ДИ, тем не менее, теряет азимутальную симметрию (см. формулу (13.11)):

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{\hbar d\omega d\Omega} &= \frac{\alpha}{4\pi^2} \exp\left(-z\sqrt{1+\gamma^2\theta_x^2}\right) \frac{\gamma^{-2} + 2\theta_x^2}{(\gamma^{-2} + \theta_x^2)(\gamma^{-2} + \theta_x^2 + \theta_y^2)} = \\ &= \frac{\alpha}{4\pi^2} \exp\left(-z\sqrt{1+\gamma^2\theta^2 \cos^2 \varphi}\right) \frac{\gamma^{-2} + 2\theta^2 \cos^2 \varphi}{(\gamma^{-2} + \theta^2 \cos^2 \varphi)(\gamma^{-2} + \theta^2)}. \end{aligned} \quad (34.2)$$

В волновой зоне максимум излучения соответствует направлению зеркального отражения, причем распределение (34.2) является симметричным относительно отражений в вертикальной и горизонтальной плоскости (т. е. не изменяется при замене $\theta_x \rightleftharpoons -\theta_x$, $\theta_y \rightleftharpoons -\theta_y$).



а)



б)

Рис. 34.3. а) Распределение ДИ на поверхности детектора в плоскости, параллельной краю мишени, для прицельного параметра $h = 0,1\gamma\lambda/2\pi$ при $R = 10/2\pi$. б) То же самое для $R = 1/2\pi$ (кривая 1) и $R = 0,1/2\pi$ (кривая 2)

$\theta_y = 0$. Как и в случае ПИ, при уменьшении расстояния между мишенью и детектором (при переходе в предволновую зону) «изображение» углового распределения ДИ в плоскости, параллельной краю полуплоскости, «уширяется» при уменьшении параметра R , оставаясь симметричным относительно $X_D = 0$.

В отличие от распределения ДИ в дальней зоне (см. формулу (34.2)), переход в предволновую зону приводит к радикальной деформации распределения ДИ в плоскости, перпендикулярной краю мишени (распределение по угловой переменной Y_D).

При переходе в предволновую зону остается только «естественная» симметрия относительно замены $\theta_x \rightleftharpoons -\theta_x$ (т. е. при отражении от плоскости, перпендикулярной краю полуплоскости). В предволновой зоне для полубесконечной, идеально проводящей мишени вычисление компонент поля ДИ проводится по формуле (33.6), где интегрирование ведётся по поверхности мишени, край которой смещён относительно траектории электрона на величину прицельного параметра h (т. е. по координате Y_T в пределах $h \leq Y_T \leq \infty$, по координате X_T в пределах $-\infty < X_T < \infty$).

На рис. 34.3,а показано распределение интенсивности ДИ по координате X_D для параметра $R = 10/2\pi$, на рис. 34.6,б — для $R = 1/2\pi$; $R = 0,1/2\pi$. Можно показать, что в первом случае распределение совпадает с точностью, лучшей, чем 1% с угловым распределением ДИ в дальней зоне (34.2) при

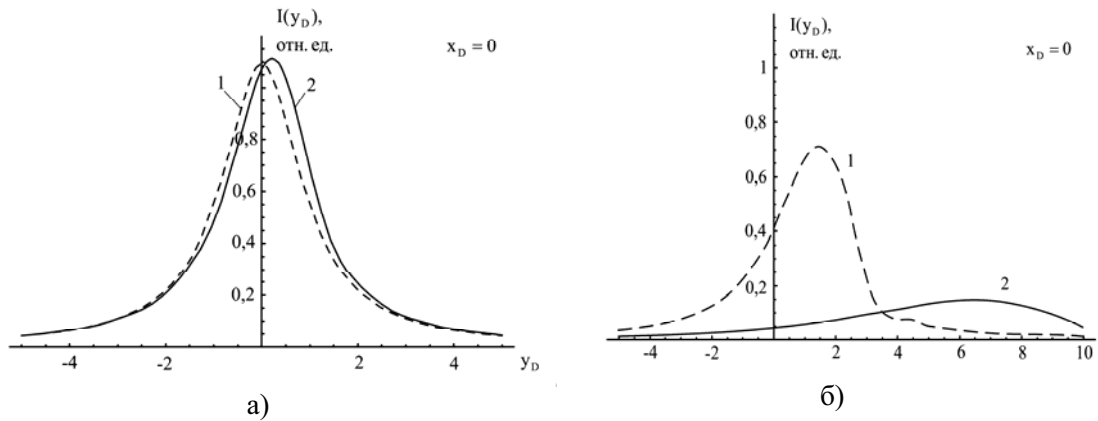


Рис. 34.4 а) Распределение ДИ на поверхности детектора в плоскости, перпендикулярной краю мишени, для прицельного параметра $h = 0,1\gamma\lambda/2\pi$ в дальней зоне (кривая 1) при $R = 10/2\pi$ (кривая 2); б) То же самое для $R = 1/2\pi$ (кривая 1) и $R = 0,1/2\pi$ (кривая 2)

На рис. 34.4,а приведено сравнение «изображение» углового распределения в дальней зоне и для $R = 10/2\pi = 1,6$. Можно отметить асимметрию в распределении, которая увеличивается при уменьшении параметра R (рис. 34.4,б). Максимум в распределении смещается в сторону положительных значений y_T , т. е. в сторону полупространства, в котором размещена дифракционная мишень. Тем не менее, величина прицельного параметра практически не влияет на «изображение» углового распределения ДИ в предволновой зоне.

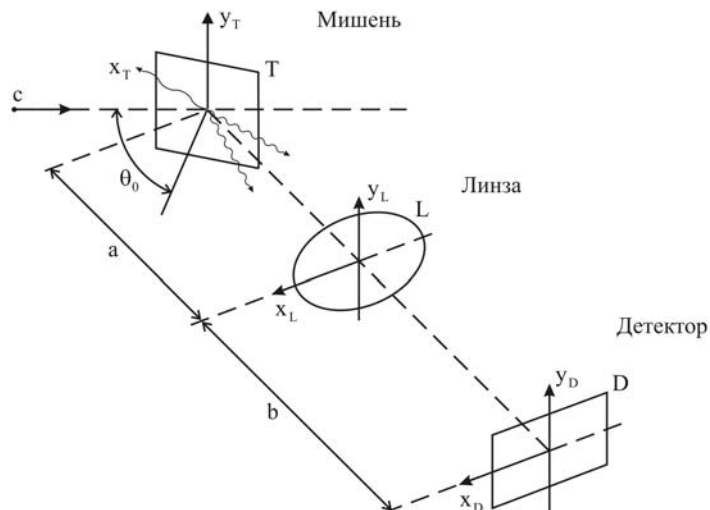


Рис. 34.5. Оптическая схема измерения размеров источника излучения

Принципиально иная информация может быть получена при исследовании формы «светящейся области» на поверхности мишеней, что достигается при помещении детектора в фокус оптической линзы, т. е. при измерении размера источника излучения (см. рис. 34.5).

Вновь начнём рассмотрение особенностей «изображения» источника на детекторе со случая переходного излучения «назад». Для упрощения расчетов будем рассматривать геометрию перпендикулярного пролета частицы через мишень. В реальных случаях угол наклона мишени θ_0 относительно траектории частицы отличается от 90° , однако, как показано в [98.2], угловые характеристики ПИ «назад» ультрарелятивистских частиц в волновой зоне (так же как и характеристики дифракционного излучения назад) определяются относительно направления зеркального отражения и не зависят от угла наклона мишени θ_0 , если выполняется условие $\theta_0 \gg \gamma^{-1}$. Следуя [98.11], запишем выражение для компонент поля ПИ на детекторе, генерируемого ультрарелятивистской частицей в бесконечном идеальном экране, сфокусированных линзой с фокусным расстоянием f :

$$\begin{aligned}
 E_{x,y}^D(\mathbf{R}_D) = & \text{const} \int dR_T \int dR_L \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi_T \\ \sin \varphi_T \end{array} \right\} \times \frac{K_1(k R_T / \beta \gamma)}{\beta \gamma} \times \\
 & \times \exp\left(i \frac{k}{2a} R_T^2\right) \exp\left(i \frac{k}{2a} R_L^2\right) \exp\left(-i \frac{k}{a} R_L R_T \cos(\varphi_T - \varphi_L)\right) \times \\
 & \times \exp\left(-i \frac{k}{2f} R_L^2\right) \exp\left(i \frac{k}{2b} (\vec{R}_L - \vec{R}_D)^2\right). \quad (34.3)
 \end{aligned}$$

Здесь расстояние между мишенью и линзой обозначено b , между линзой и детектором – a , и предполагается выполнение условия $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Индексом L обозначаются координаты на поверхности линзы. Далее будем использовать относительные переменные, определяемые по аналогии с соотношениями (33.7):

$$r_T = \frac{2\pi R_T}{\gamma \lambda}, \quad r_L = \frac{\gamma}{a} R_L, \quad r_D = \frac{2\pi R_D}{\gamma \lambda}. \quad (34.4)$$

Тогда из (34.3) можно получить выражение для радиальной компоненты поля переходного излучения на поверхности детектора для бесконечной границы раздела:

$$E_D(r_D, R) = \text{const} \int_0^\infty r_T dr_T \int_0^{r_m} r_L dr_L K_1(r_T) J_1(r_T r_L) \times \\ \times \exp\left(i \frac{r_T^2}{4\pi R}\right) J_1\left(r_L \frac{r_D}{M}\right). \quad (34.5)$$

Здесь через $M = b/a$ обозначен коэффициент увеличения линзы с радиусом r_m , по апертуре которой ведётся интегрирование. В дальнейшем будем проводить вычисления для случая $a = b = 2f$, т. е. для коэффициента увеличения линзы $M = 1$. В волновой зоне ($R \gg 1$), используя результат (33.10), можно получить более простой интеграл:

$$E_D(r_D, \infty) = \text{const} \int_0^{r_m} r_L dr_L \frac{r_L}{1+r_L^2} J_1(r_L r_D),$$

где $r_m = \frac{\gamma}{a} R_{\text{max}}$ – угловая апертура линзы в углах γ^{-1} .

Полученное выражение с точностью до обозначений совпадает с результатом работы [98.11], основанной на несколько другом подходе. Чтобы получить поле (34.5) на поверхности детектора, необходимо вычислить двукратный интеграл. Следует отметить, что «внутренний» интеграл в этом выражении берется аналитически:

$$G(r_T, r_D, r_m) = \int_0^{r_m} r_L dr_L J(r_T r_L) J_1(r_L r_D) = \\ = \frac{r_m}{r_D^2 - r_T^2} \left\{ r_T J_0(r_m r_T) J_1(r_m r_D) - r_D J_0(r_m r_D) J_1(r_m r_T) \right\}. \quad (34.6)$$

Тогда поле на детекторе вычисляется через интеграл:

$$E_D(r_D, R) = \int r_T dr_T K_1(r_T) G(r_T, r_D, r_m) \exp\left(i \frac{r_T^2}{4\pi R}\right). \quad (34.7)$$

На рис. 34.6 показана нормализованная форма изображения источника переходного излучения на детекторе $|E_D(r, R)|^2$ для $r_m = 50, 100$ в волновой зоне и в предволновой зоне.

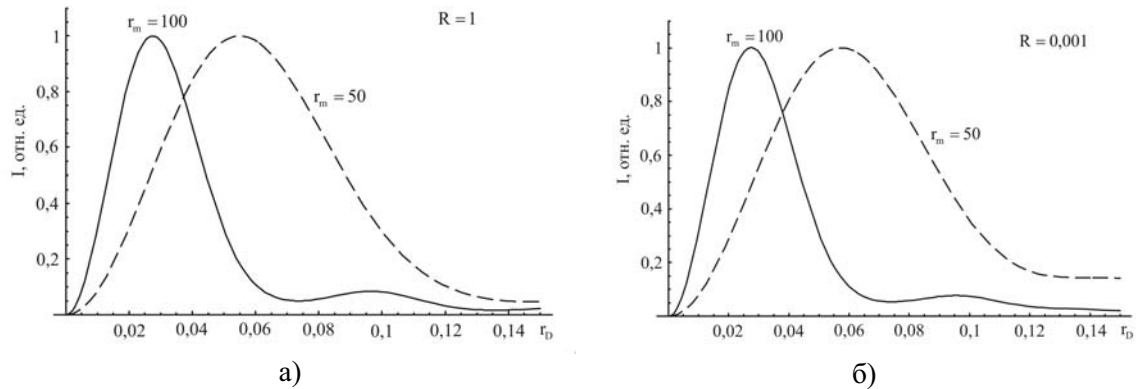


Рис. 34.6. Нормализованная интенсивность изображения источника переходного излучения на плоскости детектора для апертуры линзы $r_m = 100$ (левая кривая) и $r_m = 50$ (правая кривая) в волновой зоне ($R = 1$), рис. 34.9,б – то же самое для предволновой зоны ($R = 0,1$)

Для лоренц-фактора $\gamma = 1000$ указанные значения апертуры линзы соответствуют углам $\theta_m = 0,1$ и $\theta_m = 0,05$ рад. На рис. 34.7 приведены результаты расчёта аналогичных распределений (для $\gamma = 1000$) с использованием выражений, полученных в статье [98.11]. При уменьшении апертуры в два раза радиус r_D^{\max} увеличивается в два раза. Изображения, рассчитанные по формуле (34.7), в «предельно ближней» зоне (для $R = 0,001$), представлены на рисунке 34.6,б. Можно отметить, что нормализованная форма распределения интенсивности переходного излучения на детекторе от параметра R зависит очень слабо, если апертура линзы, выраженная в углах $1/\gamma$, остается неизменной. В реальном случае при изменении расстояния a между линзой и мишенью при неизменных остальных параметрах задачи, меняется не только параметр R , но и апертура линзы r_m при ее фиксированном диаметре.

Результаты, полученные различными методами, совпадают с хорошей точностью. Так, например, для лоренц-фактора $\gamma = 1000$ и апертуры $\theta_m = 0,1$ рад максимум в распределении соответствует радиусу $\rho_L^{\max} = 4,4\lambda$ (см. рис. 34.7). Как видно из рис. 34.6,а (левая кривая), максимуму при $r_m = 100$ соответствует значение безразмерной переменной $r_D = 0,0275$, что для $\gamma = 1000$ соответствует радиусу

$$r_D^{\max} = \frac{1000}{2\pi} \cdot 0,0275 \lambda = 4,38 \lambda.$$

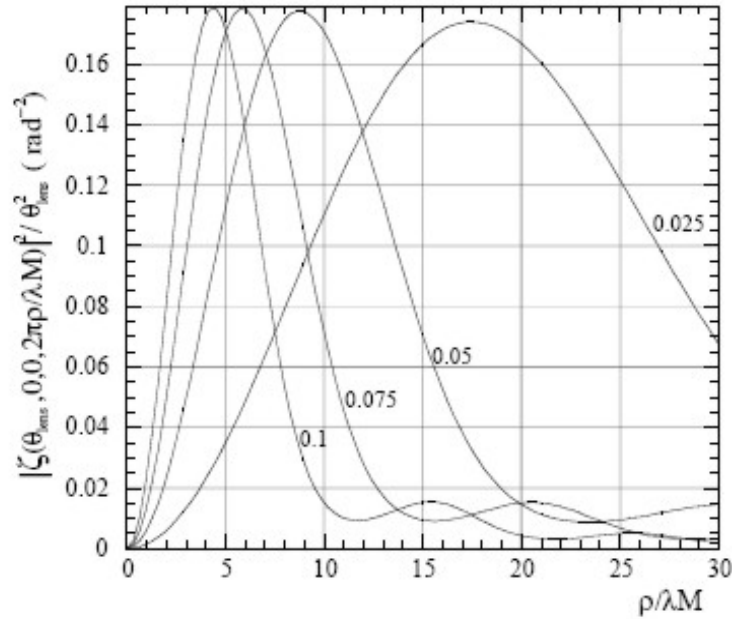


Рис. 34.7. Нормализованная интенсивность изображения источника переходного излучения для $\gamma = 1000$. По оси абсцисс показано значение координаты на плоскости детектора в единицах λM

На рис. 34.8 приведены изображения «пятна» переходного излучения для $R = 0,1$, $r_m = 25$ и $R = 0,01$, $r_m = 250$, что как раз и соответствует фиксированному диаметру линзы при изменении расстояния a в 10 раз. Для удобства сравнения правая кривая увеличена в 100 раз. Как видно из рисунка, эффективный «размер пятна» (разрешение детектора) уменьшается в 10 раз при приближении линзы к мишени (как раз во столько раз увеличивается угловая апертура линзы).

Оценку пространственного разрешения можно получить из графиков на рис. 34.9. Для апертуры линзы $r_m = 100$ максимум в изображении источника переходного излучения соответствует значению $r_0 = 0,0275$, что в размерных единицах равно:

$$R_0 = \frac{\lambda}{2\pi/\gamma r_0} = \frac{\lambda}{228/\gamma} \sim \frac{\lambda \gamma}{2 \cdot 100} = \frac{\lambda}{2\theta_m}.$$

Аналогичная оценка получается для всех остальных случаев.

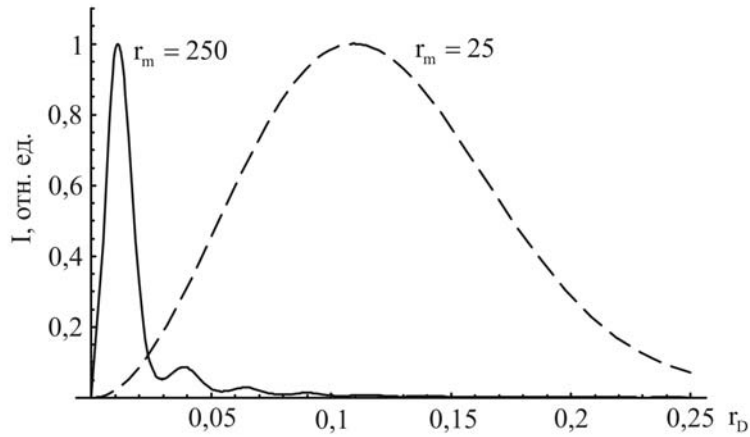


Рис. 34.8. Изображение ПИ источника при фиксированном диаметре линзы для различных расстояний a между мишенью и линзой ($R = 0,01$, $r_m = 250$ – левая кривая; $R = 0,1$, $r_m = 25$ – правая)

Подход, развитый в предыдущем параграфе, позволяет получить «изображение» круглого отверстия радиусом ρ , по центру которого пролетает заряженная частица и генерирует оптическое дифракционное излучение. Поле ДИ на детекторе вычисляется по формуле, аналогичной (34.5), где нулевой нижний предел заменён на радиус отверстия ρ_0 :

$$E_D^{ДИ}(r_D, R, \rho_0) = \int_{\rho_0}^{\infty} r_T dr_T K_1(r_T) G(r_T, r_D, r_m) \exp\left(i \frac{r_T^2}{4\pi R}\right). \quad (34.8)$$

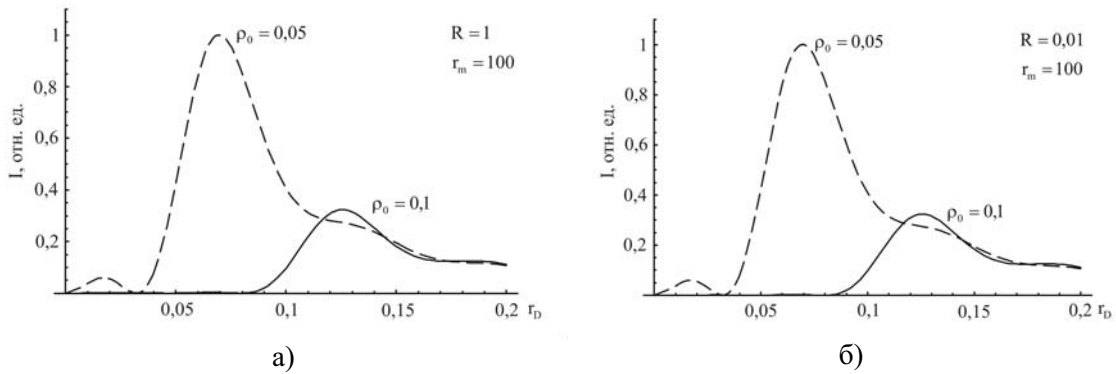


Рис. 34.9. а) Изображение круглого отверстия в волновой зоне ($R = 1$) для апертуры $r_m = 100$ при $\rho_0 = 0,05$ – левая кривая, $\rho_0 = 0,1$ – правая кривая). б) То же самое для предволновой зоны ($R = 0,01$)

На рис. 34.9 *а,б* приведены подобные «изображения» для $\rho_0 = 0,05$ и $\rho_0 = 0,1$ в волновой зоне ($R=1$), в сравнении с аналогичными изображениями в предволновой зоне. Если пространственное разрешение источника ПИ (другими словами, размер изображения ДИ от отверстия с бесконечно малым радиусом) определяется величиной $\lambda/2\theta_m$ (или, в безразмерных величинах, $\Delta r_D \sim 0,0275$ для $r_m = 100$), то следует ожидать, что при $r_0 < \Delta r_D$ изображение пятна ДИ будет практически совпадать с ПИ, тогда как при $r_0 > \Delta r_D$ на детекторе можно получить «изображение» отверстия. Как видно из рисунка, интенсивность излучения на детекторе при $r_D < r_0$ практически отсутствует и достигает максимума при $r_D^m \approx r_0 + \Delta r_D^{DR}$, причем ширина максимума определяется величиной $\Delta r_D^{DR} \approx 0,04$ в обоих случаях.

Этот результат свидетельствует, что, во-первых, линза с достаточно большой апертурой позволяет «компенсировать» эффект «уширения» распределения ПИ и ДИ, связанный с предволновой зоной, во-вторых, получить «изображение» источника ДИ, который в рассматриваемом случае соответствует кольцу с внутренним радиусом, равным радиусу отверстия, и шириной, определяемой величиной $\lambda/2\theta_m$. Другими словами, эффективный размер «светящейся» области определяется апертурой линзы θ_m , но не лоренц-фактором. Физическое истолкование подобного эффекта для случая ПИ можно найти в статье [06.9, 91.8]. При уменьшении апертуры в 2 раза (до $r_m = 50$) ширина распределений увеличивается более чем в 2 раза по сравнению со случаем $r_m = 100$ (рис. 34.10). В этом случае изображение отверстия малого радиуса ($\rho_0 = 0,05$) оказывается достаточно «размытым».

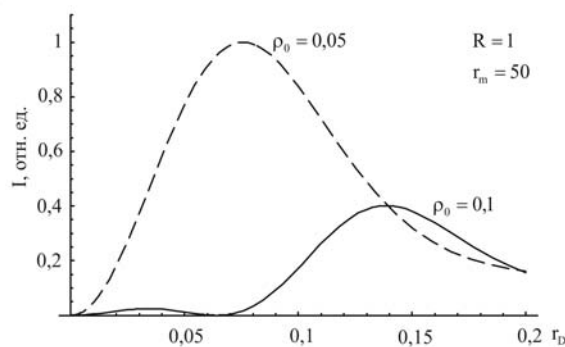


Рис. 34.10. Изображение отверстия в волновой зоне ($R=1$) с «плохим» разрешением ($r_m = 50$)

Используя развитый подход, можно учесть влияние внешних размеров мишени на характеристики ПИ и ДИ. Этот эффект необходимо рассматривать, если внешний диаметр мишени сопоставим с областью возбуждения мишени $\sim \gamma\lambda$.

Для рассмотренной азимутально-симметричной геометрии (т. е. когда мишень в случае ПИ выполнена в виде круга радиусом ρ_{\max} , а в случае ДИ – в виде кольца с тем же самым внешним радиусом) верхний предел в формулах (34.5) и (34.8) заменяется на величину $\rho_m = \frac{2\pi\rho_{\max}}{\gamma\lambda}$.

В волновой зоне ($R \gg 1$) более простым способом является непосредственное использование формулы (34.5), вместо которой можно записать более простое выражение:

$$E^{DR}(r_L) = \int_{\rho_0}^{\rho_m} r_T dr_T K_1(r_T) J_1(r_T r_L) =$$

$$= -\frac{r_T}{1+r_L^2} \left[K_0(r_T) J_1(r_T r_L) + r_L K_1(r_T) J_0(r_T r_L) \right] \Bigg|_{\rho_0}^{\rho_{\max}}. \quad (34.9)$$

Для радиуса отверстия $\rho_0 \ll 1$ с хорошей точностью $\rho_0 K_0(\rho_0) \approx 0$, $\rho_0 K_1(\rho_0) \approx 1$, и, следовательно, при $r_{\max} \rightarrow \infty$,

$$E_{\infty}^{DR}(r_L) \approx \frac{r_L}{1+r_L^2} J_0(\rho_0 r_L). \quad (34.10)$$

Результат (34.10) хорошо согласуется с полученным ранее [00.2]. Однако при нарушении аксиальной симметрии задачи (например, при пролете частицы не по центру мишени) вышеприведенные формулы уже не работают.

Представляет интерес, возможно ли получить информацию о поперечной координате частицы, пролетающей через щель, по «изображению» ДИ от щели, при фокусировке на детектор. В этом случае в исходных формулах необходимо перейти к декартовым координатам, поскольку азимутальная симметрия задачи отсутствует. Как и прежде, индексами T , L , D будем обозначать декартовы координаты на мишени, линзе и детекторе. Безразмерные координаты вводим аналогично (34.4):

$$\left\{ \begin{matrix} x_T \\ y_T \end{matrix} \right\} = \frac{2\pi}{\gamma\lambda} \left\{ \begin{matrix} X_T \\ Y_T \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} x_L \\ y_L \end{matrix} \right\} = \frac{\gamma}{a} \left\{ \begin{matrix} X_L \\ Y_L \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} x_D \\ y_D \end{matrix} \right\} = \frac{2\pi}{\gamma\lambda} \left\{ \begin{matrix} X_D \\ Y_D \end{matrix} \right\}. \quad (34.11)$$

Тогда вычисление компонент поля на детекторе сводится к четырехмерному интегралу по поверхности мишени и по апертуре линзы:

$$\left\{ \begin{matrix} E_x^D(x_D, y_D) \\ E_y^D(x_D, y_D) \end{matrix} \right\} = \text{const} \int dx_T dy_T \int dx_L dy_L \left\{ \begin{matrix} x_T \\ y_T \end{matrix} \right\} \frac{K_1(\sqrt{x_T^2 + y_T^2})}{\sqrt{x_T^2 + y_T^2}} \times \\ \times \exp\left[i \frac{x_T^2 + y_T^2}{4\pi R} \right] \exp[-i(x_T x_L + y_T y_L)] \exp\left[-i \left(x_L \frac{x_D}{M} + y_L \frac{y_D}{M} \right) \right]. \quad (34.12)$$

В (34.12), как и ранее, $R = \frac{a}{\gamma^2 \lambda}$; M – коэффициент увеличения.

Наиболее просто этот интеграл вычисляется для прямоугольной линзы:

$$-x_m \leq x_L \leq x_m; \quad -y_m \leq y_L \leq y_m. \quad (34.13)$$

В этом случае вновь «внутренний» двукратный интеграл (по поверхности линзы) берется аналитически:

$$\int_{-x_m}^{x_m} dx_L \int_{-y_m}^{y_m} dy_L \exp\left[-ix_L \left(x_T + \frac{x_D}{M} \right) \right] \exp\left[-iy_D \left(y_T + \frac{y_D}{M} \right) \right] = \\ = 4 \frac{\sin\left[x_m \left(x_T + \frac{x_D}{M} \right) \right]}{x_T + \frac{x_D}{M}} \times \frac{\sin\left[y_m \left(y_T + \frac{y_D}{M} \right) \right]}{y_T + \frac{y_D}{M}} = \\ = G_x(x_T, x_D, x_m) G_y(y_T, y_D, y_m). \quad (34.14)$$

Далее вновь рассматриваем случай $M = 1$. Тогда выражение (34.12) сводится к двукратному интегралу:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E_x^D(x_D, y_D) \\ E_y^D(x_D, y_D) \end{array} \right\} &= \text{const} \int dx_T dy_T \left\{ \begin{array}{l} x_T \\ y_T \end{array} \right\} \frac{K_1(\sqrt{x_T^2 + y_T^2})}{\sqrt{x_T^2 + y_T^2}} \times \\ &\times \exp\left[i \frac{x_T^2 + y_T^2}{4\pi R}\right] G_x(x_T, x_D, x_m) G_y(y_T, y_D, y_m). \end{aligned} \quad (34.15)$$

При интегрировании выражения (34.15) в пределах

$$-5 \leq x_T, y_T \leq 5,$$

при $R \geq 1$, из (34.15) получаются стандартные изображения компонент поля ПИ (рис. 34.11).

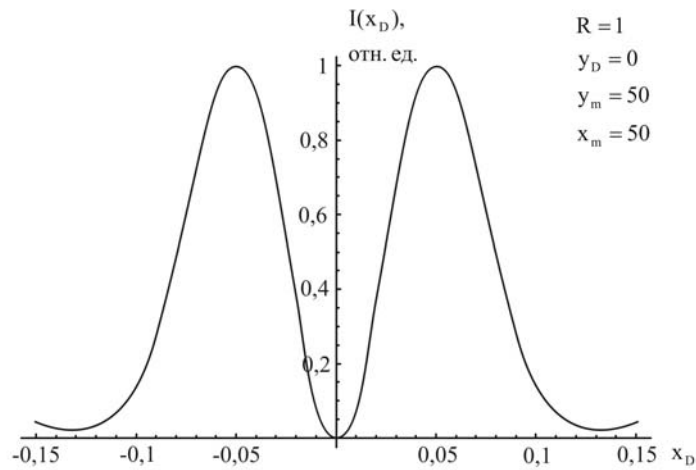


Рис. 34.11. Изображение источника ПИ в волновой зоне при $x_m = y_m = 50$, $y_D = 0$, $R = 1$

На рис. 34.12,а,б показано «изображение» источника ДИ для тех же условий при пролёте частицы над полуплоскостью на расстоянии $H = \frac{0,1}{2\pi} \gamma \lambda$. Как и на рис. 34.2, можно видеть симметричное распределение по координате x_d (рис. 34.12,б), тогда как распределение по координате y_d «несёт» информацию о прицельном параметре. Действительно, по полувысоте правого склона можно найти характерный размер $y_d \approx 0,1$, что как раз и соответствует безразмерному параметру $h = \frac{2\pi}{\gamma \lambda} H = 0,1$.

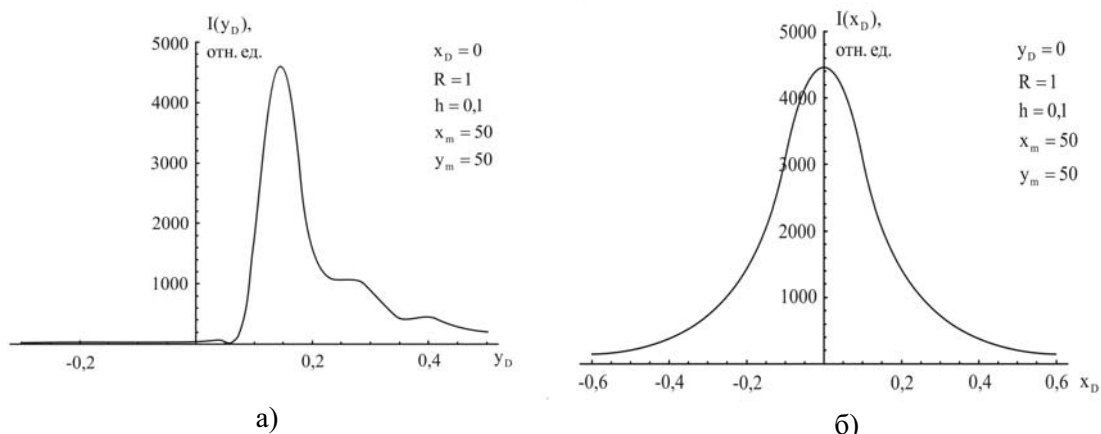


Рис. 34.12. а) Изображение источника ДИ в плоскости, перпендикулярной краю полубесконечной мишени. б) То же самое, в плоскости, параллельной краю мишени

Ясно, что при пролёте по центру щели шириной $2H = \frac{0,2}{2\pi} \gamma\lambda$ в плоскости, перпендикулярной краю щели, будет наблюдаться симметричное «изображение щели» (рис. 34.13,а), причем пространственное разрешение оптической схемы определяется апертурой линзы (кривая 1 – $x_m = y_m = 100$, кривая 2 – $x_m = y_m = 50$).

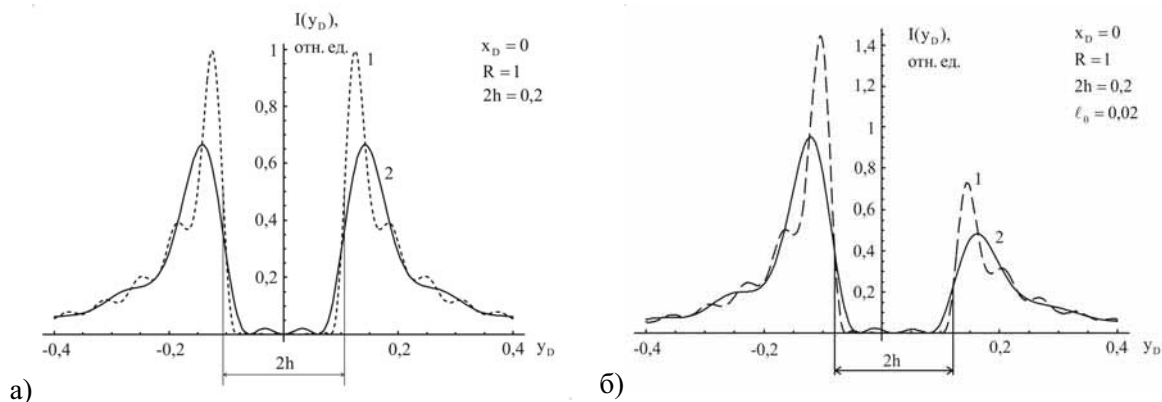


Рис. 34.13. а) Изображение источника ДИ при пролёте заряда по центру щели в бесконечной плоскости. Кривая 1 – $x_m = 100, y_m = 100$; кривая 2 – $x_m = 50, y_m = 50$. б) То же самое при пролёте заряда со смещением относительно центра щели $l_0 = 0,02 \gamma\lambda / 2\pi$

На рис. 34.13,б приведены аналогичные «изображения» для пролёта частицы на расстоянии $l_0 = \frac{0,02}{2\pi} \gamma\lambda$ от центра щели. В этом случае, как и, следовало ожидать, «изображение» ближайшего края щели будет

более ярким. Подобное асимметричное распределение может использоваться для определения смещения пучка ускоренных электронов относительно центра щели. Как следует из рис. 34.13,б при смещении пучка от центра щели примерно на 10 % от ширины щели асимметрия изображения щели может быть легко измерена даже при сравнительно низком разрешении оптической схемы. Так, например, для $\gamma = 2500$, $\lambda = 0,5$ мкм ширина щели $2H = 0,2\gamma\lambda/2\pi$ соответствует значению 40 мк, а смещение $L_0 = 0,02\gamma\lambda/2\pi = 4$ мкм.

В предыдущих параграфах рассматривались характеристики ПИ и ДИ «назад» при перпендикулярном пересечении частицей мишени, что, вообще говоря, является идеализированным случаем. В общем случае, когда частица пролетает вблизи мишени, наклонённой под углом α (рис. 34.14), компоненты поля ДИ вычисляются по формулам, аналогичным (34.6), где фазовые множители записываются в виде:

$$\begin{aligned} \exp\left[ik\left(r + \frac{\Delta Z_T}{\beta}\right)\right] &= \exp\left[i\frac{K}{2a}(X_T^2 + Y_T^2 \cos^2 \alpha)\right] \times \\ &\times \exp\left[-\frac{K}{a}(X_T X_D + Y_T Y_D \cos \alpha)\right] \exp\left[ikY_T \sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]. \end{aligned} \quad (34.16)$$

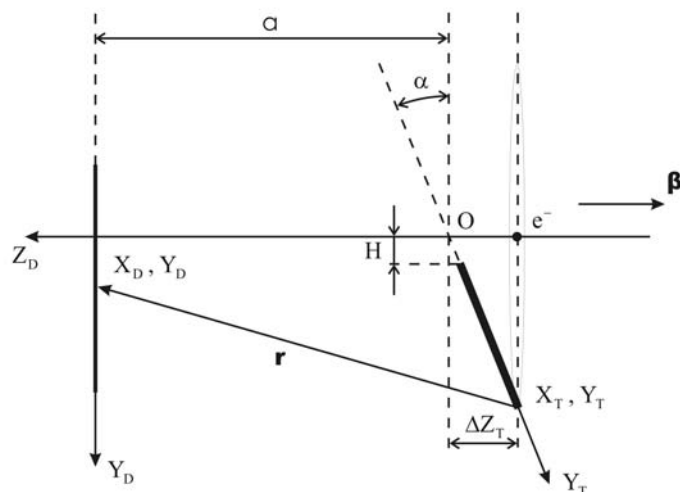


Рис. 34.14. Схема, иллюстрирующая расчёт фазового сдвига

В приведённом выражении появление дополнительного фазового сдвига (рис. 34.14)

$$k \frac{\Delta Z_T}{\beta} = k \frac{Y_T \sin \alpha}{\beta},$$

связано с тем фактом, что практически поперечному полю частицы (источнику виртуальных фотонов) требуется конечное время, которое отсчитывается от точки O , для достижения точки мишени с координатами (X_T, Y_T) , после чего происходит трансформация виртуальных фотонов в реальные и излучение сферической волны. Расчёты удобнее проводить в безразмерных координатах (как и ранее). Отметим, что формула (34.16) получена в том же приближении, что и (34.6).

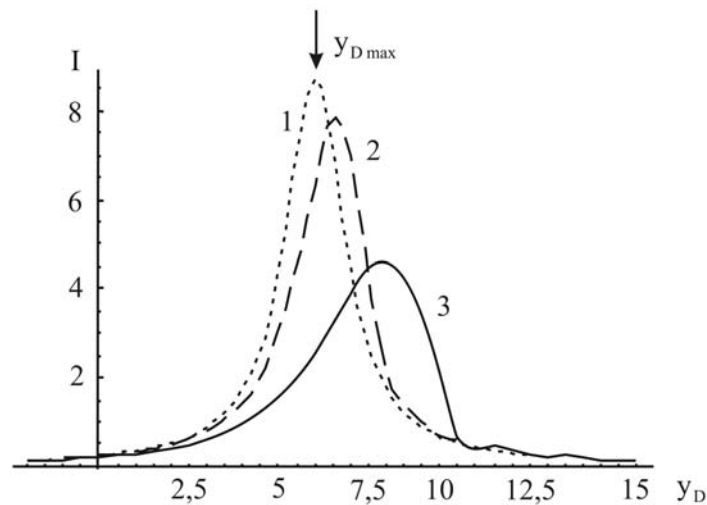


Рис. 34.15. Распределение интенсивности ДИ на поверхности детектора от плоской мишени для различных значений параметра R (нулевой прицельный параметр): 1 – $R = 10$, 2 – $R = 0,5$, 3 – $R = 0,1$ ($\gamma = 1000$, $\lambda = 0,5$ мкм, $\alpha = 3\gamma^{-1}$)

На рис. 34.15 показано распределение интенсивности дифракционного излучения от наклоненной мишени ($\alpha = 3\gamma^{-1}$) на плоскости детектора (при $X_D = 0$) при нулевом прицельном параметре для трех расстояний a между мишенью и детектором. Как и ожидалось, при переходе в волновую зону наблюдается симметричное распределение интенсивности (кривая 1), причем положение максимума соответствует значению $y_{D \max} = 6$, т. е., другими словами, максимум распределения совпадает с направлением зеркального отражения.

В предволновой зоне ($R < 1$) наблюдается асимметричное распределение (кривые 2,3), причем максимум распределения сдвигается в сторону больших углов ($y_{D \max} > 2\gamma\alpha$). При генерации ДИ в мишени с пе-

ременным углом наклона (например, в параболоиде вращения), если детектор расположен в предволновой зоне, подобное поведение «отраженных» фотонов «группирует» их вблизи оси параболоида, т. е. происходит «фокусировка» излучения.

Эффект фокусировки рассмотрим на примере переходного излучения для идеально отражающей мишени, выполненной в виде параболоида вращения, по оси которого движется заряженная частица (в положительном направлении оси Z_T , рис. 34.16). В статье [76.3] подобный эффект рассматривался для ПИ в волновой зоне. Вновь, как ранее, рассматриваем геометрию переходного излучения «назад».

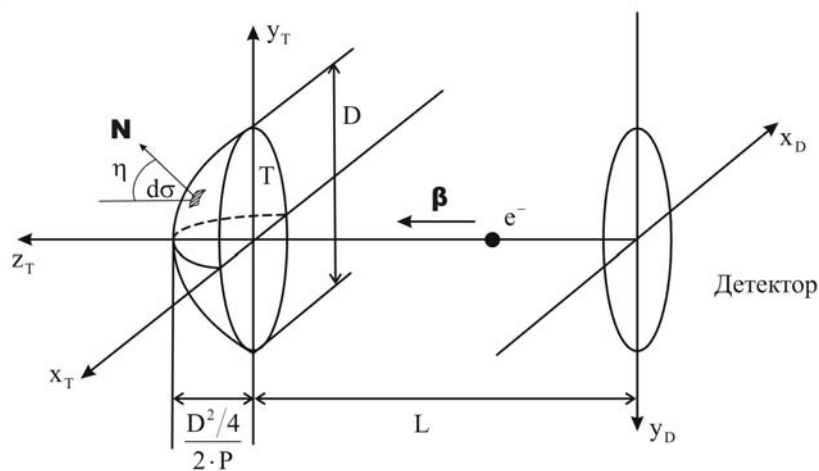


Рис. 34.16. Геометрия фокусирующей мишени. \mathbf{N} – вектор нормали к поверхности $d\sigma$ – элементарная площадка интегрирования

Поверхность такой мишени описывается уравнением: $2PZ_T = D^2/4 - Y_T^2 - X_T^2$, где D – максимальный диаметр мишени, P – фокусное расстояние, L – расстояние от границ мишени до детектора (рис. 34.16).

В силу азимутальной симметрии задачи будем рассматривать «радиальную» компоненту напряженности поля переходного излучения E_r^D . Для параболоидальной мишени с диаметром D радиальная компонента вычисляется следующим образом:

$$E_r^D(\mathbf{R}_D) = \text{const} \int_0^{d/2} r_T dr_T K_1(r_T) \times \\ \times \exp\left[i\gamma\left(\frac{d^2/4 - r_T^2}{2p}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right] \exp\left(i\frac{r_T^2}{4\pi R}\right) \exp(i\pi R r_D^2) J_1(r_T r_D). \quad (34.17)$$

Здесь, как и ранее, используются безразмерные переменные (см. выражения (34.11)):

$$r_T = \frac{2\pi R_T}{\gamma\lambda}, \quad r_D = \frac{\gamma}{L} R_D, \quad d = \frac{2\pi D}{\gamma\lambda}, \quad p = \frac{2\pi P}{\gamma\lambda},$$

где $R_{T,D} = \sqrt{X_{T,D}^2 + Y_{T,D}^2}$. Как и ранее, заглавной буквой обозначается размерная переменная, малой – безразмерная.

При вычислении поля E_r^D от параболической мишени интегрирование ведется по поверхности параболоида, элемент площади которого дается формулой

$$d\sigma = \frac{dX_T dY_T}{|\cos\eta|} = dX_T dY_T \frac{\sqrt{X_T^2 + Y_T^2 + P^2}}{P} = \frac{2\pi\sqrt{R_T^2 + P^2}}{P} R_T dR_T, \quad (34.18)$$

где η – угол между нормалью \mathbf{N} поверхности в точке (X_T, Y_T) и осью Z_T (см. рис. 34.16). При интегрировании по поверхности параболической мишени в интеграле (34.9) надо использовать элемент площади (34.18) после перехода к безразмерным переменным (34.11).

Сравним для начала интенсивность переходного излучения от плоской и изогнутой мишени на детекторе, расположенном в предволновой зоне, если диаметр мишени $D \gg \gamma\lambda$.

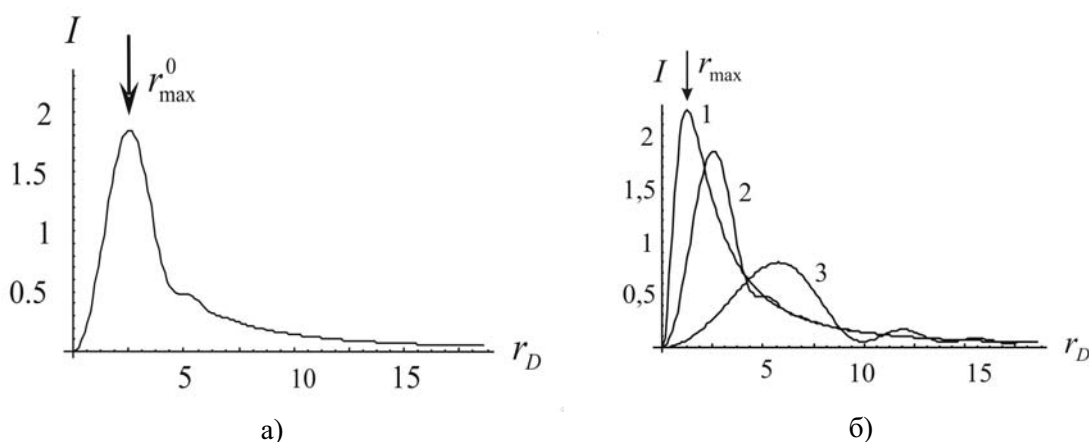


Рис. 34.17. Радиальное распределение интенсивности ПИ при $\gamma = 2500$, $L = 0,5$ м, $\lambda = 0,5$ мкм, $D = 0,1$ м, $R = 0,16$: а) от плоской круглой мишени; б) параболида для различных значений фокусного расстояния ($P = 5000$ – кривая 1, $P = 2500$ – кривая 2, $P = 800$ – кривая 3)

На рис. 34.17,*а* показано распределение интенсивности излучения на детекторе от плоской мишени для $R=0.16$ (т. е. $L=0,16\gamma^2\lambda$) и $d=500$ (или в размерных единицах $D=\frac{\gamma\lambda}{2\pi}d\approx 80\gamma\lambda$), а на рис 34.17,*б* – эволюция распределения излучения от параболоидальной мишени при изменении её фокусного расстояния ($P=2L$ – кривая 1, $P=L$ – кривая 2, $P=0,33L$ – кривая 3).

Как следует из полученных результатов, если детектор расположен на расстоянии $L < P$ – перед фокусом зеркала, то наблюдается фокусировка излучения, если в фокусе – распределения от плоской и параболической мишеней совпадают, тогда как при $L > P$ наблюдается дефокусировка.

Под фокусировкой мы будем понимать сужение конуса излучения от параболоидальной мишени по сравнению с излучением от плоской, т. е. $r_{\max} < r_{\max}^0$ (через r_{\max} , r_{\max}^0 обозначается положение максимума в радиальном распределении интенсивности ПИ от изогнутой и плоской мишеней).

Легко показать численным интегрированием, что полная интенсивность ПИ, генерируемого в мишени релятивистской частицей, не зависит от того, является ли мишень плоской или изогнутой, и определяется лоренц-фактором частицы и диаметром мишени.

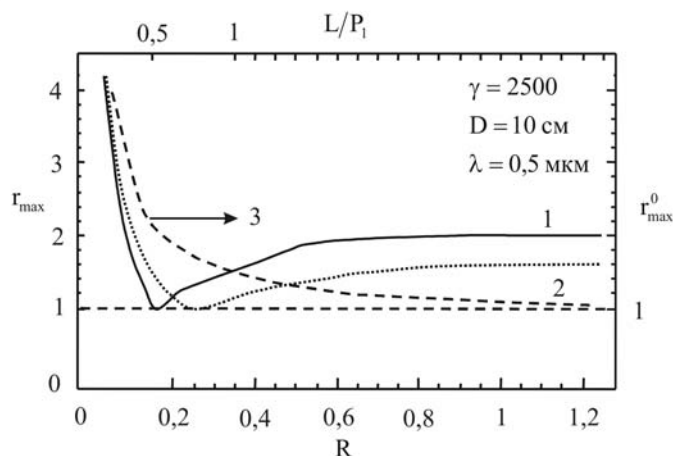


Рис. 34.18. Зависимость положения максимума интенсивности ПИ от параболоидальной мишени на детекторе для различных параметров фокусного расстояния: $P_1 = 0,32\gamma^2\lambda$ (кривая 1), $P_2 = 0,5\gamma^2\lambda$ (кривая 2); для сравнения приведена та же зависимость для плоской мишени (кривая 3) для следующих параметров: $\gamma = 2500$, $\lambda = 0,5$ мкм, $D = 10$ см

На рис. 34.18 показана зависимость величины r_{\max} для параболической мишени при $P = 0,32\gamma^2\lambda$ (кривая 1) и $P = \gamma^2\lambda$ (кривая 2). Можно отметить, что максимальная фокусировка достигается на расстоянии $L = P/2$, тогда как при $L > P$ наблюдается дефокусировка. Далее, минимальное значение величины r_{\max} в точке $L = P/2$ достигает единицы. По аналогии с оптикой следует ожидать, что этот вывод справедлив для мишеней большого диаметра ($D \gg \gamma\lambda$).

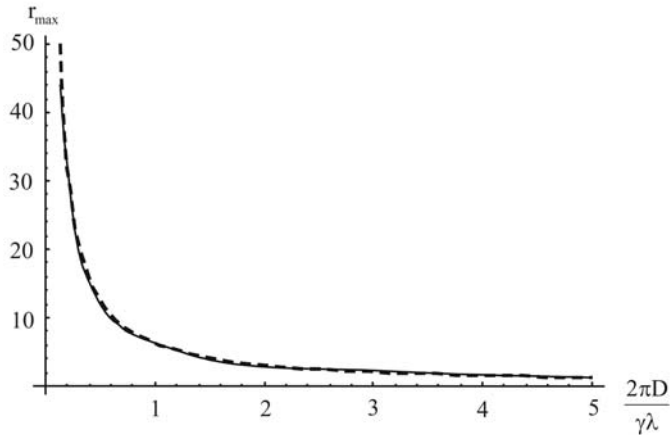


Рис. 34.19. Зависимость радиуса сфокусированного пятна на детекторе от размеров мишени D в распределении ПИ (сплошная кривая); аппроксимация приведена штриховой линией

На рис. 34.19 показана зависимость значения радиуса, соответствующего максимуму r_{\max} распределения переходного излучения от диаметра параболоида. Приведенная зависимость является универсальной, поскольку не зависит от параметра R (вычисления для R в диапазоне от 0,001 до 1 совпадают с точностью лучшей, чем 10^{-3}).

Проводя дальнейшую аналогию с оптикой, где размер «пятна» сфокусированного излучения R_f определяется длиной волны λ и апертурой фокусирующего зеркала $\theta_{\text{ар}} = \frac{D}{2L}$:

$$R_f \sim \frac{\lambda}{\theta_{\text{ар}}} = \frac{2\pi L\lambda}{D},$$

получим аналогичную оценку для источника переходного излучения. В нашем случае, если диаметр мишени-параболоида представить в виде

$$D = k\gamma\lambda, \quad k \leq 1,$$

тогда следует ожидать, что максимум сфокусированного ПИ подчиняется закономерности

$$R_{\max} \approx 2\pi \frac{L}{\gamma k},$$

или, переходя к безразмерным координатам,

$$r_{\max} \approx \frac{2\pi}{k}. \quad (34.19)$$

На рис. 34.19 последняя зависимость показана штриховой линией.

Рассмотрим фокусировку переходного и дифракционного излучения. Для конкретных расчетов выберем параметры, соответствующие к эксперименту [04.5] ($\gamma \sim 200$ и миллиметровый диапазон волн излучения). На рис. 34.20 показаны три кривые, характеризующие радиальное распределение интенсивности переходного излучения на детекторе, расположенном на расстоянии $L = 0,5$ м, для разных длин волн. С увеличением длины волны распределение размывается и интенсивность в максимуме уменьшается, поскольку с увеличением длины волны уменьшается параметр R , и, как следствие – возрастает радиус R_{\max} .

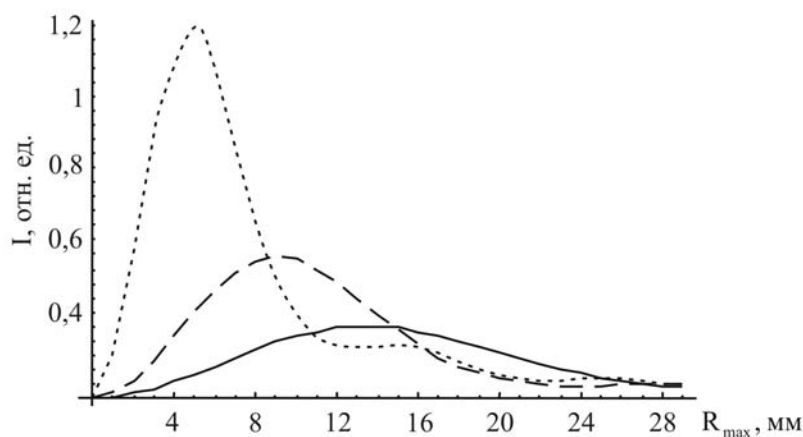


Рис. 34.20. Радиальное распределение интенсивности переходного излучения от параболоидальной мишени для различных длин волн в мм-диапазоне при $\gamma = 250$, $d = 0,1$ м, $P = 1$ м, $L = 0,5$ м (точечная кривая), $\lambda = 1$ мм (штриховая кривая), $\lambda = 2$ мм (сплошная кривая) $\lambda = 3$ мм

Развитый подход позволяет вычислять характеристики дифракционного излучения от параболоидальной мишени с отверстием для про-

хождения электронного пучка ρ . В этом случае нижний предел в интеграле (34.17) будет ρ_0 . Результаты вычислений радиальных распределений переходного и дифракционного излучений для параметров $\gamma = 200$, $L = 0,6$ м, $\lambda = 1$ мм, $P = 1$ м, $D = 0,1$ м и $\rho_0 = 5$ мм (для расчёта ДИ) приведены на рис. 34.21. Как видно из рис. 34.18, в рассматриваемом случае в мм-диапазоне интенсивность ДИ в максимуме всего на 20 % ниже, чем максимальная интенсивность сфокусированного ПИ.

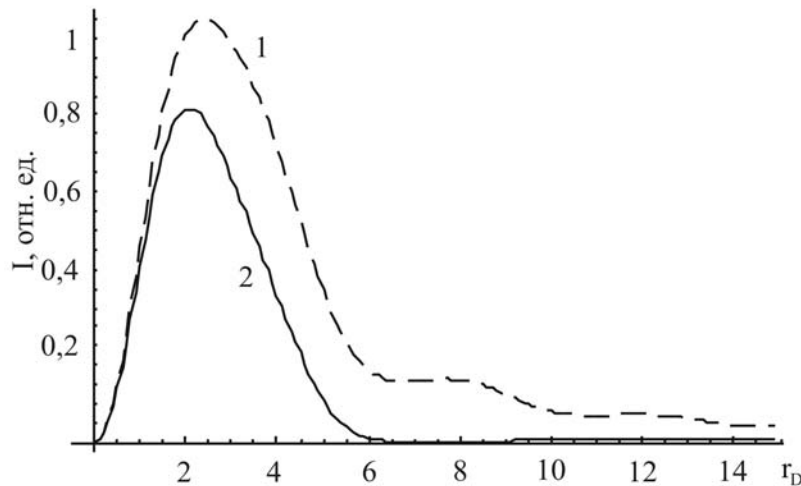


Рис. 34.21. Радиальное распределение интенсивности ПИ и ДИ на детекторе для следующих параметров: $\gamma = 200$, $L = 0,6$, $\lambda = 10^{-3}$ м, $P = 1$ м, $D = 0,1$ м.

1 – кривая от параболической мишени без отверстий; 2 – кривая от параболической мишени с отверстием $\rho_0 = 5$ мм

В заключение отметим следующее. Поле виртуальных фотонов ультрарелятивистской частицы «отражается» от поверхности изогнутой мишени и трансформируется в излучение реальных фотонов в процессе переходного излучения в соответствии с закономерностями обычной оптики, на что указывалось в работе [00.1]. Таким образом, следует ожидать, что использование изогнутых мишеней (в том числе сферических) для генерации переходного и дифракционного излучений позволит получить сфокусированное «пятно» излучения без использования оптических систем. Так, например, для параметров пучка в эксперименте [04.5] параболическая мишень с фокусным расстоянием $P = 600$ мм, внешним диаметром 100 мм и внутренним диаметром 10 мм позволяет получить превышение среднего значения напряженности поля когерентного дифракционного излучения на кристалле с диаметром 10 мм, расположенном на расстоянии 300 мм примерно на порядок выше, чем от плоской мишени тех же размеров. Именно эта

характеристика определяет чувствительность так называемого электрооптического метода. Использование дифракционного излучения, генерируемого в аналогичной мишени, позволит не только увеличить чувствительность метода, но и устранить нежелательное ухудшение параметров пучка после его прохождения через твердотельную мишень.

9. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

35. Результаты экспериментальных исследований дифракционного излучения и сравнение с теоретическими расчётами

Основы теории дифракционного излучения были заложены в 50-х годах прошлого века, но первый эксперимент по исследованию характеристик ДИ, генерируемого релятивистскими электронами, был проведен только в 1995 г. [95.3]. Схема эксперимента приведена на рис. 35.1. Измерения проводились на электронном пучке с энергией $E = 150$ МэВ, сгруппированном в последовательность сгустков длиной около 1 мм и диаметром около 2,5 мм. Заселённость сгустка составляла $1,5 \cdot 10^8 e^-$ /сгусток. В эксперименте измерялись спектр когерентного ДИ в интервале длин волн $\lambda = 0,1 \div 5$ мм и угловое распределение ДИ вперёд и ДИ назад. В качестве мишеней использовались диски с диаметром отверстий $d = 10, 15, 20$ мм, а также сплошная мишень для генерации когерентного ПИ.

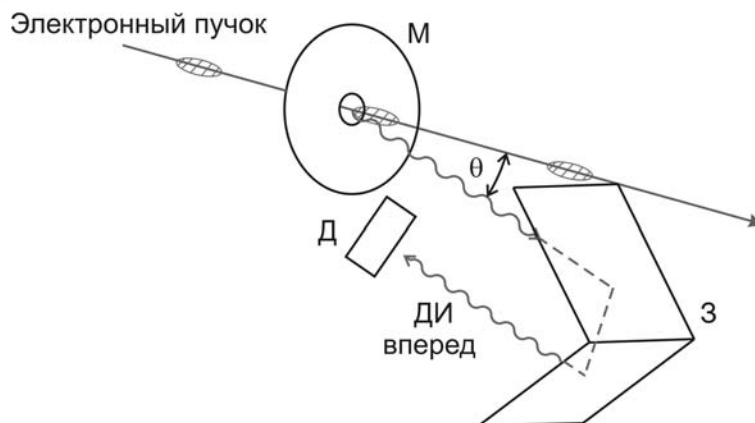


Рис. 35.1. Схема эксперимента по исследованию когерентного ДИ от круглого отверстия в перпендикулярной мишени [95.3]

Одним из основных результатов цитируемой работы, по-видимому, следует считать сравнение характеристик ПИ, ДИ «вперёд» и ДИ «назад», которое подтвердило результаты теоретической работы [59.4] о близком соответствии интенсивности и углового распределения ПИ, ДИ «вперед» и ДИ «назад», если выполняется соотношение $\gamma\lambda \gg d$.

Кроме того, авторы цитируемой статьи впервые продемонстрировали возможность «невозмущающей» диагностики с помощью ДИ, определив длину электронного сгустка по измеренному спектру когерентного ДИ.

Оптическое ДИ (некогерентное) ультрарелятивистских электронов под углом зеркального отражения впервые наблюдалось в эксперименте [98.12]. Схема эксперимента, который проводился на внутреннем пучке Томского синхротрона, приведена на рис. 35.2. Для уменьшения вклада синхротронного излучения измерения проводились для энергии электронов $E = 200$ МэВ. Мишень из полированного алюминия, наклоненная под углом 45° к электронному пучку, устанавливалась в гониометрической головке, вращением которой достигалось совмещение направления зеркального отражения от мишени с фиксированными щелями коллиматора, расположенными перед оптическим детектором (фотоумножителем). Кроме оптического излучения под углом 90° к электронному пучку (которое состояло из отражённого синхротронного излучения, ПИ «назад» и ДИ «назад»), в эксперименте регистрировалось тормозное излучение в направлении прямо-вперёд с помощью сцинтилляционного счетчика 10. На врезке *a* приведено схематически распределение $\rho(R)$ пучка электронов по радиусу R в области мишени. Заштрихованная часть соответствует электронам, которые дают вклад в переходное и тормозное излучения. Диаметр пучка в районе мишени составлял около 2 мм.

В первом приближении интенсивность $I_{ОПИ}$ обратного переходного излучения электронного пучка определяется числом электронов, прошедших через мишень, так же как и интенсивность $I_{ТИ}$ тормозного излучения. В этом случае между тормозным излучением и ОПИ должна существовать строгая пропорциональность.

В предыдущем прямолинейном участке ускорителя устанавливалась толстая мишень-поглотитель (скрепер) 9, которая могла перемещаться в радиальном направлении, «обрезая» некоторую часть электронов, которые могли бы попасть на основную мишень. Тормозной пучок от скрепера поглощался в могильнике 3.

При убранном скрепере все электроны попадают на мишень 7. При этом выход тормозного и переходного излучений будет максимальным. Максимальным будет также и число электронов, проходящих вне мишени вблизи ее края, которое определяет выход дифракционного излучения. При перекрытии скрепером части электронного пучка, в большей степени уменьшается выход тормозного и переходного излучений, то-

гда как выход дифракционного излучения уменьшается не столь быстро.

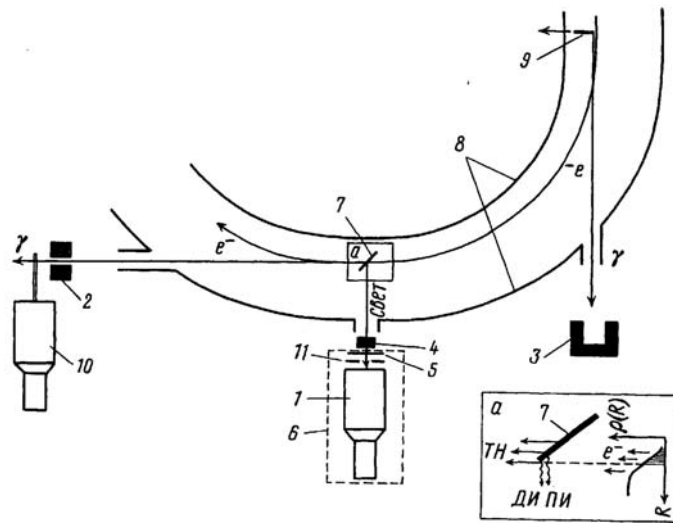


Рис. 35.2. Схема экспериментальной установки: 1 – ФЭУ; 2,11 – коллиматор; 3 – могильник; 4 – зеркало; 5 – светофильтр; 6 – блок детектирования; 7 – мишень; 8 – камера ускорителя; 9 – скрепер; 10 – сцинтилляционный счетчик

Как уже упоминалось, обратное ПИ сосредоточено в узком интервале углов вблизи направления зеркального отражения. На рис. 35.3 приведены ориентационные зависимости оптического излучения при вращении мишени вокруг вертикальной оси при разных положениях скрепера. Ширина ориентационных зависимостей определяется расходимостью электронного пучка, угловой апертурой детектора и собственной расходимостью ПИ и ДИ. Угол $\theta = 0$ на рис. 35.3 соответствует геометрии зеркального отражения. Зависимость 1 измерена при убранном скрепере, когда основной вклад в оптическое излучение даёт ПИ. На врезке показана та же зависимость, выполненная с малым шагом сканирования. Несмотря на достаточно большой вклад синхротронного излучения, на рисунке можно видеть расщепление пика ориентационной зависимости, характерное для ПИ ($\Delta\theta \sim \gamma^{-1} \sim 2$ мрад). Зависимость 2 соответствует положению скрепера 1 мм (см. рис. 35.4). В этом положении большая часть электронного пучка «обрезается» скрепером и не попадает на мишень, следовательно, значительный вклад в исследуемое излучение даёт ДИ. Как показано в главе 4, угловое распределение ДИ обладает максимумом в направлении зеркального отражения, что и наблюдалось в эксперименте. Для подтверждения вклада ДИ были проведены измерения скреперных зависимостей (зависимости выхода излу-

чения от радиального положения скрепера) тормозного и оптического излучений в геометрии зеркального отражения.

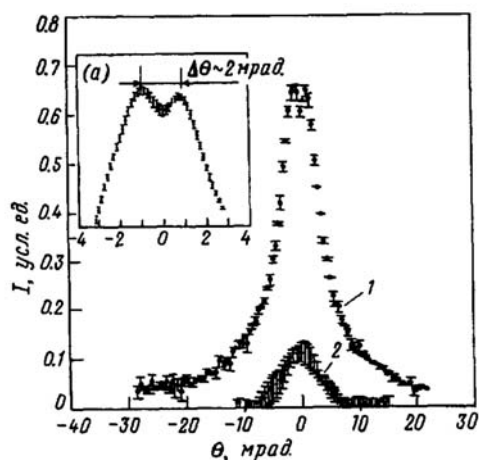


Рис. 35.3. Ориентационные зависимости интенсивности оптического поляризованного излучения (дифракционное плюс переходное назад). 1 – при убранном скрепере; 2 – положение скрепера 2 мм

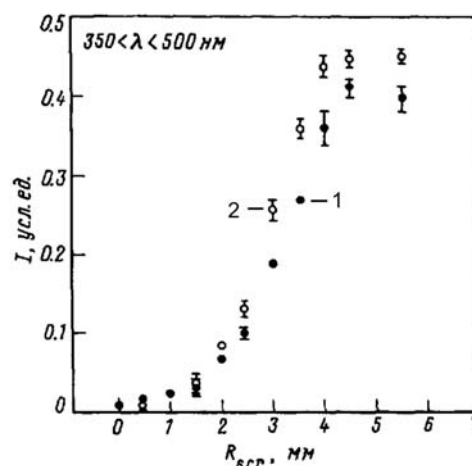


Рис. 35.4. Скреперные зависимости интенсивности выхода тормозного (кривая 1) и оптического поляризованного (кривая 2) излучения

На рис. 35.4 приведена скреперная зависимость, когда перед ФЭУ установлен синий светофильтр с интервалом пропускания $\lambda \approx 350 \div 500$ нм. Если бы ДИ отсутствовало, то зависимости 1 и 2 должны совпадать с точностью до постоянного множителя. Детальное исследование подобных зависимостей, проведённое в [98.12] для различных значений длин волн, показало, что величина сдвига между кривыми 1 и 2 зависит от длины волны. При отсутствии вклада ДИ отсутствуют причины для проявления подобного сдвига. Таким образом, в указанном эксперименте впервые наблюдалось оптическое ДИ в направлении зеркального отражения от наклонной мишени в полной аналогии с ПИ назад.

Количественное сравнение характеристик оптического ДИ и оптического переходного излучения было проведено в эксперименте [01.3, 03.15] на электронном пучке КЕК ATF с энергией 1,28 ГэВ и рекордно низким эмиттансом [02.9], что позволило получить пучок с размерами $\sim 10 \times 100$ мкм в районе мишени. Мишень, представляющую собой кремниевую пластину толщиной 300 мкм с нанесённым алюминиевым

покрытием толщиной 0,5 мкм, можно было перемещать под углом 45° относительно электронного пучка с шагом 0,5 мкм (см. рис. 35.5).

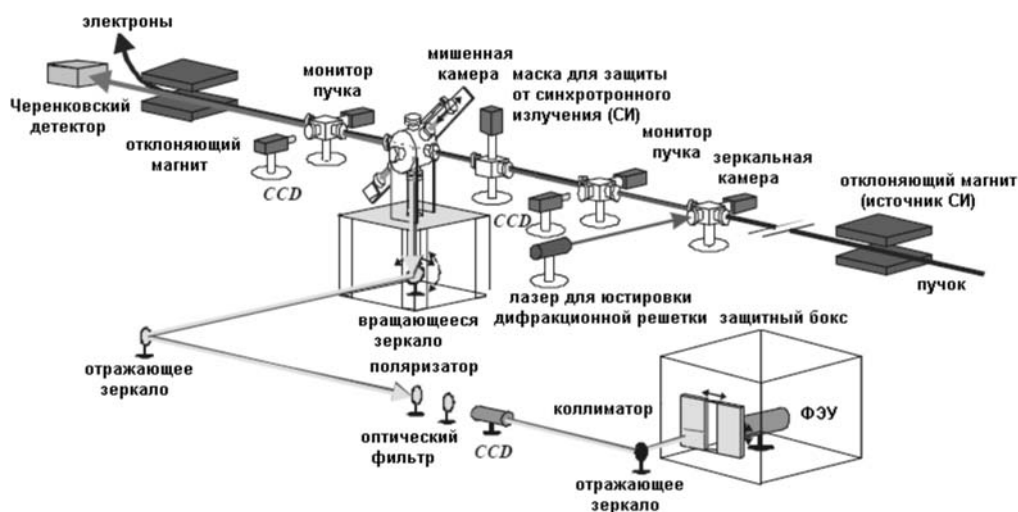


Рис. 35.5. Схема эксперимента по исследованию характеристик оптического ДИ на выведенном электронном пучке ускорителя КЕК ATF

Оптическое излучение, генерируемое через механизмы ПИ (когда пучок пересекает мишень) или ДИ (когда пучок проходит рядом с мишенью), регистрировалось под углом 90° с помощью вращающегося зеркала, неподвижных отражающих зеркал и фотоумножителя (ФЭУ) с расположенным перед ним коллиматором. Вращением зеркала вокруг двух перпендикулярных осей (изменяя углы θ_x, θ_y , см. рис. 13.9) можно было проводить измерения угловых распределений светового потока от мишени.

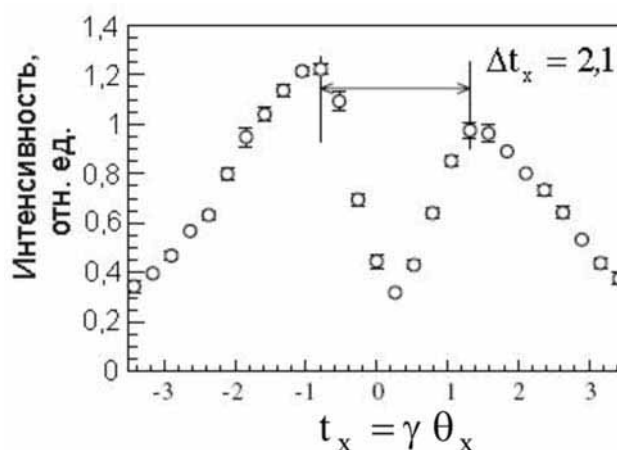


Рис. 35.6. Измеренное угловое распределение оптического переходного излучения

На рис. 35.6 показано угловое распределение излучения в диапазоне длин волн $\lambda = 0,3 \div 0,65$ мкм в случае, когда мишень перекрывает пучок. Как и ожидалось, в этом случае наблюдается оптическое ПИ практически в волновой зоне (расстояние между детектором и мишенью 2,60 м, параметр $\gamma^2 \bar{\lambda} \approx 3,12$ м, $\bar{\lambda} = 0,42$ мкм – усреднённая длина волны), что приводит к небольшому уширению углового распределения ПИ (расстояние между максимумами $\Delta\theta_x = 2,1\gamma^{-1}$ вместо $2,0\gamma^{-1}$). Небольшая асимметрия в распределении ПИ обусловлена, по-видимому, вкладом синхротронного излучения от отклоняющего магнита, расположенного на трассе электронного пучка перед мишенью.

Измерение угловых характеристик ПИ позволило определить направление зеркального отражения от мишени. На следующем этапе измерений проводилось исследование выхода оптического излучения в зависимости от прицельного параметра в направлении зеркального отражения ($t_x = t_y = 0$) в сравнении с выходом тормозного излучения вперёд, который измерялся черенковским детектором с воздушным наполнением (рис. 35.7).

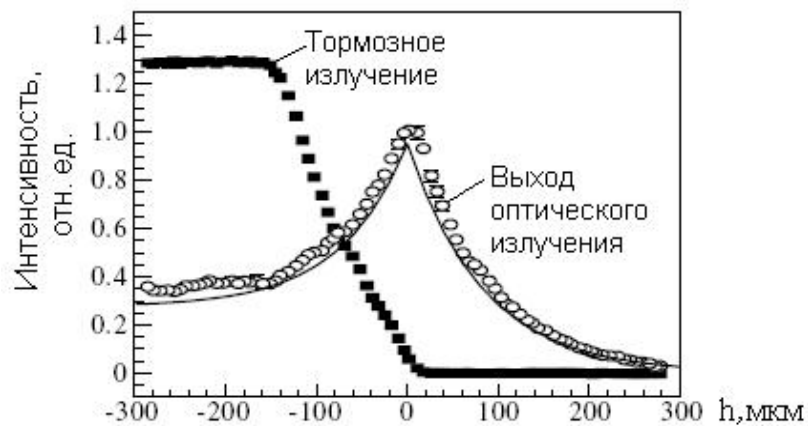


Рис. 35.7. Зависимость выхода тормозного и оптического поляризованного излучения в зависимости от прицельного параметра (сплошная кривая – расчёт с учётом конечного спектрального разрешения и угловой апертуры)

На этом рисунке показано, что выход оптического излучения достигает максимума при движении электронов вдоль мишени с нулевым прицельным параметром (т. е. в точке, где интенсивность тормозного излучения достигает нуля), в полном соответствии с теорией ДИ релятивистских частиц (см. статью [98.2]). Убывание интенсивности ДИ с ростом прицельного параметра описывается выражением (13.11), одна-

ко зависимость выхода ПИ при прохождении частицы вблизи края мишени (пересекая материал мишени) носит более сложный характер.

Простейшая модель, описывающая этот процесс, который может быть назван краевым переходным излучением, иллюстрируется на рис. 35.8 [03.16, 04.6]. Поле краевого переходного излучения в волновой зоне может быть получено по принципу суперпозиции:

$$\mathbf{E}_{кр}^{ПИ} = \mathbf{E}^{ПИ} - \mathbf{E}^{ДИ} e^{i\varphi}, \quad (35.1)$$

где «кр» означает краевое, $\mathbf{E}^{ПИ}$ – поле переходного излучения, $\mathbf{E}^{ДИ}$ – поле дифракционного излучения, компоненты которых даются выражениями (14.7), (14.5) соответственно. Фазовый сдвиг φ определяется по аналогии с формулами (14.4). После вычисления квадрата модулей компонент поля (35.1) в системе координат, описываемых ортами (13.6), имеем:

$$\begin{aligned} |E_{1кр}^{ПИ}|^2 &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \gamma^2 \frac{t_x^2}{(1+t_x^2+t_y^2)^2} \left\{ 4 + \exp(2\kappa) \left(1 + \frac{t_y^2}{1+t_x^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\exp(\kappa)}{\sqrt{1+t_x^2}} \left[\sqrt{1+t_x^2} \cos(\kappa t_y) + t_y \sin(\kappa t_y) \right] \right\}, \\ |E_{2кр}^{ПИ}|^2 &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \gamma^2 \frac{t_x^2}{(1+t_x^2+t_y^2)^2} \left\{ 4t_y^2 + (1+t_x^2+t_y^2) \exp(2\kappa) - 4t_y \exp(+\kappa) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[t_y \cos(\kappa t_y) - \sqrt{1+t_x^2} \sin(\kappa t_y) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (35.2)$$

В выражении (35.2) введена переменная

$$\kappa = \frac{2\pi h}{\gamma\lambda} = -\frac{2\pi|h|}{\gamma\lambda}, \quad (35.3)$$

причём прицельный параметр h берётся отрицательным (рис. 35.8,в), чтобы отличаться от ситуации, когда частица пролетает вблизи края мишени в вакууме (в этом случае прицельный параметр будет положительным, как во всех формулах параграфа 13, описывающих дифракционное излучение).

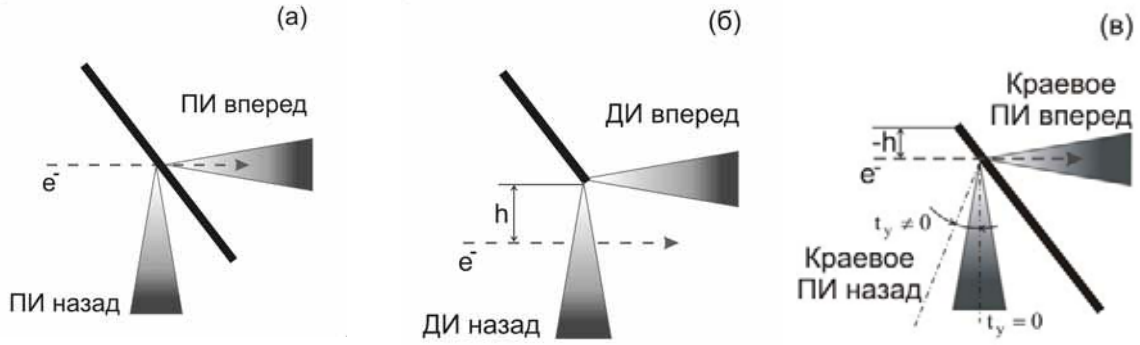


Рис. 35.8. Геометрия ПИ для бесконечной границы раздела (а), ДИ (б) и краевого переходного излучения (в)

Спектрально-угловое распределение излученной энергии находится как

$$\frac{d^2W_{кр}^{ПИ}}{\hbar d\omega d\Omega} = cr^2 \left(|E_{1кр}^{ПИ}|^2 + |E_{2кр}^{ПИ}|^2 \right) \quad (35.4)$$

и может быть определено для любого прицельного параметра:

$$\frac{d^2W}{\hbar d\omega d\Omega} = \begin{cases} \frac{d^2W_{кр}^{ПИ}}{\hbar d\omega d\Omega}, & h \leq 0, \\ \frac{d^2W_{кр}^{ДИ}}{\hbar d\omega d\Omega}, & h \geq 0. \end{cases} \quad (35.5)$$

Нетрудно видеть, что при пролёте частицы по краю мишени (\$h = 0\$), выражение (35.2) приводит к тому же результату, что и формула (13.11), определяющая интенсивность ДИ:

$$\frac{d^2W(h=0)}{\hbar d\omega d\Omega} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \gamma^2 \frac{1 + 2t_x^2}{(1 + t_x^2)(1 + t_x^2 + t_y^2)}. \quad (35.6)$$

На рис. 35.9 показаны расчётные зависимости выхода оптического излучения с длиной волны \$\lambda = 0,5\$ мкм, которое генерируется электроном с лоренц-фактором \$\gamma = 2500\$, при непрерывном изменении прицельного параметра от значений \$-500 \leq h \leq 500\$ мкм (кривая 1 – излуче-

ние строго в направлении зеркального отражения, $\theta_x = \theta_y = 0$; кривая 2 – излучение под углами $\theta_x = 0, \theta_y = \gamma^{-1}$).

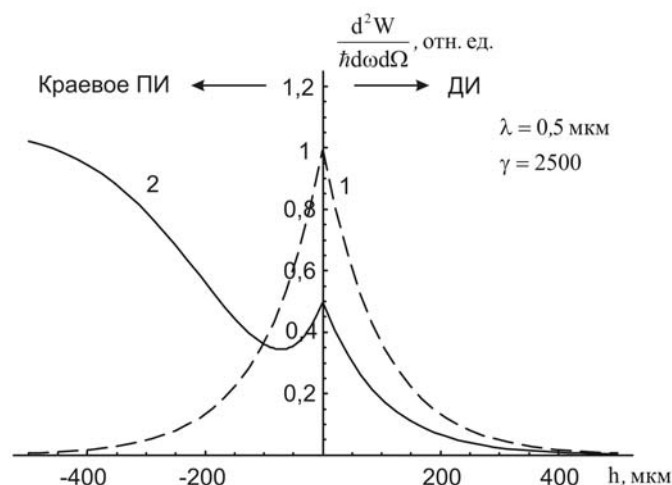


Рис. 35.9. Расчётная зависимость интенсивности оптического излучения в зависимости от прицельного параметра. Кривая 1 соответствует излучению под углом зеркального отражения ($t_x = t_y = 0$); кривая 2 соответствует излучению $t_x = 0, t_y = 1$

Мы используем термин оптическое «поляризационное излучение» для описания оптического дифракционного излучения (при $h > 0$) и оптического поляризационного излучения ($h < 0$). Можно отметить, что выход поляризационного излучения в направлении зеркального отражения (кривая 1) достигает максимума при $h = 0$ и стремится к нулю при $|h| \gg \gamma\lambda$. Подавление выхода дифракционного излучения при $h \gg \gamma\lambda$ является тривиальным следствием формулы (13.11), тогда как стремление к нулю интенсивности краевого ПИ при $t_x = t_y = 0$ и сдвиге траектории частицы внутрь мишени связано с трансформацией углового распределения краевого ПИ в угловое распределение обычного переходного излучения с нулевым минимумом вдоль направления зеркального отражения. Однако, при использовании детектора с конечной угловой апертурой, выражение (35.5) необходимо проинтегрировать по этой апертуре. В эксперименте [03.15] коллиматором устанавливалась апертура $-0,4\gamma^{-1} \leq \theta_x, \theta_y \leq 0,4\gamma^{-1}$ (т. е. $-0,4 \leq t_x, t_y \leq 0,4$).

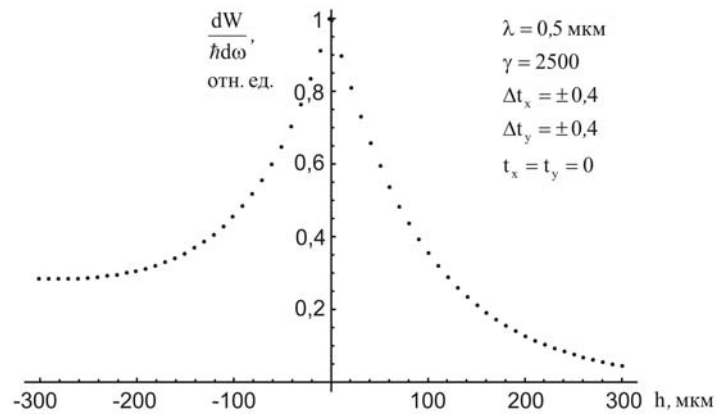


Рис. 35.10. Выход оптического излучения для конечной апертуры детектора $\gamma^2 \Delta \Omega = \Delta t_x \Delta t_y$ в зависимости от прицельного параметра

На рис. 35.10 приведены результаты расчёта для указанного телесного угла. Можно отметить, что в этом случае соотношение выхода краевого ПИ в точке $h = -0,3$ мм к максимуму составляет величину 0,28, что хорошо согласуется с экспериментальными данными (см. рис. 35.7).

Сравнение аналогичных расчётов (с учётом конечного спектрального разрешения $0,35 \leq \lambda \leq 0,6$ мкм) с результатами измерений для углов $t_x = 1$; $t_y = 0$ приведено на рис. 35.11.

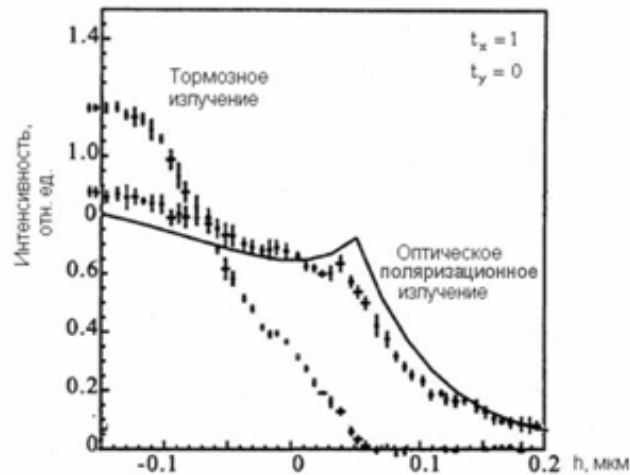


Рис. 35.11. Зависимость выхода оптического поляризационного излучения под углами $t_x = 1$, $t_y = 0$ для конечной апертуры $-0,4 \leq t_x, t_y \leq 0,4$ в зависимости от прицельного параметра для тех же параметров, что и на рис. 35.10. Сплошная кривая – расчёт предложенной модели

Как и ранее, оптическое поляризационное излучение при $h < 0$ является краевым переходным излучением, при $h > 0$ – дифракционным излучением. Можно констатировать, что используемый подход для расчёта характеристик ДИ хорошо согласуется с экспериментом. Этот факт демонстрирует работоспособность применяемой теории ДИ в волновой зоне и подтверждает возможность использования оптического ДИ для невозможной диагностики низкоэмиттансных интенсивных пучков заряженных частиц, что представляется весьма важным для создания ускорителей нового поколения, например таких, как лазеры на свободных электронах.

36. Оптическое дифракционное излучение от щелевой мишени и возможность измерения поперечного размера электронного пучка

Исследование возможности создания монитора поперечных размеров пучка на основе оптического дифракционного излучения было проведено на пучке электронов КЕК ATF в эксперименте [04.7] с помощью установки, описанной в предыдущем параграфе. В качестве мишени использовалась алюминизированная пластина кремния со щелью шириной 0,26 мм (рис. 36.1, врезка внизу) [05.10]. Для изменения прицельного параметра мишень передвигалась под углом 45° относительно электронного пучка.

На рис. 36.1 чёрными точками представлена зависимость выхода тормозного излучения в направлении прямо-вперёд. Из-за несимметричного перемещения мишени относительно электронного пучка выход тормозного излучения меняется различным образом при пересечении пучком противоположных краёв мишени. Резкий спад выхода тормозного излучения в точке с прицельным параметром $h \approx -0,1$ мм соответствует прохождению пучка в окрестности точки *A* (см. врезку), а медленное возрастание при $h \approx -0,09$ – точке *B*.

На этом же рисунке показана зависимость выхода оптического ДИ, которое, как и ранее, регистрировалось детектором с конечной угловой апертурой. Как следует из рисунка, выход оптического ДИ достигает минимума при прохождении пучка по центру щели, как и ожидалось из теории (см. рис. 14.4). Как следует из формулы (14.10) для электронного пучка с бесконечно малыми продольными размерами, пролетающего по центру щели ($\ell = 0$) в направлении зеркального отражения ($t_x = t_y = 0$), интенсивность ДИ точно равна нулю.

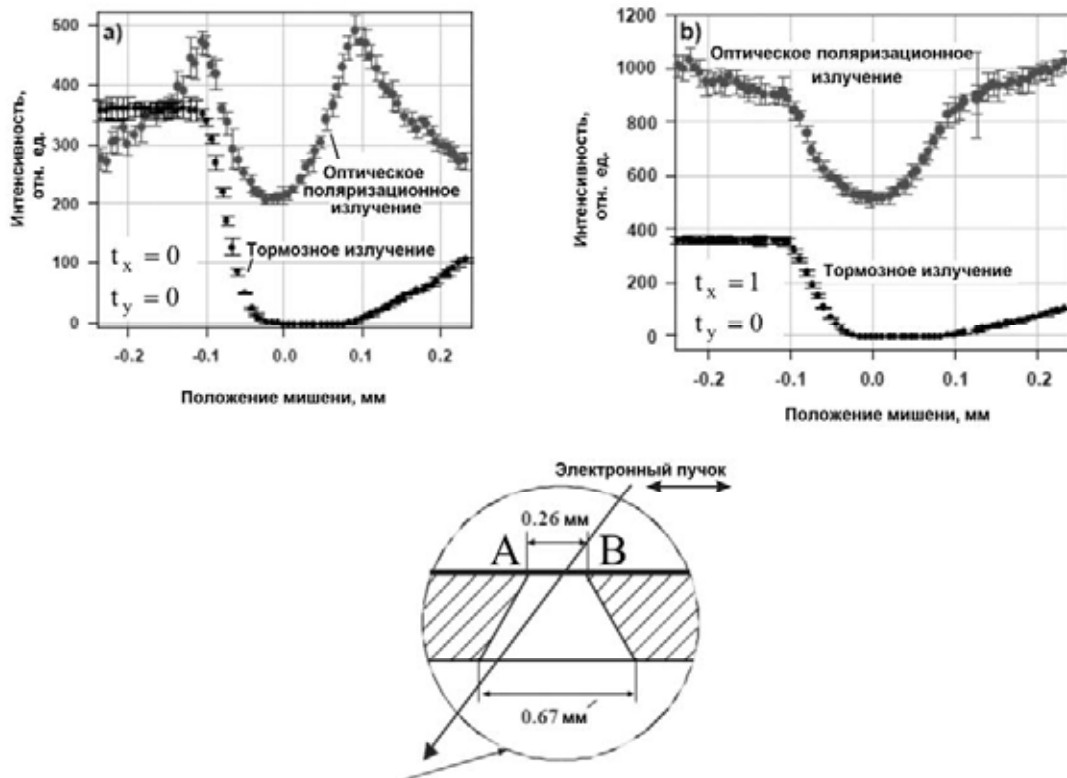


Рис. 36.1. Зависимость выхода тормозного излучения и оптического дифракционного излучения под различными углами в зависимости от прицельного параметра при пролёте электронов через щель (см. врезку)

Однако, как уже отмечалось, при движении электрона под некоторым ненулевым прицельным параметром, интенсивность ДИ отличается от нуля, что позволяет использовать оптическое ДИ на щели для измерения поперечного размера пучка (напомним, что в случае пролета частиц через щель прицельным параметром называется величина отклонения траектории от центра щели, а не от края мишени).

Рассмотрим простейший пример, когда распределение электронного пучка в плоскости, перпендикулярной щели, описывается гауссовым распределением

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}\right\}. \quad (36.1)$$

Переходя от размерной координаты y к безразмерному параметру ℓ (см. формулу (14.9)), можно получить распределение

$$f(\ell) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\ell^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где используется безразмерный параметр $\sigma = \sigma_0/a \sin \theta_0$, характеризующий размер пучка в безразмерных переменных (a – ширина щели, θ_0 – угол наклона).

В приближении

$$\sigma \ll 1$$

можно провести усреднение выхода ДИ по поперечному размеру пучка для любых углов наблюдения при пролёте пучка частиц по центру щели:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{W}}{\hbar d\omega d\Omega} &= \frac{\alpha\gamma^2}{2\pi^2} \frac{\exp\left(-z\sqrt{1+t_x^2}\right)}{(1+t_x^2)(1+t_x^2+t_y^2)} \times \\ &\times \left\{ (1+2t_x^2) \exp\left[2\sigma^2 z^2 (1+t_x^2)\right] - \cos(zt_y + \chi) \right\}. \end{aligned} \quad (36.2)$$

Здесь используется переменная $z = \frac{2\pi a \sin \theta_0}{\gamma\lambda}$, а также параметр

$$\chi = \arccos\left(\frac{1+t_x^2-t_y^2}{1+t_x^2+t_y^2}\right).$$

Сравнивая формулу (36.2) с выражением (14.10), в которое она переходит при $\sigma \rightarrow 0$, следует указать, что при $t_x = t_y = 0$ из (36.2), как и ранее, получаем минимум, однако не равный нулю:

$$\frac{d^2\bar{W}_{\min}}{\hbar d\omega d\Omega} = \frac{\alpha\gamma^2}{2\pi^2} \left(\exp(2\sigma^2 z^2) - 1 \right) \exp(-z). \quad (36.3)$$

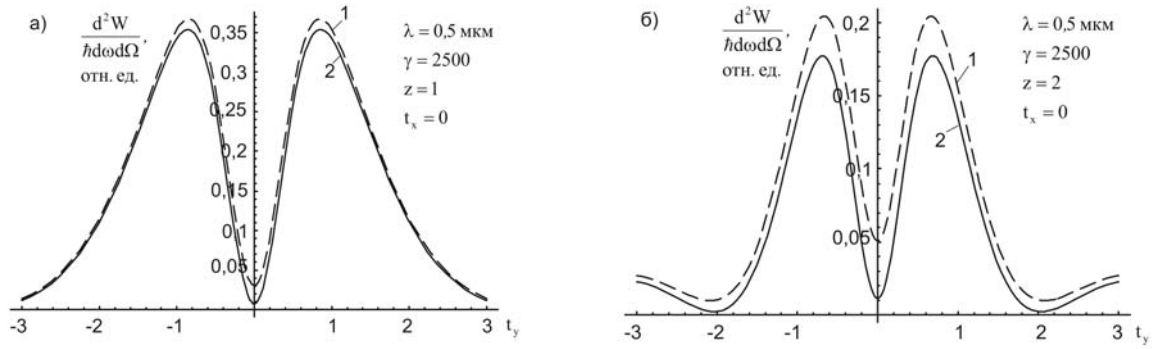


Рис. 36.2. Угловое распределение ДИ в плоскости, перпендикулярной щели, для щели шириной $a \sin \theta_0 = 0,2$ мм (а) и $a \sin \theta_0 = 0,4$ мм (б). На обоих рисунках кривая 1 соответствует параметру $\sigma = 0,1$, кривая 2 – $\sigma = 0,2$

Легко увидеть (рис. (36.2)), что максимального значения выражение (36.2) достигает при $t_y^{\max} \approx \pm 1$, т. е. когда выражение в фигурных скобках в формуле (36.2) достигает максимума ($\cos(zt_y + \chi) \rightarrow -1$):

$$\frac{d^2 \bar{W}_{\max}}{\hbar d \omega d \Omega} = \frac{\alpha \gamma^2}{2\pi^2} \frac{\exp(-z)}{\left[1 + (t_y^{\max})^2\right]} \left\{ \exp(2\sigma^2 z^2) + 1 \right\}. \quad (36.4)$$

Измеряя в эксперименте отношение минимального и максимального выхода ДИ

$$R = \frac{d^2 \bar{W}_{\min} / \hbar d \omega d \Omega}{d^2 \bar{W}_{\max} / \hbar d \omega d \Omega}, \quad (36.5)$$

в принципе, можно определить параметр σ , характеризующий поперечный размер пучка:

$$\sigma = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{1}{2} \ln \frac{1 + R_1}{1 - R_1}}, \quad (36.6)$$

где $R_1 = R / \left[1 + (t_y^{\max})^2\right]$. Переходя к размерным величинам из (36.6), получаем дисперсию поперечного распределения пучка:

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 a^2 \sin^2 \theta_0. \quad (36.7)$$

Заметим, что полученному таким образом результату можно доверять, если выполняется неравенство $\sigma \ll 1$. При $\sigma \geq 1$ формулы (36.2)-(36.4) неверны, и требуется развитие теории, предполагающее усреднение выхода дифракционного излучения при произвольных σ . Впрочем, при известном размере пучка всегда можно подобрать такую щель, для которой $\sigma \ll 1$.

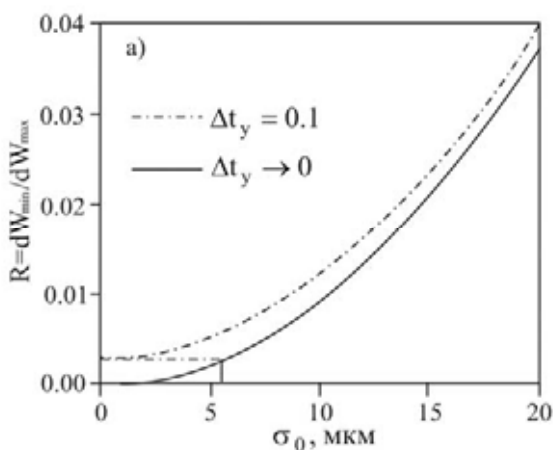


Рис. 36.3. Зависимость отношения R от поперечного размера пучка (сплошная кривая – идеальный случай, штриховая – усреднение по апертуре $\Delta t_y = 0,1/\gamma$)

На рис. 36.3 приведены теоретические расчеты для отношения R (36.5) в зависимости от размера пучка σ_0 без учета угловой апертуры детектора (нижняя кривая) и для угловой апертуры $\Delta\theta_y = 0,1/\gamma$ (верхняя).

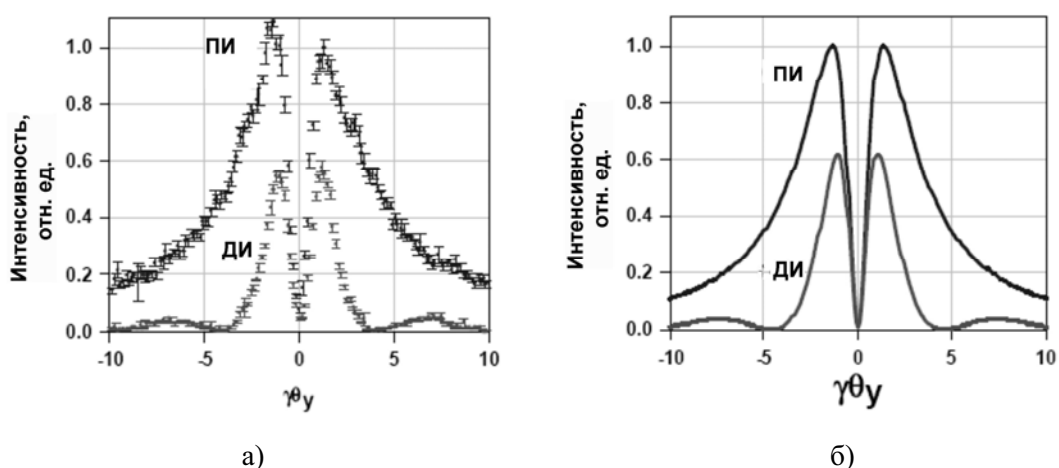


Рис. 36.4. а – результаты измерений угловых распределений переходного и дифракционного излучений (при нормировке на максимум переходного излучения); б – соответствующие теоретические кривые

На рис. 36.4 сравниваются экспериментальные и расчётные характеристики компонент интенсивности ДИ и ПИ, поляризованных в вертикальной плоскости [04.8].

Использование поляризатора в спектрометрическом тракте в эксперименте [04.7] позволило эффективно «обрезать» фоновый вклад синхротронного излучения, которое поляризовано в горизонтальной плоскости (рис. 36.4). Кроме поляризатора использовался оптический фильтр с областью пропускания $\lambda = 0,55 \pm 0,02$ мкм. Хорошее совпадение эксперимента и теории доказывает, что фоновые процессы (в основном синхротронное излучение) практически полностью подавлены, а угловое разрешение используемой аппаратуры позволяет проводить измерения отношения R (36.5) с достаточной точностью.

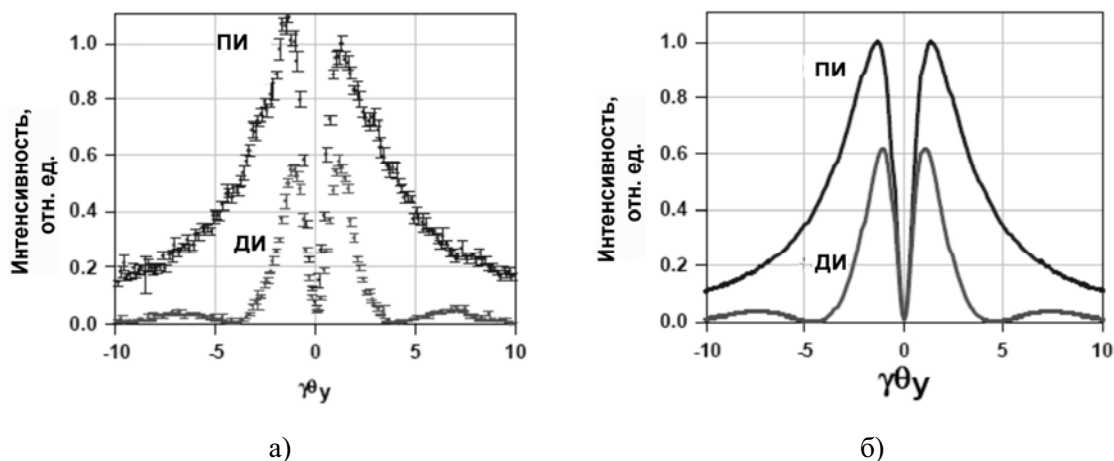


Рис. 36.4. а – результаты измерений угловых распределений переходного и дифракционного излучений (при нормировке на максимум переходного излучения); б – соответствующие теоретические кривые

На рис. 36.5 показаны результаты измерения поперечного размера выведенного электронного пучка ускорителя КЕК ATF с помощью описанного выше невозмущающего метода, основанного на использовании оптического дифракционного излучения (чёрные точки). Здесь же приведены результаты измерения поперечных размеров пучка с помощью двух «возмущающих» мониторов, в которых тонкая вольфрамовая проволока пересекала электронный пучок.

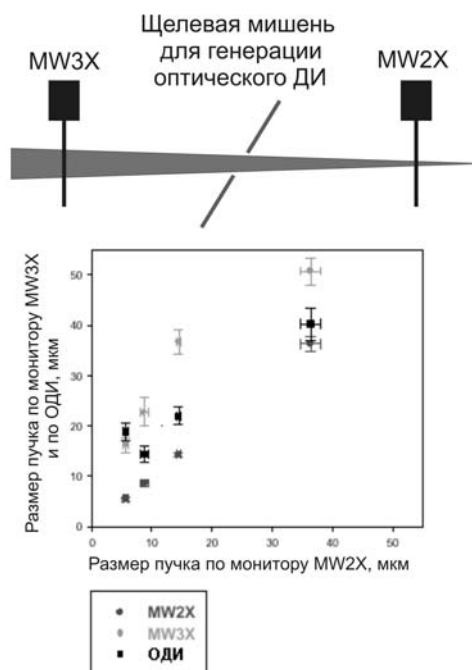


Рис. 36.5. Схема измерения вертикального размера выведенного пучка КЕК ATF по оптическому ДИ и полученные результаты в сравнении с измерениями с помощью проволочных мониторов

На рис. 36.5 (вверху) схематически показано расположение этих мониторов, первый из которых, расположенный до дифракционной мишени, измеряет размер электронного пучка с меньшим «радиусом», тогда как для второго монитора реализуется противоположная ситуация. Результаты измерений демонстрируют, что пространственное разрешение предложенного невозмущающего метода на основе дифракционного излучения составляет величину ~ 15 мкм.

37. Экспериментальные исследования генерации излучения Смита–Парселла пучками ультрарелятивистских электронов

С момента обнаружения эффекта Смита–Парселла в 1953 г. было проведено множество экспериментальных исследований характеристик излучения на пучках электронов нерелятивистских энергий в интервале длин волн от сантиметрового диапазона до оптического. Этот интерес связан с возможностью использования эффекта Смита–Парселла, во-первых, для создания интенсивных компактных источников СВЧ излучения [88.1], и, во-вторых, для разработки новых источников излучения

с регулируемой длиной волны в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах [98.7].

Первые эксперименты по генерации излучения Смита–Парселла релятивистскими электронами были проведены в начале 90-х годов прошлого столетия [92.3, 95.4]. Эксперимент [92.3] проводился на пучке электронов с током $50 \div 200$ мА и энергией $E = 3,6$ МэВ с размерами $\sigma_y \sim 3$ мм в направлении, перпендикулярном решётке. Импульс-параметр h был сравним с величиной σ_y .

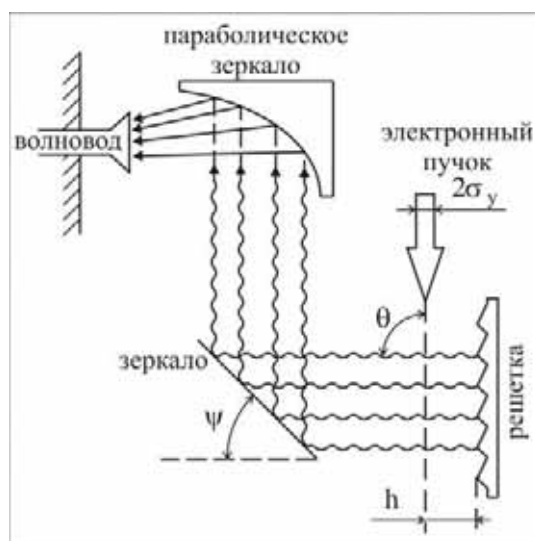


Рис. 37.1. Типичная схема эксперимента по исследованию излучения Смита–Парселла. При изменении угла наклона зеркала ψ изменяется угол наблюдения ИСП θ . Прицельный параметр обозначен величиной через h , поперечное сечение пучка характеризуется величиной $2\sigma_y$ (в направлении, перпендикулярном решётке)

В эксперименте использовалась решётка с треугольным профилем и шагом 769 мкм. Спектр излучения измерялся с помощью монохроматора и болометра с гелиевым охлаждением (рис. 37.1). Чувствительность болометра составляла около 10 нВт в диапазоне длин волн $400 \div 2500$ мкм. Изменением угла наклона ψ отражающего плоского зеркала варьировался угол детектирования излучения, и, следовательно, интервал длин волн излучения, падающего на монохроматор. Авторы цитируемой работы подтвердили с высокой точностью закон дисперсии Смита–Парселла в широком диапазоне волн. При измерении формы линии ИСП для решётки с периодом $d = 0,75$ мм под углом $\theta = 115^\circ$ (см. рис. 37.2) авторы получили монохроматичность линии $\Delta\lambda/\lambda \approx 8\%$,

что значительно хуже, чем энергетическое разрешение используемого спектрометра, и, тем более, чем «естественная» монохроматичность для решётки с числом периодов $N \approx 90$ ($\Delta\lambda/\lambda \approx \frac{1}{N} \approx 1,1\%$).

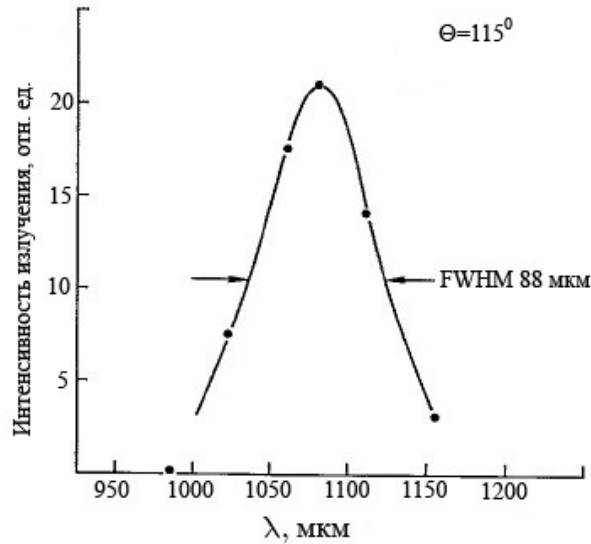


Рис. 37.2. Форма линии ИСП, измеренная для угла $\theta = 115^\circ$ для решетки с периодом $d = 0,77$ мм

Одно из возможных объяснений этого эффекта связано с конечностью угловой апертуры спектрометрического тракта. Если угловой «захват» отражающего и параболидаального зеркал составлял величину $\Delta\theta = 10^\circ$, то в этом случае экспериментально измеренное «уширение» линии ИСП будет совпадать с теоретической оценкой:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\sin 115^\circ}{1 - \cos 115^\circ} \Delta\theta.$$

В эксперименте [95.4], выполненном на пучке электронов с кинетической энергией 2,8 МэВ ($\gamma = 5,6$), схема которого аналогична приведённой на рис. 37.1, было проведено сравнение мощности спонтанного ИСП с предсказаниями теории Ван ден Берга [73.4]. Пучок электронов представлял собой последовательность сгустков длительностью 20 псек (т. е. с длиной сгустка 6 мм), заселённостью около $2 \cdot 10^8 e^-$ / сгусток и размерами $2\sigma_x \approx 12$ мм, $2\sigma_y \approx 0,75$ мм; импакт-параметр был около 1 мм, основная часть пучка проходила над решеткой без рассеяния. При

измерении абсолютных значений мощности ИСП использовалась треугольная решётка с углом наклона «большой» поверхности зуба решётки $\alpha = 5^\circ$ и периодом $d = 10$ мм. Для угла наблюдения $\theta = 17,4^\circ$ длина волны ИСП первого порядка составляла $\lambda = 0,623$ мм, тогда как для угла $\theta = 27,8^\circ$ длина волны возрастала почти в два раза – $\lambda = 1,32$ мм. Для обоих случаев длина волны значительно меньше порогового значения, где начинают проявляться когерентные эффекты, поэтому в эксперименте наблюдалось некогерентное излучение ИСП. На рис. 37.3 приведены результаты наблюдения при $\theta = 30^\circ$. Следует отметить, что и в этом измерении ширина линии ИСП превышала расчётную, возможно из-за конечной угловой апертуры детектора.

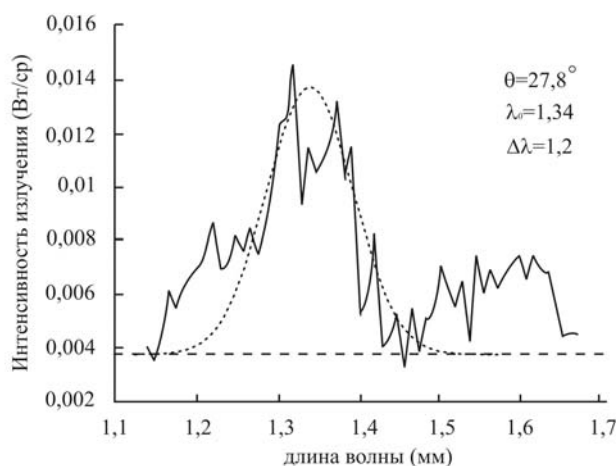
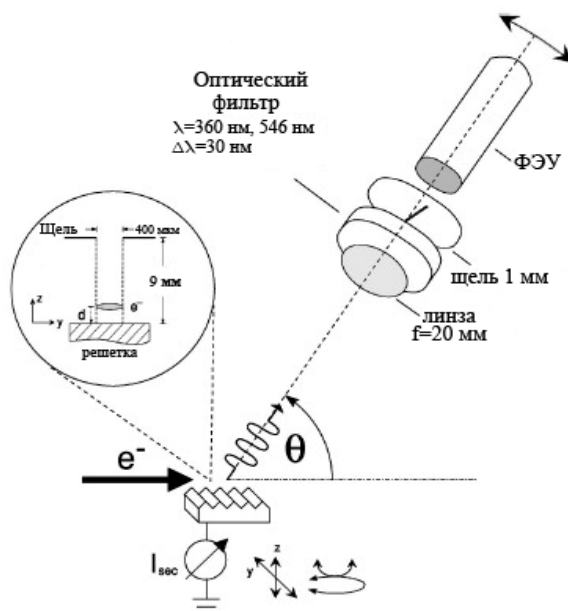


Рис. 37.3. Экспериментально измеренный спектр ИСП для решётки с периодом $d = 10$ мм для угла наблюдения $\theta = 27,8^\circ$ (сплошная кривая) и подгонка экспериментальных данных гауссианом (штриховая)

Авторы работы [95.4] провели расчёты по теории Ван ден Берга [73.4] для используемой решётки и параметров электронного пучка и получили, что экспериментальные результаты превышают теоретические предсказания для угла наблюдения $17,4^\circ$ в 200 раз и для угла наблюдения $27,8^\circ$ в 700 раз ($\Delta W_{\text{эксп}}(\theta = 17,4^\circ) = 0,33$ мкВт, $\Delta W_{\text{эксп}}(\theta = 27,8^\circ) = 0,11$ мкВт). В качестве одной из возможных причин столь существенного расхождения авторы указывают на возможность существования когерентного эффекта за счёт отличия продольной формы сгустка от гауссовской (см. § 29). Так, например, для цилиндрической формы сгустка когерентные эффекты могут проявляться на длинах волн, значительно короче, чем длина сгустка.

В одном из последних экспериментов [02.11] изучалось излучение Смита–Парселла в оптическом диапазоне на пучке ультрарелятивистских электронов с энергией $E = 855$ МэВ. Схема эксперимента показана на рис. 37.4.



37.4. Схема эксперимента [02.11] по исследованию оптического ИСП на пучке электронов с энергией 855 МэВ

Следует отметить, что в этом эксперименте вертикальный размер пучка (в направлении, перпендикулярном решетке) не превышал 20 мкм, что позволяло полностью исключить взаимодействие периферийной части пучка с материалом решетки. На рис. 37.5 показаны результаты измерения выхода фотонов излучения Смита–Парселла для двух диапазонов длин волн $\lambda \pm \Delta\lambda = 546 \pm 15$ нм (вверху) и 360 ± 15 нм (внизу). Измерения проводились для пучка, проходящего над решеткой с периодом 0,833 мкм на расстоянии 127 мкм при изменении угла наблюдения θ (рис. 37.4). Ожидаемые положения максимумов излучения Смита–Парселла отмечены штриховыми линиями для различных порядков дифракции. Экспериментальное значение энергии фотонов линии ИСП согласуется с формулой Смита–Парселла очень хорошо.

Измеренный выход фотонов излучения Смита–Парселла с длиной волны $\lambda = 0,36$ мкм ($\hbar\omega = 3,5$ эВ) составлял $\Delta N / \Delta\Omega \approx 10^{-3}$ фот/ $e^- \cdot$ стерад или, если перейти к яркости излучения,

$$\frac{\Delta W}{\Delta\Omega} = 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{эВ}}{e^- \cdot \text{стерад}}.$$

Как отмечали авторы эксперимента, полученное значение для $\lambda = 0,36$ мкм удовлетворительно согласуется с теоретической моделью Ван ден Берга [73.4]. Следует указать также, что выход фотонов второго порядка дифракции (рис. 37.5 вверху) и третьего порядка (внизу) превышает выход фотонов на фундаментальной гармонике ($n = 1$), что не объясняется существующими моделями.

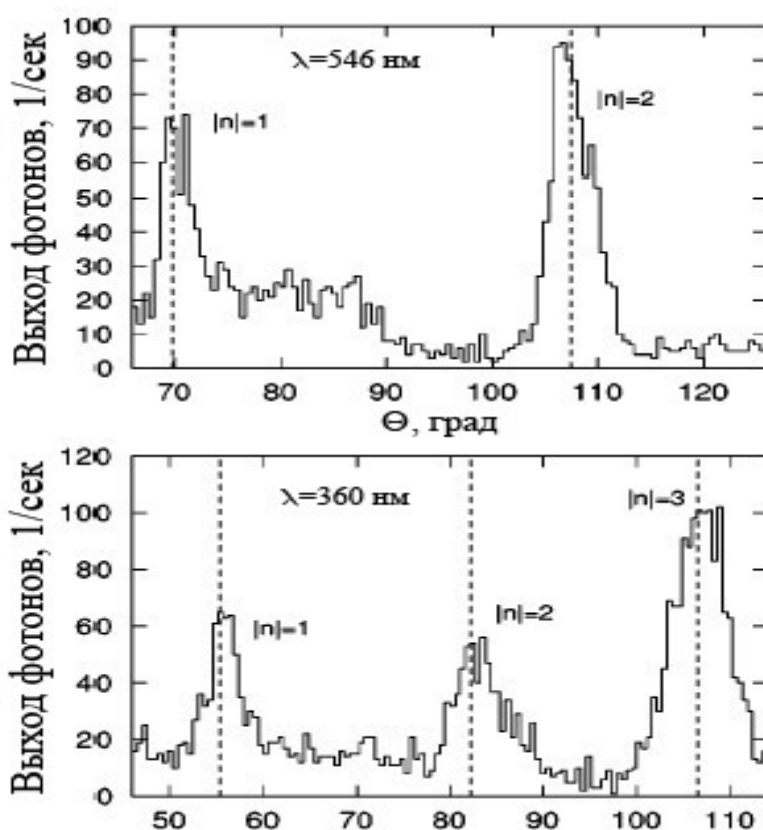


Рис. 37.5. Выход фотонов оптического излучения Смита–Парселла с фиксированной длиной волны $\lambda = 546 \pm 15$ нм (вверху) и $\lambda = 360 \pm 15$ нм (внизу) в зависимости от угла наблюдения θ

Как отмечалось выше, ИСП релятивистских частиц может использоваться для диагностики ускоренных пучков. Например, в статье [00.7] предлагался монитор положения пучка ультрарелятивистских электронов, в статьях [97.7, 97.8] – монитор длины электронного сгустка по когерентному ИСП. В последнем случае ключевую роль играет детектор излучения в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне, который должен быть сравнительно дешёвым и простым в эксплуатации. Болометры, которые часто используются для этой цели, обладают сравнительно большим временем отклика и требуют для своей эксплуатации

охлаждения до жидкогелиевых температур, поэтому не могут применяться в качестве штатного оборудования для подобного монитора.

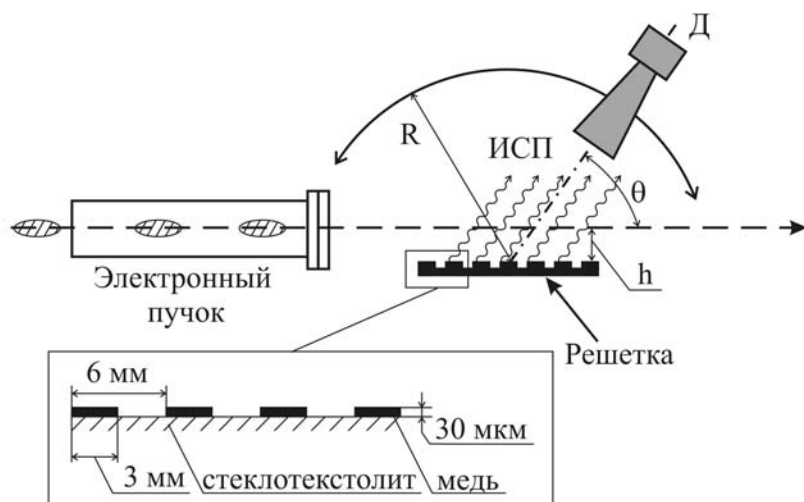


Рис. 37.6. Схема эксперимента [05.11] по генерации когерентного ИСП пучком электронов с энергией 5 МэВ

В эксперименте [05.11] угловое распределение когерентного ИСП исследовалось с помощью узкополосного детектора на основе антенны и ВЧ-диода, который работает при комнатной температуре и обеспечивает следующие характеристики: $\lambda_{рез} = 7,2$ мм; $\Delta\lambda \approx 2$ мм; чувствительность – 0,18 В/Вт, время отклика $\tau = 10^{-8}$ с.

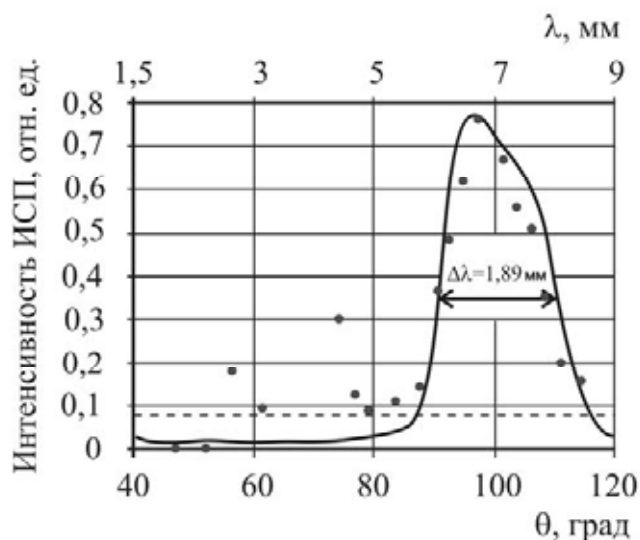


Рис. 37.7. Форма линии когерентного ИСП (точки – эксперимент, сплошная линия – моделирование)

Схема эксперимента, проведённого на пучке линейного ускорителя НИИ ЯФ МГУ с энергией 5 МэВ, показана на рис. 37.6. Длина электронного сгустка не превышала 2 мм с заселённостью $10^9 e^-$ /сгусток. Используемая решётка с числом периодов $N = 8$ схематически показана на врезке к этому же рисунку. При изменении угла детектирования θ узкополосный детектор будет срабатывать лишь в том диапазоне углов, для которых длина волны КИСП попадает в полосу чувствительности детектора.

На рис. 37.7 показаны результаты измерений выхода КИСП в сравнении с расчётной формой линии КИСП. Расчёты проводились для плоской решётки с вакуумными промежутками с числом периодов $N = 8$ и угловой апертурой детектора $\Delta\theta = 12$ мрад $= 0,06 \gamma^{-1}$. Можно отметить удовлетворительное согласие между экспериментом и расчётом. Зависимость измеренного выхода КИСП от прицельного параметра h приведена на рис. 37.8. Минимум в точке $h = 0$ соответствует прохождению пучка через мишень, которая в этом случае располагается по оси пучка. Начиная с расстояния $h = 2$ мм пучок уже не касается мишени. Измеренная зависимость в диапазоне прицельных параметров $h = 2 \div 29$ мм (после вычета постоянного фона) аппроксимируется экспонентой вида

$$\exp\left[-\frac{4\pi}{\gamma\bar{\lambda}}h\right], \quad \text{где } \bar{\lambda} = 7,85 \text{ мм},$$

что хорошо согласуется со средним значением интервала чувствительности узкополосного детектора.

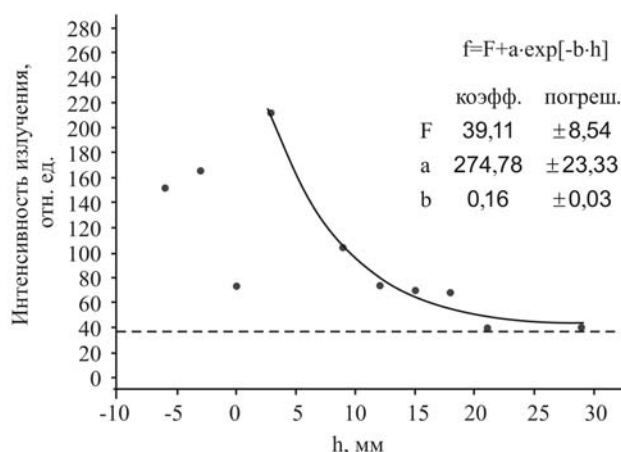


Рис. 37.8. Зависимость выхода когерентного ИСП от прицельного параметра

Одним из основных результатов цитируемой работы является детектирование когерентного излучения Смита–Парселла от так называемой «плоской» решётки, для которой отношение μ высоты стрипа к периоду существенно меньше единицы (в эксперименте [05.11] $\mu = 0,03 \text{ мм} / 6 \text{ мм} = 0,005$, см. рис. 37.6). Для подобных решёток модель Ван-ден-Берга дает выход излучения на уровне заведомо ниже, чем порог чувствительности детектора [05.12, 06.12]. Оценки выхода когерентного излучения Смита–Парселла [05.12, 06.12] были получены для плоской решётки, состоящей из тонких стрипов, разделенных вакуумными щелями. В описываемом эксперименте стрипы были размещены на диэлектрической «подложке». Однако, следует ожидать, что подобная решётка будет обладать «меньшей» эффективностью генерации излучения, чем аналогичная вакуумная решётка, поэтому утверждение о неприменимости модели Ван-ден-Берга к подобным «плоским» решёткам остаётся в силе.

38. Некоторые перспективы применения дифракционного излучения

Как отмечалось ранее, оптическое дифракционное излучение (ОДИ) может найти широкое применение в диагностике ультрарелятивистских электронных пучков. В 2005 году на накопительном кольце Advanced Photon Source (APS) была создана диагностическая станция для невозмущающего измерения параметров тестового электронного пучка с энергией 7 ГэВ, выведенного из синхротрона-инжектора [06.13, 07.3]. Наряду с традиционным использованием для целей диагностики оптического синхротронного излучения, размеры пучка и его положение в горизонтальной плоскости (плоскости орбиты) измерялись с помощью оптического дифракционного излучения. Авторы цитируемых работ показали, что координаты центра пучка с помощью ОДИ можно определить с точностью $\sim 10 \text{ мкм}$ при использовании оптической схемы, аналогичной приведённой на рис. 34.5.

Геометрические размеры электронных пучков $\sigma_{x,y}$ на ускорителях умеренных энергий ($E_e \leq 100 \text{ МэВ}$), как правило, превышают характерный параметр $\gamma \lambda$, поэтому диагностика, основанная на пропускании ускоренного пучка через щель (или вблизи мишени с импакт-параметром $\sigma_{x,y} < h < \gamma \lambda$) в данном случае не пригодна.

Авторы работы [03.14] предложили оригинальную схему диагностики, в которой пучок проходит через тонкую «перфорированную» мишень, размер отверстий в которой существенно меньше, чем диаметр

пучка (так, например, в [03.14] рассматривалась мишень с квадратными отверстиями со стороной 25 мкм и периодом 33 мкм, что соответствовало 55 %-ной «прозрачности»).

Наряду с ОДИ, генерируемым частицами пучка, проходящими через отверстия, в подобной мишени будет генерироваться переходное излучение частицами, взаимодействующими с материалом мишени (~ 45 % от начальной интенсивности пучка). Ясно, что характеристики излучения одиночного электрона будут зависеть от координаты точки прохождения частицы через мишень, поэтому характеристики излучения пучка будут определяться усреднением по поперечным размерам пучка. Авторы цитируемой статьи показали, что форма интерференционной картинки «вперёд» от такой мишени с переходным излучением «назад» от зеркала, размещенного после мишени, несёт информацию об угловой расходимости начального пучка.

В эксперименте [06.10] Р. Фиорито с соавторами продемонстрировали возможности предложенной методики диагностики (названной ими ODTRI-optical diffraction and transition radiation interferometry) при измерениях параметров пучков на ускорителях ATF BNL ($E_e = 50$ МэВ) и NPS ($E_e = 95$ МэВ) с точностью меньше 5 % (поперечные размеры и расходимость).

В работе [06.11] реализована схема диагностики длины электронного сгустка по угловому распределению когерентного излучения Смита–Парселла (КИСП). В цитируемой работе использовались 11 широкополосных детекторов с областью чувствительности в диапазоне 0,5 ÷ 3 мм, расположенных под различными полярными углами относительно направления электронов, пролетающих над решёткой. Полученные результаты демонстрируют перспективы невозмущающей диагностики, основанной на использовании КИСП, для измерения формы и длины субмиллиметровых электронных сгустков.

Ещё одним перспективным направлением использования дифракционного излучения может быть создание так называемого «широкополосного лазера на свободных электронах» (broadband free electron laser, BFEL). Схема BFEL была предложена в работах [98.13, 04.9] и основана на использовании предварительно сгруппированного электронного пучка (т. е. представляющего собой периодическую очерёдность коротких электронных сгустков). В традиционных лазерах на свободных электронах группировка исходного пучка происходит при его прохождении через ондулятор, причём период группировки совпадает с длиной волны испускаемого излучения.

В схеме VFEL спонтанный механизм когерентного излучения (например, переходное излучение) обладает непрерывным спектром, а усиление излучения происходит за счёт стимулирования излучения последующих сгустков при их прохождении через резонатор. VFEL на основе механизма когерентного переходного излучения использовался в работе [04.9]. Выбором длины резонатора, входное зеркало которого является мишенью для генерации переходного излучения, авторы эксперимента [04.9] получили усиление излучения в сравнительно широком диапазоне длин волн $\Delta\lambda \sim 0,5$ мм вблизи резонансной волны $\lambda_{\text{рез}} = 2,8$ мм на пучке электронов с энергией $E = 37$ МэВ и длиной сгустка ~ 6 мм. В эксперименте использовался цилиндрический резонатор диаметром 114 мм и регулируемым расстоянием между зеркалами вблизи $L_{\text{рез}} = 461$ мм (расстояние между сгустками ускорителя составляло 230,6 мм). Экспериментальная оценка добротности используемого резонатора на длине волны $\lambda_{\text{рез}} = 2,8$ мм составляла величину около 50. Тем не менее, полученное в эксперименте усиление на резонансной длине волны достигало 14 раз (рис. 38.1).

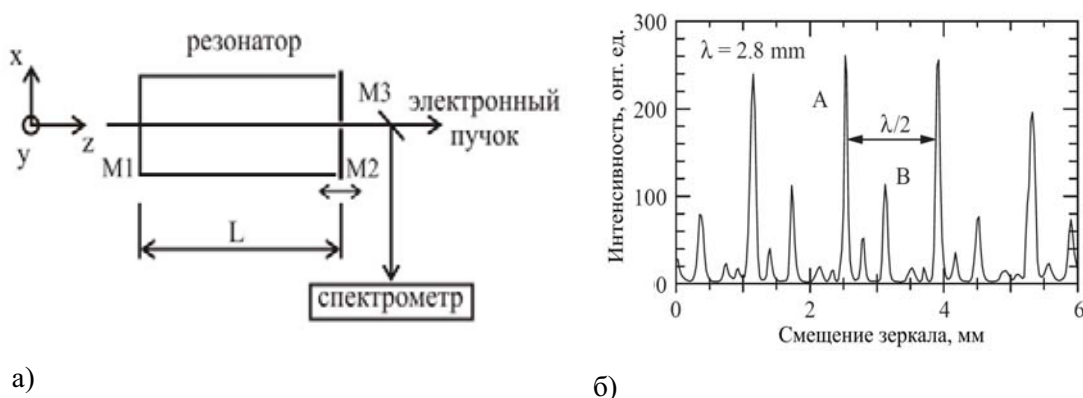


Рис. 38.1. а) Схема реализации VFEL на основе переходного излучения.
 б) Зависимость выхода стимулированного переходного излучения на длине волны $\lambda = 2,8$ мм в зависимости от длины резонатора

Можно предложить схему VFEL, основанную на дифракционном излучении, в которой используется открытый конфокальный резонатор, оба зеркала которого выполнены с центральными отверстиями, через которые проходит электронный пучок и генерирует когерентное дифракционное излучение (КДИ) вперёд во входном зеркале и КДИ назад – в выходном. Во-первых, в подобных зеркалах-мишенях происходит фокусировка КДИ, и, во-вторых, добротность открытого конфокального

резонатора может достигать величины $Q \sim 10^3$. Предлагаемая схема может обеспечить коэффициент усиления заметно выше, чем значения, достигнутые в цитируемых работах.

В недавнем эксперименте [07.2] была экспериментально доказана возможность фокусировки оптического переходного излучения, которое генерировалось при пролёте пучка электронов с энергией $E = 1,28$ ГэВ ($\gamma = 2500$) через полусферическую мишень с радиусом $R = 500$ мм. Размеры мишени составляли $15 \times 7,5$ мм, что гораздо меньше величины $\gamma^2 \lambda$ (для $\lambda = 550$ нм), однако заметно превышают величину $\gamma \lambda$.

Поскольку поперечные размеры мишени существенно меньше фокусного расстояния, это позволяет использовать сферическую мишень вместо параболической.

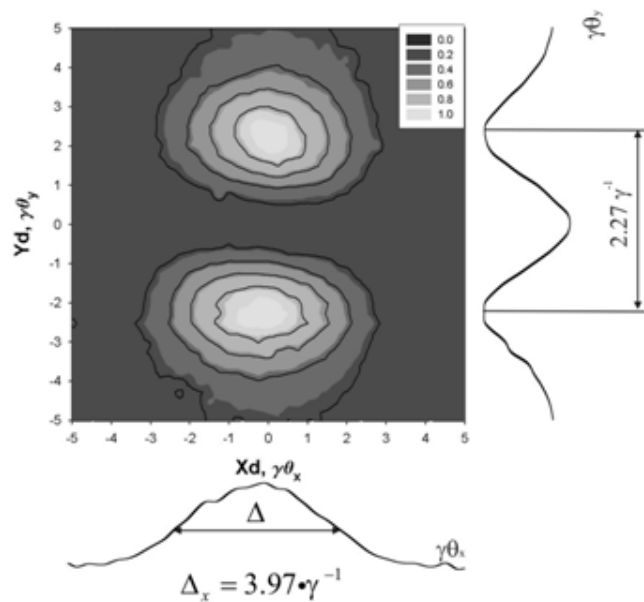


Рис. 38.2. Угловые распределения оптического переходного излучения от плоской мишени

На рис. 38.2, 38.3 представлены угловые распределения оптического переходного излучения от плоской мишени и сферической, которые наглядно демонстрируют фокусирующий эффект.

Другой тип нетрадиционной схемы лазера на свободных электронах предложен в работах [02.10, 03.13]. В этой схеме спонтанным излучением является излучение Смита–Парселла, которое генерируется при пролёте пучка нерелятивистских электронов над решёткой с периодом несколько миллиметров. Обратная связь осуществляется с помощью параллельной оптической решётки, расположенной с противоположной

стороны от пучка, параметры которой определяются энергией электронного пучка. Другими словами, две дифракционные решётки образуют поперечный резонатор и обеспечивают распределённую обратную связь. В эксперименте [02.10] наблюдалась генерация излучения на частоте $\nu_0 = 54$ ГГц ($\lambda_0 = 5,56$ мм), причём частота ν_0 регулировалась поворотом решётки, обеспечивающей обратную связь. В описываемом эксперименте поворот решётки на 5° вокруг оси, перпендикулярной основной плоскости решётки, приводил к сдвигу частоты излучения на 0,7 ГГц.

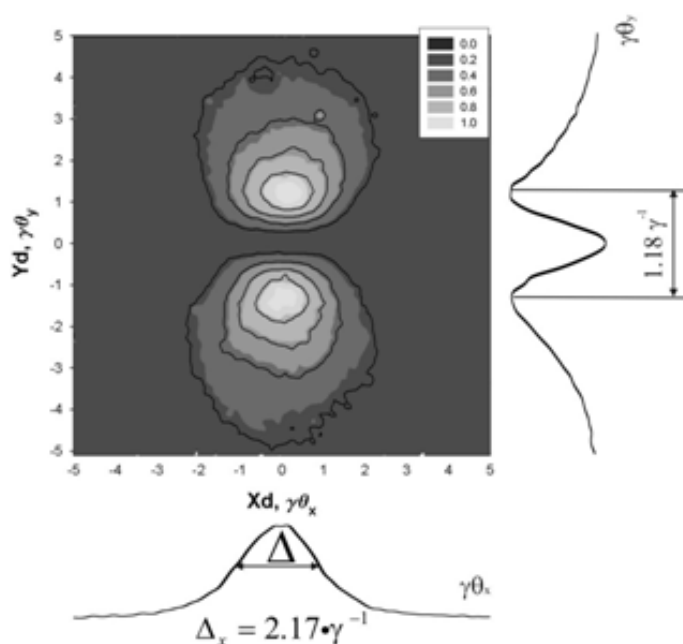


Рис. 38.3. Угловые распределения оптического переходного излучения от фокусирующей мишени

Приведённые примеры иллюстрируют лишь некоторые из возможных областей применения дифракционного излучения.

Как указывалось в первой главе, дифракционное излучение можно рассматривать как один из видов поляризационного излучения. Такие виды поляризационного излучения, как излучение Вавилова–Черенкова и переходное излучение, широко используются в современной физике. Черенковское излучение применяется в детекторах элементарных частиц, при создании лазеров на свободных электронах, а переходное – в детекторах частиц и для диагностики пучков ускорителей.

Следует ожидать, что дифракционное излучение также найдет широкое применение в современной физике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 34.1 Bethe H., Heitler W. On the stopping of fast particles and on creation of positive electrons // Proc. Roy. Soc. London A. – 1934. – V. 146. – P. 83.
- 39.1 Wheeler J., Lamb W. Influence of atomic electrons on radiation and pair production // Phys. Rev. – 1939. – V. 55. – P. 858.
- 39.2 Stratton J.A. and Chu L.J. Diffraction theory of electromagnetic waves // Phys. Rev. – 1939. – V. 56. – P. 99-107.
- 42.1 Франк И.М. Эффект Доплера в преломляющей среде // Известия АН СССР, сер. Физ. – 1942. – Т. 6. – С. 3.
- 46.1 Гинзбург В.Л., Франк И.М. К теории переходного излучения // ЖЭТФ. – 1946. – Т. 16. – С. 15.
- 48.1 Стреттон Дж.А. Теория электромагнетизма / Гостехиздат, М.-Л. 1948.
- 53.1 Smith S.J., Purcell H.M. Visible Light from Localized Surface Charges Moving across a Grating // Phys. Rev. – 1953. – V. 92. – P. 1069-1070.
- 53.2 Ландау Л.Д., Померанчук И.Я. Пределы применимости теории тормозного излучения электронов и образования пар при высоких энергиях // ДАН СССР. – 1953. – Т. 92. – С. 535.
- 53.3 Ландау Л.Д., Померанчук И.Я. Электронно-лавиновые процессы при высоких энергиях // ДАН СССР. – 1953. – Т. 92. – С. 735.
- 54.1 Мигдал А.Б. Влияние многократного рассеяния на тормозное излучение при больших энергиях ДАН СССР. – 1954. – Т. 96. – С. 49.
- 54.2 Nodvick J.S., Saxon D.S. Suppression of Coherent Radiation by Electrons in a Synchrotron // Phys. Rev. – 1954. – V. 96. – No 1. – P. 180-184.
- 56.1 Фейнберг Е.Л. Неупругие дифракционные процессы при высоких энергиях // УФН. – 1956. – Т. 58. – С. 193.
- 58.1 Бобринев В., Брагинский В. Излучение точечного заряда, равномерно движущегося по оси круглого отверстия в бесконечной идеально проводящей плоскости // ДАН СССР. – 1958. – Т. 123. – № 4. – С. 634-636.
- 58.2 Корхмазян Н.А. Переходное излучение при наклонном падении заряда // Изв. АН АрмССР. Серия физ.-мат. наук. – 1958. – Т. 11. – С. 7.
- 59.1 Гарибян Г.М. К теории переходного излучения и ионизационных потерь энергии частицы // ЖЭТФ. – 1959. – Т. 37. – С. 527.

- 59.2 Барсуков К.А. Переходное излучение в волноводе // ЖЭТФ. – 1959. – Т. 37. – С. 1106.
- 59.3 Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Излучение модулированного пучка заряженных частиц при пролете через круглое отверстие в плоском экране // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 124. – № 4. – С. 792-795.
- 59.4 Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Излучение ультрарелятивистских зарядов при пролете через круглое отверстие в экране // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 124. – №4. – С. 1026.
- 60.1 Питаевский Л.П. Электрические силы в прозрачной среде с дисперсией // ЖЭТФ. – 1960. – Т. 39. – С. 1450.
- 62.1 Казанцев А.П., Сурдутович Г.И. Излучение заряженной частицы, пролетающей вблизи металлического экрана // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 147. – С. 74.
- 62.2 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962.
- 62.3 Classical electrodynamics / Jackson J.D. – Wiley, New York, 1962.
- 63.1 Седракян Д.М. Дифракционное излучение линейного источника, пролетающего вблизи края идеально проводящей полуплоскости // Изв. АН АрмССР. – 1963. – Т. 16. – С. 115.
- 64.1 Болотовский Б.М., Воскресенский Г.В. Излучение заряженной нити, пролетающей вблизи металлического экрана // ЖЭТФ. – 1964. – Т. 34. – С. 11.
- 64.2 Седракян Д.М. Излучение заряженной частицы, пересекающей металлический экран // Известия АН АрмССР. – 1964. – Т. 17. – С. 103.
- 65.1 Хачатрян Б.В. Математическое обоснование формул дифракционного излучения // Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук. – 1965. – Т. 18. – № 2. – С. 133-139.
- 65.2 Тер-Микаелян М.Л., Хачатрян Б.В. Дифракционное излучение быстрых частиц // Доклады АН АрмССР. – 1965. – Т. 40 (XL). – №1. – С. 13-18.
- 65.3 Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965.
- 65.4 Болотовский Б.М., Бурцев А.К. Излучение заряда, пролетающего над дифракционной решёткой // Оптика и спектроскопия. – 1965. – Т. 19. – С. 470.
- 66.1 Barnes C.W., Dedrick K.G. Radiation by an Electron Beam Interacting with a Diffraction Grating // J. Appl. Phys. – 1966. – 37. – P. 411.

- 66.2 Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации / Москва, Советское радио. – 1966.
- 66.3 Болотовский Б.М., Воскресенский Г.В. Дифракционное излучение // УФН. – 1966. – Т. 88. – № 2. – С. 209-251.
- 66.4 Русин Ф.С., Богомоллов Г.В. Генерация колебаний в открытом резонаторе // Письма в ЖЭТФ. – 1966. – Т. 4. – С. 236.
- 68.1 Glass S.J., Mendlowitz H. Quantum Theory of Smith-Purcell Experiment // Phys. Rev. – 1968. – V. 174. – P. 57.
- 68.2 Болотовский Б.М., Воскресенский Г.В. Дифракционное излучение // УФН. – 1968. – Т. 94. – № 3. – С. 377.
- 69.1 Тер-Микаелян М.Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях / Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969. – 457 с.
- 69.2 Линдхард И. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц // УФН. – 1969. – Т. 99. – С. 249.
- 69.3 Пафомов В.Е. Излучение заряженной частицы при наличии границ раздела // Труды ФИАН. – 1969. – Т. 44. – С. 28-167.
- 70.1 Yuan L.C.L. et al Energy dependence of X-ray transition radiation from ultrarelativistic charged particles // Physical Review Letters B. – 1970. – V. 31. – P. 603.
- 71.1 Гарибян Г.М., Ши Ян. Рентгеновское переходное излучение // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61. – С. 930.
- 71.2 Барышевский В.Г., Феранчук И.Д. О переходном излучении гамма-квантов в кристалле // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61. – С. 944.
- 71.3 Ферми Э. Об отражении и рассеянии резонансного излучения / Научные труды, Т. 1. М.: Наука, 1971. – С. 150.
- 73.1 Lalor E. Three-Dimensional Theory of Smith-Purcell Effect // Phys. Rev. A. – 1973. – V. 8. – P. 435.
- 73.2 Piestrup M.A., Pantell R.H., Puthoff H.E. et al. Cerenkov radiation as a source of ultraviolet radiation // J. of Appl. Phys. – 1973. – V. 44. – No 11. – P. 5160-5164.
- 73.3 Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С. Излучение релятивистских электронов / М.: Атомиздат, 1973.
- 73.4 Van den Berg P.M. Smith-Purcell radiation from a point charge moving parallel to a reflection grating // J. Opt. Soc. Am. – 1973. – V. 63. – P. 1588.
- 75.1 Durand L. Transition radiation from ultra-relativistic particles // Phys. Rev. D. – 1975. – V. 11. – No 1. – P. 89-105.

- 75.2 Artru X., Yodh G., Mennessier G. Practical theory of the multilayered transition radiation detector // *Phys. Rev. D.* – 1975. – V. 12. – P. 1289-1306.
- 76.1 Шестоपालов В.П. Дифракционная электроника. – Харьков, Изд-во: Вища школа, 1976. – 232 с.
- 76.2 Федоров В.В., Смирнов А.И. О возможности черенковского излучения γ -квантов электронами // *Письма в ЖЭТФ.* – 1976. – Т. 23. – № 1. С. 34-36.
- 76.3 Рязанов М.И., Тилинин И.С. Переходное излучение ультрарелятивистской частицы от искривленной поверхности раздела сред. *ЖЭТФ.* – 1976. – Т.71.– С. 2079.
- 78.1 Самсонов В.М. О черенковском и переходном излучениях в области частот γ -резонанса // *ЖЭТФ.* – 1978. – Т. 75. – № 1(7). – С. 88-96.
- 78.2 Алфёров Д.Ф., Башмаков Ю.А., Бессонов Е.Г. Теория когерентного ондуляторного излучения // *ЖТФ.* – 1978. – Т 48. – № 8. – С. 1598-1606.
- 79.1 Большов Л.А., Решетин В.П. Дисперсионные явления при распространении излучения в средах с медленно меняющимся во времени показателем преломления // *ЖЭТФ.* – 1979. – Т. 77. – С. 1911.
- 79.2 Alikhanian A.I., Chechin V.A. Eikonal approximation in X-ray transition radiation theory // *Phys. Rev. D.* – 1979. – V. 19. – No 4. – P. 1260-1267.
- 79.3 Wachtel J.M. Free-electron lasers using the Smith-Purcell effect // *J. Appl. Physics.* – 1979. – V. 50. – No 1. – P. 49-56.
- 82.1 Базылев В.А., Жеваго Н.К. Генерация интенсивного электромагнитного излучения релятивистскими частицами // *УФН.* – 1982. – Т. 137. – № 4. С. 605-662.
- 82.2. Curtis F. Michel. Intense Coherent Submillimeter Radiation in Electron Storage Ring // *Phys. Rev. Letters* – 1982. – V. 48. – № 9.– P. 580-583
- 83.1 Гарибян Г.М., Ши Ян. Рентгеновское переходное излучение / Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1983. – 320 с.
- 83.2 Самсонов В.М. О черенковском и переходном излучениях в области с аномальной дисперсией // *Материалы II Симпозиума по переходному излучению частиц высоких энергий.* Ереван, 1983.

- 84.1 Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние / М.: Наука, 1984.
- 84.2 Рязанов М.И. Электродинамика конденсированного вещества / М.: Наука, 1984.
- 84.3 Gover A., Dvorkis P., Eliska U. Angular radiation pattern of Smith-Purcell radiation // J. Opt. Soc. Am. B. – 1984. – V. 1. – No 5. – P. 723-728.
- 85.1 Воробьев С.А., Калинин Б.Н., Пак С., Потылицын А.П. Обнаружение монохроматического рентгеновского излучения при взаимодействии ультрарелятивистских электронов с монокристаллом алмаза // Письма в ЖЭТФ. – 1985. – Т. 41. – № 1. – С. 3-6.
- 85.2 Адищев Ю.Н., Барышевский В.Г., Воробьев С.А., Данилов В.А., Пак С.Д., Потылицын А.П., Сафронов П.Ф., Феранчук И.Д., Черепица С.В. Экспериментальное обнаружение параметрического рентгеновского излучения // Письма в ЖЭТФ. – 1985. – Т. 41. – № 7. – С. 295-297.
- 85.3 Шестопапов В.П. Физические основы миллиметровой и субмиллиметровой техники. Т. 2. Источники. Элементная база. Радиосистемы. – Киев: Изд-во «Наукова Думка», 1985. – 256 с.
- 86.1 Адищев Ю.Н., Воробьев С.А., Калинин Б.Н., Пак С., Потылицын А.П. и др. Исследование спектров параметрического (квазичеренковского) излучения ультрарелятивистских электронов в монокристалле алмаза // ЖЭТФ. – 1986. – Т. 90. – С. 829-837.
- 87.1 Астапенко В.А., Буймистров В.М., Кротов Ю.А. Тормозное излучение с возбуждением и ионизацией атома // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 93. – С. 825.
- 87.2 Поляризованное тормозное излучение атомов и частиц: Сборник статей. – Под ред. Цытович В.Н., Ойрингель И.М. – М.: Наука, 1987.
- 87.3 Kheifets S.A., Palumbo L. Analytical calculation of the longitudinal impedance of a semi-infinite circular waveguide // European Organization for Nuclear Research, Report CERN/LEP, note 580, 1987.
- 87.4 Рязанов М.И. Феноменологическое описание диэлектрических свойств поверхности. Поверхностные волны // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 93. – № 4 (10). – С. 1281-1292.
- 87.5 Базылев В.А., Жеваго Н.К. Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях // М.: Наука, 1987.
- 88.1 Shestopalov V.P. The Smith-Purcell effect / Nova Science Publishers, Inc. Commack, N.Y.: 1988.

- 88.2 Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.
- 88.3 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1988.
- 89.1 Wilson P.D. Introduction to wake fields and wake potentials // AIP Conference proceedings. AIP New York, 1989. – No 184.
- 89.2 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. / Теория поля. – М.: Наука, 1989.
- 89.3 Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Cerenkov emission of x-rays // Phys. Rev. A. – 1989. – V. 40. – No 8. – P. 4322-4329.
- 89.4 Nakazato T., Oyamada M., Niimura N., et al. Observation of coherent synchrotron radiation // Physical Review Letters. – 1989. – V. 63. – P. 1245-1248.
- 90.1 Palmer R.B. A qualitative study of wake fields for very short bunches // Particle accelerators. – 1990. – V. 25. – P. 97.
- 90.2 Moran M.J., Chang B., Schneider M.B., Maruyama X.K. Grazing-incidence Cherenkov X-ray generation // Nucl. Instrum. Meth. B. – 1990. – V. 48. – P. 287-290.
- 90.3 Bane K., Sands M. Wakefields of very short bunches in an accelerating cavity // Particle Accelerators. – 1990. – V. 25. – P. 73-95.
- 91.1 Heifets S.A., Kheifets S.A. Coupling impedance in modern accelerators // Rev. Mod. Phys. – 1991. – V. 63. – P. 631.
- 91.2 Mkrtchyan A.R., Grigoryan L.Sh., Didenko A.N., Saryan A.A. Radiation of a charged particle flying over a surface acoustic wave // Acustica. – 1991. – V. 75. – P. 184.
- 91.3 Мкртчян А.Р., Григорян Л.Ш., Диденко А.Н., Сарьян А.А. Излучение заряженной частицы, пролетающей над релеевской акустической волной // ЖТФ. – 1991. – Т. 61. – С. 21.
- 91.4 Gianfelice E., Palumbo L., Vaccaro V.G., Verolino L. A canonical problem for the understanding of the energy diffraction losses in high-energy accelerators // Nuovo Cimeto A. – 1991. – V. 104. – P. 885-898.
- 91.5 Zhevago M.K., Glebov V.I. X-ray Cerenkov radiation at grazing incidence of electrons // Phys. Lett. A. – 1991. – V. 160. – P. 564-570.
- 91.6 Blum E.B., Happek U., Sievers A.J. Observation of coherent synchrotron radiation at the Cornell linac // Nucl. Instrum. and Methods A. – 1991. – V. 307. – P. 568-576.
- 91.7 Shibata Y., Ishi K., Takahashi T., et al. Observation of coherent synchrotron, Cherenkov and wake-field radiation at millimeter wave lengths using an L-band linear accelerator // Phys. Rev. A. – 1991. – V. 44. – No 6. – P. R3449–R3451.

- 91.8 Rule D.W., Fiorito R.B. Imaging micron-sized beams with optical transition radiation // AIP Conference Proceedings. – 1991. – V. 229. – P. 315-321.
- 92.1 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматлит, 4-е изд., 2005. – Т. 8. – 656с.
- 92.2 Caticha A. Quantum theory of the dynamical Cerenkov emission of x-rays // Phys. Rev. B. – 1992. – V. 45. – No 17. – P. 9541-9550.
- 92.3 Doucas G., Mulvey J.H., Omori M., Walsh J., Kimmitt M.F. First observation of Smith-Purcell radiation from relativistic electrons // Physical Review Letters. – 1992. – V. 69. – No 12. – P. 1761-1764.
- 93.1 Dolgoshein B. Transition radiation detectors // Nucl. Instrum. and Methods. A. – 1993. – V. 326. – P. 434.
- 93.2 Chao A.W. Physics of collective beam instabilities in high energy accelerators / John Wiley and Sons. New York, 1993.
- 93.3 Рязанов М.И., Сафронов А.Н. О квазипереходном излучении при отражении заряженной частицы от поверхности кристалла // ЖЭТФ. – 1993. – Т. 103. – С. 311
- 93.4 Рязанов М.И., Сафронов А.Н. Квазипереходное излучение поверхностных волн // ЖЭТФ. – 1993. – Т. 104. – С. 3512.
- 93.5 Dolgoshein B. Transition radiation detectors // Nucl. Instrum. and Methods. A. – 1993. – V. 326. – P. 434-469.
- 93.6 Henke B.L., Gullikson E.M., Davis J.C. X-Ray Interactions: Photo-absorption, Scattering Transmission and Reflection at $E=50\text{--}30,000$ eV, $Z=1\text{--}92$, At. Data Nucl. Data Tables. – 1993. – V. 54. – P. 181-342. (см. также <http://www-cxro.lbl.gov>; <http://www.physics.nist.gov>).
- 93.7 Asano S., Endo I., Harada M., Ishii S., Kobayashi T., Nagata T., Muto M., Yoshida K., Nitta H. // How intense is parametric x radiation? // Physical Review Letters. – 1993. – V. 70. – P. 3247.
- 93.8 Fiorito R.B., Rule D.W., Maruyama X.K. et al. Observation of higher order parametric x-ray spectra in mosaic graphite and single silicon crystals // Physical Review Letters. – 1993. – V. 71. – P. 704-7.
- 94.1 Zhevago N.K., Glebov V.I. Modified theory of Smith-Purcell radiation // Nucl. Instrum. and Methods A. – 1994. – V. 341. – P. ABS 101 – ABS 102.
- 95.1 Stupakov G.V. Geometrical Wake of a Smooth Taper // SLAC-PUB-95-7086, December 1995.
- 95.2 Potylitsin A.P., Verzilov V.A. Parametric X-rays and transition diffracted radiation in crystal stacks // Phys. Letters A. – 1995. – V. 209. – P. 380.

- 95.3 Shibata Y., Hasebe S., Ishiki K., et al. Observation of coherent diffraction radiation from bunched electrons passing through a circular aperture in the millimeter- and submillimeter- wave length regions // *Phys. Rev. E.* – 1995. – V. 52. – P. 6737
- 95.4 Woods K.J., Walsh J.E., Stoner R.E., Kirk H.G., Fernow R.C. Forward Directed Smith-Purcell Radiation from Relativistic Electrons // *Physical Review Letters.* – 1995. – V. 74. – № 19. – P. 3808-3811.
- 96.1 Anthony P.L., Becker-Srendy R., Bosted P.E., et al. Measurement of dielectric suppression of bremsstrahlung // *Physical Review Letters.* – 1996. – V. 76. – P. 3350.
- 96.2 Shchagin A.V., Khizhnyak N.A. Properties of parametric X-ray radiation from a thin crystal // *Nucl. Instrum. and Methods B.* – 1996. – V. 119. – P. 115.
- 96.3 Nitta H. Theoretical notes on parametric X-ray radiation // *Nucl. Instrum. and Methods B.* – 1996. – V. 115. – P. 401-406.
- 96.4 Stupakov G.V. Geometrical Wake of a Smooth Flat Collimator. // SLAC-PUB-7167. 1996.
- 97.1 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля / М.: Наука, 1997.
- 97.2 Garsia de Abajo F.J., Aizpurua J. Numerical simulation of electron energy loss near inhomogeneous dielectrics // *Phys. Rev. B.* – 1997. – V. 56. – P. 15873
- 97.3 Castellano M. A new non-intercepting beam size diagnostics using diffraction radiation from a slit // *Nucl. Instrum. and Methods A.* – 1997. – V. 394. – P. 275-280.
- 97.4 Artru X., Rullhussen P. Parametric X-rays and diffracted transition radiation in perfect and mosaic crystals // *Nucl. Instrum. and Methods B.* – 1997. – V. 145. – P. 1.
- 97.5 Baryshevsky V.G. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle // *Nucl. Instrum. and Methods B.* – 1997. – V. 122. – P. 13.
- 97.6 Haeberle O., Rullhusen P., Salome J-M., et al. Smith-Purcell radiation from electrons moving parallel to a grating at oblique incidence to the rulings // *Phys. Rev. E.* – 1997. – V. 55. – P. 4675-4683.
- 97.7 Nguyen D.C. Coherent Smith-Purcell radiation as a diagnostic for subpicosecond electron bunch length // *Nucl. Instrum. and Methods A.* – 1997. – V. 393. – P. 514-518.
- 97.8 Lampel M.C. Coherent Smith-Purcell radiation for use in electron beam diagnostics // *Nucl. Instrum. and Methods A.* – 1997. – V. 385. – P. 19.

- 97.9 Зрелов В.П. Излучение Вавилова-Черенкова и его применение в физике высоких энергий / М.: Атомиздат, 1968. – 378 с.
- 98.1 Rullhusen P., Artru X., Dhez P. Novel radiation sources using relativistic Electrons / World Scientific, Singapore, 1998.
- 98.2 Potylitsyn A.P. Transition Radiation and Diffraction Radiation. Similarities and Differences // Nucl. Instrum. and Methods. B. – 1998. – V. 145. – P. 169-179.
- 98.3 Potylitsyn A.P. Resonant Diffraction Radiation and Smith-Purcell Effect // Phys. Lett. A. – 1998. – V. 238. – P. 112-116.
- 98.4 Schieber D., Schachter L. Reaction forces on a relativistic point charge moving above a dielectric or a metallic half-space // Phys. Rev. E. – 1998. – V. 57. – P. 6008.
- 98.5 Osipov V.A., Rjazanov M.I. Emission of a charge moving uniformly parallel to the surface of a nonstationary medium // Laser Physics. – 1998. – V. 8. – С. 1007.
- 98.6 Ахманов С.А., Никитин С.Ю. Физическая оптика / МГУ, 1998.
- 98.7 Urata J., Goldstein M., Kimmitt M.F., Naumov A., Platt C., Walsh J.E. Superradiant Smith-Purcell Emission // Physical Review Letters. – 1998. – V. 80. – № 3. – P. 516-519.
- 98.8 Brownell J.H., Walsh J., Doucas G. Spontaneous Smith-Purcell radiation described through induced surface currents // Physical Review E. – 1998. – V. 57. – P. 1075-1080.
- 98.9 Shibata Y., Hasebe S., Ishi K., et al. Coherent Smith-Purcell radiation in the millimeter- wave region from a short-bunch beam of relativistic electrons // Phys. Rev. E. – 1998. – V. 57. – N. 1. – P. 1061-1074.
- 98.10. Takahashi T., Matsuyama T., Kobayashi K., et al. Utilization of coherent transition radiation from a linear accelerator as a source of millimetre-wave spectroscopy // Rev. of Scientific Instrum. – 1998. – V. 69. – P.3770-3775.
- 98.11 Castellano M., Verzilov V. Spatial resolution in optical transition radiation beam diagnostics. // Phys. Rev. ST-AB. – 1998. V. 1. – P. 062801.
- 98.12 Внуков И.Е., Калинин Б.Н., Науменко Г.А., Падалко Д.В., Потылицын А.П., Чефонов О.В. Экспериментальное обнаружение оптического дифракционного излучения // Письма в ЖЭТФ. – 1998. – Т. 67. – № 10. – С. 760-764.
- 98.13 Shibata Y., Ishi K., Takahashi T., et al. A prebunched FEL using coherent transition radiation in the millimeter wave region // Nucl. Instrum. and Methods B. – 1998. – V. 145. – P. 49-53.

- 99.1 Burov A., Danilov V. Suppression of transverse bunch instabilities by asymmetries in the chamber geometry // *Physical Review Letters*. – 1999. – V. 82. – P. 2286.
- 99.2 Garsia de Abajo F.J. Relativistic energy loss and induced photon emission in the interaction of a dielectric sphere with an external electron beam // *Phys. Rev. B*. – 1999. – V. 59. – P. 3095.
- 99.3 Masullo M.R., Panariello G., Schettino F., Vaccaro V.G., Verolino L. Longitudinal coupling impedance of a plane conducting ring // *Phys. Rev. ST AB*. – 1999. – V. 2. – P. 124402-1 – 124402-6.
- 99.4 Nasonov N. Borrmann effect in parametric X-ray radiation // *Phys. Lett. A*. – 1999. – V. 260. – P. 391.
- 99.5 Lampel M.C. Coherent Smith-Purcell Radiation for Use in Electron Beam Diagnostics // *Advanced Accelerator Concepts, Eight Workshop*. – 1999. – CP 472. – P. 785-794.
- 99.6 Potylitsyn A.P. Thomson scattering of coherent diffraction radiation by an electron bunch // *Phys. Rev. E*. – 1999. – V. 60. – P. 2272-2279.
- 99.7 Bosch R.A. Focusing of infrared edge and synchrotron radiation // *Nucl. Instrum. and Methods A*. – 1999. – V. 431. – P. 320.
- 00.1 Болотовский Б.М., Галстьян Е.А. Дифракция и дифракционное излучение // *УФН*. – 2000. – Т. 170. – № 8. – С. 809-830.
- 00.2 Potylitsyn A.P. Scattering of coherent diffraction radiation by a short electron bunch // *Nucl. Instrum. and Methods A*. – 2000. – V. 455. – P. 213-216.
- 00.3 Шульга Н.Ф., Добровольский С.Н. К теории переходного излучения релятивистских электронов в тонкой металлической мишени // *ЖЭТФ*. – 2000. – Т. 117. – № 4. – С. 668-672.
- 00.4 Потылицын А.П., Потылицына Н.А. Дифракционное излучение ультрарелятивистских частиц при пролете через наклонную щель // *Известия ВУЗов. Физика*. – 2000. – Т. 43. – № 4. – С. 56-61.
- 00.5 Verzilov V.A. Transition radiation in the pre-wave zone // *Phys. Lett. A*. – 2000. – V. 273. – P. 135-140.
- 00.6 Potylitsyn A.P., Karataev P.V., Naumenko G.A. Resonant diffraction radiation from an ultra-relativistic particle moving close to a tilted grating // *Phys. Rev. E*. – 2000. – V. 61. – P. 7039-7045.
- 00.7 Trotz S.R., Brownell J.H., Walsh J.E., Doucas G. Optimization of Smith-Purcell radiation at very high energies // *Phys. Rev. E*. – 2000. – V. 61. – P. 7057.

- 01.1 Gluckstern R., Zotter B. Analysis of shielding charged particle beams by thin conductors // *Phys. Rev. ST AB*. – 2001. – V. 4. – P. 024402.
- 01.2 Fiorito R.B., Rule D.W. Diffraction radiation diagnostics for moderate to high energy beams // *Nucl. Instrum. and Methods B*. – 2001. – V. 173. – P. 67.
- 01.3 Urakawa J., Hayano H., Kubo K., et al. Feasibility of optical diffraction radiation for a non-invasive low-emittance beam diagnostics // *Nucl. Instrum. and Methods A*. – 2001. – V. 472. – P. 309-317.
- 01.4 Knulst W., Luiten O.J., van der Wiel M.J., Verhoeven J. Observation of narrow-band Si L-edge Cerenkov radiation generated by 5 MeV electrons // *Appl. Phys. Lett.* – 2001. – V. 79. – P. 2999-3001.
- 01.5 Ter-Mikayelyan M.L. Electromagnetic radiative processes in periodic media at high energies // *Phys. Usp.* – 2001. – V. 44. – P. 571-596.
- 01.6 Artru X., Rullhussen P. Parametric X-rays and diffracted transition radiation in perfect and mosaic crystals // *Nucl. Instrum. and Methods B*. – 2001. – V. 173. – P. 16.
- 01.7 Imanishi N., Nasonov N., Yajima K. Dynamical diffraction effects in the transition radiation of a relativistic electron crossing a thin crystal // *Nucl. Instrum. and Methods B*. – 2001. – V. 173. – P. 227.
- 01.8 Nasonov N. On the effect of anomalous photoabsorption in the parametric X-rays // *Phys. Lett. A*. – 2001. – V. 292. – P. 146.
- 01.9 Izhizuka H., Kawamura Y., Yokoo K. et al. Smith-Purcell radiation experiment using a field-emission array cathode measurements of radiation // *Nucl. Instrum. and Methods A*. – 2001. – V. 475. – P. 593-598.
- 01.10 Korbly S.E., Brown W.J., Shapiro M.A. et al. Design of a Smith-Purcell radiation bunch length diagnostic // *Proceedings of the 2001 Particle Accelerator Conference*. 2001. – P. 2347-2349
- 02.1 Garsia de Abajo F.J., Howie A. Retarded field calculation of electron energy loss in inhomogeneous dielectrics // *Phys. Rev. B*. – 2002. – V. 65. – P. 115418.
- 02.2 Dobrovolsky S.N., Shul'ga N.F. Transition and diffraction radiation by relativistic electrons in a pre-wave zone // *Proceedings of EPAC 2002, Paris, France*. – P. 1867-1869.
- 02.3 Рязанов М.И. Введение в электродинамику конденсированного вещества / М., Физматлит, 2002, 319 с.
- 02.4 Болотовский Б.М., Серов А.В. Переходное излучение от протяженной системы зарядов // *ЖТФ*. – 2002. – Т. 72. – С. 3-7.

- 02.5** Bosch R.A. Extraction of edge radiation within a straight section of Aladdin // *Rev. of Scientific Instruments*. – 2002. – V. 73. – N.3. – P. 1423-1426.
- 02.6** Carr G.L., Martin M.C., McKinney W. R. et al. High-power terahertz radiation from relativistic electrons // *Nature*. – 2002. – V. 420. – P. 153-155.
- 02.7** Bosch R.A. Shielding of infrared edge and synchrotron radiation // *Nucl. Instrum. and Methods A*. – 2002. – V. 482. – P. 789-798.
- 02.8** Bosch R.A. Extraction of edge radiation within a straight // *Phys. Rev. ST-AB*. – 2002. – V. 5. – P. 020701.
- 02.9** Kubo K, Akemoto M., Anderson S., Karataev P., Naumenko G., Potylitsyn A., et al. Extremely Low Vertical Emittance Beam in Accelerator Test Facility at KEK // *Phys. Rev. Letters*. – 2002. – V. 88. – P. 194801-1-194801-4.
- 02.10** Baryshevsky V., Batrakov K., Gurinovich A., et al. First lasing of a volume FEL (VFEL) at a wavelength range $\lambda \sim 4-6$ mm // *Nucl. Instrum. and Methods A*. – 2002. – V. 483. – P. 21-23.
- 02.11** Kube G., Backe H., Euteneuer H., Grendel A., Hagenbuck F., Hartmann H., Kaiser K.H., Lauth W., Schope H., Wagner G., Walcher Th. Observation of optical Smith-Purcell radiation at an electron beam energy of 855 MeV // *Phys. Rev. E*. – 2002. – V. 65. – P. 056501.
- 03.1** Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокоочастотной электронике для физиков. В 2-х т. / М.: Физматлит. Т. 1. – 2003. – 496 с.; т. 2. – 2004. – 648 с.
- 03.2** Schachter L., Byer R.L., Siemann R.H. Wake field in dielectric acceleration structures // *Phys. Rev. E*. – 2003. – V. 68. – P. 036502.
- 03.3** Dobrovolsky S.N., Shul'ga N.F. Transversal spatial distribution of transition radiation by relativistic electron in the formation zone by the dotted detector // *Nucl. Instrum. Methods B*. – 2003. – V. 201. – P. 123-132.
- 03.4** Potylitsyna-Kube N.A., Artru X. Diffraction radiation from ultrarelativistic particles passing through a slit. Determination of the electron beam divergence // *Nucl. Instrum. and Methods B*. – 2003. – V. 201. – P. 172-183.
- 03.5** Potylitsyn A.P. Linear polarization of diffraction radiation from slit and beam size determination // *Nucl. Instrum. and Methods B*. – 2003. – V. 201. – P. 161-171.

- 03.6 Knulst W., van der Wiel M.J., Luiten O.J., Verhoeven J. High brightness, narrowband, and compact soft x-ray Cherenkov sources in the water window // *Appl. Phys. Lett.* – 2003. – V. 83. – No 19. – P. 4050-4052.
- 03.7 Kubankin A., Nasonov N., Sergienko V., Vnukov I. An investigation of the parametric X-rays along the velocity of emitting particle // *Nucl. Instrum. and Methods B.* – 2003. – V. 201. – P. 97.
- 03.8 Kube G., Backe H., Lauth W., et al. Smith–Purcell radiation in view of particle beam diagnostics // *Proceedings DIPAC 2003, Mainz, Germany.*
- 03.9 Neil G.R., Carr G.L., Gubeli J.F., et al. Production of high power femtosecond terahertz radiation // *Nucl. Instrum. and Methods A.* – 2003. – V. 507. – P. 537-540.
- 03.10 Neil G.P. FEL oscillators // *Proceedings of the 2003 Particle Accelerator Conference.* – P.181-185.
- 03.11 Castellano M., Verzilov V., Catani L. et al. Search for the prewave zone effect in transition radiation // *Phys. Rev. E.* – 2003. – V. 67. – P. 015501-015504.
- 03.12 Aleinik A.N., Chefonov O.V., Kalinin B.N., Naumenko G.A., Saruev G.A., Sharafutdinov A.F., Wagner W. Low-energy electron-beam diagnostics based on the optical transition radiation. // *Nuclear Instruments and Methods B.* – 2003. – V. 201. – P. 34-43.
- 03.13 Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Gurinovich A.A. et al. Progress of the volume FEL (VFEL) experiments in millimeter range // *Nucl. Instrum. and Methods A.* – 2003. – V. 507. – P. 137-140.
- 03.14 Shkvarunets A.G., Fiorito R.B., O’Shea P.G. Optical diffraction-transition interferometry and its application to the measurement of beam divergence // *Nucl. Instrum. and Methods B.* – 2003. – V. 201. – P. 153-160.
- 03.15 Muto M., Araki S., Hamatsu R., Hayano H., Hirose T., Karataev P., Naumenko G., Urakawa J. Observation of incoherent diffraction radiation from a single-edge target in the light region // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – V. 90. – P. 104801.
- 03.16 Karataev P., Araki S., Hamatsu R., Hayano H., Hirose T., Muto T., Naumenko G., Potylitsyn A., Urakawa J. Status of optical diffraction radiation experiment at KEK ATF extraction line // *Nucl. Instrum. and Methods B.* – 2003. – V. 201. – P. 140-153.
- 04.1 Рязанов М.И., Стриханов М.Н., Тищенко А.А. Дифракционное излучение от неоднородного диэлектрического слоя на поверхности идеального проводника // *ЖЭТФ.* – 2004. – Т. 126. – № 2(8). – С. 349-358.

- 04.2** Bane K.L.F., Stupakov G. Transition radiation wake-fields for a beam passing through a metallic foil // *Phys. Rev. ST AB*. – 2004. – V. 7. – P. 064401
- 04.3** Tishchenko A.A., Potylitsyn A.P., Strikhanov M.N. Diffraction radiation from an ultrarelativistic charge in the plasma frequency limit // *Phys. Rev. E*. – 2004. – V. 70. – P. 066501.
- 04.4** Алейник А.Н., Балдин А.Н., Богомазова Е.А., Внуков И.Е., Калинин Б.Н., Кубанкин А.С., Насонов Н.Н., Науменко Г.А., Потылицын А.П., Шарафутдинов А.Ф. Экспериментальное обнаружение параметрического рентгеновского излучения вдоль скорости релятивистских электронов, движущихся в кристалле вольфрама // *Письма в ЖЭТФ*. – 2004. – Т. 80. – № 6. – С. 447-451.
- 04.5** Winter A., Tonutti M., Casalbuoni S., et al. Bunch length measurement at the SLS Linac using Electro Optical Techniques // *Proceedings of the ERAC 2004, Lucerne, Switzerland*. 2004. – P. 253.
- 04.6** Karataev P.V. Investigation of Optical Diffraction Radiation for Non-Invasive Low-Emittance Beam Size Diagnostics // *PhD Thesis, Tokyo Metropolitan University*, 2004.
- 04.7** Karataev P., Araki S., Hamatsu R., Hayano H., Muto T., Naumenko G., Potylitsyn A., Terunuma N., Urakawa J. Beam-Size Measurement with Optical Diffraction Radiation at KEK Accelerator Test Facility // *Phys. Rev. Letters*. – 2004. – V. 93. – P. 244802.
- 04.8** Karataev P., Hayano H., Muto T., Terunuma N., Urakawa J., Hamatsu R., Naumenko G., Potylitsyn A. Development of optical diffraction radiation beam size diagnostics at KEK accelerator test facility // *Proceeding of EPAC 2004, Lucerne, Switzerland*, pp. 2643-2645.
- 04.9** Shibata Y., Ishi K., Ono S., et al. Prebunched free electron laser with a broadband spectrum // *Nucl. Instrum. and Methods A*. – 2004. – V. 528. – P. 162-166.
- 05.1** Baier V.M., Katkov V.M. Concept of formation length in radiation theory // *Physics Reports*. – 2005. – V. 409. – № 5. – P. 261.
- 05.2** Al-khaeieb A.M., Boine-Frankenheim O., Hofmann I. Longitudinal impedance and shielding effectiveness of a resistive beam pipe for arbitrary energy and frequency // *Phys. Rev. E*. – 2005. – V. 1. – P. 026501.
- 05.3** Potylitsyn A.P. Coherent diffraction radiation interferometry and short bunch length measurements // *Nucl. Instrum. and Methods B*. – 2005. – V. 227. – P. 191-197.

- 05.4** Tishchenko A.A., Strikhanov M.N., Potylitsyn A.P. X-ray transition radiation from an ultrarelativistic charge passing near the edge of a target or through a thin wire // Nucl. Instrum. and Methods B. – 2005. – V.227. – P.63.
- 05.5** Gary C., Kaplin V., Kubankin A., Nasonov N., Piestrup M., Uglov S. An investigation of the Cherenkov X-rays from relativistic electrons // Nucl. Instrum. Methods B. – 2005. – V. 227. – P.95-103.
- 05.6** Nasonov N., Zhukova P. Anomalous photoabsorbtion in the parametric X-rays in conditions of Cherenkov effect // Phys. Lett. – A. 2005. – V. 346. – P. 367-370.
- 05.7** Рязанов М.И. Дифракционное излучение быстрой частицы на резонансной частоте // ЖЭТФ. – 2005. – Т. 127. – С. 528.
- 05.8** Brownell J.H., Doucas G. Role of the grating profile in Smith-Purcell radiation at high energies // Phys. Rev. ST-AB. – 2005. – V. 8. – P. 091301.
- 05.9** Karataev P.V. Prewave zone effect in transition and diffraction radiation: Problems and solutions // Phys. Letters A. – 2005. – V. 345. – P. 428-438.
- 05.10** Karataev P., Araki S., Hamatsu R., Hayano H., Muto T., Naumenko G., Potylitsyn A., Terunuma N., Urakawa J. Observation of optical diffraction radiation from a slit target at KEK accelerator test facility // Nucl. Instrum. and Methods B. – 2005. – V.227. – P. 158-169.
- 05.11** Aryshev A., Kalinin B., Naumenko G., Potylitsyn A., Bardai R., Ishkhanov B., Shvedunov V. Experimental investigation of coherent Smith-Purcell radiation from a “flat” grating // Nucl. Instrum. and Methods B. – 2005. – V.227. – № 1-2. – P. 175-179.
- 05.12** Kube G. Calculation of Smith-Purcell radiation from a volume strip grating // Nucl. Instrum. and Methods B. – 2005. – V.227. – P. 80-190.
- 06.1** Williams G.P. Filling the THz gap-high power sources and applications // Reports on Progress in Physics. – V. 69. – P. 301-326.
- 06.2** Xiang D., Huang W.-H. Properties of diffraction radiation in practical conditions: Finite size target effect, surface roughness and pre-wave zone // Nucl. Instrum. and Methods B. – 2006. – V.248. – P. 163-169.
- 06.3** Kubankin A., Nasonov N., Kaplin V., Uglov S., Piestrup M., Gary C. X-ray Cherenkov radiation under conditions of grazing incidence of relativistic electrons onto a target surface // Rad. Phys. and Chemistry. – 2006. – V. 75. – No 8. – P. 913-919.

- 06.4** Tishchenko A.A., Potylitsyn A.P., Strikhanov M.N. X-ray diffraction radiation in conditions of Cherenkov effect // *Phys. Lett. A.* – 2006. – V. 359. – P. 509-511.
- 06.5.** Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D., Ulyanenko A.P. *Parametric X-ray Radiation: Theory, Experiment and Applications* / Springer Berlin-Heidelberg, 2006
- 06.6** Williams G.P. Filling the THz gap-high power sources and applications // *Rep. on Progress in Physics.* – 2006. – V. 69. – P. 301-326.
- 06.7** Калинин Б.Н., Науменко Г.А., Потылицын А.П., Саруев Г.А. и др. Измерение угловых характеристик переходного излучения в ближней и дальней волновой зоне // *Письма в ЖЭТФ.* – 2006. – Т. 84. – С. 136.
- 06.8** Potylitsyn A.P. Image of optical diffraction radiation (ODR) source and spatial resolution of ODR beam profile monitor // In. *Advanced Radiation Sources and Applications*, ed. H. Wiedemann, Springer. 2006. P. 149-163.
- 06.9** Potylitsyn A.P., Rezaev R.O. Focusing of transition radiation and diffraction radiation from concave targets. // *Nucl. Instrum. and Methods B.* – 2006. – V. 252. – P. 44-49
- 06.10** Fiorito R.B., Shkvarunets A.G., Watanabe T., Yakimenko V., Snyder D. Interference of diffraction and transition radiation and its application as a beam divergence diagnostic // *Phys. Rev. ST AB.* – 2006. – V.9. – P.052802.
- 06.11** Doucas G., Blackmore V., Ottewell B., et al. Longitudinal electron bunch profile diagnostics at 45 MeV using coherent Smith-Purcell radiation // *Phys. Rev. ST-AB.* – 2006. – V. 9. – P. 092801.
- 06.12** Karlovets D.V., Potylitsyn A.P. Comparison of Smith-Purcell radiation models and criteria for their verification // *Phys. Rev. ST-AB.* – 2006. – V. 9. – P. 080701.
- 06.13** Lumpkin A.H. *Nucl. Instrum. and Methods A.* – 2006. – V. 557. – P.318-323.
- 06.14** Nasonov N., Zhukova P. Hubbell J.H. Parametric X-rays along the velocity direction of an emitting particle under conditions of the Cherenkov effect // *Rad. Phys. and Chem.* – 2006. –V.75. – P. 923-926.
- 07.1** Op't W.P.E.M., Smorenburg P.W., van Oudheusden T., et al. Theory of coherent radiation generated by ellipsoidal electron bunches // *Phys. Rev. ST AB.* – 2007. – V. 10. – P.012802.

- 07.2** Sukhikh L.G., Naumenko G.A., Potylitsyn A.P., Urakawa J., Aryshev A.S., Boogert S., Karataev P.V. Focusing of optical transition and diffraction radiation by a spherical target // DIPAC07. Proceedings. 2007.
- 07.3** Lumpkin A.H., Berg W.J., Sereno N.S., et al. Near-field imaging of optical diffraction radiation generated by a 7-GeV electron beam // Physical Review Spectral Topics – Accelerators and Beams. – 2007. – V. 10. – P. 022802.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ.....	5
1. Общие свойства излучения релятивистских частиц.....	5
2. Длина формирования излучения	11
3. Излучение тяжелой заряженной частицы при столкновении с атомом	15
4. Переходное и дифракционное излучение.....	19
5. Кильватерное поле в линейных ускорителях.....	28
2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ	37
6. Дифракционное излучение как излучение поляризационных токов	37
7. Длина формирования дифракционного излучения	41
8. Излучение при пролете релятивистской частицы вблизи экрана	45
9. Дифракционное излучение ультрарелятивистских частиц	49
10. Влияние возбуждения среды на дифракционное излучение	55
11. Дифракционное излучение при отражении быстрой заряженной частицы от поверхности монокристалла	63
3. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НА ОПТИЧЕСКИХ И БОЛЕЕ НИЗКИХ ЧАСТОТАХ	68
12. Дифракционное излучение от круглого отверстия в непрозрачном экране	68
13. Дифракционное излучение от наклонной идеально-проводящей полуплоскости	80
14. Излучение при пролете заряда через щель в идеально-проводящем экране	98
15. Поляризационные характеристики дифракционного излучения	112
4. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В УЛЬТРАФИОЛЕТОВОМ И МЯГКОМ РЕНТГЕНОВСКОМ ДИАПАЗОНЕ.....	123
16. Поляризационный ток и поле излучения.....	123

17. Дифракционное излучение вперёд.....	128
18. Дифракционное излучение назад.....	136
19. Рентгеновское дифракционное излучение в условиях эффекта Вавилова-Черенкова.....	141
20. Дифракционное излучение от кристаллической мишени.....	145
5. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НА РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЕ.....	161
21. Дифракционное излучение на резонансной частоте от неплоской поверхности.....	161
22. Дифракционное излучение на резонансной частоте от клина.....	167
6. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ СРЕД С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ.....	174
23. Излучение Смита–Парселла.....	174
24. Скалярная теория дифракции собственного поля электрона на плоской полупрозрачной решетке.....	179
25. Эффект Смита–Парселла как излучение индуцированных поверхностных токов.....	183
26. Эффект Смита–Парселла как резонансное дифракционное излучение.....	191
27. Резонансное дифракционное излучение электронов, пролетающих вблизи наклонной плоской решетки.....	210
28. Излучение Смита–Парселла от тонкого слоя диэлектрика на проводящей подложке.....	224
7. КОГЕРЕНТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СГУСТКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ.....	235
29. Когерентное излучение коротких электронных сгустков.....	235
30. Когерентное синхротронное излучение в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне длин волн.....	248
31. Когерентное дифракционное излучение.....	252
32. Когерентное излучение Смита–Парселла.....	258
8. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ПРЕДВОЛНОВОЙ ЗОНЕ.....	263
33. Переходное излучение в предволновой зоне.....	263
34. Дифракционное излучение в предволновой зоне и возможность его фокусировки.....	274

9. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ	298
35. Результаты экспериментальных исследований дифракционного излучения и сравнение с теоретическими расчётами.....	298
36. Оптическое дифракционное излучение от щелевой мишени и возможность измерения поперечного размера электронного пучка.....	308
37. Экспериментальные исследования генерации излучения Смита–Парселла пучками ультрарелятивистских электронов.....	314
38. Некоторые перспективы применения дифракционного излучения	322
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	327
ОГЛАВЛЕНИЕ	344

Учебное издание

ПОТЫЛИЦЫН Александр Петрович
РЯЗАНОВ Михаил Иванович
СТРИХАНОВ Михаил Николаевич
ТИЩЕНКО Алексей Александрович

ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Учебное пособие

Научный редактор
доктор наук, профессор *В.А. Трясучёв*


Редактор *О.Н. Свинцова*
Верстка *Л.В. Пузыревич*
Дизайн обложки *О.Ю. Аршинова*
О.А. Дмитриев

Подписано к печати 03.12.2008. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 20,18. Уч.-изд.л. 18,25.
Заказ 811. Тираж 100 экз.



Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета
сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.