ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н.А. Агапов

ПРИКЛАДНАЯ ОПТИКА

Учебное пособие

Издательство
Томского политехнического университета
2008

УДК 535.8
А

Агапов Н.А.

А Прикладная оптика: учебное пособие / Н.А. Агапов. – Томск: Изд-во ТПУ, 2008. – 333 с.

В учебно-методическом пособии представлены основные законы геометрической оптики, векторно-матричные методы расчета хода луча через систему поверхностей с осевой симметрией, матричные методы описания свойств оптических систем в параксиальной области, апертурные свойства центрированной системы линз, элементы теории аберраций, устройство и принцип работы основных типов оптических систем.

Пособие предназначено для студентов направления 200200 «Оптотехника» ЭФФ и других направлений, связанных с разработкой и проектированием оптикоэлектронных систем.

УДК 535.8

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским
советом Томского политехнического университета

Рецензенты

Доктор физико-математических наук,
заведующий лабораторией института сильноточной электроники
Сибирского отделения Российской академии наук
В.Ф. Лосев

Доктор физико-математических наук,
профессор Томского государственного университета
В.П. Лукин

© Томский политехнический университет, 2008
© Агапов Н.А., 2008
© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2008

1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

1.1. Экспериментальные законы геометрической оптики

Простейшие оптические явления, например, возникновение теней и получение изображений в оптических приборах, могут быть поняты в рамках так называемой геометрической оптики. В основу формального построения последней можно положить четыре закона, установленных опытным путем:

1) закон прямолинейного распространения света;
2) закон независимости световых пучков;
3) закон отражения света;
4) закон преломления света;

Для понимания более сложных явлений нужна уже физическая оптика, рассматривающая эти явления в связи с физической природой света. Физическая оптика позволяет, в частности, не только вывести все законы геометрической оптики, но и установить границы их применимости. Без знания этих границ формальное применение законов геометрической оптики может в конкретных случаях привести к результатам, противоречащим наблюдаемым явлениям. Поэтому нельзя ограничиваться чисто формальным построением геометрической оптики, а необходимо смотреть на нее как на раздел физической оптики. Обоснование геометрической оптики будет дано постепенно, сейчас же ограничимся формулировкой перечисленных четырех опытных законов.

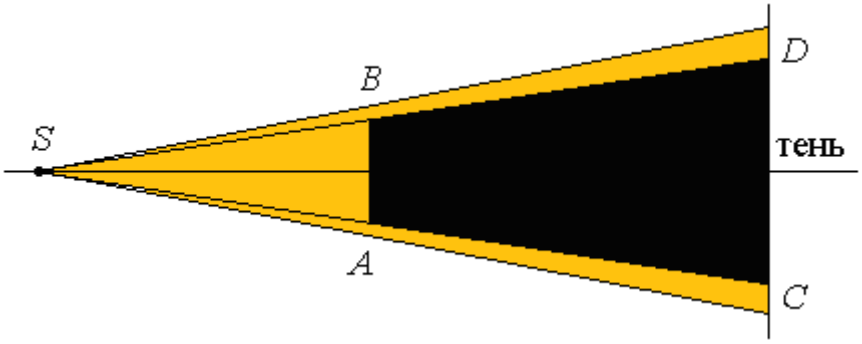
1. Закон прямолинейного распространения света.

Согласно закону прямолинейного распространения, свет в прозрачной однородной изотропной среде распространяется по прямым линиям.

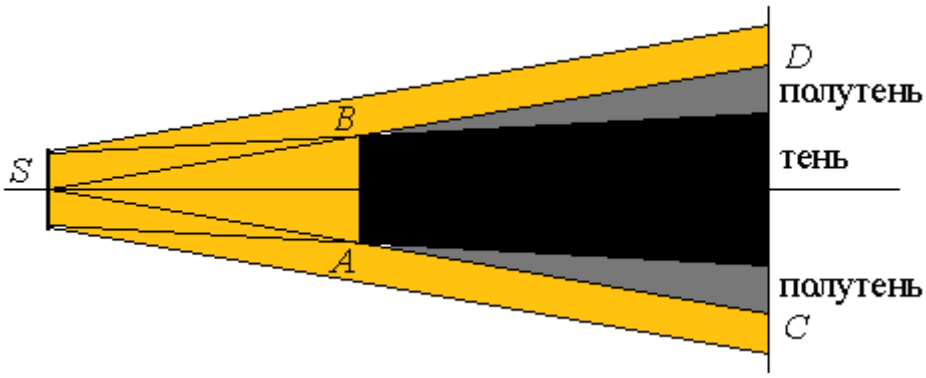
Среда, показатель преломления которой одинаков во всех точках, называется **однородной**. Если показатель преломления среды в данной точке не зависит от направления распространения света, то говорят, что среда является **изотропной**. Опытным доказательством закона прямолинейного распространения света могут служить резкие тени, отбрасываемые непрозрачными телами, освещенными **точечными** источниками света, то есть источниками, размеры которых весьма малы по сравнению с размерами освещаемого тела и расстоянием до него. Непрозрачный предмет **AB** (рис. 1, *а*), поставленный на пути светового пучка от точечного источника **S**, не пропускает свет в пространство за этим предметом, ограниченное боковой поверхностью конуса **SCD**, касающейся краев предмета **AB**. Однако на распределении света вне этого пространства присутствие

предмета **AB** не оказывает никакого влияния. Это и значит, что распространение света происходит вдоль прямых линий.

Протяженный источник ведет себя, как совокупность точечных источников света, каждому из которых соответствует свое распределение светового поля на экране. В результате наложения таких картин наряду с тенями возникают полутени, то есть области более или менее плавного перехода от освещенных частей экрана к менее освещенным и совсем темным (рис. 1, *б*). Поэтому, для демонстрации закона прямолинейного распространения света необходимо использовать точечный источник света, чтобы максимально уменьшить ширину полутени.



а) экран освещается точечным источником света S,



б) экран освещается протяженным источником света S

Рис. 1. Прямолинейное распространение света

Однако наблюдаются отступления от закона прямолинейного распространения света. Рассмотрим, например, тень от резкого края непрозрачного объекта. Если источник света точечный (рис. 1, а), то, согласно этому закону, следовало бы ожидать, что на экране получится совершенно резкий переход от света к тени. На самом деле возникает переходная область, в которой освещенность меняется непрерывно и не монотонно. Кроме того, если источник света монохроматический, то можно увидеть узкие темные и светлые полосы, параллельные краю геометрической тени. Эти полосы называются дифракционными.

Обычно дифракцию подразделяют на два типа: дифракция Фраунгофера (дифракция в дальней зоне) и дифракция Френеля (дифракция в ближней зоне), поскольку характер дифракционного распределения освещенности в плоскости экрана будет зависеть от того, насколько близко или далеко расположены экран и источник света от дифрагирующего предмета. Очевидно, что граница между двумя этими случаями до некоторой степени произвольная и зависит от требуемой точности расчетов. В большинстве случаев, если максимальная разность хода от источника до предмета и от предмета до точки наблюдения на экране не превышает одной двадцатой длины волны, то достаточно воспользоваться методом Фраунгофера.

Аналогичное явление возникает и в том случае, если предмет АВ представляет собой апертуру (диафрагму). Можно было бы ожидать, что при уменьшении диаметра апертуры размер светового кружка на экране будет уменьшаться. На самом деле это оправдывается до известного предела, а при дальнейшем уменьшении отверстия размер светового кружка растет. При диаметре отверстия порядка 10^{-3} мм и точечном источнике света получается практически равномерная освещенность экрана, то есть сама диафрагма становится точечным источником, излучающим волну со сферическим фронтом.

С точки зрения геометрической оптики здесь происходит явное нарушение первого закона. Однако, это не так. Просто данное явление (дифракция на отверстии) выходит за границы применимости законов геометрической оптики. Но дифрагированная сферическая волна уже подчиняется закону прямолинейного распространения света.

С явлениями дифракции в оптических приборах мы познакомимся в разделе «Оценка качества оптического изображения».

2. Закон независимости световых пучков.

Закон независимости световых пучков состоит в том, что распространение всякого светового пучка в среде совершенно не зависит от того, есть в ней другие пучки или нет. Световой пучок, прошедший через какую-либо область пространства, выходит из нее одним и тем же, независимо от того, заполнена она другим светом или нет. Так, изображение на сетчатке глаза не изменится, если свет, образующий это изображение, будет на своем пути проходить через боковые пучки света, не попадающие в глаз.

Закон независимости световых пучков необходимо дополнить утверждением, определяющим совместное действие световых пучков при их наложении друг на друга. Оно состоит в том, что **освещенность экрана, создаваемая несколькими световыми пучками, равна сумме освещенностей, создаваемых каждым пучком в отдельности.**

Нарушения справедливости этого утверждения имеют место в явлениях интерференции света, поскольку при взаимодействии когерентных пучков света складываются не освещенности, а комплексные амплитуды.

3. На основании законов прямолинейного распространения и независимости световых пучков сложилось первоначальное представление ***о световых лучах*** как о бесконечно тонких световых трубках. Физическую модель светового луча можно получить, если пропустить свет от источника пренебрежимо малых размеров через небольшое отверстие в непрозрачном экране. Свет, выходящий из отверстия, заполняет область, граница которой (край светового пучка) кажется на первый взгляд резкой. Однако, как мы выяснили, свет дифрагирует на краю отверстия. И размер области, в которой происходит дифракция, порядка длины волны. Поэтому луч, выделенный какой-либо диафрагмой, не может быть бесконечно длинным, так как из-за дифракции распространение света сопровождается увеличением поперечных размеров луча, то есть его боковым уширением и размытием. Чем длиннее луч, тем больше это дифракционное уширение. О луче можно говорить только тогда, когда уширение мало по сравнению с поперечными размерами самого луча. Для этого длина луча не должна превышать определенного предела, величина которого l определяется формулой: $l \ll D^2/\lambda$, где D – диаметр диафрагмы, λ – длина волны.

Однако, если длина волны пренебрежимо мала по сравнению с размерами отверстия, то можно говорить о световом пучке с резкой границей, поскольку дифракционного уширения пучка не происходит: $2\cdot\Theta = 2\cdot\lambda/D \to 0$ при $\lambda \to 0$, где Θ – угол дифракционной расходимости. Отсюда следует: если ограничиться рассмотрением предельного случая пренебрежимо малых длин волн, то на размер отверстия не накладывается никакого ограничения и можно считать, что из отверстия исчезающее малых размеров выходит бесконечно тонкий пучок света – световой луч. Световой пучок конечных размеров можно представить тогда как совокупность (пучок) световых лучей.

Более полное и глубокое представление о световых лучах можно получить из волновой оптики в предельном случае исчезающее малых длин волн. Раздел оптики, в котором пренебрегают конечностью длин волн, что соответствует предельному переходу $\lambda \to 0$, называется геометрической оптикой, поскольку в этом приближении оптические законы можно сформулировать на языке геометрии.

Зададим в пространстве гармоническую волну общего вида:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= E_0(\vec{r})\cdot e^{-i\cdot[\omega\cdot t - k_0\cdot\varphi(\vec{r})]} \\ \vec{H}(\vec{r},t) &= \vec{H}_0(\vec{r})\cdot e^{-i\cdot[\omega\cdot t - k_0\cdot\varphi(\vec{r})]} \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где $\varphi(\vec{r})$ – эйконал, или оптическая длина пути, k_0 – волновое число для вакуума.

Если выражения (1) подставить в уравнения Максвелла и совершить предельный переход $k_0 \to \infty$ (то есть $\lambda_0 \to 0$), то получим уравнение вида

$$\left(grad\,\varphi\right)^2 = n^2, \tag{2}$$

где n – показатель преломления. Поверхности

$$\varphi(\vec{r}) = const \tag{3}$$

называются **геометрическими волновыми фронтами или поверхностями постоянной фазы.** Уравнение (2) можно записать в векторной форме:

$$grad\,\varphi = n \cdot \vec{s}, \tag{4}$$

где

$$\vec{s} = \frac{grad\,\varphi}{\left|grad\,\varphi\right|} \tag{5}$$

– единичный вектор нормали к поверхности φ.

В электромагнитной теории Максвелла вводится понятие вектора Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4 \cdot \pi} \cdot \left[\vec{E} \times \vec{H}\right], \tag{6}$$

который представляет собой количество энергии, протекающей в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлениям $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Другими словами, $\vec{S}$ по величине и направлению представляет собой плотность потока энергии. Далее можно показать, что в однородной изотропной среде направление усредненного по времени вектора Пойнтинга совпадает с нормалью $\vec{s}$ к геометрическому волновому фронту. **Геометрические световые лучи** можно теперь определить как траектории, ортогональные к геометрическим волновым фронтам. Мы будем приписывать этим линиям направление, полагая, что оно в каждой точке совпадает с направлением усредненного вектора Понтинга. **Таким образом, в математическом смысле луч есть линия, прямая в однородном изотропном пространстве, ортогональная волновому фронту и совпадающая по направлению с вектором Пойнтинга.**

В рамках физической оптики показано, что изменение поперечного сечения пучка световых лучей служит мерой изменения интенсивности

света и что с каждым лучом можно связать состояние поляризации и исследовать его изменение вдоль луча. Показано также, что для коротких длин волн общий характер поля такой же, как и в случае плоской волны; более того, законы преломления и отражения, установленные для плоской волны, падающей на плоскую границу раздела двух сред, остаются в приближении геометрической оптики справедливыми и при более общих условиях. **Это означает, что если на границу раздела двух сред (и не обязательно плоскую) падает луч света, то он разделяется на два луча – отраженный и преломленный. Состояние поляризации, коэффициенты отражения и пропускания этих лучей можно вычислить из соответствующих формул для плоской волны**.

Из приведенных рассуждений следует, что для достаточно коротких длин волн полное объяснение оптических явлений можно получить из геометрических соображений путем определения пути световых лучей и соответствующих им интенсивности и состояния поляризации. Оказывается, что такая процедура справедлива при решении многих оптических задач.

4. Закон отражения света.

Определив понятие светового луча, можно сформулировать закон отражения: ***падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью к границе раздела в точке падения (эта плоскость называется плоскостью падения), причем угол падения*** φ ***равен углу отражения*** φ' **(рис. 2):**

$$\varphi = \varphi' . \qquad (7)$$

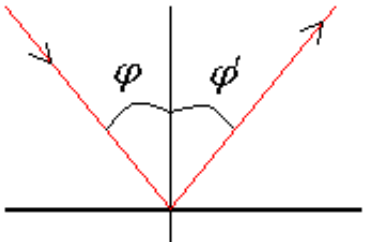


Рис. 2. Отражение света

5. Закон преломления.

Еще в 150 году нашей эры Клавдий Птолемей составил таблицу углов отклонения света в воде для целого ряда углов падения из воздуха (от 10° до 80° с шагом 10°). Принято считать, что древние греки никогда не ставили опытов. Но, не зная закона, такую таблицу можно было составить только на основании эксперимента. Однако надо отметить, что данные таблицы слишком хорошо ложатся на параболу (подчиняются квадратичной интерполяционной формуле), поэтому, они не могли быть

результатом независимых измерений; скорее всего, это ряд чисел, интерполированных по немногим измеренным точкам.

Спустя столетия, в 1621 году, закон преломления был установлен экспериментально голландским ученым Снеллиусом и опубликован только после его смерти. Позднее Декарт в 1637 г. опубликовал этот же закон, не ссылаясь на Снеллиуса. Знал ли Декарт работы Снеллиуса – этот вопрос остался открытым, хотя и был предметом многочисленных дискуссий. Декарт получил закон преломления Снеллиуса, пользуясь аналогией между преломлением света и прохождением упругого шара (мяча) через границу раздела воздуха с водой. Его рассуждения были неубедительны и крайне туманны, но окончательный результат оказался верным. Согласно закону Снеллиуса, ***преломленный луч лежит в плоскости падения, причем отношение синуса угла падения*** φ ***(рис. 3) к синусу угла преломления*** ψ ***для рассматриваемых сред зависит только от длины волны света, но не зависит от угла падения, т. е.***

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = n_{21}. \qquad (8)$$

Постоянная величина n_{21} называется относительным показателем преломления, или коэффициентом преломления второй среды относительно первой.

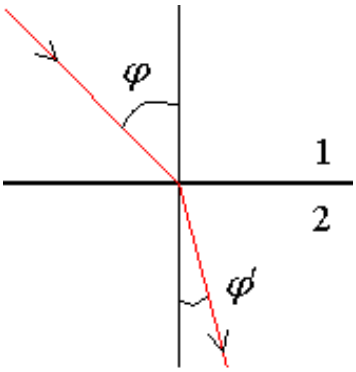


Рис. 3. Преломление света

Для воды $n_{21} = 1.33$. Таблицы Птолемея удивительно согласуются с законом Снеллиуса (8).

Что такое показатель преломления? Из уравнений Максвелла следует, что скорость света V в среде равна c/n, где $n = \sqrt{\varepsilon \cdot \mu}$ – абсолютный показатель преломления, то есть скорость света зависит от того, в какой среде он распространяется, а абсолютный показатель преломления можно определить как отношение скорости света в вакууме к ско-

рости света в среде. Так как оптические системы обычно находятся в воздухе, мы можем принять скорость света в воздухе за основную величину и обозначить ее через c_B.

Отношение c_B/V называют показателем преломления этой среды по отношению к воздуху. Если бы мы определили показатель преломления к вакууму, то он лишь незначительно отличался бы от показателя преломления относительно воздуха, так как показатель преломления воздуха относительно вакуума равен $1{,}0003$. Кроме того, определение показателей преломления веществ относительно вакуума – довольно сложная задача, поэтому их определяют относительно воздуха. Однако в отдельных случаях необходимо знать значение показателя преломления относительно вакуума. Это можно сделать расчетным путем следующим образом.

Показатель преломления воздуха (относительно вакуума) можно вычислить по эмпирической формуле:

$$n_B = 1 + 2.9155 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{H}{1 + \frac{t}{273}}, \qquad (9\text{-}1)$$

где H – атмосферное давление в Па, t – температура воздуха в градусах по Цельсию. Поскольку $H = 101325$ Па – нормальное давление, соответствующее 760 мм рт. ст., то:

$$n_B = 1 + 2.9155 \cdot 10^{-9} \cdot 101325 \cdot \frac{P}{760} \cdot \frac{H}{1 + \frac{t}{273}},$$

или

$$n_B = 1 + 0.0002954 \cdot \frac{P}{760} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{273}}, \qquad (9\text{-}2)$$

где P – атмосферное давление в мм рт. ст.

При $t = 20^0$ и $P = 760$ мм рт. ст. имеем $n_B = 1.0002752 \approx 1.0003$. При расчете оптических систем в большинстве случаев показатель преломления воздуха принимается равным единице.

При необходимости можно рассчитать точное значение показателя среды относительно вакуума, пользуясь формулой (9) и зная значение показателя преломления среды относительно воздуха. Действительно, пусть c – скорость света в вакууме, тогда

$$n_B = \frac{c}{c_B}, \qquad (10)$$

n_B – показатель преломления воздуха относительно вакуума,

$$n_{СР./ВОЗД.} = \frac{c_B}{V}, \qquad (11)$$

$n_{СР./ВОЗД.}$ – показатель преломления среды относительно воздуха.

Из (10) находим

$$c_B = \frac{c}{n_B}$$

и подставляем в (11):

$$n_{СР./ВОЗД.} = \frac{c}{n_B \cdot V} = \frac{n_{СР./ВАК.}}{n_B},$$

отсюда:

$$n_{СР./ВАК.} = n_B \cdot n_{СР./ВОЗД.} \qquad (12)$$

Пример: пусть $n_{СР./ВОЗД.} = 1{,}5$*, тогда*

$$n_{СР./ВАК.} = 1{,}0003 \cdot 1{,}5 = 1{,}50045.$$

Показатель преломления среды относительно вакуума называется абсолютным показателем преломления этой среды. Его будем обозначать через n, снабжая эту букву, если требуется, соответствующими индексами. Например, n_1 – показатель преломления первой среды, а n_2 – второй, тогда:

$$n_{21} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{V_1}{c}}{\frac{V_2}{c}} = \frac{\frac{c}{V_2}}{\frac{c}{V_1}} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (13)$$

С учетом соотношения (13) закон преломления можно записать в виде:

$$n_1 \cdot \sin\varphi = n_2 \cdot \sin\psi \quad . \qquad (14)$$

6. Следствием основных законов геометрической оптики является правило, которое называют еще ***законом обратимости хода лучей: путь светового луча не изменяется при изменении направления его распространения на прямо противоположное.***

1.2. Полное внутреннее отражение

Из закона (8) можно получить интересное следствие. Если $n_{21} < 1$, то есть свет падает из более плотной среды в менее плотную, то может оказаться, что величина $\sin\varphi'$, формально вычисленная по формуле (8), начинает превосходить единицу, то есть $\frac{\sin\varphi}{n_{21}} > 1$. Соответствующего угла преломления не существует. Поэтому преломленный луч не возникает, а свет отражается полностью. Это явление называют полным внутренним отражением. Угол падения, при котором оно возникает, определяется условием $\varphi = \varphi_0$ при $\varphi' = 90^0$ (рис. 4), то есть:

$$sin\,\varphi_0 = n_{21}\,. \qquad (15)$$

Угол φ_0 называется предельным углом полного внутреннего отражения.

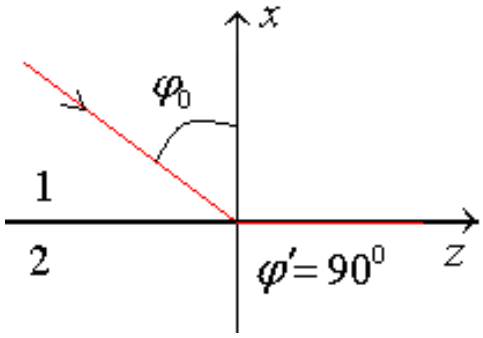


Рис. 4. Полное внутреннее отражение

Примечание.

Из формул Френеля следует, что при полном внутреннем отражении весь падающий свет отражается обратно в первую среду. Но, тем не менее, электромагнитное поле во второй среде не равно нулю, отсутствует лишь поток энергии через границу.

Возникает неоднородная волна, которая распространяется вдоль поверхности раздела в плоскости падения и меняется экспоненциально с изменением расстояния от этой поверхности. Эффективная глубина проникновения волны во вторую среду – порядка λ. Поскольку потоки энергии падающей и отраженной волны равны, то это означает, что неоднородная волна движется вдоль поверхности раздела и затем возвращается в первую среду. Места входа энергии во вторую среду и ее возвращения в первую несколько смещены друг

относительно друга. Проникновение волны во вторую среду было доказано экспериментально.

Кроме того, при полном внутреннем отражении компоненты электрического поля $E_{//}$ *и* $E_{\perp}$ *испытывают скачки фаз разной величины. Вследствие этого линейно поляризованный свет окажется поляризованным эллиптически. Это свойство можно использовать (как было доказано еще Френелем) для преобразования линейно поляризованного света в циркулярно поляризованный.*

Полное внутреннее отражение обуславливает возникновение миражей, когда земная поверхность сильно нагрета. Например, если шоссе сильно нагрето, то температура воздуха максимальна у поверхности шоссе и убывает при удалении от поверхности. Следовательно, показатель преломления воздуха минимален вблизи поверхности шоссе и возрастает при удалении от поверхности. Вследствие этого лучи, идущие под достаточно малым углом к поверхности шоссе, испытывают полное внутреннее отражение. Можно увидеть достаточно далеко идущую впереди машину в перевернутом состоянии (точнее, зеркальное изображение). Аналогично, зеркальное изображение облака от шоссе приведет к возникновению впечатления о наличии лужи на поверхности разогретого шоссе.

Полное внутреннее отражение применяется часто в конструкции так называемых отражательных призм. Из них простейшей является прямоугольная равнобедренная призма (рис. 5).

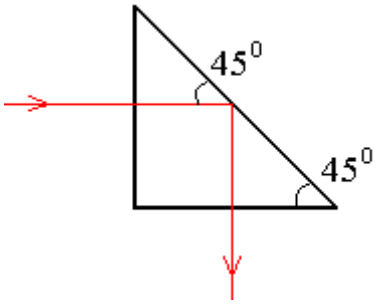


Рис. 5. Отражательная призма

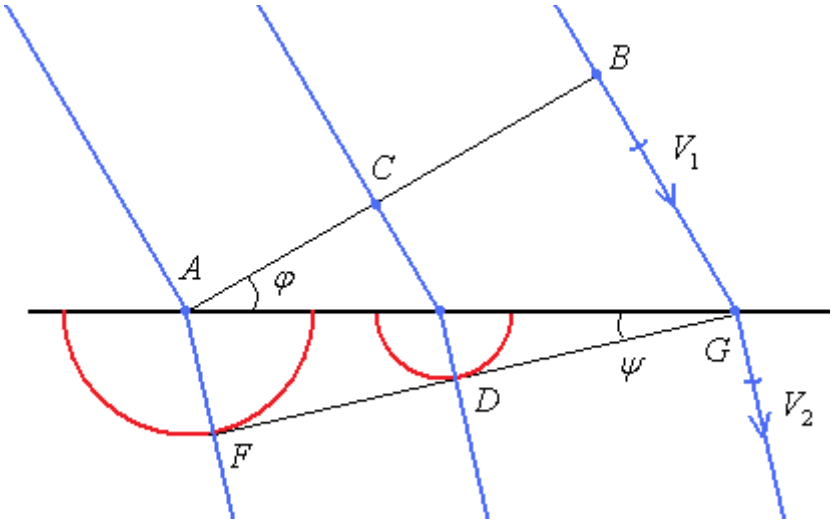
Пример.

Для часто применяемого стекла К8 имеем: $n_D = 1.5163$, *тогда* $\sin\varphi_0 = \dfrac{1}{n_D}$, *отсюда,* $\varphi_0 \approx 41^0 16'$. *Поскольку* $\varphi_0 < 45^0$, *то выполняется условие полного внутреннего отражения. В результате прямоугольная отражательная призма отклоняет световые лучи на 90° от их первоначального направления.*

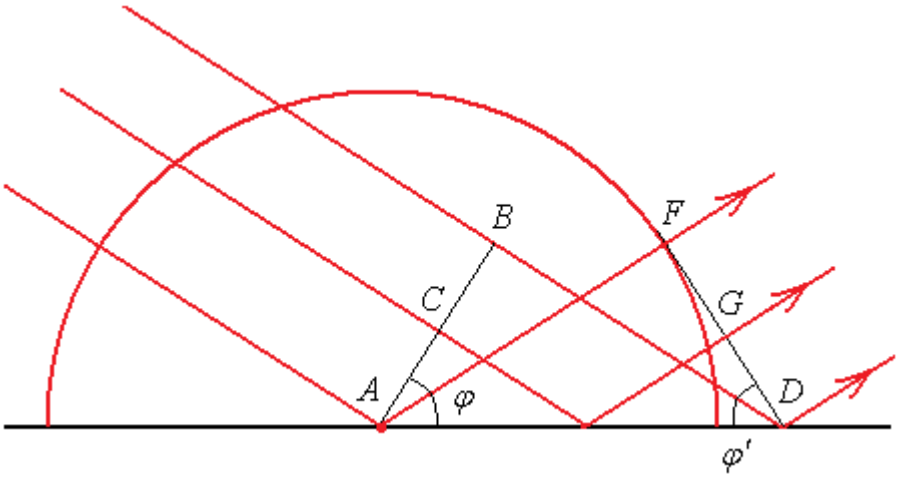
1.3. Явления отражения и преломления света с точки зрения волновой теории

Рассмотрим явления отражения и преломления света с точки зрения волновой теории Гюйгенса.

Пусть плоская волна падает на плоскую границу раздела двух сред (рис. 6). В момент времени $t = t_1$ фронт волны пересечет границу раздела в точке A. В этот момент из точки A начнут распространяться вторичные волны Гюйгенса: одна в первую, другая – во вторую среду.



а) преломленная волна



б) отраженная волна

Рис. 6. Преломление и отражение волны

В момент времени $t = t_2$ точка B падающего фронта достигает точки G границы раздела. Во всех промежуточных от A до G включительно точках начнут возникать вторичные волны в момент времени,

когда падающий фронт будет пересекать эти точки. Согласно принципу Гюйгенса, от наложения таких вторичных волн в первой среде образуется отраженная, а во второй среде – преломленная волны. Огибающая FDG вторичных волн во второй среде (если среда однородная и изотропная) есть плоскость, определяющая волновой фронт преломленной среды. Аналогично строится и волновой фронт отраженной волны.

Таким образом, падающая волна возбуждает возмущение, бегущее вдоль границы раздела со скоростью $\overline{V}$. Найдем эту скорость.

Из рис. 6 находим:

$$AG = \frac{BG}{\sin\varphi} = \frac{AF}{\sin\psi}. \qquad (16)$$

Так как $BG = V_1 \cdot (t_2 - t_1) = V_1 \cdot \Delta t$, (17)

$$AF = V_2 \cdot (t_2 - t_1) = V_2 \cdot \Delta t \ , \qquad (18)$$

где V_1 – скорость света в первой среде; V_2 – скорость света во второй среде, то:

$$AG = \frac{V_1 \cdot \Delta t}{\sin\varphi} = \frac{V_2 \cdot \Delta t}{\sin\psi}. \qquad (19)$$

Тогда:

$$\overline{V} = \frac{AG}{\Delta t} = \frac{V_1}{\sin\varphi} = \frac{V_2}{\sin\psi}. \qquad (20)$$

Но отраженные и преломленные волны порождаются падающей волной и поэтому бегут вместе с ней вдоль границы раздела с той же скоростью. Следовательно, для отраженной волны можно написать также:

$$\overline{V} = \frac{AD}{\Delta t} = \frac{V_1}{\sin\varphi'}, \text{ где} \qquad (21)$$

φ' и ψ – углы наклона фронтов соответственно отраженной и преломленной волны к границе раздела сред.

В результате получается:

$$\frac{V_1}{\sin\varphi} = \frac{V_1}{\sin\varphi'} = \frac{V_2}{\sin\psi}. \qquad (22)$$

Этими соотношениями определяются направления волновых фронтов отраженной и преломленной волн. А так как в плоской волне световые лучи перпендикулярны к новым фронтам, то эти же соотношения

определяют также направления отраженных и преломленных лучей. Легко видеть, что φ есть угол падения, φ' – угол отражения, ψ – угол преломления. Из (22) следует, что $\varphi = \varphi'$ (закон отражения) и

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{V_1}{V_2} \text{ – закон преломления.} \qquad (23)$$

Отношение $\frac{V_1}{V_2}$ обычно обозначают символом n_{21} и называют относительным показателем преломления второй среды относительно первой. Определим также абсолютный показатель преломления среды n как показатель преломления из вакуума в эту среду, то есть

$$n = \frac{c}{V}. \qquad (24)$$

Если n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления двух сред, то относительный показатель преломления n_{21} для преломления из первой среды во вторую равен:

$$n_{21} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{V_1}{c}}{\frac{V_2}{c}} = \frac{\frac{c}{V_2}}{\frac{c}{V_1}} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (25)$$

В электромагнитной теории Максвелла показано, что абсолютный показатель преломления определяется соотношением:

$$n = \sqrt{\varepsilon \cdot \mu}. \qquad (26)$$

Формула Максвелла (26) служит хорошим приближением для газов с простой химической структурой, для жидких углеводородов, но для многих твердых тел и ряда жидкостей наблюдается сильное отклонение от формулы (26).

1.4. Закон преломления с точки зрения принципа Ферма

Согласно принципу Ферма, луч света из точки A приходит в точку A' по пути, требующего наименьшего времени. Из рис. 7 находим:

$$L_1 = \sqrt{x^2 + h^2},$$

$$L_2 = \sqrt{h'^2 + (a - x)^2},$$

$t_1 = \dfrac{L_1}{V_1}$ – время распространения луча из точки A в точку O ,

$t_2 = \dfrac{L_2}{V_2}$ – время распространения луча из точки O в точку A' ,

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{h'^2 + (a-x)^2}}{V_2} \quad ,$$

t – время распространения луча из точки A в точку A'.

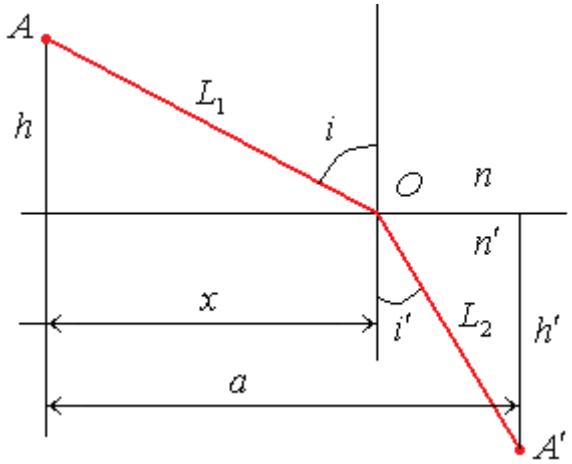


Рис. 7. Преломление света на границе раздела двух сред

Далее находим:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{V_1 \cdot \sqrt{x^2 + h^2}} + \frac{-(a-x)}{V_2 \cdot \sqrt{(a-x)^2 + h'^2}} = \frac{\sin i}{V_1} - \frac{\sin i'}{V_2} = 0 ,$$

отсюда:

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{c}{n}}{\frac{c}{n'}} = \frac{n'}{n} . \qquad (27)$$

2. ЗАКОН ПРЕЛОМЛЕНИЯ В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ

В дальнейшем при построении схем примем следующие правила:

- **нормаль к преломляющей (отражающей) поверхности всегда направлена слева направо;**
- **за положительное направление распространения света всегда будет приниматься направление слева направо;**
- **при математическом моделировании оптическая система всегда располагается так, чтобы ход луча в пространстве предметов был положительный.**

Для того, чтобы учитывать направление распространения света (положительное или отрицательное) при математических расчетах, введем следующие величины:

$\varepsilon = +1$ – если падающий луч в данной среде распространяется в положительном направлении – слева направо;

$\varepsilon = -1$ – если падающий луч в данной среде распространяется в отрицательном направлении – справа налево;

$\varepsilon' = +1$ – если преломленный (отраженный) луч в данной среде распространяется в положительном направлении – слева направо;

$\varepsilon' = -1$ – если преломленный (отраженный) луч в данной среде распространяется в отрицательном направлении – справа налево.

Сформулируем закон преломления в виде:

Падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости с нормалью к преломляющей поверхности в точке падения, а направления этих лучей связаны уравнением

$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i', \qquad (1)$$

где n и n' – показатели преломления первой и второй сред (рис. 1), угол i определяется как угол между направлением нормали $\vec{o}$ в точке падения и направлением падающего луча, а угол i' – как угол между направлением нормали и направлением преломленного луча. Углы i и i' отсчитываются по кратчайшему пути, поэтому их значения могут лежать в интервале от 0 до π и, значит, величины $\sin i$ и $\sin i'$ – положительны.

Очевидно, что при преломлении углы i и i' лежат в одной четверти – либо в первой, либо во второй. Математически это можно записать следующим образом: $sign(\cos i) = sign(\cos i')$.

Закон отражения можно сформировать следующим образом: падающий и отраженный луч лежат в одной плоскости с нормалью

к отражающей поверхности в точке падения, и эта нормаль делит угол между лучами на две равные части.

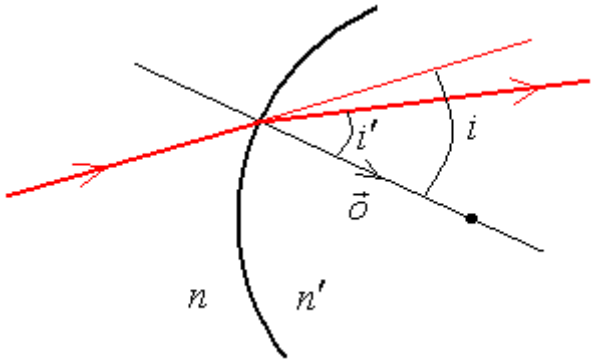


Рис. 1. Преломление света

Этот закон можно рассматривать, как частный случай закона преломления. Если в уравнении (1) положить $n = n'$, то получим

$$\sin i = \sin i' . \qquad (2)$$

Согласно закону отражения можно записать (рис. 2):

$$i' = \pi - i . \qquad (3)$$

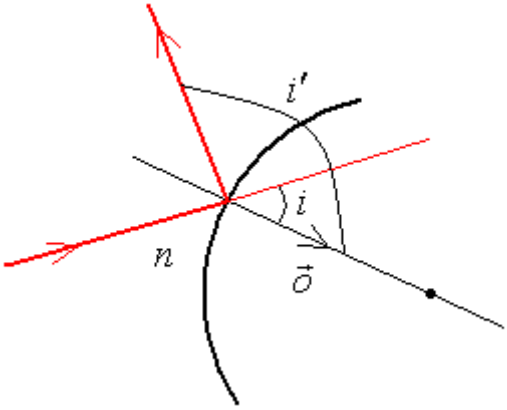


Рис. 2. Отражение света

Очевидно, что решение (3) удовлетворяет уравнению (2). Как следует из выражения (3), при отражении углы i и i' лежат в разных четвертях. Математически это условие можно выразить требованием

$$\cos i' = -\cos i . \qquad (4)$$

Обе части закона преломления, относящиеся к величине и компланарности углов i и i', можно объединить в одну векторную форму.

Примечание. Компланарные – лежащие в одной плоскости.

Пусть направление вектора $\vec{s}$ совпадает с направлением падающего луча (рис. 3), а его длина $|\vec{s}| = n$. Пусть направление вектора $\vec{s}'$ совпадает с направлением преломленного луча, а его длина $|\vec{s}'| = n'$. Пусть $\vec{o}$ – единичный вектор, перпендикулярный к преломляющей поверхности в точке падения и направленный вправо (***всегда***). Тогда на основании принятых обозначений и определения векторного произведения можно записать:

$$|\vec{s} \times \vec{o}| = |\vec{s}| \cdot |\vec{o}| \cdot \sin i = n \cdot \sin i, \tag{5}$$

$$|\vec{s}' \times \vec{o}| = |\vec{s}'| \cdot |\vec{o}| \cdot \sin i' = n' \cdot \sin i'. \tag{6}$$

Поскольку правые части выражений (5) и (6) равны, то равны и левые, то есть равны модули векторов $\vec{s} \times \vec{o}$ и $\vec{s}' \times \vec{o}$:

$$|\vec{s} \times \vec{o}| = |\vec{s}' \times \vec{o}|. \tag{7}$$

Согласно закону преломления, векторы $\vec{s}$, $\vec{s}\,'$ и $\vec{o}$ лежат в одной плоскости – плоскости падения. Поэтому векторы $\vec{s} \times \vec{o}$ и $\vec{s}' \times \vec{o}$, ортогональные плоскости падения, параллельны и значит, согласно (7), равны.

Тогда закон преломления можно записать в виде:

$$\vec{s} \times \vec{o} = \vec{s}' \times \vec{o}. \tag{8}$$

Запишем уравнение (8) в виде:

$$(\vec{s}' - \vec{s}) \times \vec{o} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) показывает, что вектор $(\vec{s}' - \vec{s})$ направлен вдоль вектора $\vec{o}$, так как синус угла между векторами $(\vec{s}' - \vec{s})$ и $\vec{o}$ должен быть равен нулю.

В этом случае вектор $(\vec{s}' - \vec{s})$ должен отличаться от вектора $\vec{o}$ лишь на скалярный множитель Γ, то есть:

$$(\vec{s}' - \vec{s}) = \Gamma \cdot \vec{o}, \tag{10}$$

где Γ – постоянная отклонения.

Умножим (10) скалярно на $\vec{o}$:

$$(\vec{s}' - \vec{s}) \cdot \vec{o} = \Gamma \cdot \vec{o} \cdot \vec{o},$$

или

$$\Gamma = \vec{s}' \cdot \vec{o} - \vec{s} \cdot \vec{o} = n' \cdot \cos i' - n \cdot \cos i, \tag{11}$$

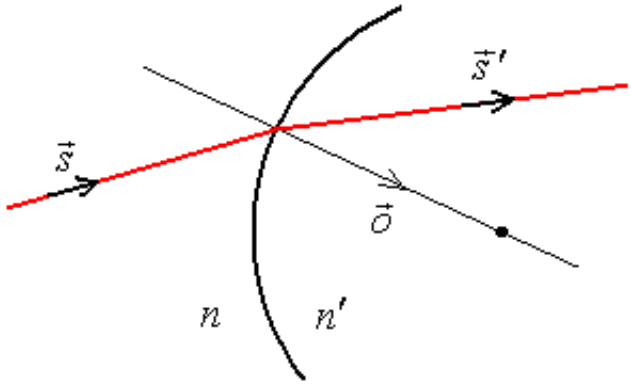


Рис. 3. Преломление света (векторное представление)

Очевидно, что при распространении света справа налево $\vec{o}\cdot\vec{s}<0$ и $\vec{o}\cdot\vec{s}'<0$ (рис. 4).

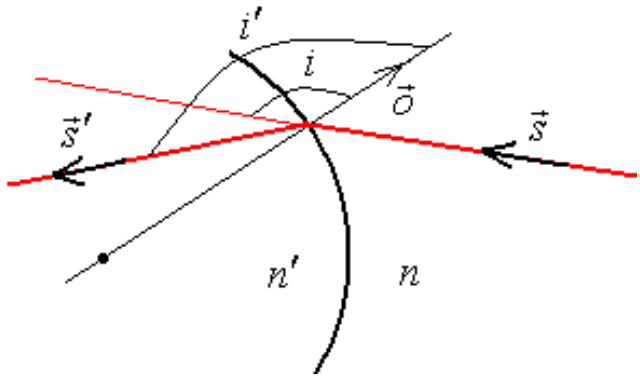


Рис. 4. Преломление. Свет распространяется справа налево

С учетом этого обстоятельства преобразуем:

$$\begin{aligned}\vec{o}\cdot\vec{s}' &= n'\cdot\cos i' = n'\cdot\varepsilon'\cdot\left|\cos i'\right| = n'\cdot\varepsilon'\cdot\sqrt{1-\sin^2 i'} = \\ &= \varepsilon'\cdot\sqrt{n'^2-\left(n'\cdot\sin i'\right)^2} = \sqrt{n'^2-n^2\cdot\sin^2 i} = \\ &= \varepsilon'\cdot\sqrt{n'^2-n^2+n^2\cdot\cos^2 i} = \varepsilon'\cdot\sqrt{n'^2-n^2+\left(\vec{o}\cdot\vec{s}\right)^2}\end{aligned} . \qquad (12)$$

Таким образом, для преломления

$$\Gamma = \varepsilon'\cdot\sqrt{n'^2-n^2+\left(\vec{o}\cdot\vec{s}\right)^2}-\left(\vec{o}\cdot\vec{s}\right) . \qquad (13)$$

$$\vec{s}' = \vec{s}+\Gamma\cdot\vec{o} . \qquad (14)$$

Для отражения (рис. 5), с учетом (4), имеем:

$$\begin{aligned}\Gamma &= n'\cdot\cos i' - n\cdot\cos i = n\cdot\cos i' - n\cdot\cos i = \\ &= -n\cdot\cos i - n\cdot\cos i = -2\cdot n\cdot\cos i = -2\left(\vec{o}\cdot\vec{s}\right).\end{aligned}$$

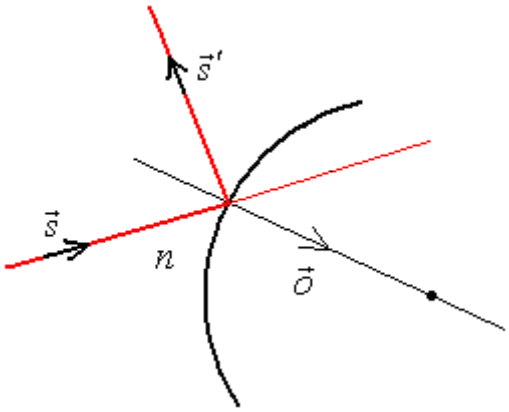


Рис. 5. Отражение света (векторное представление)

Таким образом, для отражения

$$\Gamma = -2 \cdot \left(\vec{o} \cdot \vec{s} \right), \tag{15}$$

$$\vec{s}\,' = \vec{s} - 2 \cdot \left(\vec{o} \cdot \vec{s} \right) \cdot \vec{o}\,. \tag{16}$$

3. СФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

3.1. Расчет хода лучей через сферическую поверхность

Выберем начало координат в центре сферы o. Луч в пространстве предметов зададим одной из своих точек A (рис. 1), определенной вектором $\vec{a}(x,y,z)$, и направляющим вектором $\vec{s}(\xi,\eta,\zeta)$, причем $|\vec{s}|=n$. Пусть A^* – точка падения луча на поверхность, задается вектором $\vec{a}^*$; $\vec{o}$ – единичный вектор нормали к поверхности в точке падения; r – радиус сферы. Зададим преломленный луч одной из своих точек A', определяемой вектором $\vec{a}'$, и направляющим вектором $|\vec{s}'|=n'$.

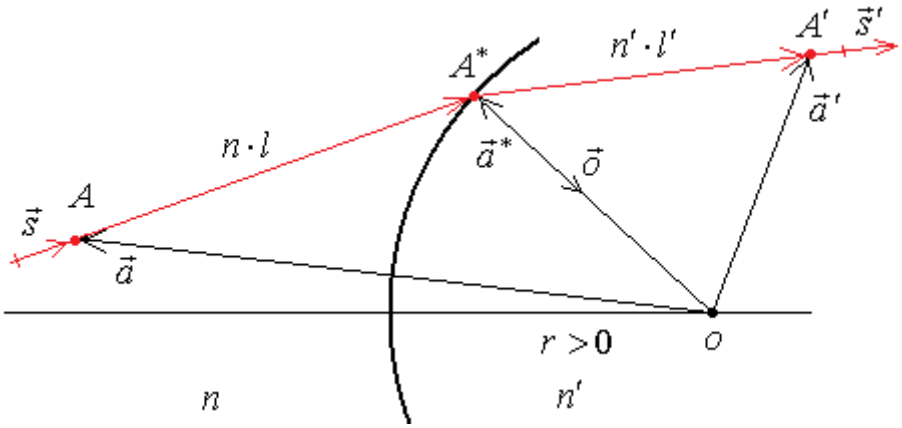


Рис. 1. Преломление света сферической поверхностью

Далее общая схема расчета хода луча будет такой:

1. При заданных векторах $\vec{a}$ и $\vec{s}$ находим точку встречи луча с поверхностью:

$$\vec{a}^* = \vec{a} + \ell\cdot\vec{s}\text{, где } \ell \text{ – произвольное число.}$$

   Очевидно, что $\ell\cdot n = AA^*$.
2. Находим компоненты вектора $\vec{o}$, проведенного к точке падения.
3. Находим направляющий вектор преломленного луча

$$\vec{s}' = \vec{s} + \Gamma\cdot\vec{o}\,.$$

4. Находим положение конечной точки $\vec{A}'$:

$$\vec{a}' = \vec{a}^* + \ell'\cdot\vec{s}'\,,$$

   где ℓ' – произвольное число, причем $\ell'\cdot n' = A^*A'$.

Рассмотрим расчет хода луча более подробно. Очевидно, что

$$\vec{a}^* = -r \cdot \vec{o}\,. \qquad (1)$$

С учетом (1):

$$\vec{s}' = \vec{s} + \Gamma \cdot \vec{o} = \vec{s} - \frac{\Gamma}{r} \cdot \vec{a}^* = \vec{s} - \varphi \cdot \vec{a}^*, \qquad (2)$$

где $\varphi = \dfrac{\Gamma}{r}$.

Из выражений

$$\vec{s}' = \vec{s} - \varphi \cdot \vec{a}^*,$$
$$\vec{a}' = \vec{a}^* + \ell' \cdot \vec{s}',$$
$$\vec{a}^* = \vec{a} + \ell \cdot \vec{s}\,.$$

находим:

$$\vec{s}' = \vec{s} - \varphi \cdot (\vec{a} + \ell \cdot \vec{s}) = -\varphi \cdot \vec{a} + (1 - \ell \cdot \varphi) \cdot \vec{s}\,,$$
$$\vec{a}' = \vec{a} + \ell \cdot \vec{s} + \ell' \cdot [-\varphi \cdot \vec{a} + (1 - \ell \cdot \varphi) \cdot \vec{s}] =$$
$$= (1 - \ell' \cdot \varphi) \cdot \vec{a} + (\ell + \ell' - \ell \cdot \ell' \cdot \varphi) \cdot \vec{s}\,.$$

Окончательно

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}' &= (1 - \ell' \cdot \varphi) \cdot \vec{a} + (\ell + \ell' - \ell \cdot \ell' \cdot \varphi) \cdot \vec{s} \\ \vec{s}' &= -\varphi \cdot \vec{a} + (1 - \ell \cdot \varphi) \cdot \vec{s} \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Выберем значение ℓ' так, чтобы коэффициент при векторе $\vec{s}$ в первом уравнении системы (3) равнялся нулю:

$$\ell + \ell' - \ell \cdot \ell' \cdot \varphi = 0\,,$$

или

$$\ell + \ell' \cdot (1 - \ell \cdot \varphi) = 0\,,$$

отсюда

$$\ell' = \frac{\ell}{\ell \cdot \varphi - 1}\,. \qquad (4)$$

Система (3) с учетом (4) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}' &= (1 - \ell' \cdot \varphi) \cdot \vec{a} \\ \vec{s}' &= -\varphi \cdot \vec{a} + (1 - \ell \cdot \varphi) \cdot \vec{s} \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Введем обозначение:

$$m = 1 - \ell' \cdot \varphi\,.$$

С учетом (4) получим:

$$m = 1 - \frac{\ell}{\ell \cdot \varphi - 1} \cdot \varphi = \frac{\ell \cdot \varphi - 1 - \ell \cdot \varphi}{\ell \cdot \varphi - 1} = \frac{1}{1 - \ell \cdot \varphi}\,. \qquad (7)$$

С учетом введенного обозначения система (5) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}' &= m\cdot\vec{a} \\ \vec{s}' &= -\varphi\cdot\vec{a}+\frac{1}{m}\cdot\vec{s} \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Преимущество такого выбора ℓ' заключается в том, что начальная точка A, начало координат и конечная точка A' лежат на одной прямой. Точку A' будем называть точкой сечения, сопряженной с точкой A, а величину m – увеличением для сечения.

Из уравнений (8) следует, что существует инвариантный вектор $\vec{J}$:

$$\vec{J}=\vec{a}\times\vec{s}=\vec{a}'\times\vec{s}'=\vec{a}^*\times\vec{s}=\vec{a}^*\times\vec{s}'.$$

Действительно

$$\vec{a}'\times\vec{s}'=m\cdot\vec{a}\times(-\varphi\cdot\vec{a}+\frac{1}{m}\cdot\vec{s})=-m\cdot\varphi\cdot\vec{a}\times\vec{a}+m\cdot\vec{a}\times\frac{1}{m}\cdot\vec{s}=\vec{a}\times\vec{s},$$

$$\vec{a}^*\times\vec{s}=(\vec{a}+\ell\cdot\vec{s})\times\vec{s}=\vec{a}\times\vec{s}+\ell\cdot\vec{s}\times\vec{s}=\vec{a}\times\vec{s},$$

$$\vec{a}^*\times\vec{s}'=(\vec{a}+\ell\cdot\vec{s})\times(-\varphi\cdot\vec{a}+\frac{1}{m}\cdot\vec{s})=$$

$$=-\varphi\cdot\vec{a}\times\vec{a}-\ell\cdot\varphi\cdot\vec{s}\times\vec{a}+\frac{1}{m}\cdot\vec{a}\times\vec{s}+\frac{\ell}{m}\cdot\vec{s}\times\vec{s}=$$

$$=\ell\cdot\varphi\cdot\vec{a}\times\vec{s}+\frac{1}{m}\cdot\vec{a}\times\vec{s}=(\ell\cdot\varphi+1-\ell\cdot\varphi)\cdot\vec{a}\times\vec{s}=\vec{a}\times\vec{s}.$$

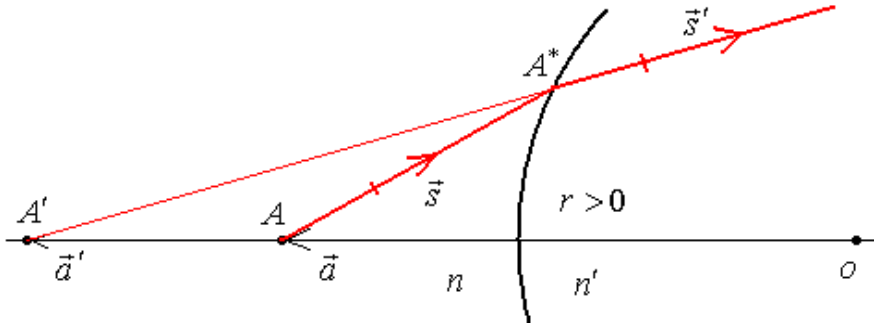


Рис. 2. Определение точки сечения при преломлении на сферической поверхности

Кроме того, из уравнений (8) следует, что векторы $\vec{a}'$ и $\vec{s}'$ лежат в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{s}$. Это означает, что задача о распространении лучей через сферическую поверхность является двумерной.

Введем новые переменные:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}^2 &= x^2+y^2+z^2=2\cdot U \\ \vec{a}\cdot\vec{s} &= x\cdot\xi+y\cdot\eta+z\cdot\zeta=V \end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

Вернемся к уравнениям:

$$\vec{a}^* = \vec{a} + \ell \cdot \vec{s}\,, \tag{11}$$

$$\vec{s}' = \vec{s} - \varphi \cdot \vec{a}^*\,. \tag{12}$$

Умножим (11) на $\vec{s}$ скалярно:

$$\vec{a}^* \cdot \vec{s} = \vec{a} \cdot \vec{s} + \ell \cdot \vec{s}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{s} + \ell \cdot n^2\text{, отсюда}$$

$$\ell \cdot n^2 = \vec{a}^* \cdot \vec{s} - \vec{a} \cdot \vec{s}\,. \tag{13}$$

Умножим (12) на $\vec{a}^*$ скалярно:

$$\vec{a}^* \cdot \vec{s}' = \vec{a}^* \cdot \vec{s} - \varphi \cdot \vec{a}^{*2} = \vec{a}^* \cdot \vec{s} - \varphi \cdot r^2\text{, отсюда}$$

$$\varphi \cdot r^2 = \vec{a}^* \cdot \vec{s} - \vec{a}^* \cdot \vec{s}'\,. \tag{14}$$

Далее находим (с учетом обозначений (10)):

$$\left.\begin{aligned} \vec{J}^2 &= [\vec{a} \times \vec{s}]^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{s}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{s})^2 = 2 \cdot U \cdot n^2 - V^2 \\ \vec{J}^2 &= [\vec{a}^* \times \vec{s}]^2 = \vec{a}^{*2} \cdot \vec{s}^{\,2} - (\vec{a}^* \cdot \vec{s})^2 = r^2 \cdot n^2 - (\vec{a}^* \cdot \vec{s})^2 \\ \vec{J}^2 &= [\vec{a}^* \times \vec{s}']^2 = \vec{a}^{*2} \cdot \vec{s}'^2 - (\vec{a}^* \cdot \vec{s}')^2 = r^2 \cdot n'^2 - (\vec{a}^* \cdot \vec{s}')^2 \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

Из (15) находим:

$$(\vec{a}^* \cdot \vec{s})^2 = r^2 \cdot n^2 - \vec{J}^2 = r^2 \cdot n^2 - (2 \cdot U \cdot n^2 - V^2)\text{, отсюда}$$

$$\vec{a}^* \cdot \vec{s} = -r \cdot \sqrt{n^2 - \frac{1}{r^2} \cdot (2 \cdot U \cdot n^2 - V^2)}\,, \tag{16}$$

$$(\vec{a}^* \cdot \vec{s}')^2 = r^2 \cdot n'^2 - \vec{J}^2 = r^2 \cdot n'^2 - (2 \cdot U \cdot n^2 - V^2)\text{, отсюда}$$

$$\vec{a}^* \cdot \vec{s}' = -r \cdot \sqrt{n'^2 - \frac{1}{r^2} \cdot (2 \cdot U \cdot n^2 - V^2)}\,. \tag{17}$$

Из рис. 1 видно, что для преломления всегда $(\vec{a} \cdot \vec{s}) < 0$ и $(\vec{a}^* \cdot \vec{s}') < 0$; $r > 0$ в соответствии с принятыми правилами знаков, поэтому в (16) и (17) перед корнем стоит знак минус.

Выражения (16) и (17) можно переписать в виде:

$$-\frac{1}{r} \cdot \vec{a}^* \cdot \vec{s} = Q = \sqrt{n^2 - \frac{1}{r^2} \cdot \vec{J}^2}\,, \tag{18}$$

$$-\frac{1}{r} \cdot \vec{a}^* \cdot \vec{s}' = Q' = \sqrt{n'^2 - \frac{1}{r^2} \cdot \vec{J}^2}\,, \tag{19}$$

где $\vec{J}^2 = [\vec{a} \times \vec{s}]^2 = 2 \cdot U \cdot n^2 - V^2$.

Для отражения

$$Q' = -\frac{1}{r}\cdot\vec{a}^*\cdot\vec{s}' = -\frac{1}{r}\cdot\left|\vec{a}^*\right|\cdot\left|\vec{s}'\right|\cdot\cos i' = -\frac{1}{r}\cdot\left|\vec{a}^*\right|\cdot\left|\vec{s}'\right|\cdot(-\cos i) =$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\left|\vec{a}^*\right|\cdot n'\cdot\cos i = \frac{1}{r}\cdot\left|\vec{a}^*\right|\cdot n\cdot\cos i =$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\left|\vec{a}^*\right|\cdot\left|\vec{s}\right|\cdot\cos i = \frac{1}{r}\cdot\left(\vec{a}^*\cdot\vec{s}\right) = -Q.$$

Таким образом, для отражения $Q' = -Q$.

Из (13) находим, с учетом (10) и (18):

$$\ell = \frac{1}{n^2}\cdot(\vec{a}^*\cdot\vec{s} - \vec{a}\cdot\vec{s}) = \frac{1}{n^2}\cdot(-r\cdot Q - V) = -\frac{1}{n^2}\cdot(r\cdot Q + V). \qquad (20)$$

Из (14) с учетом (18) и (19) находим:

$$\varphi = \frac{1}{r^2}\cdot(\vec{a}^*\cdot\vec{s} - \vec{a}^*\cdot\vec{s}') = \frac{1}{r^2}\cdot(-r\cdot Q + r\cdot Q') = \frac{1}{r}\cdot(Q' - Q). \qquad (21)$$

Согласно (7), с учетом (20) и (21) находим:

$$m = \frac{1}{1-\ell\cdot\varphi} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}\cdot(r\cdot Q+V)\cdot\frac{1}{r}\cdot(Q'-Q)} =$$

$$= \frac{n^2}{n^2 + Q\cdot Q' - Q^2 + \frac{1}{r}\cdot(Q'-Q)\cdot V} =$$

$$= \frac{n^2}{n^2 - Q^2 + Q\cdot Q' + \frac{1}{r}\cdot(Q'-Q)\cdot V}.$$

Согласно (18):

$$n^2 - Q^2 = \frac{1}{r^2}\cdot\vec{J}^2, \text{ тогда}$$

$$m = \frac{n^2}{\frac{1}{r^2}\cdot\vec{J}^2 + Q\cdot Q' + \frac{1}{r}\cdot(Q'-Q)\cdot V}. \qquad (22)$$

Таким образом, можно привести сводку формул:

<u>Задано</u>:

начало координат – в центре сферы,

направление осей координат – произвольное.

r – радиус кривизны сферы,

n, n' – показатели преломления среды до и после поверхности,
$\vec{a}(x, y, z)$ – вектор, задающий начальную точку,
$\vec{s}(\xi, \eta, \zeta)$ – направляющий вектор падающего луча.
Начальная, конечная точки и центр сферы лежат на одной прямой.

Расчет:

$$U = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2),$$

$$V = \xi \cdot x + \eta \cdot y + \zeta \cdot z,$$

$$\vec{J}^2 = 2 \cdot U \cdot n^2 - V^2,$$

$$Q = \sqrt{n^2 - \frac{1}{r^2} \cdot \vec{J}^2},$$

$$Q' = \sqrt{n'^2 - \frac{1}{r^2} \cdot \vec{J}^2}$$ – для преломления,

$Q' = -Q$ – для отражения,

$$\ell = -\frac{1}{n^2} \cdot (r \cdot Q + V),$$

$$\varphi = \frac{1}{r} \cdot (Q' - Q),$$

$$\ell' = \frac{\ell}{\ell \cdot \varphi - 1},$$

$$m = \frac{1}{1 - \ell \cdot \varphi},$$

$$x' = m \cdot x,$$

$$y' = m \cdot y,$$

$$z' = m \cdot z,$$

x', y', z' – компоненты вектора $\vec{a}'$ конечной точки,

$$\xi' = -\varphi \cdot x + \frac{1}{m} \cdot \xi,$$

$$\eta' = -\varphi \cdot y + \frac{1}{m} \cdot \eta,$$

$$\zeta' = -\varphi \cdot z + \frac{1}{m} \cdot \zeta,$$

ξ', η', ζ' – компоненты направляющего вектора преломленного (отраженного) луча.

Расчеты можно значительно упростить, если соответствующим образом выбрать систему координат (рис. 3).

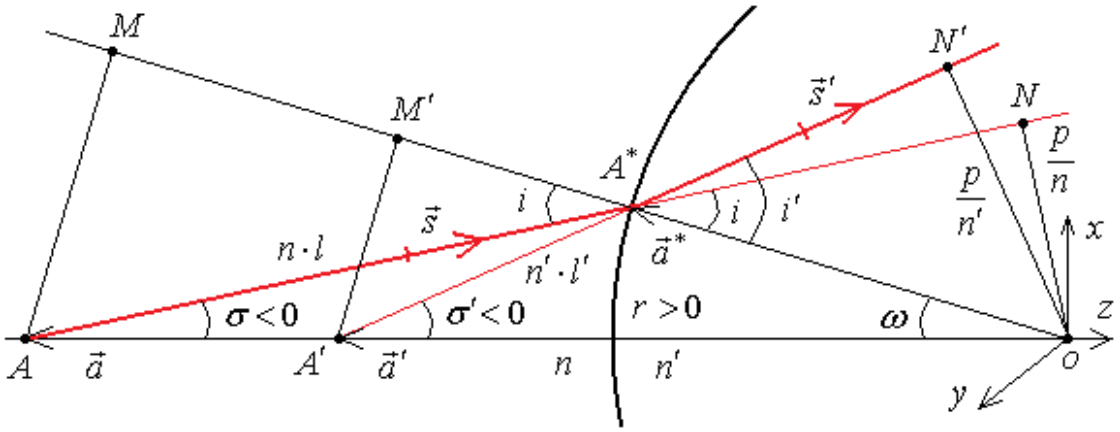


Рис. 3. Тригонометрический расчет хода луча через сферическую поверхность; $i > 0$, $i' > 0$, $\omega > 0$

Проведем ось oz через начальную точку A (точку предмета) и центр сферы o. В качестве плоскости xoz выберем плоскость падения. Начало координат оставляем в центре сферы.

При таком выборе системы координат будем иметь:

$$\vec{a} = \vec{a}(0,0,z), \quad \vec{a}' = \vec{a}'(0,0,z'),$$
$$\vec{s} = \vec{s}(\xi,0,\zeta), \quad \vec{s}' = \vec{s}'(\xi',0,\zeta'); \tag{23}$$

$\vec{J} = \vec{J}(0, z \cdot \xi, 0) = \vec{J}(0, z' \cdot \xi', 0)$, действительно:

$$\vec{J} = \vec{a} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & z \\ \xi & 0 & \zeta \end{vmatrix} = \vec{j} \cdot z \cdot \xi, \tag{23-1}$$

$$\vec{J} = \vec{a}' \times \vec{s}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & z' \\ \xi' & 0 & \zeta' \end{vmatrix} = \vec{j} \cdot z' \cdot \xi'. \tag{23-2}$$

Как видим, вектор $\vec{J}$ параллелен оси oy, но направлен в противоположную сторону: $\xi > 0$, $z < 0$, значит $\xi \cdot z < 0$.

Далее, с учетом правила знаков, находим:

$$\xi = -n \cdot \sin\sigma, \quad \xi' = -n' \cdot \sin\sigma',$$
$$\zeta = n \cdot \cos\sigma, \quad \zeta' = n' \cdot \cos\sigma'. \tag{24}$$

Из (23) и (24) получаем:

$$\vec{J} = \vec{j} \cdot z \cdot \xi = -n \cdot z \cdot \sin\sigma \cdot \vec{j},$$
$$\vec{J} = \vec{j} \cdot z' \cdot \xi' = -n' \cdot z' \cdot \sin\sigma' \cdot \vec{j}. \tag{25}$$

Так как $\vec{J} = \vec{a}^* \times \vec{s}$, то

$$\left|\vec{J}\right| = \left|\vec{a}^*\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \sin(\pi - i) = r \cdot n \cdot \sin i,$$

и тогда:
$$\vec{J} = -r \cdot n \cdot \sin i \cdot \vec{j}. \qquad (26)$$

Аналогично находим:

$$\vec{J} = \vec{a}^* \times \vec{s}',$$
$$\left|\vec{J}\right| = r \cdot n' \cdot \sin i' \text{ и}$$
$$\vec{J} = -r \cdot n' \cdot \sin i' \cdot \vec{j}. \qquad (26\text{-}1)$$

Так как $\vec{J}$ – инвариант, то (25), (26) и (26-1) можно записать в виде:

$-n \cdot z \cdot \sin\sigma = -n' \cdot z' \cdot \sin\sigma' = -r \cdot n \cdot \sin i = -r \cdot n' \cdot \sin i' = -p$, или

$$n \cdot z \cdot \sin\sigma = n' \cdot z' \cdot \sin\sigma' = r \cdot n \cdot \sin i = r \cdot n' \cdot \sin i' = p. \qquad (27)$$

Величина $p = \left|\vec{J}\right|$ является инвариантом, смысл которого понятен из рис. 3: он равен оптической длине перпендикуляра, опущенного из центра o на падающий или преломленный луч.

Из рис. 3 находим:

$i = \omega - \sigma$ и $i' = \omega - \sigma'$, отсюда

$$\omega = \sigma + i = \sigma' + i'. \qquad (28)$$

Из (28) находим

$$\sigma' = \sigma + i - i'. \qquad (29)$$

Для отражения $i' = \pi - i$, тогда

$$\sigma' = \sigma + 2 \cdot i - \pi \text{ – для отражения.} \qquad (30)$$

Определим ℓ:

$\ell = -\dfrac{1}{n^2}(r \cdot Q + V)$; с учетом (26) находим:

$$Q = \sqrt{n^2 - \frac{1}{r^2} \cdot \vec{J}^2} = \sqrt{n^2 - \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot n^2 \cdot \sin^2 i} = n \cdot \cos i.$$

$V = \vec{a} \cdot \vec{s} = \zeta \cdot z = n \cdot z \cdot \cos\sigma$ – с учетом (23) и (24).

$$\ell = -\frac{1}{n^2} \cdot (r \cdot n \cdot \cos i + n \cdot z \cdot \cos\sigma) = -\frac{1}{n} \cdot (r \cdot \cos i + z \cdot \cos\sigma) =$$
$$= -\frac{1}{n} \cdot \left(r \cdot \cos i \cdot \frac{n \cdot \sin i}{n \cdot \sin i} + z \cdot \cos\sigma \cdot \frac{n \cdot \sin\sigma}{n \cdot \sin\sigma} \right) =$$

$$= -\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{p}{n}\cdot\frac{\cos i}{\sin i}+\frac{p}{n}\cdot\frac{\cos\sigma}{\sin\sigma}\right)=$$

$$= -\frac{p}{n^2}\cdot\frac{\cos i\cdot\sin\sigma+\sin i\cdot\cos\sigma}{\sin i\cdot\sin\sigma} = -\frac{p}{n^2}\cdot\frac{\sin(\sigma+i)}{\sin i\cdot\sin\sigma} =$$

$$= -\frac{1}{n^2}\cdot z\cdot n\cdot\sin\sigma\cdot\frac{\sin\omega}{\sin\sigma\cdot\sin i} =$$

$$= -\frac{z\cdot\sin\omega}{n\cdot\sin i} = -\frac{r\cdot z\cdot\sin\omega}{r\cdot n\cdot\sin i} =$$

$$= -\frac{r\cdot z\cdot\sin\omega}{p} = -\frac{r\cdot z\cdot\sin\omega}{n\cdot z\cdot\sin\sigma} = -\frac{r\cdot\sin\omega}{n\cdot\sin\sigma}.$$

Таким образом:

$$\ell = \begin{cases} -\dfrac{1}{n}(r\cdot\cos i + z\cdot\cos\sigma) \\ -\dfrac{r\cdot\sin\omega}{n\cdot\sin\sigma}. \end{cases} \qquad (31)$$

Значение ℓ можно найти из рис. 3 с помощью геометрических построений: опустим из точки A перпендикуляр AM на нормаль к поверхности в точке падения. По определению $\ell = AA^*/n$. Из рис. 3 находим:

$$AA^* = \frac{AM}{\sin i} = -\frac{z\cdot\sin\omega}{\sin i}, \text{ здесь } AM = -z\cdot\sin\omega.$$

Тогда с учетом (27) получим:

$$\ell = -\frac{z\cdot\sin\omega}{n\cdot\sin i} = -\frac{r}{r}\cdot\frac{z\cdot\sin\omega}{n\cdot\sin i} = -\frac{r\cdot z\cdot\sin\omega}{n\cdot z\cdot\sin\sigma} = -\frac{r\cdot\sin\omega}{n\cdot\sin\sigma}.$$

Аналогично находим:

$$\ell' = \frac{A'A^*}{n'} = \frac{1}{n'}\cdot\frac{A'M'}{\sin i'} = \frac{1}{n'}\cdot\frac{-z'\cdot\sin\omega}{\sin i'} = -\frac{z'\cdot\sin\omega}{n'\cdot\sin i'} =$$

$$= -\frac{r}{r}\cdot\frac{z'\cdot\sin\omega}{n'\cdot\sin i'} = -\frac{r\cdot z'\cdot\sin\omega}{p} =$$

$$= -\frac{r\cdot z'\cdot\sin\omega}{n'\cdot z'\cdot\sin\sigma'} = -\frac{r\cdot\sin\omega}{n'\cdot\sin\sigma'}, \text{ итак:}$$

$$\ell' = -\frac{r\cdot\sin\omega}{n'\cdot\sin\sigma'}.$$

Из рис. 3 можно получить (треугольники oA^*N' и $oA'N'$):

$$A'A^* = -(r \cdot \cos i' + z' \cdot \cos\sigma').$$

$$\ell' = \frac{A'A^*}{n'} = -\frac{1}{n'} \cdot (r \cdot \cos i' + z' \cdot \cos\sigma').$$

Далее находим φ:

$$\varphi = \frac{1}{r} \cdot (Q' - Q).$$

С учетом (26-1) находим:

$$Q' = \sqrt{n'^2 - \frac{1}{r^2} \cdot \vec{J}^2} = \sqrt{n'^2 - \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot n'^2 \cdot \sin^2 i'} = n' \cdot \cos i'.$$

Тогда:

$$\varphi = \frac{1}{r} \cdot (n' \cdot \cos i' - n \cdot \cos i), \tag{32}$$

Или

$$\varphi = n \cdot n' \cdot \left(\frac{\sin i \cdot \cos i'}{n \cdot r \cdot \sin i} - \frac{\sin i' \cdot \cos i}{n' \cdot r \cdot \sin i'} \right) = \frac{n \cdot n'}{p} \cdot \sin(i - i'), \tag{33}$$

или с учетом (29):

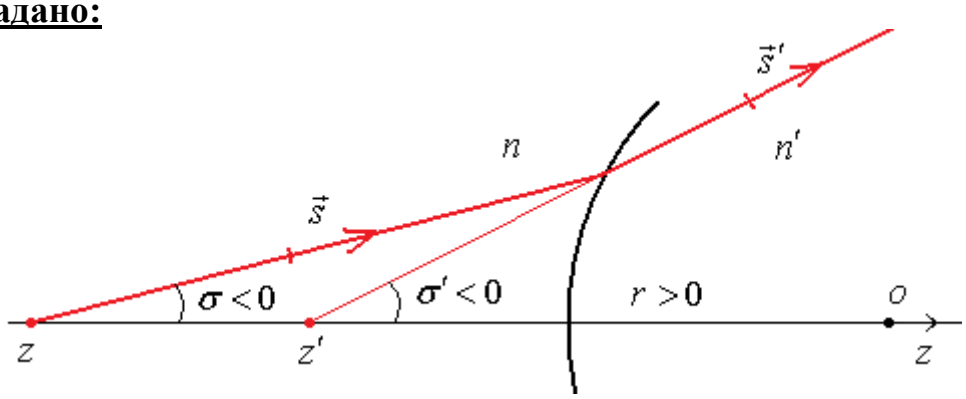
$$\varphi = \frac{n \cdot n'}{p} \cdot \sin(\sigma' - \sigma). \tag{34}$$

Для отражения $i' = \pi - i$ и $\cos i' = -\cos i$ (угол i' лежит во второй четверти), значит, из (32) получаем:

$$\varphi = -\frac{2 \cdot n}{r} \cdot \cos i. \tag{35}$$

Выпишем **сводку** формул.

<u>Задано:</u>



Начало координат – в центре сферы.
Ось z проходит через начальную точку и центр сферы.
Ось x лежит в плоскости падения.
r, n, n';
z, σ.

Расчет:

$$p = n \cdot z \cdot \sin\sigma,$$

$$\sin i = \frac{p}{r \cdot n},$$

$$\left.\begin{aligned} \sin i' &= \frac{p}{r \cdot n'} \\ \sigma' &= \sigma + i - i' \end{aligned}\right\} \quad \text{– для преломления}$$

$$\left.\begin{aligned} i' &= \pi - i \\ \sigma' &= \sigma + 2 \cdot i - \pi \end{aligned}\right\} \quad \text{– для отражения} \quad (36)$$

$$z' = \frac{p}{n' \cdot \sin\sigma'},$$

$$\omega = \sigma + i,$$

$$\ell = -\frac{r \cdot \sin\omega}{n \cdot \sin\sigma},$$

$$\ell' = -\frac{r \cdot \sin\omega}{n' \cdot \sin\sigma'},$$

$$\varphi = \frac{n \cdot n'}{p} \cdot \sin(\sigma' - \sigma) \text{ – для преломления,}$$

$$\varphi = -\frac{2 \cdot n}{r} \cdot \cos i \text{ – для отражения}$$

$$m = \frac{1}{1 - \ell \cdot \varphi}.$$

3.2. Апланатические точки

Выражения (36) показывают, что в общем случае z' является функцией расстояния z до точки предмета и угла σ. Интересно отметить, что существуют такие расстояния z, для которых z' не зависит от σ. В этом случае все лучи, выходящие из точки, расположенной на расстоянии z от центра сферы, сходятся в одной точке с координатой z'. В таких случаях мы будем говорить, что точка изображается резко. **Покажем, что на оси z имеются три точки, изображающиеся резко.** В силу центральной симметрии задачи можно утверждать, что если ка-

кая-либо точка оси с координатой z изображается резко, то этим свойством обладают все точки сферы, радиус которой равен $(-z)$.

а. Центр.

Для центра сферы $z=0$ (рис. 4). Тогда из (36) следует:

$$p=i=i'=0,$$
$$\sigma'=\sigma,$$
$$\omega=\sigma,$$
$$z'=0$$
$$\ell=-\frac{r}{n},\ \ell'=-\frac{r}{n'}. \qquad (37)$$

Из (32) находим

$$\varphi=\frac{n'-n}{r}.$$

$$m=\frac{1}{1-\ell\cdot\varphi}=\frac{1}{1+\frac{r}{n}\cdot\frac{n'-n}{r}}=\frac{n}{n+n'-n}=\frac{n}{n'}.$$

Как видим, изображение центра сферы совпадает с самим центром. Лучи, проходящие через центр, не преломляются ($i'=i$, $\sigma'=\sigma$). Увеличение для сечения равно n/n'.

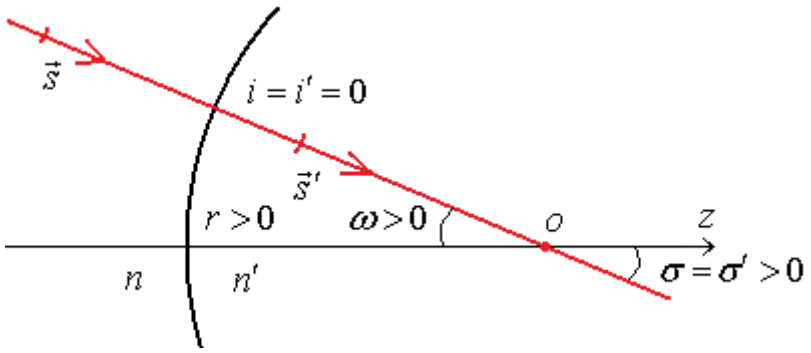


Рис. 4. Изображение центра сферической поверхности

б. Преломляющая поверхность.

Начальная точка лежит на поверхности сферы (рис. 5).

Для точки на поверхности $z=-r$, тогда

$$p=-n\cdot r\cdot\sin\sigma,$$

$$\sin i=\frac{p}{r\cdot n}=-\sin\sigma,\ \text{то есть}\ i=-\sigma,$$

$$\sigma'=\sigma+i-i'=-i',\ \text{то есть}\ i'=-\sigma',$$

$$z' = \frac{p}{n' \cdot \sin\sigma'} = \frac{-n \cdot r \cdot \sin\sigma}{n' \cdot \sin\sigma'} = \frac{n \cdot r \cdot \sin i}{-n' \cdot \sin i'} = -r,$$

$$\omega = \sigma + i = 0, \text{ значит } \ell = 0,$$

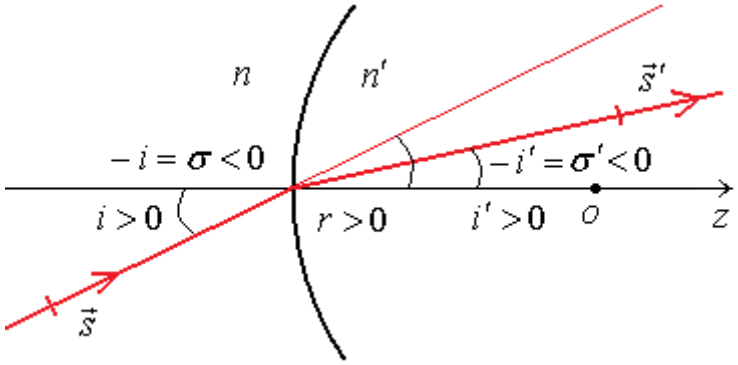


Рис. 5. Изображение поверхности сферы

$$\varphi = \frac{n \cdot n'}{p} \cdot \sin(\sigma' - \sigma),$$

$$m = \frac{1}{1 - \ell \cdot \varphi} = 1. \qquad (38)$$

Из (38) мы видим, что преломляющая поверхность совпадает со своим изображением, причем увеличение для сечения равно 1.

в. Апланатические поверхности.

Предположим, что точка предмета расположена на расстоянии $z' = (n/n') \cdot r$ от центра (рис. 6). Тогда из (38) следует:

$$p = n \cdot \frac{n'}{n} \cdot r \cdot \sin\sigma = n' \cdot r \cdot \sin\sigma,$$

$$\sin i = \frac{p}{r \cdot n} = \frac{n' \cdot r \cdot \sin\sigma}{n \cdot r} = \frac{n'}{n} \cdot \sin\sigma,$$

$$\sin i' = \frac{p}{r \cdot n'} = \frac{n' \cdot r \cdot \sin\sigma}{n' \cdot r} = \sin\sigma, \text{ отсюда}$$

$$i' = \sigma,$$

$$\sigma' = \sigma + i - i' = \sigma + i - \sigma = i, \text{ то есть } \sigma' = i,$$

$$z' = \frac{p}{n' \cdot \sin\sigma'} = \frac{n' \cdot r \cdot \sin\sigma}{n' \cdot \sin\sigma'} = \frac{n' \cdot r \cdot \sin i'}{n' \cdot \sin i} \cdot \frac{n}{n} = \frac{n}{n'} \cdot r \cdot \frac{n' \cdot \sin i'}{n \cdot \sin i} = \frac{n}{n'} \cdot r,$$

то есть

$$z' = \frac{n}{n'} \cdot r,$$

$$\omega = \sigma + i = i' + i,$$

$$\ell = -\frac{r \cdot \sin\omega}{n \cdot \sin\sigma} = -\frac{r \cdot \sin(i' + i)}{n \cdot \sin i'} =$$

$$= -\frac{r \cdot (\sin i' \cdot \cos i + \cos i' \cdot \sin i)}{n \cdot \sin i'} =$$

$$= -\frac{r}{n} \cdot \cos i - \frac{r \cdot \cos i' \cdot \sin i}{n \cdot \sin i'} \cdot \frac{n' \cdot n}{n' \cdot n} =$$

$$= -\frac{r}{n} \cdot \cos i - \frac{r}{n} \cdot \frac{n' \cdot \cos i'}{n} \cdot \frac{n \cdot \sin i}{n' \cdot \sin i'} =$$

$$= -\frac{r}{n^2} \cdot (n' \cdot \cos i' + n \cdot \cos i),$$

$$\varphi = \frac{1}{r} \cdot (n' \cdot \cos i' - n \cdot \cos i),$$

$$1 - \ell \cdot \varphi = 1 + \frac{r}{n^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot (n' \cdot \cos i' + n \cdot \cos i) \cdot (n' \cdot \cos i' - n \cdot \cos i) =$$

$$= 1 + \frac{1}{n^2} \cdot (n'^2 \cdot \cos^2 i' - n^2 \cdot \cos^2 i) =$$

$$= 1 + \frac{1}{n^2} \cdot [n'^2 \cdot (1 - \sin^2 i') - n^2 \cdot \cos^2 i] =$$

$$= 1 + \frac{1}{n^2} \cdot [n'^2 - n'^2 \cdot \sin^2 i' - n^2 \cdot (1 - \sin^2 i)] =$$

$$= 1 + \frac{1}{n^2} \cdot (n'^2 - n^2 \cdot \sin^2 i - n^2 + n^2 \cdot \sin^2 i) =$$

$$= 1 + \frac{1}{n^2} \cdot (n'^2 - n^2) = 1 + \frac{n'^2}{n^2} - 1 = \frac{n'^2}{n^2},$$

$$m = \frac{1}{1 - \ell \cdot \varphi} = \frac{n^2}{n'^2}.$$

Выпишем полученные результаты:

$$\begin{gathered} i' = \sigma, \\ \sigma' = i, \\ z = \frac{n'}{n} \cdot r, \\ z' = \frac{n}{n'} \cdot r, \\ m = \frac{n^2}{n'^2}. \end{gathered} \tag{39}$$

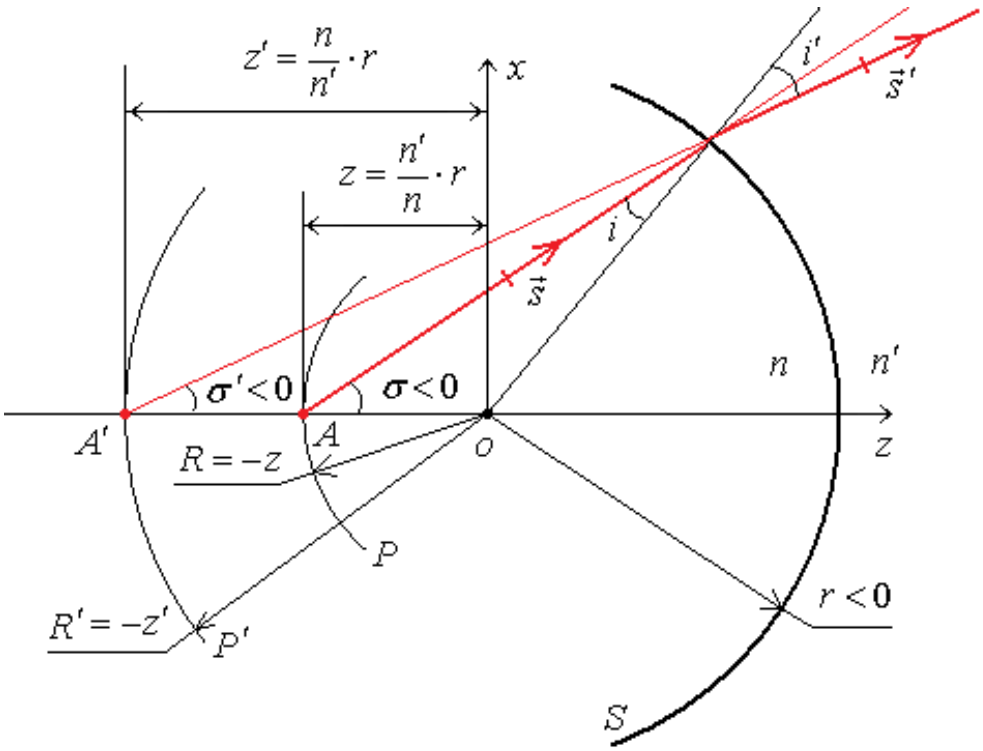


Рис. 6. Апланатические поверхности сферы.
S – преломляющая сфера; P – поверхность предмета (сфера);
P' – поверхность изображения (сфера)

Выражения (39) показывают, что точки на сфере радиусом $R = -(n'/n) \cdot r$ изображаются резко, причем изображение расположено на сфере радиусом $R' = -(n/n') \cdot r$. Эти сферы называются апланатическими поверхностями данной сферы (рис. 6).

К сожалению, обе апланатические поверхности лежат по одну сторону от преломляющей поверхности. Изображение называется **действительным**, если оно образовано пересечением лучей. Если же изображение образовано пересечением продолжением расходящихся лучей, то его будем называть **мнимым**.

В заключение отметим, что при отражении и преломлении существует особая группа лучей, для которых $\vec{J} = 0$. В этом случае $\vec{a}$, $\vec{s}$, $\vec{a}'$, $\vec{s}'$, $\vec{a}^*$ имеют одно и тоже направление, а именно – направление линии, соединяющей предмет с центром. Эти лучи не преломляются. Их общее направление мы назовем побочной осью или псевдоосью. Для таких лучей определение точки сечения, как точки пересечения преломленного луча в пространстве изображений с осью, теряет смысл. Однако формальное определение, выраженное уравнением (4), позволяет вычислить величину ℓ', которую можно использовать для определения точки сечения и в этом случае.

3.3. Область параксиальных лучей

Для этого положим в уравнениях (36) $\sigma = 0$, результате получим:

$p = 0$,

$\sin i = 0$, $i = 0$,

$\sin i' = 0$, $i' = 0$,

$\sigma' = 0$ – для преломления,

$\sigma' = -\pi$ – для отражения.

$z' = \dfrac{0}{0}$ – неопределенность, значит надо использовать формулы, не приводящие к неопределенности.

$$\ell = -\frac{1}{n} \cdot (r \cdot \cos i + z \cdot \cos\sigma) = -\frac{1}{n} \cdot (r + z),$$

$$\varphi = \frac{1}{r} \cdot (n' \cdot \cos i' - n \cdot \cos i) = \frac{1}{r} \cdot (n' - n),$$

$$m = \frac{1}{1 - \ell \cdot \varphi} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{r \cdot n} \cdot (r + z) \cdot (n' - n)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{r \cdot n} \cdot r \cdot (n' - n) + \dfrac{1}{r \cdot n} \cdot z \cdot (n' - n)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{n'}{n} - 1 + \dfrac{z}{n} \cdot \dfrac{n' - n}{r}} = \frac{1}{\dfrac{n'}{n} + \dfrac{z}{n} \cdot \dfrac{n' - n}{r}}.$$

Итак,

$$m = \frac{1}{\dfrac{n'}{n} + \dfrac{z}{n} \cdot \dfrac{n' - n}{r}} \text{ – для преломления.} \qquad (40)$$

Для отражения:

$$\varphi = -\frac{2 \cdot n}{r},$$

$$m = \frac{1}{1 - \ell \cdot \varphi} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n} \cdot (r + z) \cdot \dfrac{2 \cdot n}{r}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \dfrac{2}{r} \cdot (r + z)} = \frac{1}{1 - 2 - 2 \cdot \dfrac{z}{r}} = -\frac{1}{1 + 2 \cdot \dfrac{z}{r}}.$$

$$m = -\frac{1}{1 + 2 \cdot \frac{z}{r}} \text{ – для отражения.} \qquad (41)$$

Точка изображения задается соотношением:

$$z' = m \cdot z\,. \qquad (42)$$

Точка, определяемая соотношением (42), называется параксиальной точкой сечения.

Подставим (40) в (42):

$$z' = \frac{z}{\frac{n'}{n} + \frac{z}{n} \cdot \frac{n' - n}{r}},$$

$$z' \cdot \left(\frac{n'}{n} + \frac{z}{n} \cdot \frac{n' - n}{r} \right) = z \quad \Big| \cdot \frac{1}{z' \cdot z},$$

$$\frac{n'}{n} \cdot \frac{1}{z} + \frac{z}{n} \cdot \frac{n' - n}{r} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z'},$$

$$\frac{n'}{n} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{z'} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{n' - n}{r} \quad \Big| \cdot \frac{1}{n'},$$

$$\frac{1}{n \cdot z} - \frac{1}{n' \cdot z'} = -\frac{1}{n' \cdot n} \cdot \frac{n' - n}{r} = -\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right),$$

$$\frac{1}{n' \cdot z'} - \frac{1}{n \cdot z} = -\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) \text{ – } \textbf{для преломления.} \qquad (43)$$

Подставим (41) в (43):

$$z' = -\frac{z}{1 + \frac{2 \cdot z}{r}},$$

$$z' \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot z}{r} \right) = -z\,,$$

$$z' + \frac{2}{r} \cdot z \cdot z' = -z \quad \Big| \cdot \frac{1}{z' \cdot z},$$

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{r} = -\frac{1}{z'}, \text{ или}$$

$$\frac{1}{z'} + \frac{1}{z} = -\frac{2}{r} \text{ – } \textbf{для отражения.} \qquad (44)$$

4. РАСЧЕТ ХОДА ЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

4.1. Ход луча через одну поверхность

В системе с осевой симметрией начало координат удобно выбрать на оси симметрии, а саму ось принять за ось z, которую будем характеризовать единичным вектором $\vec{k}$. В этом случае можно, проектируя векторы на плоскость, перпендикулярную к оси, преобразовать трехмерную задачу о распространении лучей в двумерную.

При определении хода лучей иногда удобно выбирать начало координат в различных точках. Это особенно полезно в системах, состоящих из нескольких поверхностей. Мы будем помещать начало координат последовательно в вершинах каждой из поверхностей; вершина определяется как точка, в которой поверхность пересекает ось.

В системах с осевой симметрией имеется три типа лучей:

а. **Осевой луч**. Это единственный луч, который пересекает все поверхности в направлении общей нормали $\vec{k}$ и поэтому преломляется (отражается) в этом же направлении.

б. **Меридиональные лучи**. Луч, лежащий в плоскости, проходящей через точку предмета и ось, называется меридиональным. Плоскость, определяемая этим лучом и осью симметрии, называется меридиональной. Так как в силу осевой симметрии нормаль в точке падения пересекает ось, то есть лежит в меридиональной плоскости, то преломленный (или отраженный) луч также лежит в меридиональной плоскости.

в. **Косые лучи**. Лучи, не лежащие в меридиональной плоскости, называются косыми, или сагиттальными. Плоскость, содержащая косой луч и перпендикулярная меридиональной плоскости, называется сагиттальной. Точки пересечения косых лучей с меридиональной плоскостью мы будем называть сопряженными точками сечения.

Предположим, что падающий луч задан начальной точкой, лежащей в плоскости $z=0$ и заданной вектором $\vec{A}(x,y)$, и направляющим вектором $\vec{s}(\xi,\eta,\zeta)$ (рис. 1). Пусть $\vec{a}^*(x^*,y^*,z)$ – вектор, проведенный из начала координат в точку падения; $\vec{A}^*(x^*,y^*,0)$ – проекция вектора $\vec{a}^*$ на плоскость xoy; z – z-ая координата точки встречи луча с поверхностью; $\vec{s}\,'(\xi',\eta',\zeta')$ – направляющий вектор преломленного (отраженного) луча.

Тогда формулы для расчета хода луча принимают вид:

$$\vec{a}^* = \vec{A} + l \cdot \vec{s}\,, \tag{1}$$
$$\vec{s}' = \vec{s} + \Gamma \cdot \vec{o}\,. \tag{2}$$

Распишем (1) по координатам:

$$x^* = x + l \cdot \xi\,, \tag{3}$$

$$y^* = y + l \cdot \eta\,, \tag{4}$$

$$z = 0 + l \cdot \zeta\,. \tag{5}$$

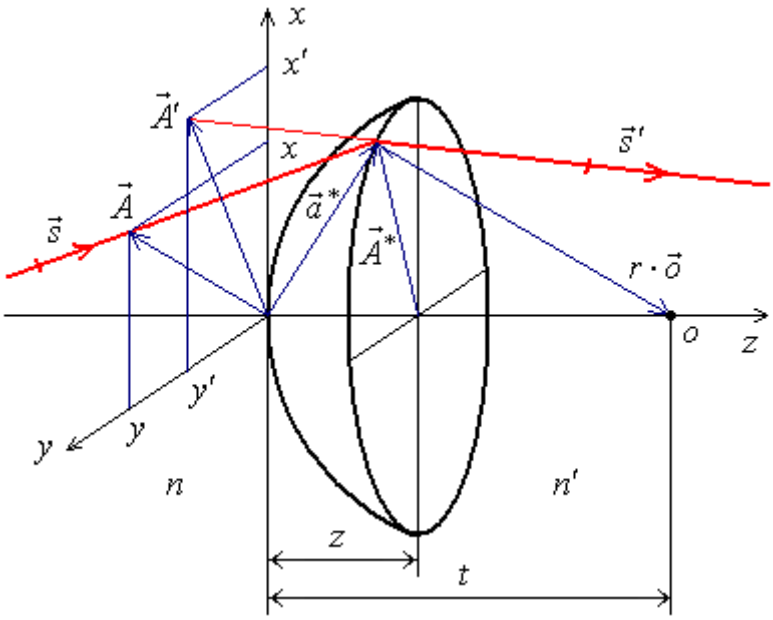


Рис. 1. Геометрические величины, используемые при расчете хода косого луча

Из (5) находим:

$$l = \frac{z}{\zeta}\,. \tag{6}$$

Подставим (6) в (3) и (4):

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x + z \cdot \frac{\xi}{\zeta} \\ y^* &= y + z \cdot \frac{\eta}{\zeta} \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Удобно ввести векторы:

$$\vec{P}(X,Y) = \zeta \cdot \vec{A}\,, \quad X = \zeta \cdot x, \quad Y = \zeta \cdot y,$$

$$\vec{P}^*(X^*,Y^*)=\zeta\cdot\vec{A}^*,\quad X^*=\zeta\cdot x,\quad Y^*=\zeta\cdot y,$$

$$\vec{S}=\vec{S}\,(\xi,\eta,0).$$

Тогда (7) можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned}\zeta\cdot x^*&=\zeta\cdot x+z\cdot\xi\\ \zeta\cdot y^*&=\zeta\cdot y+z\cdot\eta\end{aligned}\right\}\text{ или }\vec{P}^*=\vec{P}+z\cdot\vec{S}\qquad(8)$$

Если уравнение (8) возвести в квадрат:

$$\vec{P}^{*2}=(\vec{P}+z\cdot\vec{S})^2,$$

$$X^{*\,2}+Y^{*\,2}=\vec{P}^{\,2}+2\cdot z\cdot\left(\vec{P}\cdot\vec{S}\right)+z^{\,2}\cdot\vec{S}^{\,2},$$

$$\zeta^{\,2}\cdot x^{*2}+\zeta^{\,2}\cdot y^{*2}=\vec{P}^{\,2}+2\cdot z\cdot\left(\vec{P}\cdot\vec{S}\right)+z^{\,2}\cdot\vec{S}^{\,2}$$

$$2\cdot u^*\cdot\zeta^{\,2}=\vec{P}^{\,2}+2\cdot z\cdot\left(\vec{P}\cdot\vec{S}\right)+z^{\,2}\cdot\vec{S}^{\,2},\qquad(9)$$

где
$$2\cdot u^*=x^{*\,2}+y^{*\,2},\qquad(10)$$

то величины z и u^* определяются как совместное решение уравнения (9) и уравнения поверхности, заданного в виде:

$$F(u^*,z)=0.\qquad(11)$$

Уравнения (9) и (11) можно решить приближенно или точно в зависимости от вида уравнения поверхности. Решений может быть несколько, но из всех решений следует выбирать то, которое имеет наименьшую абсолютную величину.

В оптической системе, обладающей осевой симметрией, вектор нормали к поверхности пересекает оптическую ось в точке, называемой центром сагиттальной кривизны.

Из векторного треугольника (рис. 1) находим:

$$(t-z)\cdot\vec{k}=\vec{A}^*+r_s\cdot\vec{o}\text{ или}\qquad(12)$$

$$-r_s\cdot\vec{o}=\vec{A}^*-(t-z)\cdot\vec{k},\qquad(12а)$$

где r_s – сагиттальный радиус кривизны, t – расстояние от вершины поверхности до сагиттального центра кривизны. Умножим (12а) на ζ и преобразуем:

$$-\zeta\cdot r_s\cdot\vec{o}=\zeta\cdot\vec{A}^*-(t-z)\cdot\zeta\cdot\vec{k},\text{ или}$$

$$-\zeta\cdot r_s\cdot\vec{o}=\vec{P}^*-(t-z)\cdot\zeta\cdot\vec{k}.\qquad(13)$$

Для нахождения вектора нормали $\vec{o}$ воспользуемся тем фактом, что вектор $\vec{o}$ параллелен $grad\,F(u^*,z)$.

По определению

$$grad\,F = \frac{\partial F}{\partial x^*}\cdot\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y^*}\cdot\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\vec{k},$$

перейдем к переменным u^*, z:

$$\begin{aligned} grad\,F &= \frac{\partial F}{\partial u^*}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\cdot\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial u^*}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\cdot\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\vec{k} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial u^*}\cdot x^*\cdot\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial u^*}\cdot y^*\cdot\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\vec{k} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial u^*}\cdot(x^*\cdot\vec{i} + y^*\cdot\vec{j}) + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\vec{k} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial u^*}\cdot\vec{A}^* + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\vec{k}. \end{aligned}$$

или

$$grad\ F(u^*,z) = F_{u^*}\cdot\vec{A}^* + F_z\cdot\vec{k} \qquad (14)$$

Поделим обе части уравнения (14) на F_{u^*}:

$$\frac{1}{F_{u^*}}\cdot grad\ F = \vec{A}^* + \frac{F_z}{F_{u^*}}\cdot\vec{k}. \qquad (15)$$

Сравнивая (15) и (12а) находим:

$$t - z = -\frac{F_z}{F_{u^*}}. \qquad (16)$$

Определив из (16) величину t, несложно из (12а) найти и значение r_s: возведем (12а) в квадрат:

$$r_s^2 = \vec{A}^{*2} + (t-z)^2. \qquad (17)$$

Из (12а) находим:

$$\vec{o} = -\frac{1}{r_s}\cdot\vec{A}^* + \frac{t-z}{r_s}\cdot\vec{k}, \qquad (18)$$

Или

$$o_x = -\frac{x^*}{r_s},$$
$$o_y = -\frac{y^*}{r_s}, \qquad (19)$$
$$o_z = \frac{t-z}{r_s}.$$

Подставим (19) в (2):

$$\xi' = \xi + \Gamma \cdot o_x = \xi - \frac{\Gamma \cdot x^*}{r_s} = \xi - \zeta \cdot x^* \cdot \frac{\Gamma}{\zeta \cdot r_s},$$
$$\eta' = \eta + \Gamma \cdot o_y = \eta - \frac{\Gamma \cdot y^*}{r_s} = \eta - \zeta \cdot y^* \cdot \frac{\Gamma}{\zeta \cdot r_s}, \qquad (20)$$
$$\zeta' = \zeta + \Gamma \cdot o_z = \zeta + \Gamma \cdot \frac{t-z}{r_s} = \zeta + \zeta \cdot (t-z) \cdot \frac{\Gamma}{\zeta \cdot r_s},$$

обозначим

$$\psi = \frac{\Gamma}{\zeta \cdot r_s}, \qquad (21)$$

тогда (20) можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \vec{S}' &= \vec{S} - \psi \cdot \vec{P}^* \\ \zeta' &= \zeta \cdot \left[1 + \psi \cdot (t-z)\right] \end{aligned}\right\}, \qquad (22)$$

или с учетом (8):

$$\vec{S}' = \vec{S} - \psi \cdot (\vec{P} + z \cdot \vec{S}) = -\psi \cdot \vec{P} + (1 - \psi \cdot z) \cdot \vec{S} \qquad (23)$$

Преломленный луч может быть задан направляющим вектором $\vec{S}'$ и вектором $\vec{P}^{*\prime} = \zeta' \cdot \vec{A}^*$, соответствующим точке встречи луча с поверхностью. Однако, более удобно вычислять вектор $\vec{P}' = \zeta' \cdot \vec{A}'$, соответствующий точке пересечения преломленного луча с плоскостью, касательной к вершине (то есть с плоскостью xoy).

Для преломленного луча можно записать (рис. 1):

$$\vec{a}^* = \vec{A}' + l' \cdot \vec{s}\,'. \qquad (24)$$

Путем преобразований, аналогичных (1-7), получим выражение

$$\vec{P}^{*\prime} = \vec{P}' + z \cdot \vec{S}', \qquad (25)$$

аналогичное (8). Здесь:

$$\vec{P}^{*\prime} = \zeta' \cdot \vec{A}^{*}\ ,\ \vec{P}' = \zeta' \cdot \vec{A}'\ .$$

Из (25) находим:

$$\vec{P}' = \vec{P}^{*\prime} - z \cdot \vec{S}'\ . \tag{26}$$

Поскольку

$$\vec{A}^{*} = \frac{\vec{P}^{*}}{\zeta} = \frac{\vec{P}^{*\prime}}{\zeta'}\ ,$$

то

$$\vec{P}^{*\prime} = \frac{\zeta'}{\zeta} \cdot \vec{P}^{*}\ . \tag{27}$$

Подставим в (26) выражения (8), (22), (23) и (27):

$$\begin{aligned}
\vec{P}' &= \frac{\zeta'}{\zeta} \cdot \vec{P}^{*} - z \cdot (\vec{S} - \psi \cdot \vec{P}^{*}) = \\
&= \frac{\zeta \cdot \left[1 + \psi \cdot (t - z)\right]}{\zeta} \cdot \vec{P}^{*} - z \cdot \vec{S} + z \cdot \psi \cdot \vec{P}^{*} = \\
&= \vec{P}^{*} + \psi \cdot t \cdot \vec{P}^{*} - \cancel{\psi \cdot z \cdot \vec{P}^{*}} - z \cdot \vec{S} + \cancel{z \cdot \psi \cdot \vec{P}^{*}} = \\
&= \vec{P} + \cancel{z \cdot \vec{S}} + \psi \cdot t \cdot (\vec{P} + z \cdot \vec{S}) - \cancel{z \cdot \vec{S}} = \\
&= (1 + \psi \cdot t) \cdot \vec{P} + \psi \cdot t \cdot z \cdot \vec{S}\ ,
\end{aligned}$$

окончательно:

$$\vec{P}' = (1 + \psi \cdot t) \cdot \vec{P} + \psi \cdot t \cdot z \cdot \vec{S}\ . \tag{28}$$

Преобразуем выражение (21) к виду, более удобному для машинных расчетов:

$$\psi = \frac{\Gamma}{\zeta \cdot r_s} = \frac{1}{\zeta \cdot r_s} \cdot \left[\varepsilon' \cdot \sqrt{n'^{2} - n^{2} + (\vec{o} \cdot \vec{s})^{2}} - \left(\vec{o} \cdot \vec{s}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\zeta^{2} \cdot r_s^{2}} \cdot \left[\varepsilon' \cdot sign\left(\zeta \cdot r_s\right) \cdot \sqrt{\zeta^{2} \cdot r_s^{2} \cdot (n'^{2} - n^{2}) + \zeta^{2} \cdot r_s^{2} \cdot (\vec{o} \cdot \vec{s})^{2}} - \zeta \cdot r_s \cdot (\vec{o} \cdot \vec{s})\right] =$$

$$= \frac{1}{\zeta^{2} \cdot r_s^{2}} \cdot \left[\varepsilon' \cdot \varepsilon \cdot sign\left(r_s\right) \cdot \sqrt{\zeta^{2} \cdot r_s^{2} \cdot (n'^{2} - n^{2}) + \zeta^{2} \cdot r_s^{2} \cdot (\vec{o} \cdot \vec{s})^{2}} - \zeta \cdot r_s \cdot (\vec{o} \cdot \vec{s})\right] =$$

$$= \frac{q' - q}{R}\ , \tag{29}$$

где

$sign(\zeta) = \varepsilon$,

$R = \zeta^2 \cdot r_s^2$, или с учетом (17):

$$R = \zeta^2 \cdot \left[\vec{A}^{*\,2} + (t-z)^2 \right] = \vec{P}^{*\,2} + \zeta^2 \cdot (t-z)^2 =$$

$$= (\vec{P} + z \cdot \vec{S})^2 + \zeta^2 \cdot (t-z)^2, \qquad (30)$$

$$q = \zeta \cdot r_s \cdot (\vec{o} \cdot \vec{s}) =$$

$$= \zeta \cdot r_s \cdot \left(-\frac{x^*}{r_s} \right) \cdot \xi + \zeta \cdot r_s \cdot \left(-\frac{y^*}{r_s} \right) \cdot \eta + \zeta \cdot r_s \cdot \frac{t-z}{r_s} \cdot \zeta =$$

$$= -(\zeta \cdot x^*) \cdot \xi - (\zeta \cdot y^*) \cdot \eta + \zeta^2 \cdot (t-z) =$$

$$= -\vec{P}^* \cdot \vec{S} + \zeta^2 \cdot (t-z) = -(\vec{P} + z \cdot \vec{S}) \cdot \vec{S} + \zeta^2 \cdot (t-z) =$$

$$= -(\vec{P} + z \cdot \vec{S}) \cdot \vec{S} + \zeta^2 \cdot (t-z). \qquad (31)$$

Из формулы $q = \zeta \cdot r_s \cdot (\vec{o} \cdot \vec{s})$ видно, что знак величины q определяется знаком r_s, поскольку ζ и $(\vec{o} \cdot \vec{s})$ имеют одинаковый знак. Далее:

$$q' = \varepsilon' \cdot \varepsilon \cdot sign(r_s) \cdot \sqrt{\zeta^2 \cdot r_s^2 \cdot (n''^2 - n^2) + \zeta^2 \cdot r_s^2 \cdot (\vec{o} \cdot \vec{s})^2} =$$

$$= \varepsilon' \cdot \varepsilon \cdot sign(r_s) \cdot \sqrt{R \cdot (n'^2 - n^2) + q^2}. \qquad (32)$$

Для преломления $\varepsilon \cdot \varepsilon' = +1$, поэтому

$$q' = sign(r_s) \cdot \sqrt{R \cdot (n'^2 - n^2) + q^2}, \text{ – для преломления.}$$

При отражении $n' = n$, поэтому, с учетом (3.12), находим:

$$\psi = \frac{\Gamma}{\zeta \cdot r_s} = \frac{-2 \cdot (\vec{o} \cdot \vec{s}) \cdot (\zeta \cdot r_s)}{(\zeta \cdot r_s)^2} = -\frac{2 \cdot q}{R}.$$

Сравнивая последнее выражение с (29), находим, что

$$q' = -q \text{ – для отражения.}$$

Выпишем сводку формул:

<u>Задано:</u>

Система координат совмещена с вершиной поверхности,

$\vec{A}(x, y)$ – вектор, задающий начальную точку падающего луча,

$\vec{s}(\xi, \eta, \zeta)$ – направляющий вектор падающего луча,

$F(u^*, z) = 0$ – уравнение поверхности с осевой симметрией.

<u>Расчет:</u>

$$\vec{P} = \zeta \cdot \vec{A}.$$

Находим u^*, z – координаты точки встречи луча с поверхностью, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\cdot u^*\cdot\zeta^2 = \vec{P}^2 + 2\cdot z\cdot\left(\vec{P}\cdot\vec{S}\right) + z^2\cdot\vec{S}^2 \\ F(u^*, z) = 0, \end{cases}$$

Вычисляем:

$$F_{u^*} = \frac{\partial F}{\partial u^*}, \quad F_z = \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$t - z = -\frac{F_z}{F_{u^*}}, \quad t = z - \frac{F_z}{F_{u^*}},$$

$$R = (\vec{P} + z\cdot\vec{S})^2 + \zeta^2\cdot(t-z)^2,$$

$$q = -(\vec{P} + z\cdot\vec{S})\cdot\vec{S} + \zeta^2\cdot(t-z),$$

$$q'^2 = (n'^2 - n^2)\cdot R + q^2,$$

$q' = sign(r_s)\cdot\sqrt{q'^2}$ – для преломления,

$q' = -q$ – для отражения,

$$\Psi = \frac{q' - q}{R},$$

$$\begin{cases} \vec{P}' = (1+\psi\cdot t)\cdot\vec{P} + \psi\cdot t\cdot z\cdot\vec{S} \\ \vec{S}' = -\psi\cdot\vec{P} + (1-\psi\cdot z)\cdot\vec{S} \\ \zeta' = \zeta\cdot\left[1+\psi\cdot(t-z)\right]. \end{cases} \tag{33}$$

4.2. Ход луча через систему поверхностей

Рассмотрим ход лучей через несколько поверхностей, образующих осесимметричную систему. Основные обозначения приведены на рис. 2.

$\vec{s}_1, \vec{A}_1$ – начальные данные для луча, падающего на первую поверхность;

$\vec{s}_2, \vec{A}_2$ – начальные данные для луча, падающего на вторую поверхность.

Очевидно, что $\vec{s}_2 = \vec{s}_1^{\,'}$ и из векторных треугольников можно записать:

$$\vec{A}_1' + l_1'\cdot\vec{s}_1' = d_1\cdot\vec{k} + \vec{A}_2, \text{ или}$$

$$\vec{A}_1' + l_1'\cdot\vec{S}_1' + l_1\cdot\vec{k} = d_1\cdot\vec{k} + \vec{A}_2$$

отсюда

$$l'_1 \cdot \zeta'_1 = d_1,$$
$$\vec{A}'_1 + l'_1 \cdot \vec{S}'_1 = \vec{A}_2,$$

или

$$l'_1 = \frac{d_1}{\zeta'_1},$$
$$\vec{A}_2 = \vec{A}'_1 + \frac{d_1}{\zeta'_1} \cdot \vec{S}'_1,$$

или

$$\vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + d_1 \cdot \vec{S}'_1.$$

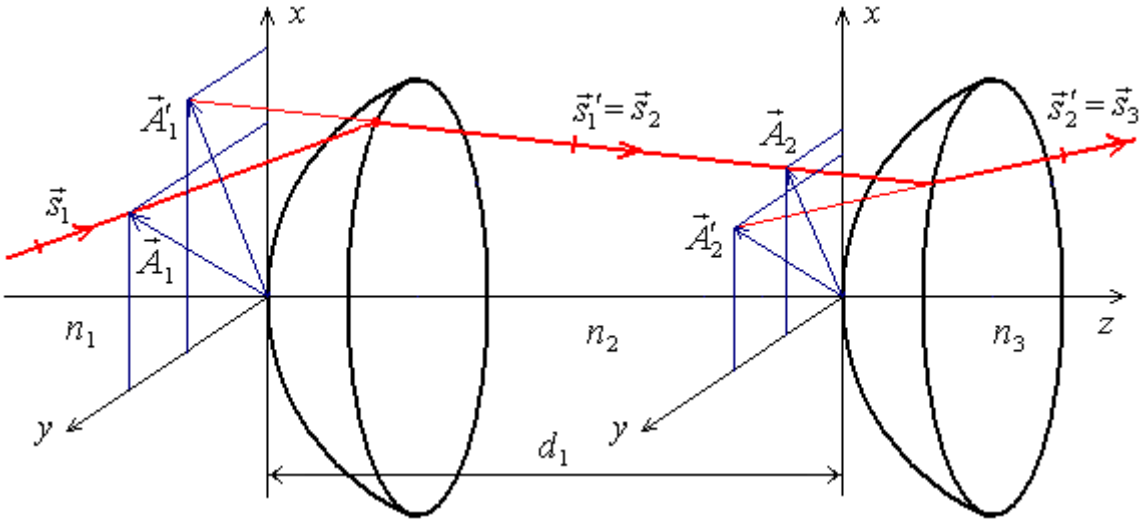


Рис. 2. Ход косого луча через систему поверхностей

Окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \vec{P}_2 &= \vec{P}'_1 + d_1 \cdot \vec{S}'_1 \\ \vec{S}_2 &= \vec{S}'_1 \\ \zeta_2 &= \zeta'_1 \end{aligned}\right\}. \qquad (34)$$

(34) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_2 \\ \vec{S}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{P}'_1 \\ \vec{S}'_1 \end{pmatrix}. \qquad (35)$$

Выражения для $\vec{P}'$ и $\vec{S}'$ можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} \vec{P}' \\ \vec{S}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{S} \end{pmatrix}, \tag{36}$$

где

$$\begin{aligned} &\chi = 1 + \psi \cdot t, \quad \lambda = \psi \cdot t \cdot z, \\ &\mu = -\psi, \qquad \nu = 1 - \psi \cdot z. \end{aligned} \tag{37}$$

Обозначим:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – матрица перемещения,} \tag{38}$$

$$R = \begin{pmatrix} \chi & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \text{ – матрица преломления (отражения).} \tag{39}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_2 \\ \vec{S}_2 \end{pmatrix} = T_1 \cdot \begin{pmatrix} P_1' \\ \vec{S}_1' \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_1' \\ \vec{S}_1' \end{pmatrix} = R_1 \cdot \begin{pmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{S}_1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Подставим (41) в (40)

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_2 \\ \vec{S}_2 \end{pmatrix} = T_1 \cdot R_1 \cdot \begin{pmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{S}_1 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Перейдем к третьей поверхности:

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_3 \\ \vec{S}_3 \end{pmatrix} = T_2 \cdot \begin{pmatrix} \vec{P}_2' \\ \vec{S}_2' \end{pmatrix} = T_2 \cdot R_2 \cdot \begin{pmatrix} \vec{P}_2 \\ \vec{S}_2 \end{pmatrix} = T_2 \cdot R_2 \cdot T_1 \cdot R_1 \cdot \begin{pmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{S}_1 \end{pmatrix}, \tag{43}$$

и т. д. Для k поверхностей можно записать:

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_k' \\ \vec{S}_k' \end{pmatrix} = R_k \cdot T_{k-1} \cdot R_{k-1} \cdot \ldots \cdot T_1 \cdot R_1 \cdot \begin{pmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{S}_1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{S}_1 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

где

$$M = R_k \cdot T_{k-1} \cdot R_{k-1} \cdot \ldots \cdot T_1 \cdot R_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{45}$$

M – матрица преобразования лучей системой поверхностей.

Очевидно, что для каждого луча своя матрица.

Матрицу преобразования лучей можно найти между любой парой плоскостей, например, между плоскостью предмета и плоскостью изображения. Положение плоскостей можно задать с помощью расстояний s и s' (рис. 3).

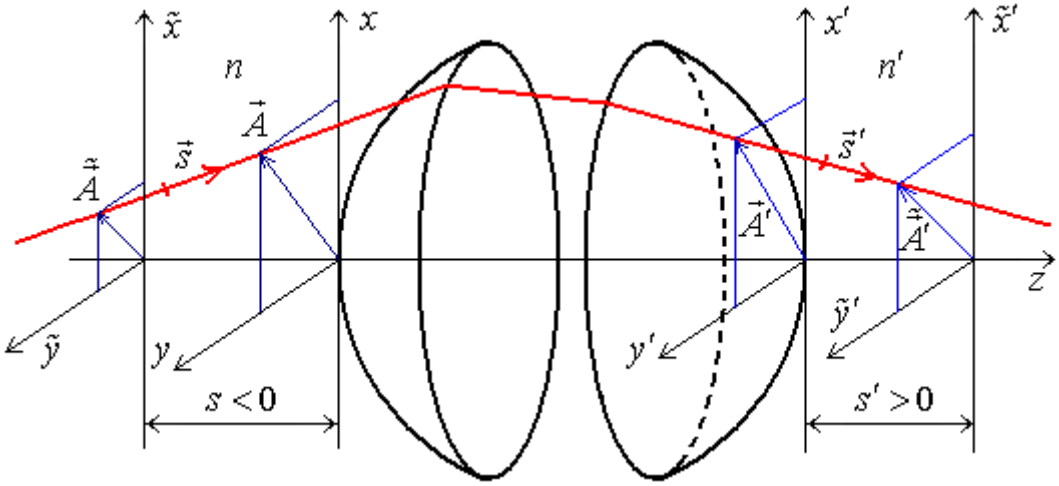


Рис. 3. Задание начальных и конечных точек с помощью расстояний s и s'

Для определенности примем, что расстояния s и s' отсчитываются соответственно от вершины первой и последней поверхности системы. Тогда можно записать:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\vec{P}}' \\ \tilde{\vec{S}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\vec{P}} \\ \tilde{\vec{S}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A + C \cdot s' & B + D \cdot s' \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\vec{P}} \\ \tilde{\vec{S}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A + C \cdot s' & -s \cdot (A + C \cdot s') + (B + D \cdot s') \\ C & -C \cdot s + D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\vec{P}} \\ \tilde{\vec{S}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\vec{P}} \\ \tilde{\vec{S}} \end{pmatrix}, \qquad (46)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{A} = A + C \cdot s', \quad \tilde{B} = -s \cdot (A + C \cdot s') + (B + D \cdot s'), \\ &\tilde{C} = C, \qquad\qquad \tilde{D} = -C \cdot s + D. \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Следовательно:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\vec{P}}' &= \tilde{A}\cdot\tilde{\vec{P}} + \tilde{B}\cdot\tilde{\vec{S}}\\ \tilde{\vec{S}}' &= \tilde{C}\cdot\tilde{\vec{P}} + \tilde{D}\cdot\tilde{\vec{S}}\end{aligned}\right\},$$

или, учитывая, что $\tilde{\vec{S}} = \vec{S}$, получим:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\vec{P}}' &= \tilde{A}\cdot\tilde{\vec{P}} + \tilde{B}\cdot\vec{S},\\ \tilde{\vec{S}}' &= \tilde{C}\cdot\tilde{\vec{P}} + \tilde{D}\cdot\vec{S}.\end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

Рассмотрим случай $\tilde{B} = 0$, тогда $\tilde{\vec{P}}' = \tilde{A}\cdot\tilde{\vec{P}}$, то есть векторы $\tilde{\vec{P}}$ и $\tilde{\vec{P}}'$ параллельны, а значит, параллельны векторы $\tilde{\vec{A}}$ и $\tilde{\vec{A}}'$. В этом случае уравнения (48) определяют точку, сопряженную с начальной точкой, поскольку обе точки лежат в меридиональной плоскости. Иначе говоря, точку сечения для косых лучей мы определим как точку, в которой преломленный (отраженный) луч пересекает меридиональную плоскость, проходящую через начальную точку.

Из условия $\tilde{B} = 0$ получаем:

$$-s\cdot(A + C\cdot s') + (B + D\cdot s') = 0,$$
$$-A\cdot s - C\cdot s\cdot s' + B + D\cdot s' = 0,$$
$$s'\cdot(D - C\cdot s) + (B - A\cdot s) = 0, \text{ отсюда}$$
$$s' = -\frac{B - A\cdot s}{D - C\cdot s}. \qquad (49)$$

Подставим (49) в (47):

$$\tilde{A} = A + C\cdot\left(-\frac{B - A\cdot s}{D - C\cdot s}\right) =$$
$$= \frac{A\cdot D - \cancel{A\cdot C\cdot s} - C\cdot B + \cancel{A\cdot C\cdot s}}{D - C\cdot s} =$$
$$= \frac{A\cdot D - B\cdot C}{D - C\cdot s},$$

итак, для системы поверхностей можно записать:
если $B = 0$, то начальная и конечная точки сопряжены и

$$\left.\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{A\cdot D - B\cdot C}{D - C\cdot s}\\ \tilde{\vec{P}}' &= \tilde{A}\cdot\tilde{\vec{P}}\end{aligned}\right\}. \qquad (50)$$

Согласно (47) и (48):

$$\tilde{\vec{S}}' = C \cdot \tilde{\vec{P}} + (D - C \cdot s) \cdot \vec{S}\,. \qquad (51)$$

Запишем соотношения (50) и (51) для одной поверхности. Очевидно, что в этом случае

$$A = \chi, \quad B = \lambda,$$
$$C = \mu, \quad D = \nu.$$

С учетом (37) получим

$$A \cdot D - B \cdot C = \chi \cdot \nu - \lambda \cdot \mu = (1 + \psi \cdot t) \cdot (1 - \psi \cdot z) - \psi \cdot t \cdot z \cdot (-\psi) =$$
$$= 1 + \psi \cdot t - \psi \cdot z - \cancel{\psi^2 \cdot t \cdot z} + \cancel{\psi^2 \cdot t \cdot z} =$$
$$= 1 + \psi \cdot t - \psi \cdot z\,.$$

Итак:

$$A \cdot D - B \cdot C = 1 + \psi \cdot t - \psi \cdot z\,. \qquad (52)$$

Далее находим:

$$D - C \cdot s = \nu - \mu \cdot s = (1 - \psi \cdot z) - (-\psi) \cdot s = 1 - \psi \cdot z + \psi \cdot s\,. \qquad (53)$$

С учетом (52) и (53) найдем из (50) $\tilde{A}$ и $\tilde{\vec{P}}'$:

$$\tilde{A} = \frac{1 + \psi \cdot t - \psi \cdot z}{1 - \psi \cdot z + \psi \cdot s}, \qquad (54)$$

$$\tilde{\vec{P}}' = \tilde{A} \cdot \tilde{\vec{P}} = \frac{1 + \psi \cdot (t - z)}{1 - \psi \cdot z + \psi \cdot s} \cdot \tilde{\vec{P}}\,.$$

Из (51) находим с учетом (37)

$$\tilde{\vec{S}}' = \vec{S}' = C \cdot \tilde{\vec{P}} + \left(D - C \cdot s\right) \cdot \vec{S} = \mu \cdot \tilde{\vec{P}} + (\nu - \mu \cdot s) \cdot \vec{S} =$$
$$= -\psi \cdot \tilde{\vec{P}} + (1 + \psi \cdot s - \psi \cdot z) \cdot \vec{S}\,.$$

Из (49) с учетом (37) находим:

$$s' = -\frac{\psi \cdot t \cdot z - (1 + \psi \cdot t) \cdot s}{1 - \psi \cdot z + \psi \cdot s} = \frac{-\psi \cdot t \cdot z + (1 + \psi \cdot t) \cdot s}{1 - \psi \cdot z + \psi \cdot s}\,.$$

Таким образом, для одной поверхности окончательно имеем:

$$\tilde{\vec{P}}' = \frac{1 + \psi \cdot (t - z)}{1 - \psi \cdot z + \psi \cdot s} \cdot \tilde{\vec{P}}, \qquad (55)$$

$$\vec{S}' = -\psi \cdot \tilde{\vec{P}} + (1 + \psi \cdot s - \psi \cdot z) \cdot \vec{S}\,, \tag{56}$$

$$s' = \frac{-\psi \cdot t \cdot z + (1 + \psi \cdot t) \cdot s}{1 - \psi \cdot z + \psi \cdot s}\,. \tag{57}$$

Рассмотрим несколько случаев:

1. Начальная и конечная точки меридионального луча находятся на оси, то есть

$$\tilde{\vec{P}} = \vec{P} + s \cdot \vec{S} = 0 \text{ и } \tilde{\vec{P}}' = \vec{P}' + s' \cdot \vec{S}' = 0\,. \tag{58}$$

Тогда из (56) и (57) следует:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{S}' = (1 - \psi \cdot z + \psi \cdot s) \cdot \vec{S}\,, \\ &s' = \frac{-\psi \cdot t \cdot z + (1 + \psi \cdot t) \cdot s}{1 - \psi \cdot z + \psi \cdot s}\,. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

2. Пусть падающий луч параллелен оси, тогда

$$\tilde{\vec{P}} = \vec{P}, \quad \vec{S} = 0, \quad s \to \infty, \tag{60}$$

следовательно, из (57):

$$s' = \frac{-\dfrac{\psi \cdot t \cdot z}{s} + (1 + \psi \cdot t)}{\dfrac{1 - \psi \cdot z}{s} + \psi} \underset{s \to \infty}{=} \frac{1 + \psi \cdot t}{\psi} = \frac{1}{\psi} + t\,. \tag{61}$$

Из (56) с учетом (37):

$$\vec{S}' = -\psi \cdot \vec{P}\,, \tag{62}$$

$$\vec{P}' = \chi \cdot \vec{P} + \lambda \cdot \vec{S} = \chi \cdot \vec{P} = (1 + \psi \cdot t) \cdot \vec{P}\,. \tag{63}$$

3. Положим

$$s = z - \frac{1}{\psi}\,. \tag{64}$$

Тогда из (59) находим:

$$s' = \frac{-\psi \cdot t \cdot z + (1 + \psi \cdot t) \cdot \left(z - \dfrac{1}{\psi} \right)}{1 - \psi \cdot z + \psi \cdot \left(z - \dfrac{1}{\psi} \right)} \to \infty\,, \tag{65}$$

$$\vec{S}' = \left[1 - \psi \cdot z + \psi \cdot \left(z - \frac{1}{\psi}\right)\right] \cdot \vec{S} = 0, \tag{66}$$

то есть луч в пространстве изображений параллелен оси.

$$\vec{P}' = (1 + \psi \cdot t) \cdot \vec{P} + \psi \cdot t \cdot z \cdot \vec{S} \tag{67}$$

Точки, определяемые соотношениями (61) и (64), называются **диафокальными** точками сечения.

Преобразуем выражение (67):

Поскольку

$$\vec{S}' = \mu \cdot \vec{P} + \nu \cdot \vec{S} = -\psi \cdot \vec{P} + (1 - \psi \cdot z) \cdot \vec{S} = 0, \tag{68}$$

то, умножая (68) на t, получим:

$$0 = -\psi \cdot t \cdot \vec{P} - \psi \cdot t \cdot z \cdot \vec{S} + t \cdot \vec{S}. \tag{69}$$

Складывая (67) и (69), получим:

$$\vec{P}' = \vec{P} + t \cdot \vec{S} \tag{70}$$

таким образом, имеем:

$$\begin{cases} s = z - \dfrac{1}{\psi}, \\ s' = \infty, \\ \vec{S}' = 0, \\ \vec{P}' = \vec{P} + t \cdot \vec{S}. \end{cases} \tag{71}$$

4.3. Параксиальное приближение

В заключение этого раздела рассмотрим так называемые параксиальные лучи, то есть лучи, которые достаточно близки к оси, так, что для них можно пренебречь величинами второго порядка малости:

$$\begin{gathered} \vec{P}^2 \approx \vec{P} \cdot \vec{S} \approx \vec{S}^2 \approx 0, \\ u^* \approx 0, \quad \zeta^2 = n^2. \end{gathered} \tag{72}$$

Так как $u^* \approx 0$, то вблизи вершины поверхности

$$F\left(u^*, z\right) \approx F\left(z\right) = 0,$$

а значит $z \to 0$.

Тогда из (16) следует:

$$t = -\frac{F_z}{F_{u*}},$$

а из (17) находим:

$$r_s^{\,2} = \vec{A}^{*2} + (t-z)^2 \approx t^2, \text{ то есть } r_s = r_0 = t, \tag{73}$$

Предельное значение r_s при $z = 0$, очевидно, равно радиусу кривизны r_0 в вершине поверхности.

Далее из (33) находим:

$$\begin{aligned}
&R = \zeta^2 \cdot r_0^2 = n^2 \cdot r_0^2,\\
&q = \zeta^2 \cdot r_0 = n^2 \cdot r_0,\\
&q'^2 = (n'^2 - n^2)\cdot n^2 \cdot r_0^2 + n^4 \cdot r_0^2 =\\
&\quad = n'^2 \cdot n^2 \cdot r_0^2 - \cancel{n^4 \cdot r_0^2} + \cancel{n^4 \cdot r_0^2} = n'^2 \cdot n^2 \cdot r_0^2,\\
&q' = sign(r_0)\cdot n' \cdot n \cdot |r_0| = n' \cdot n \cdot r_0,\\
&\psi = \frac{n' \cdot n \cdot r_0 - n^2 \cdot r_0}{n^2 \cdot r_0^2} = \frac{n' - n}{n \cdot r_0}
\end{aligned} \tag{74}$$

Из (37) находим с учетом (73) и (74):

$$\left.\begin{aligned}
&\chi = 1 + \psi \cdot t = 1 + \frac{n' - n}{n \cdot r_0} \cdot r_0 = \frac{n + n' - n}{n} = \frac{n'}{n},\\
&\lambda = 0,\\
&\mu = -\frac{n' - n}{n \cdot r_0},\\
&\nu = 1.
\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Согласно (36) и (75):

$$\begin{pmatrix} \vec{P}' \\ \vec{S}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{n'}{n} & 0 \\ -\dfrac{n' - n}{n \cdot r_0} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{S} \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} \vec{P}' = \dfrac{n'}{n} \cdot \vec{P}, \\ \vec{S}' = -\dfrac{n' - n}{n \cdot r_0} \cdot \vec{P} + \vec{S}, \end{cases} \tag{76}$$

$$\zeta' = \zeta \cdot \left[1 + \psi \cdot (t - z)\right] = \zeta \cdot \left[1 + \frac{n' - n}{n \cdot r_0} \cdot r_0\right] = \zeta \cdot \frac{n + n' - n}{n} = \frac{n'}{n} \cdot \zeta ,$$

то есть:

$$\zeta' = \frac{n'}{n} \cdot \zeta . \tag{77}$$

Из (76) с учетом (77) находим:

$$\zeta' \cdot \vec{A}' = \frac{n'}{n} \cdot \zeta \cdot \vec{A} ,$$

или

$$\frac{n'}{n} \cdot \zeta \cdot \vec{A}' = \frac{n'}{n} \cdot \zeta \cdot \vec{A},$$

то есть:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} , \\ x' = x, \quad y' = y . \end{cases} \tag{78}$$

Аналогичные результаты получаем для отражения:

$$\begin{gathered} R = n^2 \cdot r_0^2, \\ q = n^2 \cdot r_0 , \\ q' = -q = -n^2 \cdot r_0 , \\ \psi = \frac{-n^2 \cdot r_0 - n^2 \cdot r_0}{n^2 \cdot r_0^2} = -\frac{2}{r_0} , \end{gathered} \tag{79}$$

$$\left.\begin{aligned} &\chi = 1 + \left(-\frac{2}{r_0}\right) \cdot r_0 = -1 , \quad \lambda = 0 , \\ &\mu = \frac{2}{r_0} , \qquad\qquad\qquad\qquad \nu = 1 . \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Далее находим:

$$\begin{pmatrix} \vec{P}' \\ \vec{S}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2}{r_0} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{S} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \vec{P}' = -\vec{P}, \\ \vec{S}' = \dfrac{2}{r_0} \cdot \vec{P} + \vec{S}. \end{cases} \tag{81}$$

$$\zeta' = \zeta \cdot \left(1 - \frac{2}{r_0} \cdot r_0\right) = -\zeta. \tag{82}$$

Из (81) с учетом (82) получим:

$$\zeta' \cdot \vec{A}' = -\zeta \cdot \vec{A},$$

или

$$-\zeta \cdot \vec{A}' = -\zeta \cdot \vec{A},$$

то есть

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A}, \quad \text{или} \\ x' = x, \quad y' = y. \end{cases} \tag{83}$$

Из (57) с учетом (73) и (74) находим:

$$s' = \frac{\left(1 + \dfrac{n' - n}{n \cdot r_0} \cdot r_0\right) \cdot s}{1 + \dfrac{n' - n}{n \cdot r_0} \cdot s}, \text{ или}$$

$$s' + s' \cdot s \cdot \frac{n' - n}{n \cdot r_0} = \left(1 + \frac{n' - n}{n}\right) \cdot s = \frac{n + n' - n}{n} \cdot s = \frac{n'}{n} \cdot s,$$

или

$\dfrac{n'}{n} \cdot s - s' = s \cdot s' \cdot \dfrac{n' - n}{n \cdot r_0}$, домножим уравнение на $\dfrac{n'}{s \cdot s'}$.

получим:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}. \tag{84}$$

В разделе **3** была получена формула (3.43) для расчета параксиальных точек сечения при преломлении луча на сфере:

$$\frac{1}{n' \cdot z'} - \frac{1}{n \cdot z} = -\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right) \tag{3.43}$$

При выводе этой формулы предполагалось, что начало координат находится в центре сферы. Перенесем начало координат в вершину сферы (то есть в точку пересечения оси oz со сферой). Для этого проведем преобразование координат:

$$z = s - r, \quad z' = s' - r\,, \tag{85}$$

подставим (85) в (4.43):

$$\frac{n \cdot z - n' \cdot z'}{n \cdot n' \cdot z \cdot z'} = -\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{n - n'}{n \cdot n'} \right),$$

или

$$n \cdot z - n' \cdot z' = z \cdot z' \cdot \frac{n' - n}{r},$$

или

$$n \cdot (s - r) - n' \cdot (s' - r) = \frac{1}{r} \cdot (s - r) \cdot (s' - r) \cdot (n' - n)\,,$$

$$n \cdot s - n \cdot r - n' \cdot s' + n' \cdot r = \frac{1}{r} \cdot (s \cdot s' - r \cdot s' - r \cdot s + r^2) \cdot (n' - n) =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot (\underline{n' \cdot s \cdot s'} - n' \cdot r \cdot s' - n' \cdot r \cdot s + n' \cdot r^2 - \underline{n \cdot s \cdot s'} + n \cdot r \cdot s' + n \cdot r \cdot s - n \cdot r^2),$$

или

$$\cancel{n \cdot s} - \cancel{n \cdot r} - \cancel{n' \cdot s'} + \cancel{n' \cdot r} =$$

$$= s \cdot s' \cdot \frac{n' - n}{r} - \cancel{n' \cdot s'} - n' \cdot s + \cancel{n' \cdot r} + n \cdot s' + \cancel{n \cdot s} - \cancel{n \cdot r}\,,$$

$$n \cdot s' - n' \cdot s + s \cdot s' \cdot \frac{n' - n}{r} = 0 \;\Big|\cdot \frac{1}{s \cdot s'},$$

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}\;. \tag{86}$$

Как видим, формулы (84) и (86) полностью совпадают.

5. МАТРИЧНАЯ ОПТИКА. ЧАСТЬ 1

5.1. Параксиальное приближение

Рассмотрим распространение лучей в приосевой области. В этой области величинами второго порядка малости можно пренебречь, то есть положим:

$$\vec{A}^{*2} = \vec{P}^{*2} = \vec{P}^2 = \vec{S}^2 = \vec{P}\cdot\vec{S} = \vec{P}^*\cdot\vec{S} = 0, \qquad (1)$$

$$x^{*2} + y^{*2} = 0, \text{ то есть } u^* = 0.$$

Тогда уравнение поверхности примет вид:

$$F(u^*, z) = F(z) = 0, \qquad (2)$$

откуда видно, что вблизи вершины поверхности $z \approx 0$.

Поскольку $\vec{s}^2 = \vec{S}^2 + \zeta^2 = n^2$ и $\vec{S}^2 = 0$, то $\zeta = \varepsilon\cdot n$. (3)

Далее из формул по расчету хода луча находим:

$r_s^2 = \vec{A}^{*2} + (t-z)^2 = t^2$, то есть

$t = r_s = r_0$ – радиус кривизны при вершине поверхности, (4)

$$R = \vec{P}^{*2} + \zeta^2\cdot(t-z)^2 = \zeta^2\cdot t^2 = n^2\cdot r_0^2, \qquad (5)$$

$$q = -\vec{P}^*\cdot\vec{S} + \zeta^2\cdot(t-z) = \zeta^2\cdot t = n^2\cdot r_0, \qquad (6)$$

$$q'^2 = R\cdot(n'^2 - n^2) + q^2 = n^2\cdot r_0^2\cdot(n'^2 - n^2) + n^4\cdot r_0^2 = n'^2\cdot n^2\cdot r_0^2,$$

$q' = sign(r_0)\cdot n'\cdot n\cdot|r_0| = n'\cdot n\cdot r_0$, – для преломления, (7)

$q' = -q$, – для отражения, (8)

$$\psi = \frac{q'-q}{R} = \frac{n'\cdot n\cdot r_0 - n^2\cdot r_0}{n^2\cdot r_0^2} = \frac{n'-n}{n\cdot r_0}, \text{ – для преломления,} \qquad (9)$$

$$\psi = \frac{-2\cdot q}{R} = -\frac{2\cdot n^2\cdot r_0}{n^2\cdot r_0^2} = -\frac{2}{r_0}, \text{ – для отражения.} \qquad (10)$$

5.2. Одна поверхность

5.2.1. Преломление

С учетом (1-10) запишем элементы матрицы преобразования лучей для преломляющей поверхности:

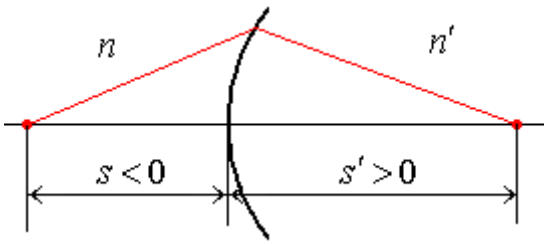


Рис. 1. Преломляющая поверхность

$$\begin{cases} A = 1 + \psi \cdot t = 1 + \dfrac{n' - n}{n \cdot r_0} \cdot r_0 = \dfrac{n + n' - n}{n} = \dfrac{n'}{n}, \\ B = \psi \cdot t \cdot z = 0, \\ C = -\psi = -\dfrac{n' - n}{n \cdot r_0}, \\ D = 1 - \psi \cdot z = 1. \end{cases} \tag{11}$$

Окончательно:

$$\begin{cases} A = \dfrac{n'}{n}, & B = 0, \\ C = -\dfrac{n' - n}{n \cdot r_0}, & D = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Далее, с учетом (5.49), находим:

$$s' = -\frac{B - s \cdot A}{D - s \cdot C} = \frac{s \cdot \dfrac{n'}{n}}{1 + s \cdot \dfrac{n' - n}{n \cdot r_0}},$$

или

$$s' + s' \cdot s \cdot \frac{n' - n}{n \cdot r_0} = s \cdot \frac{n'}{n} \quad \Big| \cdot \frac{1}{s' \cdot s},$$

$$\frac{1}{s} + \frac{n' - n}{n \cdot r_0} = \frac{1}{s'} \cdot \frac{n'}{n} \quad \Big| \cdot n$$

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r_0},$$

или

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r_0} = \varphi. \tag{13}$$

Формула (13) связывает сопряженные отрезки для одной преломляющей поверхности. Здесь

$\varphi = \dfrac{n' - n}{r_0}$ – **оптическая сила преломляющей поверхности.**

Начальные и конечные данные падающего на поверхность и преломленного лучей связаны уравнениями:

$$\vec{P}' = A \cdot \vec{P} + B \cdot \vec{S} = \frac{n'}{n} \cdot \vec{P}, \quad (14\text{-}1)$$

$$\vec{S}' = C \cdot \vec{P} + D \cdot \vec{S} = -\frac{n' - n}{n \cdot r_0} \cdot \vec{P} + \vec{S}, \quad (14\text{-}2)$$

$$\zeta' = \zeta \cdot \left[1 + \psi \cdot (t - z)\right] = \zeta \cdot (1 + \psi \cdot t) = \zeta \cdot \left(1 + \frac{n' - n}{n \cdot r_0} \cdot r_0\right) =$$

$$= \frac{n'}{n} \cdot \zeta = \frac{n'}{n} \cdot \varepsilon \cdot n = \varepsilon \cdot n',$$

то есть

$$\zeta' = \varepsilon \cdot n', \quad (15)$$

Формулы (14) справедливы и для хода луча в отрицательном направлении в этом случае матрица преобразования записывается по ходу луча, то есть нумерация сред и границ их раздела осуществляется в направлении хода луча.

Меридиональное сечение.

Распишем (14) по координатам:

$$\zeta' \cdot \vec{A}' = \frac{n'}{n} \cdot \zeta \cdot \vec{A}, \text{ отсюда } \vec{A}' = \vec{A},$$

то есть:

$x' = x$, $y' = y = 0$ – в меридиональном сечении.

$$\xi' = -\frac{n' - n}{n \cdot r_0} \cdot \varepsilon \cdot n \cdot x + \xi = -\varepsilon \cdot \frac{n' - n}{r_0} \cdot x + \xi,$$

$\eta' = -\dfrac{n' - n}{n \cdot r_0} \cdot \varepsilon \cdot n \cdot y + \eta = 0$, так как в меридиональном сечении $\eta = 0$ и $y = 0$.

Окончательно имеем:

$$\begin{cases} x' = x, \\ \xi' = -\varepsilon \cdot \dfrac{n' - n}{r_0} \cdot x + \xi, \quad \zeta' = \varepsilon \cdot n'. \end{cases} \quad (16)$$

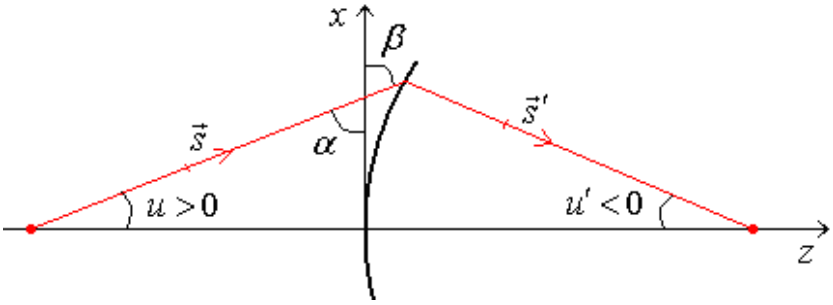


Рис. 2. Основные обозначения

Для удобства введем вместо направляющих косинусов ξ и ξ' углы u и u' (рис. 2) и правило знаков для них:

$u > 0$, $u' > 0$ **– если для совмещения с оптической осью луч необходимо повернуть по кратчайшему пути по часовой стрелке,**

$u < 0$, $u' < 0$ **– если для совмещения с оптической осью луч необходимо повернуть по кратчайшему пути против часовой стрелки.**

По определению углы u и u' по модулю всегда меньше $\pi/2$, как измеряемые по кратчайшему расстоянию, поэтому с учетом сформулированного правила знаков можно записать:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= n \cdot \cos\alpha = \varepsilon \cdot n \cdot \sin u\,, \\ \xi' &= n' \cdot \cos\beta = \varepsilon' \cdot n' \cdot \sin u'\,. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

В параксиальной области $\sin u \approx u$, $\sin u' \approx u'$, тогда:

$$\begin{cases} \xi = \varepsilon \cdot n \cdot u\,, \\ \xi' = \varepsilon' \cdot n' \cdot u'\,. \end{cases} \qquad (18)$$

С учетом преобразований (18) уравнения (16) можно записать в виде:

$$x' = x\,, \qquad (19\text{-}1)$$

$$V' = -\varepsilon \cdot \frac{n' - n}{r_0} \cdot x + V\,, \qquad (19\text{-}2)$$

где

$$V' = \varepsilon' \cdot n' \cdot u'\,, \quad V = \varepsilon \cdot n \cdot u\,. \qquad (20)$$

Таким образом, для преломления окончательно имеем:

$$\begin{pmatrix} x' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon \cdot \dfrac{n' - n}{r_0} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ V \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x \\ V \end{pmatrix} \qquad (21)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon \cdot \dfrac{n' - n}{r_0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon \cdot \varphi & 1 \end{pmatrix} \text{ – } \textbf{матрица преломления,} \qquad (22)$$

$$\varphi = \frac{n' - n}{r_0}, \tag{23}$$

φ – **оптическая сила преломляющей поверхности, определяется для положительного направления хода луча.**

Преобразование (21) справедливо для луча, распространяющегося как в положительном направлении, так и в отрицательном.

5.2.2. Отражение

С учетом (1-10) запишем элементы матрицы преобразования лучей для отражающей поверхности (рис. 3):

$$\left.\begin{aligned} &A = 1 + \psi \cdot t = -1, \quad B = \psi \cdot t \cdot z = 0, \\ &C = -\psi = \frac{2}{r_0}, \qquad D = 1 - \psi \cdot z = 1, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

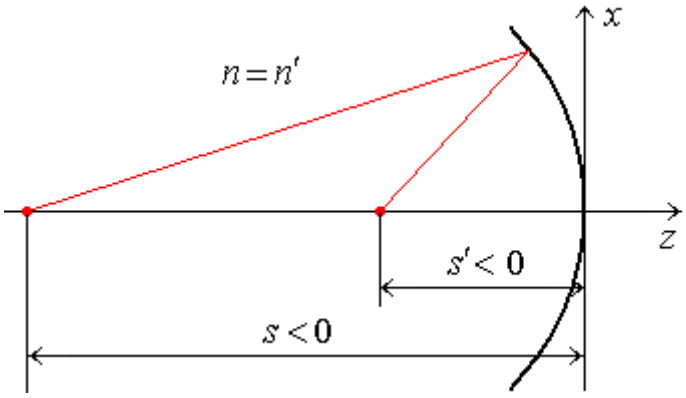


Рис. 3. Отражение

С учетом (24) из (5.49) находим формулу, связывающую сопряженные отрезки:

$$s' = -\frac{B - s \cdot A}{D - s \cdot C} = -\frac{s}{1 - s \cdot \dfrac{2}{r_0}},$$

или

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r_0} \text{ – для отражения.} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{P}' = A \cdot \vec{P} + B \cdot \vec{S} = -\vec{P}, \\ &\vec{S}' = C \cdot \vec{P} + D \cdot \vec{S} = \frac{2}{r_0} \cdot \vec{P} + \vec{S}, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\zeta' = \zeta \cdot \left[1 + \psi \cdot (t - z)\right] = \zeta \cdot (1 + \psi \cdot t) = \varepsilon \cdot n \cdot \left(1 - \frac{2}{r_0} \cdot r_0\right) = -\varepsilon \cdot n,$$

то есть

$$\zeta' = -\varepsilon \cdot n. \tag{27}$$

Меридиональное сечение.

Преобразуем выражения (26-27) для меридионального сечения:

$$\begin{cases} \zeta' \cdot x' = -\zeta \cdot x, \\ \xi' = \dfrac{2}{r_0} \cdot \zeta \cdot x + \xi, \quad \zeta' = -\varepsilon \cdot n, \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} -\varepsilon \cdot n \cdot x' = -\varepsilon \cdot n \cdot x, \\ \varepsilon' \cdot n' \cdot u' = \dfrac{2}{r_0} \cdot \varepsilon \cdot n \cdot x + \varepsilon \cdot n \cdot u, \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} x' = x, \\ V' = \varepsilon \cdot \dfrac{2 \cdot n}{r_0} \cdot x + V, \end{cases}$$

где $$V' = \varepsilon' \cdot n' \cdot u', \quad V = \varepsilon \cdot n \cdot u.$$

Окончательно:

$$\begin{pmatrix} x' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon \cdot \dfrac{2 \cdot n}{r_0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon \cdot \varphi & 1 \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x \\ V \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon \cdot \varphi & 1 \end{pmatrix} \text{ – } \textbf{матрица отражения.} \tag{29}$$

$$\varphi = -\frac{2}{r_0} \cdot n \text{ – оптическая сила отражающей поверхности,} \tag{30}$$

определяется для положительного направления хода луча.

Преобразование (28) справедливо для луча, распространяющегося как в положительном направлении, так и в отрицательном.

5.2.3. Перемещение луча

Рассмотрим **перемещение** луча в среде с показателем преломления n между двумя опорными плоскостями $ОП$ и $ОП'$ (рис. 4):

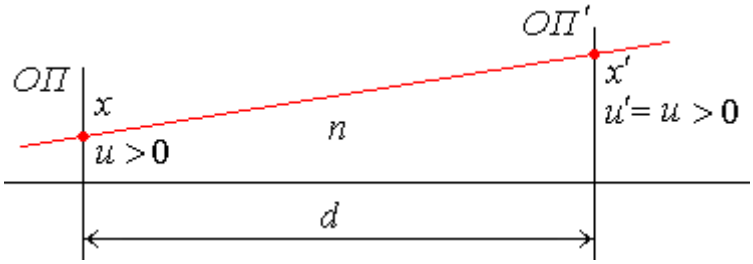


Рис. 4. Перемещение луча

Будем считать, что $d > 0$, если луч от $ОП$ к $ОП'$ распространяется в положительном направлении и $d < 0$, если луч от $ОП$ к $ОП'$ распространяется в отрицательном направлении.

Согласно (5.34) и (5.35):

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \vec{P}' \\ \vec{S}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{S} \end{pmatrix}, \\ \zeta' = \zeta, \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} \vec{P}' = \vec{P} + d \cdot \vec{S}, \\ \vec{S}' = \vec{S}, \end{cases}$$

отсюда

$\zeta' \cdot \vec{A}' = \zeta \cdot \vec{A} + d \cdot \vec{S}$, или для меридионального сечения:

$$\begin{cases} \zeta' \cdot x' = \zeta \cdot x + d \cdot \xi, \\ \xi' = \xi, \quad \zeta' = \zeta, \end{cases}$$

или с учетом (3) и (21):

$$x' = x + d \cdot \frac{\xi}{\zeta} = x + d \cdot \frac{\varepsilon \cdot n \cdot u}{\varepsilon \cdot n} = x + \varepsilon \cdot \frac{d}{n} \cdot V,$$

$$\varepsilon' \cdot n' \cdot u' = \varepsilon \cdot n \cdot u, \quad \text{или} \quad V' = V.$$

Окончательно можно записать:

$$\begin{pmatrix} x' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \cdot \dfrac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ V \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x \\ V \end{pmatrix}. \qquad (31)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \cdot \dfrac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – матрица перемещения.} \qquad (32)$$

Преобразование (31) справедливо для луча, распространяющегося как в положительном направлении, так и в отрицательном.

5.3. Правило знаков

Сформулируем правило знаков и для наглядности выведем полученные формулы для преобразования параметров луча другим способом.

а. Преломление.

Все углы, изображенные на рис. 5, измеряются также по кратчайшему пути, то есть по модулю всегда меньше $\pi/2$. Сформулируем правило знаков для этих углов (кроме углов u и u', для которых правило остается прежним):

Линия низшего приоритета вращается до совмещения с линией высшего приоритета по кратчайшему пути. Если вращение происходит по часовой стрелке, то угол <0; при вращении против часовой стрелки угол >0.

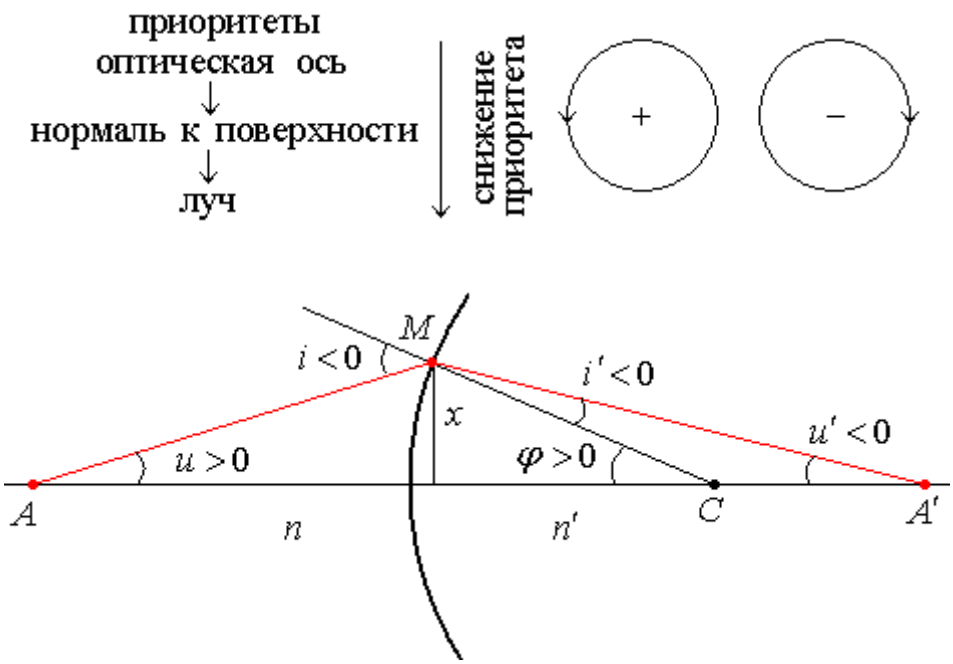


Рис. 5. Иллюстрация правила знаков

Из рис. 5 находим:

$$i = -\varphi - u,$$

$$\varphi = -i' - u', \text{ отсюда } i' = -\varphi - u'.$$

Подставим полученные значения углов i и i' в закон преломления:

$i' = \frac{n}{n'} \cdot i$, откуда получим

$-\varphi - u' = \frac{n}{n'} \cdot \left(-\varphi - u\right)$, или

$u' + \varphi = \frac{n}{n'} \cdot (u + \varphi)$,

$u' = \frac{n}{n'} \cdot u + \varphi \cdot \left(\frac{n}{n'} - 1\right)$,

$n' \cdot u' = n \cdot u + \varphi \cdot (n - n')$,

так как $\varphi = \frac{x}{r}$, то

$n' \cdot u' = n \cdot u - \frac{n' - n}{r} \cdot x$, или, поскольку для преломления $\varepsilon' = \varepsilon$:

$\varepsilon' \cdot n' \cdot u' = \varepsilon \cdot n \cdot u - \varepsilon \cdot \frac{n' - n}{r} \cdot x$, или

$V' = -\varepsilon \cdot \frac{n' - n}{r} \cdot x + V$, или

$$\begin{pmatrix} x' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon \cdot \frac{n' - n}{r} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ V \end{pmatrix}.$$

Полученный результат совпадает с (21).

б. Перемещение.

Из рис. 4 находим (для любого направления луча):

$x' = x + d \cdot u = x + \frac{d}{n} \cdot n \cdot u = x + \frac{d}{\varepsilon \cdot n} \cdot \varepsilon \cdot n \cdot u = x + \varepsilon \cdot \frac{d}{n} \cdot V$,

$u' = u$.

Полученный результат совпадает с (31).

5.4. Система поверхностей

Рассмотрим оптическую систему, состоящую из k сферических поверхностей (рис. 6). На основании полученных результатов можно записать матрицу M преобразования лучей между опорными плоскостями $ОП_1$ и $ОП_k$, проходящими через вершины крайних поверхностей (аналогично 5.44):

$$M = R_k \cdot T_{k-1} \cdot R_{k-1} \cdot \ldots \cdot T_1 \cdot R_1, \qquad (33)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ V' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ V \end{pmatrix}. \qquad (34)$$

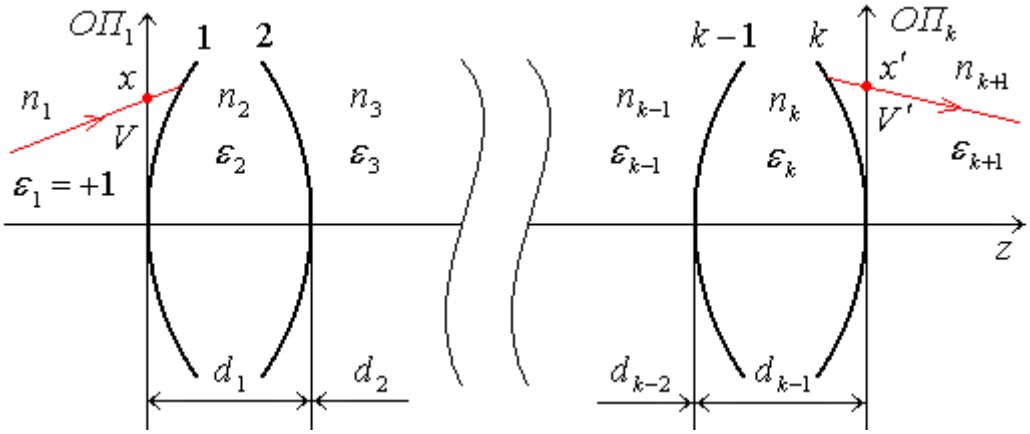


Рис. 6. Система поверхностей

Как известно из свойств матриц, детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов сомножителей:

$$\det M = \det R_k \cdot \det T_{k-1} \cdot \ldots \cdot \det T_1 \cdot \det R_1 = 1, \qquad (35)$$

поскольку детерминанты сомножителей равны единице.

Далее для определенности и простоты положим, что оптическая система <u>всегда</u> размещается по отношению к предмету таким образом, что ход луча в пространстве предметов положителен, то есть $\varepsilon_1 = +1$.

5.5. Матричное описание свойств ОС

Разместим в пространстве предметов и в пространстве изображений опорные плоскости $ОП$ и $ОП'$ соответственно (рис. 7).

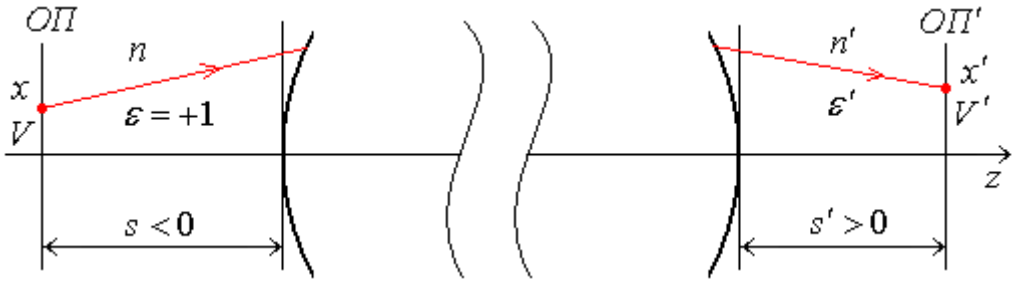


Рис. 7. Матрица преобразования лучей оптической системой

Найдем матрицу $\bar{M}$ преобразования лучей между этими плоскостями и рассмотрим ее свойства:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon' \cdot \dfrac{s'}{n'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{s}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix},$$

где

$$\overline{A} = A + \varepsilon' \cdot \frac{s'}{n'} \cdot C, \tag{36}$$

$$\overline{B} = -\frac{s}{n} \cdot \left(A + \varepsilon' \cdot \frac{s'}{n'} \cdot C \right) + B + \varepsilon' \cdot \frac{s'}{n'} \cdot D, \tag{37}$$

$$\overline{C} = C, \tag{38}$$

$$\overline{D} = D - \frac{s}{n} \cdot C. \tag{39}$$

1. Положим $\overline{B} = 0$, тогда:

$$x' = \overline{A} \cdot x, \tag{40-1}$$

$$V' = \overline{C} \cdot x + \overline{D} \cdot V. \tag{40-2}$$

Из (40) следует, что x' не зависит от V, то есть все лучи, вышедшие из точки x, соберутся в точке x'. Это означает, что точка x' является изображением точки x.

$\overline{A} = \dfrac{x'}{x} = \beta$ – **линейное (поперечное) увеличение системы.** (41)

Плоскости $ОП$ и $ОП'$ называются сопряженными. Если плоскость предметов и плоскость изображений находятся на конечном расстоянии, то оптическая система называется **проекционной** (рис. 8).

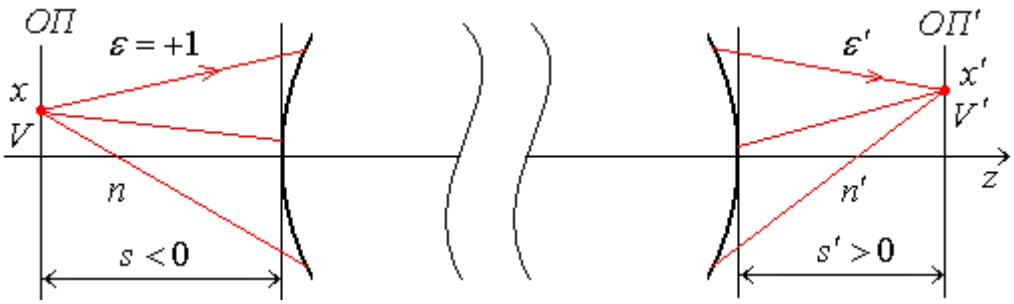


Рис. 8. Проекционная система

Из (40) следует:
если $x = 0$, то

$$x' = 0, \tag{42-1}$$

$$V' = \overline{D} \cdot V. \tag{42-2}$$

Из (42-2) находим:

$\bar{D} = \dfrac{V'}{V} = \gamma$ – угловое увеличение; $\bar{D} = \dfrac{u'}{u}$ при $n' = n$, $\varepsilon' = \varepsilon$ (рис. 9).

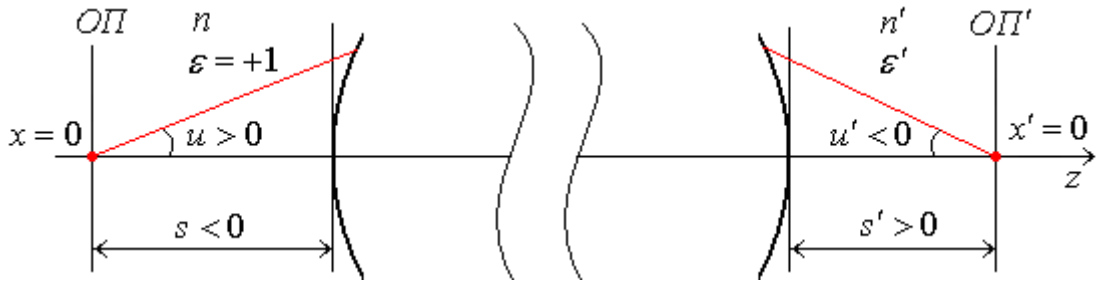


Рис. 9. К определению углового увеличения

Из условия $\bar{A} \cdot \bar{D} = 1$ следует $\gamma = \dfrac{1}{\beta}$. (43)

Из условия $\bar{B} = 0$ с учетом (37) следует:

$$-\frac{s}{n} \cdot A - \frac{s}{n} \cdot \varepsilon' \cdot \frac{s'}{n'} \cdot C + B + \varepsilon' \cdot \frac{s'}{n'} \cdot D = 0, \tag{44}$$

отсюда

$$\varepsilon' \cdot \frac{s'}{n'} = -\frac{B - \dfrac{s}{n} \cdot A}{D - \dfrac{s}{n} \cdot C}, \tag{45}$$

или же:

$$\frac{s}{n} = \frac{B + \varepsilon' \cdot \dfrac{s'}{n'} \cdot D}{A + \varepsilon' \cdot \dfrac{s'}{n'} \cdot C}. \tag{46}$$

Величина $\varepsilon' = +1$ при четном числе отражений и $\varepsilon' = -1$ при нечетном числе отражений.

Отрезки s и s' называются **сопряженными**, или **вершинными** отрезками.

2. Положим:

$$\bar{B} = 0 \text{ и } s \to -\infty,$$

тогда из (45) следует:

$$\varepsilon' \cdot \frac{s'_{F'}}{n'} = -\frac{\dfrac{B}{s} - \dfrac{1}{n} \cdot A}{\dfrac{D}{s} - \dfrac{1}{n} \cdot C} \underset{s \to -\infty}{=} -\frac{A}{C}. \tag{47}$$

Из (47) следует:

$$s'_{F'} = -\varepsilon' \cdot n' \cdot \frac{A}{C}$$ – **задний фокальный отрезок** (рис. 10) (48)

С учетом (36) и (47) можно записать:

$$x' = \bar{A} \cdot x = \left(A + \varepsilon' \cdot \frac{s'_{F'}}{n'} \cdot C \right) \cdot x = \left(A - \frac{A}{C} \cdot C \right) \cdot x = 0 . \qquad (49)$$

Из (49) следует, что $x' = 0$ при $s \to -\infty$ и любом заданном конечном значении x. **Это значит, что все лучи от бесконечно удаленного точечного источника света, расположенного на конечном расстоянии от оптической оси, сходятся в осевой точке F', называемой задним фокусом. Расстояние $s'_{F'}$ от вершины последней поверхности до фокуса F' называется задним фокальным отрезком. Плоскость $ОП'$ называется задней фокальной плоскостью (рис. 10).**

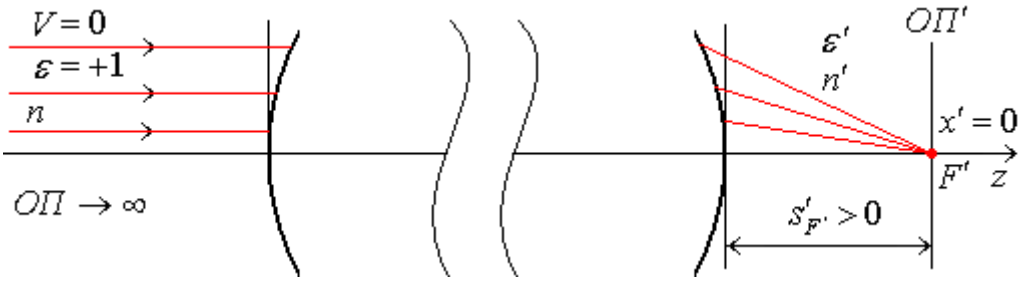


Рис. 10. Система типа объектив

Из уравнения (40-2) для конечных значений x и s найдем:

$$x = \frac{1}{C} \cdot \left(V' - \bar{D} \cdot V \right) \qquad (50)$$

Подставим (50) в уравнение (40-1):

$$x' = \frac{1}{C} \cdot \left(\bar{A} \cdot V' - \bar{A} \cdot \bar{D} \cdot V \right) = \frac{1}{C} \cdot \left(\bar{A} \cdot V' - V \right), \qquad (51\text{-}1)$$

поскольку $\bar{A} \cdot \bar{D} = 1$. Так как $\bar{A} = 0$ при $s \to -\infty$, то из (51-1) для $s \to -\infty$ получим:

$$x' = -\frac{V}{C} . \qquad (51\text{-}2)$$

Из (51-2) следует, что $x' = 0$ при $V = 0$ (рис. 10). Формула (51-2) используется, когда задается угловое положение бесконечно удаленной точки.

Каковы практические критерии бесконечности?

а) точка находится в бесконечности, если расходимость пучка, входящего в оптическую систему, не превышает дифракционной%;

б) если две точки в предметной плоскости ОП, расположенной в бесконечности, не разрешаются фотоприемником, то расстояние между ними конечное.

Оптическая система, по отношению к которой предмет находится в бесконечности, а изображение в задней фокальной плоскости, называется **объективом**.

3. Положим $\bar{B} = 0$ **и** $\varepsilon' \cdot s' \to +\infty$**,** тогда из (46) следует:

$$\frac{s_F}{n} = \frac{\dfrac{B}{\varepsilon' \cdot s'} + \dfrac{D}{n'}}{\dfrac{A}{\varepsilon' \cdot s'} + \dfrac{C}{n'}} \underset{(\varepsilon' \cdot s') \to +\infty}{=} \frac{D}{C}, \text{ или}$$

$$s_F = n \cdot \frac{D}{C} \text{ – } \textbf{передний фокальный отрезок.} \qquad (52)$$

Подставим (52) в (39):

$$\bar{D} = D - \frac{s_F}{n} \cdot C = D - \frac{D}{C} \cdot C = 0. \qquad (53)$$

С учетом (53) выражения (40) примут вид:

$$x' = \bar{A} \cdot x, \qquad (54\text{-}1)$$

$$V' = C \cdot x. \qquad (54\text{-}2)$$

Поскольку $\bar{D} = 0$, то $\bar{A} \to \infty$, поэтому для любого конечного значения x величина $x' \to \infty$. В этом случае определяется угловое положение изображения V' из (54-2).

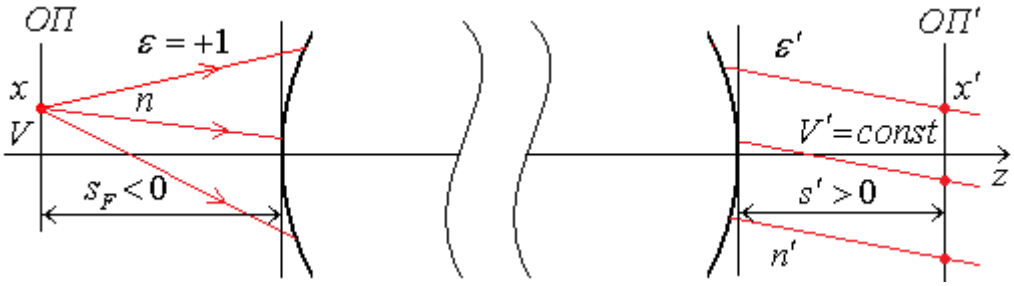


Рис. 11. Микроскоп

Из (54-2) также следует: V' не зависит от V, то есть лучи, вышедшие из точки x, преобразуются в параллельный пучок. **В этом случае плоскость** *ОП* **называется передней фокальной плоскостью.** Опти-

ческая система, по отношению к которой предмет находится в передней фокальной плоскости, а изображение в бесконечности, называется микроскопом (рис. 11).

Если $x=0$, то $V'=0$. Точка $x=0$ называется передним фокусом и обозначается F (рис. 12)**.**

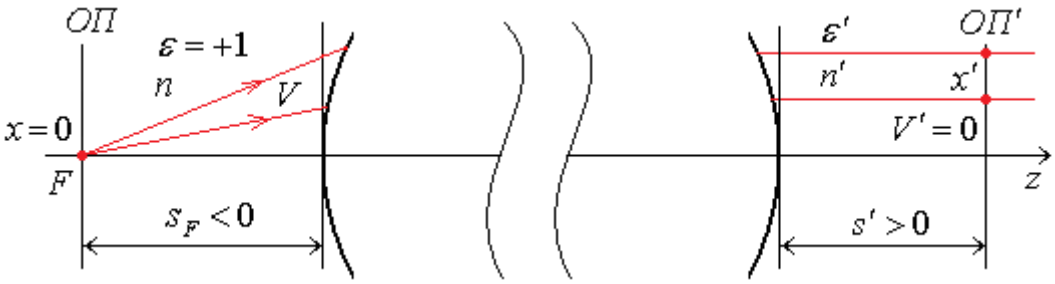


Рис. 12. К определению фокуса

4. Полагаем $\bar{B}=0$ и $\bar{C}=0$, тогда:

$$x' = \bar{A}\cdot x, \qquad (55\text{-}1)$$

$$V' = \bar{D}\cdot V. \qquad (55\text{-}2)$$

Из (55-2) следует: если $V=const$, то $V'=const$, то есть пучок параллельных лучей преобразуется системой в пучок параллельных лучей (рис. 13).

$$\bar{D} = \frac{V'}{V} = \gamma \text{ – } \textbf{угловое увеличение}. \qquad (56)$$

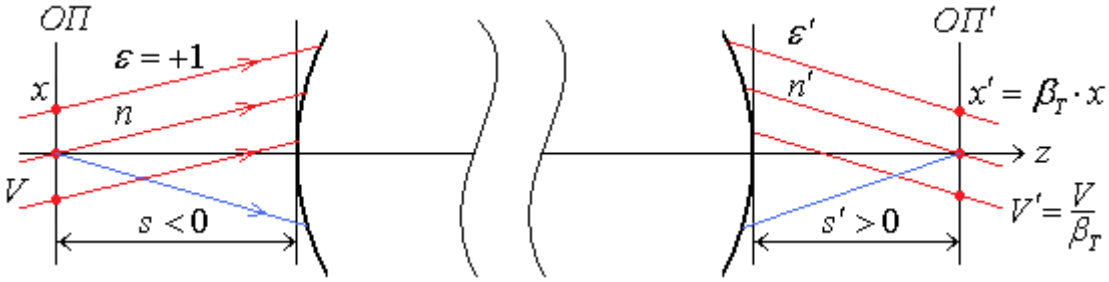


Рис. 13. Телескопическая система

Из (36) и (39) находим:

$$\bar{A} = A + \varepsilon'\cdot\frac{s'}{n'}\cdot C = A, \qquad (57)$$

$$\bar{D} = D - \frac{s}{n}\cdot C = D. \qquad (58)$$

Как видим, $\bar{A}=A$ и не зависит от s и s', то есть линейное увеличение телескопической системы для любой пары сопряженных плоскостей

есть величина постоянная. Поскольку плоскости $ОП$ и $ОП'$ сопряжены ($\overline{B}=0$), то $\overline{A}\cdot\overline{D}=1$. Обозначим $\beta_T=\overline{A}=A$, тогда, очевидно, $D=1/\beta_T$.

Из условия $\overline{B}=0$ находим:

$$-\frac{s}{n}\cdot A+B+\frac{\varepsilon'\cdot s'}{n'}\cdot D=0\text{, или}$$

$$\beta_T^2\cdot\frac{s}{n}-\frac{\varepsilon'\cdot s'}{n'}=\beta_T\cdot B. \qquad (59)$$

Уравнения (40) примут вид:

$$x'=\beta_T\cdot x, \qquad (60)$$

$$V'=V/\beta_T. \qquad (61)$$

Выражение (60) показывает, что точки x и x' сопряжены с телескопическим увеличением β_T (рис. 13); выражение (61) показывает, что пучок параллельных лучей преобразуется в пучок параллельных лучей с угловым увеличением $1/\beta_T$.

5.6. Система плоских поверхностей

Так как $r_i=\infty$, то $\varphi_i=0$, то есть:

$R_i=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ – единичная матрица, тогда (рис. 14):

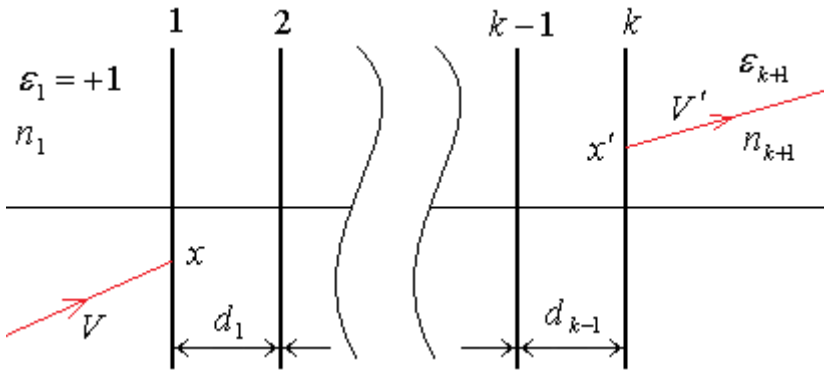


Рис. 14. Система плоских поверхностей

$$M=T_{k-1}\cdot T_{k-2}\cdot\ldots\cdot T_1=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i\cdot\frac{d_i}{n_{i+1}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad (62)$$

Запишем уравнение, связывающее параметры падающего и преломленного лучей:

$$\begin{pmatrix} x' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ V \end{pmatrix}, \text{ или}$$

$$x' = x + V_1 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_i}{n_{i+1}}, \qquad (63\text{-}1)$$

$$V' = V, \qquad (63\text{-}2)$$

так как для системы преломляющих поверхностей $\varepsilon_i = \varepsilon_1 = \varepsilon = +1$.

Если $n_1 = n_{k+1}$, то $u = u'$, то есть преломленный луч параллелен падающему лучу. Для реальных лучей согласно закону преломления:

$$n_1 \cdot \sin u = n_2 \cdot \sin u_2,$$

$$n_2 \cdot \sin u_2 = n_3 \cdot \sin u_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$n_k \cdot \sin u_k = n_{k+1} \cdot \sin u', \text{ отсюда}$$

$$n_1 \cdot \sin u_1 = n_{k+1} \cdot \sin u'_k.$$

Если $n_1 = n_{k+1}$, то $u = u'$.

5.7. Система тонких линз

Положим все $d_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, тогда

$T_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, – единичная матрица, тогда:

$$M = R_k \cdot R_{k-1} \cdot \ldots \cdot R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \cdot \varphi_i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix}, \qquad (64)$$

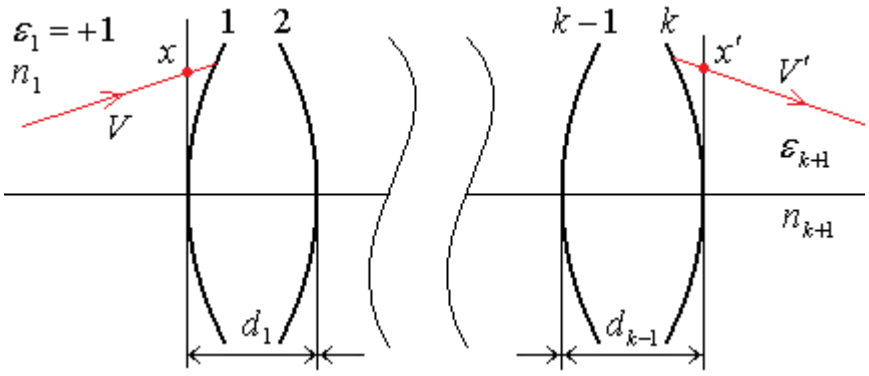


Рис. 15. Система тонких линз

так как для системы преломляющих поверхностей $\varepsilon_i = \varepsilon_1 = \varepsilon = +1$.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{K} \frac{n_{i+1} - n_i}{r_i} \text{ – оптическая сила системы тонких линз.} \qquad (65)$$

$$x' = x, \qquad (66\text{-}1)$$

$$V' = -\varepsilon \cdot \varphi \cdot x + V. \qquad (66\text{-}2)$$

Поскольку для системы тонких линз $x' = x$, все $d_i = 0$, на всех поверхностях $z_i = 0$, то систему тонких линз можно условно изобразить в виде отрезка прямой линии (рис. 16).

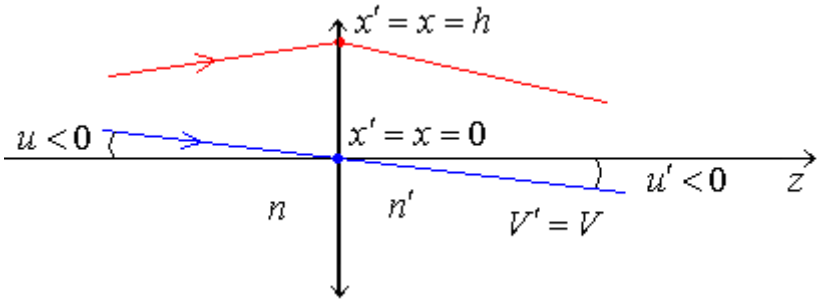


Рис. 16. Условное обозначение системы тонких линз

Если $x = 0$, то $x' = 0$ и $V' = V$. При $n' = n$ получим $u' = u$, то есть луч проходит через центр системы тонких линз без преломления.

5.8. Тонкая линза в воздухе

Для системы из двух поверхностей в воздухе можно записать:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{n-1}{r_1} + \frac{1-n}{r_2} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \qquad (67)$$

φ **– оптическая сила тонкой линзы.**

Согласно (66-1), для тонкой линзы $x = x' = h$.

Запишем матрицу преобразования лучей между сопряженными плоскостями $ОП$ и $ОП'$ (рис. 17):

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix},$$

где

$$\left. \begin{aligned} &\bar{A} = 1 - s' \cdot \varphi, \quad \bar{B} = -s \cdot (1 - s' \cdot \varphi) + s', \\ &\bar{C} = -\varphi, \qquad \bar{D} = 1 + s \cdot \varphi. \end{aligned} \right\} \qquad (68)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ V \end{pmatrix}. \tag{69}$$

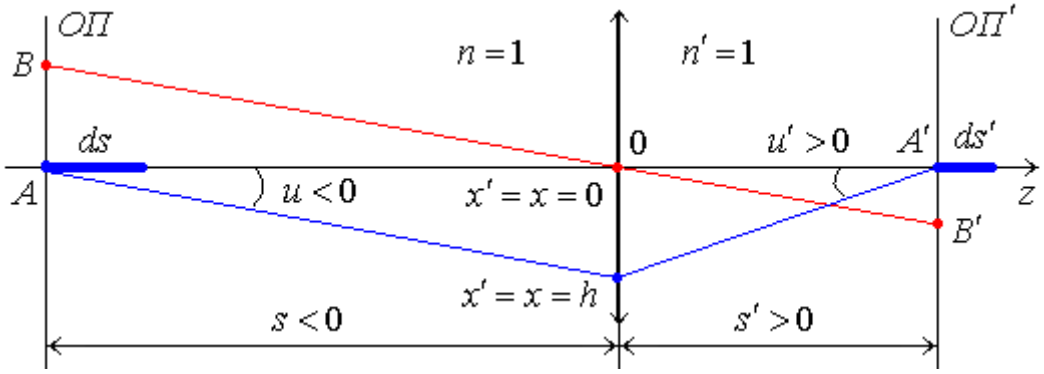


Рис. 17. Тонкая линза в воздухе

Пусть B и B' – сопряженные точки с координатами соответственно x и x'.

1. Положим $\bar{B} = 0$, тогда из (68) следует:

$$-s \cdot (1 - s' \cdot \varphi) + s' = 0, \text{ или}$$

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \varphi = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \text{ или} \tag{70}$$

$$s' = \frac{s}{1 + s \cdot \varphi}. \tag{71}$$

Из (69) следует:

$$x' = \bar{A} \cdot x = \beta \cdot x. \tag{72}$$

2. Положим $x = 0$, тогда из (69) и (72) получим:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ V' = \bar{D} \cdot V, \end{cases}$$

$$\bar{D} = \frac{V'}{V} = \frac{u'}{u} \text{ – } \textbf{угловое увеличение линзы,} \tag{73}$$

или

$$\bar{D} = \frac{u'}{u} = \frac{h/s'}{h/s} = \frac{s}{s'} = \frac{1}{\beta}, \text{ так как } \bar{D} = \frac{1}{\bar{A}} = \frac{1}{\beta}. \tag{74}$$

Из (72) и (74) следует:

$$\beta = \frac{s'}{s} = \frac{x'}{x}. \qquad (75)$$

3. Продифференцируем по s выражение (71):

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{1}{1+s\cdot\varphi} + s\cdot\frac{-\varphi}{(1+s\cdot\varphi)^2} = \frac{1+s\cdot\varphi - s\cdot\varphi}{(1+s\cdot\varphi)^2} = \frac{1}{(1+s\cdot\varphi)^2} = \alpha, \qquad (76)$$

α – **продольное увеличение.**

Из условия $\overline{A}\cdot\overline{D} = 1$ (поскольку $\overline{B} = 0$), получим

$$1 + s\cdot\varphi = \overline{D} = \frac{1}{\overline{A}} = \frac{1}{\beta}, \text{ тогда} \qquad (77)$$

$$\alpha = \beta^2. \qquad (78)$$

$$ds' = \alpha\cdot ds. \qquad (79)$$

4. Если слева от тонкой линзы среда с показателем преломления n, а справа – с показателем преломления n', то из (45) следует:

$$\frac{s'}{n'} = \frac{\frac{s}{n}}{1+\frac{s}{n}\cdot\varphi}, \qquad (80)$$

дифференцируя (80), получим:

$$\alpha = \frac{n'}{n}\cdot\beta^2. \qquad (81)$$

6. МАТРИЧНАЯ ОПТИКА. ЧАСТЬ 2

6.1. Главные точки

Запишем матрицу преобразования лучей оптической системой (ОС) между опорными плоскостями $ОП$ и $ОП'$ (рис. 1):

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{s}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix},$$

где:

$$\overline{A} = A + \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot C, \qquad (1)$$

$$\overline{B} = -\frac{s}{n} \cdot \left(A + \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot C \right) + B + \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot D, \qquad (2)$$

$$\overline{C} = C, \qquad (3)$$

$$\overline{D} = D - \frac{s}{n} \cdot C. \qquad (4)$$

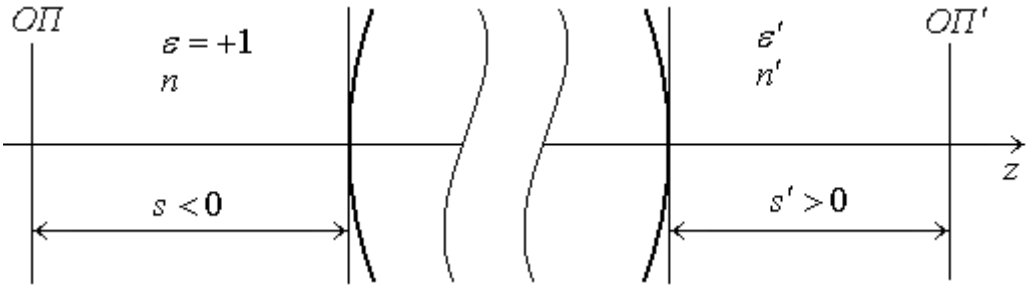


Рис. 1. Произвольная центрированная ОС

Рассмотрим сопряженные плоскости, для которых:

$$\overline{B} = 0, \ \ \overline{A} = 1 = \beta, \qquad (5)$$

тогда:

$$\overline{A} = A + \frac{\varepsilon' \cdot s'_{P'}}{n'} \cdot C = 1, \text{ отсюда}$$

$$s'_{P'} = \varepsilon' \cdot n' \cdot \frac{1 - A}{C}. \qquad (6)$$

Опорная плоскость $ОП'$, положение которой определяется расстоянием $s' = s'_{P'}$ от последней поверхности, называется задней главной плоскостью оптической системы (рис. 2).

H' – обозначение задней главной плоскости.

Так как $\overline{A} \cdot \overline{D} - \overline{B} \cdot \overline{C} = 1$, то в силу условия (5) $\overline{D} = 1$, то есть:

$$D - \frac{s_p}{n} \cdot C = 1, \text{ отсюда}$$

$$s_p = n \cdot \frac{D-1}{C}. \qquad (7)$$

Опорная плоскость $ОП$, положение которой определяется расстоянием $s = s_p$ от первой поверхности, называется передней главной плоскостью оптической системы (рис. 2).

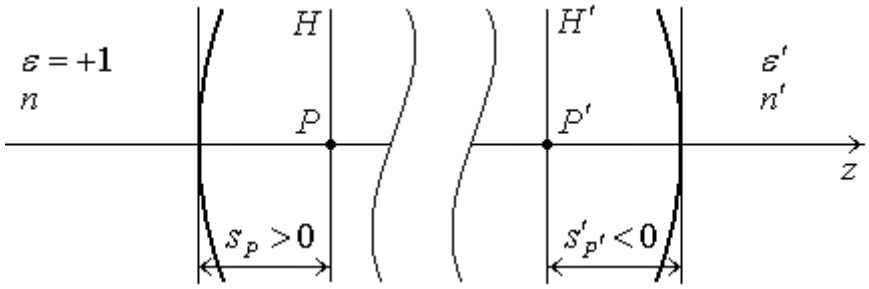


Рис. 2. Главные плоскости и точки ОС,
H – обозначение передней главной плоскости

Как следует из (5), **линейное увеличение в главных плоскостях равно единице.**

P и P' – точки пересечения соответственно передней и задней главных плоскостей с оптической осью; соответственно называются передней и задней главными точками.

Найдем расстояния f и f' между главными и соответствующими фокальными плоскостями (рис. 3):

$$f = s_F - s_P = n \cdot \frac{D}{C} - n \cdot \frac{D-1}{C} = \frac{n}{C}, \qquad (8\text{-}1)$$

$$f' = s'_{F'} - s'_{P'} = -\varepsilon' \cdot n' \cdot \frac{A}{C} - \varepsilon' \cdot n' \cdot \frac{1-A}{C} = -\frac{\varepsilon' \cdot n'}{C}, \qquad (8\text{-}2)$$

то есть

$$\frac{f}{n} = \frac{1}{C}, \quad \frac{\varepsilon' \cdot f'}{n'} = -\frac{1}{C}, \text{ или}$$

$$\frac{f}{n}+\frac{\varepsilon'\cdot f'}{n'}=0\,. \qquad (9)$$

Расстояние f от передней главной плоскости до переднего фокуса F называется передним фокусным расстоянием (рис. 3).

Расстояние f' от задней главной плоскости до заднего фокуса F' называется задним фокусным расстоянием (рис. 3).

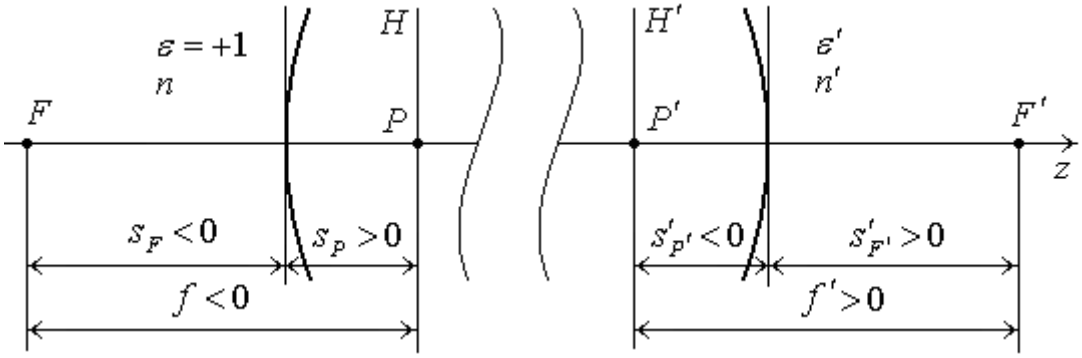


Рис. 3. Фокусные расстояния ОС

Значение матричного элемента C не зависит от положения опорных плоскостей, значит, это характеристика оптической системы: $\overline{C}=C$.

$$\varphi=-C=-\frac{n}{f}=\frac{n'}{\varepsilon'\cdot f'} \text{ – оптическая сила ОС.} \qquad (10)$$

Начальные и конечные данные луча связаны соотношением:

$$\begin{pmatrix} x' \\ V' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ V \end{pmatrix}.$$

Так как для главных плоскостей $\overline{A}=\overline{D}=1$, $\overline{B}=0$, $C=-\varphi$, то:

$$x'=\overline{A}\cdot x=x\,, \qquad (11\text{-}1)$$

$$V'=\overline{C}\cdot x+\overline{D}\cdot V=C\cdot x+V\,. \qquad (11\text{-}2)$$

Из (11) следует, что при $x=0$ имеем:

$x'=0,\quad V'=V$, откуда следует, что

- **падающий луч, проходящий через переднюю главную точку ОС, выходит из ОС через заднюю главную точку;**
- **оптические направляющие косинусы падающего и преломленного ОС луча равны.**

$$\overline{M}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

$\overline{M}$ **– матрица преобразования лучей между главными плоскостями.**

6.2. Узловые точки

Рассмотрим сопряженные плоскости, для которых:

$$\overline{B} = 0\,,\ \overline{A} = A + \frac{\varepsilon' \cdot s'_{N'}}{n'} \cdot C = \varepsilon' \cdot \frac{n}{n'} = \beta\,. \qquad (13)$$

Из (13) находим:

$$s'_{N'} = \frac{n - \varepsilon' \cdot n' \cdot A}{C}\,. \qquad (14)$$

Так как $\overline{A} \cdot \overline{D} = 1$, то с учетом (4), и (13) получим:

$$\overline{D} = \frac{1}{\overline{A}} = \frac{\varepsilon' \cdot n'}{n} = D - \frac{s_N}{n} \cdot C\,, \text{ отсюда}$$

$$s_N = \frac{n \cdot D - \varepsilon' \cdot n'}{C}. \qquad (15)$$

Расстояние $s = s_N$ определяет положение опорной плоскости $ОП$, называемой передней узловой плоскостью, относительно вершины первой поверхности (рис. 4);

расстояние $s' = s'_{N'}$ определяет положение опорной плоскости $ОП'$, называемой задней узловой плоскостью, относительно вершины последней поверхности (рис. 4).

N и N' – точки пересечения передней и задней узловых плоскостей с оптической осью, соответственно называются передней и задней узловыми точками.

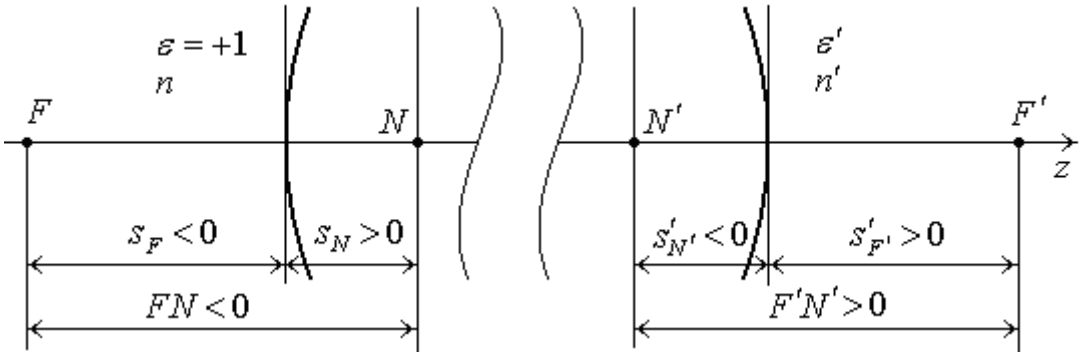


Рис. 4. Расстояния между узловыми и фокальными плоскостями

При $n = n'$ узловые точки совпадают с главными точками. Найдем расстояния FN и $F'N'$ между узловыми и соответствующими фокальными плоскостями:

$$FN = s_F - s_N = n \cdot \frac{D}{C} - \frac{n \cdot D - \varepsilon' \cdot n'}{C} = -f', \tag{16}$$

$$F'N' = s'_{F'} - s'_{N'} = -\varepsilon' \cdot n' \cdot \frac{A}{C} - \frac{n - \varepsilon' \cdot n' \cdot A}{C} = -f. \tag{17}$$

Таким образом, получили:

$$FN = -f', \tag{18}$$

FN – расстояние от передней узловой точки до переднего фокуса.

$$F'N' = -f, \tag{19}$$

$F'N'$ – расстояние от задней узловой точки до заднего фокуса.

Преобразование параметров луча в узловых плоскостях имеет вид:

$$x' = \overline{A} \cdot x = \varepsilon' \cdot \frac{n}{n'} \cdot x, \tag{20-1}$$

$$V' = \overline{C} \cdot x + D \cdot V = C \cdot x + \varepsilon' \cdot \frac{n'}{n} \cdot V. \tag{20-2}$$

Линейное увеличение в узловых плоскостях равно:

$$\beta = \varepsilon' \cdot \frac{n}{n'}. \tag{21}$$

Положим $x = 0$, тогда, согласно (20),

$x' = 0$ и $V' = \varepsilon' \cdot \frac{n'}{n} \cdot V$, или:

$\cancel{\varepsilon' \cdot n'} \cdot u' = \frac{\cancel{\varepsilon' \cdot n'}}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \cdot u$, то есть (рис. 5):

$$u' = u. \tag{22}$$

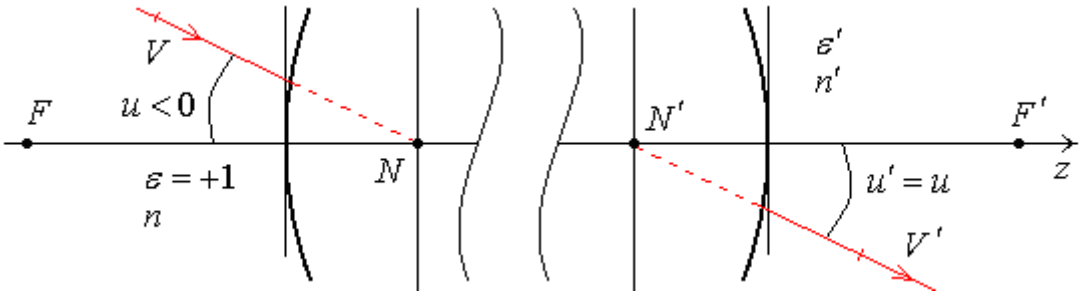


Рис. 5. Узловые точки ОС

Условие (22) означает, что луч, проходящий через переднюю узловую точку N, выходит из системы через заднюю узловую точку N' параллельно падающему лучу.

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \varepsilon' \cdot \dfrac{n}{n'} & 0 \\ -\varphi & \varepsilon' \cdot \dfrac{n'}{n} \end{pmatrix} \tag{23}$$

M **– матрица преобразования лучей между узловыми плоскостями.**

6.3. Матрица преобразования лучей между фокальными плоскостями

Рассмотрим матрицу преобразования лучей между фокальными плоскостями.

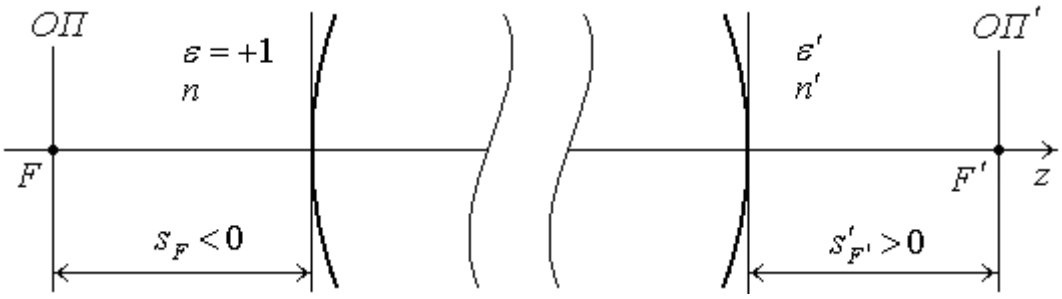


Рис. 6. Преобразование между фокальными плоскостями

Для этого совместим опорные плоскости $ОП$ и $ОП'$ соответственно с передней и задней фокальными плоскостями и положим $s = s_F$ и $s' = s'_{F'}$ (рис. 6).

Запишем матрицу преобразования между плоскостями $ОП$ и $ОП'$:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\varepsilon' \cdot s'_{F'}}{n'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{s_F}{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\bar{A} = A + \frac{\varepsilon' \cdot s'_{F'}}{n'} \cdot C = A + \left(-\frac{A}{C} \right) \cdot C = 0, \tag{24}$$

$$\bar{B} = -\frac{s_F}{n} \cdot \left(A + \frac{\varepsilon' \cdot s'_{F'}}{n'} \cdot C \right) + B + \frac{\varepsilon' \cdot s'_{F'}}{n'} \cdot D =$$

$$= B + \left(-\frac{A}{C} \right) \cdot D = \frac{B \cdot C - A \cdot D}{C} = -\frac{1}{C}, \tag{25}$$

$$\bar{C} = C\,, \tag{26}$$

$$\bar{D} = D - \frac{s_F}{n} \cdot C = D - \frac{D}{C} \cdot C = 0\,. \tag{27}$$

Таким образом, для преобразования луча между фокальными плоскостями с учетом (24-27) получили матрицу:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ C & 0 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

тогда:

$$x' = -\frac{1}{C} \cdot V\,, \tag{29-1}$$

$$V' = C \cdot x\,. \tag{29-2}$$

Рассмотрим несколько случаев:

а. Пусть $V = V_0 = const$.

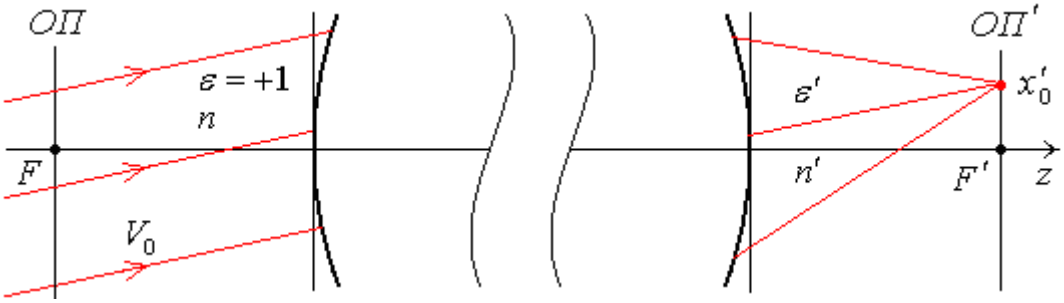


Рис. 7. Преобразование пучка параллельных лучей

Это означает, что на систему падает пучок параллельных лучей (рис. 7). Тогда $x'_0 = -\frac{1}{C} \cdot V_0$, то есть, все лучи, преломленные системой, соберутся в одной точке с координатой x'_0.

б. Пусть $x = x_0 = const$.

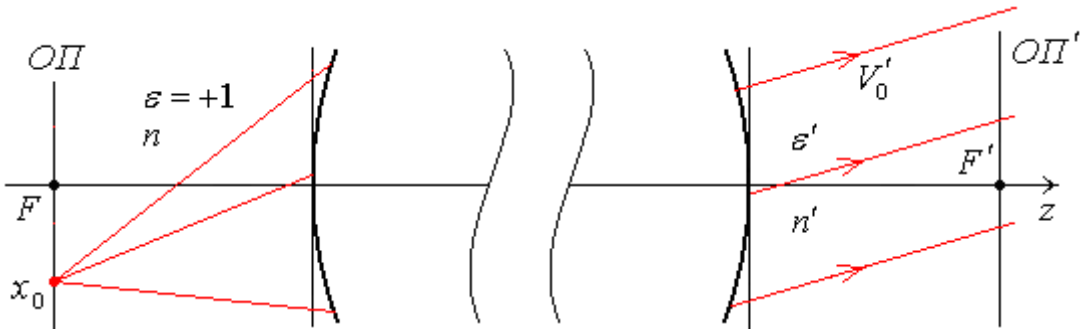


Рис. 8. Преобразование гомоцентрического пучка лучей

Это означает, что все лучи выходят из одной точки (рис. 8). Тогда $V_0' = C \cdot x_0 = const$, то есть, все лучи, преломленные системой, будут параллельны друг другу (рис. 8).

6.4. Матрица преобразования лучей между сопряженными плоскостями, положение которых задано относительно главных плоскостей

Запишем матрицу преобразования лучей между сопряженными плоскостями, положение которых задано относительно главных плоскостей (рис. 9), то есть:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{s}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{A} = 1 - \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot \varphi, \quad \bar{B} = -\frac{s}{n} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot \varphi\right) + \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'}, \\ &\bar{C} = -\varphi, \qquad \bar{D} = 1 + \frac{s}{n} \cdot \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Положим $\bar{B} = 0$, тогда:

$$-\frac{s}{n} + \frac{s}{n} \cdot \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot \varphi + \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} = 0,$$

отсюда

$$\frac{n'}{\varepsilon' \cdot s'} - \frac{n}{s} = \varphi = \frac{n'}{\varepsilon' \cdot f'} = -\frac{n}{f}. \tag{31}$$

(31) – формула линзы в отрезках.

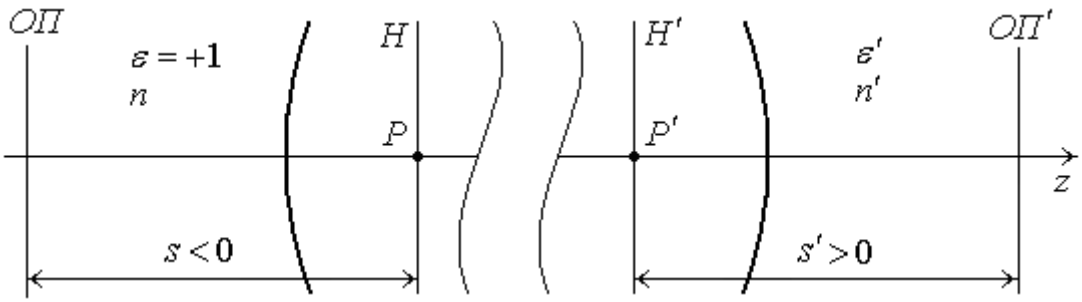


Рис. 9. Положение сопряженных плоскостей задано относительно главных плоскостей

Преобразуем элементы матрицы (30):

$$\overline{A} = 1 - \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot \varphi = 1 - \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot \frac{\varepsilon' \cdot n'}{f'} = 1 - \frac{s'}{f'} \ , \tag{32}$$

$$\overline{B} = 0 \, , \tag{33}$$

$$\overline{C} = C = -\varphi \, , \tag{34}$$

$$\overline{D} = 1 + \frac{s}{n} \cdot \varphi = 1 + \frac{s}{n} \cdot \left(-\frac{n}{f} \right) = 1 - \frac{s}{f} \, . \tag{35}$$

Таким образом, матрица преобразования лучей между сопряженными плоскостями, положение которых задано относительно главных плоскостей, имеет вид:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{s'}{f'} & 0 \\ -\varphi & 1 - \dfrac{s}{f} \end{pmatrix} . \tag{36}$$

6.5. Матрица преобразования лучей между сопряженными плоскостями, положение которых задано относительно фокальных плоскостей

Зададим положение опорных плоскостей относительно соответствующих фокальных плоскостей (рис. 10) и запишем матрицу преобразования лучей:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ C & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{s}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\left. \begin{aligned} &\overline{A} = \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot C \, , \quad \overline{B} = -\frac{s}{n} \cdot \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot C - \frac{1}{C} \, , \\ &\overline{C} = C \, , \qquad\qquad \overline{D} = -\frac{s}{n} \cdot C \, . \end{aligned} \right\} \tag{37}$$

Положим $\overline{B} = 0$, тогда:

$$-\frac{s}{n} \cdot \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot (-\varphi) + \frac{1}{\varphi} = 0 \, ,$$

отсюда

$$s' \cdot s = f' \cdot f \ - \text{формула Ньютона.} \tag{38}$$

Из условия $\overline{A} \cdot \overline{D} = 1$ получаем то же самое.

Упростим выражения для матричных элементов:

$$\overline{A} = \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot (-\varphi) = -\frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot \frac{\varepsilon' \cdot n'}{f'} = -\frac{s'}{f'},$$

$$\overline{B} = 0,$$

$$\overline{C} = -\varphi,$$

$$\overline{D} = -\frac{s}{n} \cdot (-\varphi) = \frac{s}{n} \cdot \left(-\frac{n}{f}\right) = -\frac{s}{f}.$$

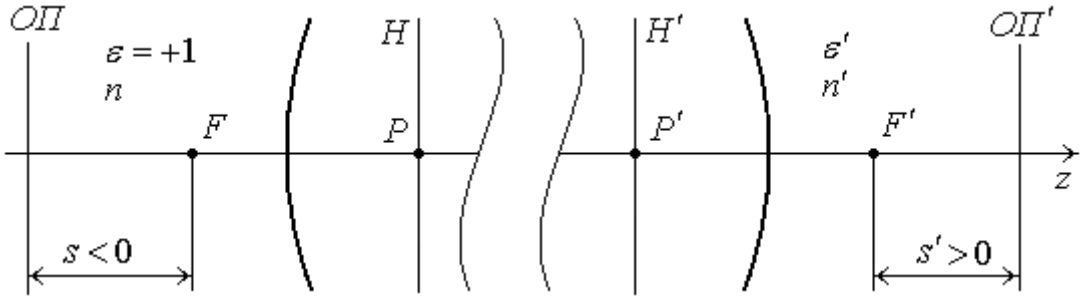


Рис. 10. Положение сопряженных плоскостей задано относительно фокальных плоскостей

Таким образом, матрица преобразования лучей между сопряженными плоскостями, положение которых задано относительно фокальных плоскостей (рис. 10), имеет вид:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} -\frac{s'}{f'} & 0 \\ -\varphi & -\frac{s}{f} \end{pmatrix}. \qquad (39)$$

6.6. Матрица преобразования лучей между сопряженными плоскостями, положение которых задано относительно узловых плоскостей

Запишем матрицу преобразования лучей между сопряженными плоскостями, положение которых задано относительно узловых плоскостей (рис. 11):

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{n}{\varepsilon' \cdot n'} & 0 \\ -\varphi & \frac{\varepsilon' \cdot n'}{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{s}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\overline{A} = \varepsilon' \cdot \frac{n}{n'} - \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot \varphi, \tag{40-1}$$

$$\overline{B} = -\frac{s}{n} \cdot \left(\varepsilon' \cdot \frac{n}{n'} - \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot \varphi \right) + \frac{s'}{n}, \tag{40-2}$$

$$\overline{C} = -\varphi, \tag{40-3}$$

$$\overline{D} = \varepsilon' \cdot \frac{n'}{n} + \frac{s}{n} \cdot \varphi. \tag{40-4}$$

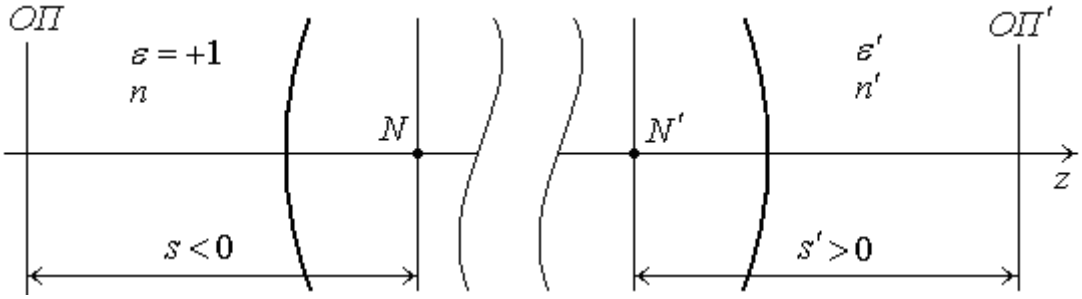


Рис. 11. Положение сопряженных плоскостей задано относительно узловых плоскостей

Положим $\overline{B} = 0$, тогда:

$$-\frac{\varepsilon' \cdot s}{n'} + \frac{s}{n} \cdot \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot \varphi + \frac{s'}{n} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{s' \cdot s},$$

$$-\frac{1}{\varepsilon' \cdot n' \cdot s'} + \frac{\varepsilon'}{n' \cdot n} \cdot \varphi + \frac{1}{n \cdot s} = 0 \quad \Big| \cdot n' \cdot n,$$

$$\frac{n}{\varepsilon' \cdot s'} - \frac{n'}{s} = \varepsilon' \cdot \varphi = \frac{n'}{f'} = -\frac{\varepsilon' \cdot n}{f}. \tag{41}$$

Упростим выражения для матричных элементов (40):

$$\overline{A} = \varepsilon' \cdot \frac{n}{n'} - \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot \varphi = \varepsilon' \cdot \frac{n}{n'} - \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} \cdot \frac{n'}{\varepsilon' \cdot f'} = \varepsilon' \cdot \frac{n}{n'} - \frac{s'}{f'},$$

$$\overline{B} = 0,$$

$$\overline{C} = 0,$$

$$\overline{D} = \varepsilon' \cdot \frac{n'}{n} + \frac{s}{n} \cdot \varphi = \varepsilon' \cdot \frac{n'}{n} - \frac{s}{n} \cdot \frac{n}{f} = \varepsilon' \cdot \frac{n'}{n} - \frac{s}{f}.$$

Таким образом, матрица преобразования лучей между сопряженными плоскостями, положение которых задано относительно узловых плоскостей, имеет вид:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \varepsilon' \cdot \dfrac{n}{n'} - \dfrac{s'}{f'} & 0 \\ -\varphi & \varepsilon' \cdot \dfrac{n'}{n} - \dfrac{s}{f} \end{pmatrix}. \qquad (42)$$

При $n = n'$ и $\varepsilon' = +1$ матрица (42) совпадает с матрицей преобразования между плоскостями, заданными относительно главных плоскостей.

6.7. Выводы

Рассмотрим случай, когда ОС находится в воздухе (или $n = n'$). Тогда ОС обладает следующими свойствами:

1. ***Матрица преобразования лучей оптической системой между главными плоскостями совпадает с матрицей преобразования лучей тонкой линзой:***

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix}.$$

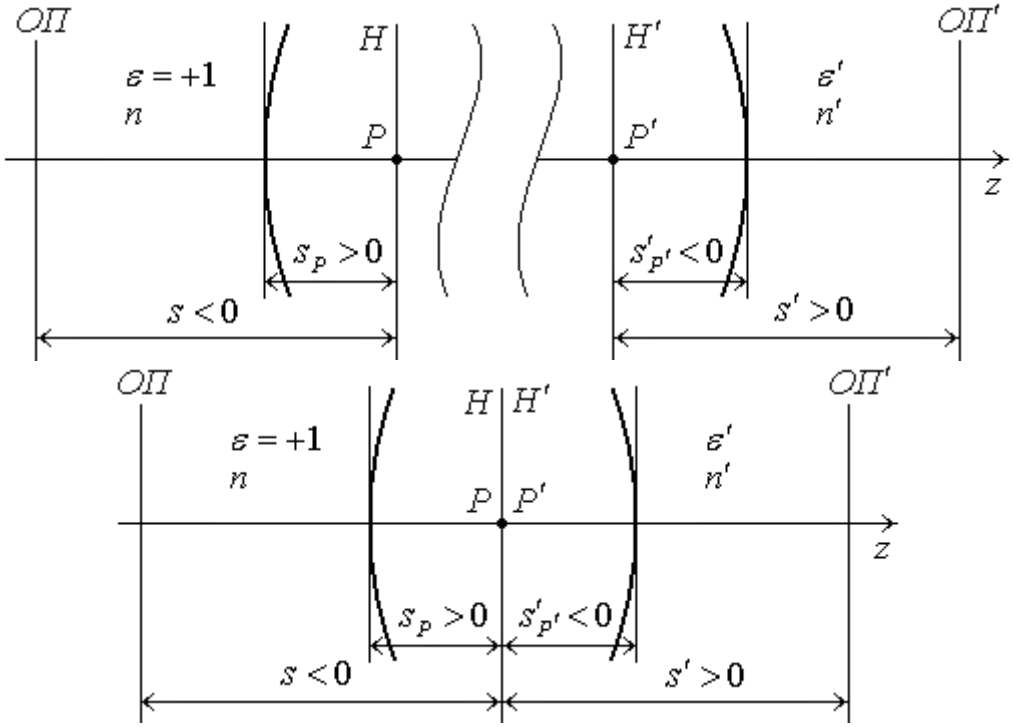


Рис. 12. Представление оптической системы в виде главных плоскостей и одной главной плоскости

2. ***Луч, падающий на ОС и пересекающий переднюю главную плоскость в точке x, после преломления оптической системой пересекает заднюю главную плоскость в точке $x' = x$ – свойство тонкой линзы.***

3. ***Луч, падающий на ОС через переднюю главную точку, выходит из ОС через заднюю главную точку параллельно падающему лучу – свойство тонкой линзы.***
4. ***Формула для сопряженных отрезков s и s', измеряемых от соответствующих главных плоскостей, совпадает с формулой в отрезках для тонкой линзы.***
5. ***Поскольку расстояние между главными плоскостями ОС ни где в формулах не фигурирует, то его можно положить равным нулю, т. е. представить ОС в виде одной главной плоскости и работать с ней, как с тонкой линзой (рис. 12 и 13).***

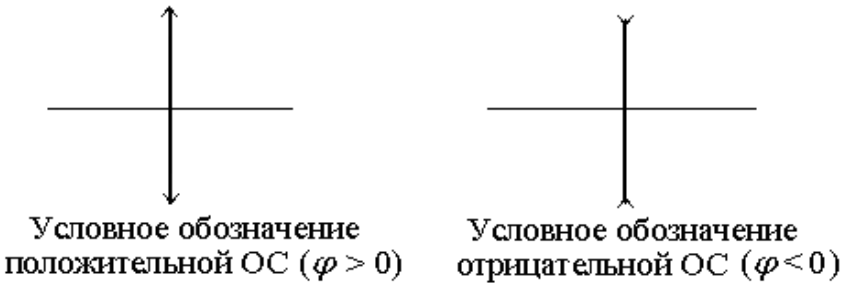


Рис. 13. Схематичное изображение ОС

6.8. Гауссова оптика для частных типов оптических систем

Вспомним формулы:

$$s_P = n \cdot \frac{D-1}{C}, \tag{43}$$

$$s'_{P'} = \varepsilon' \cdot n' \cdot \frac{1-A}{C}, \tag{44}$$

$$s_N = \frac{n \cdot D - \varepsilon' \cdot n'}{C}, \tag{45}$$

$$s'_{N'} = \frac{n - \varepsilon' \cdot n' \cdot A}{C}, \tag{46}$$

$$s_F = n \cdot \frac{D}{C}, \tag{47}$$

$$s'_{F'} = -\varepsilon' \cdot n' \cdot \frac{A}{C}, \tag{48}$$

$$f = \frac{n}{C}, \tag{49}$$

$$f' = -\frac{\varepsilon' \cdot n'}{C}. \tag{50}$$

6.8.1. Одна поверхность

6.8.1.1. Преломляющая поверхность

Рассмотрим поверхность, разделяющую две среды с показателями преломления n и n'. Опорную плоскость поместим в вершине поверхности; радиус кривизны в вершине равен r. Положим $\varepsilon' = \varepsilon = 1$. Тогда уравнение преломления на поверхности примет вид:

$$\begin{pmatrix} x' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n'-n}{r} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ V \end{pmatrix}, \qquad (51)$$

то есть

$$A = D = 1, \quad B = 0, \quad C = -\frac{n'-n}{r}. \qquad (52)$$

Из (43-46) следует:

$$s_P = s'_{P'} = 0, \qquad (53)$$

$$s_N = s'_{N'} = r. \qquad (54)$$

Из (53-54) следует, что обе главные точки находятся в вершине поверхности, а обе узловые точки находятся в центре кривизны C (рис. 14).

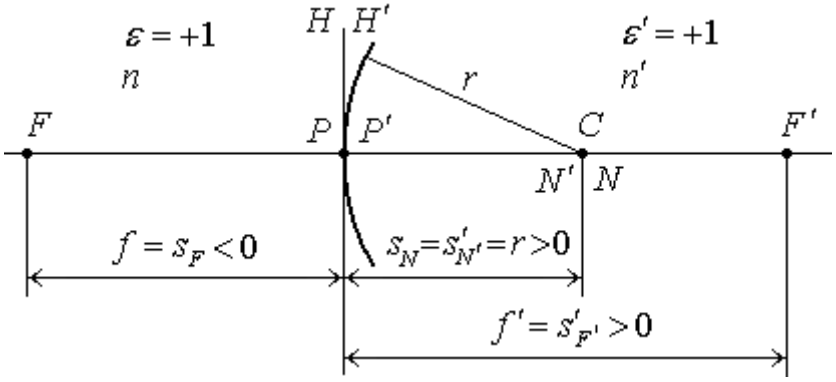


Рис. 14. Кардинальные точки преломляющей сферы

Из (47-50) находим:

$$s_F = -\frac{n \cdot r}{n' - n}, \quad s'_{F'} = \frac{n' \cdot r}{n' - n}, \qquad (55)$$

$$f = s_F = -\frac{n \cdot r}{n' - n}, \quad f' = s'_{F'} = \frac{n' \cdot r}{n' - n}, \qquad (56)$$

6.8.1.2. Отражающая поверхность

Полагаем $\varepsilon = +1$. Тогда для отражения имеем:

$$A = D = 1\,, \quad B = 0\,, \quad C = \frac{2 \cdot n}{r}\,, \quad \varepsilon' = -1\,, \quad n' = n\,, \tag{57}$$

тогда из (43-50) следует:

$$s_P = s'_{P'} = 0\,, \tag{58}$$

$$s_N = s'_{N'} = r\,. \tag{59}$$

$$s_F = s'_{F'} = f = f' = \frac{r}{2}\,, \tag{60}$$

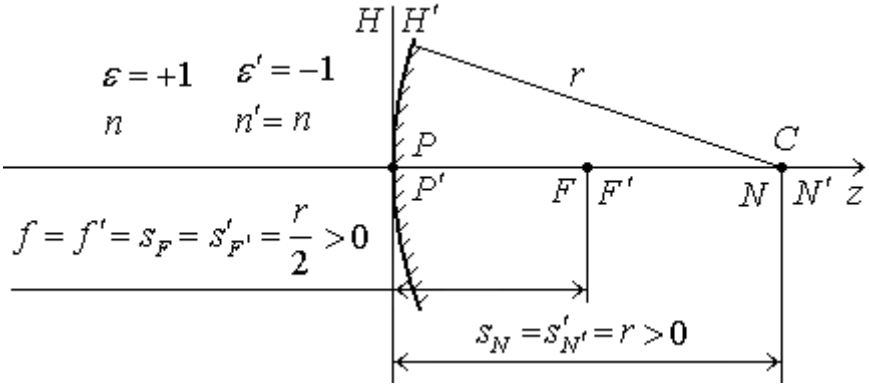


Рис. 15 Кардинальные точки отражающей сферы

Из (58-59) следует, что обе главные точки находятся в вершине поверхности, а обе узловые точки находятся в центре кривизны C (рис. 15). Из (60) следует, что передний и задний фокусы отражающей поверхности совпадают и находятся на расстоянии $r/2$ от вершины.

6.8.2. Тонкая линза в воздухе

Линза представляет собой стеклянное тело, ограниченное двумя поверхностями. Обычно эти поверхности обладают осевой симметрией. Расстояние между их вершинами называется толщиной линзы. Во многих случаях толщина линзы мала и в предварительных расчетах ей можно пренебречь (либо ее более высокими степенями). Тонкая линза является весьма полезной абстракцией. В предварительных расчетах, когда линзы заменяются тонкими линзами, размерами воздушных промежутков между линзами обычно не пренебрегают. Иными словами, оптическая система заменяется системой тонких линз, расположенных на конечных расстояниях.

Рассмотрим гауссову оптику тонкой линзы с показателем преломления n, окруженной воздухом. Тогда:

$$\varphi = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = (n-1) \cdot (\rho_1 - \rho_2)\,. \tag{61}$$

φ – оптическая сила линзы. Как видно из (61), оптическая сила тонкой линзы определяется разностью $(\rho_1 - \rho_2)$, а не конкретными значениями радиусов.

Такое изменение радиусов называется прогибом линзы. Матрица такой линзы имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\varphi_1 + \varphi_2) & 1 \end{pmatrix}, \text{ то есть}$$

$$A = D = 1,\ B = 0,\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 .$$

Из (43-50) находим, полагая $\varepsilon' = \varepsilon = 1$:

$$s_P = s'_{P'} = 0,\ s_N = s'_{N'} = 0, \tag{62}$$

$$s_F = +\frac{1}{C},\ s'_{F'} = -\frac{1}{C}, \tag{63}$$

$$f = +\frac{1}{C},\ f' = -\frac{1}{C}. \tag{64}$$

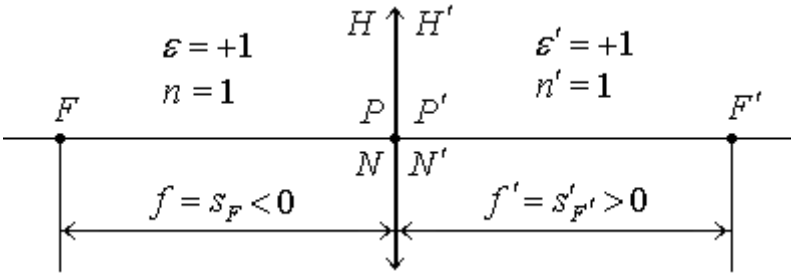


Рис. 16. Кардинальные точки тонкой линзы

Таким образом, для тонкой линзы главные и узловые точки совпадают с вершиной (рис. 16). Соотношение между расстояниями s и s', задающими положение двух сопряженных плоскостей, имеет вид:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}. \tag{65}$$

Если положить $r_2 = -r_1$, то из (61) можно найти:

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \cdot \frac{2}{r_1}, \tag{66}$$

или отсюда

$$r_1 = 2 \cdot (n-1) \cdot f'. \tag{67}$$

6.8.3. Система из двух тонких линз в воздухе (дуплет)

Запишем матрицу двух тонких линз (рис. 17), полагая

$$\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = 1,\ n_1 = n_2 = n_3 = 1:$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$A = 1 - d \cdot \varphi_1, \tag{68}$$

$$B = d, \tag{69}$$

$$C = -(\varphi_1 + \varphi_2 - d \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2), \tag{70}$$

$$D = 1 - d \cdot \varphi_2. \tag{71}$$

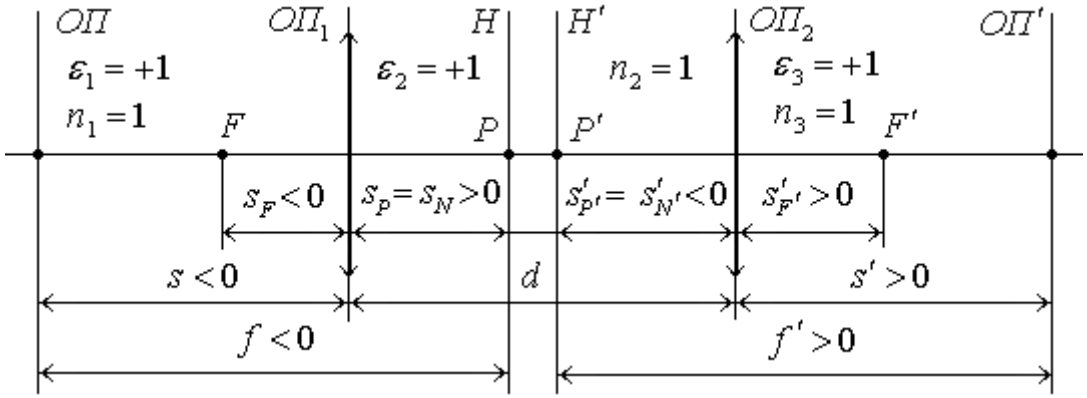


Рис. 17. Дуплет

Из (43-50) и (70) находим:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - d \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \text{ – оптическая сила системы,} \tag{72}$$

$$s_P = s_N = \frac{\varphi_2}{\varphi} \cdot d\ , \tag{73}$$

$$s'_{P'} = s'_{N'} = -\frac{\varphi_1}{\varphi} \cdot d\ , \tag{74}$$

$$f = -\frac{1}{\varphi}, \quad f' = \frac{1}{\varphi}. \tag{75}$$

$$s_F = -\frac{1 - d \cdot \varphi_2}{\varphi} = f + s_P\ , \tag{76}$$

$$s'_{F'} = \frac{1 - d \cdot \varphi_1}{\varphi} = f' + s'_{P'}\ , \tag{77}$$

6.8.4. Толстая линза в воздухе

6.8.4.1. Толстой линзой называется стеклянное тело с показателем преломления n, ограниченное двумя поверхностями, обладающими осевой симметрией, вершины которых находятся на расстоянии d друг от друга (рис. 18).

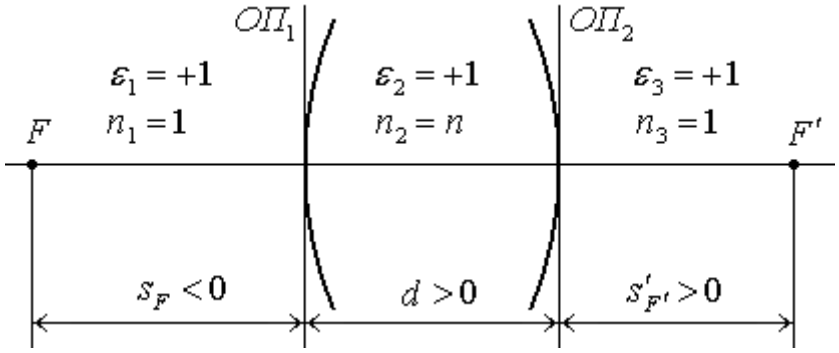


Рис. 18. Толстая линза

Полагая

$$\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = 1,\ n_1 = 1,\ n_2 = n,\ n_3 = 1\ ,$$

запишем матрицу толстой линзы:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где

$$\varphi_1 = \frac{n-1}{r_1},\ \varphi_2 = \frac{1-n}{r_2}, \tag{78}$$

$$A = 1 - \frac{d}{n} \cdot \varphi_1, \tag{79}$$

$$B = \frac{d}{n}\ , \tag{80}$$

$$C = -\left(\varphi_1 + \varphi_2 - \frac{d}{n} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \right), \tag{81}$$

$$D = 1 - \frac{d}{n} \cdot \varphi_2 . \tag{82}$$

Согласно (43-50) и (81) находим:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{d}{n} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 , \tag{83}$$

$$s_P = s_N = \frac{\varphi_2}{\varphi} \cdot \frac{d}{n}, \tag{84}$$

$$s'_{P'} = s'_{N'} = -\frac{\varphi_1}{\varphi} \cdot \frac{d}{n}, \tag{85}$$

$$f = \frac{1}{C}, \; f' = -\frac{1}{C}, \tag{86}$$

$$s_F = -\frac{1}{\varphi} \cdot (1 - \frac{d}{n} \cdot \varphi_2) = f + s_P , \tag{87}$$

$$s'_{F'} = \frac{1}{\varphi} \cdot (1 - \frac{d}{n} \cdot \varphi_1) = f' + s'_{P'} . \tag{88}$$

В зависимости от знаков r_1 и r_2 линзы называются:

- двояковыпуклыми, если $r_1 > 0$ и $r_2 < 0$;
- двояковогнутыми, если $r_1 < 0$ и $r_2 > 0$;
- мениском, если r_1 и r_2 имеют одинаковые знаки;
- плосковыпуклыми, если одна из поверхностей в двояковыпуклой линзе имеет кривизну, равную нулю;
- плосковогнутой, если одна из поверхностей в двояковогнутой линзе имеет кривизну, равную нулю.

6.8.4.2. Допустим, что необходимо рассчитать радиусы кривизны двояковыпуклой или двояковогнутой линзы с заданным фокусным расстоянием f', при условии, что $r_2 = -r_1$. Тогда из (83) находим:

$$\frac{1}{f'} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{1-n}{r_2} - \frac{d}{n} \cdot \frac{n-1}{r_1} \cdot \frac{1-n}{r_2},$$

или после преобразований

$$r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot f' \cdot (n-1) + \frac{d}{n} \cdot (n-1)^2 \cdot f' = 0 ,$$

отсюда

$$r_1 = -r_2 = \pm f' \cdot (n-1) \cdot \left[1 + \sqrt{1 - \frac{d}{n \cdot f'}} \right]. \tag{89}$$

Верхний знак $(+)$ относится к двояковыпуклой линзе; нижний знак $(-)$ относится к двояковогнутой линзе.

6.8.4.3. Рассмотрим положение кардинальных точек двояковогнутой линзы.

Поскольку $\varphi_1 = \dfrac{n-1}{r_1} < 0$ и $\varphi_2 = \dfrac{1-n}{r_2} < 0$, то оптическая сила двояковогнутой линзы всегда меньше нуля:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{d}{n} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 < 0 .$$

Поэтому двояковогнутая линза еще называется отрицательной. Тогда:

$$s_P = s_N > 0 ,\ s'_{P'} = s'_{N'} < 0 ,$$

$$s_F > 0 \text{ и } s'_{F'} < 0 \text{ при любых значениях } d .$$

Положение кардинальных точек показано на рис. 19.

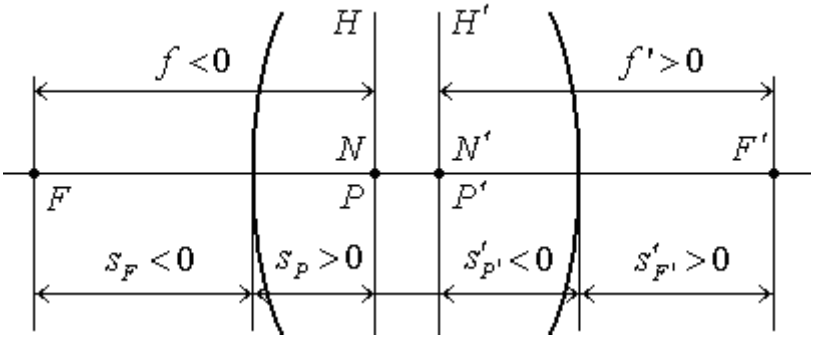


Рис. 19. Кардинальные точки двояковогнутой толстой линзы

6.8.4.4. Рассмотрим положение кардинальных точек двояковыпуклой линзы.

6.8.4.4.1. $\varphi > 0$.

Поскольку $\varphi_1 = \dfrac{n-1}{r_1} > 0$ и $\varphi_2 = \dfrac{1-n}{r_2} > 0$, то при $\varphi > 0$ получим:

$$s_P = s_N > 0 ,\ s'_{P'} = s'_{N'} < 0 ,$$

$$s_F < 0 \text{, если } s_P < -f ;\ s'_{F'} > 0 \text{, если } s'_{P'} < -f' .$$

Положение кардинальных точек показано на рис. 20.

Проанализируем условие $\varphi > 0$:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{d}{n} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 > 0 \text{, или}$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{n}{f'_1} - \frac{n}{f_2} - \frac{d}{n} \cdot \frac{n}{f'_1} \cdot \left(-\frac{n}{f_2} \right) = \frac{n}{f'_1 \cdot f_2} \left(f_2 - f'_1 + d \right) > 0 ,$$

отсюда следует, что

$$d < f_1' - f_2 . \qquad (90)$$

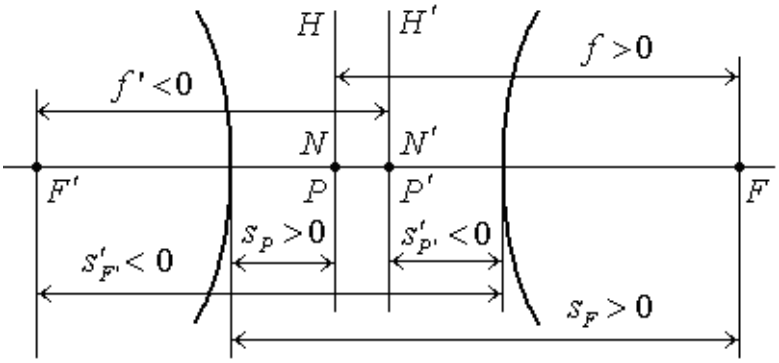


Рис. 20. Кардинальные точки двояковыпуклой толстой линзы

Таким образом, оптическая сила двояковыпуклой линзы положительна ($\varphi > 0$) при выполнении условия $d < f_1' - f_2$.

6.8.4.4.2. $\varphi = 0$.

Если положить $d = f_1' - f_2$, то получим $\varphi = 0$, а это означает, что двояковыпуклая линза является телескопической (рис. 21).

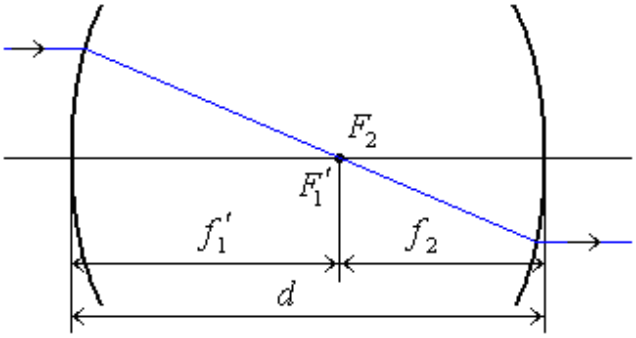


Рис. 21. Телескопическая линза

В этом случае:

$$s_P = s_N = \infty ,\ s'_{P'} = s'_{N'} = -\infty ,$$
$$f' = \infty ,\ f = -\infty ,$$
$$s_F = -\infty ,\ s'_{F'} = \infty .$$

6.8.4.4.3. $\varphi < 0$.

При $d > f_1' - f_2$ получим $\varphi < 0$, то есть оптическая сила двояковыпуклой линзы отрицательна.

Из формул (84-88) находим:

$$s_P = s_N = \frac{\varphi_2}{\varphi} \cdot \frac{d}{n} < 0 ,\ s'_{P'} = s'_{N'} = -\frac{\varphi_1}{\varphi} \cdot \frac{d}{n} > 0 ,$$

$$f = -\frac{1}{\varphi} > 0,\ f' = \frac{1}{\varphi} < 0,$$

$$s_F = f + s_P < 0,\ s'_{F'} = f' + s'_{P'} > 0.$$

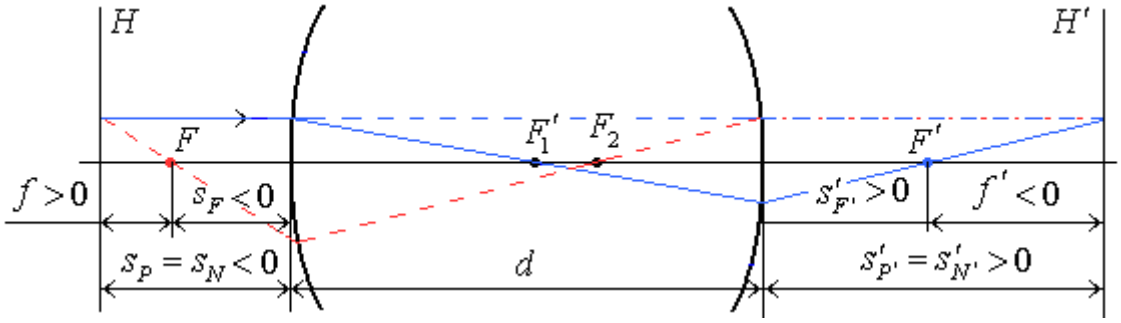


Рис. 22. Двояковыпуклая линза с отрицательной оптической силой

Кардинальные точки и ход луча изображен на рис. 22.

6.9. Примеры

6.9.1. Расчет телескопической системы

Соберем в воздухе оптическую систему из двух компонентов таким образом, чтобы задний фокус первого компонента совпал с передним фокусом второго компонента (рис. 23).

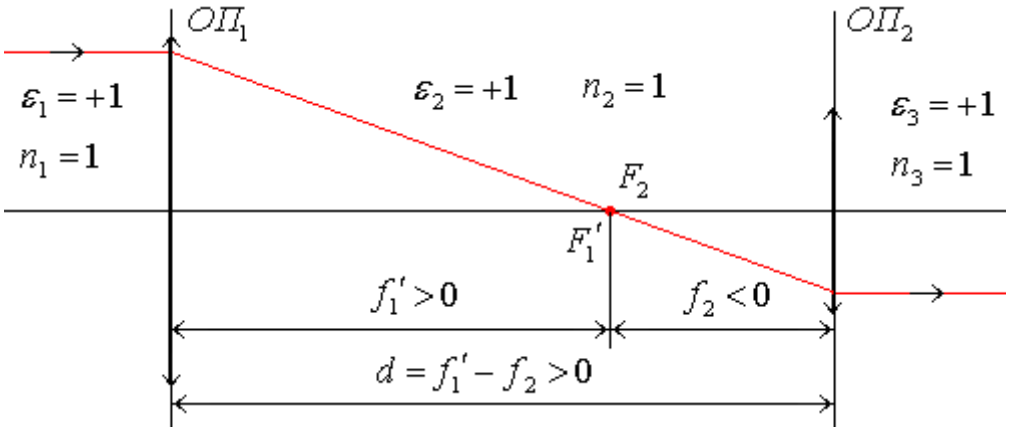


Рис. 23. Основные обозначения

Запишем матрицу преобразования лучей между опорными плоскостями $ОП_1$ и $ОП_2$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad (91)$$

Преобразуем элементы матрицы M:

$$A = 1 - d \cdot \varphi_1 = 1 - (f_1' - f_2) \cdot \frac{1}{f_1'} = \frac{f_2}{f_1'} \ , \qquad (92)$$

$$B = d = f_1' - f_2 \ , \qquad (93)$$

$$C = -(\varphi_1 + \varphi_2 - d \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2) = -\varphi \ , \ D = 1 - d \cdot \varphi_2 \ , \qquad (94)$$

здесь $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - d \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2$ – оптическая сила системы из двух тонких компонентов, разделенных промежутком величиной $d = f_1' - f_2$. Преобразуем далее:

$$C = -\frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2} - \frac{f_1' - f_2}{f_1' \cdot f_2} = 0 \ , \qquad (95)$$

$$D = 1 + \frac{f_1' - f_2}{f_2} = \frac{f_1'}{f_2} = \frac{1}{A} \ . \qquad (96)$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$M = \begin{pmatrix} \beta_T & d \\ 0 & 1/\beta_T \end{pmatrix}, \ \beta_T = \frac{f_2}{f_1'} = A \ . \qquad (97)$$

Поскольку матричный элемент $C = 0$, то системы подобного типа являются телескопическими.

6.9.2. Расчет системы типа телескоп-микроскоп

Рассмотрим случай, когда задний фокус F_1' первого компонента не совпадает с передним фокусом F_2 второго компонента (рис. 24).

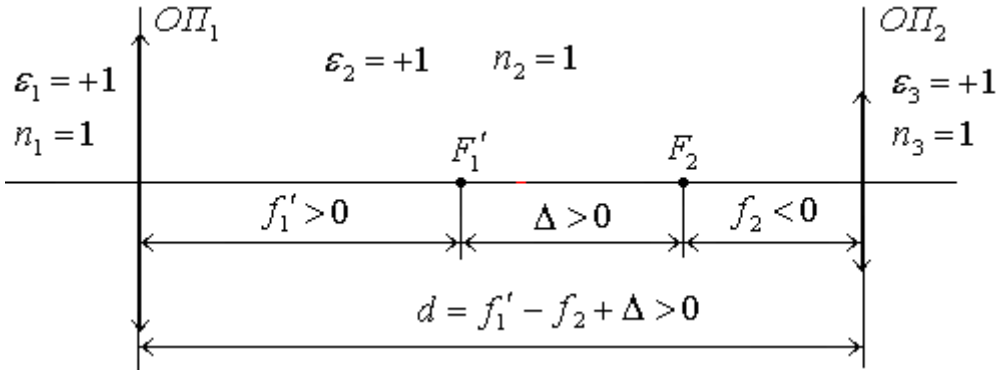


Рис. 24. Система типа телескоп-микроскоп

Пусть $\Delta > 0$ – расстояние между фокусами F_1' и F_2,

$d = f_1' - f_2 + \Delta > 0$ – расстояние между компонентами.

Найдем элементы матрицы преобразования лучей между опорными плоскостями $ОП_1$ и $ОП_2$, используя формулы (92-94):

$$A = 1 - d \cdot \varphi_1 = 1 - \frac{f_1' - f_2 + \Delta}{f_1'} = \frac{1}{f_1'} \cdot (f_2 - \Delta),$$

$$B = d = f_1' - (f_2 - \Delta),$$

$$C = -\varphi_1 - \varphi_2 + d \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 = -\frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2} - \frac{f_1' - f_2 + \Delta}{f_1' \cdot f_2} = -\frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2},$$

$$D = 1 - d \cdot \varphi_2 = 1 + \frac{f_1' - f_2 + \Delta}{f_2} = \frac{1}{f_2} \cdot (f_1' + \Delta).$$

Окончательно имеем:

$$A = \frac{1}{f_1'} \cdot (f_2 - \Delta), \quad B = f_1' - (f_2 - \Delta), \tag{98-1}$$

$$C = -\frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2}, \qquad D = \frac{1}{f_2} \cdot (f_1' + \Delta). \tag{98-2}$$

$$\varphi = \frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2} \text{ – оптическая сила двухлинзовой системы.} \tag{99}$$

Рассмотрим преобразование лучей между парой не сопряженных плоскостей $ОП$ и $ОП'$ (рис. 25):

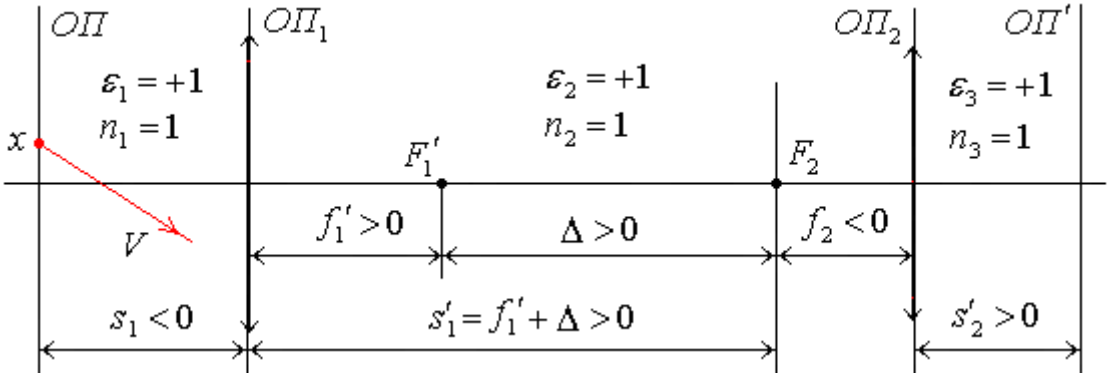


Рис. 25. Основные обозначения

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & s_2' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ -\varphi & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix},$$

где

$$\overline{A} = A - s_2' \cdot \varphi, \tag{100}$$

$$\overline{B} = -s_1 \cdot (A - s_2' \cdot \varphi) + B + s_2' \cdot D\,, \tag{101}$$

$$\overline{C} = C = -\varphi\,, \tag{102}$$

$$\overline{D} = D + s_1 \cdot \varphi\,. \tag{103}$$

$$\begin{cases} x' = \overline{A} \cdot x + \overline{B} \cdot V \\ V' = \overline{C} \cdot x + \overline{D} \cdot V\,. \end{cases} \tag{104}$$

Положим $\overline{D} = 0$, то есть рассмотрим оптическую систему микроскопа. Тогда получим:

$$\overline{D} = D + s_1 \cdot \varphi = \frac{1}{f_2} \cdot (f_1' + \Delta) + s_1 \cdot \frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2} = 0\,,$$

отсюда

$$\frac{f_1' + \Delta}{s_1} = -\frac{\Delta}{f_1'}\,, \tag{105}$$

или

$$\frac{1}{s_1} = -\frac{\Delta}{s_1' \cdot f_1'}\,, \tag{106}$$

где

$$s_1' = f_1' + \Delta\,. \tag{107}$$

С учетом (106) найдем разность

$$\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{s_1'} - \left(-\frac{\Delta}{s_1' \cdot f_1'}\right) = \frac{f_1' + \Delta}{s_1' \cdot f_1'} = \frac{1}{f_1'}\,, \tag{108}$$

то есть при $\overline{D} = 0$ отрезки s_1 и s_1' сопряжены, поскольку удовлетворяют формуле тонкой линзы (108). Поскольку $\overline{D} = 0$, то

$$V' = \overline{C} \cdot x\,, \tag{109}$$

это означает, что пучок лучей, выходящих из точки x, преобразуется системой в пучок параллельных лучей. То есть, точка предмета x находится в передней фокальной плоскости микроскопа (рис. 26).

С учетом (106) найдем линейное увеличение первой линзы:

$$\beta = \frac{x'}{x} = \frac{s_1'}{s_1} = -\frac{\Delta}{f_1'}\,, \tag{110}$$

отсюда

$$x = -\frac{x' \cdot f_1'}{\Delta}\,. \tag{111}$$

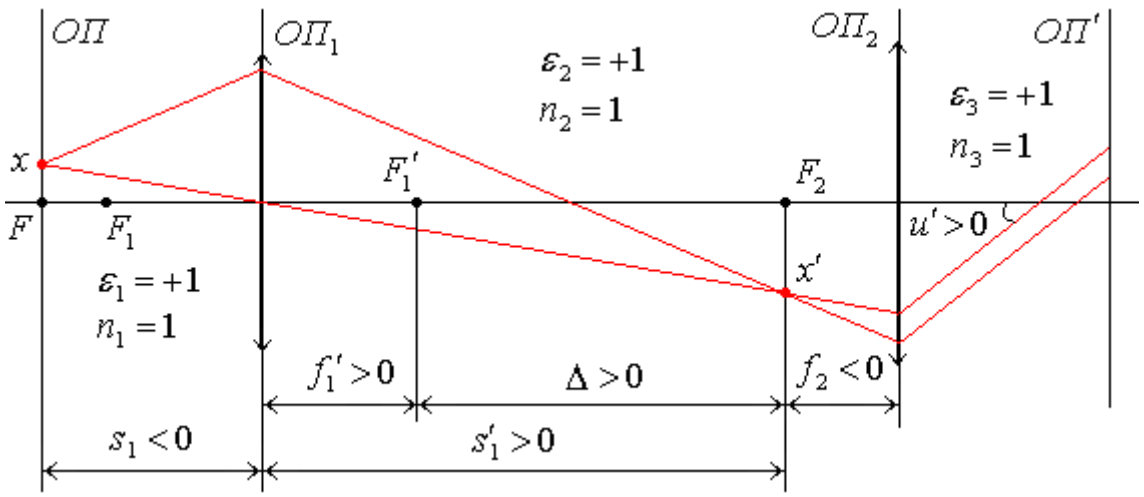


Рис. 26. Ход луча в микроскопе

Преобразуем (109) с учетом (98-2) и (111)

$$V' = \overline{C} \cdot x = -\frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2} \cdot \left(-\frac{x' \cdot f_1'}{\Delta} \right) = \frac{x'}{f_2} = u' . \qquad (112)$$

Таким образом, первая линза микроскопа создает промежуточное изображение точки предмета x с увеличением β в передней фокальной плоскости второй линзы, вторая линза переносит изображение предмета в бесконечность.

С другой стороны, поскольку $\overline{C} = -\varphi = \frac{1}{f}$, где f – переднее фокусное расстояние микроскопа, то:

$$V' = \overline{C} \cdot x = \frac{x}{f} = u = u' . \qquad (113)$$

6.9.3. Расчет оптической схемы проекционного объектива

Рассмотрим общую схему расчета.

Задано: s и s', апертура.

Этапы расчета:

1. Габаритный расчет.

Представляем объектив в виде тонкой линзы.

Находим фокусное расстояние объектива из формулы:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} .$$

2. Аберрационный расчет.

Задаем: s, f'; критерии качества.

Находим: конструктивные параметры.

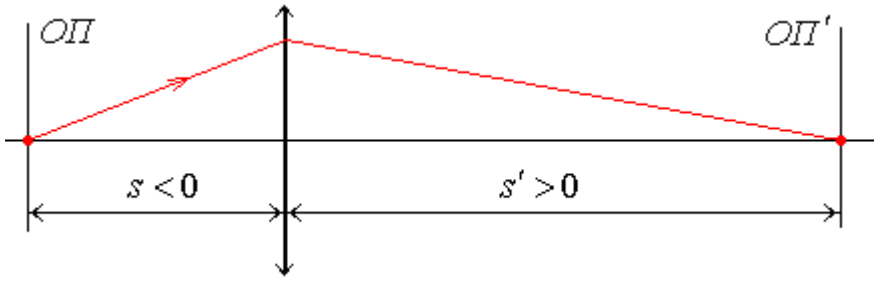


Рис. 27. Оптическая схема проекционного объектива

3. По известным конструктивным параметрам находим: s_P , $s'_{P'}$.

4. Переходим к реальным вершинным отрезкам (рис. 28).

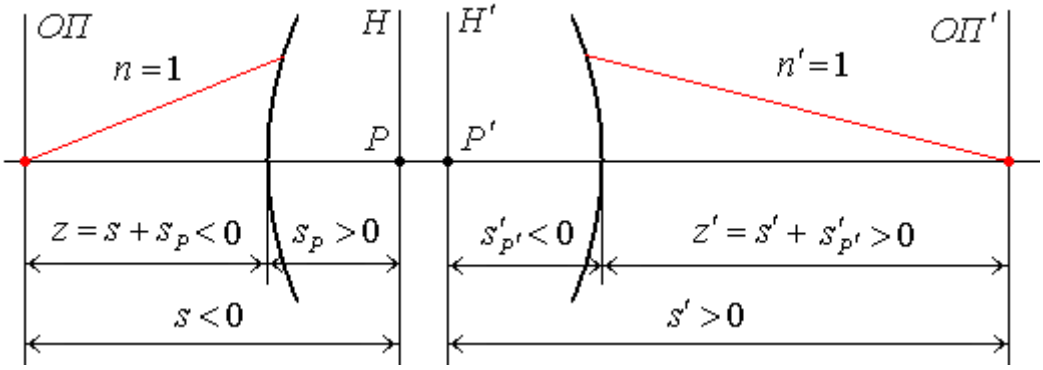


Рис. 28. Реальные вершинные отрезки объектива

5. Расчет качества изображения.

6. Оптимизация ОС.

7. Оформление КД, либо возвращение на пункт 1.

6.10. Некоторые приложения

6.10.1. Линейное увеличение системы поверхностей

Рассмотрим оптическую систему из двух поверхностей, изображенную на рис. 29. Пусть P_1 – точка предмета, P'_1 – изображение точки P_1, созданное первой поверхностью системы, P'_2 – изображение точки P'_1 (она же P_2), созданное второй поверхностью системы.

Запишем матрицу преобразования лучей между сопряженными плоскостями $ОП_1$ и $ОП'_1$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & s_1^{*\prime} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -s_1^{*} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix},$$

где

$$s_1^* = \frac{s_1}{n_1},\ s_1^{*\prime} = \frac{s_1'}{n_2},$$

$$s_1^{*\prime} = \frac{s_1^*}{1+\varphi_1 \cdot s_1^*}$$ – для сопряженных плоскостей,

$$A_1 = 1-\varphi_1 \cdot s_1^{*\prime} = \frac{1}{1+\varphi_1 \cdot s_1^*} = \frac{1}{D_1},$$

$$C_1 = -\varphi_1,$$

$$D_1 = 1+\varphi_1 \cdot s_1^* = \frac{1}{A_1}.$$

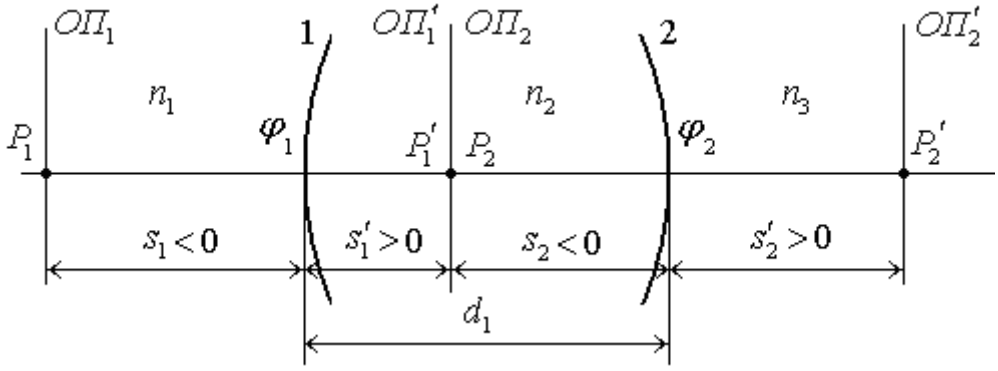


Рис. 29. Система из двух поверхностей

Аналогично запишем матрицу преобразования лучей между сопряженными плоскостями $ОП_2$ ($ОП_1'$) и $ОП_2'$:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & s_2^{*\prime} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -s_2^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix},$$

где

$$s_2^* = \frac{s_2}{n_2},\ s_2^{*\prime} = \frac{s_2'}{n_3},$$

$$s_2^{*\prime} = \frac{s_2^*}{1+\varphi_2 \cdot s_2^*}$$ – для сопряженных плоскостей,

$$A_2 = 1-\varphi_2 \cdot s_2^{*\prime} = \frac{1}{1+\varphi_2 \cdot s_2^*} = \frac{1}{D_2},$$

$$C_2 = -\varphi_2,$$

$$D_2 = 1 + \varphi_2 \cdot s_2^* = \frac{1}{A_2}.$$

Далее находим общую матрицу преобразования лучей между опорными плоскостями $ОП_1$ и $ОП_2'$:

$$M_0 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot A_2 & 0 \\ C_1 \cdot D_2 + C_2 \cdot A_1 & D_1 \cdot D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix},$$

где

$$A_0 = A_1 \cdot A_2, \tag{114}$$

$$D_0 = D_1 \cdot D_2, \tag{115}$$

$$C_0 = C_1 \cdot D_2 + C_2 \cdot A_1. \tag{116}$$

Из (114) следует, что линейное увеличение системы из двух поверхностей равно произведению линейных увеличений поверхностей. Очевидно, что этот результат можно обобщить на случай системы из k поверхностей:

$$A_0 = \prod_{i=1}^{k} A_i, \tag{117}$$

$$D_0 = \prod_{i=1}^{k} D_i, \tag{118}$$

$$C_0 = -\varphi_0. \tag{119}$$

Рассчитаем значение C_0 для двух поверхностей. Из рис. 29 находим:

$$s_2 = s_1' - d_1,$$

отсюда

$$s_2^* = s_1^{*\prime} - \frac{d_1}{n_2}. \tag{120}$$

Подставим (120) и (116):

$$C_0 = -\varphi_1 \cdot \left(1 + \varphi_2 \cdot s_2^*\right) - \varphi_2 \cdot \left(1 - \varphi_1 \cdot s_1^{*\prime}\right) =$$

$$= -\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot s_1^{*\prime} - \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \left(s_1^{*\prime} - \frac{d_1}{n_2}\right) =$$

$$= -\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \frac{d_1}{n_2} = -\varphi_0. \tag{121}$$

Получили известный результат (121) для оптической силы толстой линзы.

6.10.2. Инвариант Лагранжа-Гельмгольца

Пусть x_1 – величина предмета (рис. 30), x_1' – величина изображения. Тогда для осевой точки A предмета можно записать:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \cdot \sin u_1' \end{pmatrix} = M_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ n_1 \cdot \sin u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ -\varphi_1 & D_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ n_1 \cdot \sin u_1 \end{pmatrix},$$

Отсюда

$$n_2 \cdot \sin u_1' = D_1 \cdot n_1 \cdot \sin u_1 .$$

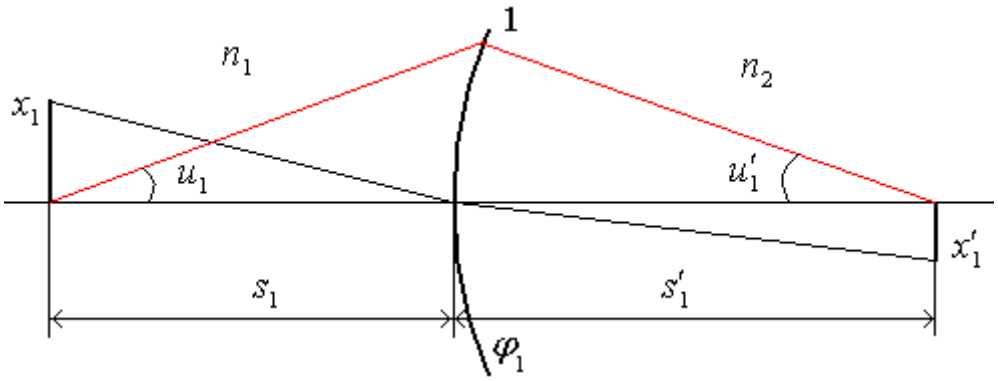


Рис. 30. К выводу инварианта Лагранжа-Гельмгольца

Поскольку

$$D_1 = \frac{1}{A_1} = \frac{x_1}{x_1'}, \text{ то: } n_2 \cdot \sin u_1' = \frac{x_1}{x_1'} \cdot n_1 \cdot \sin u_1 ,$$

откуда следует

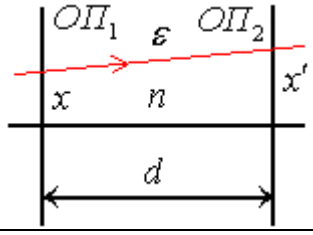
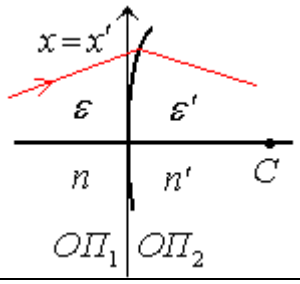
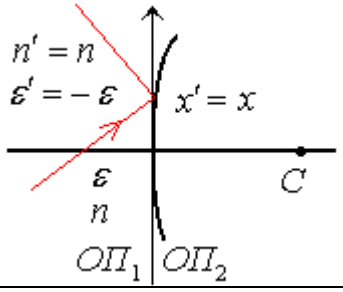
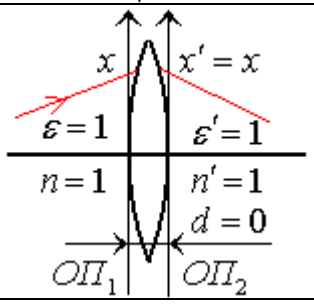
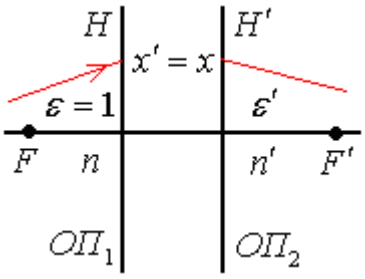
$$x_1' \cdot n_2 \cdot \sin u_1' = x_1 \cdot n_1 \cdot \sin u_1 . \qquad (122)$$

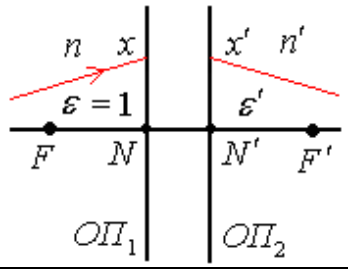
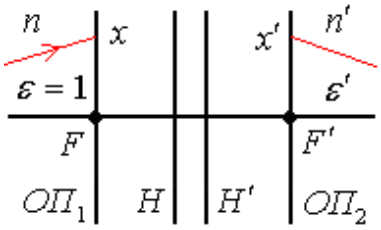
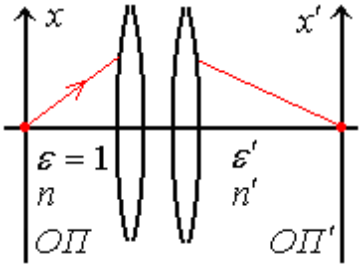
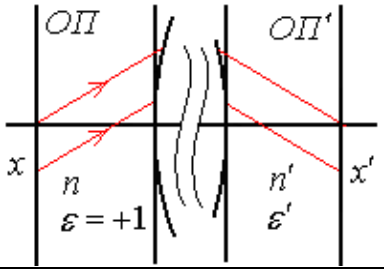
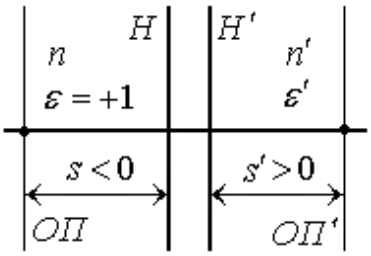
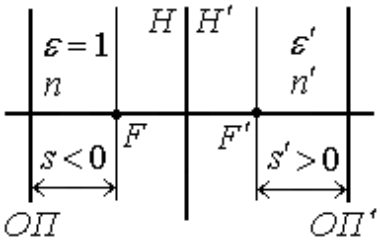
Выражение (122) представляет собой известный инвариант Лагранжа-Гельмгольца. Поскольку инвариант получен в рамках параксиальной оптики, то он строго выполняется лишь в параксиальной области, то есть для идеальной оптической системы, когда можно положить:

$$\sin u_1 \approx u_1 , \ \sin u_1' \approx u_1' .$$

Полученные в параграфах 6.10.1 и 6.10.2 результаты, очевидно, распространяются и на зеркальные и зеркально-линзовые системы.

7. МАТРИЧНАЯ ОПТИКА. СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

№	Описание	Оптическая схема	Матрица преобразования лучей
1	Перемещение луча в свободном пространстве (T – матрица). Рис. 1		$T=\begin{pmatrix}1 & \frac{\varepsilon\cdot d}{n}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
2	Преломление луча на одной поверхности (R – матрица). Рис. 2.		$R=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\varepsilon\cdot\frac{n'-n}{r} & 1\end{pmatrix}$
3	Отражение луча от одной поверхности (R – матрица). Рис. 3.		$R=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \varepsilon\cdot\frac{2\cdot n}{r} & 1\end{pmatrix}$
4	Тонкая линза в воздухе. Рис. 4.		$M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\varphi & 1\end{pmatrix}$
5	Преобразование луча между главными плоскостями системы. Рис. 5.		$\bar{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\varphi & 1\end{pmatrix}$

№	Описание	Оптическая схема	Матрица преобразования лучей
6	Преобразование луча между узловыми плоскостями системы. *Рис. 6.*		$\bar{M} = \begin{pmatrix} \varepsilon' \cdot \frac{n}{n'} & 0 \\ -\varphi & \varepsilon' \cdot \frac{n'}{n} \end{pmatrix}$
7	Преобразование луча между фокальными плоскостями системы. *Рис. 7.*		$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varphi} \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix}$
8	Преобразование луча между сопряженными плоскостями *ОП* и *ОП'*. *Рис. 8.*		$\bar{M} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -\varphi & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$
9	Преобразование луча между сопряженными плоскостями *ОП* и *ОП'* для телескопической системы. *Рис. 9.*		$\bar{M} = \begin{pmatrix} \beta_T & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_T} \end{pmatrix}$ $\beta_T = A$
10	Преобразование луча между сопряженными плоскостями *ОП* и *ОП'*, положение которых задано относительно главных плоскостей. *Рис. 10.*		$\bar{M} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s'}{f'} & 0 \\ -\varphi & 1 - \frac{s}{f} \end{pmatrix}$
11	Матрица преобразования лучей между сопряженными плоскостями *ОП* и *ОП'*, положение которых задано относительно фокальных плоскостей. *Рис. 11.*		$\bar{M} = \begin{pmatrix} -\frac{s'}{f'} & 0 \\ -\varphi & -\frac{s}{f} \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix},$$

M – матрица преобразования лучей между опорными плоскостями, проведенными через вершины первой и последней поверхностей системы; $\bar{M}$ – матрица преобразования лучей между парой заданных плоскостей; $\varphi = \dfrac{n'}{\varepsilon' \cdot f'} = -\dfrac{n}{f}$ – оптическая сила системы; $\beta = A$ – линейное (поперечное) увеличение системы; $\beta_T = A$ – телескопическое увеличение афокальной системы.

Кардинальные точки

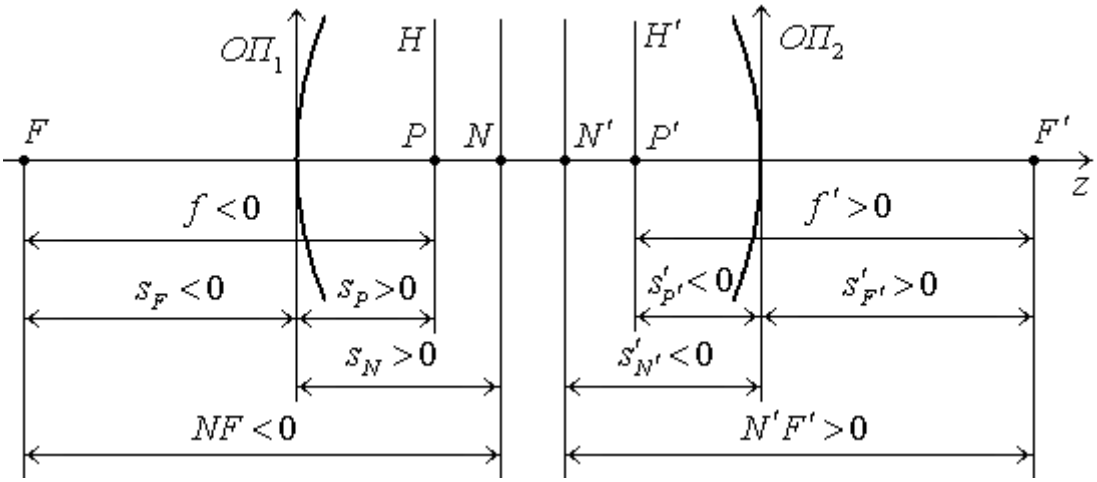


Рис. 12. Основные обозначения

Описываемый параметр системы	Измеряемый		Формула
	от	до	
Передний фокальный отрезок s_F.	$ОП_1$	F	$s_F = n \cdot \dfrac{D}{C}$
Переднее фокусное расстояние f.	P	F	$f = \dfrac{n}{C}$
Передняя главная точка s_P.	$ОП_1$	P	$s_P = n \cdot \dfrac{D-1}{C}$
Передняя узловая точка s_N.	$ОП_1$	N	$s_N = \dfrac{n \cdot D - \varepsilon' \cdot n'}{C}$
Расстояние NF от передней узловой точки до переднего фокуса.	N	F	$-f'$
Задний фокальный отрезок $s'_{F'}$.	$ОП_1$	F'	$s'_{F'} = -\varepsilon' \cdot n' \cdot \dfrac{A}{C}$

Описываемый параметр системы	Измеряемый		Формула
	от	до	
Заднее фокусное расстояние f'.	P'	F'	$f' = -\dfrac{\varepsilon' \cdot n'}{C}$
Задняя главная точка $s'_{P'}$.	$ОП_2$	P'	$s'_{P'} = \varepsilon' \cdot n' \cdot \dfrac{1-A}{C}$
Задняя узловая точка $s'_{N'}$.	$ОП_2$	N'	$s'_{N'} = \dfrac{n - \varepsilon' \cdot n' \cdot A}{C}$.
Расстояние $N'F'$ от задней узловой точки до заднего фокуса	N'	F'	$-f$

Основные расчетные формулы

Вычисление матрицы преобразования лучей между опорными плоскостями $ОП_1$ и $ОП_k$, проведенными через вершины крайних поверхностей оптической системы (рис. 13), производится путем последовательного перемножения матриц преломления (отражения) в обратном порядке (от последней поверхности к первой):

$$M = R_k \cdot T_{k-1} \cdot R_{k-1} \cdot \ldots \cdot T_1 \cdot R_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Вычисление вершинных отрезков для сопряженных плоскостей $ОП$ и $ОП'$ (рис. 13) производится по формулам:

$$\varepsilon' \cdot \frac{s'}{n'} = -\frac{B - \dfrac{s}{n} \cdot A}{D - \dfrac{s}{n} \cdot C}, \qquad \frac{s}{n} = \frac{B + \varepsilon' \cdot \dfrac{s'}{n'} \cdot D}{A + \varepsilon' \cdot \dfrac{s'}{n'} \cdot C}.$$

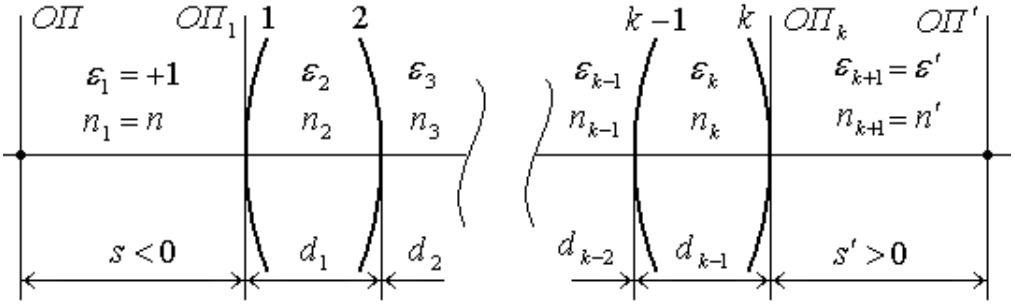


Рис. 13. Произвольная оптическая система

Телескопическая система

$$A^2 \cdot \frac{s}{n} - \frac{\varepsilon' \cdot s'}{n'} = A \cdot B,$$

$$C = 0,$$

$\beta_T = A$ – линейное (телескопическое) увеличение для любой пары сопряженных плоскостей $ОП$ и $ОП'$.

A, B, C – элементы матрицы преобразования лучей между плоскостями $ОП_1$ и $ОП_k$.

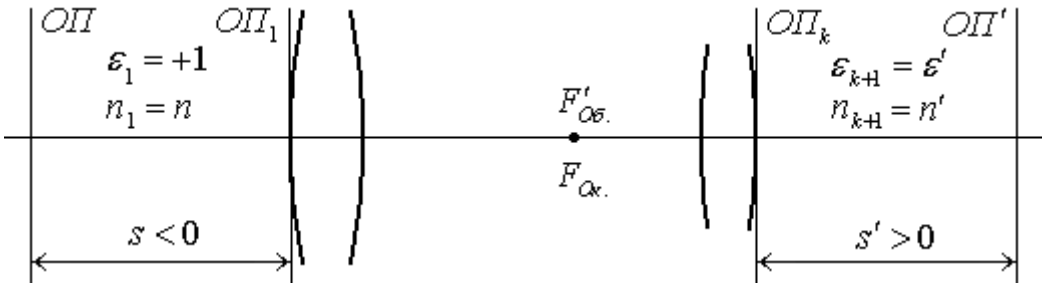


Рис. 14. Телескопическая система

Формулы для тонкой линзы

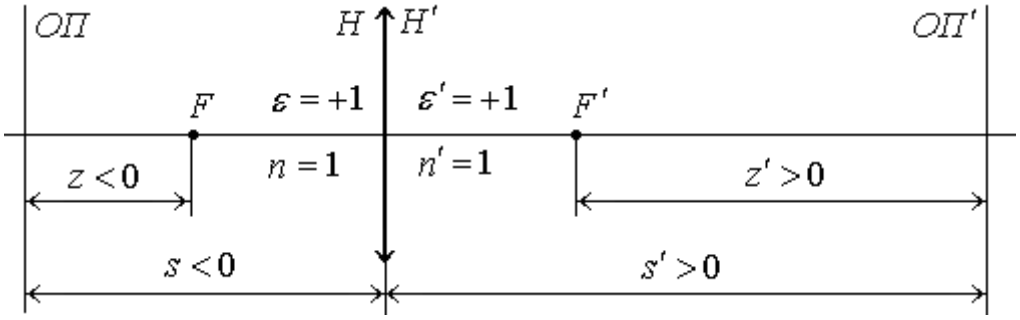


Рис. 15. Тонкая линза

$ОП$ и $ОП'$ – сопряженные плоскости,

$$\frac{n'}{\varepsilon' \cdot s'} - \frac{n}{s} = \varphi = \frac{\varepsilon' \cdot n'}{f'} = -\frac{n}{f},$$

$z \cdot z' = f \cdot f'$ – формула Ньютона,

$\beta = \dfrac{x'}{x} = \dfrac{s'}{s} = -\dfrac{z'}{f'} = -\dfrac{f}{z}$ – линейное увеличение,

$\alpha = \beta^2$ – продольное увеличение.

Правило знаков

1. $r_i > 0$, если центр кривизны поверхности лежит справа от вершины поверхности, $r_i < 0$, если центр кривизны поверхности лежит слева от вершины поверхности.

2. d_i – расстояние между вершинами поверхностей, отсчитывается от вершины i-ой поверхности к вершине $(i+1)$-ой поверхности, $d_i > 0$, если

отсчет идет в положительном направлении, то есть слева направо, $d_i < 0$, если отсчет идет в отрицательном направлении, то есть справа налево.

3. $\varepsilon_i = +1$, если луч в среде с показателем преломления n_i распространяется в положительном направлении – слева направо, $\varepsilon_i = -1$ если луч в среде с показателем преломления n_i распространяется в отрицательном направлении – справа налево.

4. $V_i = \varepsilon_i \cdot n_i \cdot u_i$ – оптический направляющий косинус луча в среде с показателем преломления n_i.

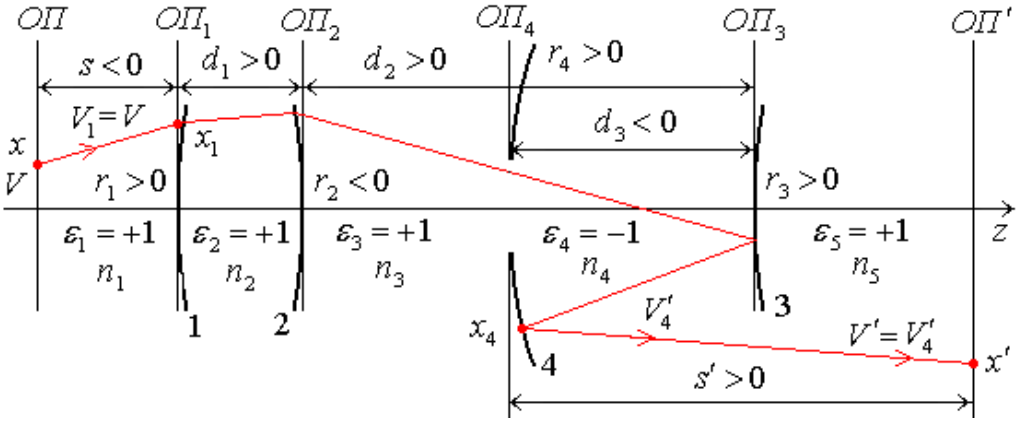


Рис. 16. Пример оптической системы. Поверхности 3 и 4 – зеркальные

При проведении практических расчетов для удобства полезно провести некоторые обобщения. Преломление и отражение можно описать одной матрицей, называемой матрицей преломления-отражения и имеющей вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\varepsilon' \cdot n' - \varepsilon \cdot n}{r} & 1 \end{pmatrix}$$ – матрица преломления-отражения.

Запишем в качестве примера матрицу M для оптической системы, изображенной на рис. 16, между опорными плоскостями $ОП_1$ и $ОП_2$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\varepsilon_5 \cdot n_5 - \varepsilon_4 \cdot n_4}{r_4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\varepsilon_4 \cdot d_3}{n_4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\varepsilon_4 \cdot n_4 - \varepsilon_3 \cdot n_3}{r_3} & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\varepsilon_3 \cdot d_2}{n_3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\varepsilon_3 \cdot n_3 - \varepsilon_2 \cdot n_2}{r_2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\varepsilon_2 \cdot n_2 - \varepsilon_1 \cdot n_1}{r_1} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ V_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$ – преобразование параметров луча.

8. РАСЧЕТ ХОДА ЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим поверхность вращения второго порядка. Поместим начало координат в вершину поверхности, тогда ее уравнение можно записать в виде:

$$x^{*2} + y^{*2} = 2 \cdot r \cdot z + c \cdot z^2, \tag{1}$$

где r – радиус кривизны при вершине, $c = e^2 - 1$ – постоянная, e – эксцентриситет поверхности. При $e = 0$ получаем сферу; при $0 < e < 1$ – эллипсоид; при $e = 1$ – параболоид; при $e > 1$ – гиперболоид.

Приведем уравнение (1) к более удобному для дальнейшего использования виду:

$$\frac{1}{2 \cdot r} \cdot (x^{*2} + y^{*2}) = z + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot c \cdot z^2 \text{, или}$$

$$F(u^*, z) = z + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot z^2 - b \cdot u^* = 0, \tag{2}$$

где $b = 1/r$ – кривизна поверхности в вершине.

Применим формулы 5.33 для поверхности, описываемой уравнением (2).

Найдем значение z, решая совместно уравнения:

$$\begin{cases} \vec{P}^{*2} = 2 \cdot u^* \cdot \zeta^2 = (\vec{P} + z \cdot \vec{S})^2, \\ z + \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot z^2 - b \cdot u^* = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Умножим первое уравнение системы (3) на b, а второе – на $2 \cdot \zeta^2$:

$$\begin{cases} 2 \cdot b \cdot u^* \cdot \zeta^2 = b \cdot (\vec{P} + z \cdot \vec{S})^2, \\ 2 \cdot b \cdot u^* \cdot \zeta^2 = 2 \cdot z \cdot \zeta^2 + b \cdot c \cdot z^2 \cdot \zeta^2. \end{cases} \tag{4}$$

Приравняем правые части уравнений системы (4) и преобразуем:

$$2 \cdot z \cdot \zeta^2 + b \cdot c \cdot z^2 \cdot \zeta^2 = b \cdot (\vec{P} + z \cdot \vec{S})^2,$$

$$\underline{\underline{2 \cdot z \cdot \zeta^2}} + \underline{b \cdot c \cdot z^2 \cdot \zeta^2} = b \cdot \vec{P}^2 + \underline{\underline{2 \cdot b \cdot z \cdot \vec{P} \cdot \vec{S}}} + \underline{b \cdot z^2 \cdot \vec{S}^2},$$

$$b \cdot z^2 \cdot (\vec{S}^2 - c \cdot \zeta^2) + 2 \cdot z \cdot (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^2) + b \cdot \vec{P}^2 = 0 \quad \Big| \cdot b,$$

$$b^2 \cdot z^2 \cdot (\vec{S}^2 - c \cdot \zeta^2) + 2 \cdot b \cdot z \cdot (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^2) + b^2 \cdot \vec{P}^2 = 0 \ , \qquad (5)$$

Умножим (5) на $(\vec{S}^2 - c \cdot \zeta^2)$:

$$b^2 \cdot z^2 \cdot (\vec{S}^2 - c \cdot \zeta^2)^2 + 2 \cdot b \cdot z \cdot (\vec{S}^2 - c \cdot \zeta^2) \cdot (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^2) +$$
$$+ (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^2)^2 - (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^2)^2 + b^2 \cdot \vec{P}^2 \cdot (\vec{S}^2 - c \cdot \zeta^2)^2 = 0 \text{, или}$$

$$\left[b \cdot z \cdot (\vec{S}^2 - c \cdot \zeta^2) + b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^2 \right]^2 =$$
$$= (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^2)^2 - b^2 \cdot \vec{P}^2 \cdot (\vec{S}^2 - c \cdot \zeta^2) \ . \qquad (6)$$

Получили уравнение (6) относительно z. Далее находим:

$$F_{u*} = \frac{\partial F}{\partial u^*} = -b, \qquad F_z = \frac{\partial F}{\partial z} = 1 + c \cdot b \cdot z \ .$$

$$t - z = -\frac{F_z}{F_{u*}} = -\frac{1 + c \cdot b \cdot z}{-b} = \frac{1 + c \cdot b \cdot z}{b} \text{, или} \qquad (7)$$
$$b \cdot t = b \cdot z + 1 + c \cdot b \cdot z = 1 + (1 + c) \cdot b \cdot z \ ,$$

обозначим:

$$\overline{t} = b \cdot t \ ,$$

тогда:

$$\overline{t} = 1 + \left(1 + c\right) \cdot b \cdot z \ . \qquad (8)$$

Далее:

$$q = -(\vec{P} + z \cdot \vec{S}) \cdot \vec{S} + \zeta^2 \cdot (t - z) \ . \qquad (9)$$

Подставим (7) в (9):

$$b \cdot q = -b \cdot (\vec{P} + z \cdot \vec{S}) \cdot \vec{S} + \zeta^2 \cdot (1 + c \cdot b \cdot z) \ . \qquad (10)$$

Обозначим:

$$\overline{q} = b \cdot q \ .$$

Поскольку $sign\, q = sign\, r_s = sign\, b$, то всегда $\overline{q} > 0$.

Преобразуем формулу (10):

$$\overline{q} = -b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - b \cdot z \cdot \vec{S}^2 + \zeta^2 + \zeta^2 \cdot c \cdot b \cdot z =$$
$$= b \cdot z \cdot (c \cdot \zeta^2 - \vec{S}^2) - b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} + \zeta^2 =$$
$$= -\left[b \cdot z \cdot (\vec{S}^2 - c \cdot \zeta^2) + b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^2 \right],$$

или окончательно:

$$\overline{q} = -\left[b \cdot z \cdot (\vec{S}^{\,2} - c \cdot \zeta^{\,2}) + b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^{\,2} \right]. \qquad (11)$$

Сравнивая правую часть (11) и левую часть (6), находим:

$$\overline{q}^{\,2} = (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^{\,2})^{\,2} - b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2} \cdot (\vec{S}^{\,2} - c \cdot \zeta^{\,2}); \qquad (12)$$

в правой части (12) все величины заданы, то есть выражение (12) определяет величину $\overline{q}$. Тогда из (11) находим:

$$z = -\frac{\overline{q} + (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^{\,2})}{(\vec{S}^{\,2} - c \cdot \zeta^{\,2}) \cdot b}. \qquad (13)$$

В знаменателе (13) стоит величина $b = \dfrac{1}{r}$. Если $r \to \infty$, то $b \to 0$. В этом случае формула (13) может дать большую погрешность при вычислении величины z. Поэтому, при $b \to 0$ получим специальную формулу, не содержащую в знаменателе бесконечно малой величины. Для этого преобразуем (13):

$$z = -\frac{\overline{q} + (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^{\,2})}{b \cdot (\vec{S}^{\,2} - c \cdot \zeta^{\,2})} \cdot \frac{\overline{q} - (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^{\,2})}{\overline{q} - (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^{\,2})} =$$

$$= -\frac{\overline{q}^{\,2} - (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^{\,2})^2}{b \cdot (\vec{S}^{\,2} - c \cdot \zeta^{\,2}) \cdot \left[\overline{q} - (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^{\,2}) \right]},$$

с учетом (12) преобразуем числитель:

$$z = -\frac{-b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2} \cdot (\vec{S}^{\,2} - c \cdot \zeta^2)}{b \cdot (\vec{S}^{\,2} - c \cdot \zeta^{\,2}) \cdot \left[\overline{q} - (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^2) \right]} = \frac{b \cdot \vec{P}^{\,2}}{\overline{q} - b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} + \zeta^2}, \qquad (14)$$

таким образом, имеем

$$z = -\frac{\overline{q} + (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^{\,2})}{b \cdot (\vec{S}^{\,2} - c \cdot \zeta^{\,2})} = \frac{b \cdot \vec{P}^{\,2}}{\overline{q} - (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^{\,2})}. \qquad (15)$$

Далее находим:

$$R = \zeta^{\,2} \cdot r_s^{\,2}. \qquad (16)$$

Преобразуем $r_s^{\,2}$:

$$r_s^{\,2} = \vec{A}^{*\,2} + (t - z)^2 = x^{*2} + y^{*\,2} + (t - z)^2 = 2 \cdot u^* + (t - z)^2 \quad \Big| \cdot B^2 .$$

Умножим последнее равенство на $b^{\,2}$:

$$b^{\,2} \cdot r_s^{\,2} = 2 \cdot b \cdot b \cdot u^* + b^{\,2} \cdot (t - z)^2 . \qquad (17)$$

Выразим $b \cdot u^*$ из уравнения (2) и подставим в (17):

$$b^2 \cdot r_s^2 = 2 \cdot b \cdot (z + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot z^2) + b^2 \cdot (t - z)^2 =$$
$$= 2 \cdot b \cdot z + c \cdot b^2 \cdot z^2 + b^2 \cdot (t - z)^2 =$$
$$= b \cdot z + b \cdot z + c \cdot b^2 \cdot z^2 + b^2 \cdot (t - z)^2 =$$
$$= b \cdot z + b \cdot z \cdot (1 + c \cdot b \cdot z) + b^2 \cdot (t - z)^2 . \qquad (18)$$

Из (7) находим $1 + c \cdot b \cdot z = b \cdot (t - z)$ и подставим в (18):

$$b^2 \cdot r_s^2 = b \cdot z + b \cdot z \cdot b \cdot (t - z) + b^2 \cdot (t - z)^2 =$$
$$= b \cdot z + \underline{b^2 \cdot z \cdot t} - \cancel{b^2 \cdot z^2} + b^2 \cdot t^2 - \underline{2 \cdot b^2 \cdot z \cdot t} + \cancel{b^2 \cdot z^2} =$$
$$= b^2 \cdot t^2 + b \cdot z - b^2 \cdot z \cdot t = b^2 \cdot t^2 - b \cdot z \cdot (b \cdot t - 1) =$$
$$= \overline{t}^2 - b \cdot z \cdot (\overline{t} - 1) .$$

Обозначим:

$$\overline{R} = b^2 \cdot r_s^2 = \overline{t}^2 - b \cdot z \cdot (\overline{t} - 1) . \qquad (19)$$

тогда из (16) с учетом (19) следует:

$$b^2 \cdot R = b^2 \cdot \left(\zeta^2 \cdot r_s^2 \right) = \zeta^2 \cdot \overline{R} . \qquad (20)$$

Из (20) находим:

$$R = \frac{\zeta^2}{b^2} \cdot \overline{R} . \qquad (21)$$

Далее находим (с учетом (21)):

$$q'^2 = (n'^2 - n^2) \cdot R + q^2 = (n'^2 - n^2) \cdot \frac{\zeta^2}{b^2} \cdot \overline{R} + q^2 \text{, или}$$
$$\overline{q}'^2 = (b \cdot q')^2 = (n'^2 - n^2) \cdot \zeta^2 \cdot \overline{R} + \overline{q}^2 \text{, где } \overline{q}' = b \cdot q' . \qquad (22)$$

Или из (5.32):

$$b \cdot q' = b \cdot \varepsilon' \cdot \varepsilon \cdot sign\left(r_s \right) \cdot \sqrt{(n'^2 - n^2) \cdot R + q^2} =$$
$$= sign(b) \cdot \varepsilon' \cdot \varepsilon \cdot sign\left(r_s \right) \cdot \sqrt{(n'^2 - n^2) \cdot R \cdot b^2 + q^2 \cdot b^2} =$$
$$= \varepsilon' \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{(n'^2 - n^2) \cdot \overline{R} + \overline{q}^2} = \overline{q} ,$$

так как для поверхностей второго порядка $sign(B) \cdot sign(r)_s = +1$ всегда.

$$\psi = \frac{q' - q}{R} \cdot \frac{b^2}{b^2} = \frac{b \cdot (\overline{q}' - \overline{q})}{\zeta^2 \cdot \overline{R}} \text{ , или}$$

$$\overline{\psi} = \frac{\psi}{b} = \frac{\overline{q}' - \overline{q}}{\zeta^2 \cdot \overline{R}}. \tag{23}$$

Преобразуем далее:

$$\begin{cases} \vec{P}' = (1 + \psi \cdot t) \cdot \vec{P} + \psi \cdot t \cdot z \cdot \vec{S} = \left(1 + \frac{\psi}{b} \cdot b \cdot t\right) \cdot \vec{P} + \frac{\psi}{b} \cdot b \cdot t \cdot z \cdot \vec{S} \\ \vec{S}' = -\psi \cdot \vec{P} + (1 - \psi \cdot z) \cdot \vec{S} = -b \cdot \frac{\psi}{b} \cdot \vec{P} + \left(1 - b \cdot \frac{\psi}{b} \cdot z\right) \cdot \vec{S}, \end{cases}$$

с учетом принятых обозначений получим:

$$\begin{cases} \vec{P}' = (1 + \overline{\psi} \cdot \overline{t}) \cdot \vec{P} + \overline{\psi} \cdot \overline{t} \cdot z \cdot \vec{S} \\ \vec{S}' = -b \cdot \overline{\psi} \cdot \vec{P} + (1 - b \cdot \overline{\psi} \cdot z) \cdot \vec{S}. \end{cases} \tag{24}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} A &= 1 + \overline{\psi} \cdot \overline{t}, \quad B = \overline{\psi} \cdot \overline{t} \cdot z, \\ C &= -b \cdot \overline{\psi}, \quad D = 1 - b \cdot \overline{\psi} \cdot z, \end{aligned} \tag{25}$$

тогда можно записать:

$$\begin{pmatrix} \vec{P}' \\ \vec{S}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{S} \end{pmatrix} \tag{26-1}$$

$$\zeta' = \zeta \cdot [1 + \psi \cdot (t - z)] = \zeta \cdot \left[1 + \psi \cdot \frac{1 + C \cdot b \cdot z}{b}\right],$$

или:

$$\zeta' = \zeta \cdot [1 + \overline{\psi} \cdot (1 + C \cdot b \cdot z)].$$

Сводка формул

<u>Задано:</u>

$\left.\begin{matrix} \vec{A}(x, y) \\ \vec{s}(\xi, \eta, \zeta) \end{matrix}\right\}$ – начальные данные луча,

$F(u^*, z) = z + \frac{1}{2} \cdot B \cdot C \cdot z^2 - B \cdot u^* = 0$ – уравнение поверхности.

<u>Расчет:</u>

$\vec{P} = \zeta \cdot \vec{A}$,

$\overline{q}^2 = (b \cdot \vec{P} \cdot \vec{S} - \zeta^2)^2 - b^2 \cdot \vec{P}^2 \cdot (\vec{S}^2 - c \cdot \zeta^2)$,

$$z=\frac{b\cdot\vec{P}^{\,2}}{\overline{q}-(b\cdot\vec{P}\cdot\vec{S}-\zeta^{\,2})}=-\frac{\overline{q}+(b\cdot\vec{P}\cdot\vec{S}-\zeta^{\,2})}{b\cdot(\vec{S}^{\,2}-c\cdot\zeta^{\,2})},$$

$$\overline{t}=1+b\cdot z\cdot(1+c),$$

$$\overline{R}=\overline{t}^{\,2}-b\cdot z\cdot(\overline{t}-1),$$

$$\overline{q}'^{2}=(n'^{2}-n^{2})\cdot\overline{R}\cdot\zeta^{\,2}+\overline{q}^{\,2},$$

$$\overline{q}'=\sqrt{\overline{q}'^{2}}>0 \quad \text{– для преломления}$$

$$\overline{q}'=-\overline{q}, \qquad \text{– для отражения} \quad (27)$$

$$\overline{\psi}=\frac{\overline{q}'-\overline{q}}{\zeta^{\,2}\cdot\overline{R}},$$

$$\vec{P}^{\,*}=\vec{P}+z\cdot\vec{S},$$

$$A=1+\overline{\psi}\cdot\overline{t} \quad , \quad B=\overline{\psi}\cdot\overline{t}\cdot z,$$

$$C=-b\cdot\overline{\psi} \quad , \quad D=1-b\cdot\overline{\psi}\cdot z,$$

$$\begin{pmatrix}\vec{P}'\\ \vec{S}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\vec{P}\\ \vec{S}\end{pmatrix},$$

$$\zeta'=\zeta\cdot\left[1+\overline{\psi}\cdot(1+c\cdot b\cdot z)\right],$$

сопряженные плоскости связаны соотношением:

$$s'=-\frac{B-s\cdot A}{D-s\cdot C}, \qquad (28)$$

где s и s' – сопряженные отрезки.

8.1. Декартовые поверхности

Поверхности, отражающие или преломляющие лучи, выходящие из одной определенной точки так, что после отражения или преломлении они опять сходятся в одной точке, называются декартовыми.

8.1.1. Декартовые отражающие поверхности

Рассмотрим точку F, удаленную от вершины поверхности на расстояние

$$s=\frac{1}{b\cdot(1-e)}, \qquad (29)$$

то есть, один из фокусов поверхности второго порядка (рис. 1). Пусть на поверхность падает гомоцентрический пучок, который сходится в точке F.

Проведем опорную плоскость $ОП_1$ через фокус F. Тогда:

$$\vec{P}_1=\vec{P}+s\cdot\vec{S}=0, \text{ отсюда}$$

$$\vec{P} = -s \cdot \vec{S}\,, \qquad (30\text{-}1)$$

$$\vec{P}^2 = s^2 \cdot \vec{S}^2\,, \qquad (30\text{-}2)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{S} = -s \cdot \vec{S}^2\,. \qquad (30\text{-}3))$$

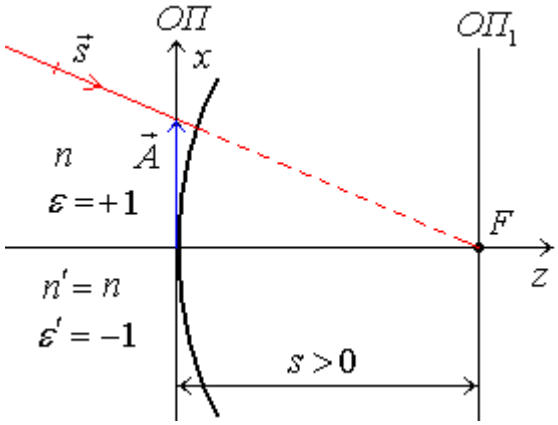


Рис. 1. Декартова отражающая поверхность

Подставим $n' = n$, (29) и (30) в формулы (27) по расчету хода луча:

$$\bar{q}^{\,2} = \left[-b \cdot \frac{\vec{S}^{\,2}}{b \cdot (1-e)} - \zeta^{\,2}\right]^2 - b^{\,2} \cdot \frac{\vec{S}^{\,2}}{b^{\,2} \cdot (1-e)^{\,2}} \cdot \left(\vec{S}^{\,2} - c \cdot \zeta^{\,2}\right) =$$

$$= \left[\frac{\vec{S}^{\,2}}{1-e} + \zeta^{\,2}\right]^2 - \frac{\vec{S}^{\,2}}{(1-e)^{\,2}} \cdot \left(\vec{S}^{\,2} - c \cdot \zeta^{\,2}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{\vec{S}^4}{(1-e)^2}} + 2 \cdot \frac{\zeta^{\,2} \cdot \vec{S}^{\,2}}{1-e} + \zeta^{\,4} - \cancel{\frac{\vec{S}^{\,4}}{(1-e)^2}} + \frac{c \cdot \zeta^2 \cdot \vec{S}^{\,2}}{(1-e)^{\,2}} =$$

$$= \zeta^{\,2} \cdot \left[\frac{c \cdot \vec{S}^2}{(1-e)^{\,2}} + 2 \cdot \frac{\vec{S}^2}{1-e} + \zeta^2\right] =$$

$$= \zeta^{\,2} \cdot \left[\frac{e^{\,2} \cdot \vec{S}^{\,2}}{(1-e)^{\,2}} - \frac{\vec{S}^{\,2}}{(1-e)^{\,2}} + \frac{2 \cdot \vec{S}^{\,2}}{1-e} + \zeta^{\,2}\right] =$$

$$= \zeta^{\,2} \cdot \left[\frac{e^{\,2} \cdot \vec{S}^{\,2} - \vec{S}^2 + 2 \cdot \vec{S}^{\,2} \cdot (1-e)}{(1-e)^{\,2}} + \zeta^{\,2}\right] =$$

$$= \zeta^{\,2} \cdot \left[\frac{e^{\,2} \cdot \vec{S}^{\,2} - \vec{S}^{\,2} + 2 \cdot \vec{S}^{\,2} - 2 \cdot e \cdot \vec{S}^{\,2}}{(1-e)^{\,2}} + \zeta^{\,2}\right] =$$

$$= \zeta^{\,2} \cdot \left[\vec{S}^2 \cdot \frac{e^{\,2} - 2 \cdot e + 1}{(1-e)^{\,2}} + \zeta^{\,2}\right] = \zeta^{\,2} \cdot \left(\vec{S}^{\,2} + \zeta^{\,2}\right) = n^{\,2} \cdot \zeta^{\,2}\,,$$

$$\overline{q} = n \cdot \zeta \,. \tag{31}$$

Далее:

$$z = b \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\vec{S}^{\,2}}{(1-e)^2} \cdot \frac{1}{n \cdot \zeta + b \cdot \dfrac{\vec{S}^{\,2}}{b \cdot (1-e)} + \zeta^2} =$$

$$= \frac{\vec{S}^{\,2}}{b \cdot (1-e)^2 \cdot \left(n \cdot \zeta + \dfrac{\vec{S}^{\,2}}{1-e} + \zeta^2 \right)} =$$

$$= \frac{\vec{S}^{\,2} \cdot (1-e)}{b \cdot (1-e)^2 \cdot \left[n \cdot \zeta \cdot (1-e) + \vec{S}^{\,2} + \zeta^2 \cdot (1-e) \right]} =$$

$$= \frac{\vec{S}^{\,2}}{b \cdot (1-e) \cdot \left(n \cdot \zeta - n \cdot e \cdot \zeta + \vec{S}^{\,2} + \zeta^2 - e \cdot \zeta^2 \right)} =$$

$$= \frac{\vec{S}^{\,2}}{b \cdot (1-e) \cdot \left[n \cdot \zeta - \underline{n \cdot e \cdot \zeta} + n^2 - \underline{e \cdot \zeta^2} \right]} =$$

$$= \frac{n^2 - \zeta^2}{b \cdot (1-e) \cdot \left[n \cdot (n+\zeta) - e \cdot \zeta \cdot (n+\zeta) \right]} =$$

$$= \frac{(n-\zeta) \cdot (n+\zeta)}{b \cdot (1-e) \cdot (n - e \cdot \zeta) \cdot (n+\zeta)} =$$

$$= \frac{n-\zeta}{b \cdot (1-e) \cdot (n - e \cdot \zeta)}, \text{ или}$$

$$b \cdot z = \frac{n-\zeta}{(1-e) \cdot (n - e \cdot \zeta)} \,. \tag{32}$$

$$\overline{t} = 1 + (1+c) \cdot \frac{n-\zeta}{(1-e) \cdot (n - e \cdot \zeta)} =$$

$$= \frac{(1-e) \cdot (n - e \cdot \zeta) + (e^2 - 1 + 1) \cdot (n - \zeta)}{(1-e) \cdot (n - e \cdot \zeta)} =$$

$$= \frac{n - n \cdot e - e \cdot \zeta + \cancel{e^2 \cdot \zeta} + e^2 \cdot n - \cancel{e^2 \cdot \zeta}}{(1-e) \cdot (n - e \cdot \zeta)} =$$

$$= \frac{(n - e \cdot \zeta) - n \cdot e \cdot (1-e)}{(1-e) \cdot (n - e \cdot \zeta)} =, \text{ или}$$

$$\overline{t} = \frac{(n - e\cdot\zeta) - n\cdot e\cdot(1-e)}{(1-e)\cdot(n - e\cdot\zeta)}. \qquad (33)$$

С учетом (32) и (33) находим:

$$\overline{R} = \overline{t}^{\,2} - b\cdot z\cdot(\overline{t} - 1) =$$

$$= \left[\frac{(n-e\cdot\zeta)-n\cdot e\cdot(1-e)}{(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)}\right]^2 - \frac{n-\zeta}{(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)}\cdot\left[\frac{(n-e\cdot\zeta)-n\cdot e\cdot(1-e)}{(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)} - 1\right] =$$

$$= \frac{\left[(n-e\cdot\zeta)-n\cdot e\cdot(1-e)\right]^2}{(1-e)^2\cdot(n-e\cdot\zeta)^2} -$$

$$-\frac{n-\zeta}{(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)}\cdot\frac{(n-e\cdot\zeta)-n\cdot e\cdot(1-e)-(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)}{(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)} =$$

$$= \frac{1}{(1-e)^2\cdot(n-e\cdot\zeta)^2}\cdot\Big\{\left[(n-e\,\zeta)-n\cdot e\cdot(1-e)\right]^2 - (n-\zeta)\cdot(n-e\cdot\zeta) +$$

$$+ n\cdot e\cdot(1-e)\cdot(n-\zeta) + (n-\zeta)\cdot(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)\Big\} =$$

$$= \frac{1}{(1-e)^2\cdot(n-e\cdot\zeta)^2}\cdot\Big\{\underline{(n-e\cdot\zeta)^2} - 2\cdot n\cdot e\cdot(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta) + n^2\cdot e^2\cdot(1-e)^2 -$$

$$-\underline{(n-\zeta)\cdot(n-e\cdot\zeta)} + n\cdot e\cdot(1-e)\cdot(n-\zeta) + (n-\zeta)\cdot(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)\Big\} =$$

$$= \frac{1}{(1-e)^2\cdot(n-e\cdot\zeta)^2}\cdot\Big\{(n-e\cdot\zeta)\cdot\left[(n-e\cdot\zeta)-(n-\zeta)\right] - 2\cdot n\cdot e\cdot(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta) +$$

$$+ n^2\cdot e^2\cdot(1-e)^2 + n\cdot e\cdot(1-e)\cdot(n-\zeta) + (n-\zeta)\cdot(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)\Big\} =$$

$$= \frac{1}{(1-e)^2\cdot(n-e\cdot\zeta)^2}\cdot\Big[(n-e\cdot\zeta)\cdot(1-e)\cdot\zeta - 2\cdot n\cdot e\cdot(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta) +$$

$$+ n^2\cdot e^2\cdot(1-e)^2 + n\cdot e\cdot(1-e)\cdot(n-\zeta) + (n-\zeta)\cdot(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)\Big] =$$

$$= \frac{(1-e)}{(1-e)^2\cdot(n-e\cdot\zeta)^2}\cdot\Big[\zeta\cdot(n-e\cdot\zeta) + n^2\cdot e^2\cdot(1-e) - \underline{2\cdot n\cdot e\cdot(n-e\cdot\zeta)} +$$

$$+ \underline{n\cdot e\cdot(n-\zeta)} + (n-\zeta)\cdot(n-e\cdot\zeta)\Big] =$$

$$= \frac{1}{(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)^2}\cdot\Big\{\zeta\cdot(n-e\cdot\zeta) + n^2\cdot e^2\cdot(1-e) + (n-\zeta)\cdot(n-e\cdot\zeta) +$$

$$+ n\cdot e\cdot\left[(n-\zeta) - 2\cdot(n-e\cdot\zeta)\right]\Big\}\Big] =$$

$$= \frac{1}{(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)^2}\cdot\Big[\cancel{\zeta\cdot n} - \cancel{e\cdot\zeta^2} + n^2\cdot e^2 - n^2\cdot e^3 + n^2 - \cancel{n\cdot\zeta} - n\cdot e\cdot\zeta +$$

$$+ \cancel{e\cdot\zeta^2} + n\cdot e\cdot\left(\underline{n} - \zeta - \underline{2\cdot n} + 2\cdot e\cdot\zeta\right)\Big] =$$

$$=\frac{1}{(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)^2}\cdot\left[n^2\cdot e^2-n^2\cdot e^3+n^2-n\cdot e\cdot\zeta-n^2\cdot e-n\cdot e\cdot\zeta+2\cdot n\cdot e^2\cdot\zeta\right]=$$

$$=\frac{1}{(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)^2}\cdot\left[n^2\cdot e^2\cdot(1-e)+n^2\cdot(1-e)-2\cdot n\cdot e\cdot\zeta\cdot(1-e)\right]=$$

$$=\frac{n}{(n-e\cdot\zeta)^2}\cdot(n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^2)\text{, итак:}$$

$$\overline{R}=\frac{n}{(n-e\cdot\zeta)^2}\cdot(n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^2). \qquad (34)$$

Из (27) для отражения с учетом (31) и (34) получаем:

$$\overline{\psi}=-\frac{2\cdot\overline{q}}{\zeta^2\cdot\overline{R}}=-\frac{2\cdot n\cdot\zeta}{\zeta^2\cdot\dfrac{n}{(n-e\cdot\zeta)^2}\cdot(n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^2)}=$$

$$=-\frac{2\cdot(n-e\cdot\zeta)^2}{\zeta\cdot(n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^2)},$$

$$\overline{\psi}=-\frac{2\cdot(n-e\cdot\zeta)^2}{\zeta\cdot(n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^2)}. \qquad (35)$$

Подставим полученные результаты в выражение (28) и преобразуем его числитель:

$$B-A\cdot s=\overline{\psi}\cdot\overline{t}\cdot z-(1+\overline{\psi}\cdot\overline{t})\cdot s=\overline{\psi}\cdot\overline{t}\cdot z-s-\overline{\psi}\cdot\overline{t}\cdot s=\overline{\psi}\cdot\overline{t}\cdot(z-s)-s. \qquad (36)$$

Найдем:

$$z-s=\frac{n-\zeta}{b\cdot(1-e)\cdot(n-e\cdot\zeta)}-\frac{1}{b\cdot(1-e)}=\frac{1}{b\cdot(1-e)}\cdot\left(\frac{n-\zeta}{n-e\cdot\zeta}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{b\cdot(1-e)}\cdot\frac{n-\zeta-n+e\cdot\zeta}{n-e\cdot\zeta}=\frac{1}{b\cdot(1-e)}\cdot\frac{-\zeta\cdot(1-e)}{n-e\cdot\zeta}=-\frac{\zeta}{b\cdot(n-e\cdot\zeta)},$$

$$z-s=-\frac{\zeta}{b\cdot(n-e\cdot\zeta)}. \qquad (37)$$

Подставим (37) в (36):

$$B-s\cdot A=$$

$$=-\frac{2\cdot\cancel{(n-e\cdot\zeta)^2}}{\cancel{\zeta}_2\cdot(n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^2)}\cdot\frac{(n-e\cdot\zeta)-n\cdot e\cdot(1-e)}{(1-e)\cdot\cancel{(n-e\cdot\zeta)}}\cdot\frac{\cancel{-\zeta}}{b\cdot\cancel{(n-e\cdot\zeta)}}-\frac{1}{b\cdot(1-e)}=$$

$$=\frac{1}{b\cdot(1-e)}\cdot\left[\ 2\cdot\frac{(n-e\cdot\zeta)-n\cdot e\cdot(1-e)}{n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2}}-1\right]=$$

$$=\frac{1}{b\cdot(1-e)}\cdot\frac{\underline{\underline{2\cdot n}}-\cancel{2\cdot e\cdot\zeta}-2\cdot n\cdot e+\underline{2\cdot n\cdot e^{2}}-\underline{\underline{n}}+\cancel{2\cdot e\cdot\zeta}-\underline{n\cdot e^{2}}}{n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2}}=$$

$$=\frac{1}{b\cdot(1-e)}\cdot\frac{n-2\cdot n\cdot e+n\cdot e^{2}}{n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2}}=$$

$$=\frac{1}{b\cdot(1-e)}\cdot\frac{n\cdot(1-2\cdot e+e^{2})}{n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2}}=$$

$$=\frac{n\cdot(1-e)}{b\cdot(n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2})}\ ,$$

$$B-s\cdot A=\frac{n\cdot(1-e)}{b\cdot(n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2})} \tag{38}$$

Преобразуем знаменатель (28):

$$D-s\cdot C=(1-b\cdot\overline{\psi}\cdot z)+b\cdot\overline{\psi}\cdot s=1-b\cdot\overline{\psi}\cdot(z-s), \tag{39}$$

далее, с учетом (35) и (37), находим:

$$D-s\cdot C=1-\cancel{b}\cdot\frac{-2\cdot(n-e\cdot\zeta)^{\cancel{2}}}{\cancel{\zeta}\cdot(n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2})}\cdot\frac{\cancel{-\zeta}}{\cancel{b}\cdot\cancel{(n-e\cdot\zeta)}}=$$

$$=1-2\cdot\frac{n-e\cdot\zeta}{n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2}}=\frac{n-\cancel{2\cdot e\cdot\zeta}+n\cdot e^{2}-2\cdot n+\cancel{2\cdot e\cdot\zeta}}{n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2}}=$$

$$=\frac{-n\cdot(1-e^{2})}{n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2}},$$

Окончательно:

$$D-s\cdot C=\frac{-n\cdot(1-e^{2})}{n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2}}\ . \tag{40}$$

Подставим (38) и (40) в (28):

$$s'=-\frac{\dfrac{n\cdot(1-e)}{b\cdot(n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2})}}{-\dfrac{n\cdot(1-e)\cdot(1+e)}{n-2\cdot e\cdot\zeta+n\cdot e^{2}}}=\frac{1}{b\cdot(1+e)},$$

таким образом:

$$s' = \frac{1}{b \cdot (1+e)} = \frac{r}{1+e} \qquad (41)$$

и не зависит от параметров луча $\vec{P}$ и $\vec{s}$, то есть гомоцентрический пучок после отражения от поверхности остается гомоцентрическим. По закону обратного хода луча можно сказать, что лучи, проходящие через точку, определяемую отрезком $s = \frac{r}{1+e}$, после отражения пройдут через точку, определяемую отрезком $s' = \frac{r}{1-e}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи отражающих поверхностей.

8.1.1.1. Эллипсоид

Для эллипсоида $e < 1$.

а) Первый случай (рис. 2)**:** $r > 0$, **тогда** $s = \frac{r}{1+e} > 0$, $s' = \frac{r}{1-e} > 0$.

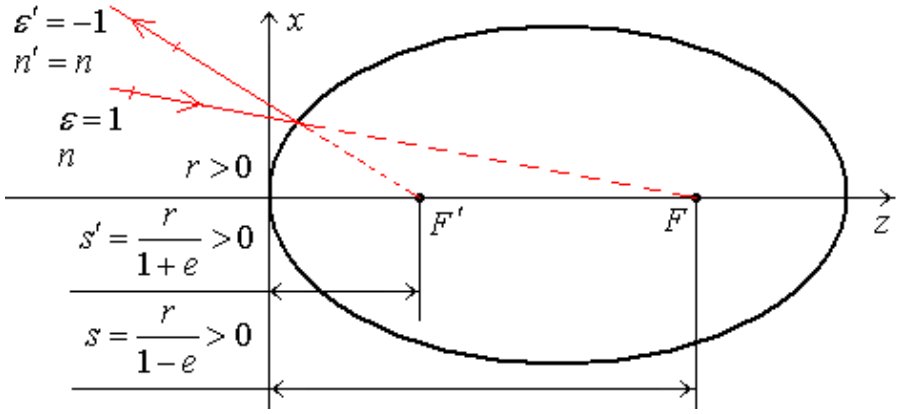


Рис. 2 Отражающий эллипсоид (первый случай)

б) Второй случай (рис. 3)**:** $r < 0$, **тогда** $s < 0$**,** $s' < 0$**.**

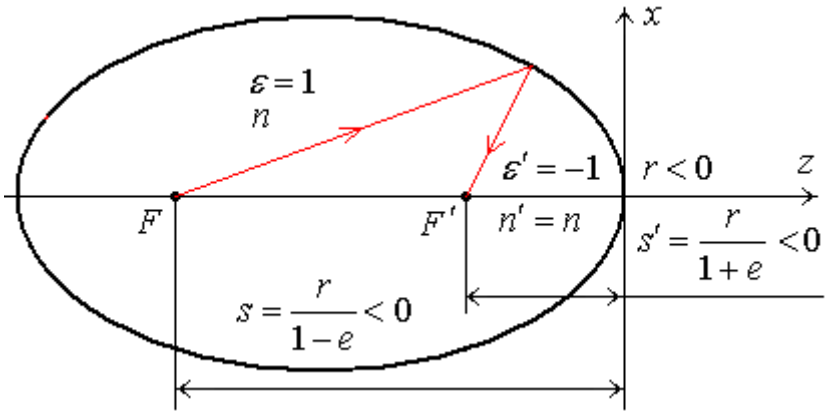


Рис. 3. Отражающий эллипсоид (второй случай)

8.1.1.2. Параболоид

Поскольку мы не накладывали ограничений на эксцентриситет e, то полученные в **9.1.1** решения справедливы для любых значений e.

Для параболы $e=1$. Тогда

$$s=\frac{r}{1-e}=\infty,\ s'=\frac{r}{1+e}=\frac{r}{2}, \tag{42}$$

то есть один из фокусов лежит в бесконечности. Значит, параллельный пучок собирается после отражения во втором фокусе (рис. 4), определяемом отрезком s' (42).

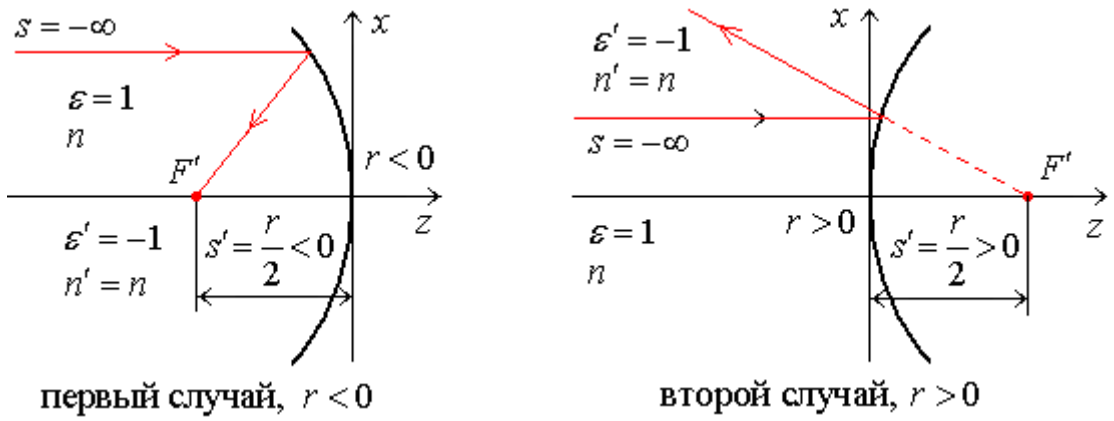


Рис. 4. Отражение лучей от параболоида

8.1.1.3. Гиперболоид

Для гиперболоида $e>1$.

а) Первый случай (рис. 5)**:** $r>0$**, тогда**

$$s=\frac{r}{1-e}<0,\ s'=\frac{r}{1+e}>0. \tag{43}$$

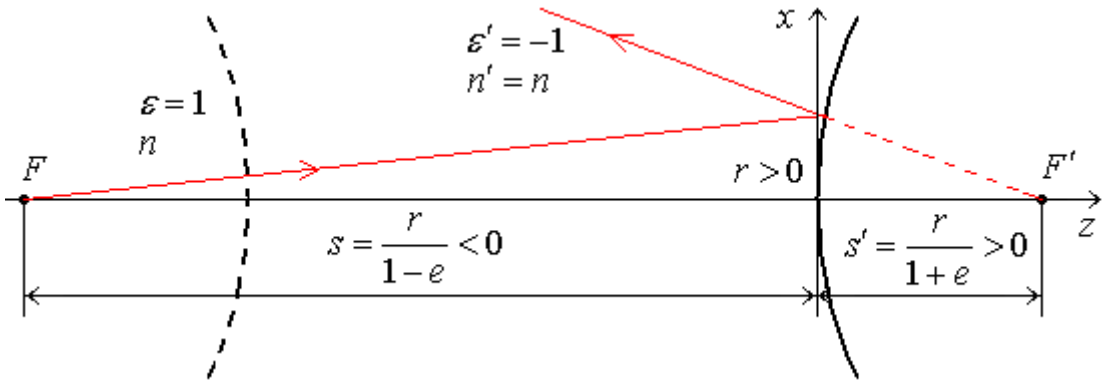


Рис. 5. Отражение от гиперболоида (первый случай)

б) Второй случай (рис. 6)**:** $r<0$**, тогда** $s=\dfrac{r}{1-e}>0$, $s'=\dfrac{r}{1+e}<0$.

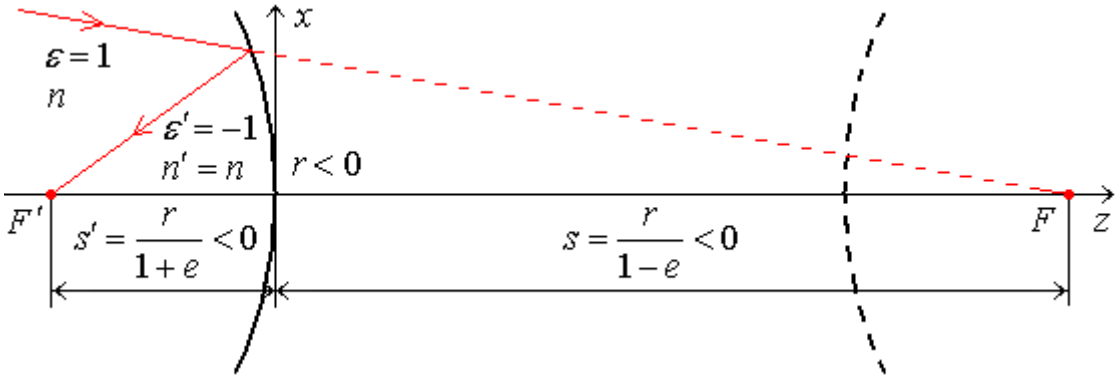


Рис. 6. Отражение от гиперболоида (второй случай)

8.1.1.4. Зеркальные оптические системы

Свойства поверхностей, показанные в разделах 9.1.1.1–9.1.1.3, можно использовать при конструировании оптических систем. Рассмотрим некоторые из возможных вариантов.

а) Объектив Кассегрена.

Первый вариант (рис. 7)**:** первое зеркало – параболоид, второе – гиперболоид. Фокус параболоида совпадает с первым фокусом гиперболоида.

Второй вариант (рис. 8)**:** первое зеркало – параболоид, второе – эллипсоид. Фокус параболоида совпадает с первым фокусом эллипсоида.

Расстояние между зеркалами в обоих вариантах вычисляется по формуле:

$$d=s_2-s_1'<0.$$

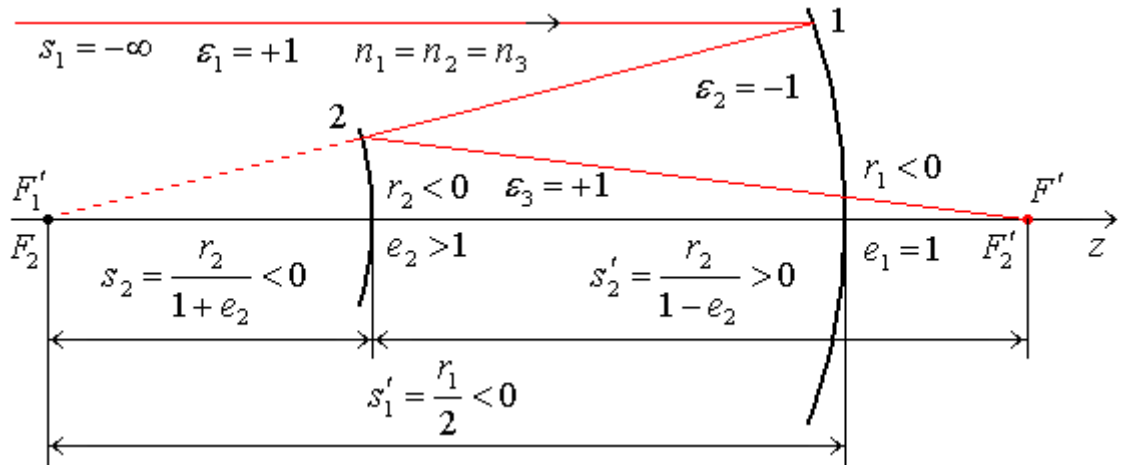


Рис. 7. Объектив Кассегрена (первый вариант)

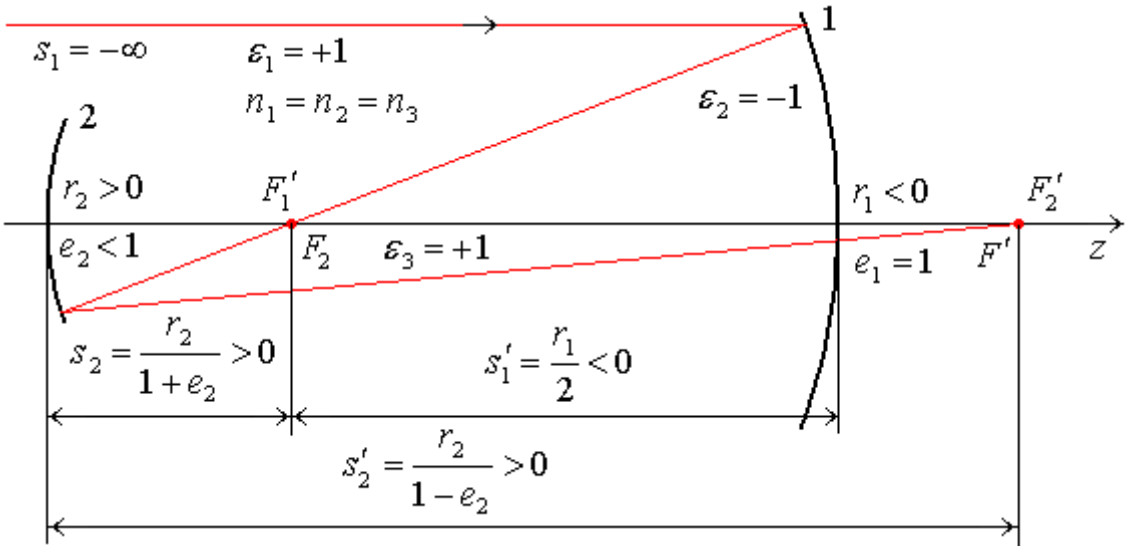


Рис. 8. Объектив Кассегрена (второй вариант)

б) Телескопическая система.

Оба зеркала – параболоиды. Фокусы параболоидов совпадают.

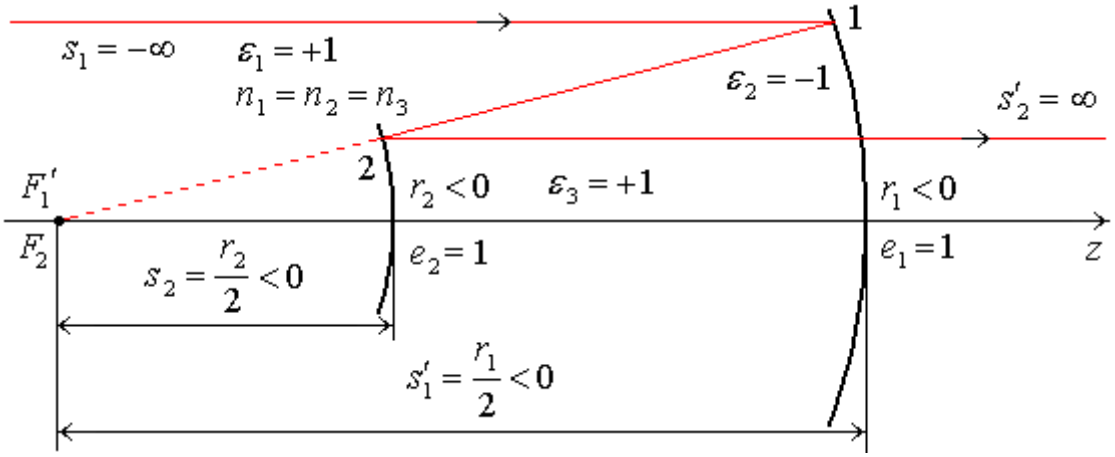


Рис. 9. Телескопическая система (первый вариант)

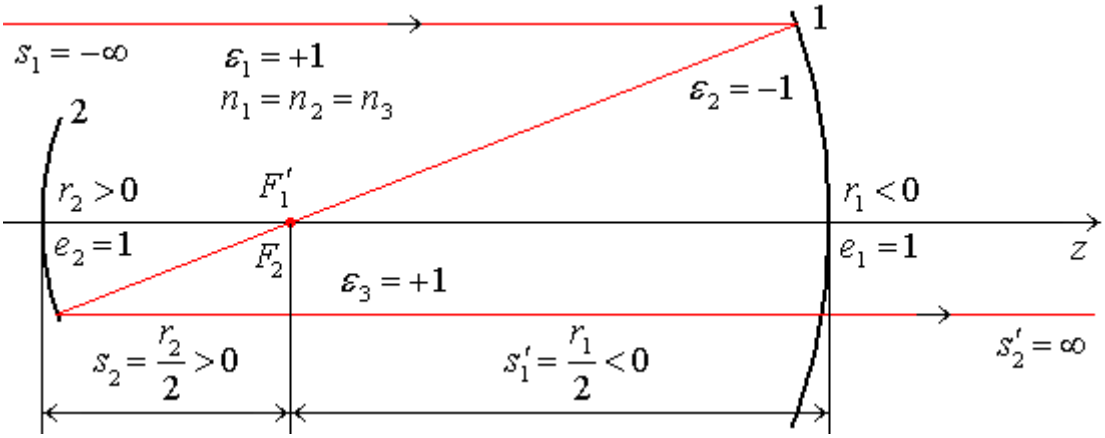


Рис. 10. Телескопическая система (второй вариант)

в) Гиперболоид инженера Гарина.

Первое зеркало – эллипсоид, второе зеркало – параболоид. Точечный источник света находится в первом фокусе эллипсоида, фокус параболоида совпадает со вторым фокусом эллипсоида.

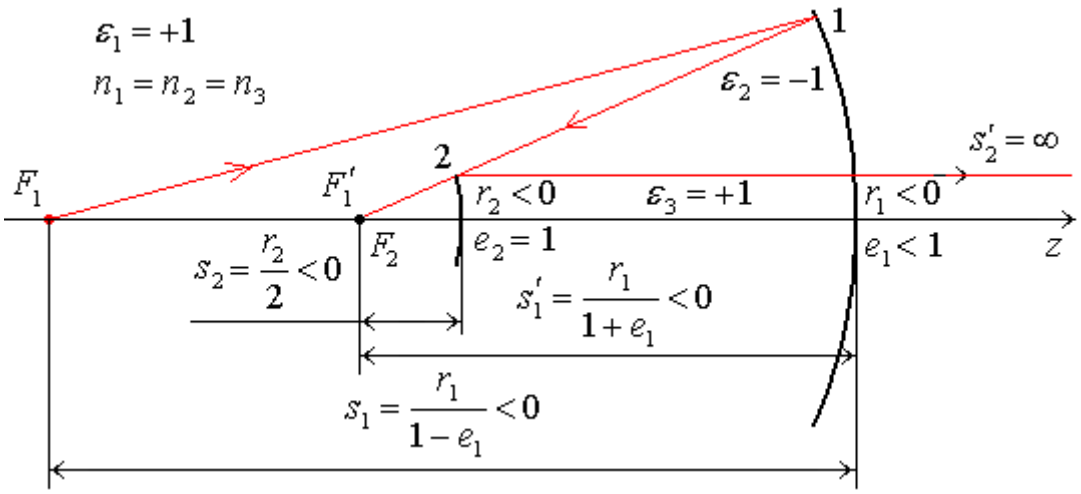


Рис. 11. Гиперболоид инженера Гарина

Каждая из приведенных оптических систем (рис. 7–11) может работать в обратном ходе лучей.

8.1.2. Декартовые преломляющие поверхности

Только эллипсоиды и гиперболоиды вращения, эксцентриситеты которых соответственно равны

$$e = \frac{n'}{n} \text{ или } e = \frac{n}{n'}$$

являются декартовыми преломляющими поверхностями.

Покажем это.

8.1.2.1. Декартовые преломляющие поверхности с $e = \frac{n'}{n}$

Пусть на преломляющую поверхность падает гомоцентрический пучок, который сходится в точке F, расположенной на расстоянии $s = \frac{r}{1-e}$ от вершины поверхности (рис. 12).

Начальные данные луча задаются известным способом:

$$s = \frac{r}{1-e}, \text{ где } e = \frac{n'}{n} \qquad (44\text{-}1)$$

$$\vec{P}_1 = \vec{P} + s \cdot \vec{S} = 0, \qquad (44\text{-}2)$$

отсюда

$$\vec{P} = -s \cdot \vec{S}, \qquad (44\text{-}3)$$

$$\vec{P}^2 = s^2 \cdot \vec{S}^2, \qquad (44\text{-}4)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{S} = -s \cdot \vec{S}^2. \qquad (44\text{-}5)$$

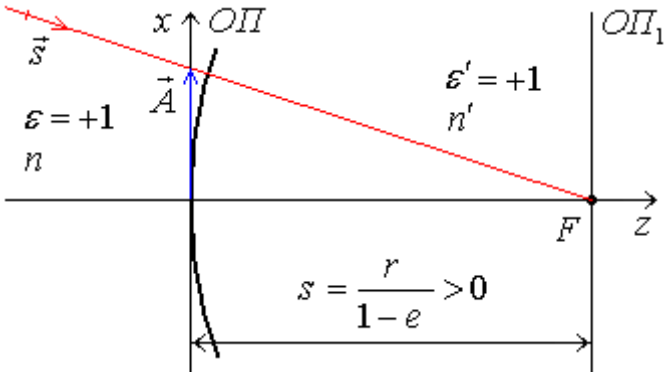


Рис. 12. Декартовая преломляющая поверхность

Подставляя (44) в формулы (27) по расчету хода луча, получим соотношения (31-34), поскольку при расчете указанных величин еще не имеет значения, какой является поверхность – отражающей или преломляющей. Подставим в соотношения (31-34) значение $e = \frac{n'}{n}$, получим:

$$B \cdot z = \frac{n - \zeta}{(1-e)\cdot(n - e\cdot\zeta)} =$$

$$= \frac{n - \zeta}{\left(1 - \frac{n'}{n}\right)\cdot\left(n - \frac{n'}{n}\cdot\zeta\right)} = \frac{n^2 \cdot (n - \zeta)}{(n - n')\cdot\left(n^2 - n'\cdot\zeta\right)}, \qquad (45)$$

$$\overline{t} = \frac{(n - e\cdot\zeta) - n\cdot e\cdot(1-e)}{(1-e)\cdot(n - e\cdot\zeta)} =$$

$$= \frac{\left(n - \frac{n'}{n}\cdot\zeta\right) - n\cdot\frac{n'}{n}\cdot\left(1 - \frac{n'}{n}\right)}{\left(1 - \frac{n'}{n}\right)\cdot\left(n - \frac{n'}{n}\cdot\zeta\right)} = \frac{(n^2 - n'\cdot\zeta) - n'\cdot(n - n')}{(n - n')\cdot\left(n^2 - n'\cdot\zeta\right)}\cdot n, \qquad (46)$$

$$\overline{R} = \frac{n}{(n - e\cdot\zeta)^2}\cdot(n - 2\cdot e\cdot\zeta + n\cdot e^2) =$$

$$=\frac{n}{\left(n-\frac{n'}{n}\cdot\zeta\right)^2}\cdot\left(n-2\cdot\frac{n'}{n}\cdot\zeta+\cancel{n}\cdot\frac{n'^2}{n^{\cancel{2}}}\right)=$$

$$=\frac{n}{\left(n^2-n'\cdot\zeta\right)^2}\cdot n^2\cdot\frac{1}{n}\cdot(n^2-2\cdot n'\cdot\zeta+n'^2),$$

$$\overline{R}=\frac{n^2-2\cdot n'\cdot\zeta+n'^2}{\left(n^2-n'\cdot\zeta\right)^2}\cdot n^2, \qquad (47)$$

для преломления из (27) находим:

$$\overline{q}'^2=(n'^2-n^2)\cdot\overline{R}\cdot\zeta^2+\overline{q}^2,$$

$$\overline{q}'^2=(n'^2-n^2)\cdot\zeta^2\cdot\frac{n^2-2\cdot n'\cdot\zeta+n'^2}{\left(n^2-n'\cdot\zeta\right)^2}\cdot n^2+n^2\cdot\zeta^2=$$

$$=n^2\cdot\zeta^2\cdot\left[\frac{(n'^2-n^2)\cdot(n^2-2\cdot n'\cdot\zeta+n'^2)}{\left(n^2-n'\cdot\zeta\right)^2}+1\right]=$$

$$=n^2\cdot\zeta^2\cdot\frac{\cancel{n'^2\cdot n^2}-2\cdot n'^3\cdot\zeta+n'^4-n^4+\cancel{2\cdot n^2\cdot n'\cdot\zeta}-\cancel{n^2\cdot n'^2}+\cancel{n^4}-\cancel{2\cdot n^2\cdot n'\cdot\zeta}+n'^2\cdot\zeta^2}{\left(n^2-n'\cdot\zeta\right)^2}=$$

$$=n^2\cdot\zeta^2\cdot\frac{n'^4-2\cdot n'^3\cdot\zeta+n'^2\cdot\zeta^2}{\left(n^2-n'\cdot\zeta\right)^2}=n^2\cdot n'^2\cdot\zeta^2\cdot\frac{n'^2-2\cdot n'\cdot\zeta+\zeta^2}{\left(n^2-n'\cdot\zeta\right)^2}=$$

$$=n^2\cdot n'^2\cdot\zeta^2\cdot\frac{(n'-\zeta)^2}{\left(n^2-n'\cdot\zeta\right)^2},$$

$$\overline{q}'=\pm n\cdot n'\cdot\zeta\cdot\frac{n'-\zeta}{n^2-n'\cdot\zeta}. \qquad (48)$$

Как следует из (27), для преломляющей поверхности всегда должно выполняться условие $\overline{q}'>0$. Поэтому очень важно правильно выбрать знак в правой части выражения (48). Для этого вспомним, что $\zeta=n\cdot\cos u$, где u – угол между лучом и оптической осью. С учетом этого обстоятельства получим:

$$\overline{q}'=\pm n\cdot n'\cdot n\cdot\cos u\cdot\frac{n'-n\cdot\cos u}{n^2-n'\cdot n\cdot\cos u}=\pm n^2\cdot\cos u\cdot\frac{\frac{n'}{n}-\cos u}{\frac{n}{n'}-\cos u},$$

или

$$\overline{q}' = \pm n^2 \cdot cos\,u \cdot \frac{e - \cos u}{\frac{1}{e} - \cos u} \ . \qquad (49)$$

Рассмотрим два случая:

а) пусть $n' > n$, тогда $e = \frac{n'}{n} > 1$ и $\left(e - cos\,u > 0\right)$ для любых u.

Из аналитической геометрии известно, что для гиперболоида ($e > 1$)

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad tg\,\alpha = \frac{b}{a},$$

где a и b – полуоси гиперболоида, α – угол наклона асимптоты. Тогда:

$$e = \sqrt{1 + tg^2\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

и $$\frac{1}{e} - \cos u = \cos\alpha - \cos u = -2 \cdot \sin\frac{\alpha + u}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - u}{2},$$

Очевидно, что $u < \alpha$, в противном случае луч никогда не пересечет поверхность. Поэтому:

$$\frac{1}{e} - \cos u < 0 \ \text{ для } \ 0 \le u < \alpha \ .$$

Значит, чтобы выполнилось условие $\overline{q}' > 0$, необходимо в правой части выражения (48) выбрать знак минус, то есть

$$\overline{q}' = -n^2 \cdot cos\,u \cdot \frac{e - \cos u}{\frac{1}{e} - \cos u}.$$

б) пусть $n' < n$, тогда $e = \frac{n'}{n} < 1$ и $\left(\frac{1}{e} - \cos u > 0\right)$ для любых u.

Из треугольника MOF_1 (рис. 13) с учетом свойств эллипса можно записать:

$$\cos u_{\max} = \sin\alpha = \frac{c}{a} = e = \frac{n'}{n}.$$

Запишем закон преломления для луча, падающего в точку М: $n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i' = n'$ – для полного внутреннего отражения, отсюда $\sin i = \frac{n'}{n}$, то есть $\alpha = i$ – угол полного внутреннего отражения. Это зна-

чит, что $u_{\max}$ – предельный угол падения луча на поверхность, после которого начинается полное внутреннее отражение. Далее находим:

$$e-\cos u=\cos u_{\max}-\cos u=-2\cdot\sin\frac{u_{\max}+u}{2}\cdot\sin\frac{u_{\max}-u}{2}<0$$

для $0\le u<u_{\max}$. Таким образом, для $\overline{q}'$ получаем такое же выражение, как и в случае **а)**:

$$\overline{q}'=-n\cdot n'\cdot\zeta\cdot\frac{n'-\zeta}{n^2-n'\cdot\zeta}=n\cdot n'\cdot\zeta\cdot\frac{\zeta-n'}{n^2-n'\cdot\zeta}. \qquad (50)$$

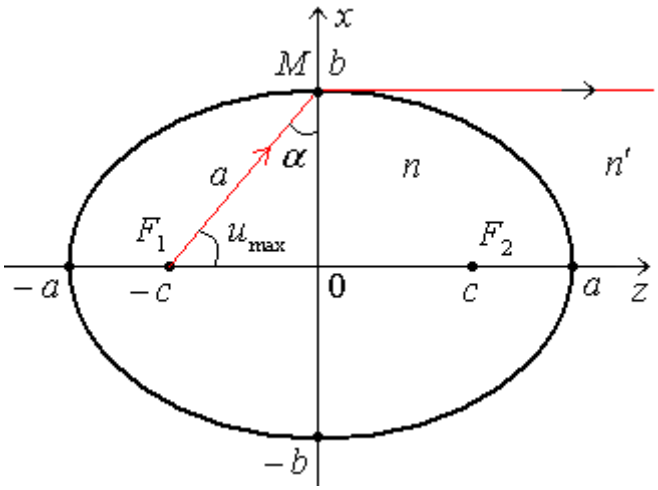


Рис. 13. Эллипсоид. Граничные условия

Далее находим:

$$\overline{\psi}=\frac{\overline{q}'-\overline{q}}{\zeta^2\cdot\overline{R}}=\frac{1}{\zeta^2}\cdot\left(n\cdot n'\cdot\zeta\cdot\frac{\zeta-n'}{n^2-n'\cdot\zeta}-n\cdot\zeta\right)\cdot\frac{(n^2-n'\cdot\zeta)^2}{(n^2-2\cdot n'\cdot\zeta+n'^2)\cdot n^2}=$$

$$=\frac{n\cdot\zeta}{\zeta^2}\cdot\left(n'\cdot\frac{\zeta-n'}{n^2-n'\cdot\zeta}-1\right)\cdot\frac{(n^2-n'\cdot\zeta)^2}{(n^2-2\cdot n'\cdot\zeta+n'^2)\cdot n^2}=$$

$$=\frac{1}{n\cdot\zeta}\cdot\frac{n'\cdot\zeta-n'^2-n^2+n'\cdot\zeta}{\cancel{n^2-n'\cdot\zeta}}\cdot\frac{(n^2-n'\cdot\zeta)^{\cancel{2}}}{n^2-2\cdot n'\cdot\zeta+n'^2}=$$

$$=\frac{n^2-n'\cdot\zeta}{n\cdot\zeta}\cdot\frac{-(n^2-2\cdot n'\cdot\zeta+n'^2)}{n^2-2\cdot n'\cdot\zeta+n'^2}=\frac{n'\cdot\zeta-n^2}{n\cdot\zeta},$$

$$\overline{\psi}=\frac{n'\cdot\zeta-n^2}{n\cdot\zeta}=-\frac{n^2-n'\cdot\zeta}{n\cdot\zeta}. \qquad (51)$$

Далее воспользуемся выражениями:

$$s' = -\frac{B - A \cdot s}{D - C \cdot s} \ . \qquad (28)$$

где:

$$B - A \cdot s = \overline{\psi} \cdot \overline{t} \cdot (z - s) - s \ , \qquad (36)$$

$$D - s \cdot C = 1 - B \cdot \overline{\psi} \cdot (z - s) \ . \qquad (39)$$

Так как

$$s = \frac{1}{b \cdot (1 - e)} = \frac{1}{b \cdot \left(1 - \frac{n'}{n}\right)} = \frac{n}{b \cdot (n - n')} \ , \qquad (52)$$

то с учетом (45) получим:

$$z - s = \frac{n^2 \cdot (n - \zeta)}{b \cdot (n - n') \cdot (n^2 - n' \cdot \zeta)} - \frac{n}{b \cdot (n - n')} =$$

$$= \frac{n}{b \cdot (n - n')} \cdot \left[\frac{n \cdot (n - \zeta)}{n^2 - n' \cdot \zeta} - 1\right] = \frac{n}{b \cdot (n - n')} \cdot \frac{n^2 - n \cdot \zeta - n^2 + n' \cdot \zeta}{n^2 - n' \cdot \zeta} =$$

$$= -\frac{n \cdot \zeta}{b \cdot (n - n')} \cdot \frac{n - n'}{n^2 - n' \cdot \zeta} = -\frac{n \cdot \zeta}{b \cdot (n^2 - n' \cdot \zeta)} \text{ , или}$$

$$z - s = -\frac{n \cdot \zeta}{b \cdot (n^2 - n' \cdot \zeta)} \ . \qquad (53)$$

Подставим (52) и (53) в (36):

$$B - A \cdot s = -\frac{\cancel{n^2 - n' \cdot \zeta}}{\cancel{n \cdot \zeta}} \cdot \frac{(n^2 - n' \cdot \zeta) - n' \cdot (n - n')}{(n - n') \cdot \cancel{(n^2 - n' \cdot \zeta)}} \cdot n \cdot \frac{\cancel{-n \cdot \zeta}}{b \cdot (n^2 - n' \cdot \zeta)} - \frac{n}{b \cdot (n - n')} =$$

$$= \frac{n}{b \cdot (n - n')} \left[\frac{n^2 - n' \cdot \zeta - n' \cdot (n - n')}{n^2 - n' \cdot \zeta} - 1\right] =$$

$$= \frac{n}{b \cdot (n - n')} \cdot \frac{\cancel{n^2} - \cancel{n' \cdot \zeta} - n' \cdot (n - n') - \cancel{n^2} + \cancel{n' \cdot \zeta}}{n^2 - n' \cdot \zeta} =$$

$$= -\frac{n \cdot n' \cdot (n - n')}{b \cdot (n - n') \cdot (n^2 - n' \cdot \zeta)} = -\frac{n \cdot n'}{b \cdot (n^2 - n' \cdot \zeta)} \text{ , или}$$

$$B - A \cdot s = -\frac{n \cdot n'}{b \cdot (n^2 - n' \cdot \zeta)} \ . \qquad (54)$$

Далее из (39) с учетом полученных результатов находим:

$$D - C \cdot s = 1 - B \cdot \overline{\psi} \cdot (z - s) = 1 - B \cdot \frac{-(n^2 - n' \cdot \zeta)}{n \cdot \zeta} \cdot \frac{-n \cdot \zeta}{B \cdot (n^2 - n' \cdot \zeta)} = 0 . \quad (55)$$

Подставим (54) и (55) в (28) и получим:

$$s' = -\frac{B - A \cdot s}{D - C \cdot s} = +\infty \ . \quad (56)$$

Таким образом, если гомоцентрический пучок лучей сходится в точке, расположенной на расстоянии $s = \frac{1}{b \cdot (1 - e)}$ от вершины поверхности, то после преломления поверхностью лучи распространяются параллельно оптической оси.

В порядке проверки можно рассчитать оптический направляющий косинус ζ' преломленного луча относительно оси $o\,z$:

$$\zeta' = \zeta \cdot \left[1 + \overline{\psi} \cdot (1 + C \cdot b \cdot z)\right] =$$

$$= \zeta \cdot \left\{1 - \frac{n^2 - n' \cdot \zeta}{n \cdot \zeta} \cdot \left[1 + C \cdot \frac{n^2 \cdot (n - \zeta)}{(n - n') \cdot (n^2 - n' \cdot \zeta)}\right]\right\} =$$

$$= \zeta \cdot \left\{1 - \frac{n^2 - n' \cdot \zeta}{n \cdot \zeta} \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{n'^2}{n^2} - 1\right) \cdot n^2 \cdot (n - \zeta)}{(n - n') \cdot (n^2 - n' \cdot \zeta)}\right]\right\} =$$

$$= \zeta \cdot \left\{1 - \frac{n^2 - n' \cdot \zeta}{n \cdot \zeta} \cdot \left[1 + \frac{(n'^2 - n^2) \cdot (n - \zeta)}{(n - n') \cdot (n^2 - n' \cdot \zeta)}\right]\right\}, \text{ или}$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = 1 - \frac{n^2 - n' \cdot \zeta}{n \cdot \zeta} \cdot \left[1 - \frac{\cancel{(n' - n)} \cdot (n' + n) \cdot (n - \zeta)}{\cancel{(n - n')} \cdot (n^2 - n' \cdot \zeta)}\right] =$$

$$= 1 - \frac{\cancel{n^2 - n' \cdot \zeta}}{n \cdot \zeta} \cdot \frac{\cancel{n^2} - \cancel{n' \cdot \zeta} - \cancel{n^2} - n' \cdot n + n \cdot \zeta + \cancel{n' \cdot \zeta}}{\cancel{n^2 - n' \cdot \zeta}} =$$

$$= 1 - \frac{n \cdot \zeta - n' \cdot n}{n \cdot \zeta} = \frac{\cancel{n \cdot \zeta} - \cancel{n \cdot \zeta} + n' \cdot n}{n \cdot \zeta} = \frac{n'}{\zeta} \ , \quad (57)$$

то есть $\zeta' = n'$, а это и означает, что любой луч рассматриваемого гомоцентрического пучка после преломления поверхностью распространяется параллельно оптической оси.

Рассмотрим несколько случаев.

8.1.2.1.1. Декартовые преломляющие поверхности с $e = \dfrac{n_2}{n_1} > 1$

а) $n_2 > n_1$ и $r > 0$.

В этом случае $s = \dfrac{r}{1-e} < 0$. Ход луча изображен на рис. 14. Это свойство можно использовать для конструирования линзы, если в качестве второй поверхности выбрать плоскость.

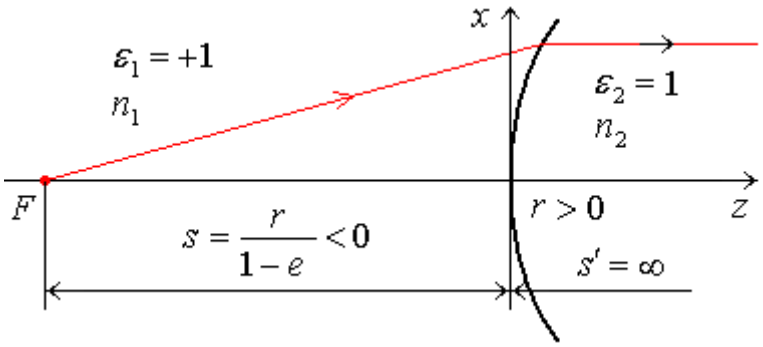


Рис. 14. Преломление на гиперболоиде: $n_2 > n_1$, $e = \dfrac{n_2}{n_1} > 1$, $r > 0$.

Для линзы, расположенной в воздухе (рис. 15), будем иметь: $e_1 = \dfrac{n_2}{n_1} = n$, где n – показатель преломления стекла линзы. Такая линза преобразует сферическую волну в плоскую волну.

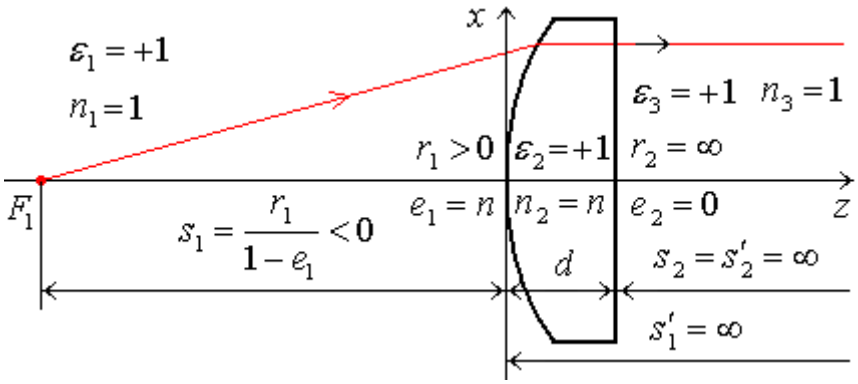


Рис. 15. Плосковыпуклая асферическая линза

Первая поверхность – гиперболоид, вторая – плоскость.

б) $n_2 > n_1$ и $r < 0$.

Тогда $s' > 0$ Ход луча изображен на рис. 16.

Используя это свойство, можно сконструировать отрицательную асферическую линзу (рис. 17), которая преобразует сферическую сходящуюся волну – в плоскую. Первая поверхность линзы – гиперболоид с $e_1 = \frac{n_2}{n_1} = n$ (для линзы в воздухе), вторая поверхность – плоскость.

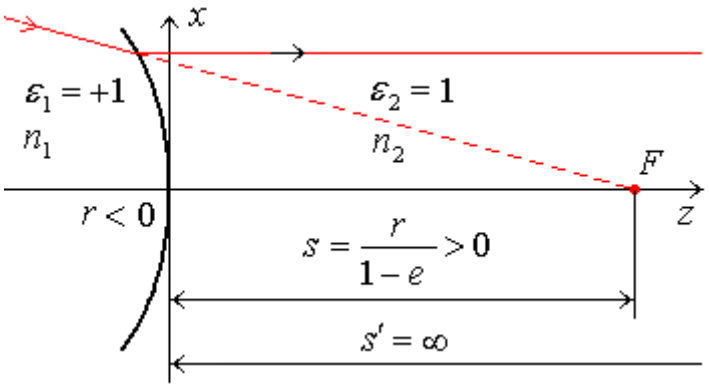


Рис. 16. Преломление на гиперболоиде: $n_2 > n,\ e = \frac{n_2}{n_1} > 1,\ r < 0$

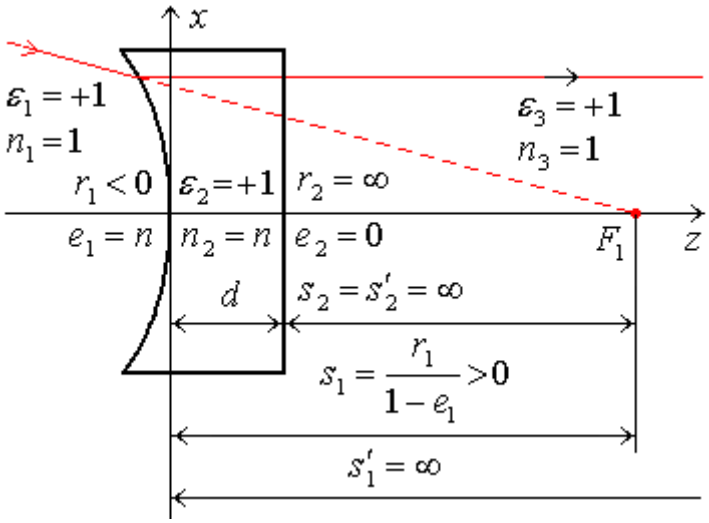


Рис. 17. Плосковогнутая асферическая линза

8.1.2.1.2. Декартовые преломляющие поверхности с $e = \frac{n_2}{n_1} < 1$

а) $n_2 < n_1$ и $r > 0$,

тогда $s = \frac{r}{1-e} > 0$. Соответствующий ход луча изображен на рис. 18.

Используя это свойство, можно сконструировать отрицательную асферическую линзу (рис. 19), которая преобразует сферическую схо-

дящуюся волну – в плоскую. Первая поверхность линзы – сфера, вторая – эллипсоид, фокус F_2 которого совпадает с центром кривизны C_1 сферы, причем $e_2 = \frac{n_3}{n_2} = \frac{1}{n}$. В этом случае падающий гомоцентрический пучок проходит через сферу без преломления и преобразуется второй поверхностью в пучок параллельных лучей.

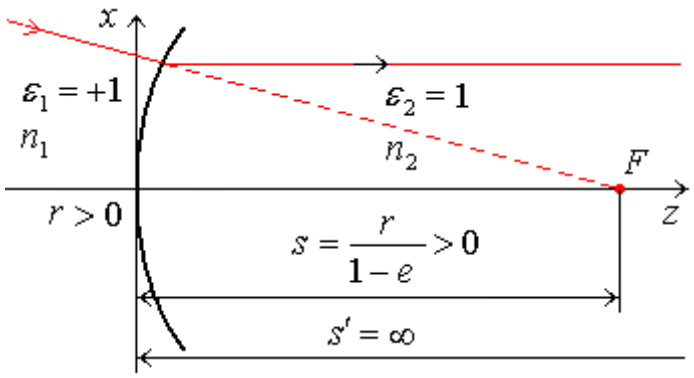


Рис. 18. Преломление на эллипсоиде: $n_2 < n_1,\ e = \frac{n_2}{n_1} < 1,\ r > 0$

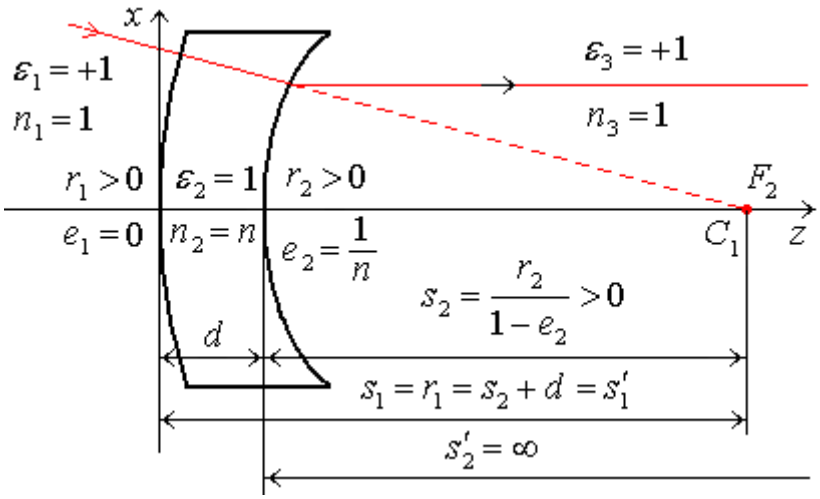


Рис. 19. Отрицательный асферический мениск

б) $n_2 < n_1$ и $r < 0$,

тогда $s = \frac{r}{1-e} < 0$.

Соответствующий ход луча изображен на рис. 20.

Используя это свойство, можно сконструировать положительную асферическую линзу (рис. 21), которая преобразует сферическую расходящуюся волну – в плоскую. Первая поверхность линзы – сфера, вто-

рая – эллипсоид, фокус F_2 которого совпадает с центром кривизны C_1 сферы и $e_2 = \frac{n_3}{n_2} = \frac{1}{n}$. В этом случае падающий гомоцентрический пучок проходит через сферу без преломления и преобразуется второй поверхностью в пучок параллельных лучей.

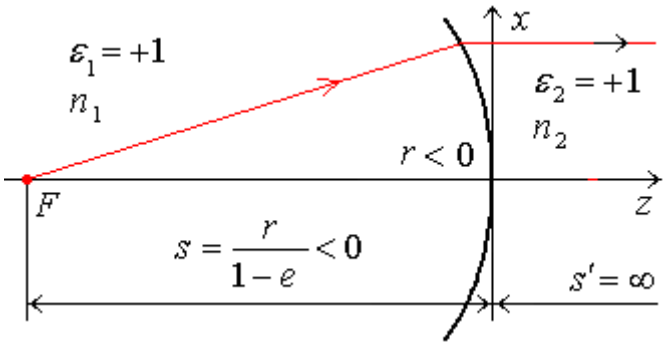


Рис. 20. Преломление на эллипсоиде: $n_2 < n_1,\ e = \frac{n_2}{n_1} < 1,\ r < 0$

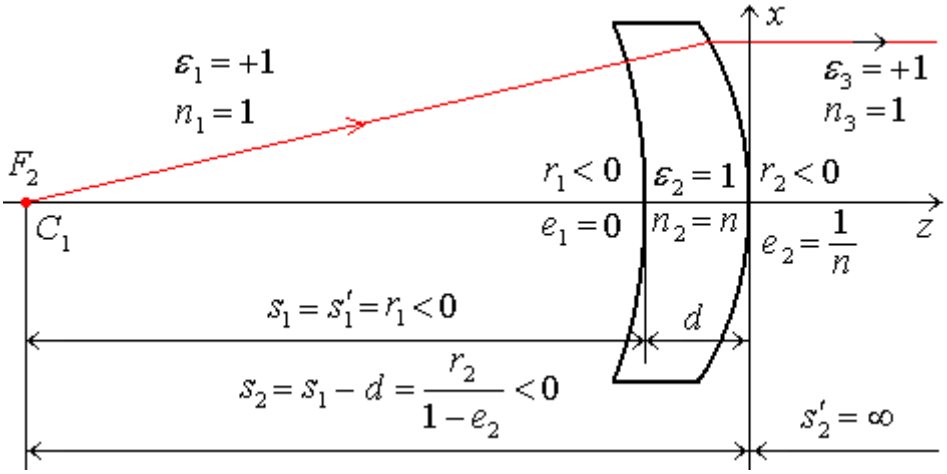


Рис. 21. Положительный асферический мениск.

8.1.2.2. Декартовые преломляющие поверхности с $e = \frac{n_1}{n_2}$

Рассмотрим второй случай преломления луча на поверхности вращения второго порядка. Луч распространяется параллельно оптической оси и падает на поверхность с $e = \frac{n_1}{n_2}$. Заданы начальные данные луча:

$$\vec{P},\ \vec{S} = 0,\ \zeta = n, \tag{58}$$

и параметры поверхности:

$$e = \frac{n_1}{n_2},\ b. \tag{59}$$

Далее из (27) находим:

$$\overline{q}^{\,2} = (b \cdot \vec{P} \cdot 0 - \zeta^{\,2})^{\,2} - b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2} \cdot (0 - C \cdot \zeta^{\,2}) = n^{\,4} + n^{\,2} \cdot b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2} \cdot (e^2 - 1)\ ,$$

или

$$\overline{q}^{\,2} = n^{\,2} \cdot \left[n^{\,2} + b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2} \cdot (e^{\,2} - 1) \right]\ , \tag{60}$$

$$z = -\frac{\overline{q} + b \cdot \vec{P} \cdot 0 - \zeta^2}{b \cdot (0 - C \cdot \zeta^2)} = \frac{\overline{q} - n^2}{b \cdot n^2 \cdot (e^2 - 1)}\ , \tag{61}$$

$$\overline{t} = 1 + \cancel{b} \cdot \frac{\overline{q} - n^{\,2}}{\cancel{b} \cdot n^{\,2} \cdot (e^{\,2} - 1)} \cdot (1 + e^{\,2} - 1) = 1 + e^{\,2} \cdot \frac{\overline{q} - n^{\,2}}{n^{\,2} \cdot (e^{\,2} - 1)}\ . \tag{62}$$

Из (21) с учетом (5.33) и (58) следует:

$$\overline{R} = \frac{b^{\,2}}{\zeta^{\,2}} \cdot R = \frac{b^{\,2}}{\zeta^{\,2}} \cdot \left[(\vec{P} + z\,\vec{S})^{\,2} + \zeta^{\,2} \cdot (t - z)^{\,2} \right] = \frac{b^{\,2}}{n^2} \cdot \left[\vec{P}^{\,2} + n^{\,2} \cdot \left(\frac{\overline{t}}{b} - z \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{b^{\,2}}{n^{\,2}} \cdot \frac{1}{b^{\,2}} \cdot \left[b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2} + n^{\,2} \cdot (\overline{t} - b \cdot z)^2 \right]\ . \tag{63}$$

Найдем с учетом (61) и (62):

$$\overline{t} - b \cdot z = 1 + e^{\,2} \cdot \frac{\overline{q} - n^{\,2}}{n^{\,2} \cdot (e^{\,2} - 1)} - \cancel{b} \cdot \frac{\overline{q} - n^{\,2}}{\cancel{b} \cdot n^{\,2} \cdot (e^{\,2} - 1)} =$$

$$= 1 + \frac{\overline{q} - n^{\,2}}{n^{\,2} \cdot \cancel{(e^{\,2} - 1)}} \cdot \cancel{(e^{\,2} - 1)} = 1 + \frac{\overline{q} - n^{\,2}}{n^{\,2}} = \frac{n^{\,2} + \overline{q} - n^{\,2}}{n^{\,2}} = \frac{\overline{q}}{n^{\,2}}\ . \tag{64}$$

Подставим (64) в (63):

$$\overline{R} = \frac{1}{n^{\,2}} \cdot \left[b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2} + n^{\,2} \cdot \frac{\overline{q}^{\,2}}{n^4} \right] = \frac{1}{n^2} \cdot \left[b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2} + \frac{1}{n^2} \cdot \overline{q}^{\,2} \right]\ . \tag{65}$$

Подставим (60) в (65):

$$\overline{R} = \frac{1}{n^{\,2}} \cdot \left\{ b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2} + \frac{1}{\cancel{n^2}} \cdot \cancel{n^2} \cdot \left[n^{\,2} + b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2} \cdot (e^{\,2} - 1) \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{n^{\,2}} \cdot \left[\cancel{b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2}} + n^{\,2} + b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2} \cdot e^{\,2} - \cancel{b^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2}} \right] = 1 + \frac{e^{\,2} \cdot B^{\,2} \cdot \vec{P}^{\,2}}{n^{\,2}}\ ,\ \text{или}$$

$$\overline{R} = 1 + \frac{e^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2}{n^2} \ . \qquad (66)$$

Далее находим из (27) с учетом (58), (59), (60) и (66):

$$\overline{q}'^2 = (n'^2 - n^2) \cdot \zeta^2 \cdot \left(1 + \frac{e^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2}{n^2}\right) + n^2 \cdot \left[n^2 + b^2 \cdot \vec{P}^2 \cdot (e^2 - 1)\right] =$$

$$= (n'^2 - n^2) \cdot (n^2 + e^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2) + n^2 \cdot (n^2 + b^2 \cdot \vec{P}^2 \cdot e^2 - b^2 \cdot \vec{P}^2) =$$

$$= n'^2 \cdot (n^2 + e^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2) - \cancel{n^2 \cdot (n^2 + e^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2)} + \cancel{n^2 \cdot (n^2 + e^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2)} - n^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2 =$$

$$= n'^2 \cdot n^2 + n'^2 \cdot e^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2 - n^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2 =$$

$$= n'^2 \cdot n^2 + n'^2 \cdot \frac{n^2}{n'^2} \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2 - n^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2 = n'^2 \cdot n^2 \ ,$$

$$\overline{q}'^2 = n'^2 \cdot n^2 \text{, или}$$

$$\overline{q}' = n' \cdot n = \frac{n}{e} \cdot n = \frac{n^2}{e} \text{ , то есть}$$

$$\overline{q}' = \frac{n^2}{e} \ . \qquad (67)$$

Далее из (27) с учетом (66) и (67) находим:

$$\overline{\psi} = \frac{\overline{q}' - \overline{q}}{\zeta^2 \cdot \overline{R}} = \frac{\dfrac{n^2}{e} - \overline{q}}{n^2 \cdot \left(1 + \dfrac{e^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2}{n^2}\right)} = \frac{n^2 - e \cdot \overline{q}}{e \cdot (n^2 + e^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2)} \ . \qquad (68)$$

Преобразуем выражение (5.61):

$$s' = \frac{1}{\psi} + t \ . \qquad (5.61)$$

умножим (5.61) на b:

$$b \cdot s' = \frac{b}{\psi} + b \cdot t = \frac{1}{\psi / b} + b \cdot t = \frac{1}{\overline{\psi}} + \overline{t} \ . \qquad (69)$$

Подставим (62) и (68) в (69):

$$b \cdot s' = \frac{e \cdot (n^2 + e^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2)}{n^2 - e \cdot \overline{q}} + 1 + \frac{e^2 \cdot (\overline{q} - n^2)}{n^2 \cdot (e^2 - 1)} =$$

$$= \frac{e \cdot (n^2 + e^2 \cdot b^2 \cdot \vec{P}^2)}{n^2 - e \cdot \overline{q}} + \frac{\cancel{n^2 \cdot e^2} - n^2 + e^2 \cdot \overline{q} - \cancel{e^2 \cdot n^2}}{n^2 \cdot (e^2 - 1)} =$$

$$=\frac{e\cdot(n^2+e^2\cdot b^2\cdot\vec{P}^2)}{n^2-e\cdot\overline{q}}+\frac{e^2\cdot\overline{q}-n^2}{n^2\cdot(e^2-1)}=$$

$$=\frac{e\cdot n^2\cdot(e^2-1)\cdot(n^2+e^2\cdot b^2\cdot\vec{P}^2)+(e^2\cdot\overline{q}-n^2)\cdot(n^2-e\cdot\overline{q})}{n^2\cdot(n^2-e\cdot\overline{q})\cdot(e^2-1)}=$$

$$=\frac{e\cdot n^2\cdot(e^2-1)\cdot n^2+e\cdot n^2\cdot(e^2-1)\cdot e^2\cdot b^2\cdot\vec{P}^2+(e^2\cdot\overline{q}-n^2)\cdot(n^2-e\cdot\overline{q})}{n^2\cdot(e^2-1)\cdot(n^2-e\cdot\overline{q})}=$$

$$=\frac{e\cdot n^4\cdot(e^2-1)+e^3\cdot n^2\cdot(e^2-1)\cdot b^2\cdot\vec{P}^2+(e^2\cdot\overline{q}-n^2)\cdot(n^2-e\cdot\overline{q})}{n^2\cdot(e^2-1)\cdot(n^2-e\cdot\overline{q})}\ . \qquad (70)$$

Из (60) находим:

$$n^2\cdot(e^2-1)\cdot b^2\cdot\vec{P}^2=\overline{q}^2-n^4, \qquad (71)$$

подставим (71) в (70):

$$b\cdot s'=\frac{\cancel{e^3\cdot n^4}-e\cdot n^4+\cancel{e^3\cdot\overline{q}^2}-\cancel{e^3\cdot n^4}+e^2\cdot n^2\cdot\overline{q}-n^4-\cancel{e^3\cdot\overline{q}^2}+e\cdot n^2\cdot\overline{q}}{n^2\cdot(e^2-1)\cdot(n^2-e\cdot\overline{q})}=$$

$$=\frac{-n^4\cdot(e+1)+n^2\cdot e\cdot\overline{q}\cdot(e+1)}{n^2\cdot(e^2-1)\cdot(n^2-e\cdot\overline{q})}=\frac{n^2\cdot\cancel{(e+1)}\cdot\cancel{(e\cdot\overline{q}-n^2)}}{-n^2\cdot\cancel{(e+1)}\cdot(e-1)\cdot\cancel{(e\cdot\overline{q}-n^2)}}=-\frac{1}{e-1}=\frac{1}{1-e}.$$

Итак:

$$b\cdot s'=\frac{1}{1-e}\ . \qquad (72)$$

Таким образом, пучок лучей, параллельных оптической оси, падает на поверхность второго порядка с $e=\frac{n}{n'}$ и после преломления преобразуется в гомоцентрический пучок, сходящийся в точке, расположенной на расстоянии $s'=\frac{r}{1-e}$ от вершины поверхности.

Если, как и в разделе 9.1.2.1, рассмотреть четыре случая, то получим те же самые результаты, но в обратном ходе.

а) $n_2<n_1$, $r<0$**,** тогда $e=\frac{n_1}{n_2}>1$, $s'>0$ (рис. 22).

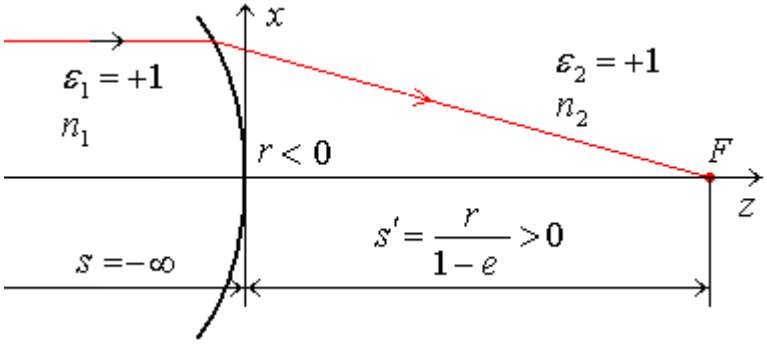
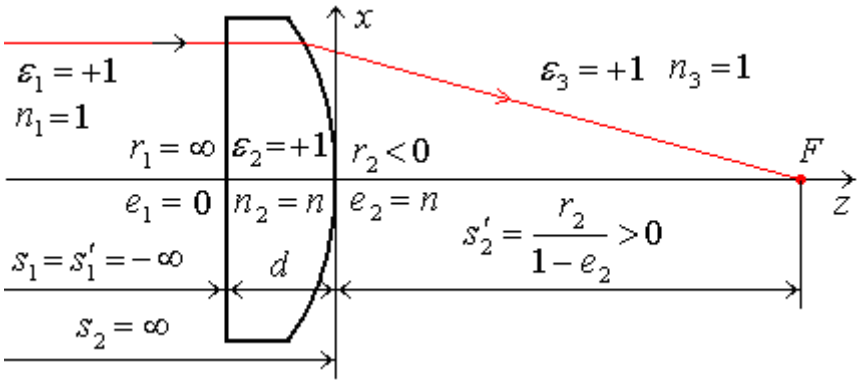


Рис. 22,а. $e = \frac{n_1}{n_2} > 1$, $n_2 < n_1$, $r < 0$ *. Преломление на гиперболоиде*



ис. 22,б. Плосковыпуклая асферическая линза

б) $n_2 < n_1$, $r > 0$**,** тогда $e = \frac{n_1}{n_2} > 1$, $s' < 0$ (рис. 23,а).

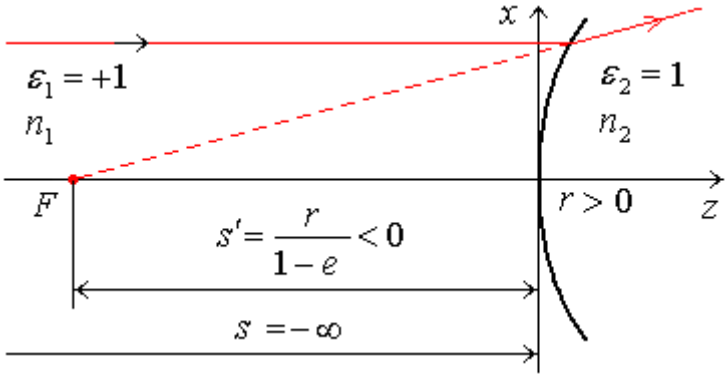


Рис. 23,а. $e = \frac{n_1}{n_2} > 1$, $n_2 < n_1$, $r > 0$. *Преломление на гиперболоиде*

в) $n_2 > n_1$, $r < 0$**,** тогда $e = \frac{n_1}{n_2} < 1$, $s' < 0$ (рис. 24,а).

г) $n_2 > n_1$, $r > 0$, тогда $e = \frac{n_1}{n_2} < 1$, $s' > 0$ (рис. 25,а).

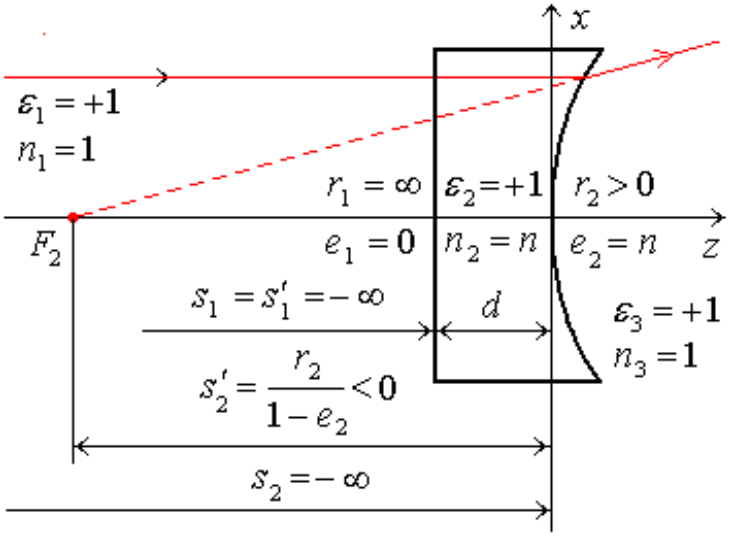


Рис. 23, б. Плосковогнутая асферическая линза

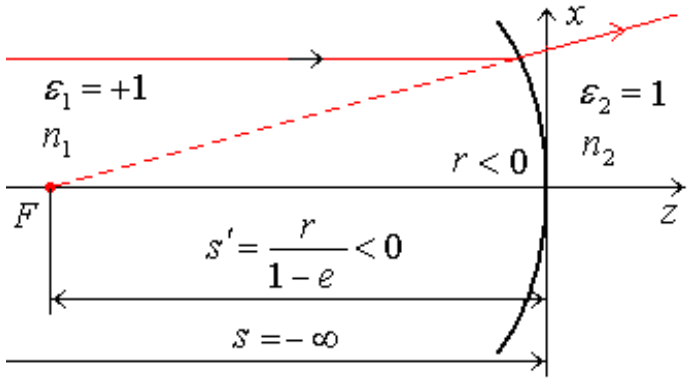


Рис. 24,а. $e = \frac{n_1}{n_2} < 1$, $n_2 > n_1$, $r < 0$. *Преломление на эллипсоиде*

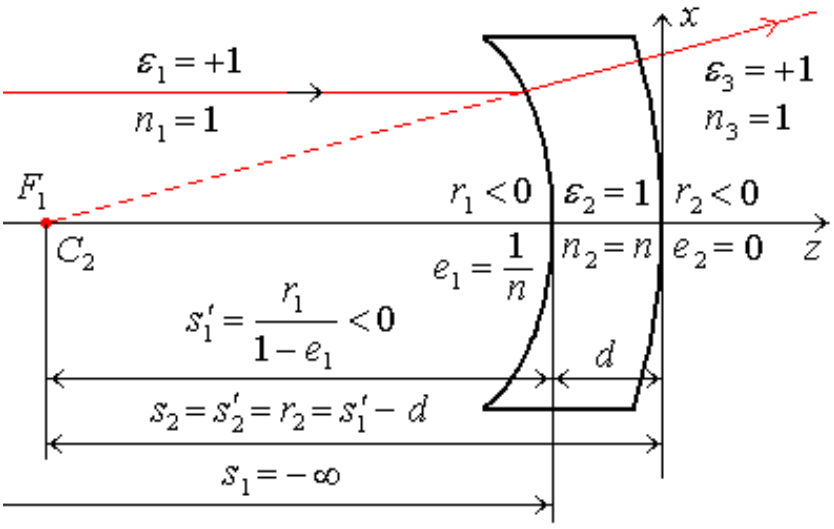


Рис. 24,б. Отрицательный асферический мениск

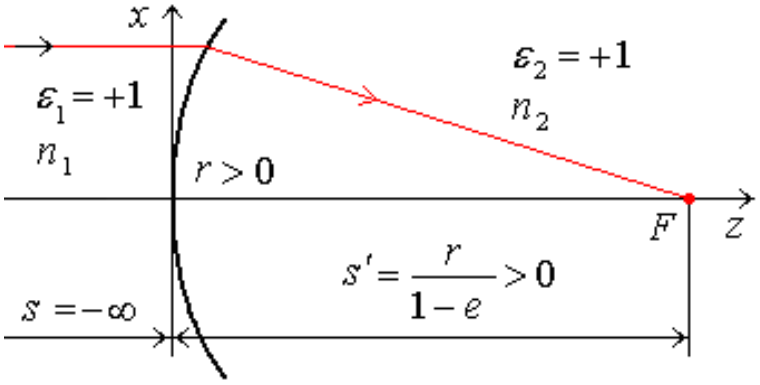


Рис. 25,а. $e = \frac{n_1}{n_2} < 1$, $n_2 > n$, $r > 0$. *Преломление на эллипсоиде*

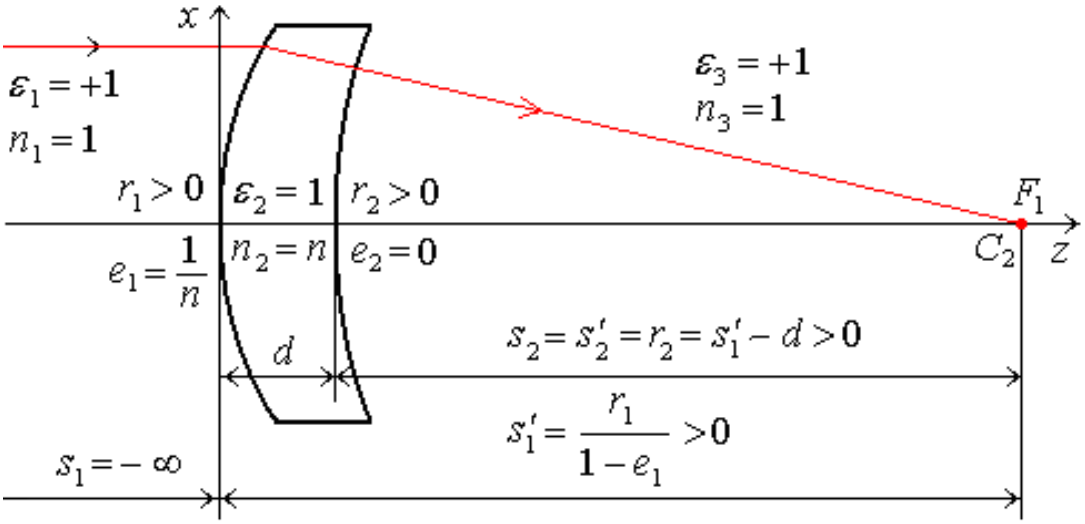


Рис. 25,б. Положительный асферический мениск

8.2. Отражение от плоского зеркала

Для плоского зеркала $b = 0$, $e = 0$, $c = -1$, $n' = n$, тогда согласно (27) получим:

$\overline{q}^{\,2} = \zeta^{\,4}$, то есть $\overline{q} = \zeta^{\,2}$,

$z = 0$,

$\overline{t} = 1$,

$\overline{R} = 1$,

$\overline{q}' = -\overline{q} = -\zeta^{\,2}$,

$$\overline{\psi} = -\frac{2 \cdot \zeta^2}{\zeta^2} = -2,$$

$A = 1 + \overline{\psi} \cdot \overline{t} = 1 - 2 = -1$, $\qquad B = \overline{\psi} \cdot \overline{t} \cdot z = 0$,

$C = -B \cdot \overline{\psi} = 0$, $\qquad D = 1 - B \cdot \overline{\psi} \cdot z = 1$,

$$\begin{cases} \vec{P}' = A \cdot \vec{P} + B \cdot \vec{S} = -\vec{P}, \\ \vec{S}' = C \cdot \vec{P} + D \cdot \vec{S} = \vec{S}, \\ \zeta' = \zeta \cdot (1-2) = -\zeta, \end{cases} \tag{73}$$

$$s' = -\frac{B - A \cdot s}{D - C \cdot s} = -\frac{0+s}{1-0} = -s. \tag{74}$$

Поскольку

$$\vec{P}' = \zeta' \cdot \vec{A}' = -\zeta \cdot \vec{A}', \qquad \vec{P} = \zeta \cdot \vec{A},$$

то из (73) следует:

$$-\zeta \cdot \vec{A}' = -\zeta \cdot \vec{A} \text{ , то есть } \vec{A}' = \vec{A}.$$

Таким образом, плоская отражающая поверхность дает резкое изображение каждой точки оси. Поскольку любую нормаль к плоскости можно рассматривать как ось, плоское зеркало дает резкое изображение любой точки пространства. Отрицательный знак в формуле (74) показывает, что если предмет находится перед зеркалом, то изображение находится за зеркалом, и наоборот.

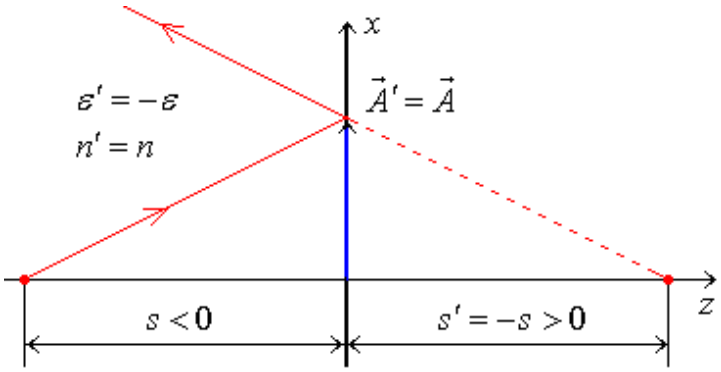


Рис. 26. Отражение лучей от плоского зеркала

8.3. Преломление лучей плоской поверхностью

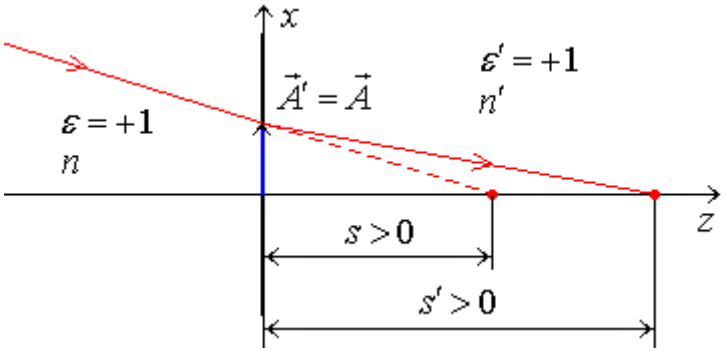


Рис. 27. Преломление луча на плоской поверхности

Для плоской преломляющей поверхности $b=0$, $e=0$, $c=-1$, тогда из (27) находим:

$\overline{q}^{\,2}=\zeta^{4}$, то есть $\overline{q}=\zeta^{2}$,

$z=0$,

$\overline{t}=1$,

$\overline{R}=1$,

$$\overline{q}'^{\,2}=(n'^{\,2}-n^{2})\cdot\zeta^{2}+\zeta^{4}=\zeta^{4}\cdot\left(\frac{n'^{\,2}-n^{2}}{\zeta^{2}}+1\right),\quad \text{или}$$

$$\overline{q}'=\zeta^{2}\cdot\sqrt{\frac{n'^{\,2}-n^{2}}{\zeta^{2}}+1},$$

$$\overline{\psi}=\frac{\zeta^{2}\cdot\sqrt{\frac{n'^{\,2}-n^{2}}{\zeta^{2}}+1}-\zeta^{2}}{\zeta^{2}}=\sqrt{\frac{n'^{\,2}-n^{2}}{\zeta^{2}}+1}-1, \tag{75}$$

$$A=1+\overline{\psi}\cdot\overline{t}=1+\sqrt{\frac{n'^{\,2}-n^{2}}{\zeta^{2}}+1}-1=\sqrt{\frac{n'^{\,2}-n^{2}}{\zeta^{2}}+1}=1+\overline{\psi},$$

$B=\overline{\psi}\cdot\overline{t}\cdot z=0$,

$C=-B\cdot\overline{\psi}=0$,

$D=1-B\cdot\overline{\psi}\cdot z=1$,

$$\begin{cases}\vec{P}'=A\cdot\vec{P},\\ \vec{S}'=\vec{S},\end{cases} \tag{76}$$

$$\zeta'=\zeta\cdot(1+\overline{\psi})=A\cdot\zeta. \tag{77}$$

Если на преломляющуюся поверхность падает пучок параллельных лучей, то есть $\vec{S}=const$, то для каждого преломленного луча получаем:

$$\vec{S}'=\vec{S}\ ,\quad \zeta'^{\,2}=n'^{\,2}-\vec{S}'^{\,2}=n'^{\,2}-\vec{S}^{\,2}=\text{const},$$

то есть преломленные лучи также параллельны.

$$s'=-\frac{B-A\cdot s}{D-C\cdot s}=\frac{A\cdot s}{1-0}=A\cdot s. \tag{78}$$

Из (78) следует, что s' зависит от ζ, то есть гомоцентрический пучок после преломления плоской поверхностью становится не гомоцентрическим.

Для любого A уравнение (78) выполняется, если $s=s'=0$, т. е. любая точка плоской преломляющей поверхности резко изображается сама в себя.

По определению и с учетом (77) получим:

$$\vec{P}' = \zeta' \cdot \vec{A}' = A \cdot \zeta \cdot \vec{A}' \ , \ \vec{P} = \zeta \cdot \vec{A} . \qquad (79)$$

Так как из (76) $\vec{P}' = A \cdot \vec{P}$, то с учетом (79) получим:

$$A \cdot \zeta \cdot \vec{A}' = A \cdot \zeta \cdot \vec{A} \text{ то есть } \vec{A}' = \vec{A} . \qquad (80)$$

Для параксиальных лучей $\zeta \approx n$, тогда:

$$A \approx \sqrt{\frac{n'^2 - n^2}{n^2} + 1} = \sqrt{\frac{n'^2 - n^2 + n^2}{n^2}} = \frac{n'}{n} , \qquad (81)$$

$$s' = \frac{n'}{n} \cdot s . \qquad (82)$$

8.4. Прохождение лучей через плоскопараллельную пластину, расположенную в воздухе

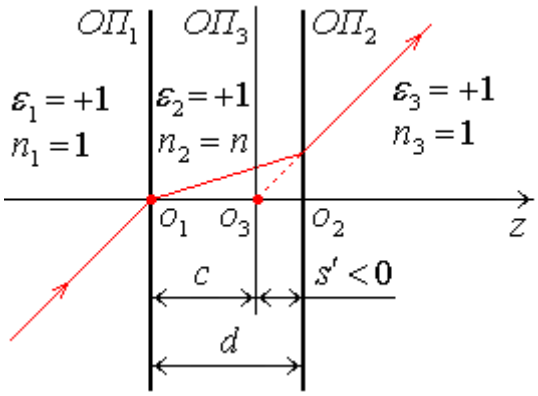


Рис. 28. Прохождение луча через плоскопараллельную пластину

O_1 – точка предмета, расположенная на первой поверхности, O_3 – изображение точки O_1 плоскопараллельной пластиной. Для пластины в воздухе запишем цепочку преобразований параметров луча:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 , \\ \vec{P}_1 = 0 , \end{array}\right\} \text{ – начальные данные луча,}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1' = S_1 , \\ \zeta_1' = A_1 \cdot \zeta_1 , \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{S}_2 = \vec{S}_1' = \vec{S}_1 , \\ \zeta_2 = \zeta_1' = A_1 \cdot \zeta_1 , \end{array}\right\}$$

$\vec{S}_2' = \vec{S}_2 = \vec{S}_1$,

$\zeta_2' = A_2 \cdot \zeta_2 = A_2 \cdot A_1 \cdot \zeta_1$,

поскольку:

$\zeta_2'^2 + \vec{S}_2'^2 = n_3^2 = 1$, то

$\zeta_2'^2 = 1 - \vec{S}_2'^2 = 1 - \vec{S}_1^2 = \zeta_1^2$, то есть

$\zeta_2' = \zeta_1$, или

$A_2 \cdot A_1 \cdot \zeta_1 = \zeta_1$, то есть (83)

$A_2 \cdot A_1 = 1$.

$\vec{P}_1 = 0$,

$\vec{P}_1' = A_1 \cdot \vec{P}_1 = 0$,

$\vec{P}_2 = \vec{P}_1' + d \cdot \vec{S}_1' = d \cdot \vec{S}_1$,

$\vec{P}_2' = A_2 \cdot \vec{P}_2 = A_2 \cdot d \cdot \vec{S}_1$,

$\vec{P}_3 = \vec{P}_2' + s' \cdot \vec{S}_2' = A_2 \cdot d \cdot \vec{S}_1 + s' \cdot \vec{S}_1 = 0$,

отсюда с учетом (83):

$$s' = -A_2 \cdot d = -\frac{d}{A_1} \quad . \tag{84}$$

Здесь A_1 и A_2 – матричные элементы соответственно первой и второй поверхности. Найдем точку пересечения преломленного пластиной луча с осью. Из рис. 28 следует:

$$c = d + s' = d - \frac{d}{A_1} = d \cdot \left(1 - \frac{1}{A_1}\right) . \tag{85}$$

Таким образом, плоскопараллельная пластина смещает изображение относительно предмета на величину

$$c = d \cdot \left(1 - \frac{1}{A_1}\right), \text{ где } A_1 = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{\zeta_1^{\,2}} + 1} \quad . \tag{86}$$

В параксиальной области $\zeta_1 \approx 1$**, поэтому** $A_1 = n$ **и**

$$c = d \cdot \frac{n-1}{n} . \tag{87}$$

8.5. Преломление луча сферой

Для сферы $e=0$, $c=-1$, $b=1/r$. Далее, из (27) находим:

$$\overline{q}^{\,2}=(b\cdot\vec{P}\cdot\vec{S}-\zeta^{\,2})^{\,2}-b^{\,2}\cdot\vec{P}^{\,2}\cdot(\vec{S}^{\,2}+\zeta^{\,2})=$$
$$=\left(b\cdot\vec{P}\cdot\vec{S}-\zeta^2\right)^2-b^2\cdot\vec{P}^2\cdot\left(\vec{S}^2+n^2-\vec{S}^2\right)=\left(b\cdot\vec{P}\cdot\vec{S}-\zeta^2\right)^2-n^2\cdot b^2\cdot\vec{P}^2,$$

или

$$\begin{aligned}
&\overline{q}^{\,2}=(b\cdot\vec{P}\cdot\vec{S}-\zeta^{\,2})^{\,2}-n^{\,2}\cdot b^{\,2}\cdot\vec{P}^{\,2},\\
&z=\frac{b\cdot\vec{P}^{\,2}}{\overline{q}-(b\cdot\vec{P}\cdot\vec{S}-\zeta^{\,2})}=-\frac{\overline{q}+(b\cdot\vec{P}\cdot\vec{S}-\zeta^{\,2})}{b\cdot(\vec{S}^{\,2}-C\cdot\zeta^{\,2})},\\
&\overline{t}=1,\\
&\overline{R}=1,\\
&\overline{q}'^{\,2}=(n'^{\,2}-n^{\,2})\cdot\zeta^{\,2}+\overline{q}^{\,2},\quad \overline{q}'>0,\\
&\overline{\psi}=\frac{\overline{q}'-\overline{q}}{\zeta^{\,2}},\\
&\left.\begin{aligned}
&\vec{P}'=(1+\overline{\psi})\cdot\vec{P}+\overline{\psi}\cdot z\cdot\vec{S},\\
&\vec{S}'=-B\cdot\overline{\psi}\cdot\vec{P}+(1-B\cdot\overline{\psi}\cdot z)\cdot\vec{S},
\end{aligned}\right\}\\
&\zeta'=\zeta\cdot\left[1+\overline{\psi}\cdot\left(1-B\cdot z\right)\right],\\
&A=1+\overline{\psi},\qquad B=\overline{\psi}\cdot z,\\
&C=-B\cdot\overline{\psi},\qquad D=1-B\cdot\overline{\psi}\cdot z,\\
&s'=-\frac{B-s\cdot A}{D-s\cdot C}.
\end{aligned}\tag{88}$$

Пусть A и A' – сопряженные точки. Для луча, выходящего из точки A, можно записать (рис. 25):

$$\begin{aligned}
&\vec{P}+s\cdot\vec{S}=0\text{, отсюда}\\
&\vec{P}^2=s^2\cdot\vec{S}^2,\\
&\vec{P}\cdot\vec{S}=-s\cdot\vec{S}^2.
\end{aligned}\tag{89}$$

Обозначим:

$$\overline{s}=b\cdot s \text{ и } \overline{s}'=b\cdot s' \tag{90}$$

и подставим (89) в (88):

$$\overline{q}^{\,2}=(\overline{s}\cdot\vec{S}^{\,2}+\zeta^{\,2})^{\,2}-n^{\,2}\cdot\overline{s}^{\,2}\cdot\vec{S}^{\,2}=\left[(n^2-\zeta^2)\cdot\overline{s}+\zeta^2\right]^2-n^2\cdot\overline{s}^{\,2}\cdot(n^2-\zeta^2),$$

или

$$\overline{q}^{\,2}=\left[n^2\cdot\overline{s}-\zeta^2\cdot(\overline{s}-1)\right]^2-n^2\cdot\overline{s}^2\cdot(n^2-\zeta^2)\ , \qquad (91\text{-}1)$$

$$z=\frac{B\cdot s^2\cdot\vec{S}^{\,2}}{\overline{q}+B\cdot s\cdot\vec{S}^{\,2}+\zeta^2}\ ,\ \text{или}$$

$$z=-\frac{\overline{q}-b\cdot s\cdot\vec{S}^{\,2}-\zeta^2}{b\cdot(n^2-\zeta^2+\zeta^2)}=-\frac{\overline{q}-b\cdot s\cdot(n^2-\zeta^2)-\zeta^2}{b\cdot n^2},\ \text{или}$$

$$z=\frac{n^2\cdot\overline{s}-\zeta^2\cdot(\overline{s}-1)-\overline{q}}{b\cdot n^2},\ \text{или}$$

$$b\cdot z=\frac{n^2\cdot\overline{s}-\zeta^2\cdot(\overline{s}-1)-\overline{q}}{n^2}, \qquad (91\text{-}2)$$

$$\overline{q}'^{\,2}=(n'^2-n^2)\cdot\zeta^2+\overline{q}^{\,2}, \qquad (91\text{-}3)$$

$$\overline{\psi}=\frac{\overline{q}'-\overline{q}}{\zeta^2}\ . \qquad (91\text{-}4)$$

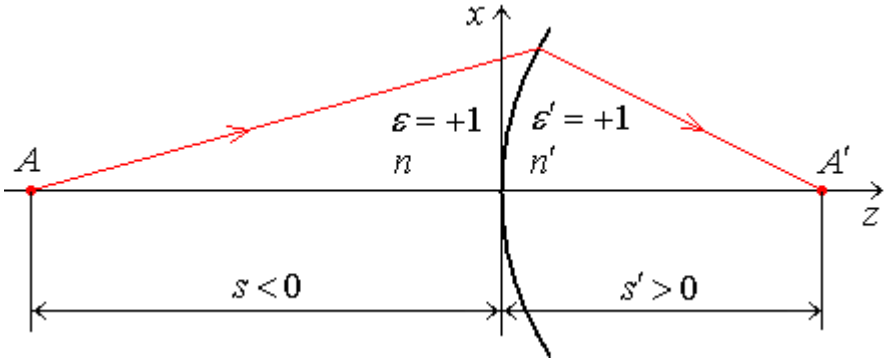


Рис. 29. Преломление меридионального луча

Подставим в (28) значения матричных элементов из (88) и с учетом обозначений (90) получим:

$$s'=-\frac{\overline{\psi}\cdot z-(1+\overline{\psi})\cdot s}{1-b\cdot\overline{\psi}\cdot z+b\cdot\overline{\psi}\cdot s}=\frac{s\cdot(1+\overline{\psi})-\overline{\psi}\cdot z}{1+b\cdot\overline{\psi}\cdot(s-z)}\ , \qquad (92)$$

или

$$s'=\frac{s+\overline{\psi}\cdot(s-z)}{1+b\cdot\overline{\psi}\cdot(s-z)}\ . \qquad (93)$$

Умножим обе части уравнения (93) на B, получим:

$$\overline{s}'=\frac{\overline{s}+\overline{\psi}\cdot(\overline{s}-b\cdot z)}{1+\overline{\psi}\cdot(\overline{s}-b\cdot z)}\ . \qquad (94)$$

Преобразуем выражение (94) с учетом (91):

$$\overline{\psi}\cdot\left(\overline{s}-b\cdot z\right)=\frac{\overline{q}'-\overline{q}}{\zeta^2}\cdot\left[\overline{s}-\frac{n^2\cdot\overline{s}-\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)-\overline{q}}{n^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2\cdot\zeta^2}\cdot\left(\overline{q}'-\overline{q}\right)\cdot\left[\cancel{n^2\cdot\overline{s}}-\cancel{n^2\cdot\overline{s}}+\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)+\overline{q}\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2\cdot\zeta^2}\cdot\left(\overline{q}'-\overline{q}\right)\cdot\left[\overline{q}+\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2\cdot\zeta^2}\cdot\left[\overline{q}\cdot\overline{q}'-\overline{q}^2+\overline{q}'\cdot\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)-\overline{q}\cdot\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2\cdot\zeta^2}\cdot\left\{\overline{q}'\cdot\left[\overline{q}+\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]-\overline{q}\cdot\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)-\right.$$

$$\left.-\left[n^2\cdot\overline{s}-\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]^2+n^2\cdot\overline{s}^2\cdot\left(n^2-\zeta^2\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{n^2\cdot\zeta^2}\cdot\left\{\overline{q}'\cdot\left[\overline{q}+\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]-\underline{\overline{q}\cdot\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)}-\cancel{n^4\cdot\overline{s}^2}+\right.$$

$$\left.+2\cdot n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}\cdot\left(\overline{s}-1\right)-\underline{\zeta^4\cdot\left(\overline{s}-1\right)^2}+\cancel{n^4\cdot\overline{s}^2}-n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{n^2\cdot\zeta^2}\cdot\left\{\overline{q}'\cdot\left[\overline{q}+\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]-\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\cdot\left[\overline{q}+\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\underline{2\cdot n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}^2}-2\cdot n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}-\underline{n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{n^2\cdot\zeta^2}\cdot\left\{\left[\overline{q}+\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]\cdot\left[\overline{q}'-\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]+n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}^2-2\cdot n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}\right\},$$

далее находим:

$$\overline{s}+\overline{\psi}\cdot(\overline{s}-b\cdot z)=$$

$$=\frac{1}{n^2\cdot\zeta^2}\cdot\left\{\underline{n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}}+\left[\overline{q}+\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]\cdot\left[\overline{q}'-\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]+n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}^2-\underline{2\cdot n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{n^2\cdot\zeta^2}\cdot\left\{\left[\overline{q}+\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]\cdot\left[\overline{q}'-\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]+n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right\};$$

$$1+\overline{\psi}\cdot(\overline{s}-b\cdot z)=$$

$$=\frac{1}{n^2\cdot\zeta^2}\cdot\left\{\underline{n^2\cdot\zeta^2}+\left[\overline{q}+\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]\cdot\left[\overline{q}'-\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]+n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}^2-\underline{2\cdot n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{n^2\cdot\zeta^2}\cdot\left\{\left[\overline{q}+\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]\cdot\left[\overline{q}'-\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)\right]+n^2\cdot\zeta^2\cdot\left(\overline{s}-1\right)^2\right\};$$

Учитывая полученные результаты, окончательно имеем:

$$\overline{s}' = \frac{\left[\overline{q} + \zeta^2 \cdot \left(\overline{s} - 1\right)\right] \cdot \left[\overline{q}' - \zeta^2 \cdot \left(\overline{s} - 1\right)\right] + n^2 \cdot \zeta^2 \cdot \overline{s} \cdot \left(\overline{s} - 1\right)}{\left[\overline{q} + \zeta^2 \cdot \left(\overline{s} - 1\right)\right] \cdot \left[\overline{q}' - \zeta^2 \cdot \left(\overline{s} - 1\right)\right] + n^2 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\overline{s} - 1\right)^2}. \qquad (95)$$

а) Рассмотрим случай $\overline{s} - 1 = 0$, то есть $\overline{s} = 1$.

Подставим $\overline{s} = 1$ в формулу (95), получим:

$$\overline{s}\,' = \frac{\overline{q} \cdot \overline{q}'}{\overline{q} \cdot \overline{q}'} = 1\ . \qquad (96)$$

Таким образом, если $\overline{s} = 1$, то $\overline{s}' = 1$, или, если $s = r$, то $s' = r$, то есть центр сферы является резким изображением самого себя.

б) Рассмотрим случай $\overline{q} + \zeta^2 \cdot \left(\overline{s} - 1\right) = 0$,

отсюда

$$\overline{q} = -\zeta^2 \cdot \left(\overline{s} - 1\right),$$
$$\overline{q}^2 = \zeta^4 \cdot \left(\overline{s} - 1\right)^2. \qquad (97)$$

Из (91-1) следует:

$$\overline{q}^2 = n^4 \cdot \overline{s}^2 - 2 \cdot n^2 \cdot \zeta^2 \cdot \overline{s} \cdot \left(\overline{s} - 1\right) + \zeta^4 \cdot \left(\overline{s} - 1\right)^2 - n^2 \cdot \overline{s}^2 \cdot \left(n^2 - \zeta^2\right), \qquad (98)$$

Приравняем правые части (97) и (98):

$$\cancel{\zeta^4 \cdot \left(\overline{s} - 1\right)^2} = n^4 \cdot \overline{s}^2 - 2 \cdot n^2 \cdot \zeta^2 \cdot \overline{s} \cdot \left(\overline{s} - 1\right) + \cancel{\zeta^4 \cdot \left(\overline{s} - 1\right)^2} - n^2 \cdot \overline{s}^2 \cdot \left(n^2 - \zeta^2\right),$$
$$n^4 \cdot \overline{s}^2 - 2 \cdot n^2 \cdot \zeta^2 \cdot \overline{s} \cdot \left(\overline{s} - 1\right) - n^2 \cdot \overline{s}^2 \cdot \left(n^2 - \zeta^2\right) = 0,$$
$$\cancel{n^4 \cdot \overline{s}^2} - \underline{2 \cdot n^2 \cdot \zeta^2 \cdot \overline{s}^2} + 2 \cdot n^2 \cdot \zeta^2 \cdot \overline{s} - \cancel{n^4 \cdot \overline{s}^2} + \underline{n^2 \cdot \overline{s}^2 \cdot \zeta^2} = 0,$$
$$n^2 \cdot \zeta^2 \cdot \overline{s} \cdot \left(\overline{s} - 2\right) = 0,$$
$$\overline{s} \cdot \left(\overline{s} - 2\right) = 0. \qquad (99)$$

Уравнение (99) имеет два решения:

$$\overline{s} = 0 \text{ и } \overline{s} = 2, \text{ или} \qquad (100)$$
$$s = 0 \text{ и } s = 2 \cdot r.$$

Из выражения (95) при $\overline{q} + \zeta^2 \cdot \left(\overline{s} - 1\right) = 0$ следует:

$$\overline{s}' = \frac{n^2 \cdot \zeta^2 \cdot \overline{s} \cdot \left(\overline{s} - 1\right)}{n^2 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\overline{s} - 1\right)^2} = \frac{\overline{s}}{\overline{s} - 1}, \text{ откуда}$$

$$\overline{s}' = 0 \quad \text{при} \quad \overline{s} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{s}' = 2 \quad \text{при} \quad \overline{s} = 2\ , \text{ или}$$
$$s' = 0 \quad \text{при} \quad s = 0 \quad \text{и} \quad s' = 2 \cdot r \quad \text{при} \quad s = 2 \cdot r\ . \qquad (101)$$

Оба решения (101) определяют две вершины сферы.

Таким образом, если $s=0$, то и $s'=0$, то есть вершина сферы резко изображается сама в себя.

в) Рассмотрим случай $\overline{q}' - \zeta^2 \cdot (\overline{s}-1) = 0$,

отсюда

$$\overline{q}' = \zeta^2 \cdot (\overline{s}-1),$$

$$\overline{q}'^2 = \zeta^4 \cdot (\overline{s}-1)^2. \qquad (102)$$

Из (91-3) следует:

$$\overline{q}'^2 = (n'^2 - n^2)\cdot\zeta^2 + \overline{q}^2 = (n'^2 - n^2)\cdot\zeta^2 + \left[n^2\cdot\overline{s} - \zeta^2\cdot(\overline{s}-1)\right]^2 - n^2\cdot\overline{s}^2\cdot(n^2-\zeta^2) =$$

$$= (n'^2 - n^2)\cdot\zeta^2 + n^4\cdot\overline{s}^2 - 2\cdot n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}\cdot(\overline{s}-1) + \zeta^4\cdot(\overline{s}-1)^2 - n^2\cdot\overline{s}^2\cdot(n^2-\zeta^2).$$

Приравняем правые части (102) и последнего выражения:

$$\cancel{\zeta^4\cdot(\overline{s}-1)^2} = (n'^2 - n^2)\cdot\zeta^2 + \cancel{n^4\cdot\overline{s}^2} - \underline{2\cdot n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}^2} +$$

$$+2\cdot n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s} + \cancel{\zeta^4\cdot(\overline{s}-1)^2} - \cancel{n^4\cdot\overline{s}^2} + \underline{n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}^2},$$

$$n'^2 - n^2 - n^2\cdot\overline{s}^2 + 2\cdot n^2\cdot\overline{s} = 0,$$

$n'^2 = n^2\cdot(\overline{s}-1)^2$, отсюда

$$\overline{s} = 1 \pm \frac{n'}{n}.$$

Учитывая, что $\overline{q}' = \zeta^2\cdot(\overline{s}-1) > 0$, то есть $\overline{s}-1>0$,

находим:

$$\overline{s}' = 1 + \frac{n'}{n}, \text{ или } s = \frac{n+n'}{n}\cdot r. \qquad (103)$$

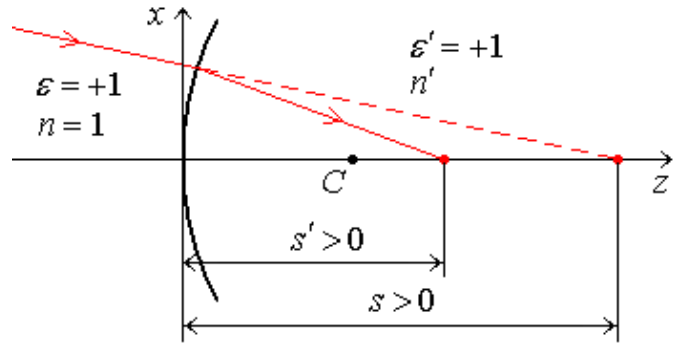
Тогда из (95) следует:

$$\overline{s}' = \frac{n^2\cdot\zeta^2\cdot\overline{s}\cdot(\overline{s}-1)}{n^2\cdot\zeta^2\cdot(\overline{s}-1)^2} = \frac{\overline{s}}{\overline{s}-1} = \frac{1+\frac{n'}{n}}{1+\frac{n'}{n}-1} = \frac{n+n'}{n'},$$

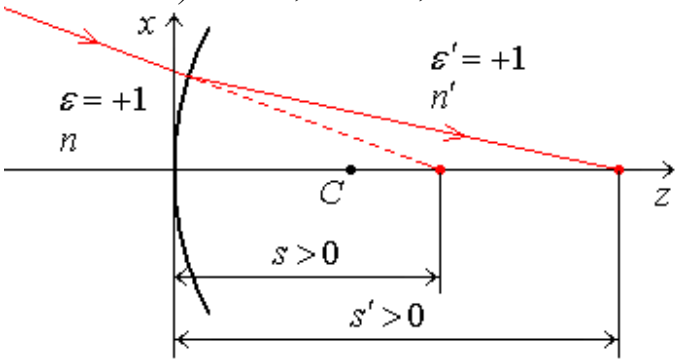
или $s' = \dfrac{n+n'}{n'}\cdot r$. (104)

Рассмотрим соотношения (103) и (104) более подробно.

1. Пусть $r>0$, тогда $s>0$ и $s'>0$.



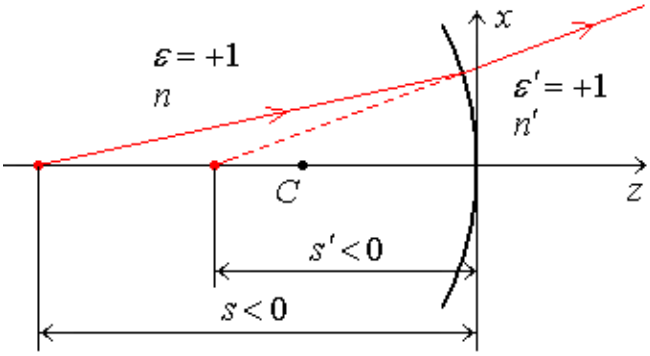
а) $n' > n$, *значит,* $s' < s$



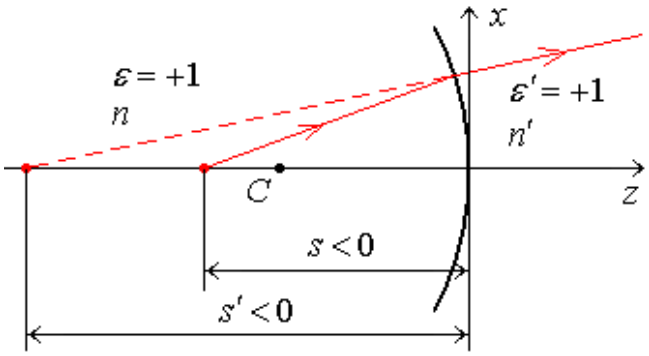
б) $n' < n$, *значит,* $s' > s$

Рис. 30. Преломление луча сферой

2. Пусть $r < 0$**, тогда** $s < 0$ **и** $s' < 0$**.**



а) $n' > n$, *значит,* $s' > s$



б) $n' < n$, *значит,* $s' < s$

Рис. 31. Преломление луча сферой

Проведем через центр кривизны C сферы S линию $o'o'$, называемую побочной оптической осью (рис. 32). Поскольку сфера симметрична относительно любой линии, проходящей через центр сферы, то все вышеприведенные рассуждения, касающиеся преломляющей сферы, справедливы и для произвольной побочной оптической оси $o'o'$.

Пусть A и A' – апланатические точки сферы S, расположенные на оптической оси oo. Проведем из центра C преломляющей сферы S две сферы σ и σ' с радиусами кривизны, равными

$$z = CA = s - r = r \cdot \frac{n + n'}{n} - r = \frac{n'}{n} \cdot r \qquad (105)$$

и

$$z' = CA' = s' - r = r \cdot \frac{n + n'}{n'} - r = \frac{n}{n'} \cdot r\,. \qquad (106)$$

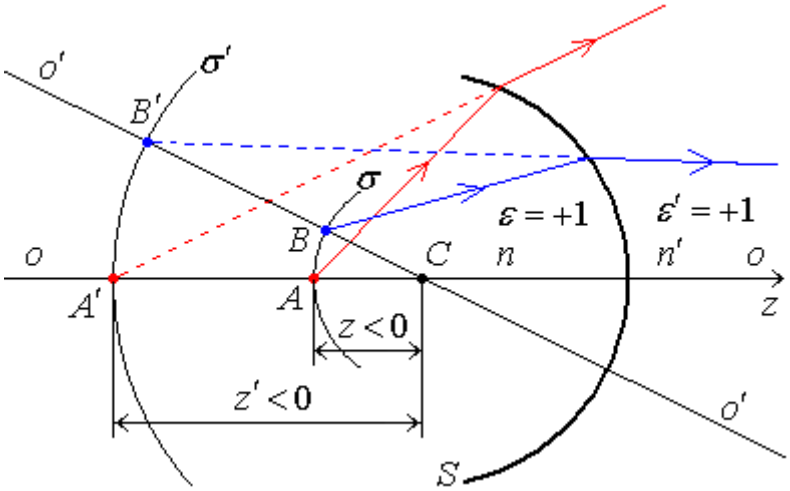


Рис. 32. Апланатические поверхности сферы

Очевидно, что точки B и B' представляющие собой точки пересечения сфер σ и σ' с побочной оптической осью $o'o'$, также являются апланатическими точками, положение которых относительно центра сферы S задается соотношениями (105-106).

Из (105-106) следует, что $z \cdot z' = r^2$.

Таким образом, у всякой преломляющей сферы имеются две апланатические сферы, являющиеся резким изображением друг друга.

Наличие у сферы двух апланатических точек позволяет сконструировать декартову линзу, называемую апланатической, или линзой Любошеца (рис. 33).

При расчете параметров апланатической линзы задаются величины:

d – толщина линзы по оси,

n – показатель преломления стекла,

s_1 – положение точки предмета относительно первой поверхности,

$r_1 = s_1$ – центр кривизны C_1 первой поверхности совмещен с точкой предмета;

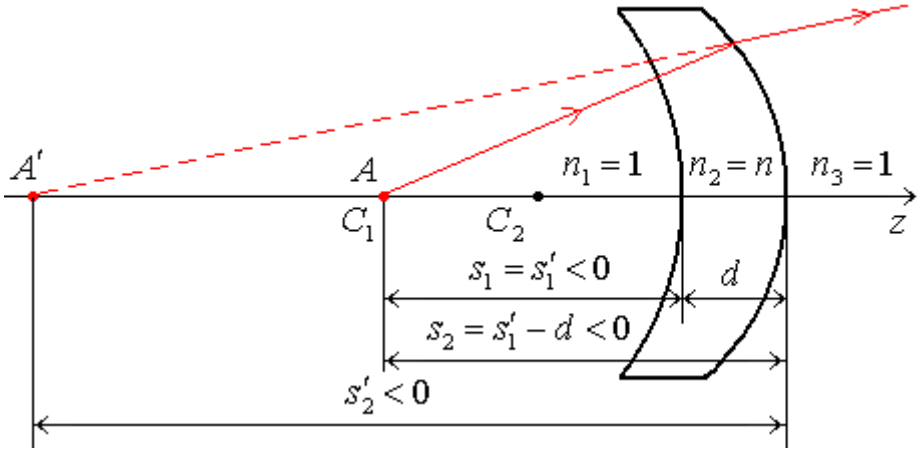


Рис. 33. Линза Любошеца (апланатическая линза)

Расчет:

$$s_2 = s_1 - d\,, \tag{107}$$

$$s_2 = \frac{n+1}{n} \cdot r_2\,, \text{ отсюда}$$

$$r_2 = \frac{n}{n+1} \cdot s_2\,, \tag{108}$$

$$s_2' = (n+1) \cdot r_2\,, \tag{109}$$

или

$$s_2' = (n+1) \cdot \frac{n}{n+1} \cdot (r_1 - d) = n \cdot (r_1 - d)\,. \tag{110}$$

Недостатком апланатической линзы является то, что обе апланатические точки лежат с одной стороны линзы. А это значит, что если точка предмета является действительной, то изображение является мнимым, и наоборот.

9. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ХОДА ЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОБРАЗОМ РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Алгоритмы, рассмотренные в предыдущих разделах, предназначены для расчета хода лучей через центрированные оптические системы. Однако, во-первых, существует класс зеркальных, призменных, зеркально-призменных и зеркально-линзовых систем с изломанными оптическими осями, которые в целом можно охарактеризовать как системы с произвольным расположением поверхностей в пространстве. Сюда же можно отнести спектральные приборы, оптические шарниры, системы сканирования лучей в пространстве (для решения задач навигации), системы со сканированием поля зрения (для увеличения площади обзора при достаточно малом мгновенном угле поля зрения).

Во-вторых, при изготовлении оптических систем неизбежна децентрировка, вызванная как неточностью при изготовлении отдельных деталей, так и нестрогой сборкой, в результате чего центры отдельных деталей не ложатся точно на одну прямую (оптическую ось), а оказываются смещенными относительно нее.

Наличие децентрировок в оптической системе приводит к искажению оптического изображения. Поэтому, еще на стадии проектирования необходимо оценить влияние децентрировок каждой поверхности и рассчитать их допустимые величины. При строгом подходе к оценке качества изображения необходимо произвести точный расчет хода пучка лучей через децентрированную систему.

Поскольку децентрированные оптические системы можно отнести к системам с произвольным расположением поверхностей в пространстве, то изучение алгоритмов расчета хода лучей через произвольные системы приобретает особый смысл.

Рассмотрим децентрировки двух видов:

а) децентрировка 1-го рода – поворот поверхности относительно вершины поверхности;

б) децентрировка 2-го рода – параллельное смещение поверхности относительно оптической оси.

На основе децентрировок 1-го и 2-го рода можно ввести понятие децентрировки более общего вида:

в) децентрировка 3-го рода – поворот поверхности относительно вершины и параллельное смещение ее относительно оптической оси (базовой оси).

9.1. Децентрировки 1-го рода

Повернем оптическую поверхность вокруг вершины так, что ее собственная система координат (СК) займет положение $\left(x'\,y'\,z'\right)$ (рис. 1). Далее идея расчета хода луча через децентрированную таким образом поверхность заключается в следующем: по известным начальным данным $\vec{A}$, $\vec{s}$ луча в базовой СК (БСК) находим новые начальные данные луча $\left(\vec{A}_1\right)'$, $\left(\vec{s}\right)'$ в собственной СК $\left(x'\,y'\,z'\right)$ и далее производим расчет хода луча в собственной СК (ССК) по обычным формулам для центрированной системы, в результате чего находим конечные данные луча $\left(\vec{A}_1'\right)'$ и $\left(\vec{s}'\right)'$ в ССК, которые в обратном порядке преобразуем к векторам $\vec{A}_1'$ и $\vec{s}'$ в БСК $\left(x\;y\;z\right)$. Затем осуществляется переход к следующей поверхности опять же в БСК и процедура повторяется.

Пусть M – матрица поворота ССК поверхности:

$$M=\begin{pmatrix} cos\left(x'\hat{}\,x\right) & cos\left(x'\hat{}\,y\right) & cos\left(x'\hat{}\,z\right) \\ cos\left(y'\hat{}\,x\right) & cos\left(y'\hat{}\,y\right) & cos\left(y'\hat{}\,z\right) \\ cos\left(z'\hat{}\,x\right) & cos\left(z'\hat{}\,y\right) & cos\left(z'\hat{}\,z\right) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

тогда компоненты векторов $\vec{A}$ и $\vec{s}$ в ССК $\left(x'\,y'\,z'\right)$ определяются согласно преобразованию:

$$\left(\vec{A}\right)'=M\cdot\vec{A}, \quad (\vec{s})'=M\cdot\vec{s} \qquad (2)$$

Проведем в точку пересечения луча с плоскостью $\left(x'\;0\;y'\right)$ вектор $\vec{A}_1$ (рис. 1), значение которого в ССК $\left(x'\,y'\,z'\right)$ можно определить из уравнения:

$$\left(\vec{A}_1\right)'=\left(\vec{A}\right)'+\ell\cdot\left(\vec{s}\right)' \qquad (3)$$

Из (3) находим:

$$\begin{cases} (x_1)'=(x)'+\ell\cdot(\xi)', \\ (y_1)'=(y)'+\ell\cdot(\eta)', \\ 0=(z)'+\ell\cdot(\xi)', \end{cases}$$

откуда $\ell = -\dfrac{(z)'}{(\zeta)'}$ и

$$\left(\vec{A}_1\right)' = \left(\vec{A}\right)' + \ell \cdot \left(\vec{S}\right)' \tag{4}$$

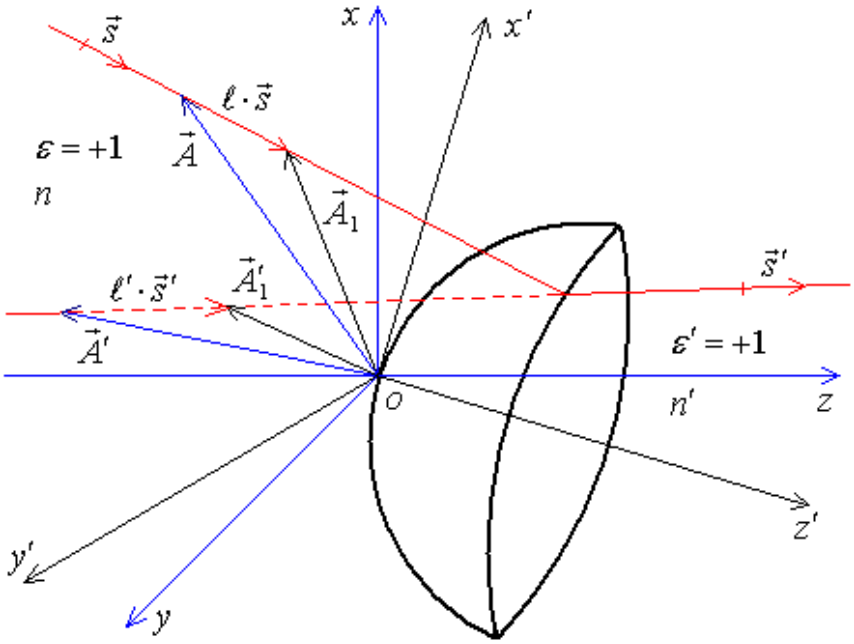


Рис. 1. Ход луча через поверхность с децентрировкой 1-го рода

Таким образом, векторы $\left(\vec{A}_1\right)'$ и $\left(\vec{s}\right)'$ являются начальными данными для расчета хода луча через рассматриваемую поверхность в ССК $\left(x'\ y'\ z'\right)$. В зависимости от вида поверхности выбирается нужный алгоритм и рассчитываются конечные данные луча $\left(\vec{A}_1'\right)'$ и $\left(\vec{s}'\right)'$ в ССК $\left(x'\ y'\ z'\right)$.

Далее проводим обратное преобразование и находим конечные данные луча в БСК:

$$\vec{A}_1' = M^{-1} \cdot \left(\vec{A}_1'\right)', \quad \vec{s}' = M^{-1} \cdot (\vec{s}')'. \tag{5}$$

Далее из уравнения

$$\vec{A}_1' = \vec{A}' + \ell' \cdot \vec{s}' \tag{6}$$

находим:

$$\vec{A}' = \vec{A}_1' - \ell' \cdot \vec{s}', \text{ или} \tag{7}$$

$$\begin{cases} x' = x_1' - \ell' \cdot \xi' , \\ y' = y_1' - \ell' \cdot \eta' , \\ 0 = z_1' - \ell' \cdot \zeta' . \end{cases} \tag{8}$$

Из (8) находим:

$$\begin{cases} \ell' = \dfrac{z_1'}{\zeta'} , \\ \vec{A}' = \vec{A}_1' - \ell' \cdot \vec{S}' . \end{cases} \tag{9}$$

Переход к следующей поверхности осуществляется по формулам:

$$\vec{s}_2 = \vec{s}' , \ \vec{P}_2 = \vec{P}' + d \cdot \vec{S}_2 .$$

9.2. Децентрировки 2-го рода

Параллельный перенос поверхности в пространстве – более простой вид децентрировки, чем поворот. Начальные данные луча известны, (либо заданы, либо получены расчетным путем) – это векторы $\vec{A}$ и $\vec{s}$. Переместим поверхность в пространстве таким образом, чтобы ее оптическая ось оставалась параллельной базовой оси oz, а вершина всегда лежала в плоскости $(x\,0\,y)$ (рис. 2). Движение поверхности вдоль оси oz не представляет интереса – его легко учесть расстоянием d между поверхностями.

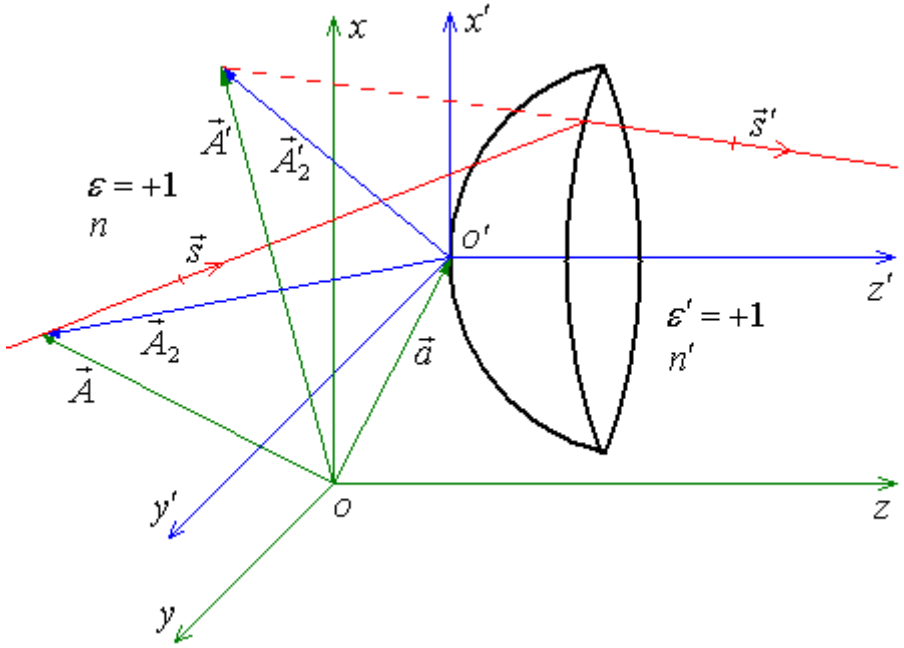


Рис. 2. Ход луча через поверхность с децентрировкой 2-го рода

Новое положение ССК поверхности обозначим $(x'\,y'\,z')$. Величину смещения ССК $(x'\,y'\,z')$ будем задавать вектором $\vec{a}\,(a_x, a_y)$, проведенным из начала o БСК $(x\,y\,z)$ в начало o' ССК $(x'\,y'\,z')$. Далее находим положение начальной точки луча в ССК $(x'\,y'\,z')$:

$$\vec{A}_2 = \vec{A} - \vec{a}\,. \tag{10}$$

Компоненты вектора $\vec{s}$ при параллельном переносе СК не меняются. Таким образом, $\vec{A}_2$ и $\vec{s}$ – новые начальные данные луча в ССК $(x'\,y'\,z')$. В зависимости от вида поверхности выбираем нужный алгоритм и производим расчет хода лучей, в результате чего находим конечные данные луча $\vec{A}'_2$ и $\vec{s}'$ в ССК $(x'\,y'\,z')$. Путем обратного преобразования находим конечные данные луча в СК $(x\,y\,z)$:

$$\vec{A}' = \vec{A}'_2 + \vec{a} \tag{11}$$

9.3. Децентрировки 3-го рода

Децентрировка 3-го рода складывается из децентрировок 1-го и 2-го рода: сначала поверхность испытывает параллельный перенос, задаваемый вектором $\vec{a}$, так, что ее ССК займет положение $(x'\,y'\,z')$; затем осуществляется поворот поверхности вокруг вершины o', задаваемый матрицей поворота M, при этом ее ССК займет положение $(x''\,y''\,z'')$ (рис. 3). Определение начальных данных луча в ССК $(x''\,y''\,z'')$ проводится в два этапа: сначала находим начальные данные в ССК $(x'\,y'\,z')$, а затем в СК $(x''\,y''\,z'')$. Конечные данные в СК $(x\,y\,z)$ определяются в обратном порядке после расчета хода луча и вычисления конечных данных в СК $(x''\,y''\,z'')$:

Начальные данные:

$$\vec{A}(x, y), \quad \vec{s}\,(\xi, \eta, \zeta); \quad \vec{a},\ M\,;$$

Расчет:

$$\vec{A}_2 = \vec{A} - \vec{a}\,,$$

$$\left(\vec{A}_2\right)'' = M \cdot \vec{A}_2\,,$$

$$\left(\vec{s}\right)'' = M \cdot \vec{s}\,,$$

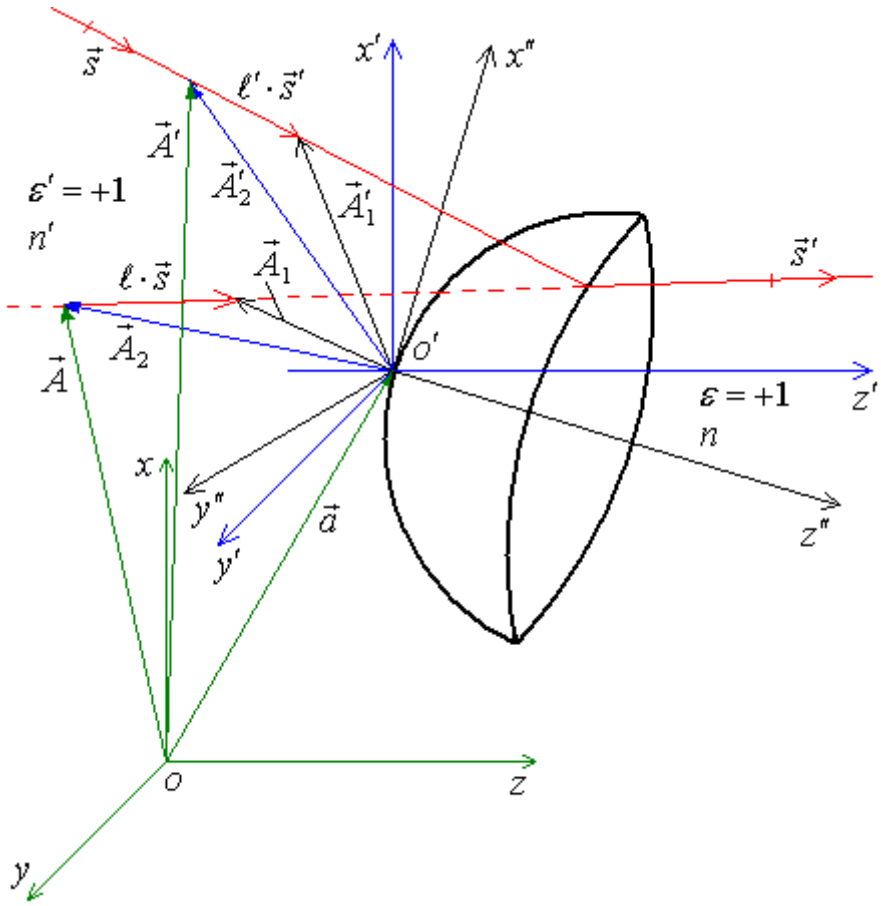


Рис. 3. Ход луча через поверхность с децентрировкой 3-го рода

$$\ell = -\frac{(z_2)''}{(\zeta)''},$$

$$\left(\vec{A}_1\right)'' = \left(\vec{A}_2\right)'' + \ell \cdot \left(\vec{S}\right)'',$$

$$\left\{ \quad \text{расчет хода луча} \quad \right\},$$

$$\vec{A}_1' = M^{-1} \cdot \left(\vec{A}_1'\right)'',$$

$$\vec{s}' = M^{-1} \cdot \left(\vec{s}'\right)'',$$

$$\ell' = \frac{z_1'}{\zeta'},$$

$$\vec{A}_2' = \vec{A}_1' - \ell' \cdot \vec{S}',$$

$$\vec{A}' = \vec{A}_2' + \vec{a},$$

$\vec{A}'$, $\vec{s}\,'$ – конечные данные луча в БСК $(x\ y\ z)$.

10. ГЛАЗ

10.1. Общие сведения

Почти все процессы измерения происходят при участии зрения. При работе со многими оптическими приборами глаз работает как приемник излучения, поэтому его можно рассматривать как универсальный оптический прибор.

Глаз представляет собой сложный орган, который дает возможность человеку воспринимать явления окружающего внешнего мира. Явление цвета отчасти обусловлено физическими процессами. Но цвет, кроме того, связан еще с функцией глаза и с тем, что происходит позади него, то есть с деятельностью мозга. Физика изучает поведение света, пока он находится вне человеческого глаза, а наши ощущения, после того как свет попал в глаз, возникают в результате фотохимических и нервных процессов, а также психологических рефлексов.

Преобразование энергии излучения в зрительные ощущения лежит в основе зрительного процесса. Зрительное восприятие представляет собой сложный физиологический акт, в котором принимает участие не только оптическая система глаза, но и определенные элементы нервной системы и мозга человека. Оптическая система глаза универсальна: нормальный глаз имеет широкий диапазон фокусировок от близкого расстояния до бесконечности, поле зрения его приближается к полусфере, глаз приспосабливается (адаптирует) к различным условиям освещенности, обладает зрительной памятью. Все функции глаза осуществляются по сигналам из коры головного мозга, причем, кроме обзора, процессы протекают автоматически, в зависимости от внешних условий.

1. **Глаз** представляет собой шаровидное тело (рис. 1), диаметром примерно 25…26 мм, с внешней непрозрачной оболочкой белого цвета **1** (**склерой**). Внутренняя поверхность склеры покрыта **сосудистой оболочкой**, содержащей разветвления кровеносных сосудов, питающих глаз. Спереди и внутри она переходит в утолщенную часть, содержащую кольцевидную ресничную мышцу **12**, и далее – в радужную оболочку **4**, не одинаково окрашенную у различных людей и определяющую цвет глаз. **Радужка** – это непрозрачная ткань с отверстием переменного диаметра. Радужная оболочка состоит из нежных соединительнотканных фибрилл, кровеносных сосудов, мышечных волокон и пигментных клеток (от числа последних и зависит цвет глаз). Отверстие принято называть **зрачком** глаза. Радужка, по сути, апертурная диафрагма. В зависимости от яркости света зрачок может рефлекторно сужаться и расширяться посредством

кольцевидной мышцы, с которой связана радужная оболочка. Диаметр его может примерно меняться от 2 до 8 мм. Этим достигается ограничение поперечных размеров световых пучков, поступающих в глаз.

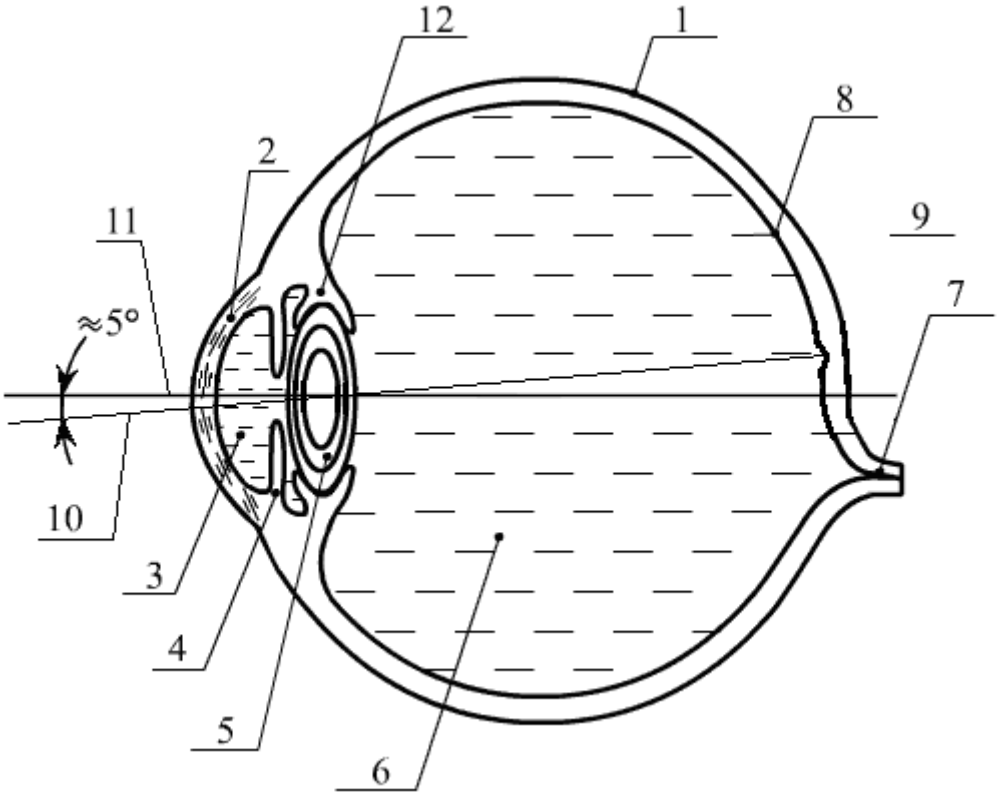


Рис. 1. Правый глаз. Вид сверху.
1 – склера; 2 – роговица; 3 – передняя камера, заполненная водянистой влагой; 4 – радужка; 5 – хрусталик; 6 – задняя камера, заполненная стекловидным телом; 7 – слепое пятно (вход зрительного нерва); 8 – сетчатка или ретина; 9 – желтое пятно; 10 – линия прямого зрения; 11 – зрительная ось глаза; 12 – кольцевидная ресничная мышца

Передняя часть склеры переходит в прозрачную роговую оболочку **2**, или **роговицу**, диаметром 10 мм, более выпуклую, чем склера. Толщина склеры от 0.4 до 1.1 мм, роговицы – около 0.5 мм. За роговицей следует **передняя глазная камера 3**, **хрусталик 5** (внутренняя линза с переменным фокусным расстоянием), **задняя глазная камера 6**. Передняя камера заполнена жидкостью, называемой **водянистой** влагой, которая необходима для обеспечения хрусталику возможности изменения формы. Задняя глазная камера заполнена прозрачным студенистым веществом, называемым **стекловидным** телом. Стекловидное тело **6**, которое прозрачно и предназначено для прохождения лучей света от роговицы до сетчатки, обеспечивает постоянство формы глаза. Стекловидное тело и водянистая влага имеют близкий химический состав; одинаковы и их показатели преломления.

К сосудистой оболочке по всей ее внутренней поверхности прилегает самая внутренняя из оболочек глаза – **сетчатая оболочка**, или **ретина**, состоящая главным образом из радиально расходящихся разветвлений **зрительного нерва 7**, входящего во внутреннюю полость глаза несколько сбоку от линии прямого зрения **10** и оси симметрии глаза **11**. Около точки **7** толщина сетчатки составляет 0.2…0.22 мм; к периферии она непрерывно уменьшается. Оптическая система глаза дает изображение предметов на сетчатке, где оно вызывает зрительные раздражения, передаваемые в мозг по нервным волокнам.

Недалеко от точки **7**, где начинаются разветвления зрительного нерва, со стороны виска, находится так называемое **желтое пятно 9** (горизонтальный поперечник 1…3 мм, вертикальный 0.8) или macula (macula – по латыни «пятно»). В его центральной части имеется углубление, называемое **центральной ямкой –** fovea centralis (лат.), сокращенно фовеола или фовеа. Это участок сетчатки диаметром примерно 0,4 мм, что соответствует углу 1,2°. Здесь толщина сетчатки не превышает 0.08…0.1 мм. Желтое пятно и в особенности центральная ямка являются наиболее чувствительными местами сетчатки (при дневном зрении). Изображение рассматриваемой точки пространства всегда приводится к середине центральной ямки. Прямая линия, проходящая через эту точку и заднюю узловую точку глаза, вместе с параллельной ей прямой, проходящей через переднюю узловую точку, определяет так называемую **линию прямого зрения**. Она не совсем совпадает с **осью симметрии глаза**, так как преломляющие поверхности глаза не вполне симметричны и центрированы. Ось симметрии глаза можно провести в некотором смысле только условно. Обычно ее проводят через крайнюю, наиболее выступающую точку выпуклой поверхности роговицы и через центр зрачка. Угол между осью симметрии и линией прямого зрения составляет примерно 5°.

2. **Роговица** – менискообразная линза, состоящая из нескольких наружных слоев и эпителия. Передняя поверхность роговицы должна иметь оптическое качество шероховатости, для этого она постоянно смачивается веком в процессе моргания. Диаметр роговицы взрослого человека колеблется от 10 до 12 мм. Роговица более выпукла, чем остальная поверхность глазного яблока. Радиус кривизны передней поверхности роговицы составляет в среднем 7,6…7,8 мм, задней поверхности ее – около 6,8 мм, толщина в центральной части – 0,5…0,9 мм. Форма передней поверхности роговицы отличается от сферы. Со сферой практически совпадает только центральная часть диаметром около 4 мм. Дальше от центра появляется ряд неровностей, заметно уменьшается кривизна, что дало основание считать форму роговицы близкой к эллипсоиду или другой кривой второго порядка

3. **Хрусталик** представляет собой прозрачное бесцветное тело, напоминающее двояковыпуклую линзу, передняя поверхность которой менее выпукла, чем задняя. Условно считается, что обе поверхности хрусталика представляют собой части правильной сферы. В действительности они ближе к асферическим поверхностям второго порядка: кривизна обеих поверхностей в центре больше, чем на периферии; т. е. как и у роговицы, центральная часть хрусталика почти сферическая, а по краям уплощается.

Он состоит из слоев различной плотности, имеющих волокнистое строение. Наружный слой мягкий и почти студенистый; ядро же более твердое и вполне упругое. Показатель преломления наружного слоя хрусталика 1.405, средних слоев – около 1.429, ядра – 1.454. Благодаря такой структуре хрусталик способен обеспечивать требуемое качество изображения при значительном изменении его фокусного расстояния. Кольцевидная мышца, рефлекторно напрягаясь и расслабляясь, может менять кривизну его поверхностей, главным образом передней. Этим осуществляется **аккомодация**, то есть изменение оптической силы глаза, позволяющее фокусировать изображение на сетчатке. Так как деформация хрусталика может происходить только в определенных пределах, то для всякого глаза существуют определенные границы, в пределах которых глаз может отчетливо видеть предметы. Эти границы определяют так называемую область аккомодации глаза. Наиболее отдаленная граница, которую глаз может видеть отчетливо при вполне ослабленной мышце, называется **дальней**, а ближняя граница, которую он способен отчетливо видеть при максимальном напряжении мышцы, – **ближней точкой ясного видения** (рис. 2).

В ненапряженном состоянии нормальный глаз аккомодирован на бесконечность и его задний фокус совпадает с сетчаткой. Таким образом, дальняя точка ясного видения для нормального глаза находится в бесконечности.

В возрасте до 10 лет ближняя точка лежит на расстоянии 7…8 см от глаза. К 30 годам это расстояние увеличивается примерно до 15 см, к 40…50 годам – до 25 см. В случае нормального глаза оптимальное расстояние для чтения и письма составляет около 25 см. Это расстояние для нормального глаза и принимается условно за **расстояние ясного зрения** (рис. 2).

При длительном наблюдении близких предметов глаз устает вследствие утомления кольцевой мышцы хрусталика. В связи с этим к оптическому наблюдательному прибору предъявляются следующие требования:

1) изображения предметов, создаваемые оптическими приборами, должны находиться перед глазом на расстоянии, не меньшем, чем расстояние до ближней точки;

2) в оптических приборах, предназначенных для длительных наблюдений, в целях обеспечения малой утомляемости глаза изображения предметов должны лежать в бесконечности.

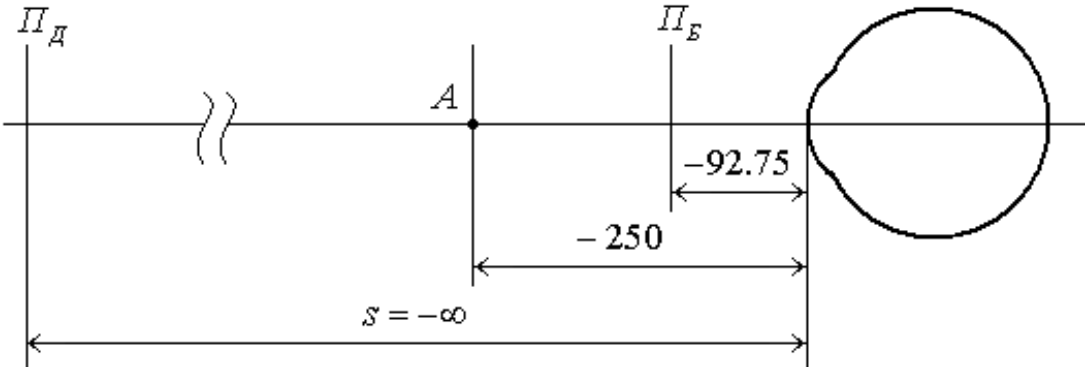


Рис. 2. Дальняя и ближняя точки глаза. А – точка ясного зрения. $П_Д$ – дальняя плоскость предметов, $П_Д$ – ближняя плоскость предметов

Расстояние между ближней и дальней точками ясного зрения, выраженное в диоптриях, называют объемом аккомодации:

$$\left|\frac{1000}{a_Б} - \frac{1000}{a_Д}\right| \text{ – объем аккомодации;} \qquad (1)$$

здесь $a_Д$ – расстояние до дальней точки ясного зрения. У нормального глаза оно равно бесконечности; $a_Б$ – расстояние до ближней точки ясного зрения. У нормального глаза оно равно 92.75 мм.

4. **Сетчатка** глаза имеет весьма сложное строение. Обычно в ней насчитывают десять слоев. Во внешнем слое, непосредственно примыкающем к сосудистой оболочке, расположены клетки, окрашенные черным пигментом. Существование пигмента имеет большое значение для приспособления глаза к работе при различных уровнях освещенности, а также для уменьшения рассеяния света внутри глаза. Именно благодаря поглощению в пигментном эпителии внутренняя поверхность глазного яблока имеет очень малый коэффициент отражения (5…10 %). Остальная часть падающего света поглощается этим слоем. Однако вследствие того, что пигмент не является абсолютно черным телом, диффузно рассеянный свет попадает на неосвещенную поверхность глазного дна и вновь поглощается пигментным эпителием, создавая слабую вуаль.

Перед пигментным слоем, примыкая к нему, находятся светочувствительные рецепторные клетки (фоторецепторы) – **палочки** и **колбочки**. В палочках и колбочках имеется особое вещество, разлагающееся под действием света, – **зрительный пигмент**. Зрительный пигмент**,**

структурно-функциональная единица светочувствительной мембраны **фоторецепторов** сетчатки глаза – палочек и колбочек. В зрительном пигменте осуществляется первый этап зрительного восприятия – поглощение квантов видимого света. Молекула зрительного пигмента (молярная масса около 40 000) состоит из хромофора, поглощающего свет, и опсина – комплекса белка и фосфолипидов. Хромофором всех зрительных пигментов служит альдегид витамина A_1 или A_2 – ретиналь или 3-дегидроретиналь. Два вида опсина (палочковый и колбочковый) и два вида ретиналя, соединяясь попарно, образуют 4 вида зрительного пигмента, различающихся по спектру поглощения: родопсин (самый распространённый палочковый зрительный пигмент), или зрительный пурпур (максимум поглощения 500 *нм*), иодопсин (562 *нм*), порфиропсин (522 *нм*) и цианопсин (620 *нм*). Первичное фотохимическое звено в механизме **зрения** состоит в фотоизомеризации ретиналя, который под действием света меняет изогнутую конфигурацию на плоскую. За этой реакцией следует цепь темновых процессов, приводящих к возникновению зрительного рецепторного сигнала, который затем синаптически передаётся следующим нервным элементам сетчатки – биполярным и горизонтальным клеткам.

Отростки зрительных рецепторов приходят в соприкосновение с биполярными нервными клетками шестого слоя, которые в свою очередь контактируют с ганглиозными клетками восьмого слоя. Нейриты последних (отростки, по которым нервный импульс выходит из клетки) слагаются в зрительный нерв, по которому информация достигает зрительных центров мозга. Пути проведения сигналов по сетчатке многообразны. Так, в зоне жёлтого пятна преобладает изолированное проведение сигналов от колбочковой к биполярной клетке, контактирующей индивидуально с ганглиозной клеткой, что и обеспечивает наивысшую остроту зрения в этой зоне.

Общая длина палочки 60…80 мкм, колбочки – около 35 мкм. Число колбочек в глазу достигает 7 миллионов, палочек – до 130 миллионов. Периферия сетчатки заполнена почти исключительно палочками. Число колбочек на единицу площади возрастает по мере приближения к желтому пятну, достигая максимума в его середине. Число колбочек на площади желтого пятна 13…15 тысяч. В его центральной части, в пределах круга радиусом примерно 0.2 мм, палочек нет, есть одни только колбочки. Число их здесь достигает 180 тысяч на квадратном миллиметре, так что среднее расстояние между центрами соседних колбочек составляет примерно 2.5 мкм.

В том месте, где внутрь глаза входит глазной нерв, то есть вокруг точки 7, на сетчатке нет ни палочек, ни колбочек. Это место называется

слепым пятном. Его легко обнаружить, если закрыть левый глаз и смотреть правым на крестик (рис. 3). Если глаз приближать к рисунку, то с расстояния 15…17 см кружок становится невидимым. Это получается тогда, когда изображение кружка попадает на слепое пятно.

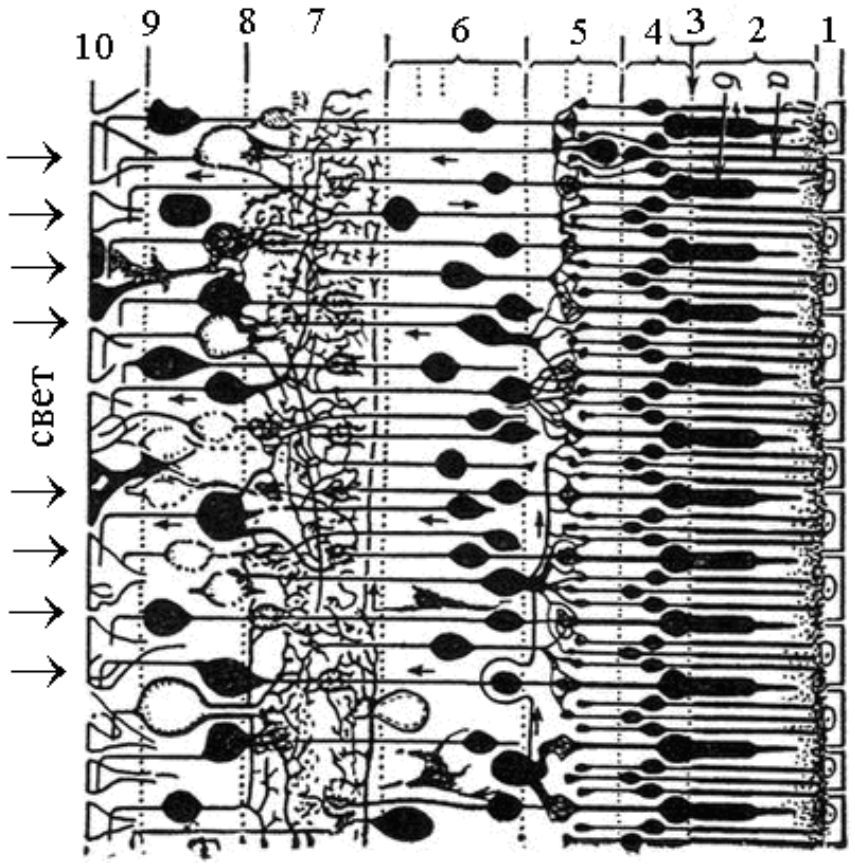


Схема сетчатки глаза человека:
1 – пигментный эпителий; 2 – слой палочковых (а) и колбочковых (б) клеток;
3 – наружная пограничная мембрана; 4 – наружный ядерный слой;
5 – наружный синаптический слой; 6 – внутренний ядерный слой;
7 – внутренний синаптический слой; 8 – ганглиозный слой;
9 – слой нервных волокон; 10 – внутренняя пограничная мембрана.
Стрелками обозначено направление проведения импульса

Рис. 3. Схема для обнаружения слепого пятна

Известен пока лишь один случай, когда из этого эффекта была извлечена реальная польза. Один физиолог, показавший действие слепого

пятна, стал любимцем при дворе французского короля; на утомительных заседаниях со своими придворными король развлекался, «отрубая» им головы: он смотрел на одного из них и следил, как в это время «исчезала» голова другого.

Палочки обладают значительно большей чувствительностью к свету, чем колбочки. Ночью и в сумерки (при освещенности меньше 0.01 лк) зрительное ощущение вызывается за счет раздражения одних только палочек. Зато колбочки способны различать цвета, а палочки этой способностью не обладают. Практически цветное зрение начинается с освещенности примерно 1 лк. При освещенности выше 100…1000 лк зрение осуществляется почти исключительно колбочками. Детали предмета различаются наиболее отчетливо, когда его изображение получается на желтом пятне и, в особенности, на центральной ямке сетчатки. Это так называемое фовеальное зрение, в отличие от периферического зрения, при котором изображение предмета получается вдали от центральной ямки. При периферическом зрении человек видит предметы значительно менее четко, различая в них мало деталей. Благодаря наличию на периферии в небольшом количестве колбочек, при периферическом зрении ощущение цветов имеет место, но только при условии, что яркость света достаточно велика, чтобы его воспринимали колбочки. Здесь несколько палочковых и колбочковых клеток контактируют с биполярной клеткой, а несколько биполярных клеток контактируют с ганглиозной клеткой. Такая суммация приводит к тому, что зрительные сигналы, посылаемые ганглиозными клетками в мозг, достигают большей силы, чем при изолированном проведении информации, а это обусловливает большую светочувствительность.

Интересно, что любая чувствительная к свету клетка в сетчатке не связана со зрительным нервом непосредственно, а соединена с другими клетками, которые соединены между собой. Существует несколько типов клеток: одни несут информацию к зрительному нерву, а другие связаны между собой в основном в «горизонтальном» направлении. Информация, полученная от различных клеток, не сразу поступает в мозг от каждой точки в отдельности, а частично осмысливается в сетчатке путем комбинирования информации от нескольких зрительных рецепторов. Важно понять, что сам глаз выполняет часть функций осмысливания, свойственных головному мозгу.

10.2. Оптическая система глаза

Оптическая система глаза (рис. 4) состоит из следующих элементов:

- роговица;

- передняя камера с водянистой влагой;
- хрусталик;
- стекловидное тело;
- сетчатка.

Оптические схемы современных видеокамер с ПЗС матрицами являются практически полными аналогами оптической схемы глаза. Но глаз по сравнению с камерой имеет один заметный недостаток: яркий посторонний свет частично проходит через склеру, снижая тем самым контраст изображения на сетчатке.

Наиболее оптически сильным элементом ОС глаза является передняя поверхность роговицы. Это обусловлено тем, что она разделяет две среды с наибольшим скачком показателей преломления. Для анализа работы ОС глаза разработано несколько схематических моделей глаза. Несколько модифицированная схема, применяющаяся в современной офтальмологии, называется моделью стандартного глаза.

Систематические измерения привели к установлению средних значений всех параметров нормального глаза. Ниже приведены значения этих параметров, как они были определены Гульстрандом.

10.2.1. Матрица конструктивных параметров глаза

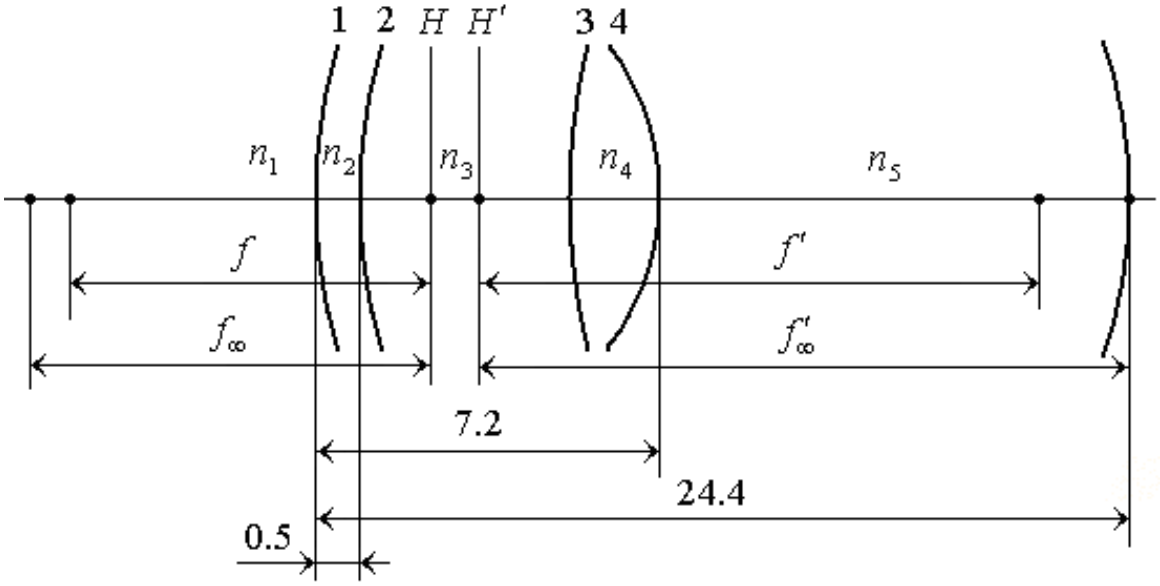


Рис. 4. Оптическая система глаза;
$n_1 = 1, n_2 = 1.376, n_3 = 1.336, n_5 = 1.336.$
f и f' – передний и задний фокусные расстояния глаза
при максимальном напряжении глазной мышцы;
f_∞ и f'_∞ – передний и задний фокусные расстояния глаза
при расслабленной глазной мышце (глаз настроен на бесконечность)

10.2.2. Схематичный нормальный глаз по Гульстранду

Таблица 1

Параметр	При расслабленной глазной мышце	При максимальном напряжении мышцы
Расстояние до задней поверхности роговицы	0.5	
Расстояние до передней поверхности хрусталика	3.6	3.2
Расстояние до задней поверхности хрусталика	7.2	
Радиус передней поверхности роговицы	7.7	
Радиус задней поверхности роговицы	6.8	
Радиус передней поверхности хрусталика	10.000	5.330
Радиус задней поверхности хрусталика	–6.000	–5.330
Расстояние до передней главной плоскости	1.377	1.760
Расстояние до задней главной плоскости	1.645	2.127
Расстояние до передней узловой точки	7.103	6.522
Расстояние до задней узловой точки	7.032	6.888
Расстояние до переднего фокуса	–15.655	–12.412
Расстояние до заднего фокуса	24.400	21.060
Переднее фокусное расстояние	–17.032	–14.172
Заднее фокусное расстояние	22.755	18.934
Расстояние до входного зрачка	3.047	2.668
Расстояние до выходного зрачка	3.677	3.266
Увеличение в зрачках	0.910	0.940
Расстояние до ближней точки		–92.750
Оптическая сила глаза в диоптриях	58.713	70.562

10.2.3. Матрица конструктивных параметров глаза

Таблица 2

В состоянии					
Расслабленной глазной мышцы			Максимального напряжения мышцы		
r	d	n_D	r	d	n_D
		1			1

Окончание табл. 2

В состоянии					
Расслабленной глазной мышцы			Максимального напряжения мышцы		
r	d	n_D	r	d	n_D
7.7			7.7		
	0.5	1.376		0.5	1.376
6.8			6.8		
	3.1	1.336		2.7	1.336
10			5.33		
	3.6	1.4091		4	1.4261
–6			–5.33		
	17.2	1.336		17.2	1.336

Примечание. В данной модели глаза считается, что аккомодация осуществляется только за счет изменения формы хрусталика. Размер глаза вдоль оптической оси, равный 24.4 мм, считается базовым и остается постоянным. Подгоночным параметром является показатель преломления хрусталика. Все расстояния, кроме фокусных, отсчитываются от вершины роговицы.

10.2.4. Вклад роговицы в общую оптическую силу глаза

Насколько важен вклад роговицы в общую оптическую силу глаза, можно рассчитать по формулам параксиальной оптики (рис. 5):

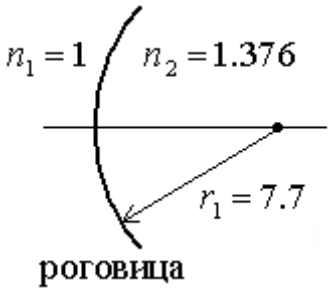


Рис. 5. Вклад роговицы в оптическую силу глаза

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1},$$

если $$s_1 \to \infty, \text{ то } \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} = \Phi_{роговицы},$$

$$\Phi_{роговицы} = \frac{1.376 - 1}{7.7} \cdot 1000 = 48.83 \text{ дптр},$$

$$\frac{\Phi_{роговицы}}{\Phi_{глаза}} = \frac{48.83}{58.64} \cdot 100\% = 83.17\% \ .$$

Из полученного видно, что при аккомодации глаза на бесконечность оптическая сила первой поверхности роговицы составляет примерно 83 % оптической силы глаза.

10.3. Поле зрения глаза

Поле зрения, соответствующее желтому пятну, невелико. На это пятно одновременно может проектироваться картина с угловыми размерами около 6^0 по горизонтальному направлению и около 4^0 по вертикальному. Поле зрения центральной ямки еще меньше – около 1.2^0 по горизонтали и вертикали. Такая ограниченность поля ясного зрения компенсируется, однако, тем, что живой глаз обладает способностью быстро поворачиваться в глазной впадине, за очень короткое время обегая все точки видимой поверхности рассматриваемого большого объекта. Благодаря этому поле ясного зрения расширяется приблизительно до 150^0 по горизонтали и 120^0 по вертикали. Вместе с тем отмеченная подвижность глаза позволяет быстро концентрировать внимание на наиболее важных деталях предмета.

10.4. Угловой предел разрешения глаза

Угловой предел разрешения глаза ψ – это угловое расстояния между двумя предметными точками, которые глаз воспринимает как раздельные; имеет разные значения по полю зрения, обусловленные размерами колбочек, диаметр которых примерно 5 мкм.

Наивысшее разрешение, то есть наименьшее значение ψ, соответствует тому участку поля зрения, которое оптически сопряжено с желтым пятном, где концентрация колбочек на единице площади наибольшая. За счет этого в указанной зоне поля зрения нормальный глаз в среднем имеет угловой предел:

$$\psi = 60'' = 1' \quad (\text{бывает} \quad 20''-30'').$$

Мозг реагирует на раздражение каждой колбочки. Когда изображения двух близких светящихся точек приходятся на одну и ту же колбочку, эти точки действуют как одна светящаяся точка. В этом случае разрешения не получается. Для разрешения необходимо, чтобы изображения этих двух точек приходились на разные колбочки. На периферии плотность распределения светочувствительных рецепторов – колбочек и палочек – меньше, а каждое волокно зрительного нерва соединено с группой этих рецепторов. Вот почему максимальная разрешающая способность глаза получается при фовеальном зрении, когда изображение получается на центральной ямке сетчатки. Зрение же при помощи

палочек предназначено не для повышения разрешающей способности глаза, а для увеличения его чувствительности в условиях работы при слабой освещенности. Для этого выгодно, как это и есть на самом деле, чтобы с каждым волокном зрительного нерва была соединена не одна палочка, а большая группа их. От этого усиливается сигнал, передаваемый по этому волокну. С изложенной точки зрения угловое разрешение глаза равно углу, под которым видно из задней узловой точки глаза среднее расстояние $\delta x'$ между центрами двух соседних колбочек на центральной ямке, то есть $\psi = \dfrac{\delta x'}{f}$, где f – переднее фокусное расстояние. Подставив приведенные выше числа, получим $\psi \approx 30''$.

Величина $\Theta = \dfrac{60''}{\psi}$ называется остротой зрения.

Острота зрения, в основном определяемая диаметром колбочек, зависит, кроме того, от многих факторов:

1. От контраста предметов.

Под контрастом понимают способность глаза воспринимать различие в освещенности двух частей поля зрения, которые он может видеть одновременно или последовательно. Глаз весьма чувствителен к яркостному контрасту наблюдаемых предметов. Яркостный контраст K, при котором глаз может обнаружить предмет на некотором фоне, определяют по одной из следующих формул:

$$K = \frac{L_2 - L_1}{L_1}, \quad K = \frac{L_2 - L_1}{\frac{1}{2}\cdot(L_2 + L_1)}, \quad K = \frac{L_2}{L_1}, \tag{2}$$

где L_1, L_2 – яркость фона и предмета соответственно.

Наименьший контраст, воспринимаемый глазом, называют пороговым:

$$K_{MIN} = \frac{\Delta L_{MIN}}{L_1}, \tag{3}$$

Величина S, обратная пороговому контрасту, называется контрастной чувствительностью глаза:

$$S = 1/K_{MIN}. \tag{4}$$

2. От освещенности в поле наблюдения. При наблюдении темных предметов на светлом фоне наибольшая острота зрения наблюдается в пределах освещенности от 50 до 200 лк, а при наблюдении светлых предметов на темном фоне – от 5 до 10 лк.

3. От диаметра $D_{ЗР}$ зрачка глаза. С величиной $D_{ЗР}$ связан диаметр δ дифракционного кружка рассеяния на сетчатке:

$$\delta = 2.44 \cdot \frac{\lambda \cdot f_{ГЛ}}{D_{ЗР}} , \qquad (5)$$

где λ – длина волны света; $f_{ГЛ}$ – переднее фокусное расстояние глаза.

При $D_{ЗР} = 2\ мм, \lambda = 0.5\ мкм, f_{ГЛ} = -17\ мм$ (без прибора) находим $\delta = 5\ мкм$. Следовательно, диаметр кружка рассеяния в этом случае равен диаметру колбочки. При увеличении диаметра зрачка глаза величина δ согласно формуле уменьшается, но острота зрения при этом не повышается, так как она лимитируется размером колбочек сетчатки. Если глаз работает вместе с оптическим прибором, диаметр выходного зрачка которого меньше 2 мм, то величина δ становится больше 5 мкм и разрешающая способность глаза уменьшается, то есть $\psi > 1'$.

4. От места изображения на сетчатке. При удалении от центральной ямки желтого пятна острота зрения падает очень резко.

5. От длины волны света. Максимальная разрешающая способность наблюдается при $\lambda = 0.56$ мкм.

6. От дефектов зрения. Близорукость, дальнозоркость и астигматизм (особенно последний) существенно снижают остроту зрения.

10.5. Адаптация глаза

Адаптацией глаза называют его приспособляемость к изменениям внешнего яркостного поля. Прямые солнечные лучи создают освещенности порядка 10^5 лк, а в полной темноте глаз способен отличать от темноты предметы с освещенностью 10^{-6} лк. Глаз способен воспринимать световые потоки в интервале $10^{-17} - 10^{-5}$ вт. При повышении яркости происходит **световая**, а при **понижении** – темновая адаптация.

Адаптация глаза осуществляется за счет действия двух разных механизмов:

1. Изменение диаметра зрачка глаза в пределах от 2 до 8 мм. Это изменение диаметра происходит помимо воли человека, благодаря работе мускульных волокон, заложенных в радужке. Площадь отверстия зрачка и пропускаемый им световой поток изменяются, таким образом, всего в 16 раз. Приводимая ниже табл. 3 дает представление о зависимости диаметра зрачка глаза от яркости поверхности, на которую он адаптирован. При наблюдении в оптический прибор зрачок глаза совмещается с выходным зрачком прибора и, следовательно, для того, чтобы изображение в глазу имело наибольшую освещенность, необходимо,

чтобы выходной зрачок прибора был бы не меньше, чем зрачок глаза. Так как зрачок глаза, согласно табл. 3, зависит от светового режима работы, то, следовательно, выходные зрачки приборов должны быть различными в зависимости от условий из применения. Зрительные трубы, предназначенные для работы ночью, должны иметь выходные зрачки диаметром 7…8 мм. При дневных наблюдениях оптические приборы должны иметь выходные зрачки диаметром 3…4 мм.

В микроскопах при наблюдении сильно освещенных предметов достаточны диаметры выходных зрачков порядка 1…2 мм.

Таблица 3

Яркость поля адаптации, нт	Освещенность на сетчатке глаза, лк	Диаметр зрачка глаза, мм	Площадь зрачка глаза, мм^2
10^{-5}	2.2×10^{-6}	8.2	52
10^{-3}	2.0×10^{-4}	7.8	48
10^{-2}	1.8×10^{-3}	7.4	43
10^{-1}	1.5×10^{-2}	6.7	35
1	10^{-1}	5.7	25
10	0.6	4.3	15
10^2	3	3	7
10^3	17.6	2.3	4.2
2×10^4	109.5	2.2	4

2. Второй механизм адаптации связан с особенностями работы зрительных рецепторов: при яркости от 10^{-7} до 1 нт работают главным образом палочки сетчатки, а при яркостях от 1 до 10^5 нт работают в основном колбочки.

При переходе от яркости $\sim10^3$ нт к темноте чувствительность глаза возрастает в течение часа примерно в 10 миллионов раз. Сначала чувствительность возрастает очень быстро, затем ее рост замедляется и после часа пребывания в темноте уровень чувствительности почти не меняется. Изменение чувствительности к световому восприятию в столь широких пределах свойственно палочкам. Темновая же адаптация колбочек происходит значительно быстрее, чем палочек, но чувствительность колбочек возрастает при этом всего в 10–100 раз.

Световая адаптация происходит значительно быстрее темновой. При средних яркостях она продолжается 1…3 минуты. В состоянии максимальной световой адаптации глаз может без вреда переносить сравнительно большие яркости (например, яркости белых матовых поверхностей, освещенных прямым солнечным светом). При больших и очень больших яркостях необходима искусственная защита (очки, фильтр).

При резкой смене яркости зрачок глаза меняет свой диаметр в течение одной секунды. За это время может произойти ослепление сетчатки. Поэтому природой глаза предусмотрено более быстрое по времени изменение чувствительности самих рецепторов. Долгое время считалось, что такое изменение чувствительности связано с изменением количества родопсина в палочках. Когда яркость света повышается, родопсин выцветает, и чувствительность глаза понижается. При уменьшении яркости происходит восстановление родопсина и связанное с этим повышение чувствительности. Однако работы последнего времени поставили под сомнение эту точку зрения. Наблюдения показали, что чувствительность глаза к свету меняется всего сильнее, когда уменьшение родопсина еще очень невелико. Наоборот, когда концентрация родопсина резко уменьшается, чувствительность уменьшается незначительно. С изложенной точки зрения это понять трудно. Возможно, играет роль перестройка корковых центров, воспринимающих свет, то есть повышение и понижение их чувствительности.

Но сетчатка, несмотря на наличие двух механизмов адаптации, не способна выдержать облученность, которая создается в дифракционном пятне количеством световой энергии более 1 мДж. Поэтому при использовании в оптических приборах высоко яркостных излучателей (лазеров), необходимо руководствоваться санитарными нормами безопасного облучения глаза.

10.6. Чувствительность глаза

Чувствительность глаза к излучениям различных длин волн характеризуется кривой видности. **Видность V_λ – это величина, обратная энергетической мощности излучений, которые при оценке глазом воспринимаются как одинаково яркие.**

Кривая видности среднего нормального глаза при дневном зрении, утвержденная Международной осветительной комиссией, приведена на рис. 6.

Она имеет максимум в желто – зеленой части спектра при $\lambda = 555\,нм$ (кривая 1), условно принимаемый за единицу. При сумеречном зрении, когда работает только палочковый аппарат, кривая видности сохраняет свой общий вид, но смещается в сторону коротких волн с максимумом около 510 нм (кривая 2). При этом область максимальной чувствительности сетчатки смещается на $10^0 - 20^0$ в сторону от центральной ямки.

Еще в 1825 году Пуркинье наблюдал, что излучения различного цвета, воспринимаемые глазом как одинаково яркие, меняют свою ви-

димую яркость не одинаково, если их ослаблять в одно и то же количество раз. Видимая яркость излучений с большей длиной волны уменьшается быстрее, чем с более короткой длиной волны. Если ограничить поле зрения до 1.5^0 и сконцентрировать сравниваемые излучения в пределах центральной ямки, то свет будет восприниматься только колбочками. Исследования показали, что в этом случае явление Пуркинье не наблюдается. Все это хорошо согласуется с двойным механизмом восприятия света: посредством колбочек и посредством палочек, которым соответствуют различные кривые видности. Если, например, взять два листка бумаги, скажем, красный и синий, то в полутьме синий будет казаться ярче красного, хотя при хорошем освещении красный листок гораздо ярче синего.

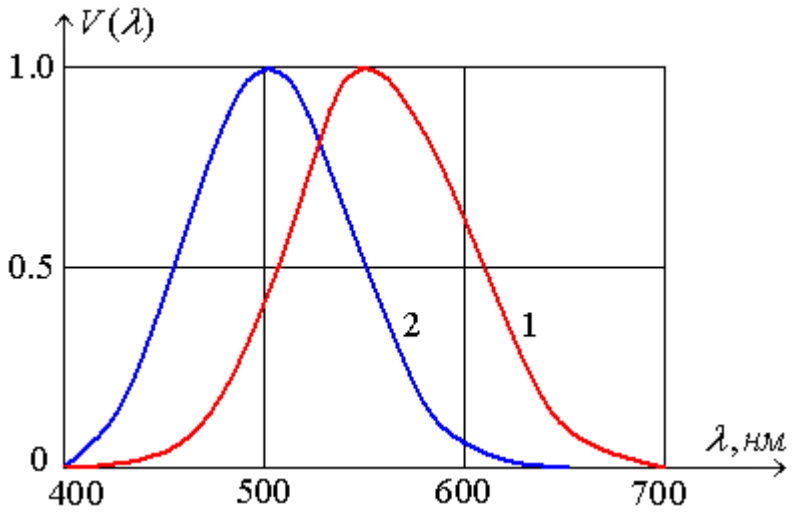


Рис. 6. Кривая видности глаза:
1 – при дневном освещении; 2 – в сумерках

Область, доступная зрительному восприятию, не обрывается резко на длинах волн 400 и 760 нм. При $\lambda = 400$ нм видность V_λ примерно в 2500 раз, а при $\lambda = 760$ нм – в 20000 раз меньше, чем в максимуме. В условиях темновой адаптации глаз может видеть в очень слабой степени интенсивные инфракрасные лучи с длинами волн до 950 нм, а ультрафиолетовые – до 300 нм.

Границы видимой области, а также сама форма кривой видности человеческого глаза не случайны. Глаз сформировался в процессе длительной эволюции, приспособившись к условиям освещения земных предметов солнечным светом, а также к условиям сумеречного и ночного освещения. На эту мысль наводит уже и то обстоятельство, что на видимую область спектра приходится более 40 % энергии излучения солнца, хотя она и занимает интервал менее одной октавы. Далее, солнечный

спектр вблизи поверхности Земли практически обрывается на длине волны 290 нм. Более короткие волны задерживаются слоем озона в атмосфере. Было бы биологически нецелесообразно, если бы глаз обладал способностью принимать излучение с длинами волн короче 290 нм.

Более того, глаз должен защищать себя от ультрафиолетовых (УФ) лучей. Они в большинстве случаев химически разлагают органические вещества и могут убивать живые микроорганизмы и клетки. Особенно вредно попадание УФ-лучей на сетчатку глаза. Чувствительность сетчатки к ультрафиолету довольно велика и, как показал С.И. Вавилов, имеет резкий максимум при $\lambda = 380$ нм. Однако от длинноволновых УФ-лучей ($290 < \lambda < 400$ нм), пропускаемых земной атмосферой, глаз защищен собственными средствами. Такие лучи сильно поглощаются внутри глаза, особенно в хрусталике, и лишь ничтожная доля их доходит до сетчатки. С этим и связан сильный спад кривой чувствительности глаза на границе в области ультрафиолета.

Высокая чувствительность к инфракрасному (ИК) излучению, если бы глаз обладал таковой, была бы не только нецелесообразна, но и сделала бы невозможной работу глаза в условиях солнечного освещения. Причина этого – в тепловом излучении глаза. Простые расчеты показывают, что мощность прямого солнечного излучения, попадающего через зрачок глаза, примерно в сто раз меньше мощности собственного теплового излучения глаза. Если бы чувствительность глаза в ИК области спектра была столь же велика, что и желто-зеленой, то собственное тепловое ИК излучение глаза затмило бы не только рассеянное излучение неба, но и прямой солнечный свет. Работа глаза как органа зрения стала бы абсолютно невозможной. В этом, по мнению С.И. Вавилова, одна из причин, почему у человека нет ИК зрения. Другая причина заключается в малости энергии ИК квантов света. Процесс зрения должен начинаться либо химическими, либо фотоэлектрическими действиями, а они вызываются отдельными квантами света и не могут происходить, если энергия кванта меньше некоторого минимального предела.

Для возбуждения светочувствительных рецепторов необходимо, чтобы они поглощали свет. Как правило, чувствительность рецептора к свету определенной длины волны должна быть тем выше, чем сильнее он поглощает свет этой длины волны. Это обстоятельство уже давно побудило исследователей искать в сетчатке глаза светочувствительные пигменты. Такой пигмент (родопсип, или зрительный пурпур) был обнаружен в палочках человеческого глаза. Это – вещество розоватого цвета, разлагающееся (выцветающее) на свету и снова восстанавливающееся в темноте. Спектральная кривая родопсина близка к сумеречной кривой видности. Извлечь светочувствительные пигменты из колбочек

сетчатки не удалось, хотя наблюдения живого глаза через зрачок, по-видимому, подтверждают, что в центральной части сетчатки имеются пигменты, выцветающие на свету.

10.7. Стереоскопическое зрение

При наблюдении одним глазом наблюдатель может различить разноудаленность объектов, если они ему знакомы заранее. Например, человек, кажущийся меньше другого, находится дальше. Если же наблюдаемые предметы не знакомы заранее, то сказать, который из них дальше, при наблюдении одним глазом затруднительно.

Оценка разноудаленности предметов значительно облегчается при наблюдении двумя глазами. У человека поля зрения обоих глаз практически совпадают. Вследствие этого оба глаза человека видят одновременно одни и те же предметы внешнего мира, как будто один глаз дублирует функции другого. Но именно это устройство привело к зарождению у человека особой и очень ценной способности: чувствовать глубину воспринимаемого зрением пространства или. **Способность человека на основании непосредственного зрительного ощущения оценивать расстояния до различных предметов называется пространственным зрением или стереоскопическим эффектом.**

Причина возникновения стереоэффекта заключается в ощущении наблюдателем неравенства двух изображений одного и того же предмета на сетчатках двух глаз человека, вызываемого несовпадением центров перспективы этих изображений (у глаза центром перспективы является узловая точка).

Способность человека наблюдать объекты двумя глазами и при этом видеть одно четкое изображение называется бинокулярным зрением.

Восприятие предмета в виде единого образа обеспечивается сведением глаз – **конвергенцией**. При этом изображение предмета в каждом из глаз попадает на центральное углубление в желтом пятне и, как подтверждает опыт, наблюдатель в этом случае видит один предмет. Если наблюдаемая точка расположена на близком расстоянии от глаз, то оба глаза должны повернуться в своих орбитах так, чтобы зрительные оси пересеклись на рассматриваемой точке. При этом изображение точки также попадает на центральное углубление сетчатки каждого глаза, и наблюдатель видит точку без двоения. Если надавить на глаз, то изображение на сетчатке этого глаза сместится из центральной ямки и возникнет ощущение раздвоения точки. Рассмотрим основные свойства зрения двумя глазами, которые необходимо учитывать при конструиро-

вании оптических приборов. Пусть оба глаза смотрят в одну точку A (рис. 7). При этом одновременно происходят два процесса:

1. Глаза поворачиваются так, что оси визирования пересекаются в точке A, а изображение этой точки образуется в центральной ямке сетчатки.
2. Одновременно работают кольцевые мышцы хрусталиков глаз, обеспечивающие соответствующую аккомодацию.

Другими словами, при рассматривании предметов невооруженным глазом аккомодация и конвергенция производятся на одно расстояние.

Угол φ схождения зрительных осей называют углом конвергенции.

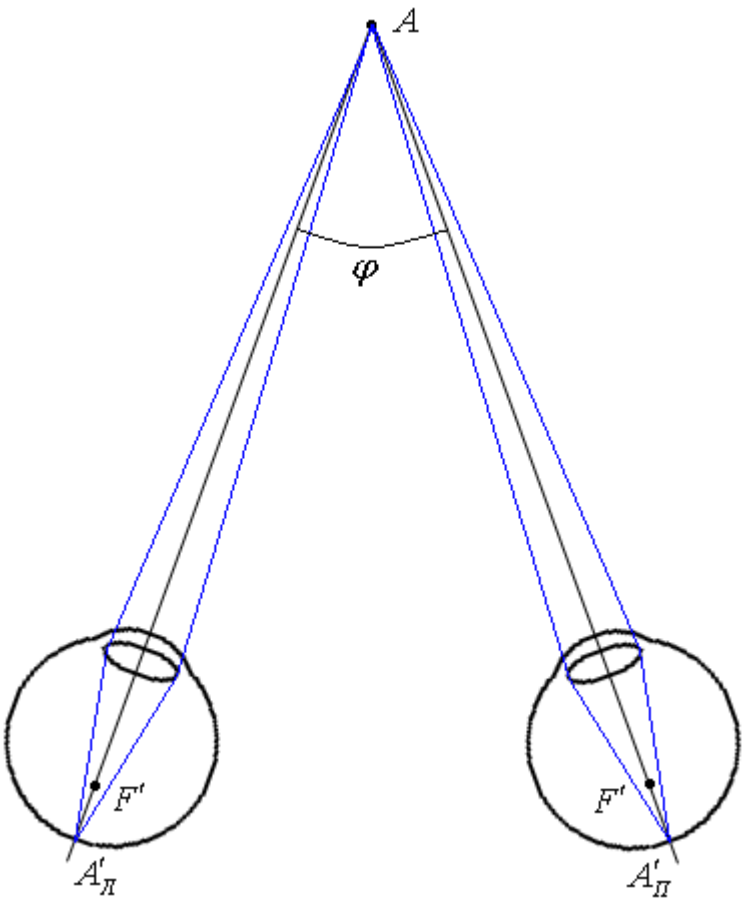


Рис. 7. Наблюдение двумя глазами точки A, находящейся на конечном расстоянии

Изменение угла конвергенции тесно связано с изменением аккомодации: чем больше угол конвергенции, тем больше аккомодация. Максимальный угол конвергенции равен примерно 32°. Если рассматриваемы предмет находится в бесконечности, то оси глаз параллельны ($\varphi = 0$) и аккомодация также равна нулю.

Отсюда вытекают требования к конструкции бинокулярных приборов:

1) если оси окуляров бинокулярного прибора составляют между собой угол φ, то из окуляров этого прибора должны выходить расходящиеся пучки лучей, соответствующие аккомодации глаз при этом угле конвергенции. Примером такого прибора служит бинокулярный микроскоп Грену;
2) если оси окуляров бинокулярного прибора параллельны, то из окуляров должны выходить пучки параллельных лучей. Примером такого прибора является бинокль.

Но при применении бинокулярных приборов естественная связь аккомодации и конвергенции может нарушаться. На основании ряда экспериментов установлено, что глаза переносят расхождение расстояний конвергенции и аккомодации в 3 *дптр*, но при проектировании стереоскопических приборов следует удерживать это расхождение в зоне комфорта ± 3 *дптр*.

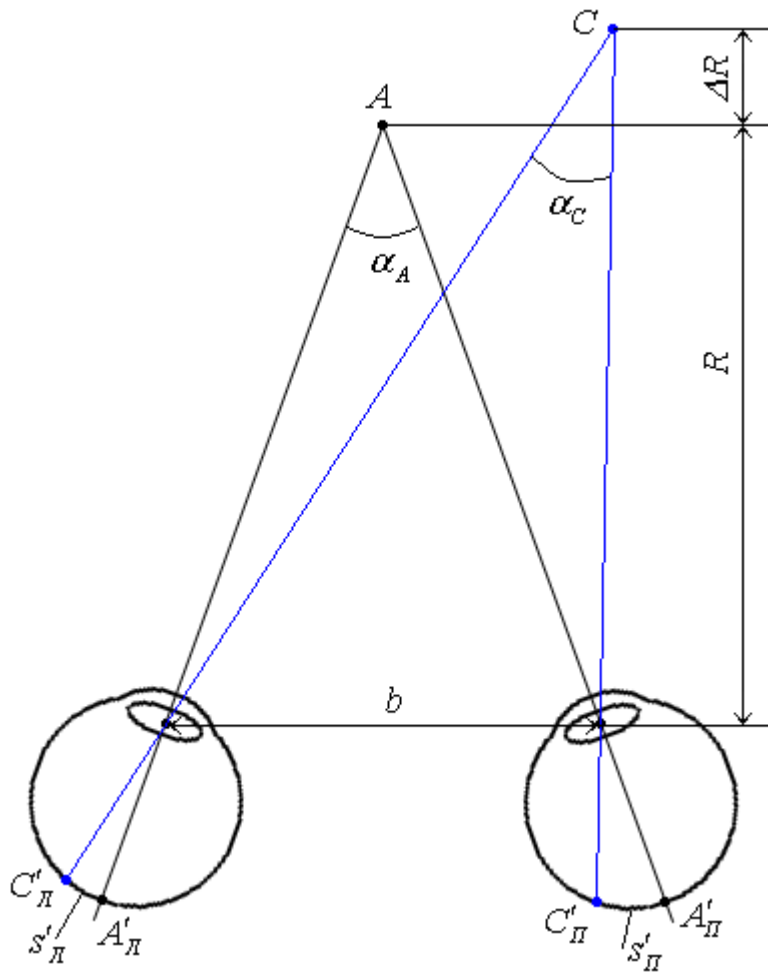


Рис. 8. Наблюдение двумя глазами двух точек A и C

Рассмотрим теперь наблюдение двумя глазами точек A и C (рис. 8), причем не обязательно, чтобы глаза были конвергированы на одну из этих точек. Расстояния между изображениями этих точек в левом глазу $s'_Л$ и в правом глазу $s'_П$ различны. Если наблюдатель это чувствует, то он чувствует и разноудаленность точек A и C или, как говорят, наблюдатель видит пространство стереоскопично.

Обозначим углы при точках A и C через α_A и α_C и назовем эти углы углами **параллакса**. Если глаза конвергированы, например, на точку A, то угол параллакса α_A равен углу конвергенции φ. Если точки A и C принадлежат одному предмету, то изменение угла параллакса α при переходе от одной точки предмета к другой послужит мерой воспринимаемой глазом рельефности этого предмета. Поэтому величина $\Delta\alpha = \alpha_A - \alpha_C$ называется мерой пластики.

Чем дальше находится предметная точка, тем меньше угол параллакса. Разность значений $\Delta s' = s'_Л - s'_П$, очевидно, пропорциональна разности углов параллакса $\Delta\alpha$. Опытным путем установлено, что средний наблюдатель чувствует разноудаленность точек A и C, если $\Delta\alpha \geq 10''$. Это значение $\Delta\alpha = 10''$ называется порогом стереоскопического восприятия. Расстояние между центрами вращения глазных яблок называется базой и обозначается через b. При больших значениях расстояния R до точки предмета можно приближенно считать, что база – это расстояние между центрами зрачков глаз.

У разных людей глазная база колеблется в пределах от 52 до 76 мм. Обычно принимается среднее значение глазной базы $b = 64$ мм.

Определим расстояние, в пределах которого наблюдается стереоскопический эффект. Если удаление R наблюдаемой точки от глаз достаточно велико по сравнению с базой b, то приближенно можно записать:

$$\alpha = \frac{b}{R}. \qquad (6)$$

Представим себе, что некоторая точка находится на таком расстоянии R_{MAX} от наблюдателя, что угол параллакса α равен $10''$. Очевидно, что допуская в параллактическом угле ошибку, также равную $10''$, наблюдатель не будет в состоянии отличить данную точку от бесконечно удаленной точки, для которой угол параллакса равен нулю. Такое расстояние R_{MAX} мы назовем радиусом стереоскопического зрения. Полагая в формуле (6) $\alpha = 10'' = 0.5 \cdot 10^{-4}$, $b = 64$ мм, находим:

$$R_{MAX} = \frac{b}{\alpha} = 1280\ м \approx 1.3\ км \qquad (7)$$

R_{MAX} – радиус стереоскопического зрения.

Дифференцируя формулу (6), находим:

$$\Delta\alpha = \frac{b \cdot \Delta R}{R^2} \text{ или } \Delta R = \frac{R^2 \cdot \Delta\alpha}{b}. \qquad (8)$$

Полагая в формуле (8) $\Delta\alpha = 10''$, найдем значение расстояния ΔR между предметами, меньше которого стереоэффект не наблюдается.

10.8. Недостатки оптической системы глаза и их коррекция

К основным недостаткам ОС глаза относят:

- сокращение объема аккомодации;
- аберрации ОС глаза, превышающие допустимые естественные.
- Сокращение объема аккомодации обусловлено двумя факторами:
- спазм мышц аккомодации (цилиарного тела), который приводит к **миопии** (или близорукости).
- возрастная потеря эластичности хрусталика. В результате глаз не способен аккомодироваться в основном на близлежащие предметы – **гиперметропия** (или дальнозоркость).

Глаз, который не имеет ни гиперметропии, ни миопии называется, **эмметропическим**. Глаз, в котором есть или миопия, или гиперметропия, называется **аметропическим**.

10.8.1. Миопия

Миопия проявляется как сокращение расстояния до дальней точки ясного зрения с бесконечности до некоторой конечной величины. У миопического глаза дальняя точка ясного зрения находится перед глазом.

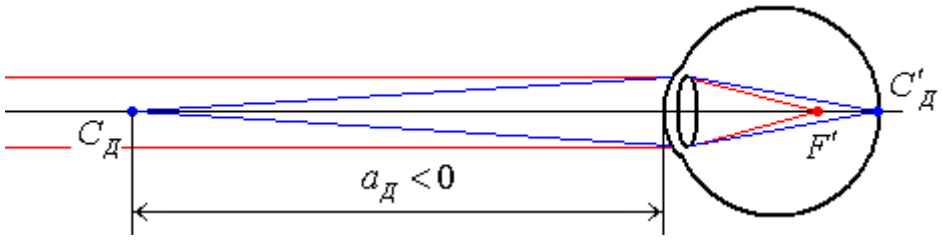


Рис. 9. Миопический (близорукий) глаз

Точка $C_Д$ – это точка, оптически сопряженная с плоскостью сетчатки при расслабленном состоянии глаза.

Степень миопии измеряют в диоптриях по формуле:

$$\frac{1000}{a_Д} = A_Д\,[дптр] \text{ – аметропия глаза.} \qquad (9)$$

$\Delta\varphi_M = -A_Д$ – миопическое приращение (или увеличение) оптической силы глаза.

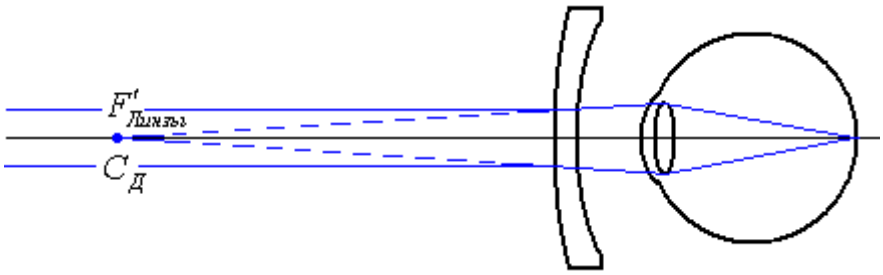


Рис. 10. Исправление миопии

Для коррекции этого недостатка, очевидно, требуется установление перед глазом отрицательной линзы (рис. 10), оптическая сила которой равна по модулю и противоположна по знаку миопическому приращению:

$$\varphi_{линзы} = \frac{1000}{f'_{линзы}} = -\Delta\varphi_M = \frac{1000}{a_Д}, \qquad (10)$$

откуда $f'_{линзы} = a_Д$ (11)

Миопия обычно находится в диапазоне от 0 до +10 дптр.

10.8.2. Гиперметропия

Гиперметропия проявляется как перемещение дальней точки ясного зрения из пространства перед глазом в пространство за глазом. Другими словами, при расслабленных мышцах глаза точкой, оптически сопряженной с сетчаткой, является точка $C_Д$ на оси справа от глаза (рис. 11).

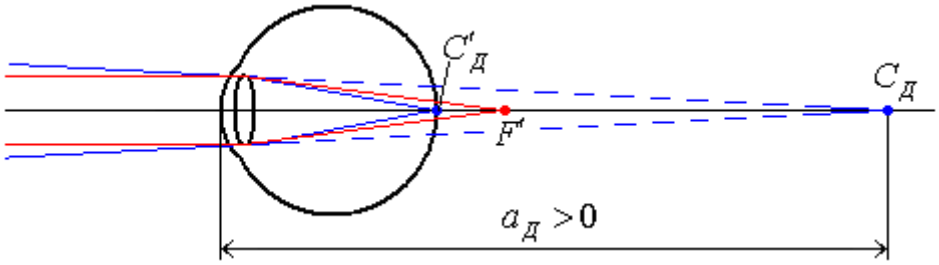


Рис. 11. Гиперметропический (дальнозоркий) глаз

Степень гиперметропии измеряют в диоптриях по формуле:

$$\frac{1000}{a_Д} = A_Д\,[дптр] \text{ – гиперметропия глаза.} \qquad (12)$$

$\Delta\varphi_Г = -A_Д$ – гиперметропическое приращение оптической силы глаза.

Для устранения этого недостатка зрения используют положительную линзу (рис. 12), оптическая сила которой равна по модулю и противоположна по знаку гиперметропическому приращению, или, другими словами, создает изображение бесконечно удаленного предмета в точке $C_Д$, совпадающей с задним фокусом линзы:

$$\varphi_{линзы} = \frac{1000}{f'_{линзы}} = -\Delta\varphi_Г = \frac{1000}{a_Д}, \qquad (13)$$

откуда

$$f'_{линзы} = a_Д \qquad (14)$$

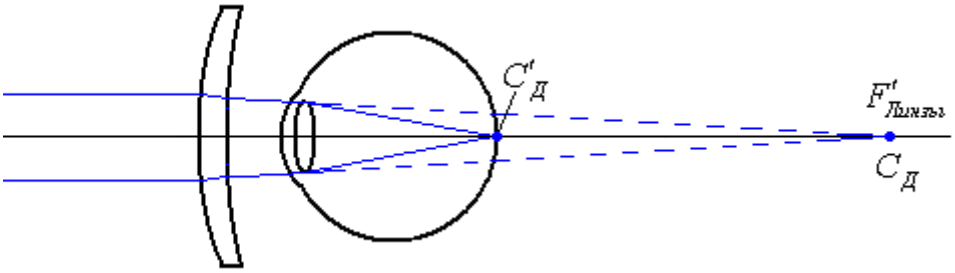


Рис. 12. Схема коррекции гиперметропии

10.8.3. Компенсация аметропии глаза в оптическом визуальном приборе

Таким образом, к оптическому прибору, обеспечивающему длительное наблюдение нормальным, близоруким и дальнозорким глазом, предъявляются следующие требования:

1) для нормального глаза из окуляра прибора должны выходить пучки параллельных лучей;
2) для близорукого – должны выходить пучки расходящихся лучей;
3) для дальнозоркого – должны выходить пучки сходящихся лучей.

Эти требования выполняются, если окуляр прибора может передвигаться вдоль оптической оси. При этом компенсацию делают обычно для глаз от +5 диоптрий до –5 диоптрий.

Рассмотрим перемещение окуляра для коррекции, например, миопического глаза (рис. 13).

Пусть в оптический прибор, состоящий из объектива и окуляра, рассматривают предмет C. На рис. 13,а показано положение окуляра для нормального глаза. При этом изображение C', образуемое объективом **1**, совпадает с передним фокусом F_2 окуляра **2** и, следовательно, изображение после окуляра лежит в бесконечности. Таким образом, гомоцентрический пучок лучей, исходящий из точки C, после окуляра преобразуется в пучок параллельных лучей. Если при таком положении

окуляра в этот прибор будет смотреть близорукий глаз, то пучок лучей после хрусталика соберется в заднем фокусе F' глаза, а на сетчатке вместо точки будет пятно δ'', вследствие чего точка C будет казаться расплывчатой.

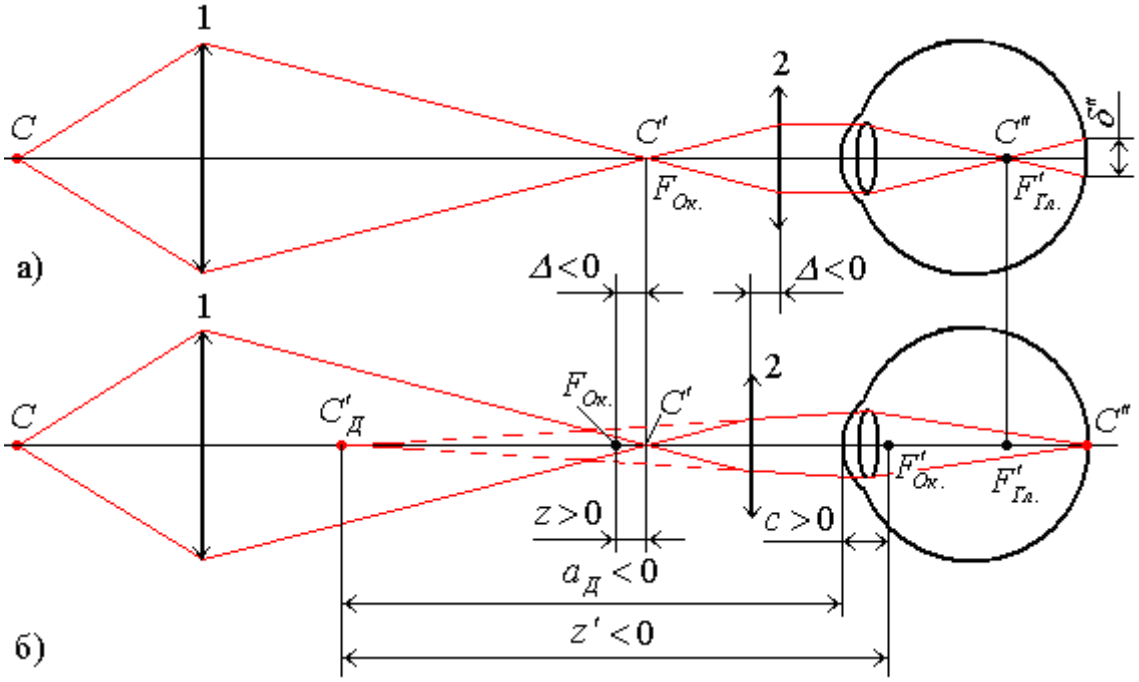


Рис. 13. Компенсация миопии подвижкой окуляра

Передвинем теперь окуляр на величину Δ (рис. 13,б), чтобы мнимое изображение C' точки A было в $C'_Д$ – дальней точке близорукого глаза.

Из рисунка получим следующие зависимости:

$$z = -\Delta, \tag{15}$$

$$z' = a_Д - c, \tag{16}$$

$z \cdot z' = -f'^2_{ОК}$, – формула Ньютона, отсюда находим (17)

$$\Delta = \frac{f'^2_{ОК}}{a_Д - c}. \tag{18}$$

Так как обычно $c \ll a_Д$ то с учетом формул (9) и (12), получим:

$$\Delta = \frac{f'^2_{ОК}}{1000} \cdot A_Д. \tag{19}$$

При близорукости ($A_Д < 0$, $\Delta < 0$) окуляр движется влево. При дальнозоркости ($A_Д > 0$, $\Delta > 0$) окуляр движется вправо.

10.8.4. Астигматизм глаза

Астигматизм – это аберрация ОС глаза, вызванная тем, что форма поверхности роговицы не имеет строгой осевой симметрии. В результате миопия или гиперметропия глаза определяется положением плоскостей симметрии роговицы.

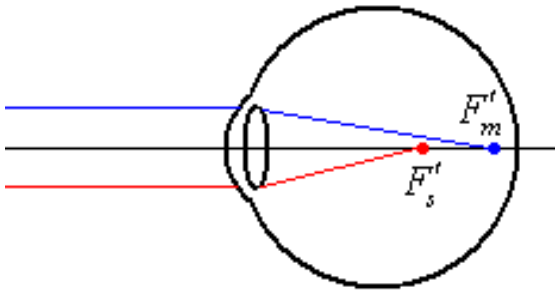


Рис. 14. Астигматический глаз

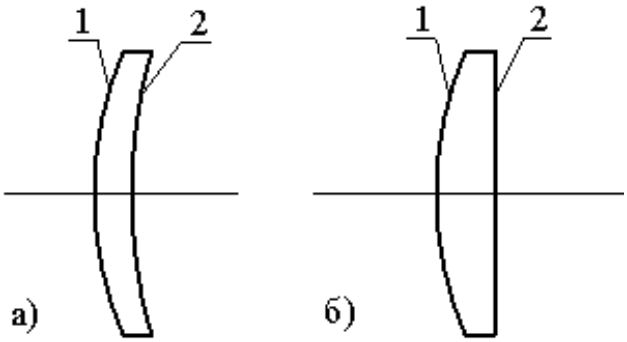


Рис. 15. Сфероцилиндрическая линза для коррекции астигматизма.
а) меридиональная плоскость; б) сагиттальная плоскость

Например, в меридиональной плоскости глаз имеет миопию +6 дптр, а в сагиттальной +9 дптр (рис. 14).

Астигматизм компенсируют обычно очковыми линзами, которые имеют разную оптическую силу в разных плоскостях.

Так на рис. 15 у линзы поверхность 1 сферическая, а поверхность 2 – цилиндрическая.

Кроме того, астигматизм может быть вызван деформацией поверхностей хрусталика, смещением осей хрусталика и роговицы. Устранение астигматизма – наиболее сложная операция по коррекции глаза.

10.8.5. Афакический глаз

Афакическим называют глаз, у которого удален хрусталик. Исправляют этот недостаток, имплантируя искусственный хрусталик в афакический глаз пациента.

10.9. Глубина резкости в пространстве предметов при наблюдении невооруженным глазом

Глаз, аккомодированный на какую-нибудь плоскость в пространстве, одновременно одинаково отчетливо резко видит также и некоторые предметы, расположенные впереди или позади этой плоскости, без изменения аккомодации глаза. **Расстояние между плоскостями P_1 и P_2 (рис. 16), между которыми расположены в пространстве предметы, одновременно резко видимые глазом без изменения аккомодации, называется глубиной резкости в пространстве предметов**.

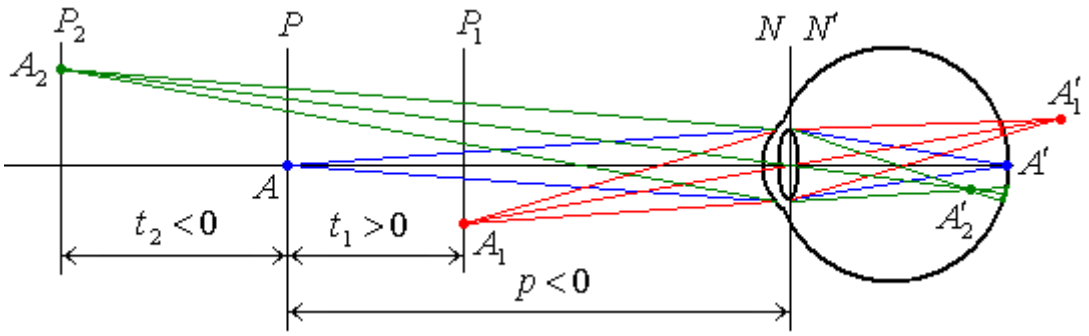


Рис. 16. К определению глубины резкости в наблюдаемом глазом пространстве.
N и N' – соответственно передняя и задняя узловая плоскость глаза;
p – расстояние от передней узловой точки глаза до плоскости предмета

Наличие глубины резкости объясняется особенностями физиологического строения глаза. Сетчатая оболочка, на которой получаются действительные изображения предметов, состоит из ряда фоторецепторов, являющихся световоспринимающими элементами. На основе геометрической оптики предметная точка на сетчатке глаза изображается в виде точки, если центр гомоцентрического пучка лучей внутри глаза лежит на сетчатой оболочке. В действительности резкое восприятие точки не нарушается даже и в том случае, когда центр пучка лучей, падающего на сетчатку, не лежит на ней, но кружок рассеяния, образуемый этим пучком на сетчатке, примерно равен размеру фоторецептора.

Вследствие этого наблюдатель всегда одновременно резко видит несколько различно удаленных предметов, если отдельные точки этих предметов дают свои изображения на сетчатке глаза в виде достаточно малых кружков рассеяния.

Обозначим через ψ угловую величину допускаемого кружка рассеяния на сетчатке глаза; очевидно, она равна пределу разрешения глаза в угловой мере.

Пусть глаз аккомодирован на плоскость P (рис. 16), сопряженную с сетчаткой глаза, которая в данном случае называется плоскостью наводки; одновременно резко видны точки плоскостей P_1 и P_2, изображения которых, получающиеся в виде кружков, не превышают по своим размерам допустимой величины.

Плоскости P_1 и P_2 являются границами глубины резкости и называются соответственно **передним** и **задним планами**. Расстояние t_1 называется передней глубиной, а t_2 задней глубиной. Числовое значение этих величин зависит от удаления p плоскости наводки от глаза и диаметра зрачка глаза. Для установки этой зависимости рассмотрим рис. 17.

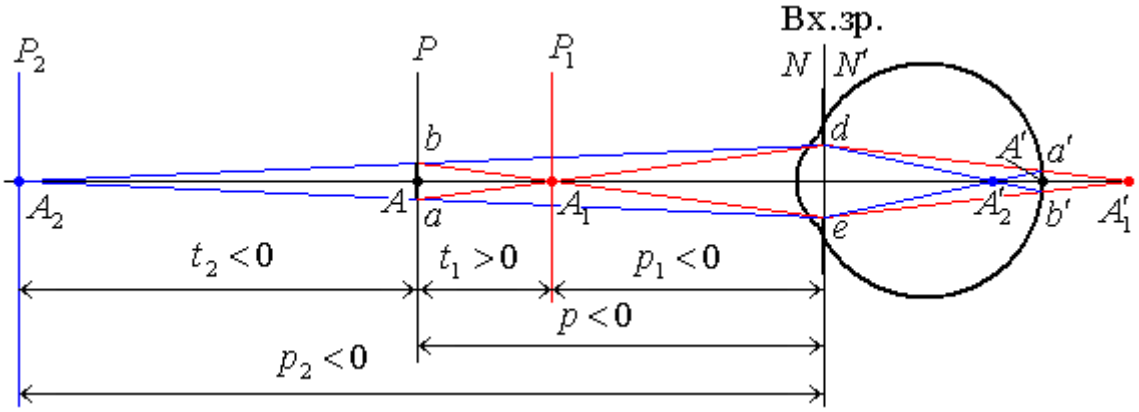


Рис. 17. К выводу формул, определяющих положение переднего и заднего плана глубины резкости в наблюдаемом пространстве

Пусть N и N' – узловые плоскости глаза, $a'b'$ – допустимый кружок рассеяния на сетчатке, ψ – его угловая величина. Изображения точек A_1 и A_2 не лежат на сетчатке глаза, но лучи, проходящие через них и края зрачка глаза, проходят через края $a'b'$. Этому элементу $a'b'$ на плоскости P соответствует сопряженный элемент ab, через края которого проходят лучи, выходящие из точек A_1 и A_2 и проходящие через края входного зрачка de глаза.

Поскольку расстояние между входным зрачком глаза и передней узловой плоскостью глаза пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием p, то **можно считать, что расстояние от плоскости предмета до входного зрачка глаза приближенно равно p – расстоянию до передней узловой плоскости глаза.** Так как угловое увеличение в узловых точках N и N' равно единице, то угловая величина ab относительно узловой точки N равна также ψ, следовательно:

$$ab = -p \cdot \psi . \qquad (20)$$

Обозначим диаметр зрачка глаза через $D_{ЗР.ГЛ.}$, тогда из подобия треугольников A_1de и A_1ab, A_2ab и A_2de получим:

$$\frac{D_{ЗР.ГЛ.}}{p_2} = \frac{p \cdot \psi}{-p_2 + p}, \tag{21}$$

$$\frac{D_{ЗР.ГЛ.}}{p_1} = -\frac{p \cdot \psi}{-p_1 + p}. \tag{22}$$

Решая уравнения (21-22) относительно p_1 и p_2, получим:

$$p_1 = \frac{p \cdot D_{ЗР.ГЛ.}}{D_{ЗР.ГЛ.} - p \cdot \psi}, \tag{23}$$

$$p_2 = \frac{p \cdot D_{ЗР.ГЛ.}}{D_{ЗР.ГЛ.} + p \cdot \psi}. \tag{24}$$

Далее из рис. 17 находим:

$$t_1 = -p + p_1, \tag{25}$$

$$t_2 = -p + p_2. \tag{26}$$

Принимая во внимание формулы (23-24), получим:

$$t_1 = \frac{p^2 \cdot \psi}{D_{ЗР.ГЛ.} - p \cdot \psi}, \tag{27}$$

$$t_2 = \frac{p^2 \cdot \psi}{D_{ЗР.ГЛ.} + p \cdot \psi}. \tag{28}$$

Формулы (23-24) и (27-28) позволяют определить глубину резкости для глаза при любом расстоянии до плоскости наводки.

Положим теперь, что глаз аккомодирован на бесконечность, следовательно, $p = -\infty$. Расстояние до переднего плана при этом обозначим через $p_{1\infty}$, а до заднего – через $p_{2\infty}$. Тогда согласно формулам (23-24) получим:

$$p_{1\infty} = -\frac{D_{ЗР.ГЛ.}}{\psi}, \tag{29}$$

$$p_{2\infty} = +\frac{D_{ЗР.ГЛ.}}{\psi}, \tag{30}$$

Расстояние $p_{1\infty}$ можно назвать расстоянием до «начала бесконечности»; это означает, что все предметы, удаленные от глаза на расстояние, не меньшее чем $p_{1\infty}$, воспринимаются в данном случае глазом также

резко, как и предметы, бесконечно удаленные. Таким образом, расстояние $p_{1\infty}$, определяемое формулой (29), для данного глаза можно считать практически бесконечно большим.

Величина $p_{2\infty}$ имеет аналогичное значение, но для мнимых предметов, так как $p_{2\infty}$ в формуле (30) имеет положительное значение.

Допустим теперь, что глаз аккомодирован на «начало бесконечности», полагая p равным $p_{1\infty}$. Из формул (23-24) найдем:

$$p_1 = -\frac{D_{ЗР.ГЛ.}}{2 \cdot \psi}, \tag{31}$$

$$p_2 = \infty. \tag{32}$$

В этом случае передний план лежит в два раза ближе, чем в предыдущем. Общая же глубина резкости равна бесконечности.

Считая, что предел разрешения глаза $\psi = 1'$, получим следующие значения $p_{1\infty}$ для зрачков глаза различных диаметров:

$D_{ЗР.ГЛ.}$, мм	$p_{1\infty}$, м
1	–3.33
2	–6.67
3	–10.00

В приведенных выше формулах на практике иногда полагают $\psi = 2' \div 3'$.

11. АПЕРТУРНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕНТРИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЗ

11.1. Апертурная диафрагма

Рассмотрим оптическую систему и две сопряженные осевые точки A и A', расположенные соответственно в пространстве предметов и пространстве изображений (рис. 1).

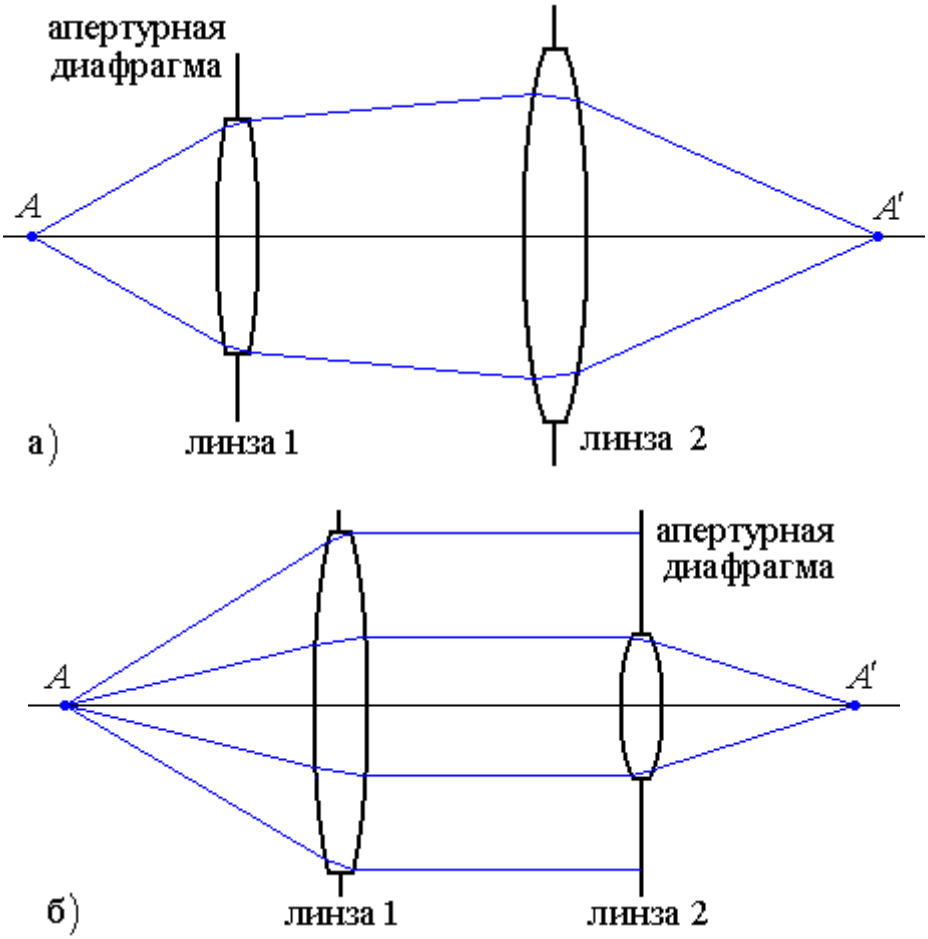


Рис. 1. Апертурная диафрагма

Из всего пучка лучей, исходящих из точки A, только центральная часть лучей достигает точки изображения A'; остальные будут обрезаны либо краями оправ линз, либо краями других апертур оптической системы. **Среди всех диафрагм есть такая, которая максимальным образом ограничивает размеры пучка и таким образом определяет конус лучей, проходящих через систему. Именно эту, фактически действующую диафрагму, называют апертурной диафрагмой.**

На рис. 1,а роль апертурной диафрагмы выполняет первая линза, на рис. 1, б вторая линза обрезает часть света, проходящего через первую линзу, и таким образом действует как апертурная диафрагма.

На рис. 2 показаны два примера, когда предмет расположен в бесконечности; в обоих случаях лучи проходят так, что, вопреки ожиданиям, апертурной диафрагмой является линза большего диаметра.

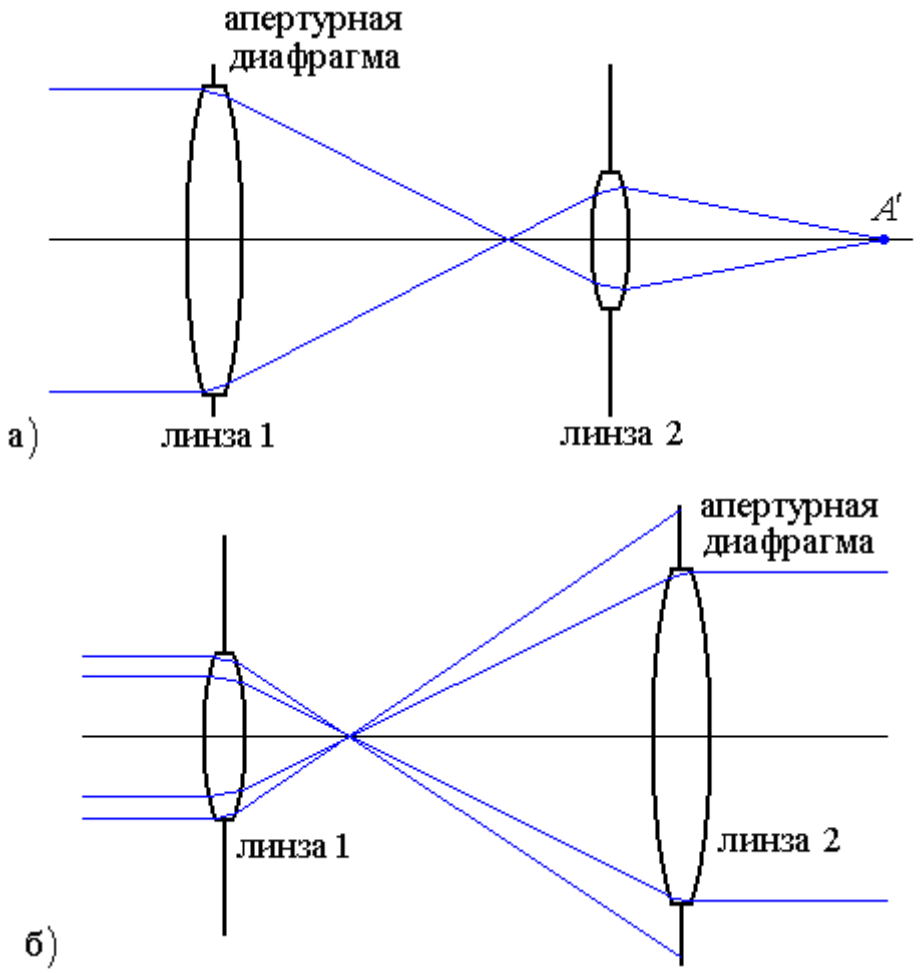


Рис. 2. Апертурная диафрагма

Изображение апертурной диафрагмы (действительное или мнимое) в пространстве предметов называется входным зрачком. Если апертурная диафрагма находится внутри оптической системы, то ее изображение строится в обратном ходе через все линзы, которые лежат между апертурной диафрагмой и предметом. Диафрагма, расположенная перед оптической системой, может оказаться апертурной, а значит, одновременно и материальным входным зрачком.

Изображение апертурной диафрагмы в пространстве изображений называется выходным зрачком. Изображение строится через все

линзы, расположенные между апертурной диафрагмой и изображением предмета (рис. 3).

Входной, выходной зрачки и апертурная диафрагма по определению сопряжены между собой. Отношение диаметра D' выходного зрачка к диаметру D входного зрачка равно линейному увеличению β_P оптической системы в зрачках: $\beta_P = D'/D$. Входной и выходной зрачки видны из осевой точки предмета и изображения соответственно под наименьшим углом.

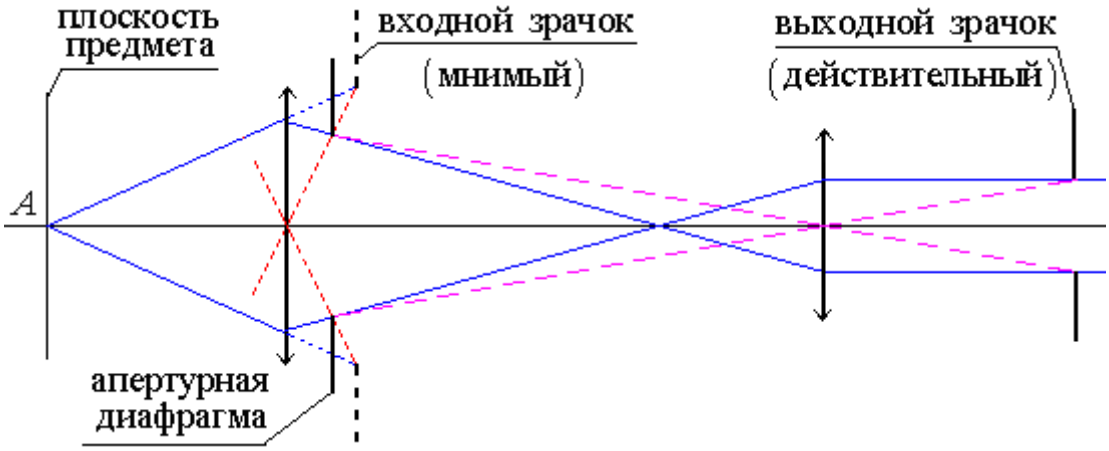


Рис. 3 Апертурная диафрагма в микроскопе

Апертурным углом σ_A в пространстве предметов называют угол между оптической осью и лучом, выходящим из осевой точки A предмета на край входного зрачка.

Апертурным углом $\sigma'_{A'}$ в пространстве изображений называют угол между оптической осью и лучом, проходящим через край выходного зрачка и осевую точку A' изображения (рис. 4).

Правило знаков (отличается от правила в матричной оптике): угол между лучом и оптической осью меньше нуля, если для совмещения с оптической осью луч необходимо повернуть по кратчайшему пути по часовой стрелке, и больше нуля в противном случае.

В параксиальной области углы σ_A и $\sigma'_{A'}$ связаны соотношением:

$$\gamma = \frac{\sigma'_{A'}}{\sigma_A} \text{ – } \textbf{угловое увеличение} \text{ в точках } A \text{ и } A'. \qquad (1)$$

Луч, проходящий через внеосевую точку предмета и центр входного зрачка, называют **главным лучом** (рис. 4).

В визуальных оптических системах, действующих совместно с глазом, зрачок глаза так же является диафрагмой, размер и положение ко-

торой учитывают при проектировании прибора. Как правило, зрачок глаза совмещают с выходным зрачком прибора.

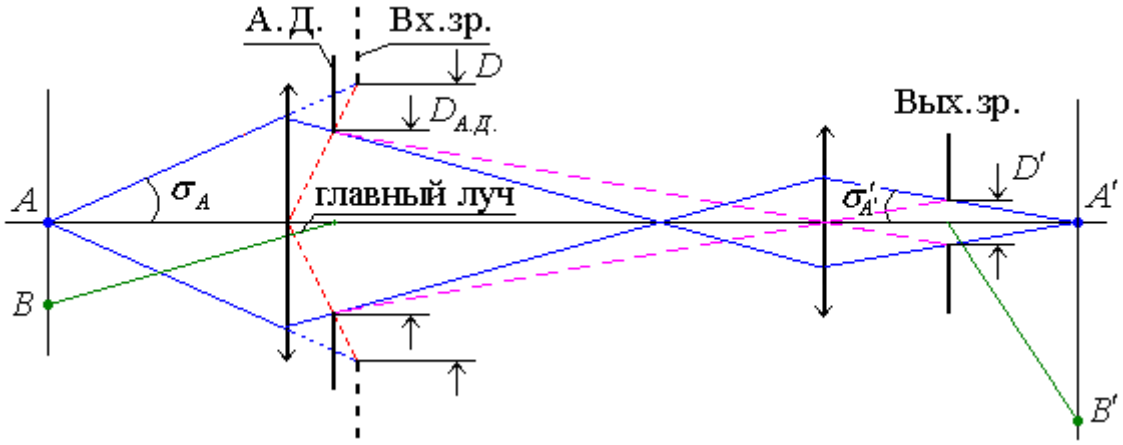


Рис. 4. Апертурные углы σ_A и $\sigma'_{A'}$.

А.Д. – апертурная диафрагма; Вх. зр. – входной зрачок; Вых. зр. – выходной зрачок

Апертурная диафрагма (А.Д.) может быть расположена перед оптической системой (ОС), внутри нее или за нею.

Например, в телескопе Кеплера апертурной диафрагмой является оправа объектива, в фотоаппаратах и проекционных объективах апертурная диафрагма, как правило, находится внутри системы, в микроскопах – иногда после объектива, либо оправа объектива является апертурной диафрагмой.

Если апертурная диафрагма установлена в передней или задней фокальной плоскости, то главные лучи соответственно в пространстве изображений и предметов проходят параллельно оптической оси. Такие объективы называют объективами с **телецентрическим ходом главного луча**.

Телецентрический ход главного луча используется в измерительных микроскопах для исключения влияния неточности фокусировки на правильность результатов.

1. Апертурная диафрагма (**А.Д.**) находится в передней фокальной плоскости.

Предположим, что перед нами поставлена задача точно измерить расстояние $A'B'$ между изображениями двух точек предмета AB, находящегося перед объективом. Допустим сначала, что **А.Д.** лежит в произвольном месте (рис. 5).

Расстояние $A'B'$ будет замерено точно лишь в том случае, когда шкала со штрихами будет находиться в плоскости P', сопряженной с плоскостью предмета P. Однако, вследствие так называемой глубины изображения, создаваемого объективом, наблюдатель может видеть од-

новременно достаточно отчетливо изображение точек A', B' и штрихов шкалы даже тогда, когда плоскость шкалы не совпадает с плоскостью P', а находится близко к ней, например в плоскости P''.

В этом случае расстояние $A''B''$, отсчитанное по шкале, будет отличаться от расстояния $A'B'$, полученного при точной фокусировке.

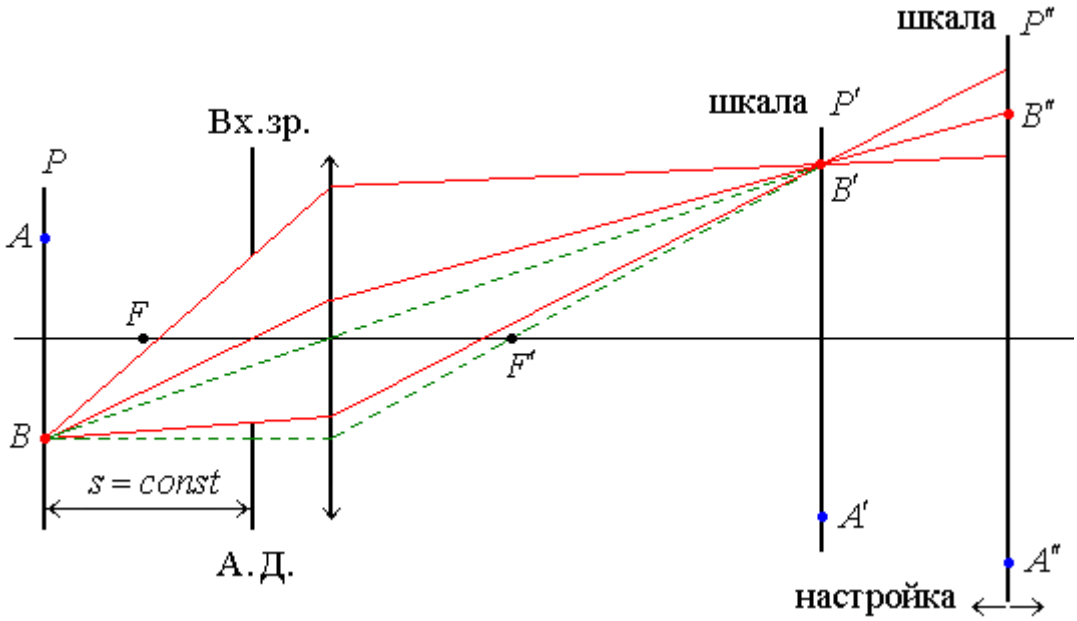


Рис. 5. Произвольное положение АД

В некоторых случаях, когда измерять изображения необходимо с большой точностью, такая погрешность может оказаться недопустимой. Указанный недостаток можно устранить, если **А.Д.** поместить в передней фокальной плоскости прибора (рис. 6).

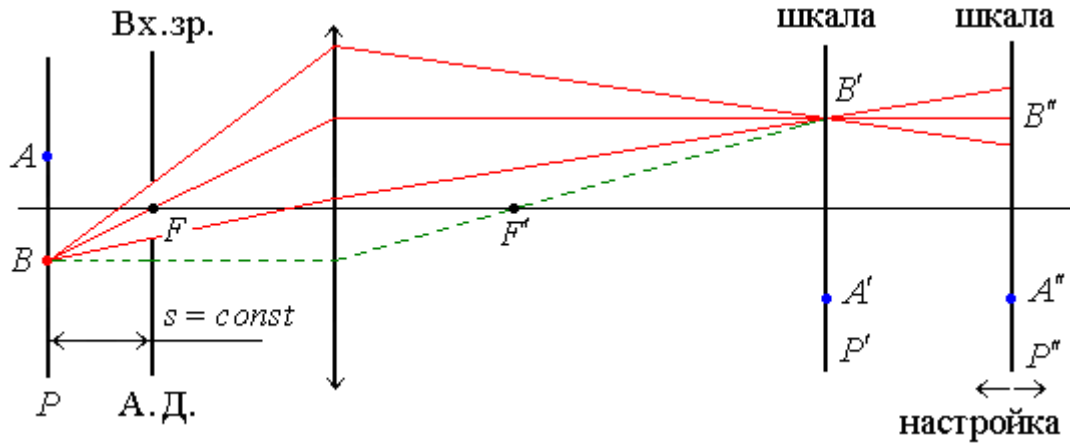


*Рис. 6. **А.Д.** в передней фокальной плоскости*

Тогда главные лучи, идущие от предметных точек в центр входного зрачка, пройдут через передний фокус объектива и выйдут из них па-

раллельно оптической оси; изображения обеих точек будут лежать на главных лучах.

Теперь расстояние между изображениями, отсчитанное по шкале, не зависит от положения этой шкалы (в пределах глубины резкости), так как расстояния между центрами кружков рассеяния в различных плоскостях одинаковы и, следовательно, $A'B' = A''B''$.

Такое расположение **А.Д.** значительно облегчает установку измерительного прибора, так как небольшие ошибки установки шкалы в плоскости изображения не влияют на результат измерения. Такая установка диафрагм особенно желательна в системах с большой кривизной поля изображения.

2. Апертурная находится диафрагма в задней фокальной плоскости.

Предположим, что требуется измерить расстояние между двумя изображениями точек A и B (то есть величину $A'B'$) по шкале, установленной на постоянном расстоянии s' от объектива (рис. 7).

В этом случае установка на резкое одновременное видение предмета AB и шкалы производится путем перемещения предмета или всей оптической системы (например, микроскопа). Если **А.Д.** расположена в произвольном месте, то результат отсчета будет зависеть от точности фокусировки (рис. 7). Если предмет находится в положении AB, то изображение имеет величину $A'B'$; если предмет находится в положении A_1B_1, то изображение будет иметь величину $A_1'B_1'$ в своей плоскости изображения и $A_1''B_1''$ в плоскости изображения предмета AB (положения AB и A_1B_1 должны, естественно, находится в пределах глубины изображаемого пространства).

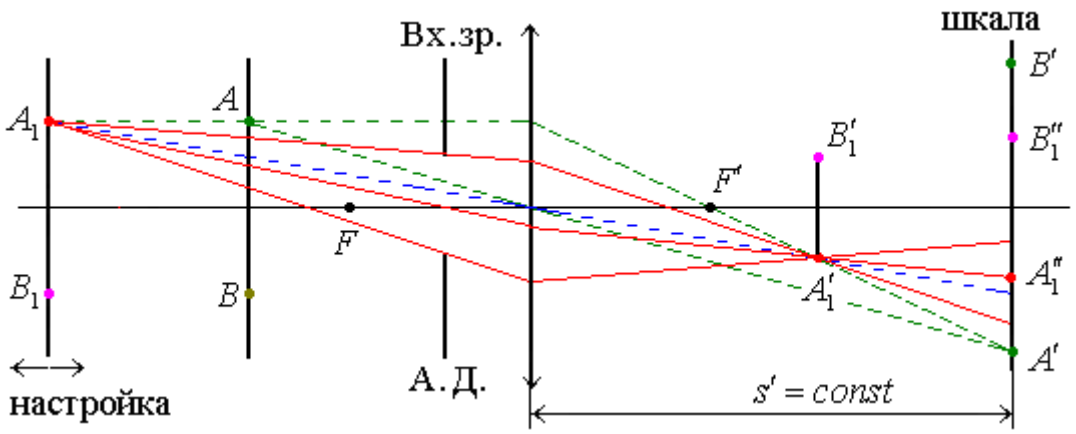


Рис. 7. Произвольное положение ***А.Д.***

Этого можно избежать, если апертурную диафрагму поместить в задней фокальной плоскости; тогда входной зрачок будет лежать

в бесконечности и, следовательно, главные лучи, идущие от предметных точек перед объективом, будут параллельны оптической оси (рис. 8).

Если система сфокусирована точно, то изображения точек A' и B' лежат в плоскости шкалы. Если же предмет переместился из положения AB в положение A_1B_1, то изображения A_1' и B_1' будут лежать перед плоскостью шкалы, в плоскости же шкалы вместо точек будут малые кружки рассеяния, центры которых A_1'' и B_1'' будут совпадать соответственно с точками A' и B'. Очевидно, если в этом случае произвести отсчет расстояния между центрами этих кружков, то результат измерения будет тот же самый, что и при точной настройке.

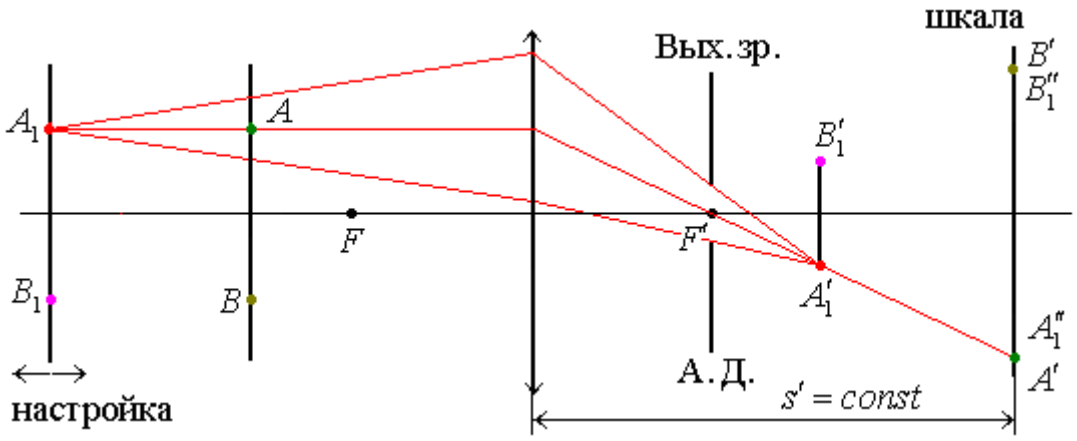


Рис. 8. ***А.Д.*** *расположена в задней фокальной плоскости*

Таким образом, при расположении апертурной диафрагмы в задней фокальной плоскости небольшие погрешности фокусировки не влияют на точность получаемых результатов измерения; во всяком случае, результаты получаются точнее, чем при любом другом расположении диафрагмы.

Расположение апертурной диафрагмы в задней фокальной плоскости объектива является обязательным для всех измерительных микроскопов.

11.2. Полевая диафрагма

Полевая диафрагма – это оправа линзы или апертура, ограничивающая размер пучка главных лучей, проходящих через центр входного зрачка (рис. 9).

Входным люком системы называют изображение полевой диафрагмы в пространстве предметов (рис. 9).

Выходной люк – это изображение полевой диафрагмы в пространстве изображений (рис. 10).

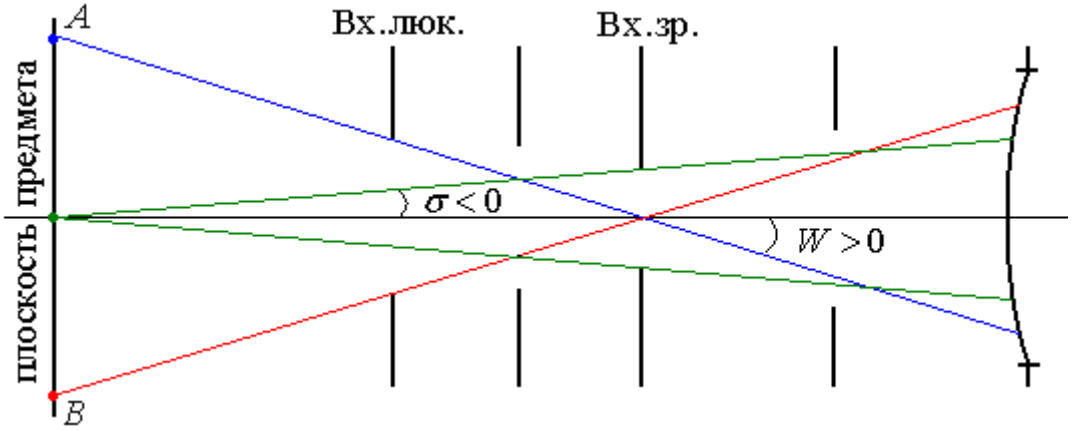


Рис. 9. Люки и зрачки оптической системы.
σ – апертурный угол, W – угол поля зрения

Общее правило определения люков и зрачков системы:

- строим изображения всех диафрагм оптической системы в пространстве предметов;
- если система телескопическая, тогда та диафрагма (или ее изображение), которая имеет наименьший диаметр, является входным зрачком;
- если система не телескопическая, тогда та диафрагма (или ее изображение), которая из осевой точки предмета видно под наименьшим углом, является входным зрачком;
- материальная диафрагма, сопряженная с входным зрачком, будет являться апертурной диафрагмой, а ее изображение в пространстве изображений – выходным зрачком;
- та диафрагма (или изображение диафрагмы), которая из центра входного зрачка видна под наименьшим углом, является входным люком (это и есть та диафрагма, которая ограничивает размер пучка главных лучей). Соответствующая материальная диафрагма является полевой диафрагмой, а ее изображение в пространстве изображений – выходным люком.

Угол W, под которым из центра входного зрачка виден край входного люка, называется **углом поля зрения** (рис. 9).

Можно построить изображения всех диафрагм в пространстве изображений. Тогда та диафрагма (или изображение диафрагмы), которая из центра выходного зрачка видна под наименьшим углом, будет являться выходным люком.

Изображения всех диафрагм можно строить вообще в любом пространстве промежуточных изображений, но тогда в том же пространстве нужно найти изображение предмета и в том же пространстве определять люки и зрачки по тем же правилам.

В правильно сконструированной оптической системе входной и выходной люки располагаются соответственно в плоскости предмета и в плоскости изображения (рис. 10).

Если точечный предмет расположен в плоскости входного люка, то лучи, которые из него исходят, равномерно освещают входной зрачок, а, следовательно, и выходной зрачок (разумеется, если световые диаметры линз рассчитаны так, что пучки лучей от края поля зрения не экранируются на оправах линз) (рис. 10).

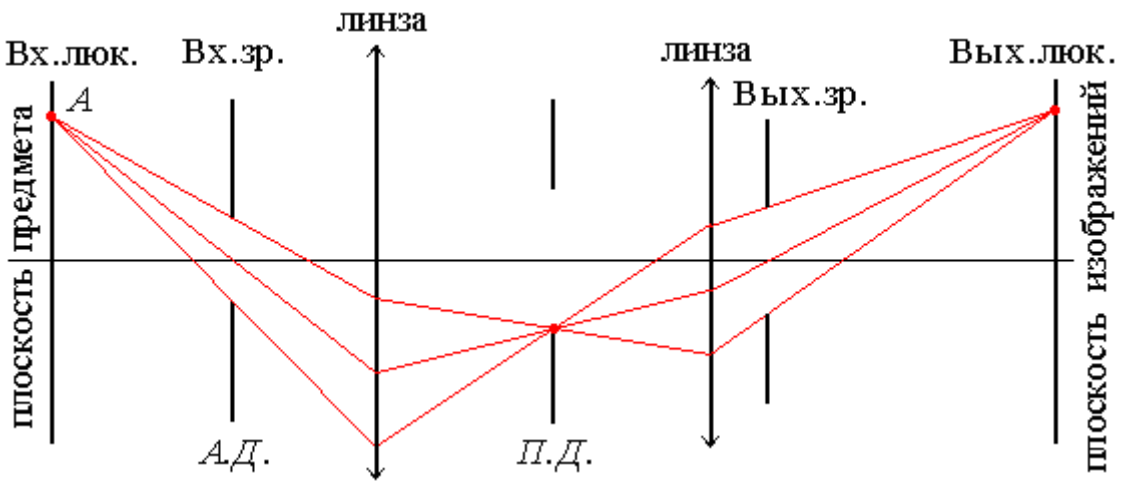


Рис. 10. Люки и зрачки правильно сконструированной оптической системы

11.3. Виньетирующая диафрагма

Если полевая диафрагма расположена неправильно или кроме апертурной диафрагмы используются дополнительные диафрагмы, то в плоскости изображения получается освещенная область с затенененными краями. Таким образом, имеется поле полной освещенности (рис. 11), окруженное частично затенененной областью, которые вместе называют полным полем.

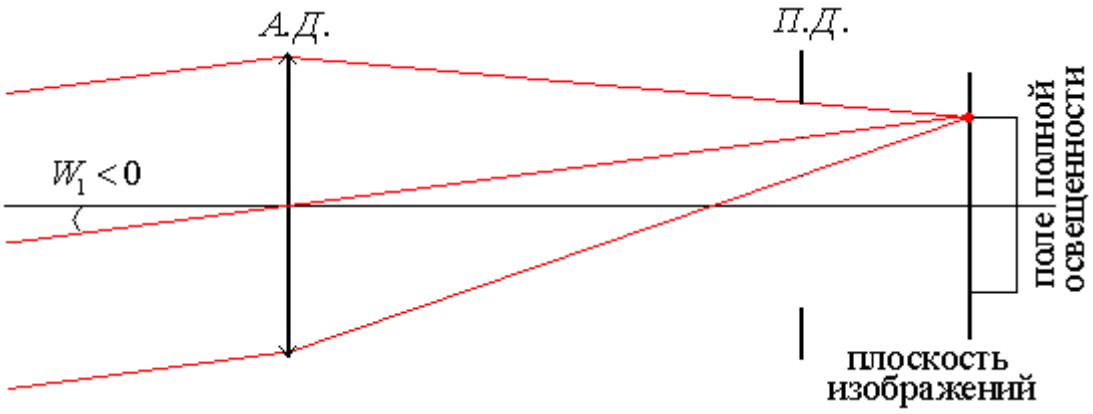


Рис. 11. Поле полной освещенности $2 \cdot W_1$

По мере того, как рассматриваемая точка изображения перемещается через затенененную область, часть поверхности входного зрачка, заполненная светом, уменьшается от 100 % на краю поля полной освещенности до 0 на краю полного поля (рис. 12). Когда изображение формируется при частично затенененном входном зрачке, говорят, что имеет место **виньетирование** (или ограничение пучков). Диафрагма, на которой происходит ограничение пучков, называется виньетирующей диафрагмой.

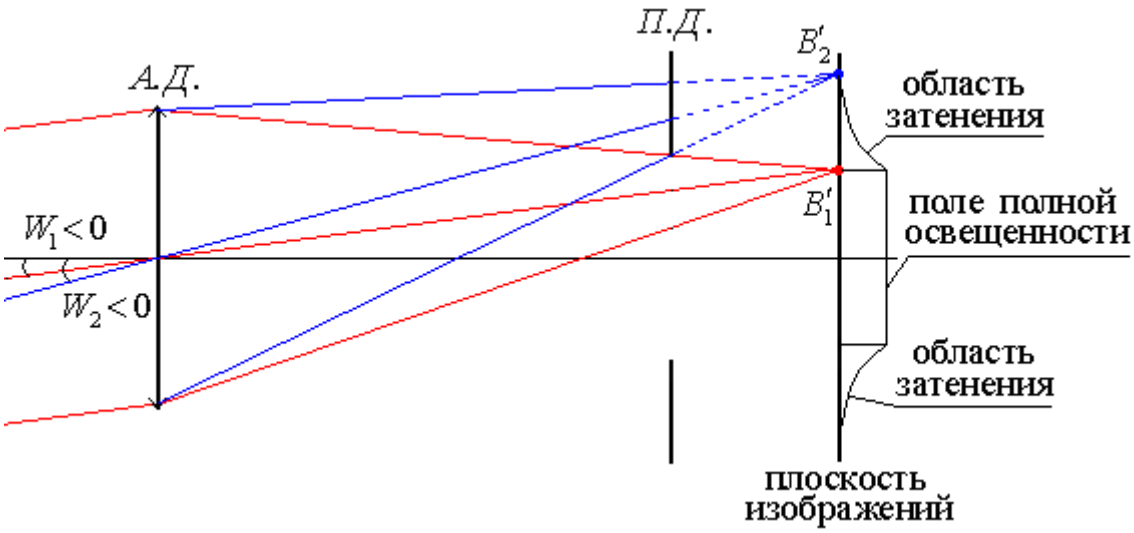


Рис. 12. Полное поле $2 \cdot W_2$

В большинстве оптических систем пучки лучей от внеосевых точек предмета виньетируются на первой и последней поверхностях. Построим изображение последней поверхности в пространстве предметов и покажем ограничивающие диафрагмы на рис. 13. В общем случае необходимо в пространстве предметов или изображений построить изображения всех диафрагм, выделить зрачки и люки, а затем определять виньетирующее влияние остальных диафрагм. Эта процедура необходима на стадии габаритного расчета для определения правильности расположения диафрагм и корректировки их положения и размера.

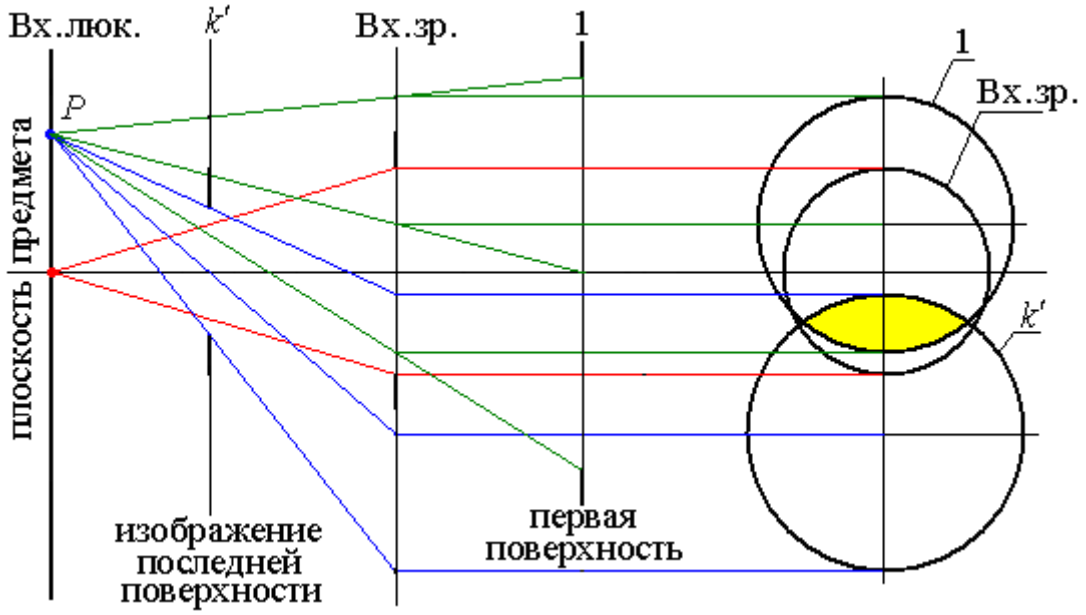
Изображение виньетирующей диафрагмы в пространстве предметов называется **входным окном**, а в пространстве изображений – **выходным окном**.

Виньетирование характеризуется **коэффициентом виньетирования**, равным отношению площади сечения наклонного пучка лучей к площади сечения осевого пучка лучей во входном зрачке.

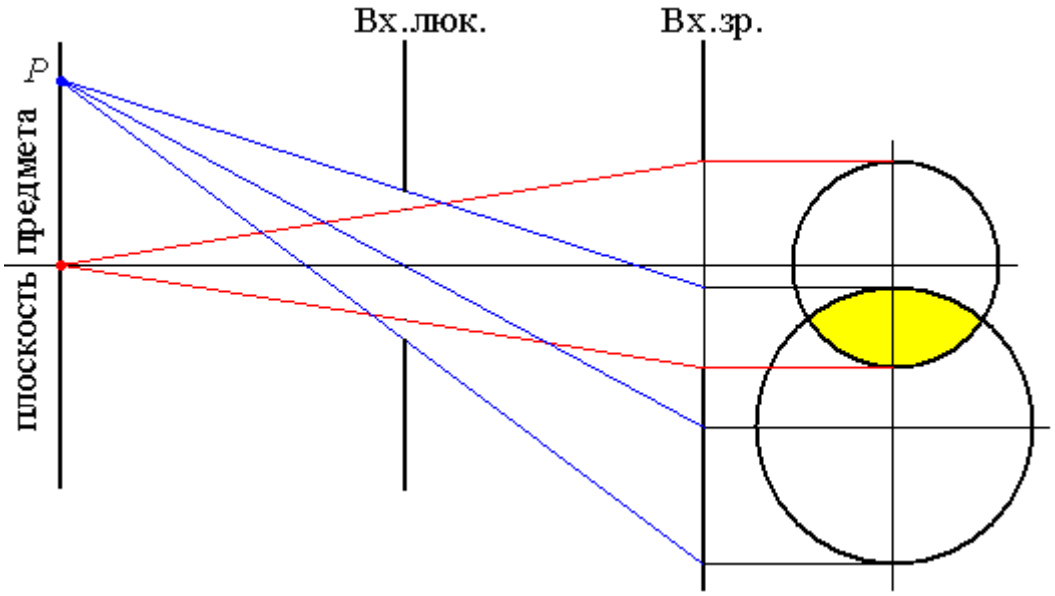
Из точки предмета P проводим конус лучей на каждую диафрагму – два луча через края диафрагмы и один луч через центр диафрагмы.

Найдем следы этих лучей в плоскости входного зрачка и посмотрим окружности – линии пересечения этих конусов с плоскостью входного зрачка. Пучок лучей, прошедший через систему диафрагм, будет представлять собой конус лучей, выходящих из точки предмета P и опирающийся на общую часть кругов (рис. 13).

Такое же построение можно выполнить и в пространстве изображений, причем в этом случае в качестве вершины конуса выбирается точка гауссова изображения.



а) входной люк совпадает с плоскостью предмета;



б) входной люк не совпадает с плоскостью предмета;

Рис. 13. Проекция отверстий в диафрагмах на плоскость входного зрачка

Эффект виньетирования можно уменьшить, если (в примере 13,а) увеличить диаметры первой и последней поверхности. Желательно, чтобы в оптической системе главный луч оставался центральным лучом ограниченного пучка лучей даже для внеосевых точек. Это существенно для качества изображения.

Точный расчет виньетирования производится на основе расчета большого количества лучей через систему с учетом всех расположенных в ней диафрагм.

Примечание. *Какая из диафрагм является зрачком, а какая люком – зависит от положения предмета относительно оптической системы.*

11.4. Зрачки и люки в некоторых типах систем

11.4.1. Фотообъектив

Фотографическим объективом называют оптическую систему, предназначенную для получения действительного изображения предметов на поверхности фотоприемников.

11.4.1.1. Зрачки и люки фотообъектива

Фотообъектив состоит из двух оптических систем – Q_1 и Q_2 (рис. 14), между которыми находится ирисовая диафрагма Q_3. Построим изображения всех оправ (оправы систем Q_1 и Q_2 и диафрагма Q_3 – всего три диафрагмы) в пространстве изображений.

Пусть F_2' – фокус системы Q_2. Чтобы построить изображение точки B – края диафрагмы Q_3 – проведем два вспомогательных луча: один параллельно оптической оси, другой через главную точку системы Q_2; пересечение преломленных системой Q_2 лучей даст точку B' – изображение точки B системой Q_2. Получим прямое увеличенное мнимое изображение диафрагмы Q_3.

Для построения изображения точки A (края оправы системы Q_1) системой Q_2 проведем два вспомогательных луча: один параллельно оптической оси, другой через главную точку системы Q_2; пересечение преломленных системой Q_2 лучей даст точку A' – прямое, мнимое, увеличенное изображение точки A.

Изображением диафрагмы Q_2 в пространстве изображений будет являться сама диафрагма Q_2.

Нарисуем отдельно все диафрагмы (их изображения) в пространстве изображений (рис. 15). Для простоты будем считать, что фотообъ-

ектив настроен на бесконечность, то есть плоскость изображения проходит через задний фокус F' фотообъектива.

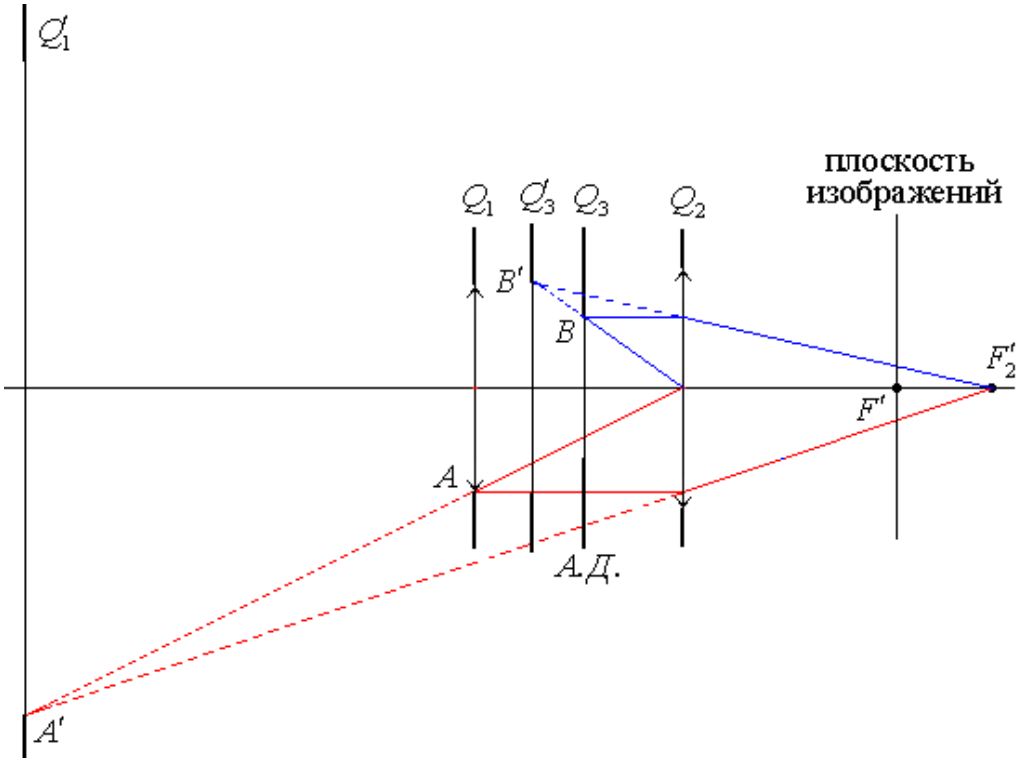


Рис. 14. Фотообъектив

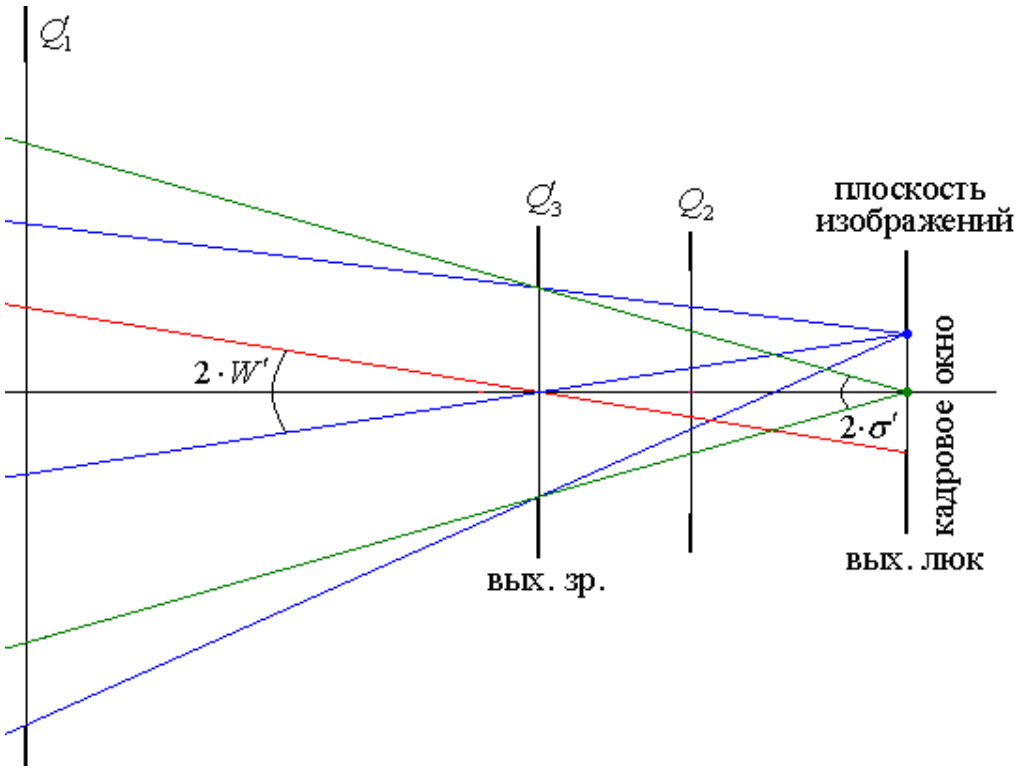


Рис. 15. Диафрагмы фотообъектива в пространстве изображений

Как видно из рис. 15, под наименьшим углом из осевой точки плоскости изображения видна диафрагма Q_3', а значит, Q_3' – выходной зрачок, а сопряженная с ней материальная диафрагма Q_3 – апертурная диафрагма. Обозначим: D' – диаметр выходного зрачка и соответственно D – диаметр входного зрачка.

В фотоаппарате имеется еще и четвертая диафрагма – кадровое окно Q_4. Как видно из рис. 15, кадровое окно Q_4 из центра выходного окна видно под наименьшим углом, значит, Q_4 – полевая диафрагма и выходной люк одновременно. По ходу лучей видно, что в фотоаппарате отсутствует виньетирование.

11.4.1.2. Основные характеристики фотообъектива

К основным характеристикам фотообъектива относятся:

- фокусное расстояние;
- относительное отверстие;
- угловое поле.

11.4.1.2.1. Фокусное расстояние

f' определяет масштаб изображения и длину объектива. При съемке предметов на конечном расстоянии масштаб изображения равен линейному увеличению β, которое зависит от фокусного расстояния:

$$\beta = \frac{x'}{x} = -\frac{z'}{f'} = \frac{f'}{z} = -\frac{f}{z} \quad . \tag{2}$$

Для удаленных предметов величина изображения рассчитывается по формуле:

$$x' = -f' \cdot tg W \quad , \tag{3}$$

где W – угловой размер предмета. Таким образом, чем больше f', тем больше масштаб изображения.

11.4.1.2.2. Относительное отверстие

$\forall = D : f'$ (здесь D – диаметр входного зрачка) влияет на глубину изображаемого пространства и глубину резкости, а так же на освещенность изображения.

Из общей формулы для освещенности изображения dS' элементарной площадки dS, расположенной на оси оптической системы, имеем:

$$E_0' = \pi \cdot \tau \cdot L \cdot \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \cdot \sin^2 \sigma' , \tag{4}$$

где L – яркость площадки dS, τ – пропускание объектива. Полагаем, что фотообъектив находится в воздухе, то есть

$$n = n' = 1. \tag{5}$$

Тогда на основании формулы (4) можно заключить, что основным фактором, влияющим на освещенность E'_0, является апертурный угол σ' в пространстве изображений.

Если апертурный угол σ' достаточно мал, то приближенно можно положить (рис. 16):

$$\sin\sigma' \approx tg\,\sigma' = \frac{D'}{2\cdot\left(z' - z'_{P'}\right)}, \tag{6}$$

где D' – диаметр выходного зрачка.

С учетом (5) и (6) выражение (4) можно переписать в виде:

$$E'_0 = \frac{\pi\cdot\tau\cdot L}{4}\cdot\left(\frac{D'}{z' - z'_{P'}}\right)^2. \tag{7}$$

Так как

$$D' = \beta_P\cdot D,\ z' = -\beta\cdot f',\ z'_{P'} = -\beta_P\cdot f',$$

где β_P – линейное увеличение в зрачках системы, β – линейное увеличение объектива в сопряженных плоскостях dS и dS', то (7) примет вид:

$$E'_0 = \frac{\pi\cdot\tau\cdot L}{4}\cdot\left(\frac{D}{f'}\right)^2\cdot\left(\frac{\beta_P}{\beta_P - \beta}\right)^2 = \frac{\pi\cdot\tau\cdot L}{4}\cdot\forall^2\cdot\left(\frac{\beta_P}{\beta_P - \beta}\right)^2. \tag{8}$$

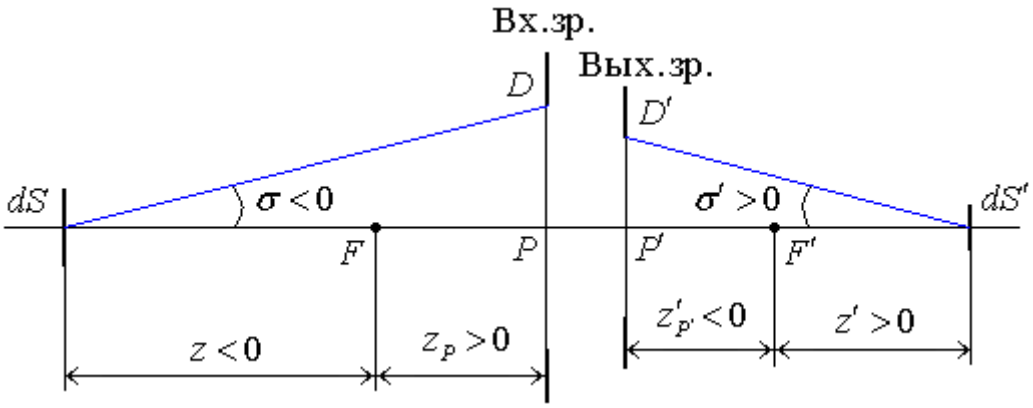


Рис. 16. Схема для определения освещенности на оси оптической системы

Перепишем (8) в виде:

$$H = \frac{E'_0}{L} = \frac{\pi \cdot \tau}{4} \cdot \forall^2 \cdot \left(\frac{\beta_P}{\beta_P - \beta} \right)^2 . \qquad (9)$$

Величина H называется **светосилой** объектива. Из (9) видно, что относительное отверстие определяет светосилу объектива. Изменение светосилы (или относительного отверстия) происходит за счет изменения диаметра апертурной диафрагмы.

Если объект съемки находится в бесконечности, то $\beta = 0$ и

$$H = \frac{\pi \cdot \tau}{4} \cdot \forall^2 \ . \qquad (10)$$

Величину, равную квадрату относительного отверстия, называют **геометрической светосилой** объектива.

Величина, обратная относительному отверстию, называется **диафрагменным числом.** Шкала диафрагм (диафрагменных чисел), нанесенная на объектив, представляет собой нормальный ряд. Она рассчитана так, что при переходе от одного ее деления к другому диаметр диафрагмы изменяется пропорционально $\sqrt{2}$, а, следовательно, освещенность изображения изменяется в 2 раза. Ниже приведены значения относительных отверстий и соответствующие им диафрагменные числа K:

D/f'	1:1	1:1.4	1:2	1:2.8	1:4	1:5.6	1:8	1:11	1:16	1:22
K	1	1.4	2	2.8	4	5.6	8	11	16	22

11.4.1.2.3. Угловое поле

$2 \cdot W'$ показывает ту часть пространства предметов, которая может быть воспроизведена фотообъективом на фотоприемнике с достаточно хорошим качеством изображения и допустимым падением освещенности от центра до краев снимка. Угловое поле объектива ограничено полевой диафрагмой, роль которой в системе фотообъектива выполняет кадровое окно. Поле фотообъектива измеряют в угловой мере или в линейной мере в *мм* как диагональ l_K кадра. Очевидно, что:

$$tg\, W' = -\frac{l_K}{2 \cdot \left(f' + z' \right)} . \qquad (11)$$

11.4.1.3. Геометрическая глубина изображаемого пространства

Глубиной изображаемого пространства называют расстояние вдоль оптической оси между двумя плоскостями Q_1 и Q_2 (рис. 17) в пространстве предметов, в пределах которого объекты съемки по-

лучаются в плоскости изображения достаточно четкими, то есть размер пятна рассеяния не превышает некоторого, наперед заданного, значения δ'.

Пусть Q и Q' соответственно плоскости предмета и изображения.

Построим в плоскости Q' кружок диаметром $\delta' = C_1'C_2'$ и с центром на оптической оси, а в плоскости Q – сопряженный с ним кружок диаметром $\delta = C_1C_2$ (рис. 17). Очевидно, что

$$\delta = -\frac{\delta'}{\beta}, \tag{12}$$

В правой части (12) стоит знак минус, поскольку мы выбрали $\delta > 0$ и $\delta' > 0$ (δ и δ' – диаметры); $\beta < 0$, если изображение действительное.

Проведем луч C_2E через точку C_2 и нижний край E входного зрачка. Точку пересечения луча с оптической осью обозначим A_1. В пространстве изображений сопряженный луч $E'C_2'$ пройдет через сопряженную точку C_2' и пересечет оптическую ось в точке A_1'. Очевидно, что точки A_1 и A_1' сопряжены. Гомоцентрический пучок лучей, вышедший из точки A_1 и прошедший через входной зрачок, создаст в плоскости Q' световой кружок диаметром δ'. Продолжение пучка лучей влево создаст в плоскости Q световой кружек диаметром δ. Проведем через точки A_1 и A_1' соответственно сопряженные плоскости Q_1 и Q_1'.

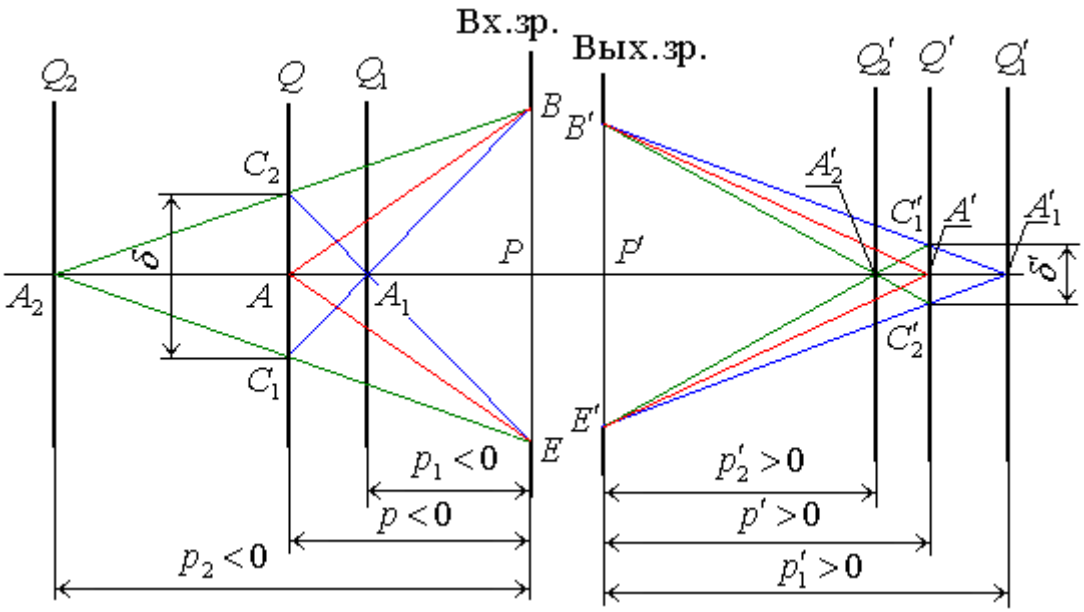


Рис. 17. Схема для определения глубины изображаемого пространства

Аналогично проведем луч C_2B через точку C_2 и верхний край B входного зрачка. Точку пересечения луча с оптической осью обозначим A_2. В пространстве изображений сопряженный луч $B'C'_2$ пройдет через сопряженную точку C'_2 и пересечет оптическую ось в точке A'_2. Очевидно, что точки A_2 и A'_2 сопряжены. Гомоцентрический пучок лучей, вышедший из точки A_2 и прошедший через входной зрачок, создаст в плоскости Q световой кружок диаметром δ, а в плоскости Q' – световой кружок диаметром δ'. Проведем через точки A_2 и A'_2 соответственно сопряженные плоскости Q_2 и Q'_2.

Как задается величина δ'? При рассмотрении изображения на матовой пластине или на негативе (рис. 18) глазом разрешаются две точки, угловое расстояние между которыми не меньше $\psi = 1' = 0.0003$ *рад* – предельного угла разрешения глаза. Тогда диаметр δ' минимально разрешимого кружка рассеяния будет равен:

$$\delta' = s \cdot \psi = 0.07 \text{ мм}. \qquad (13)$$

То есть, изображение точки A и кружок рассеяния диаметром δ' будут восприниматься глазом одинаково. Здесь $s = -250$ – расстояние наилучшего видения.

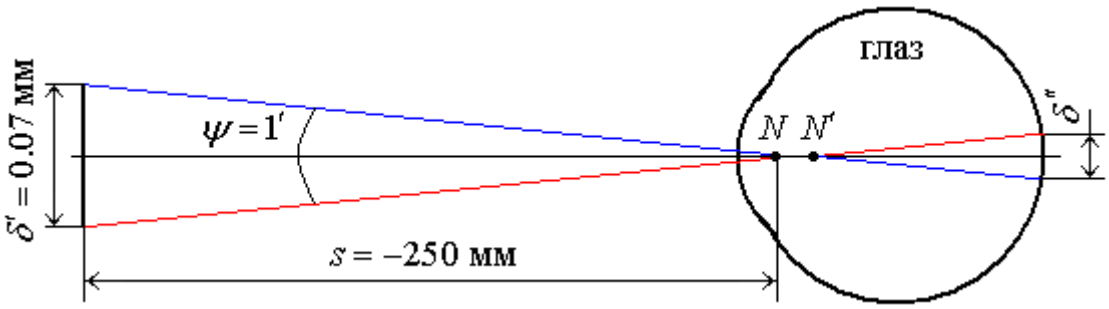


Рис. 18. Разрешение глаза

Если изготовлен снимок, увеличенный в M раз, а затем его рассматривают с расстояния s, то можно записать

$$M \cdot \delta' = \psi \cdot s, \text{ или } \delta' = \frac{\psi \cdot s}{M}. \qquad (14)$$

Пример 1. $\psi = 1'$, $s = 250$ *мм*, $M = 1$; $\delta' = \dfrac{250 \cdot 0.0003}{1} = 0.075$ *мм*.

Пример 2. $\psi = 1'$, $s = 250$ *мм*, $M = 5$; $\delta' = \dfrac{250 \cdot 0.0003}{5} = 0.015$ *мм*.

Расстояние $(p_1 - p_2)$ между плоскостями Q_1 и Q_2 есть глубина изображаемого пространства. Из рис. 17 находим:

$$\frac{D}{p_1} = -\frac{\delta}{p_1 - p}, \tag{15}$$

здесь D – диаметр входного зрачка. Из (15) находим:

$$p \cdot D - p_1 \cdot D = p_1 \cdot \delta \text{, отсюда}$$

$$p_1 = \frac{D}{D+\delta} \cdot p. \tag{16}$$

Аналогично находим:

$$\frac{D}{p_2} = \frac{\delta}{p_2 - p} \text{, или} \tag{17}$$

$$p_2 \cdot D - p \cdot D = p_2 \cdot \delta \text{, отсюда}$$

$$p_2 = \frac{D}{D-\delta} \cdot p. \tag{18}$$

С учетом (16) и (18) находим:

$$p_1 - p_2 = \frac{D}{D+\delta} \cdot p - \frac{D}{D-\delta} \cdot p = p \cdot \frac{\cancel{D^2} - \underline{\delta \cdot D} - \cancel{D^2} - \underline{\delta \cdot D}}{D^2 - \delta^2} = -\frac{2 \cdot p \cdot D \cdot \delta}{D^2 - \delta^2}.$$

Рассмотрим случай удаленного предмета, то есть $|p| \gg f'$, $D \gg \delta$, тогда с учетом (12) имеем:

$$p_1 - p_2 = -\frac{2 \cdot p \cdot \delta}{D} = \frac{2 \cdot p \cdot \delta'}{\beta \cdot D}. \tag{19}$$

Учитывая, что $z \approx p$ при больших значениях z, получим:

$$\beta = \frac{f'}{z} \approx \frac{f'}{p}, \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), получим:

$$p_1 - p_2 = \frac{2 \cdot p^2 \cdot \delta'}{f' \cdot D} = \frac{2 \cdot p^2 \cdot \delta'}{\frac{D}{f'} \cdot f'^2} = \frac{2 \cdot p^2 \cdot \delta'}{f'^2 \cdot \forall} \text{,или окончательно:}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{2 \cdot p^2 \cdot \delta'}{f'^2 \cdot \forall}, \tag{21}$$

Δp – **глубина изображаемого пространства**.

Пример 3. *Определить глубину изображаемого пространства фотообъективом:* $f' = 50$ *мм*, $\forall = 1:2$, $p = -6$ *м*, $N = 30$ $^{лин}/_{мм}$ *– разрешающая способность объектива.*

Разрешающей способности $N = 30\dfrac{лин}{мм}$ *соответствует разрешаемое расстояние* $\delta' = \dfrac{1}{N} = 0{,}033$ *мм*.

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{2 \cdot p^2 \cdot \delta'}{f'^2 \cdot \forall} = \frac{2 \cdot 6000^2 \cdot 0{,}033}{50^2 \cdot 0.5} = 1.9\,\text{м}.$$

Таким образом, глубина изображаемого пространства прямо пропорциональна квадрату расстояния до плоскости наводки, размеру пятна рассеяния и обратно пропорциональна квадрату фокусного расстояния и относительному отверстию объектива.

Пусть

$$p_2 = \infty, \tag{22}$$

то есть, дальняя граница глубины изображаемого пространства находится в бесконечности. Тогда из (18) следует, что

$$\delta = D. \tag{23}$$

Из (16) находим:

$$p_1 = \frac{D}{D+\delta} \cdot p = \frac{D}{D+D} \cdot p = \frac{p}{2}. \tag{24}$$

Далее, с учетом (13), (20) и (23), находим:

$$\delta = -\frac{\delta'}{\beta} \approx -\frac{\delta'}{f'/p} = D, \tag{25}$$

отсюда

$$p = -\frac{D \cdot f'}{\delta'}. \tag{26}$$

Выпишем окончательные формулы для этого случая:

$$p = -\frac{D \cdot f'}{\delta'},\ p_1 = \frac{p}{2},\ p_2 = \infty. \tag{27}$$

Глубина резкости Δ' (рис. 19) – это расстояние вдоль оптической оси от плоскости изображения Q', в пределах которого сохраняется допустимый размер пятна рассеяния δ'. То есть, это расстояние, в пределах которого допускается установка плоскости фотоприемника с сохранением резкости изображения.

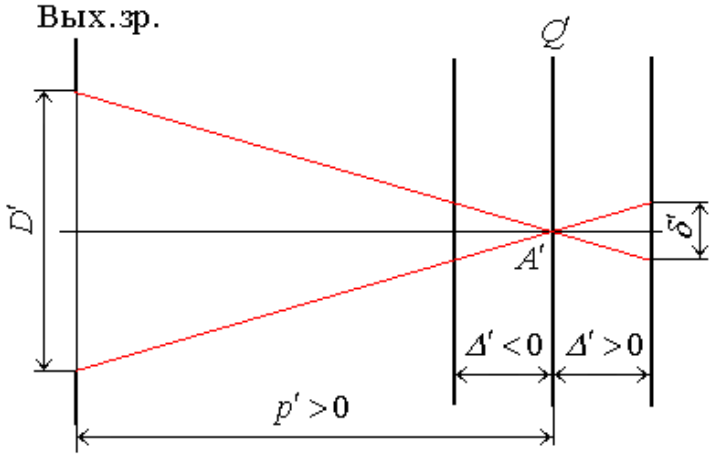


Рис. 19. Схема для определения глубины резкости фотообъектива

Из рис. 19 находим:

$$\frac{D'}{p'} = \frac{\delta'}{\Delta'}, \text{ отсюда: } \pm\Delta' = \frac{\delta' \cdot p'}{D'} \text{ – } \textbf{глубина резкости}. \qquad (28)$$

11.4.1.4. Дифракционная глубина изображаемого пространства

С точки зрения волновой теории изображением точечного источника света, сформированным идеальной оптической системой, будет являться дифракционный кружок рассеяния. В современной цифровой фото и видеотехнике в качестве фотоприемников используются матрицы на основе приборов с зарядовой связью (ПЗС – матрицы). По аналогии с глазом человека можно предположить, что разрешающая способность и, следовательно, геометрическая глубина изображаемого пространства оптической системы, работающей с ПЗС – матрицей, определяются, очевидно, расстоянием δ' между центрами соседних сенсоров – светочувствительных элементов ПЗС-матрицы: две точки предмета разрешаются как отдельные, если их изображения формируются оптической системой на двух соседних сенсорах матрицы.

Рассмотрим вопрос о глубине пространства, изображаемого идеальной оптической системой на поверхность ПЗС – матрицы, с учетом дифракционного характера структуры изображения.

Сферическая волна, выходящая из точки A предмета, преобразуется оптической системой в сферическую волну S' с радиусом кривизны p' (рис. 20), которая на сенсоре матрицы создает дифракционное изображение A'. Некоторой точке A_2, расположенной на расстоянии Δz от точки A, в пространстве изображений будет соответствовать сферическая волна S'_2 и дифракционное изображение A'_2. На поверхности мат-

рицы волна S_2' создаст дефокусированное изображение A_2''. Пусть l – расстояние между фронтами S' и S_2' на краю выходного зрачка, отсчитываемое по нормали к сфере S'. Согласно **критерию Рэлея**, если l не превышает $\frac{\lambda}{4}$, то дифракционные минимумы изображения A' и дефокусированного изображения A_2'' практически совпадут (рис. 21). Отличие будет заключаться в том, что центральный дифракционный максимум изображения A_2'' будет несколько меньше, чем у изображения A', поскольку часть энергии из центрального пятна перекачается в кольца. Контраст в изображении двух точек упадет с 20 % до 18 %, то есть качество изображения останется практически дифракционным.

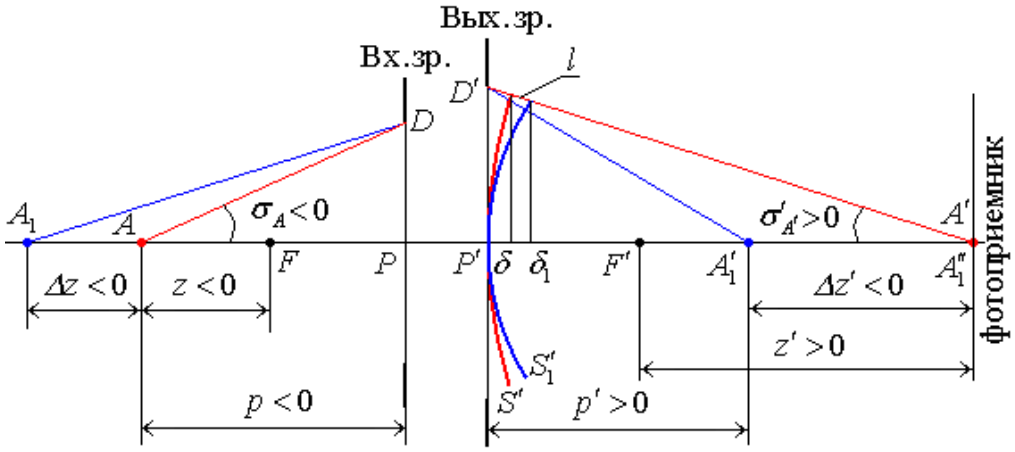


Рис. 20. К вопросу о дифракционной глубине изображения

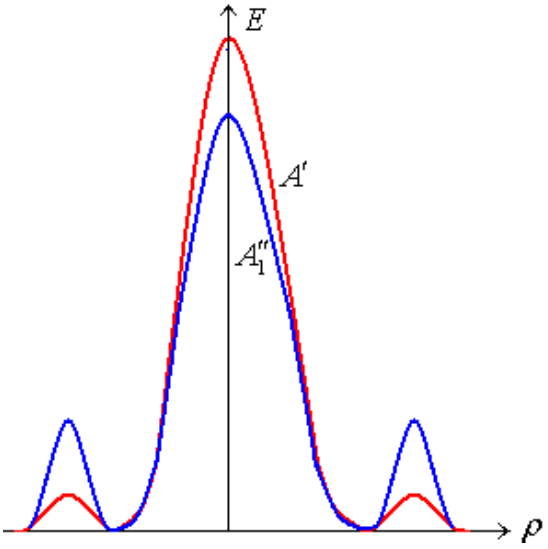


Рис. 21. Зависимость освещенности E от радиуса ρ в дифракционных изображениях A' и A_2''

Значит, изображения точек A и A_2 фотоприемником воспроизведутся резко и величина Δz будет определять дальнюю границу глубины изображаемого пространства.

Пусть δ и δ_2 – соответственно стрелки волновых фронтов S' и S'_2 на краю выходного зрачка. Для **небольших** апертурных углов $\sigma'_{A'}$ приближенно можно положить:

$$\delta_2 - \delta \approx l = \frac{\lambda}{4}, \tag{29}$$

$$\delta = \frac{\left(D'/2\right)^2}{2 \cdot p'}, \ \delta_2 = \frac{\left(D'/2\right)^2}{2 \cdot \left(p' + \Delta z'\right)}. \tag{30}$$

Подставим (29) в (30):

$$\delta_2 - \delta \approx \frac{\lambda}{4} = \left(\frac{D'}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{p' + \Delta z'} - \frac{1}{p'}\right) =$$

$$= \left(\frac{D'}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p' - p' - \Delta z'}{p' \cdot \left(p' + \Delta z'\right)} = -\left(\frac{D'}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta z'}{p'^2}, \tag{31}$$

поскольку $p' + \Delta z' \approx p'$. Из (31) находим:

$$\Delta z' = -\frac{\lambda \cdot p'^2}{2 \cdot \left(\frac{D'}{2}\right)^2}. \tag{32}$$

Точно такое же выражение можно получить для точки A_1, расположенной справа от точки A. Поэтому можно записать:

$$2 \cdot \left|\Delta z'\right| = \frac{\lambda \cdot p'^2}{\left(\frac{D'}{2}\right)^2}. \tag{33}$$

Выражение (33) определяет дифракционную глубину резкости любой оптической системы (в частности, фотообъектива), работающей с матричным фотоприемником.

Выражение (33) можно упростить для случая малых апертурных углов, то есть положить $tg\,\sigma'_{A'} \approx \sin\sigma'_{A'}$, тогда:

$$2 \cdot \left|\Delta z'\right| = \frac{\lambda \cdot p'^2}{\left(\frac{D'}{2}\right)^2} = \frac{\lambda}{\left(\frac{D'}{2 \cdot p'}\right)^2} \approx \frac{\lambda}{\sin^2 \sigma'_{A'}}, \tag{34}$$

или окончательно:

$$2 \cdot \left|\Delta z'\right| = \frac{\lambda}{\sin^2 \sigma'_{A'}}. \qquad (35)$$

Теперь в выражении (35) перейдем от величин в пространстве предметов к сопряженным величинам в пространстве изображений, используя формулу (6-81) из параксиальной оптики:

$$\Delta z' = \alpha \cdot \Delta z = \frac{n'}{n} \cdot \beta^2 \cdot \Delta z, \qquad (36)$$

поэтому

$$2 \cdot \Delta z = \frac{2 \cdot \Delta z'}{\alpha} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{2 \cdot \Delta z'}{\beta^2} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\lambda}{\beta^2 \cdot \sin^2 \sigma'_{A'}}. \qquad (37)$$

Из условия синусов Аббе

$$n \cdot x \cdot \sin \sigma_A = n' \cdot x' \cdot \sin \sigma'_{A'} \qquad (38)$$

следует:

$$\frac{n}{n'} \cdot \sin \sigma_A = \frac{x'}{x} \cdot \sin \sigma'_{A'} = \beta \cdot \sin \sigma'_{A'}. \qquad (39)$$

Из (37) с учетом (39) следует:

$$2 \cdot \Delta z = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\lambda}{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 \cdot \sin^2 \sigma_A} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{\lambda}{\sin^2 \sigma_A} = \frac{\lambda_0}{n \cdot \sin^2 \sigma_A} = \frac{n \cdot \lambda_0}{n^2 \cdot \sin^2 \sigma_A}.$$

Окончательно имеем:

$$2 \cdot \Delta z = \frac{n \cdot \lambda_0}{n^2 \cdot \sin^2 \sigma_A} = \frac{n \cdot \lambda_0}{A^2} \qquad (40)$$

Выражение (40) определяет дифракционную глубину изображаемого пространства любой оптической системы, работающей с матричным фотоприемником (*n и n' – показатели преломления среды в пространстве предметов и изображений соответственно, λ_0 – длина волны в вакууме, A – числовая апертура).*

11.4.2. Лупа

11.4.2.1. Принцип работы и основные характеристики

Лупа представляет собой самый простой оптический прибор, который служит для расширения возможностей глаза при наблюдении мел-

ких близко расположенных предметов. Лупа создает увеличенное изображение предмета. При наблюдении с помощью лупы предмет помещают либо в передней фокальной плоскости, либо слева или справа от нее. Основными характеристиками лупы являются видимое увеличение Γ и линейное поле зрения $2 \cdot x$.

Видимым увеличением любой оптической системы, работающей совместно с глазом, называется отношение тангенса угла W', под которым рассматривается изображение предмета через оптическую систему, к тангенсу угла W, под которым данный предмет, расположенный на расстоянии ясного видения, виден невооруженным глазом (рис. 22), то есть:

$$\Gamma = \frac{tg\,W'}{tg\,W}. \tag{41}$$

Найдем видимое увеличение для лупы. Из рис. 22, *а* следует:

$$tg\,W' = -\frac{x'}{s'}\ , \tag{42}$$

$$\frac{x'}{z'} = -\frac{x}{f'}\ \text{, отсюда } x' = -z' \cdot \frac{x}{f'}\ , \tag{43}$$

$$z' = s' + z'_{3P}\ , \tag{44}$$

где f' – фокусное расстояние лупы, s' – расстояние от зрачка глаза до изображения, z'_{3P} – расстояние от зрачка глаза до заднего фокуса.

Подставим (43) и (44) в (42):

$$tg\,W' = -\frac{x'}{s'} = \frac{\left(s' + z'_{3P}\right) \cdot x}{f' \cdot s'} = \frac{x}{f'} \cdot \left(1 + \frac{z'_{3P}}{s'}\right). \tag{45}$$

Из рис. 22, *б* находим:

$$tg\,W = -\frac{x}{s} = \frac{x}{250}\ . \tag{46}$$

Подставим (45) и (46) в (41):

$$\Gamma = \frac{tg\,W'}{tg\,W} = \frac{250}{f'} \cdot \left(1 + \frac{z'_{3P}}{s'}\right) \ \text{– } \textbf{видимое увеличение лупы} \tag{47}$$

Эмметропический глаз рассматривает изображение без аккомодации, если оно расположено в бесконечности, то есть $s' = -\infty$ и предмет расположен в передней фокальной плоскости. Для этого случая формула (47) приобретает вид:

$$\Gamma = \frac{250}{f'} \ . \qquad (48)$$

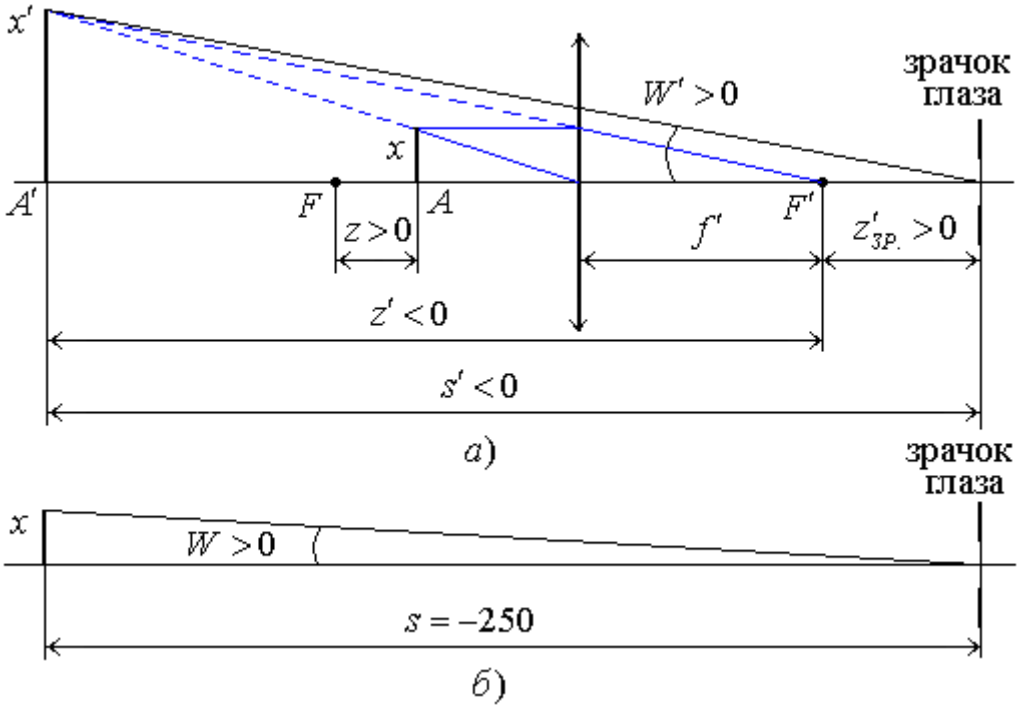


Рис. 22. К определению видимого увеличения

Такой же вид (48) приобретает выражение для видимого увеличения и в случае, если $z'_{ЗР} = 0$, то есть зрачок глаза совмещен с задней фокальной плоскостью. В этом случае увеличение лупы, определяемое выражением (48), не зависит от s', а, следовательно, и от положения предмета относительно переднего фокуса.

В случае глаза с миопией (с близорукостью) точка A' предмета (рис. 22,а) должна совпадать с дальней точкой ясного зрения миопического глаза, то есть предмет должен находиться между фокусом и лупой. В этом случае глаз работает без аккомодации, то есть без напряжения. Поскольку

$$A_Д = \frac{1000}{a_д} \text{ – аметропия глаза (в диоптриях)} \qquad (49)$$

то

$$s' = a_д = \frac{1000}{A_Д} \qquad (50)$$

и

$$\Gamma = \frac{250}{f'} \cdot \left(1 + \frac{A_Д \cdot z'_{ЗР}}{1000}\right) . \qquad (51)$$

Очевидно, что в случае глаза с гиперметропией (дальнозоркого) предмет должен находиться слева от переднего фокуса. Формула (51) определяет видимое увеличение лупы с аметропическим глазом (и близоруким, и дальнозорким), работающим без аккомодации. Расстояние z от предмета до переднего фокуса в этих случаях можно найти, используя формулу Ньютона:

$$z = -\frac{f'^2}{z'} = -\frac{f'^2}{s' + z'_{ЗР}} = -\frac{f'^2}{\frac{1000}{A_Д} + z'_{ЗР}} \quad . \qquad (52)$$

11.4.2.2. Зрачки и люки лупы

Допустим, что предмет находится в передней фокальной плоскости, зрачок глаза – между лупой и задним фокусом. Система «лупа – глаз» имеет две оправы: оправа лупы и зрачок глаза. Построим изображение этих оправ в пространстве предметов (рис. 23).

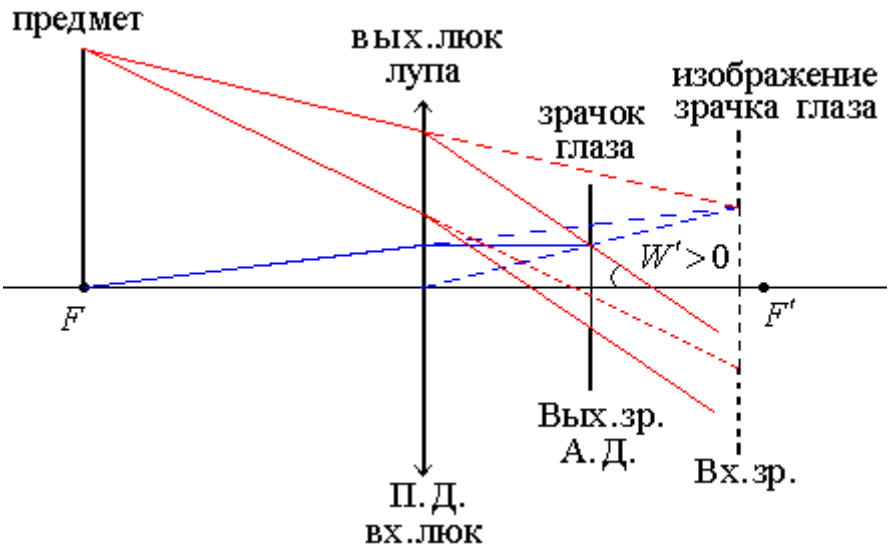


Рис. 23. Зрачки и люки лупы

Изображение оправы лупы будет совпадать с оправой лупы; изображение зрачка глаза будет прямым, мнимым, увеличенным. Из осевой точки предмета F **изображение зрачка глаза** видно под меньшим углом, нежели оправу лупы, поэтому оно **является входным зрачком**, а **оправа лупы – полевой диафрагмой** и одновременно входным и выходным люком.

По мере увеличения угла поля зрения на входном люке начнется виньетирование пучка лучей, что приведет к постепенному уменьшению освещенности зрачка глаза до нуля.

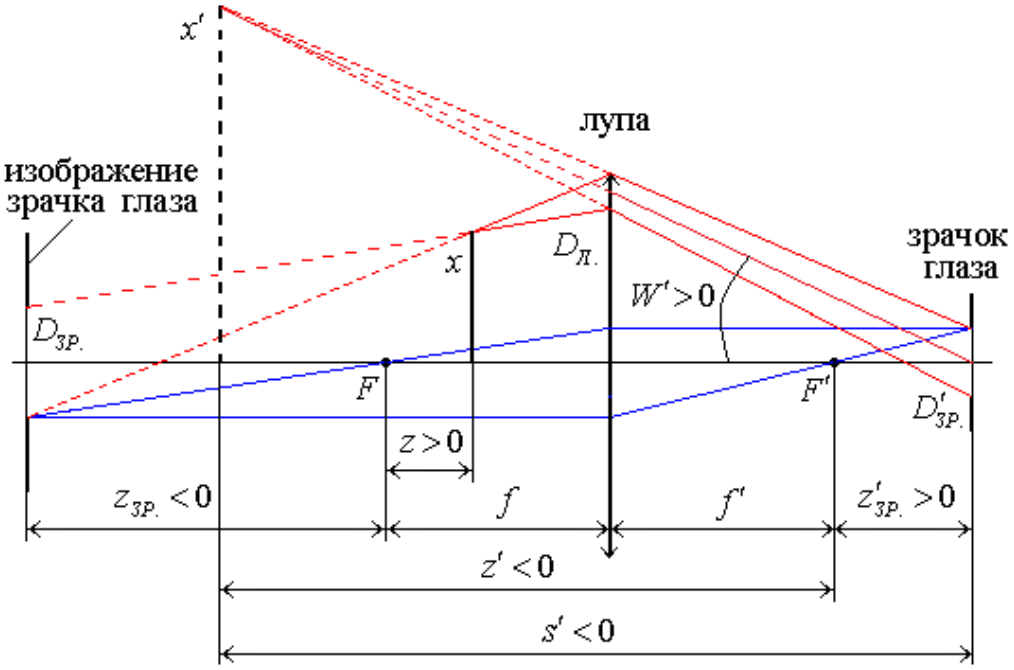


Рис. 24. К расчету поля полной освещенности

Из рис. 23 видно, что линейное поле зрения лупы тем больше, чем больше диаметр лупы и чем ближе зрачок глаза к лупе. Рассчитаем поле полной освещенности лупы.

На рис. 24 точка B предмета расположена на краю поля полной освещенности; x – координата точки B. Пусть заданы $D'_{ЗР}$ – диаметр зрачка глаза, $D_Л$ – диаметр оправы лупы, $z'_{ЗР}$ – положение зрачка глаза, $A_Д$ – аметропия глаза, f' – фокусное расстояние лупы; осевая точка изображения совпадает с дальней точкой ясного зрения. Тогда:

$$z_{ЗР} = -\frac{f'^2}{z'_{ЗР}}\ ,\ \beta_P = -\frac{z'_{ЗР}}{f'}\ ,\ D_{ЗР} = \frac{D'_{ЗР}}{|\beta_P|}\ , \qquad (53)$$

здесь β_P – увеличение в зрачках.

Согласно (52):

$$z = -\frac{f'^2}{\frac{1000}{A_Д} + z'_{ЗР}}\ ,\ \text{тогда}\ \beta = \frac{f'}{z}\ . \qquad (54)$$

Из рис. 24 находим:

$$\frac{\frac{D_Л}{2} + \frac{D_{ЗР}}{2}}{z_{ЗР} - f'} = \frac{x + \frac{D_{ЗР}}{2}}{z_{ЗР} - z}\ , \qquad (55)$$

из соотношения (55) следует:

$$x = \frac{z_{ЗР} - z}{z_{ЗР} - f'} \cdot \frac{D_Л + D_{ЗР}}{2} - \frac{D_{ЗР}}{2} \text{ , тогда } x' = \beta \cdot x \ . \qquad (56)$$

Угловое поле, очевидно, равно:

$$tg\, W' = -\frac{x'}{s'} \text{ , где } s' = \frac{1000}{A_Д} \ . \qquad (57)$$

Таким образом, выражения (53-56) позволяют рассчитать линейное поле, а выражение (57) – угловое поле полной освещенности.

На рис. 25 приведена качественная зависимость освещенности зрачка глаза от угла поля зрения.

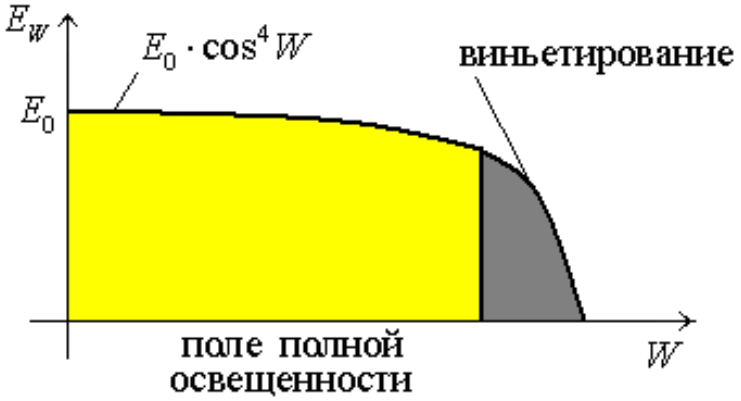


Рис. 25.Зависимость освещенности зрачка от угла поля зрения

11.4.2.3. Геометрическая глубина изображаемого пространства лупы совместно с глазом.

При наблюдении через лупу объемного предмета одновременно резко видны точки этого предмета, расположенные в разных плоскостях предмета, то есть в пределах глубины изображаемого пространства. Рассмотрим случай, когда эмметропический глаз при наблюдении через лупу аккомодирует на бесконечность. В этом случае плоскость предмета Q проходит через передний фокус F. Нормальный глаз без напряжения аккомодирующей мышцы одновременно с плоскостью Q будет видеть резко также плоскости Q_1 и Q_2, расположенные на некоторых расстояниях по обе стороны от плоскости Q (рис. 26). Все точки плоскости Q на сетчатке глаза изобразятся также в виде точек. Точки плоскостей Q_1 и Q_2 изобразятся на сетчатке глаза не в виде точек, а в виде кружков рассеяния диаметром δ'.

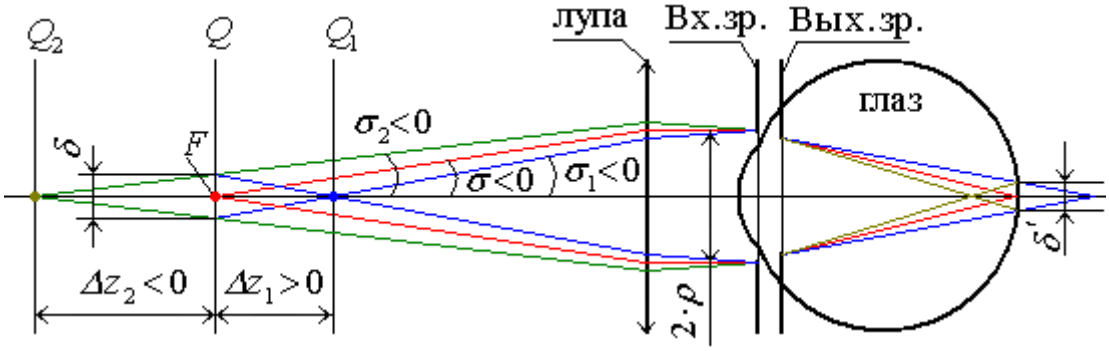


Рис. 26. Глубина изображаемого пространства системы лупа – глаз

Этим кружкам соответствуют сопряженные кружки диаметром δ в плоскости Q (поскольку сетчатка и плоскость Q сопряжены), которые будут восприниматься глазом как точки, если их размер не превысит линейный предел разрешения глаза.

Очевидно, что:

$$\delta = -\psi \cdot f = \psi \cdot f' = \frac{250}{\Gamma} \cdot \psi \text{, где} \tag{58}$$

ψ – предельный угол разрешения глаза; f и f' – соответственно переднее и заднее фокусное расстояние лупы.

Исходя из рис. 26, определим расстояния Δz_1 и Δz_2 соответственно от плоскостей Q_1 и Q_2 до плоскости Q:

$$\Delta z_1 = -\frac{\delta}{2 \cdot tg\,\sigma_1}\ ,\ \Delta z_2 = \frac{\delta}{2 \cdot tg\,\sigma_2}\ . \tag{59}$$

Поскольку δ – величина малая, Δz_1 и Δz_2 также малы по сравнению с f', то с большой степенью точности можно считать, что $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$. Поэтому

$$\Delta z_1 = -\Delta z_2 = -\frac{\delta}{2 \cdot tg\,\sigma}\ . \tag{60}$$

Из рис. 26 находим:

$$\Delta z = \Delta z_1 - \Delta z_2 = -\frac{\delta}{tg\,\sigma}\ , \tag{61}$$

$$tg\,\sigma = \frac{\rho}{f} = -\frac{\rho}{f'}\ , \tag{62}$$

где ρ – радиус зрачка глаза. Подставим (58) и (62) в (61):

$$\Delta z = -\frac{\psi \cdot f'}{-\rho} \cdot f' = f'^2 \cdot \frac{\psi}{\rho} = \left(\frac{250}{\Gamma}\right)^2 \cdot \frac{\psi}{\rho} \ . \qquad (63)$$

При малых углах σ можно положить $tg\,\sigma \approx \sin\sigma$, тогда

$$\Delta z = -\frac{\delta}{tg\,\sigma} = -\frac{\delta}{\sin\sigma} = -\frac{\psi \cdot f'}{\sin\sigma} = \frac{250}{\Gamma} \cdot \frac{\psi}{A} \qquad (64)$$

где $\mathrm{A} = -\sin\sigma > 0$ – числовая апертура; величина, положительная по определению.

Δz – геометрическая глубина изображаемого пространства системы лупа – глаз.

Пример. $\Gamma = 10^{\times}$, $2 \cdot \rho = 3\,мм$.

Из (63) находим:

$$\Delta z = \left(\frac{250}{10}\right)^2 \cdot \frac{0.0003}{1.5} = 0.125\,мм\,.$$

Выражение (63) определяет глубину изображаемого пространства с точки зрения геометрической оптики: изображение точки предмета также является точкой.

11.4.2.4. Аккомодационная глубина изображаемого пространства системы лупа – глаз

В процессе наблюдения объемного предмета невооруженный **эмметропический** глаз аккомодирует на различно удаленные точки. Благодаря субъективному восприятию результатов этого процесса у наблюдателя создается впечатление, что все рассматриваемое по глубине пространство видно одновременно резким. Аналогичным будет процесс восприятия по глубине пространства изображений при наблюдении через оптическую систему. Если глаз аккомодирует в пределах расстояний от 250 мм до бесконечности, то при наблюдении через лупу он будет видеть резкими изображения точек предметной плоскости, которая может располагаться в промежутке от передней фокальной плоскости до плоскости, удаленной от переднего фокуса лупы на некоторое расстояние z, сопряженное с расстоянием $z' = -250$.

Если зрачок глаза расположен в заднем фокусе лупы (рис. 27), то расстояние z, определяющее аккомодационную глубину изображаемого пространства, можно найти по формуле Ньютона:

$$z = -\frac{f'^2}{z'} = \frac{f'^2}{250} \ . \qquad (65)$$

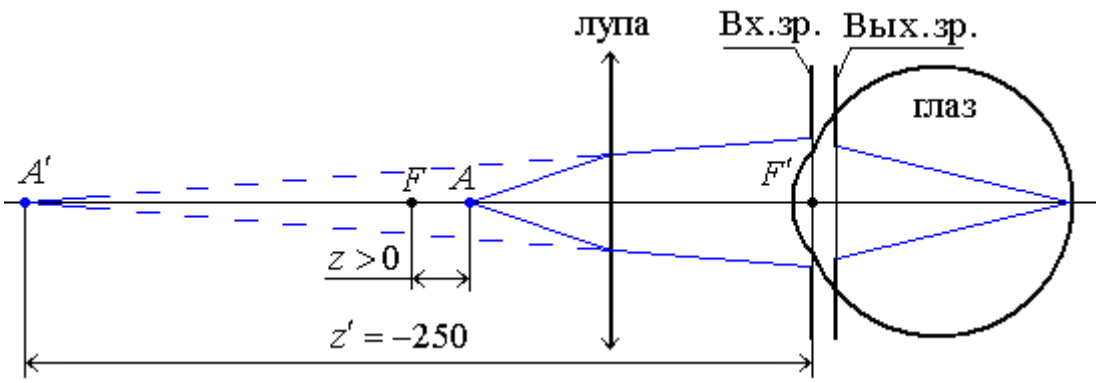


Рис. 27. К расчету аккомодационной глубины изображаемого пространства лупы

11.4.2.5. Дифракционная глубина изображаемого пространства системы лупа – глаз

Рассчитать дифракционную глубину изображаемого пространства системы лупа – глаз можно с помощью формулы (40):

$$2 \cdot \Delta z = \frac{n \cdot \lambda_0}{A^2} \ .$$

Преобразуем это выражение, полагая $n = 1$:

$$2 \cdot \Delta z = \frac{\lambda_0}{\sin^2 \sigma_A} \approx \frac{\lambda_0}{tg^2 \sigma_A} = \frac{\lambda_0}{\left(\frac{\rho}{f'}\right)^2} \ . \qquad (66)$$

11.4.2.6. Разрешающая способность лупы с глазом

При малых W и W' можно записать:

$$\Gamma = \frac{W'}{W} \text{ , отсюда находим: } W = \frac{W'}{\Gamma} \ . \qquad (67)$$

Если положить $W' = 60''$ (угловое разрешение глаза), то

$$W = \frac{60''}{\Gamma} \text{ – угловое разрешение лупы совместно с глазом.} \qquad (68)$$

11.4.2.7. Основные типы луп

Рассмотрим основные типы луп. Для небольших увеличений (до 7^x) в качестве луп обычно применяют простую плосковыпуклую линзу (рис. 28,а). У таких луп линейное поле $2 \cdot x$ при удовлетворительном качестве изображения не превышает $0.2 \cdot f'$, или в угловой мере определяется углом 12°. Лупы среднего и сильного увеличения, требующие

устранения сферической и хроматической аберраций, состоят из двух и более линз. Если в качестве лупы использовать две одиночные линзы, расположенные почти вплотную друг к другу (рис. 28, б), то наблюдение можно вести либо через одну из линз, либо через обе сразу. Такая лупа имеет три различных увеличения Γ_1, Γ_2, $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 – видимое увеличение первой и второй отдельных линз.

Для увеличения поля зрения применяют апланатические лупы, которые состоят из трех склеенных линз. Например, апланатическая лупа по Штейнгелю (рис. 28, в) имеет увеличение до 15^x, а ее угловое поле составляет до 20°. У такой лупы хорошо исправлена сферическая аберрация, хроматизм увеличения и аберрация широких наклонных пучков. Четырехлинзовые анастигматические лупы (рис. 28, г) являются наиболее совершенными лупами с увеличением до $40^{x.}$ Лупы такого типа по качеству изображения соответствуют объективам микроскопов. Бинокулярные лупы состоят из двух одиночных линз, расположенных так, что наблюдение через них ведется одновременно двумя глазами (рис. 28, д). Эти лупы дают объемное изображение. В качестве луп большого увеличения можно также использовать окуляры Рамсдена и Кельнера (рис. 28, е, ж).

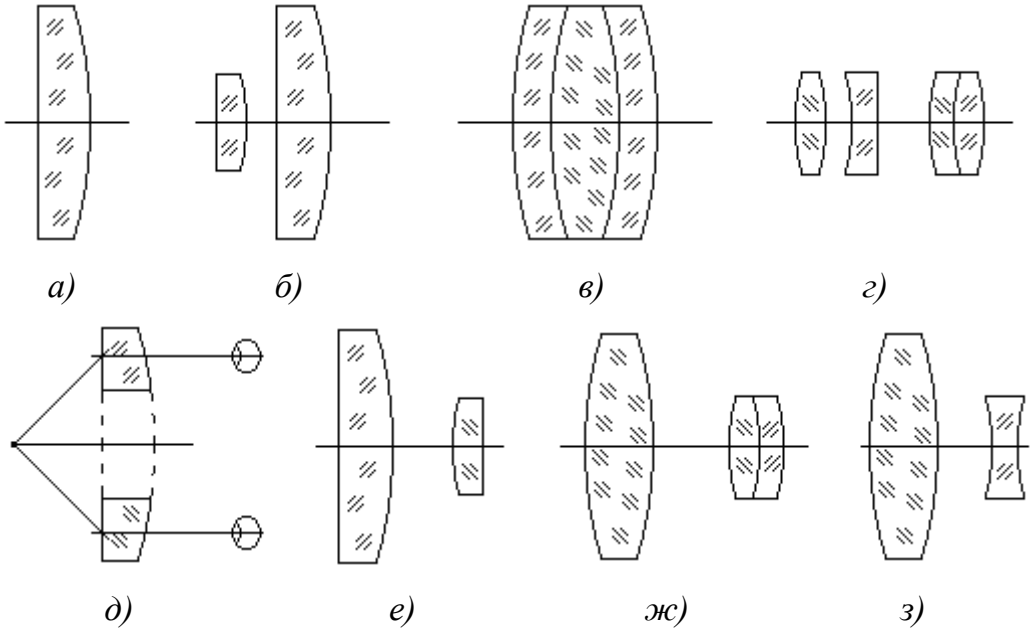


Рис. 28. Типы луп

В тех случаях, когда расстояние от предмета до лупы велико, на практике применяют телескопические лупы, которые состоят из двух линз – положительной и отрицательной, раздвинутых на расстояние d (рис. 28,з). Увеличение такой лупы

$$\Gamma = \frac{250}{f'} = 250 \cdot \varphi \text{ , где } \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - d \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \text{ .}$$

Обычно конструктивно телелупы выполняют таким образом, что расстояние d можно изменять, при этом лупа будет иметь переменное увеличение.

11.4.3. Микроскоп

Микроскоп используется для рассматривания мелких предметов, не различимых с помощью лупы, а также для микропроекции и микрофотографии.

Оптическое устройство современного микроскопа отчетливо разделяется на две части. Первая часть – осветительная система (**осветитель**), расположена по ходу лучей между источником света и исследуемым предметом. Вторая – визуальная часть (собственно **микроскоп**), помещается между предметом и глазом наблюдателя. Ее назначение – создать на сетчатке глаза резкое и увеличенное изображение рассматриваемого предмета.

Поскольку визуальная часть передает изображение, она должна обладать достаточно малыми аберрациями. К осветительной системе микроскопа такие требования не предъявляются. Несмотря на это, роль осветительной системы в современном микроскопе очень важна. В этом легко можно убедиться, представив себе, что в микроскопе, например, тысячекратного увеличения, площадь изображения в миллион раз больше площади предмета. Поэтому световой поток, прошедший через предмет (или отраженный от предмета), на изображении должен распределиться на площадь, в миллион раз увеличенную. Отсюда следует, что если осветительная система не обеспечит весьма интенсивного освещения предмета, то, как бы ни была совершенна оптика визуальной части микроскопа, изображение будет темным и потому плохо видимым.

11.4.3.1. Зрачки и люки микроскопа

Оптическая схема микроскопа показана на рис. 29.

В микроскопе три диафрагмы: оправа Q_1 объектива, диафрагма Q_2 окуляра, оправа Q_3 окуляра. Четвертой диафрагмой является зрачок глаза Q_4.

Построим изображение оправы Q_1 объектива в линзе окуляра. Для этого проведем вспомогательный луч от края оправы Q_1 через главную точку окуляра. Пересечение вспомогательного луча в пространстве изображений с лучом 1', вышедшим из осевой точки предмета (луч 1),

и параллельным оптической оси, дает положение изображения $Q_1^{'}$ оправы Q_1. Зрачок глаза Q_4 совмещается с плоскостью диафрагмы $Q_1^{'}$.

При отсутствии зрачка глаза диафрагма Q_1 является входным зрачком (и одновременно апертурной диафрагмой), так как эта диафрагма из осевой точки изображения видна под меньшим углом, чем диафрагма Q_3. Диафрагма Q_3 специально делается большего диаметра, чтобы уменьшить виньетирование пучков лучей от внеосевых точек предмета. Диафрагма Q_2 является полевой диафрагмой, она расположена в передней фокальной плоскости окуляра и ограничивает поле зрения микроскопа; ее изображение на плоскости предмета является входным люком, выходной люк расположен в бесконечности.

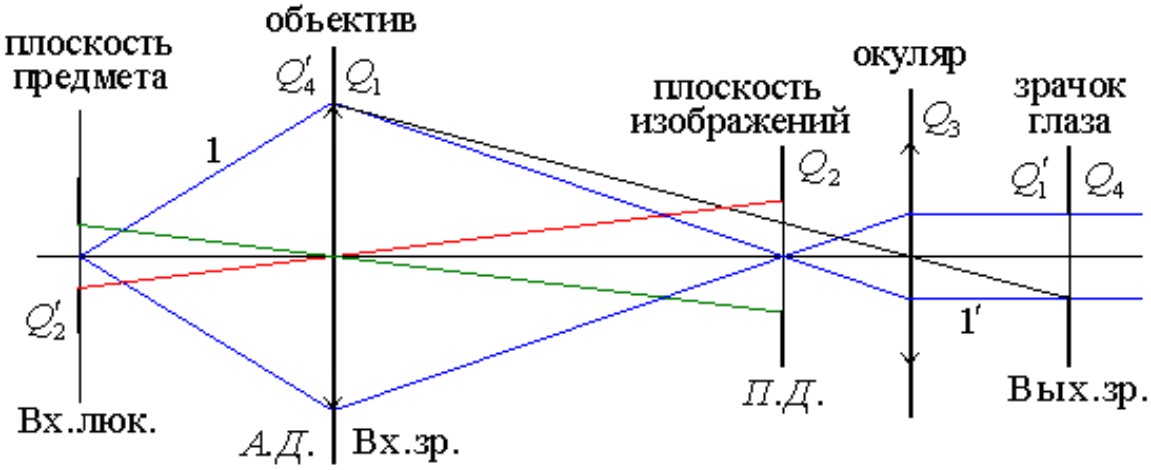


Рис. 29. Зрачки и люки микроскопа

Теперь совместим зрачок глаза с выходным зрачком $Q_1^{'}$ и построим изображение $Q_4^{'}$ зрачка глаза окуляром. Очевидно, что изображение зрачка глаза $Q_4^{'}$ будет лежать в плоскости диафрагмы Q_1.

Рассмотрим два случая:

а) $Q_4^{'} < Q_1$, это значит, что часть светового потока, попавшего в объектив, виньетируется на зрачке глаза, то есть часть энергии мы теряем, и освещенность зрачка уменьшается. Кроме того, уменьшается разрешающая способность объектива и в целом системы микроскоп-глаз.

б) $Q_4^{'} > Q_1$, этот случай тоже невыгоден, поскольку в зрачок глаза попадает меньше энергии, чем могло бы, то есть уменьшается освещенность изображения на сетчатке.

Наилучший результат получается тогда, когда зрачки совпадают по положению и размеру.

Общее правило при стыковке двух оптических систем:

Выходной зрачок и выходной люк первой системы должны совпадать соответственно с входным зрачком и входным люком второй системы.

Выходным зрачком микроскопа может быть полученное через окуляр изображение оправы последней линзы микрообъектива, являющейся апертурной диафрагмой, либо изображение апертурной диафрагмы, располагаемой между микрообъективом и его задним фокусом. Иногда апертурную диафрагму помещают в задней фокальной плоскости микрообъектива, и тогда входной зрачок микроскопа будет находиться в бесконечности. В этом случае в микроскопе имеет место телецентрический ход главного луча в пространстве предметов, что рационально для многих измерительных микроскопов.

11.4.3.2. Основные характеристики микроскопа

Оптическая схема микроскопа состоит из двух сложных систем – объектива и окуляра (рис. 30). Основными характеристиками микроскопа являются:

- видимое увеличение Γ;
- линейное поле в пространстве предметов $2 \cdot x$;
- числовая апертура A либо диаметр выходного зрачка D';
- разрешающая способность.

11.4.3.2.1. Видимое увеличение

По отношению ко всему микроскопу рассматриваемый предмет расположен в передней фокальной плоскости микроскопа. Тогда видимое увеличение микроскопа можно определить так же, как и у лупы:

$$\Gamma = \frac{250}{f'} \ . \qquad (69)$$

Здесь f' – фокусное расстояние микроскопа.

Как известно,

$$f' = -\frac{f'_{ОБ} \cdot f'_{ОК}}{\Delta} \text{, тогда} \qquad (70)$$

$$\Gamma = -\frac{250 \cdot \Delta}{f'_{ОБ} \cdot f'_{ОК}} \ \text{– } \textbf{видимое увеличение микроскопа.} \qquad (71)$$

Но линейное увеличение объектива

$$\beta_{ОБ} = -\frac{\Delta}{f'_{ОБ}} \ , \qquad (72)$$

а видимое увеличение окуляра

$$\Gamma_{ОК} = \frac{250}{f'_{ОК}} \ . \qquad (73)$$

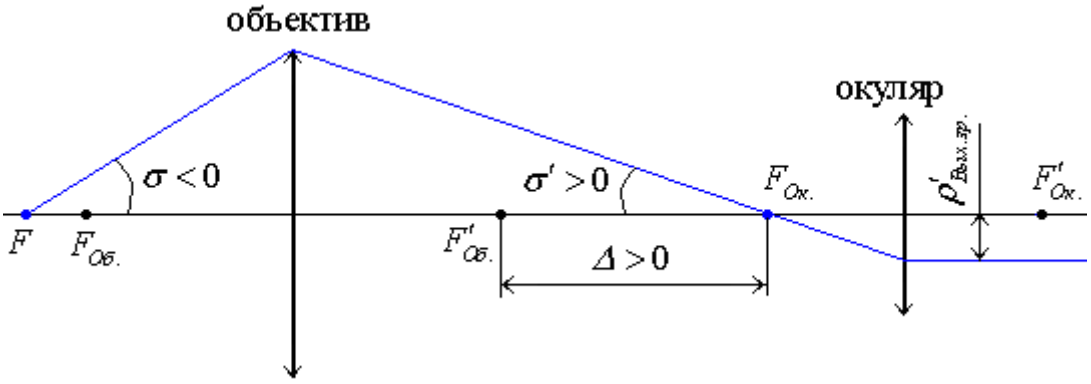


Рис. 30. Оптическая схема микроскопа

Подставим (72) и (73) в (71), получим:

$$\Gamma = \beta_{ОБ} \cdot \Gamma_{ОК}$$ – **видимое увеличение микроскопа.** (74-1)

Во всех современных объективах микроскопов достаточно строго выполнен закон синусов, который можно записать в виде:

$$\beta_{ОБ} = \frac{n \cdot \sin\sigma}{n' \cdot \sin\sigma'} \ .$$

Учитывая, что $n' = 1$, угол σ' мал, из последнего выражения получим:

$$\beta_{ОБ} = -\frac{A}{\sigma'} \ .$$

Введение знака «минус» в формулу объясняется тем, что величина A по определению больше нуля. Из рис. 30 находим:

$$\sigma' = \frac{\rho'_{Вых.зр.}}{f'_{ОК}} \ .$$

С учетом последнего выражения можно записать:

$$\beta_{ОБ} = -\frac{A \cdot f'_{ОК}}{\rho'_{Вых.зр.}} \ .$$

Умножая последнюю формулу на $\Gamma_{ОК}$, получим:

$$\Gamma = -\frac{250 \cdot A}{\rho'_{Вых.зр.}}$$ – **видимое увеличение микроскопа.** (74-2)

Это третья и последняя формула для видимого увеличения микроскопа.

11.4.3.2.2. Линейное поле зрения

Линейное поле зрения микроскопа ограничивается полевой диафрагмой, расположенной в передней фокальной плоскости окуляра (рис. 31). В этой же плоскости получается промежуточное действительное изображение предмета:

$$x' = \beta_{ОБ} \cdot x \ . \qquad (75)$$

С другой стороны, диаметр $2 \cdot x'$ полевой диафрагмы зависит от углового поля $2 \cdot W'$ окуляра:

$$x' = f_{ОК}' \cdot tg W' \ . \qquad (76)$$

Приравнивая правые части (75) и (76), получим:

$$\beta_{ОБ} \cdot x = f'_{ОК} \cdot tg W' \text{ , отсюда}$$

$$2 \cdot x = \frac{2 \cdot f'_{ОК} \cdot tg W'}{\beta_{ОБ}} = \frac{2 \cdot 250 \cdot tg W'}{\beta_{ОБ} \cdot \Gamma_{ОК}} = \frac{500 \cdot tg W'}{\Gamma} \ .$$

Окончательно можно записать:

$$2 \cdot x = \frac{500 \cdot tg W'}{\Gamma} \ \text{– } \textbf{линейное поле микроскопа}. \qquad (77)$$

При больших увеличениях Γ микроскопа линейное поле меньше 1 мм.

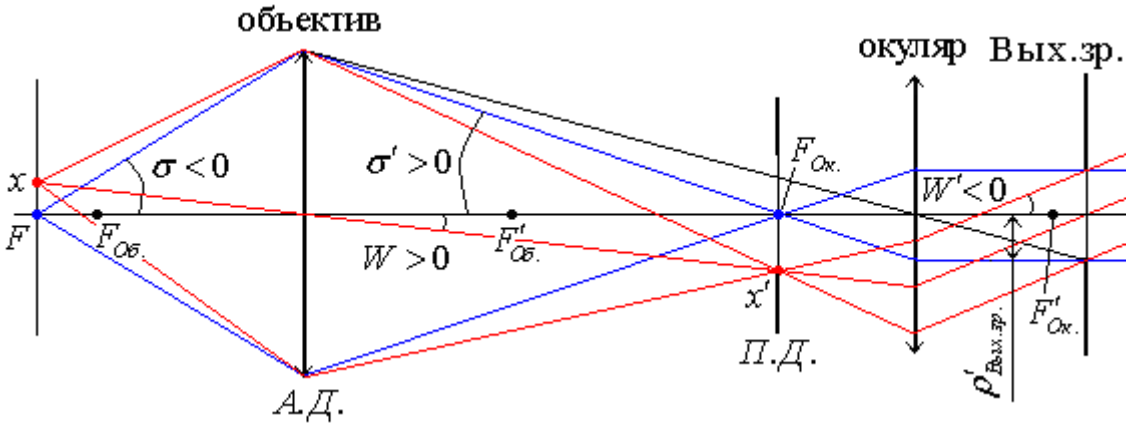


Рис. 31. Оптическая схема микроскопа

11.4.3.2.3. Числовая апертура

Числовая апертура $A = n \cdot \sin\sigma$ представляет собой произведение показателя преломления на синус апертурного угла и характеризует светосилу и разрешающую способность микроскопа. Из закона преломления

$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i'$$

следует, что числовая апертура не меняется при прохождении света через плоско-параллельную пластинку. Если предмет находится в воздухе, то объектив не может работать с числовой апертурой, большей единицы. Если средой (**иммерсионной** жидкостью) является вода ($n = 1.333$), то предельно возможной апертурой будет $\mathrm{A} = 1.333$.

Иммерсионные системы впервые были введены для устранения влияния толщины покровных стекол и их неоднородности; в качестве иммерсионной жидкости применяются вода, кедровое масло ($n = 1.515$), монобромнафталин ($n = 1.7$) и т. д.

11.4.3.2.4. Разрешающая способность

Аббе опубликовал в 1877 году свою дифракционную теорию, на основании которой он объяснил роль однородной иммерсии в увеличении числовой апертуры и в обеспечении повышенной разрешающей способности. Применяя в качестве иммерсионной жидкости масло, можно увеличить апертуру микроскопа, а, следовательно, его разрешающую способность примерно в полтора раза.

Разрешающая способность микроскопа характеризуется величиной, обратной линейному пределу разрешения δ, под которым понимается минимальное расстояние между точками, раздельно видимыми в микроскоп.

Ниже мы рассмотрим основы дифракционной теории образования изображения, позволяющей рассчитать разрешающую способность микроскопа.

11.4.3.3. Основы дифракционной теории микроскопа

Геометрическая теория микроскопа не может дать никаких указаний о его разрешающей способности, так как последняя ограничивается явлениями дифракции, возникающими при прохождении света через оптическую систему микроскопа. В микроскопе обычно бывает малым диаметр линейного поля зрения на предмете. Если предмет, обладающий микроскопической структурой, освещается проходящим сквозь него светом, то непрозрачные или сильно поглощающие свет детали его структуры действуют подобно дифракционной решетке, вызывая сильную дифракцию проходящих пучков лучей.

Чтобы упростить эти явления, сохранив их физическую сущность, Аббе предложил рассмотреть явление дифракции в случае, когда предметом для микроскопа служит обычная регулярная дифракционная решетка с периодом a (рис. 32).

Если решетка, погруженная в среду с показателем преломления n, освещается монохроматическим пучком параллельных лучей, образую-

щих угол α_0 с нормалью к решетке, то, пройдя решетку, этот пучок лучей распадется на серию параллельных пучков лучей.

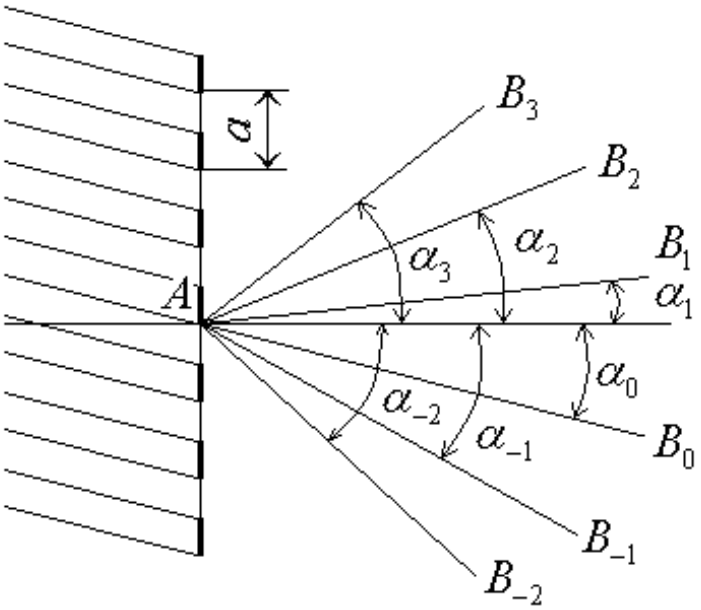


Рис. 32. Дифракция на плоской решетке

На рис. 32 каждый дифрагированный пучок представлен одним лучом, проходящим через точку A на решетке. Все дифрагированные пучки пронумерованы, причем прямо прошедший пучок лучей (луч AB_0) имеет нулевой номер. Пучки, расположенные выше нулевого, имеют положительные, а пучки, лежащие ниже нулевого, – отрицательные номера. Из физической оптики известна зависимость:

$$\sin\alpha_0 - \sin\alpha_k = k \cdot \frac{\lambda}{n \cdot a} \qquad (78)$$

где k – номер или порядок дифрагированного пучка; α_k – угол, образованный с нормалью k-ым дифрагированным пучком.

Если решетка освещена белым светом, то все дифрагированные пучки лучей, кроме нулевого, разлагаются в спектры вследствие того, что углы α_k зависят, как видно из формулы (78), от λ явно и, кроме того, через величину n, которая является функцией от λ. Только при $k = 0$ угол α_k не зависит от λ. Поэтому прямо прошедший через решетку пучок лучей в спектр не разлагается.

Пусть дифракционная решетка помещена перед объективом микроскопа (рис. 33). Проследим ход двух лучей, исходящих из осевой точки A решетки и относящихся к двум соседним дифрагированным пучкам k-го и $k+1$-го порядков. Напишем выражение (78) для $k+1$-го порядка:

$$\sin\alpha_0 - \sin\alpha_{k+1} = (k+1)\cdot\frac{\lambda}{n\cdot a}\ . \qquad (79)$$

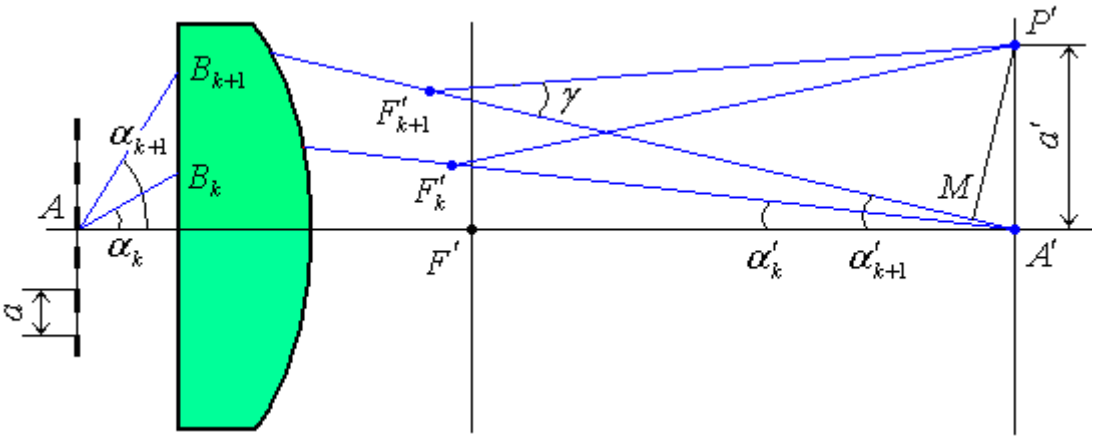


Рис. 33. Образование изображения в микроскопе

Вычтем (79) из (78), получим:

$$n\cdot\sin\alpha_{k+1} - n\cdot\sin\alpha_k = -\frac{\lambda}{a}\ . \qquad (80)$$

Для объектива микроскопа, как правило, выполняется закон синусов Аббе, то есть:

$$n\cdot\sin\alpha_{k+1} = \beta_{ОБ}\cdot n'\cdot\sin\alpha'_{k+1} = \beta_{ОБ}\cdot\sin\alpha'_{k+1}\ , \qquad (81)$$

$$n\cdot\sin\alpha_k = \beta_{ОБ}\cdot n'\cdot\sin\alpha'_k = \beta_{ОБ}\cdot\sin\alpha'_k\ . \qquad (82)$$

Подставим (81-82) в(80), получим:

$$\sin\alpha'_{k+1} - \sin\alpha'_k = -\frac{\lambda}{\beta_{ОБ}\cdot a}\ . \qquad (83)$$

Рассмотрим физическую сторону явлений, сопутствующих прохождению света через микроскоп. Лучи параллельных пучков, идущих в пространстве предметов вдоль главных лучей AB_k и AB_{k+1}, после выхода из объектива соберутся в фокусах F'_k и F'_{k+1}, лежащих на преломленных лучах F'_kA' и $F'_{k+1}A'$. Из-за кривизны изображения точки F'_k и F'_{k+1} не лежат строго в задней фокальной плоскости объектива.

Таким образом, благодаря дифракции получается не одно, а целая серия изображений бесконечно удаленного источника света. На рис. 34 показана дифракционная картина в задней фокальной плоскости объектива. Эту картину можно наблюдать, вынув окуляр из тубуса микроскопа. Все изображения источника света, имеющего форму круглого диска, разложены в спектры, за исключением изображения B_0 нулевого порядка.

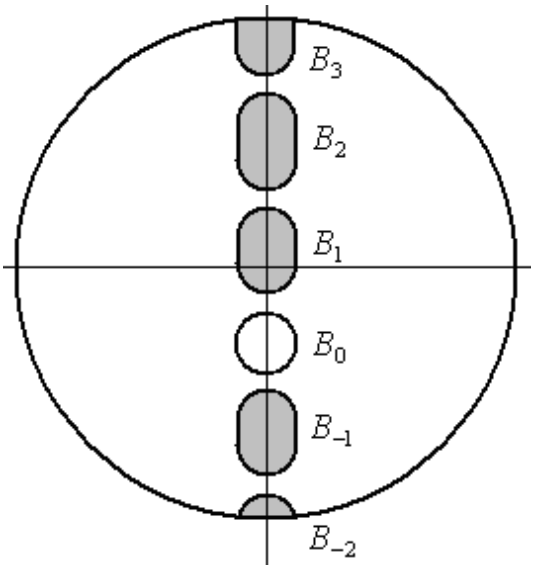


Рис. 34. Первичное изображение в задней фокальной плоскости объектива

Дифракционная картина, возникающая в фокальной плоскости, называется первичным изображением предмета.

Оно совершенно не похоже на предмет (в данном случае – на решетку), но несет в себе информацию о предмете, достаточную для создания похожего изображения. Такое изображение, называемое вторичным, действительно возникает в плоскости полевой диафрагмы с центром в точке A'.

Фокусы $F_k^{'}$ и $F_{k+1}^{'}$ можно рассматривать как источники света, освещающие плоскость полевой диафрагмы. Но фокусы $F_k^{'}$ и $F_{k+1}^{'}$ – дифрагированные изображения одной точки источника света, и вследствие общности их происхождения они излучают когерентный свет. В плоскости $A'P'$ лучи посылаемые источниками $F_k^{'}$ и $F_{k+1}^{'}$, интерферируют, и здесь возникает известная периодическая картина – чередование светлых и темных интерференционных полос, которая и воспроизводит с большей или меньшей точностью периодическую структуру решетки, служащей предметом. Таким образом, образование изображения в микроскопе происходит в два этапа: сначала – вследствие дифракции в плоскости предметов – получается первичное изображение в задней фокальной плоскости объектива, а затем – вследствие интерференции света, излучаемого спектрами разного порядка – на плоскости полевой диафрагмы возникает вторичное изображение, воспроизводящее (с некоторым приближением) структуру предмета.

Пусть в результате интерференции лучей $F_k^{'}A'$ и $F_{k+1}'A'$ в точке A' возник максимум освещенности, середина светлой интерференционной полосы. Разность хода Δ этих лучей определяется выражением:

$$\Delta = F'_{k+1} A' - F'_k A' \ . \qquad (84)$$

Перемещаясь вдоль плоскости изображения вверх от точки A', мы обнаружим сначала падение освещенности до минимума, а затем новое ее возрастание. Пусть в точке P' мы обнаружили ближайший соседний максимум освещенности. Тогда $a' = A'P'$ есть ширина интерференционной полосы, которую мы можем рассматривать как изображение периода a решетки.

Разность хода Δ_1 лучей $F'_k P'$ и $F'_{k+1} P'$, интерферирующих в точке P', выражается так:

$$\Delta_1 = F'_{k+1} P' - F'_k P' \ . \qquad (85)$$

Для того, чтобы в точках A' и P' находились два соседних максимума, необходимо, чтобы разность Δ_1 и Δ хода лучей отличалась одна от другой на одну целую длину волны света:

$$\Delta_1 - \Delta = \lambda \ . \qquad (86)$$

Подставим (84-85) в (86), получим:

$$F'_{k+1} P' - F'_{k+1} A' - \left(F'_k P' - F'_k A' \right) = \lambda \ . \qquad (87)$$

Опустим из точки P' перпендикуляр $P'M$ на луч $F'_{k+1} A'$. Из треугольника $F'_{k+1} P' M$ следует:

$$F'_{k+1} M = F'_{k+1} P' \cdot \cos\gamma \ . \qquad (88)$$

Но угол γ весьма мал, так как в треугольнике $F'_{k+1} P' A'$ основание a' мало, а его высота, приблизительно равная оптической длине тубуса, велика. Поэтому можно принять $\cos\gamma \approx 1$, а потому из (88) находим, что:

$$F'_{k+1} M = F'_{k+1} P' \ . \qquad (89)$$

Далее из треугольника $MP'A'$ с углом α'_{k+1} у вершины P' получаем:

$$MA' = a' \cdot \sin\alpha'_{k+1} \ . \qquad (90)$$

Имея в виду (89-90), можно записать:

$$F'_{k+1} A' = F'_{k+1} M + MA' = F'_{k+1} P' + a' \cdot \sin\alpha'_{k+1} \ , \qquad (91)$$

откуда следует:

$$F'_{k+1} P' - F'_{k+1} A' = -a' \cdot \sin\alpha'_{k+1} \ . \qquad (92)$$

Аналогично получается выражение:

$$F'_k P' - F'_k A' = -a' \cdot \sin\alpha'_k \ . \qquad (93)$$

Подставляя (92-93) в (87), находим:

$$\sin\alpha'_{k+1} - \sin\alpha'_k = -\frac{\lambda}{a'} \ . \qquad (94)$$

Сравнивая (94) и (83), получим:

$$a' = \beta_{ОБ} \cdot a \qquad (95)$$

Полученная таким образом формула совпадает с формулой геометрической оптики, подтверждая применимость законов геометрической оптики к микроскопу. Однако глубокое проникновение в физическую сущность образования изображения, потребовавшееся для данного вывода, позволяет сделать ряд важных заключений.

Во-первых, формула (95) в некоторых случаях может оказаться нарушенной. Представим себе, например, что в задней фокальной плоскости объектива перекрыты все нечетные спектры при помощи непрозрачной пластинки, в которой сделаны вырезы для четных спектров.

Запишем выражение (78) для четных спектров:

$$\sin\alpha_0 - \sin\alpha_{2\cdot k} = (2\cdot k)\cdot\frac{\lambda}{n\cdot a} \ , \qquad (96)$$

$$\sin\alpha_0 - \sin\alpha_{2\cdot k+2} = (2\cdot k+2)\cdot\frac{\lambda}{n\cdot a} \ , \qquad (97)$$

вычитая (97) из (96), находим:

$$\sin\alpha_{2\cdot k+2} - \sin\alpha_{2\cdot k} = -2\cdot\frac{\lambda}{n\cdot a} \ . \qquad (98)$$

С учетом условия синусов Аббе для четных спектров

$$n\cdot\sin\alpha_{2\cdot k} = \beta_{ОБ}\cdot\sin\alpha'_{2\cdot k} \ ,$$
$$n\cdot\sin\alpha_{2\cdot k+2} = \beta_{ОБ}\cdot\sin\alpha'_{2\cdot k+2}$$

уравнение (98) примет вид

$$\sin\alpha'_{2\cdot k+2} - \sin\alpha'_{2\cdot k} = -2\cdot\frac{\lambda}{\beta_{ОБ}\cdot a} \ . \qquad (99)$$

Что касается выражения (94), то его вид для четных гармоник не изменится:

$$\sin\alpha'_{2\cdot k+2} - \sin\alpha'_{2\cdot k} = -\frac{\lambda}{a'} \ , \qquad (100)$$

поскольку при его выводе рассматривались две соседние гармоники независимо от того, четные они или нечетные.

Сравнивая (99) и (100), находим:

$$a' = \frac{1}{2} \cdot \beta_{ОБ} \cdot a \ . \qquad (101)$$

Отсюда мы видим, что, перекрыв спектры первичного изображения через один, мы получаем удвоенную частоту структуры изображения. Вообще говоря, при экранировании некоторых спектров первичного изображения, во вторичном изображении могут возникнуть так называемые «духи», то есть такие структурные детали, которым не соответствует никакая реальность в строении предмета.

До того, как Аббе развил излагаемую здесь теорию, нередко для освещения на темном поле применялось устройство, в которое входила центральная бленда у заднего фокуса объектива (центральная бленда – это стеклянная пластинка, средняя часть которой зачернена). Эта бленда часто приводила к появлению «духов», так что после опубликования работы Аббе пришлось пересмотреть составленные раньше атласы микроорганизмов с целью устранения ряда ошибок.

Во-вторых, теория Аббе позволяет установить предел разрешающей способности микроскопа при помощи очень простых соображений.

11.4.3.4. Разрешающая способность микроскопа

Так как в основной формуле решетки (78) период a входит в знаменатель правой части, то чем меньше период a, тем больше углы α_k и, следовательно, тем более широким веером расходятся дифрагированные пучки лучей. Но апертурная диафрагма ограничена в своих размерах; поэтому, чем меньше период a, тем меньшее число спектров разных порядков уместится в отверстии апертурной диафрагмы. Понятно поэтому, что при достаточно малом a должен наступить момент, когда в отверстии апертурной диафрагмы поместится один спектр. Но ведь структура вторичного изображения есть результат интерференции, а при наличии только одного спектра интерференция не произойдет и полевая диафрагма будет освещена равномерно. Это значит, что данный период a решетки лежит ниже предела разрешающей способности микроскопа.

При определении разрешающей способности следует различать два случая: прямое и косое освещение. В случае прямого освещения предмет (решетка) освещается пучком лучей, параллельных оптической оси (рис. 35). Поэтому изображение источника света нулевого порядка (не разложенное в спектр) возникает у центра полевой диафрагмы, как показано на рис. 35 справа. В случае, когда решетка с периодом a находится на пределе разрешения, у краев апертурной диафрагмы еще находятся половины спектров первого и минус первого порядков. При этом угол

α_{-1} для дифрагированного пучка минус первого порядка (равно как и угол α_{+1} для дифрагированного пучка плюс первого порядка) должен быть равен апертурному углу α микроскопа. Поэтому, применяя формулу (78) к этому предельному случаю, мы должны положить в ней:

$$\alpha_0 = 0\,,\, k = -1\,,\, \alpha_{-1} = \alpha \quad . \tag{102}$$

При этом получим:

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{n \cdot a} \quad .$$

Откуда находится период a решетки, находящейся на пределе разрешения данным микроскопом:

$$a = \frac{\lambda}{n \cdot \sin\alpha} = \frac{\lambda}{A} \quad . \tag{103}$$

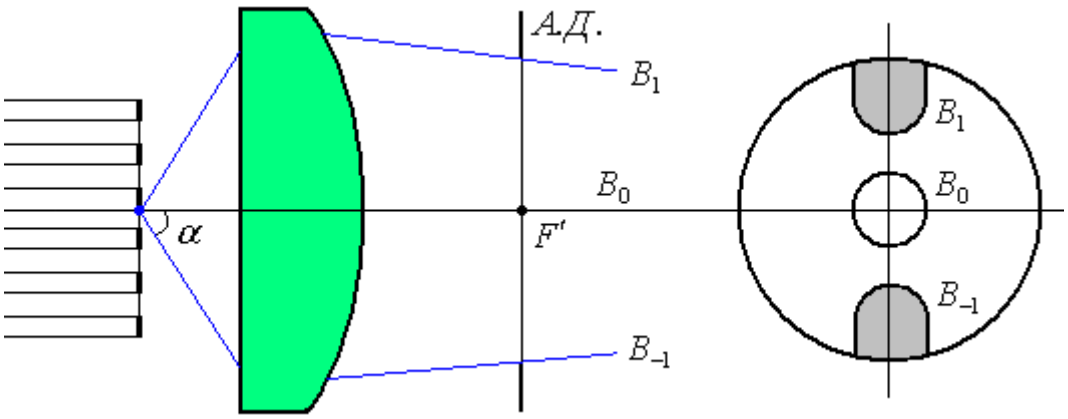


Рис. 35.Прямое освещение решетки

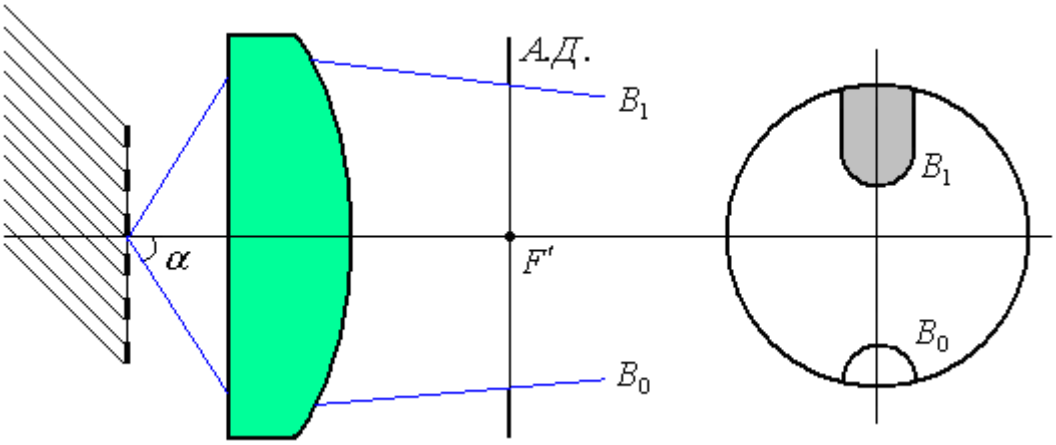


Рис. 36.Косое освещение решетки

При косом освещении решетка освещается пучком параллельных лучей, причем угол наклона пучка α_0 равен апертурному углу α микроскопа.

Поэтому в отверстии апертурной диафрагмы, показанной на рис. 36 справа, у нижнего края получается половина изображения источника света нулевого порядка (не разложенного в спектр). В случае, если данная решетка находится на пределе разрешения, половина спектра первого порядка должна еще находиться внутри апертурной диафрагмы, у ее верхнего края (рис. 36). Поэтому угол α_1 должен быть равен $(-\alpha)$. Снова воспользуемся формулой (78), положив в ней:

$$\alpha_0 = \alpha \, , k = 1 \, , \alpha_1 = -\alpha \ . \tag{104}$$

Тогда найдем:

$$2 \cdot \sin\alpha = \frac{\lambda}{n \cdot a} \ . \tag{105}$$

Определяя отсюда период a решетки, которая находится на пределе разрешения данным микроскопом, получим формулу:

$$a = \frac{\lambda}{2 \cdot n \cdot \sin\alpha} = \frac{\lambda}{2 \cdot A} \ . \tag{106}$$

При косом освещении a в два раза меньше, чем при прямом, а следовательно, разрешающая способность микроскопа при замене прямого освещения косым возрастает вдвое.

Нужно, однако, заметить, что оба рассмотренных случая не соответствуют реальным условиям: в микроскопе обычно осуществляется так называемое всестороннее освещение, при котором предмет освещается множеством параллельных пучков, проходящих под всевозможными углами к оси в пределах апертуры микроскопа. Этот случай был исследован академиком Д.С. Рождественским, пришедшим к выводу, что при всестороннем освещении предельный период решетки выражается формулой:

$$a = \frac{\lambda}{A_0 + A} \ . \tag{107}$$

Здесь введена еще числовая апертура A_0 конденсора. На практике обычно $A_0 = A$, и поэтому формула (107) совпадает с формулой (106).

На основании формулы (106) в начале прошлого века среди ученых-оптиков распространился пессимистический взгляд на возможность существенного прогресса микроскопии. В самом деле, все возможности повышения разрешающей способности микроскопа, то есть

уменьшения периода a в формуле (106), казались полностью исчерпанными. Передний апертурный угол α микроскопа доведен до такой величины, что его синус незначительно отличается от единицы. При этом числовая апертура достигла при применении иммерсии значения 1.5 (даже 1.6) и за отсутствием жидкостей с существенно повышенным показателем преломления n дальнейшее повышение ее не предвиделось.

Полагая в видимой области $\lambda = 0.5\,мкм$ и $A = 1.5$, получим по формуле (106): $a = \frac{1}{6}\,мкм$. Применяя фотографию и флуоресцирующие экраны, можно перейти в ультрафиолетовую область спектра и за счет укорочения длины волны света добиться еще значительного повышения разрешающей способности. Длину волны λ можно таким образом довести до 0.2 мкм. При этом получим: $a = \frac{1}{15}\,мкм = 66.7\,нм$. Но это уже предел. Дальнейшее уменьшение λ приводит в область лучей рентгена, которые через все прозрачные для них вещества проходят почти без всякого преломления и для которых поэтому невозможно создать объектив. С появлением многолучевых интерферометров точка зрения о невозможности дальнейшего повышения разрешающей способности в видимой области спектра полностью опровергнута. Но для обычного оптического микроскопа приведенные соображения остаются в силе.

Зиндентопф и Жигмонди построили в 1903 году ультрамикроскоп, в котором при боковом освещении можно обнаружить частицы, размеры которых значительно меньше величины, определяемой формулой (106). Но при этом каждая частица представляется дифракционным диском Эйри и мы не можем судить ни о ее величине, ни о ее форме.

Здесь необходимо еще учесть, что микроскоп должен обладать достаточно большим увеличением, чтобы изображение предельно малого элемента структуры предмета было видно наблюдателю под углом зрения, соответствующим предельному углу разрешающей способности глаза наблюдателя. **Такое увеличение Γ микроскопа, которое обеспечивает визуальное разрешение предельно малого элемента структуры предмета, принято называть полезным увеличением**. Действительно, дальнейшее повышение увеличения будет бесполезным, так как оно не позволит обнаружить более мелкие структурные детали предмета, ибо они меньше предельной величины a.

Для определения полезного увеличения воспользуемся сначала формулой (95):

$$a' = \beta_{ОБ} \cdot a \quad . \qquad (95)$$

Глазу, рассматривающему изображение a' через окуляр с фокусным расстоянием $f'_{ОК}$, изображение a' представится под углом зрения W'. При малых W' можно записать:

$$W' = \frac{a'}{f'_{ОК}} = \beta_{ОБ} \cdot a \cdot \frac{\Gamma_{ОК}}{250} = a \cdot \frac{\Gamma}{250} \ , \qquad (108)$$

откуда

$$\Gamma = \frac{250}{a} \cdot W' \ . \qquad (109)$$

Особого рассмотрения заслуживает величина $W' = \psi'$ предельного угла разрешающей способности глаза. Дело в том, что диаметр выходного зрачка микроскопа часто бывает значительно меньше наименьшего диаметра зрачка глаза, составляющего 2 мм. Такое уменьшение действующего отверстия зрачка глаза приводит к понижению его разрешающей способности, а, следовательно, к увеличению угла ψ'. Практически целесообразно принять $\psi' \approx -3' = -0.001\,рад$ вместо обычного $\psi' = 1'$. Благодаря этому из (109) получаем:

$$\Gamma = -\frac{0.25}{a} \ , \qquad (110)$$

где $a > 0$ измеряется в миллиметрах. Или

$$\Gamma = -\frac{250}{a} \ , \qquad (111)$$

если a измеряется в микронах.

Согласно (110) можно утверждать, что **полезным** является такое видимое увеличение, при котором предмет, находящийся на пределе разрешения, увеличивается до 0.25 мм. При этом величина изображения 0.25 мм должна измеряться в плоскости, отстоящей от глаза на 250 мм.

С учетом формулы (106)

$$a = \frac{\lambda}{2 \cdot n \cdot \sin\alpha} = \frac{\lambda}{2 \cdot A} \qquad (106)$$

выражение (111) преобразуется к виду:

$$\Gamma = -\frac{500 \cdot A}{\lambda}, \ [\lambda] = мкм \ , \text{ или} \qquad (112)$$

$$\Gamma = -\frac{0.5 \cdot A}{\lambda}, \ [\lambda] = мм \ . \qquad (113)$$

При $\lambda = 0.5\ мкм$ и косом освещении получим известное правило Аббе:

$$\Gamma = -1000 \cdot A \ . \qquad (114\text{-}1)$$

Для прямого освещения, очевидно,

$$\Gamma = -500 \cdot A \ . \qquad (114\text{-}2)$$

Поэтому практически увеличение микроскопа следует выбирать в пределах от $(-500 \cdot A)$ до $(-1000 \cdot A)$.

В оптических системах с большой апертурой, какими являются объективы микроскопов, необходимым условием хорошего качества изображения является тщательное соблюдение закона синусов. Поэтому во всех современных объективах микроскопов достаточно точно выполнен закон синусов, который можно представить в форме:

$$\beta_{ОБ} = \frac{n \cdot \sin\sigma}{n' \cdot \sin\sigma'} \ . \qquad (115)$$

Из рис. 31 находим:

$$tg\,\sigma' = -\frac{\rho'_{Вых.зр.}}{f'_{ОК}} \ . \qquad (116)$$

При $n' = 1$ и малых σ выражение (115) с учетом (116) примет вид:

$$\beta_{ОБ} = -\frac{n \cdot \sigma}{\dfrac{\rho'_{Вых.зр.}}{f'_{ОК}}} = -\frac{n \cdot \sigma}{\rho'_{Вых.зр.}} \cdot f'_{ОК} = -\frac{A}{\rho'_{Вых.зр.}} \cdot \frac{250}{\Gamma_{ОК}} \ . \qquad (117)$$

Откуда:

$$\Gamma = \beta_{ОБ} \cdot \Gamma_{ОК} = -\frac{250 \cdot A}{\rho'_{Вых.зр.}} \ . \qquad (118)$$

Сравнивая (113) и (118), находим:

$$\Gamma = -\frac{0.5 \cdot A}{\lambda} = -\frac{250 \cdot A}{\rho'_{Вых.зр.}} \ , \qquad (119)$$

Откуда для **косого** освещения

$$\rho'_{Вых.зр.} = 500 \cdot \lambda \ . \qquad (120\text{-}1)$$

При $\lambda = 0.5\ мкм$ находим $\rho'_{Вых.зр.} = 0.25\ мм$. Таким образом, полезному увеличению соответствует вполне определенное значение диаметра выходного зрачка микроскопа $2 \cdot \rho'_{Вых.зр.} = 0.5\ мм$.

При **прямом** освещении получим:

$$\rho'_{Вых.зр.} = 1000 \cdot \lambda \qquad (120\text{-}2)$$

и при $\lambda = 0.5\ мкм$ находим $2 \cdot \rho'_{Вых.зр.} = 1\ мм$.

Увеличение, превосходящее $1000 \cdot A$ (по абсолютной величине), является бесполезным. Но это положение не распространяется на микропроекцию, микрокинопроекцию и телевизионную микроскопию. В этих трех случаях при рассматривании изображения на экране отверстие зрачка глаза наблюдателя не ограничивается выходным зрачком микроскопа. Поэтому предельный угол ψ' разрешающей способности должен приниматься равным 1'.

11.4.3.5. Геометрическая глубина изображаемого пространства микроскопа

Поскольку микроскоп есть лупа, то для расчета геометрической глубины изображаемого пространства микроскопа без иммерсионной жидкости можно воспользоваться формулой (64):

$$\Delta z = \frac{250}{\Gamma} \cdot \frac{\psi}{A} \ , \qquad (121)$$

где Γ – видимое увеличение микроскопа; A – числовая апертура микроскопа; ψ – предельный угол разрешения глаза.

11.4.3.6. Аккомодационная глубина изображаемого пространства микроскопа

Аккомодационная глубина изображаемого пространства микроскопа рассчитывается как для лупы по формуле (65)

$$z = \frac{f'^2}{250} = \frac{250}{\Gamma^2} \qquad (122)$$

где f' – заднее фокусное расстояние микроскопа.

Следует иметь ввиду, что аккомодационная глубина изображаемого пространства микроскопа с сеткой равна нулю, так как глаз аккомодирован на изображение сетки.

11.4.3.7. Дифракционная глубина изображаемого пространства микроскопа

Дифракционная глубина изображаемого пространства микроскопа находится по формуле (40):

$$2 \cdot \Delta z = \frac{n \cdot \lambda_0}{A^2} \ . \qquad (123)$$

11.4.3.8. Осветительная система микроскопа

Осветительное устройство играет в микроскопе важную роль. Исследуемый объект должен быть освещен достаточно интенсивно и равномерно по всему полю зрения микроскопа. Равномерность освещения объекта определяется совершенством коррекции сферической и хроматической аберрации, а также выполнением условия изопланатизма в отдельных оптических узлах осветительной системы (в коллекторе, конденсоре и др.). Однако к устранению указанных аберраций в таких системах предъявляются менее высокие требования, чем к аберрациям визуальных и фотографических систем микроскопов.

1. Освещение прозрачных объектов.

Из всех известных методов освещения наиболее рациональным является метод Келера, который находит широкое применение в лабораторных и исследовательских микроскопах. Осветительная система по Келеру (рис. 37) применяется для освещения прозрачного объекта.

Нить лампы с помощью коллектора проектируется с увеличением на ирисовую диафрагму $Д_2$, которая находится в передней фокальной плоскости конденсора и является его апертурной диафрагмой. В результате из конденсора через предмет проходит система параллельных лучей разного наклона.

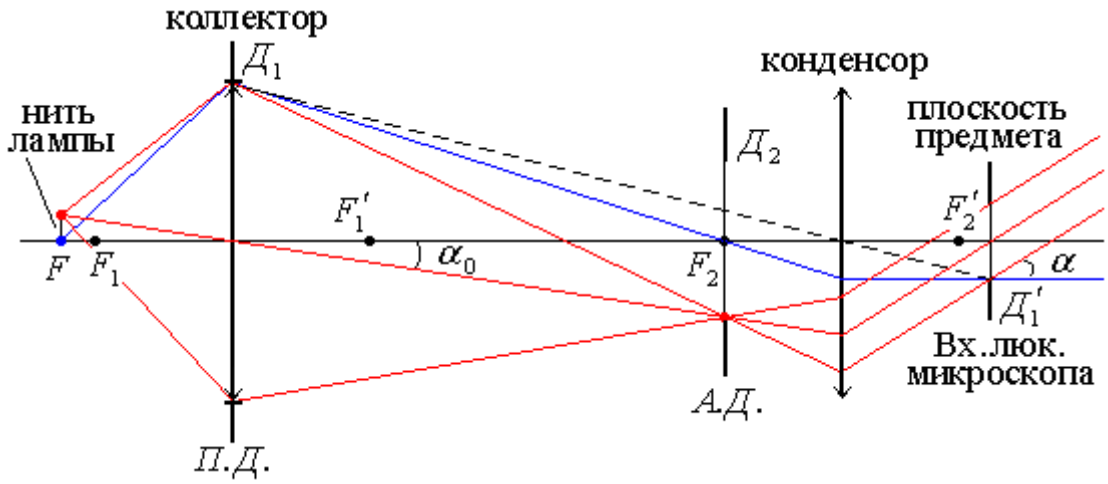


Рис. 37. Осветительная система по Келеру

Близ коллектора находится ирисовая диафрагма $Д_1$, которая является диафрагмой поля зрения коллектора, и ее изображение строится конденсором в плоскости предмета. Конденсор обеспечивает требуемую числовую апертуру осветительного пучка. Коллектор и полевая диафрагма достаточно равномерно освещены источником света: в каждую точку диафрагмы попадают лучи от всех точек источника света.

Все эти лучи проходят через конденсор и попадают на освещаемый предмет в пределах освещенного поля зрения, воссоздавая на предмете такое же равномерное и при этом очень интенсивное освещение. Структура источника света благодаря такому устройству не воспроизводится на плоскости освещаемого предмета. В этом заключается важное преимущество осветительной системы по Келеру.

Кроме того, эта система позволяет при помощи ирисовых диафрагм раздельно регулировать величину освещенного поля зрения и величину апертуры (и связанной с ней светосилы). Так, если уменьшать диаметр полевой диафрагмы, стоящей у коллектора, то уменьшится и диаметр освещенного участка предмета. Но уменьшение диаметра полевой диафрагмы никак не повлияет на величину апертурного угла α, так как луч, образующий этот угол с осью, проходит через центр полевой диафрагмы. Уменьшение же апертурной диафрагмы, стоящей в передней фокальной плоскости конденсора, приводит к уменьшению апертурного угла α, но совсем не влияет на величину освещенного поля зрения.

Осветительная система по Келеру создает у освещаемого предмета телецентрический ход лучей, что очень важно для измерительных микроскопов: телецентрический ход лучей у предмета устраняет ошибку измерения, возникающую благодаря неточности наводки на резкость.

Вследствие телецентрического хода лучей в пространстве предметов входной зрачок микроскопа лежит в бесконечности. При этом он бесконечно велик. Объектив микроскопа создает изображение входного зрачка в своей задней фокальной плоскости. Здесь и помещается апертурная диафрагма микроскопа. В этом же месте возникают изображения, во-первых, апертурной диафрагмы осветительной системы и, во-вторых, источника света.

В микроскопии осуществляется два способа освещения прозрачных объектов. Освещение на **светлом поле**, когда световой поток большой и заполняет всю апертурную диафрагму конденсора. При этом менее прозрачные детали наблюдаются в виде темных участков на светлом поле.

Освещение на **темном поле**, когда световой поток в объектив микроскопа и конденсора попадает только от неоднородностей предмета, рассеивающих свет. В микроскопах проходящего света проходящий свет полностью перекрывается до того, как попадает на предмет. При этом глаз наблюдателя адаптирован на темноту и на темном поле видны светлые неоднородности предмета. Освещение на темном поле применяется при наблюдении ультрамикроскопических предметов, когда их размеры значительно меньше длины волны. В этом случае изображение рассматриваемых неоднородностей значительно больше самих неоднородностей.

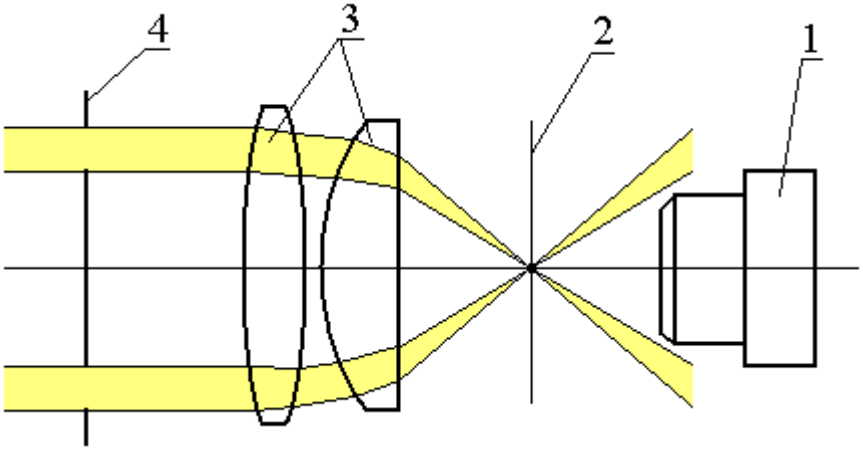


Рис. 38. Конденсор темного поля

Для освещения объектов по методу темного поля необходимо использовать конденсор, числовая апертура которого больше, чем апертура микрообъектива. На рис. 38 приведена схема конденсора темного поля. В конденсоре используется кольцевая диафрагма 4 такого размера, что средний диск диафрагмы перекрывает световой поток, соответствующий апертуре микрообъектива.

Если в предметной плоскости 2 отсутствует объект, то наблюдатель видит в окуляр микроскопа темное поле, так как лучи, вышедшие из конденсора 3, не попадают в микрообъектив 1. При наличии в предметной плоскости объекта его мелкие детали диффузно рассеивают свет и кажутся светлыми на темном фоне.

2. Освещение непрозрачных объектов.

Производится через объектив микроскопа. Для этого между объективом и окуляром микроскопа устанавливается призма-куб с полупрозрачной гранью (делительный кубик). Лучи от источника света, расположенного в стороне от вертикальной оптической оси микроскопа, через систему конденсора попадают в призму-куб и, отражаясь от поверхности склейки, проходят через объектив микроскопа, освещая предмет. Свет, рассеянный предметом, снова попадает в объектив микроскопа, который вместе с окуляром строит увеличенное изображение предмета.

Недостатком такого осветительного устройства (опак-иллюминатора) является малый контраст изображения, вызванный большим количеством рассеянного света, который образуется при отражении от поверхности линз объектива микроскопа. Этот недостаток устранен в осветительном устройстве, которое называется ультраопак. Здесь вместо призмы-куба применяется наклонное зеркало с отверстием в средней части, предназначенным для прохода света от предмета через объектив микроскопа.

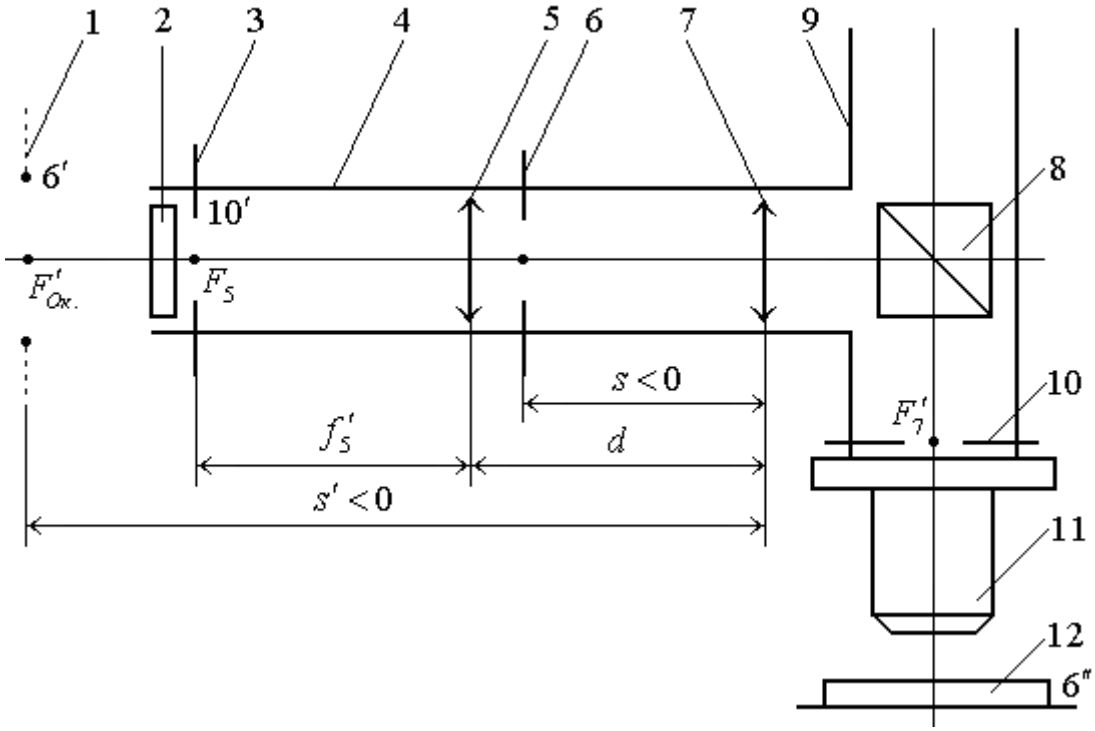


Рис. 39. Опак-иллюминатор

Оптическое устройство опак-иллюминатора (рис. 39) заключено в горизонтальном патрубке 4, примыкающем к нижнему концу тубуса 9 микроскопа. Наружный конец патрубка 4 закрыт матированной плоскопараллельной пластинкой 2, которая освещается любым внешним источником света. Вслед за пластинкой 2 в патрубке 4 расположена апертурная ирисовая диафрагма 3, находящаяся в передней фокальной плоскости линзы 5. На небольшом расстоянии от линзы 5 помещается вторая ирисовая диафрагма 6, служащая полевой диафрагмой опак-иллюминатора. Наконец, в патрубке 4 находится еще вторая линза 7, а в тубусе 9 микроскопа укреплена призма-куб 8 с полуотражающей гранью склейки, служащая для направления осветительных пучков лучей в объектив 11 микроскопа.

Линза 7 действует двояким образом. Во-первых, ее задний фокус совпадает с центром апертурной диафрагмы 10 объектива микроскопа. Поэтому, эта диафрагма находится в плоскости, сопряженной с плоскостью апертурной диафрагмы 3 опак-иллюминатора. Во-вторых, линза 7 создает мнимое изображение 1 диафрагмы 6, причем расстояние от изображения 1 до апертурной диафрагмы 10 равно оптической длине Δ тубуса микроскопа (то есть расстоянию от микрообъектива до плоскости изображения, совпадающей с передней фокальной плоскостью окуляра). Вследствие этого изображение диафрагмы 6 через объектив 11 возникает на поверхности непрозрачного предмета 12.

11.4.3.9. Объективы и окуляры микроскопа

11.4.3.9.1. Объективы микроскопа

Объектив является важнейшим узлом микроскопа. От его структуры и коррекции аберраций зависит разрешающая способность и качество изображения всего микроскопа. Основными характеристиками микрообъективов являются линейное увеличение и числовая апертура A, значения которых гравируются на их сплаве. Объективы современных микроскопов имеют увеличение $1\ldots120^{x}$ и числовую апертуру 0.01…1.4. Оптическая схема объектива тем сложнее, чем выше его апертура и увеличение, а также чем совершеннее коррекция остаточных аберраций/

Отметим признаки, по которым можно классифицировать объективы микроскопов:

1. Спектральная область, для которой они рассчитаны.

2. Способ освещения наблюдаемых объектов.

3. Длина тубуса.

При разработке новых моделей микроскопов большое внимание уделяется унификации и стандартизации оптических узлов микроскопа. В настоящее время используются объективы, рассчитанные на три длины L тубуса: 160, 190 и ∞.Объективы для $L = 160$ мм используют в биологических микроскопах для исследования в проходящем свете объективов, расположенных под покровным стеклом. Объективы для $L = 90$ мм применяют в рудных и других микроскопах, работающих в отраженном свете для исследования непрозрачных объектов. Объективы для $L = \infty$ предназначены в основном для работы в отраженном свете.

4. Наличие покровного стекла и иммерсионной жидкости – сухие системы (без иммерсии), с водной иммерсией, масляной или однородной иммерсией, глицериновой иммерсией;

5. Конструктивные особенности (линзовые, зеркально-линзовые, зеркальные).

Широко используются линзовые объективы, которые отличаются повышенной технологичностью по сравнению с зеркальными и зеркально-линзовыми объективами. У линзовых объективов отсутствует центральное экранирование, которое снижает контраст изображения. Зеркальные и зеркально-линзовые объективы имеют ряд преимуществ перед линзовыми системами. Например, рабочее расстояние у этих объективов может быть в несколько раз больше фокусного расстояния, а широкая область ахроматизации позволяет без перефокусировки микроскопа наблюдать объекты в УФ – и ИК – областях спектра. Роль зер-

кальных и зеркально-линзовых объективов возросла с развитием ИК – техники, высокотемпературной металлографии и микроанализаторов.

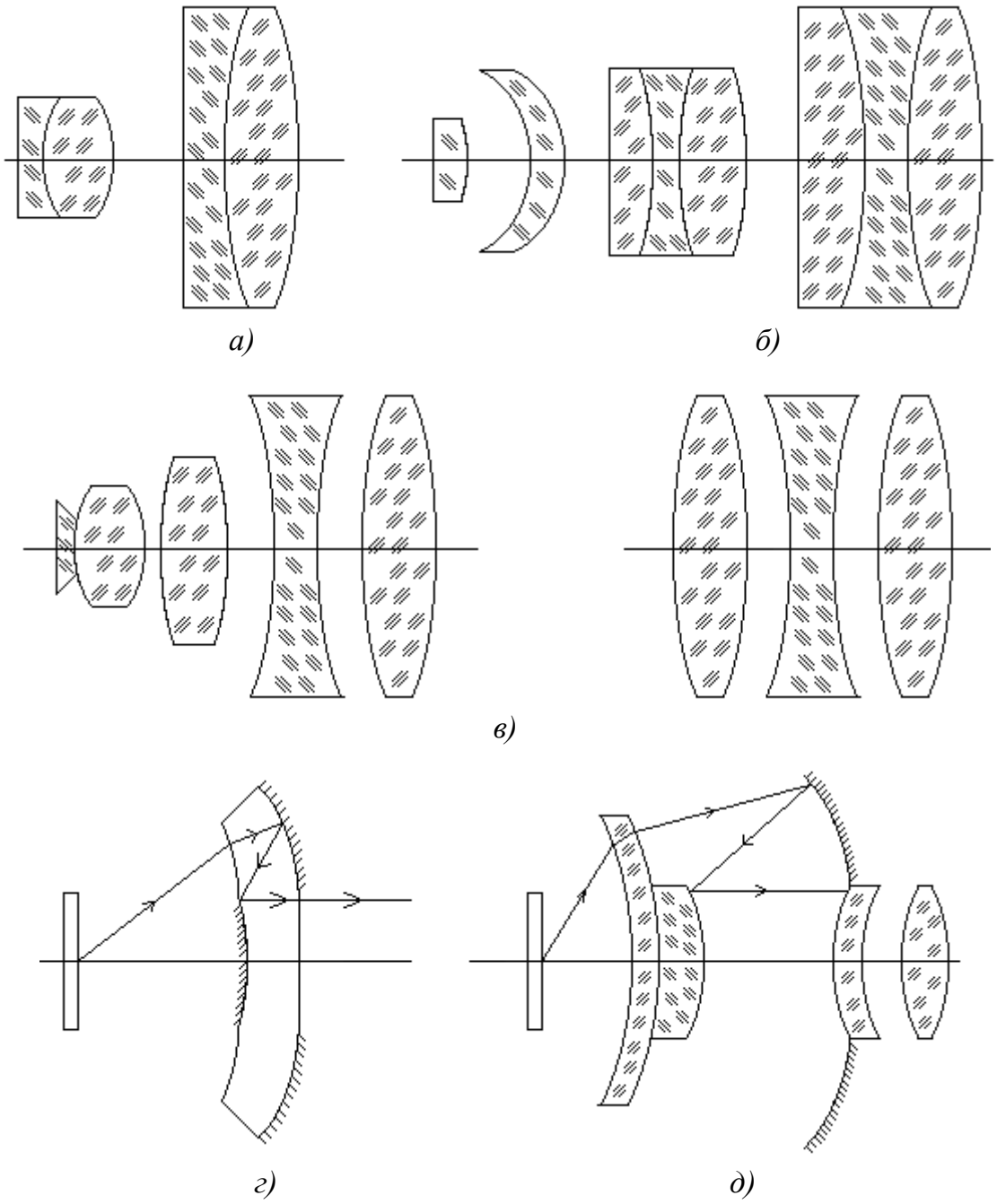


Рис. 40. Оптические схемы микрообъективов.
а) ахромат (6×0.15*); б) иммерсионый апохромат (*90×1.3*);*
в) суперапохроматы (25×0.35*); г) объектив Максутова (*60×0.85*);*
д) объектив Волосова (40×0.5*)*

6. Характер исправления аберраций (монохроматы, ахроматы, апохроматы, суперапохроматы, планахроматы и т. д.).

Дадим некоторые пояснения названий микрообъективов. **Монохроматы** – это объективы, у которых аберрации исправлены для узкой части спектра. **Ахроматы** – объективы, у которых ахроматизация выполнена для двух длин волн. У **апохроматов** спектральная область шире и ахроматизация выполняется для трех длин волн. В **суперапохроматах** ахроматизация выполнена для видимой и УФ – областей спектра. **Планахроматы** и **планапохроматы**_отличаются плоской поверхностью изображений, так как в них исправлена кривизна изображения и астигматизм.

7. линейное увеличение и числовая апертура ($\beta \le 10^{\times}$ и $A \le 0.2$; $\beta \le 40^{\times}$ и $A \le 0.65$; $\beta > 40^{\times}$ и $A > 0.65$).

Оптические схемы некоторых микрообъективов приведены на рис. 40. Оценка качества изображения микрообъективов проводится в волновой мере. Например, у ахроматов для всей спектральной области, на которую они рассчитаны, аберрации не более $0.5 \cdot \lambda$.

11.4.3.9.2. Окуляры

Применяемые в микроскопе окуляры можно разделить на две группы: визуальные окуляры, которые служат для наблюдения изображения глазами; окуляры, используемые в микропрекционных установках и микрофотографии. Применение окуляра определяется типом объектива и характером исправления аберраций. Все окуляры должны давать плоскую поверхность изображения, если они используются с планобъективами. В визуальных окулярах можно допустить некоторую кривизну поля, благодаря аккомадационной способности глаза, а также из-за возможности перефокусировки при визуальном наблюдении. Чаще всего в микроскопах используют следующие **типы окуляров**: Гюйгенса, Кельнера, ортоскопические, компенсационные, симметричные, панкратические, специальные и отрицательные (гомалы).

Видимое увеличение окуляров составляет $4 \div 30^{\times}$, угловое поле $40 \div 70^{0}$ и соответствующее линейное поле 24…16 мм. Оптические схемы некоторых окуляров приведены на рис. 36.

Отечественная промышленность выпускает окуляры **Гюйгенса** (рис. 41) со следующими ограничениями: 4, 5, 7, 10 и 15^{x}, линейное поле их соответственно равно 24, 23, 18, 14 и 8 мм, а угловое поле не более 30°. Угловое поле окуляров **Кельнера** (рис. 41) составляет 40…50°. **Компенсационные** окуляры (рис. 41) применяются с микрообъективами больших увеличений. **Гомалы** – отрицательные оптические системы – используют в микроскопах вместо окуляров главным образом для фотографирования. **Панкратические** окуляры служат для плавного изменения увеличения в 5–10 раз без перефокусировки объективов.

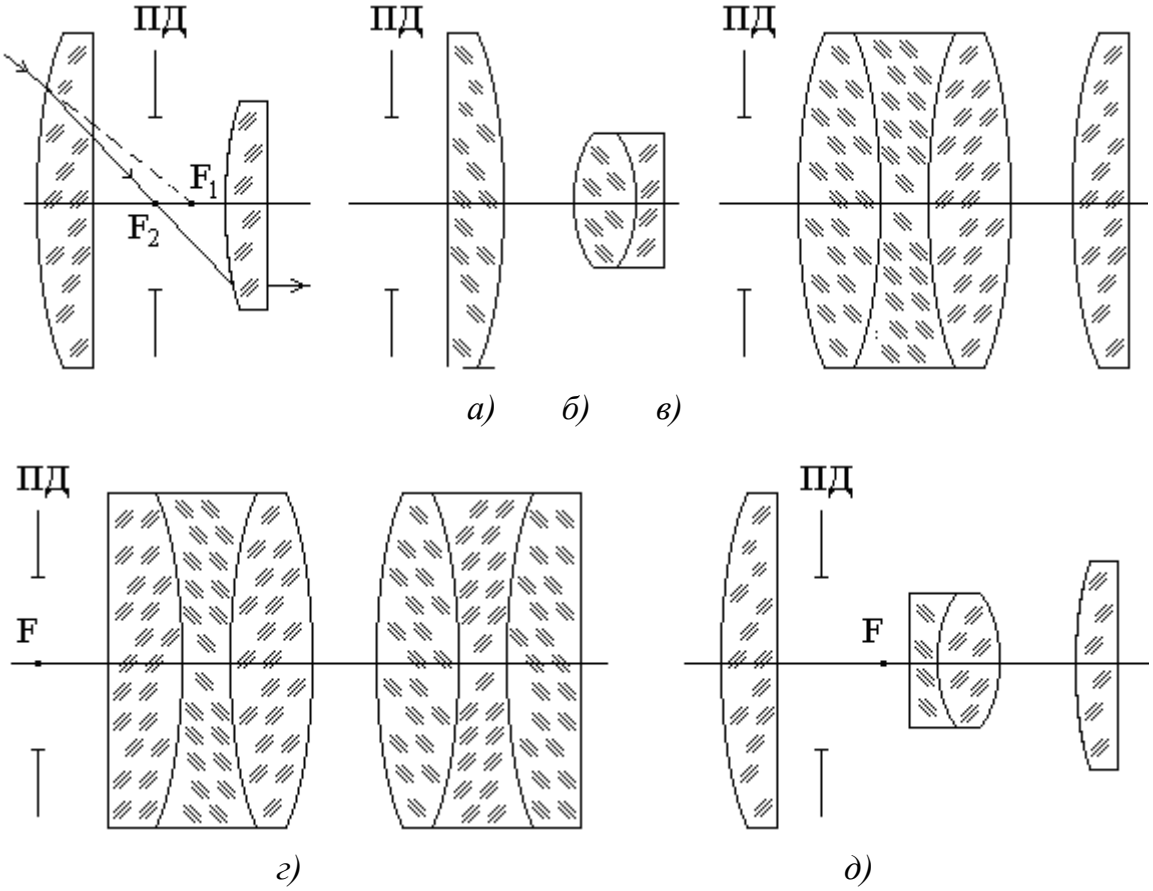


Рис. 41. Оптические схемы некоторых окуляров:
а – Гюйгенса; б – Кельнера; в – д – компенсационные

11.4.4. Телескопические системы

Телескопические системы, или зрительные трубы, – это наиболее распространенная и широко разветвленная группа оптических систем. Телескопические системы являются основной частью множества оптических приборов: геодезических, астрономических и военных наблюдательных, угломерных, дальномерных и прицельных. Если учесть еще, что телескопические системы входят в состав многих лабораторных измерительных и контрольных приборов, то следует считать эту группу оптических систем имеющей действительно универсальное распространение.

Схема телескопической системы состоит как минимум из двух компонентов. Первый компонент, обращенный к рассматриваемым объектам, называется объективом, а второй, обращенный к глазу наблюдателя, – окуляром. Окуляр может быть как положительным, так и отрицательным. Телескопическую систему, состоящую из положительного объектива и положительного окуляра, называют зрительной трубой **Кеплера**, а телескопическую систему, состоящую из положительного объектива и отрицательного окуляра – зрительной трубой **Галилея**.

Зрительные трубы предназначены как для наблюдения одним глазом (монокулярные), так и для наблюдения двумя глазами (бинокулярные). Бинокулярное зрение меньше утомляет наблюдателя и обладает стереоскопичностью, то есть способностью к оценке удаленности предметов.

11.4.4.1. Телескоп Кеплера

Поскольку оба компонента телескопа Кеплера положительны, то, как следует из раздела 7.9, угловое увеличение телескопа меньше нуля. Это говорит о том, что изображение перевернуто. Это обстоятельство является существенным недостатком телескопа Кеплера. В астрономических и геодезических приборах с этим фактом еще можно мириться. На геодезических рейках оцифровка делается в перевернутом виде. Но во многих случаях, например, в приборах военного назначения, перевернутое изображение совершенно недопустимо. В таких случаях приходится вводить в трубу Кеплера специальные призменные или линзовые оборачивающие системы, что приводит к удорожанию оптического прибора.

Расстояние между компонентами трубы Кеплера арифметически равно сумме фокусных расстояний компонентов, а не их разности, как в трубе Галилея ($d = f'_1 + f'_2$). Вследствие этого труба Кеплера при равных основных параметрах длиннее трубы Галилея.

Перевернутое изображение и увеличенная длина трубы Кеплера – это ее недостатки. Но она обладает и важными преимуществами. Первым преимуществом является то, что в задней фокальной плоскости объектива возникает действительное изображение далекого предмета. В этой плоскости можно поместить полевую диафрагму и полностью устранить виньетирование. В этой же плоскости можно поместить пластинку с перекрестием или же иной маркой. Благодаря этому труба Кеплера может быть наведена на любую точку предмета, что позволяет создать различные угломерные оптические приборы и прицелы. Вторым важным преимуществом трубы Кеплера является то, что выходной зрачок трубы – действительный, что позволяет получить большие поля зрения.

11.4.4.1.1. Зрачки и люки телескопа Кеплера

Входным зрачком и апертурной диафрагмой в трубе Кеплера является оправа Q_1 объектива либо вынесенная вперед диафрагма (защитное стекло, головная призма и т. п.). Ее изображение Q'_1 (рис. 42) является выходным зрачком телескопа, с которым совмещается зрачок глаза Q_4.

Поскольку полевая диафрагма трубы Кеплера расположена в задней фокальной плоскости объектива, то входной и выходной люки трубы будут расположены в бесконечности.

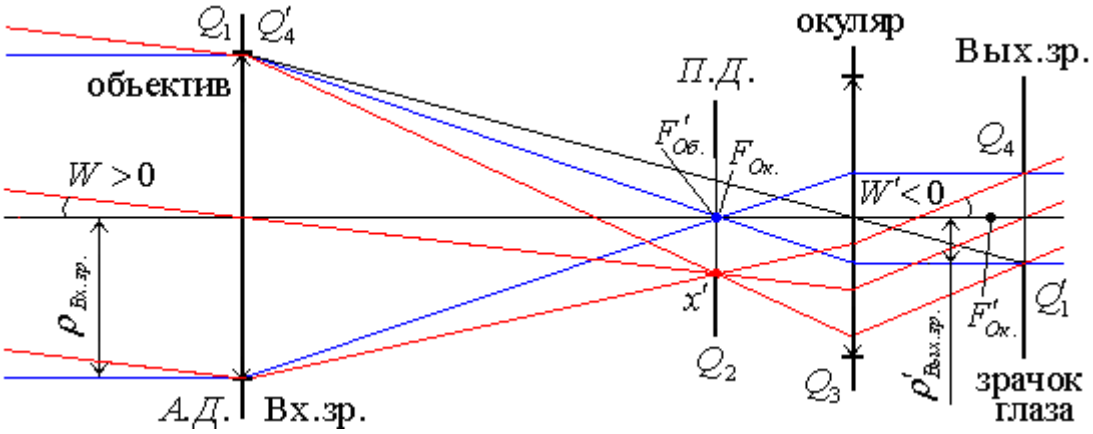


Рис. 42. Телескоп Кеплера

Примечание 1.

В разделе 7.9.1. была получена матрица преобразования лучей между опорными плоскостями ОП$_1$ и ОП$_2$ (рис. 43):

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где

$$A = -\frac{f_2'}{f_1'}\ ,\ B = f_1' + f_2'\ ,$$

$$C = 0\ ,\ D = -\frac{f_1'}{f_2'}\ .$$

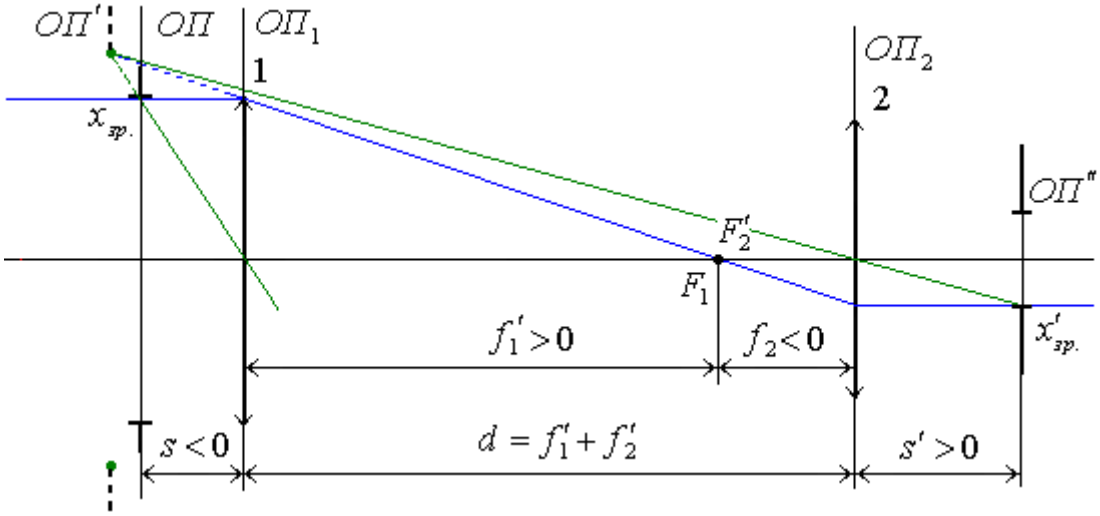


Рис. 43. К определению положения и величины выходного зрачка

Пусть ОП и ОП” – сопряженные плоскости, соответствующие входному и выходному зрачкам. Запишем матрицу преобразования лучей между плоскостями ОП и ОП”:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{A} = A = -\frac{f_2'}{f_1'},$$

$$\bar{B} = -s \cdot (A + C \cdot s') + B + D \cdot s' = 0,$$

$$\bar{C} = C = 0, \quad \bar{D} = D = -\frac{f_1'}{f_2'},$$

отсюда

$$s' = -\frac{B - s \cdot A}{D - C \cdot s}$$ **– положение выходного зрачка,**

$$2 \cdot x_{зр}' = 2 \cdot A \cdot x_{зр}$$ ***– диаметр выходного зрачка,***

здесь $2 \cdot x_{зр}$ *и* s *– соответственно диаметр и положение входного зрачка; задаются.*

Из рис. 42 нетрудно увидеть, что увеличение углов W и W' непременно повлечет за собой необходимость увеличивать диаметр окуляра, так как при этом будет расти высота лучей на главных плоскостях окуляра. Но окуляр представляет собой большей частью короткофокусную систему, в которой трудно или даже просто невозможно получить большой диаметр. В таком случае может помочь введение в трубу третьего компонента, так называемого коллектива.

На рис. 44 показана схема хода лучей через зрительную трубу Кеплера с коллективом, установленным в плоскости полевой диафрагмы (или, другими словами, в плоскости промежуточного изображения).

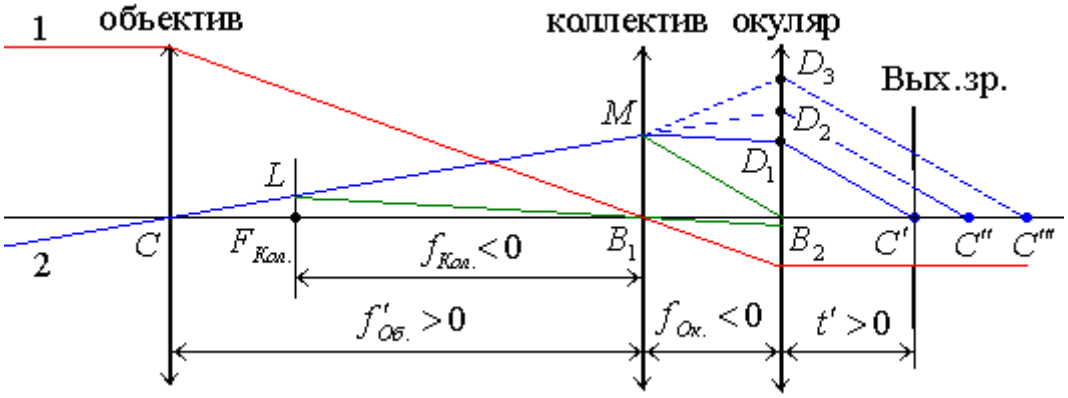


Рис. 44. Труба Кеплера с коллективом.
Зеленым цветом отмечены вспомогательные лучи

Очевидно, что такое расположение коллектива не нарушает телескопичности системы и не меняет ее углового увеличения: луч 1 проходит через главную точку коллектива и поэтому не меняет направления своего хода. Иначе обстоит дело с главным лучом 2, который после прохождения через коллектив меняет свое направление, отклоняясь в сторону приближения к оптической оси. Чтобы построить ход отклоненного луча, зададимся положением переднего фокуса $F_{Кол.}$ коллектива. Затем проведем вспомогательный луч через точку L пересечения луча 2 с передней фокальной плоскостью коллектива и главную точку B_1 коллектива.

Преломленный коллективом луч пройдет параллельно вспомогательному лучу и пересечет главную плоскость окуляра в точке D_1. Практически конструктор выполняет это построение в обратном порядке. Задавшись диаметром окуляра, а, следовательно, положением точки D_1, он проводит луч MD_1, затем строит луч вспомогательный луч LB_1 и опускает перпендикуляр из точки L на оптическую ось, определяя тем самым передний фокус и, следовательно, фокусное расстояние коллектива. При отсутствии коллектива луч 2 направлялся бы дальше прямо до встречи с главной плоскостью окуляра в точке D_2, находящейся существенно дальше от оптической оси, чем точка D_1, а, следовательно, потребовался бы значительно больший диаметр окуляра. После окуляра этот луч занял бы положение D_2C'', и выходной зрачок находился бы у точки C'', более удаленной от окуляра. Таким образом, введение положительного коллектива позволяет увеличить угол поля зрения зрительной трубы, не увеличивая чрезмерно диаметра окуляра. Однако, достигается это за счет уменьшения выноса выходного зрачка, то есть за счет уменьшения отрезка t'. В некоторых случаях условия эксплуатации прибора требуют, наоборот, увеличения выноса t' окуляра. Это может быть достигнуто применением отрицательного коллектива. В этом случае луч будет отклонен коллективом вверх, например, по направлению MD_3. После выхода из окуляра луч D_3C''' будет параллелен лучу D_2C'', так как все лучи, проходящие через точку M, лежащую в передней фокальной плоскости окуляра, после прохождения через него должны быть параллельны между собой и параллельны лучу MB_2. Центр C''' выходного зрачка будет при этом тем дальше отодвинут от окуляра, чем сильнее отклонится вверх луч MD_3. Понятно, что во избежание недопустимого увеличения диаметра окуляра при этом придется уменьшить угол поля зрения трубы.

11.4.4.1.2. Увеличение и разрешающая способность телескопа Кеплера

Основной характеристикой телескопической системы служит видимое увеличение Γ, которое для системы в воздухе определяется выражением (41):

$$\Gamma = \frac{tgW'}{tgW} \ . \qquad (124)$$

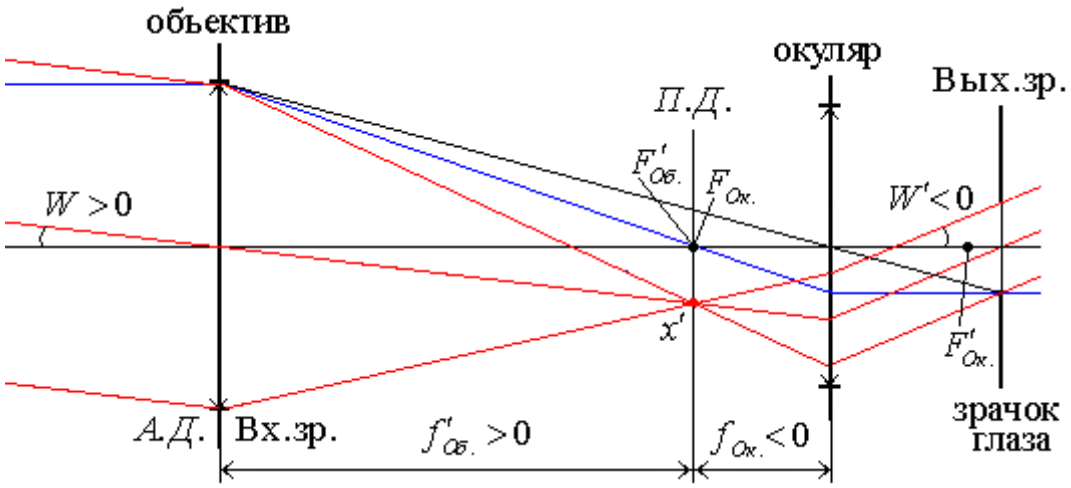


Рис. 45. К определению видимого увеличения

Из рис. 45 находим величину промежуточного изображения:

$$x' = -f'_{об.} \cdot tgW = -f_{ок.} \cdot tgW' , \qquad (125)$$

откуда:

$$\frac{tgW'}{tgW} = \frac{f'_{об.}}{f_{ок.}} = \Gamma . \qquad (126\text{-}1)$$

Из (126) видно, что видимое увеличение телескопа совпадает с угловым увеличением.

При малых углах W и W' можно положить:

$$\frac{tgW'}{tgW} \approx \frac{W'}{W} \approx \frac{f'_{об.}}{f_{ок.}} = \Gamma . \qquad (126\text{-}2)$$

Минимальное угловое разрешение $W = \psi$ в пространстве предметов системы телескоп – глаз определяется, очевидно, выражением:

$$\psi = \frac{60''}{\Gamma} . \qquad (127)$$

Разрешающая способность зрительной трубы в основном определяется объективом. Окуляру отводится вспомогательная роль: он позволяет глазу рассмотреть то, что разрешает объектив.

Согласно теории дифракции две бесконечно удаленные точки предмета разрешаются объективом, если угловое расстояние между ними равно

$$W = \frac{r_{\partial.}}{f'_{об.}} = \frac{1.22 \cdot \lambda}{D_{вх.зр.}} = \frac{1.22 \cdot 0.55 \cdot 10^{-3} \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi \cdot D_{вх.зр.}} = \frac{138}{D_{вх.зр.}}, \qquad (128)$$

где $\lambda = 0.55\ мкм$, $[W] =$ угловые сек., $\left[D_{вх.зр.}\right] =$ мм.

Однако глаз может опознать их раздельно только в том случае, когда изображения этих точек на сетчатке глаза расположены под углом $W' > 1'$. Если для простоты положить $W' = 69''$, то для **полного использования дифракционного предела** разрешающей способности объектива видимое увеличение зрительной трубы должно быть равно

$$Г = \frac{W'}{W} = \frac{69}{138} \cdot D_{вх.зр.} = \frac{D_{вх.зр.}}{2} \ . \qquad (129)$$

11.4.4.1.3. Нормальное увеличение телескопа Кеплера

Световые качества телескопической системы определяются относительной **субъективной яркостью**, за которую принимают отношение субъективной яркости вооруженного и невооруженного глаза $Ф'/Ф$, где $Ф'$ и $Ф$ – световые потоки, прошедшие соответственно в трубу и в невооруженный глаз. Исходя из субъективной яркости, различают: **нормальное увеличение**, когда диаметр выходного зрачка трубы равен диаметру зрачка глаза, и увеличение больше и меньше нормального. При этом следует иметь в виду два варианта: точечный предмет и предмет конечных размеров.

а) Рассмотрим некоторые особенности при наблюдении бесконечно удаленного точечного источника с помощью телескопа.

Источник света считается точечным, если его геометрическое изображение (полученное глазом или оптической системой) в десять раз меньше, чем дифракционное, полученное в тех же условиях.

Предположим, что телескоп Кеплера настроен на бесконечно удаленный точечный источник света. На входном зрачке трубы создается освещенность $E_{вх.зр.}$.

Поток света, входящий в трубу, можно рассчитать по формуле:

$$Ф = E_{вх.зр.} \cdot \sigma_{вх.зр}\ , \qquad (130)$$

где $\sigma_{вх.зр}$ – площадь входного зрачка; везде далее считаем, что $\sigma_{вх.зр} = const$.

Если не учитывать потери в оптической системе, то световой поток, вошедший в телескоп, будет равен световому потоку, вышедшему из телескопа:

$$\Phi = E_{вых.зр.} \cdot \sigma_{вых.зр} = E_{вх.зр.} \cdot \sigma_{вх.зр} \quad , \tag{131}$$

где $E_{вх.зр.}$ – освещенность на выходном зрачке трубы; $\sigma_{вых.зр}$ – площадь выходного зрачка трубы.

Учитывая, что

$$\frac{r_{вх.зр.}}{r_{вых.зр.}} = \frac{f'_{об.}}{f'_{ок.}}, \tag{132}$$

из (131) с учетом (132) находим:

$$E_{вых.зр.} = E_{вх.зр.} \cdot \frac{\sigma_{вх.зр}}{\sigma_{вых.зр}} = E_{вх.зр.} \cdot \left(\frac{r_{вх.зр.}}{r_{вых.зр.}}\right)^2 = \left(\frac{f'_{об.}}{f'_{ок.}}\right)^2 \cdot E_{вх.зр.} \quad , \tag{133}$$

где $r_{вх.зр.}$ – радиус входного зрачка трубы; $r_{вых.зр.}$ – радиус выходного зрачка трубы; $f'_{об.}$ – фокусное расстояние объектива; $f'_{ок.}$ – фокусное расстояние окуляра.

Совместим плоскость зрачка глаза с плоскостью выходного зрачка трубы. Поток света войдет в зрачок глаз и на сетчатке возникнет дифракционное изображение точки, причем, дифракционное изображение укладывается ровно на одно нервное окончание. Радиус дифракционного кружка рассчитывается по формуле:

$$r_д = \frac{1.22 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}}{D_{зр.гл.}} = \frac{0.61 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}}{r_{зр.гл.}} \quad , \tag{134}$$

где $f_{гл.}$ – фокусное расстояние глаза; $D_{зр.гл.} = 2 \cdot r_{зр.гл.}$ – диаметр зрачка глаза; $r_{зр.гл.}$ – полудиаметр зрачка глаза.

Световой поток $\Phi_{гл.}$, входящий в глаз, создает на нервном окончании изображение точки со средней освещенностью $E_{ср.}$. Очевидно, что

$$E_{ср.} = \frac{\Phi_{гл.}}{\pi \cdot r_д^2}. \tag{135}$$

а) Рассмотрим случай, когда $r_{вых.зр.} \geq r_{зр.гл.}$, то есть радиус выходного зрачка трубы больше радиуса зрачка глаза. Очевидно, что

$$\Phi_{гл.} = E_{вых.зр.} \cdot \sigma_{зр.гл.}\ , \qquad (136)$$

где $\sigma_{зр.гл.}$ – площадь зрачка глаза.

Подставим (133), (134) и (136) в (135), получим:

$$E_{ср.} = \frac{E_{вых.зр.} \cdot \sigma_{зр.гл.}}{\pi \cdot r_{д}^{2}} = \left(\frac{f'_{об.}}{f'_{ок.}}\right)^{2} \cdot E_{вх.зр.} \cdot \frac{\pi \cdot r_{зр.гл.}^{2}}{\pi \cdot \left(\frac{0.61 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}}{r_{зр.гл.}}\right)^{2}} =$$

$$= \frac{E_{вх.зр.}}{\left(0.61 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}\right)^{2}} \cdot \left(\frac{f'_{об.}}{f'_{ок.}}\right)^{2} \cdot r_{зр.гл.}^{4}\ .$$

Окончательно:

$$E_{ср.} = \frac{E_{вх.зр.}}{\left(0.61 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}\right)^{2}} \cdot \left(\frac{f'_{об.}}{f'_{ок.}}\right)^{2} \cdot r_{зр.гл.}^{4}, \text{ если } r_{зр.гл.} \le r_{вых.зр.} \qquad (137)$$

б) рассмотрим случай, когда $r_{вых.зр.} < r_{зр.гл.}$. Очевидно, что

$$\Phi_{гл.} = E_{вых.зр.} \cdot \sigma_{вых.зр.}, \qquad (138)$$

$$r_{д} = \frac{1.22 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}}{D_{вых.зр.}} = \frac{0.61 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}}{r_{вых.зр.}}, \qquad (139)$$

где $D_{вых.зр.}$ – диаметр выходного зрачка трубы. Подставим (132), (133), (138) и (139) в (135), получим:

$$E_{ср.} = \left(\frac{f'_{об.}}{f'_{ок.}}\right)^{2} \cdot E_{вх.зр.} \cdot \frac{\pi \cdot r_{вых.зр.}^{2}}{\pi \cdot \left(\frac{0.61 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}}{r_{вых.зр.}}\right)^{2}} =$$

$$= \frac{E_{вх.зр.}}{\left(0.61 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}\right)^{2}} \cdot \left(\frac{f'_{об.}}{f'_{ок.}}\right)^{2} \cdot r_{вых.зр.}^{4} =$$

$$= \frac{E_{вх.зр.}}{\left(0.61 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}\right)^{2}} \cdot \left(\frac{f'_{об.}}{f'_{ок.}}\right)^{2} \cdot \left(\frac{f'_{ок.}}{f'_{об.}}\right)^{4} \cdot r_{вх.зр.}^{4}\ .$$

Окончательно:

$$E_{ср.} = \frac{E_{вх.зр.} \cdot r_{вх.зр.}^{4}}{\left(0.61 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}\right)^{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{f'_{об.}}{f'_{ок.}}\right)^{2}}\ , \qquad (140)$$

если $r_{зр.гл.} > r_{вых.зр.}$.

Согласно (126):

$$\Gamma = \frac{f'_{об.}}{f_{ок.}} = -\frac{f'_{об.}}{f'_{ок.}} \text{ – видимое увеличение телескопа.} \qquad (141)$$

С учетом обозначения (141) формулы (137) и (140) примут вид:

$$E_{ср.} = \frac{E_{вх.зр.} \cdot r^4_{зр.гл.}}{\left(0.61 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}\right)^2} \cdot \Gamma^2 \text{, если } r_{зр.гл.} \le r_{вых.зр.}, \qquad (142)$$

$$E_{ср.} = \frac{E_{вх.зр.} \cdot r^4_{вх.зр.}}{\left(0.61 \cdot \lambda \cdot f'_{гл.}\right)^2} \cdot \frac{1}{\Gamma^2} \text{, если } r_{зр.гл.} > r_{вых.зр.}. \qquad (143)$$

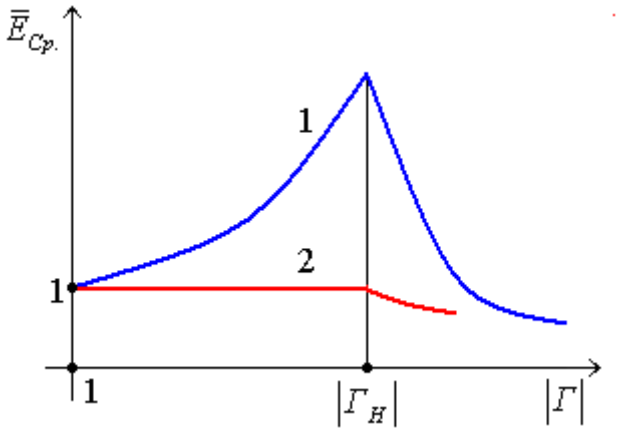


Рис. 46. Зависимость освещенности сетчатки глаза от увеличения телескопа; $f'_{об.} = const$

На рис. 46 показана зависимость освещенности сетчатки глаза от увеличения для точечного источника света (кривая 1) и протяженного (кривая 2) при $f'_{об.} = const$. Для простоты величина освещенности $E_{ср.}$ нормирована на коэффициент

$$E_0 = \frac{E_{вх.зр.} \cdot r^4_{зр.гл.}}{\left(0.61 \cdot \lambda \cdot f_{гл.}\right)^2} \text{ ,} \qquad (144)$$

то есть

$$\overline{E}_{ср.} = \frac{E_{ср.}}{E_0} = \Gamma^2 \text{, если } r_{зр.гл.} \le r_{вых.зр.}, \qquad (145)$$

$$\overline{E}_{ср.} = \frac{E_{ср.}}{E_0} = \frac{1}{\Gamma^2} \text{ если } r_{зр.гл.} > r_{вых.зр.}. \qquad (146)$$

Кривая 1 достигает максимума при $\Gamma = \Gamma_H$, где увеличение

$$\Gamma_H = -\frac{r_{вх.зр.}}{r_{вых.зр.}} = -\frac{r_{вх.зр.}}{r_{зр.гл.}} = -\frac{f'_{об.}}{f'_{ок.}} \qquad (147)$$

(то есть в случае, когда $r_{вых.зр.} = r_{зр.гл.}$) и называется **нормальным увеличением** телескопа.

б) Для протяженных источников (рис. 46, кривая 2) освещенность не зависит от величины Γ в интервале $1 \le |\Gamma| \le |\Gamma_H|$, поскольку с увеличением $|\Gamma|$ уменьшается диаметр выходного зрачка и соответственно увеличивается освещенность выходного зрачка. Но при этом пропорционально увеличивается площадь изображения на сетчатке, поэтому $E_{ср.} = const$ на интервале $1 \le |\Gamma| \le |\Gamma_H|$. Как только выходной зрачок становится меньше зрачка глаза, начинает увеличиваться размер дифракционного изображения, и освещенность сетчатки падает.

Таким образом,

- для наблюдения точечного источника оптимальным является нормальное увеличение;
- для наблюдения протяженных объектов оптимальными будут любые увеличения в интервале $1 \le |\Gamma| \le |\Gamma_H|$.

Если объектив имеет дифракционное качество изображения, то с учетом (129) **предел нормального увеличения** телескопа будет равен:

$$\Gamma_{H,пред.} = \frac{D_{вх.зр.}}{D_{вых.зр.}} = \frac{D_{вх.зр.}}{D_{зр.гл.}} = \frac{D_{вх.зр.}}{2}, \qquad (148)$$

откуда $D_{вых.зр.} = D_{зр.гл.} = 2\ мм$.

11.4.4.2. Телескоп Галилея

Труба Галилея в отличие от трубы Кеплера имеет отрицательный окуляр и поэтому дает прямое изображение. В качестве окуляра обычно применяется обычная отрицательная линза; объектив в большинстве случаев состоит из двух склеенных объективов. Преимущество системы Галилея перед другими системами, дающими прямое изображение, – простота конструкции и хорошая прозрачность. Однако, как будет показано далее, эта система обладает значительно меньшим полем зрения, чем системы с положительными окулярами.

В настоящее время система Галилея применяется самостоятельно лишь в театральных биноклях, где не требуется большого увеличения и большого поля зрения.

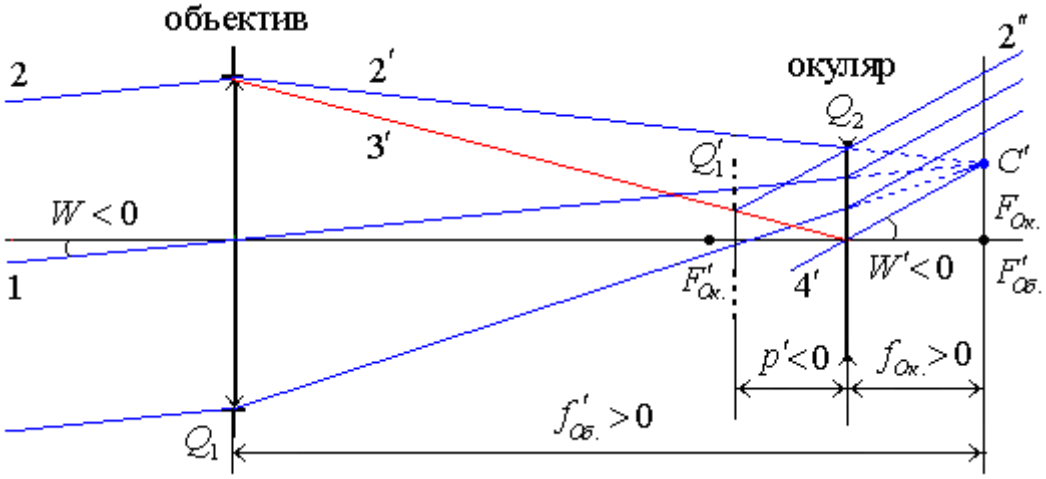


Рис. 47. Труба Галилея. Лучи 3′ и 4′ – вспомогательные

На рис. 47 представлена схема системы трубы Галилея. Так как задний фокус окуляра мнимый, то промежуточное изображение предметов, образуемое объективом относительно окуляра, так же мнимое; поэтому система не может быть снабжена визирной сеткой и не может применяться в качестве прибора для определения направления визирования. По этой же причине поле зрения не может быть резко ограничении полевой диафрагмой.

При работе без глаза входным зрачком и апертурной диафрагмой трубы Галилея является оправа Q_1 объектива, выходным зрачком – изображение $Q_1^{'}$ оправы Q_1 объектива, образованное окуляром Q_2 и лежащее внутри трубы. Изображение $Q_1^{'}$ строится с помощью двух лучей: луча 3', проходящего через край оправы объектива и главную точку окуляра, и луча 2", параллельного вспомогательному лучу 4′, проходящему через изображение C' и главную точку окуляра. Полевой диафрагмой и выходным люком является оправа Q_2 окуляра. Входным люком является изображение оправы Q_2 окуляра, образованное объективом в пространстве предметов.

Обычно изображение оправы объектива $Q_1^{'}$, образуемое окуляром, значительно больше, чем зрачок глаза. Поэтому **при наблюдении глазом** через трубу Галилея выходным зрачком является зрачок глаза (при рассмотрении из осевой точки изображения, расположенной в бесконечности, эта диафрагма видится наименьшей), а входным – его изображение в пространстве предметов.

Это происходит оттого, что в трубе Галилея невозможно совместить зрачок глаза с выходным зрачком трубы (то есть с изображением

$Q_1^{'}$ оправы объектива). При работе с глазом поле зрения трубы ограничивается оправой Q_1 объектива, то есть она является входным люком, а ее изображение $Q_1^{'}$ – выходным люком (рис. 48).

Так как плоскость входного люка не совпадает с предметом или его изображением, то для наклонных пучков существует виньетирование. Максимальное поле зрения определяется наклонным пучком, для которого виньетирование достигает ста процентов.

Очевидно, что для получения большого поля зрения у трубы Галилея необходимо, чтобы:

- удаление глаза от окуляра было малое;
- длина трубы была возможно меньшей, что приводит к малым фокусным расстояниям;
- диаметр объектива был бы возможно большим (поскольку оправа объектива – полевая диафрагма);
- увеличение не было велико.

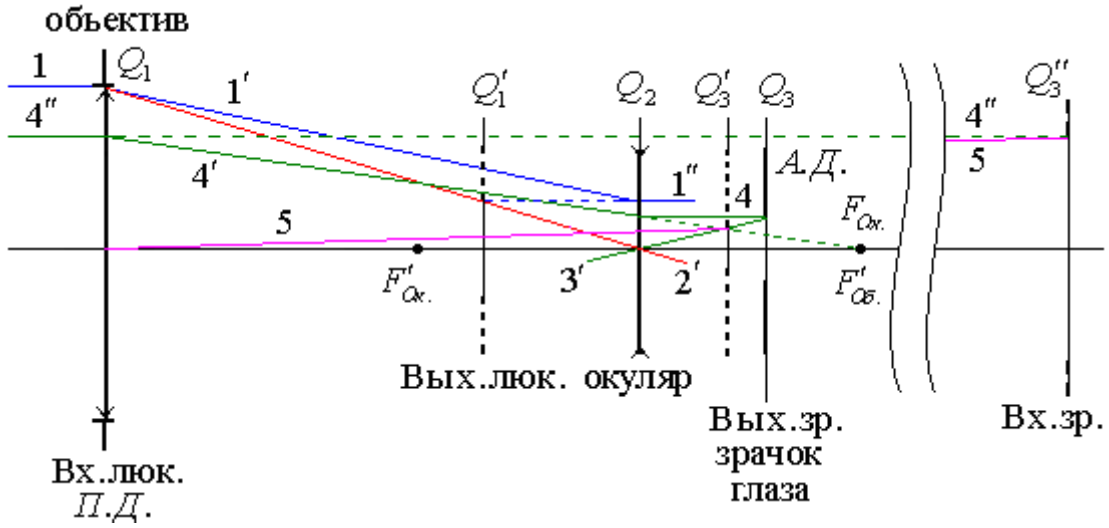


Рис. 48. Зрачки и люки трубы Галилея, работающей с глазом. Лучи 2′, 3′, 4, 4′, 4″ и 5 – вспомогательные, предназначенные для построения изображений диафрагм

Но при этих условиях система малой длины с объективом большого диаметра имеет большие аберрации. Кроме того, если говорить о бинокле, то диаметр объектива ограничен базой глаз.

На рис. 48 показаны следующие элементы:

$Q_1^{'}$ – изображение окуляром оправы Q_1 объектива; изображение находится в пространстве изображений и является выходным люком, поскольку из центра выходного зрачка диафрагма $Q_1^{'}$ видна под меньшим углом, чем оправа Q_2 окуляра;

$Q_3^{'}$ – изображение зрачка глаза окуляром Q_2; промежуточное изображение, построено с помощью двух лучей: первый луч $3'$ проходит через главную точку окуляра, второй луч 4 падает параллельно оси на окуляр и, преломляясь (луч $4'$), проходит через передний фокус окуляра $F_{Ок.}$; точка пересечения лучей $3'$ и $4'$ дает изображение $Q_3^{'}$;

$Q_3^{''}$ – изображение зрачка глаза в пространстве предметов, входной зрачок; изображение строится с помощью двух лучей: первый луч 5 проходит через главную точку объектива; второй луч $4'$ проходит через задний фокус объектива $F'_{Об.}$, преломляется объективом и выходит из него параллельно оптической оси (луч $4''$). Точка пересечения лучей 5 и $4''$ дает изображение $Q_3^{''}$.

11.4.4.3. Зрительные трубы с линзовыми оборачивающими системами

В простейшей трубе Кеплера изображение получается перевернутым, поэтому для реализации прямого изображения используют дополнительные системы с одним (рис. 49) или двумя (рис. 50) компонентами.

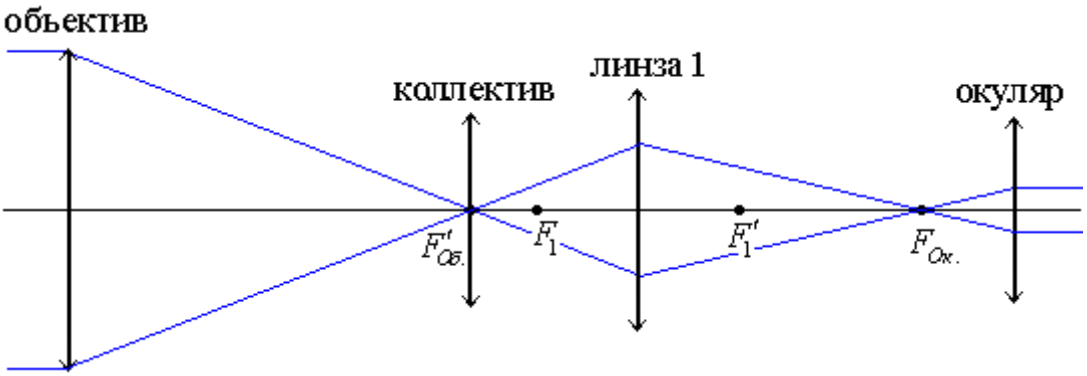


Рис. 49 Труба Кеплера с однокомпонентной оборачивающей системой

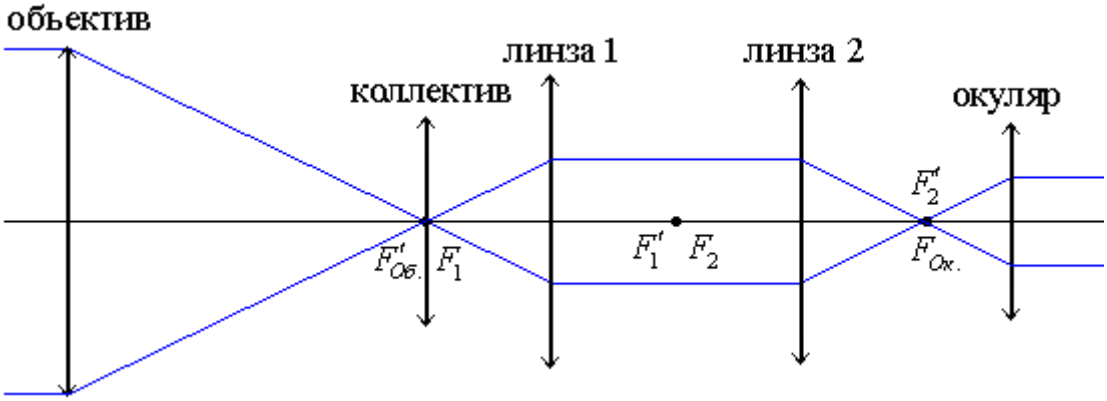


Рис. 50. Труба Кеплера с двухкомпонентной оборачивающей системой

На рис. 49 точки $F'_{Об.}$ и $F_{Ок.}$ сопряжены; в задней фокальной плоскости объектива создается перевернутое изображение объекта; линза 1 еще раз переворачивает изображение, в результате чего получается прямое изображение, совмещенное с передней фокальной плоскостью окуляра. Далее прямое изображение рассматривается глазом через окуляр как через лупу.

На рис. 50 промежуточное изображение, создаваемое объективом, совмещается с передней фокальной плоскостью линзы 1, в задней фокальной плоскости линзы 2 образуется перевернутое изображение, которое рассматривается через окуляр.

11.4.4.4. Схемы с призменными оборачивающими системами

Призменным монокуляром называется оптический прибор, представляющий собой простую зрительную трубу Кеплера с призмой или системой призм для перевертывания изображения, благодаря чему прибор дает прямое изображение. Кроме того, введение призм в оптическую схему монокуляра позволяет получить заданный угол между оптическими осями объектива и окуляра. Типовые схемы зрительных труб с призменными оборачивающими системами приведены на рис. 51 и 52.

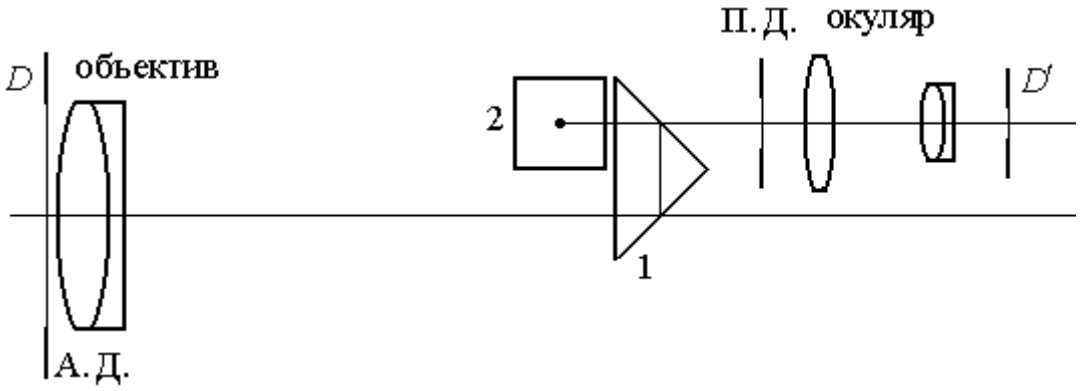


Рис. 51. Оптическая схема бинокля

Наиболее простой является первая схема с призменной оборачивающей системой Порро первого рода (О.Н. Малафеева), используемая в бинокле (рис. 51).

Оборачивающая система состоит из двух прямоугольных равнобедренных призм 1 и 2 типа АР-90, расположенных между объективом и его фокальной плоскостью так, что ребра их прямых углов взаимно перпендикулярны, а гипотенузные грани обращены друг к другу. Указанная система обладает четырехкратным отражением лучей от граней призм и дает полное оборачивание изображения.

Такой же эффект оборачивания изображения достигается в призменном монокуляре (рис. 52) одной призмой с крышей (призма типа

АкР), при этом угол отклонения отраженных лучей может быть равен 90^0 или отличаться от него.

Обычно ребро крыши располагается так, чтобы оно лежало в меридиональной плоскости. Такое расположение ребра, вообще говоря, совершенно не обязательно: при ином его расположении призмы будут иметь несколько большие размеры, и в случае простой крышеобразной призмы оптические оси объектива и окуляра будут лежать в двух разных параллельных друг другу плоскостях.

Для получения полного обращения изображения число отражений всякого пучка лучей должно быть четным; если ребро крыши лежит в одной плоскости с оптической осью, то луч, идущий вдоль оптической оси прибора, как бы отражается от ребра крыши (рис. 52) и, следовательно, этот луч имеет нечетное число отражений.

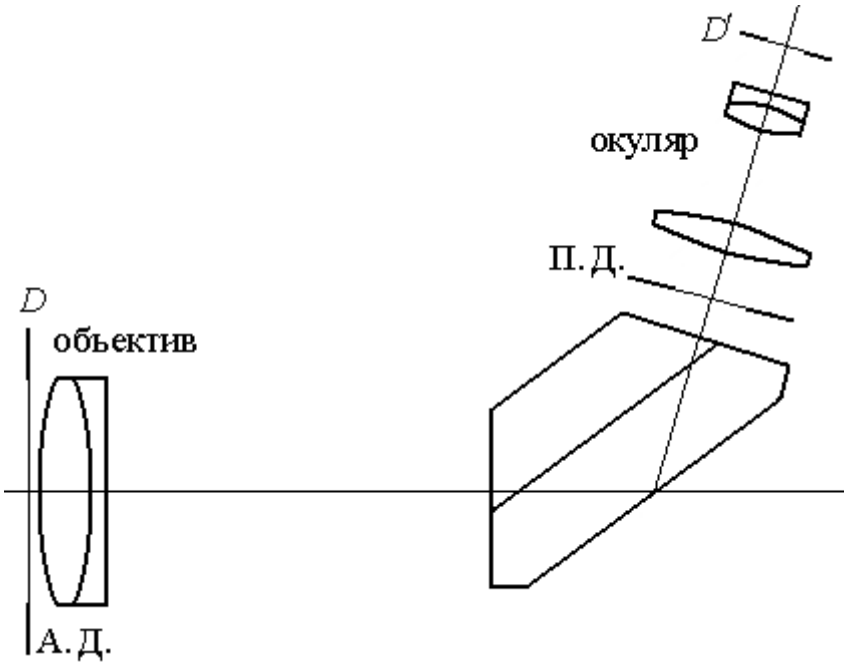


Рис. 52. Оптическая схема призменного монокуляра

Наибольшее распространение имеют призмы с двумя или с четырьмя отражениями. Призмы с большим числом отражений почти никогда не применяются, за исключение особых случаев, так как изготовление таких призм всегда очень сложно. Целесообразно применять монокуляры с прямым изображением, но без крышеобразных призм, так как прямой угол между отражающими гранями крыши должен быть довольно точным, с допуском порядка нескольких секунд; вместо крышеобразных крыш обычно применяют призменные оборачивающие системы, состоящие из двух или трех прямоугольных призм.

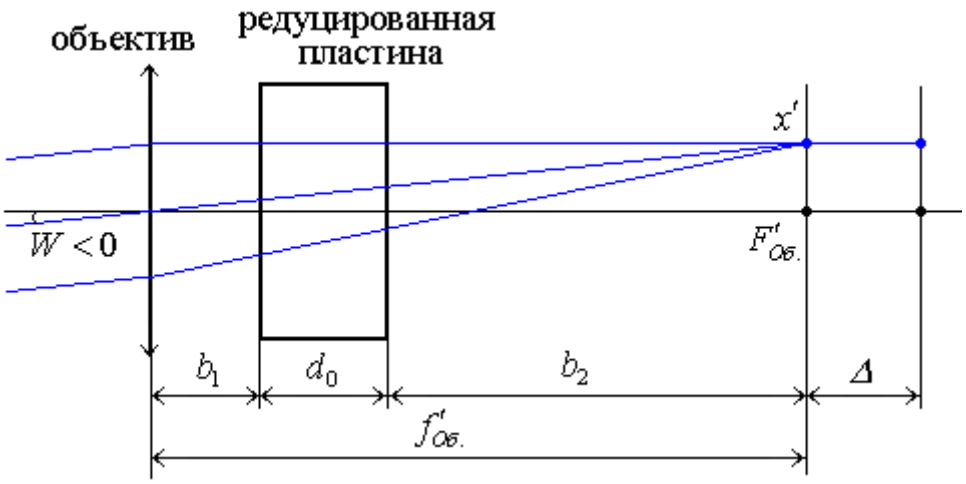


Рис. 53. Эквивалентная схема призменного монокуляра

Габаритный расчет призменного монокуляра подобен габаритному расчету простой трубы. Отличием является определение размеров призм. Для удобства расчета оптическую схему монокуляра разворачивают по горизонтальной оси, заменяют призму эквивалентной плоскопараллельной пластиной (рис. 53), **редуцированной** к воздуху (редуцирование – прием, заключающийся в приведении оптической среды пластины к воздуху).

Призмы размещают как в сходящихся пучках лучей за объективом, так и в параллельном ходе лучей, например, перед объективом. Для призм, расположенных в сходящихся пучках лучей, учитывают вызываемое ими удлинение хода луча по формуле (9.87):

$$\Delta = \frac{n-1}{n} \cdot d = d - d_0, \qquad (149)$$

где n – показатель преломления призмы, d – толщина эквивалентной пластины, $d_0 = d / n$ – толщина редуцированной пластины.

На эту величину в реальной системе увеличивают расстояние между поверхностями того пространства, в котором размещаются призмы. Расчет призм состоит в определении диаметра светового пучка лучей, который она должна пропустить, и места призмы между объективом и окуляром. Все остальные размеры отражательных призм даны в нормалях и справочниках для пучка лучей круглого сечения и наибольшим диаметром D.

Расстояние b_2 от последней поверхности призмы до фокальной плоскости объектива выбирают таким, чтобы размеры призмы были минимальными, а допуск на изготовление крыши у призмы был бы шире. Однако располагать заднюю грань слишком близко к фокальной плоско-

сти нельзя, так как все дефекты стекла (пузыри, камни, царапины и пылинки) будут резко видны в поле окуляра и будут мешать наблюдению.

С другой стороны, удалению призмы от фокальной плоскости пропорционально двоение изображения из-за ошибок в изготовлении угла крыши призмы. Поэтому оптимальным будет такое положение призмы, при котором ее последняя поверхность располагается перед фокальной плоскостью окуляра так, что изображение поверхности после окуляра получается вне пределов аккомодации глаза наблюдателя. Предельная глубина аккомодации A системы эмметропический глаз-окуляр выбирается в диапазоне 10…20 дптр. Таким образом, величины A и b_2 связаны зависимостью:

$$b_2 = \frac{f'^2_{ок.}}{1000} \cdot A. \qquad (150)$$

Далее, на основе расчета хода пучка лучей через систему объектив-редуцированная пластина определяются размеры световых зон на гранях призмы, а, следовательно, и ее габариты.

11.4.4.5. Схемы с линзовыми и призменными оборачивающими системами

В качестве примера рассмотрим перископическую систему с круговым обзором. Перископическими называются системы, у которых входная и выходная оптические оси расположены в различных горизонтальных плоскостях; расстояние между этими плоскостями определяет перископичность системы.

В оптических схемах перископов (рис. 54) используются как призменные (призмы 1,4 и 6), так и линзовые (объективы 3 и 5) оборачивающие системы. Для получения кругового панорамного обзора по горизонту без изменения ориентации изображения, возникающего при повороте головной отражательной призмы 1, используют компенсирующий поворот призмы Дове 4 в обратную сторону на половинный угол. Передняя фокальная плоскость объектива 3 совмещена с плоскостью изображения объектива 2. Призма Дове 4 устанавливается в параллельном пучке лучей между объективами 3 и 5, где она не вносит аберраций. Задняя фокальная плоскость объектива 5 совмещена с передней фокальной плоскостью окуляра, где формируется промежуточное изображение объекта наблюдения.

В некоторых случаях возникает необходимость менять увеличение в процессе наблюдения пространства предметов. При этом возможно как дискретное, так и непрерывное (панкратическое) изменение увеличения.

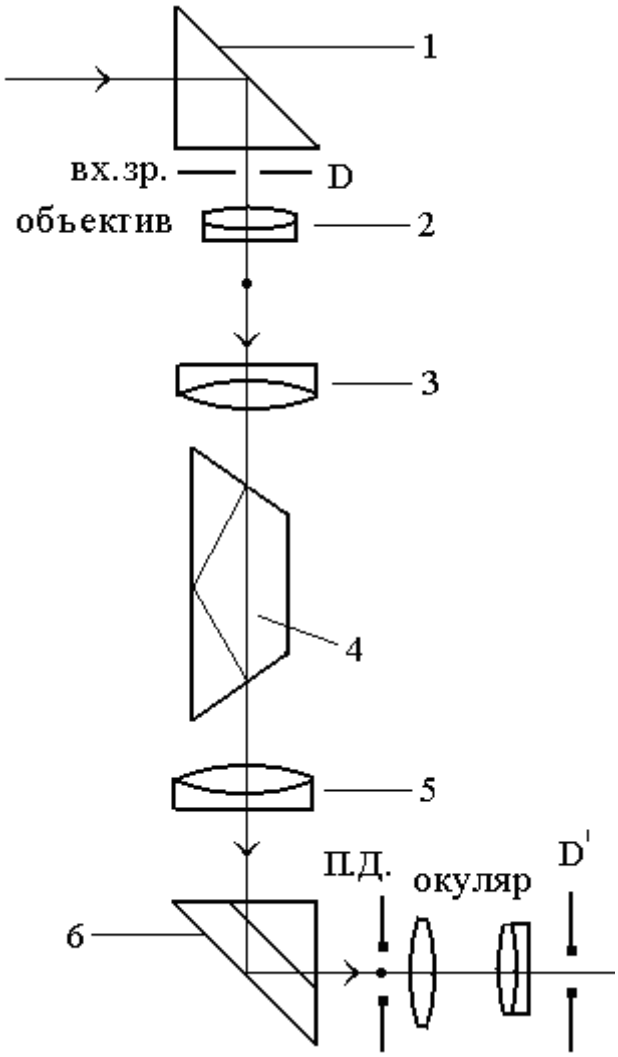


Рис. 54. Перископическая система зрительной трубы с линзовой оборачивающей системой.
1 – головная отражательная призма; 2 – объектив; 3 и 5 – оборачивающая система; 4 – призма Дове; 6 – прямоугольная призма с крышей

11.4.4.6. Дискретное изменение увеличения

Дискретное изменение увеличения достигается несколькими способами: сменой 1) окуляров, 2) объективов, 3) отдельных частей объектива, 4) оборачивающей системы, 5) поворотом на 180° оборачивающей системы, 6) перемещением объектива оборачивающей системы вдоль оптической оси, 7) введением особых афокальных насадок в параллельный ход лучей внутри телескопической системы.

1). Наиболее простым и распространенным является первый способ – смена окуляров. Такой способ широко применяется в геодезических и астрономических приборах и достаточно часто в прицелах различного назначения. Например, для теодолитов применяют сменные

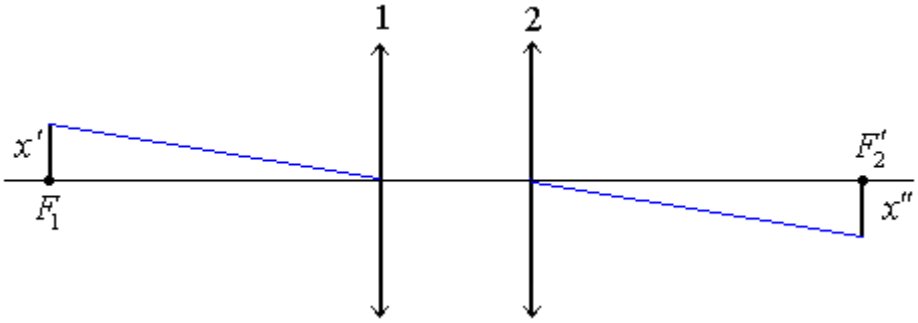
окуляры с $f'=8$; 9; 10; 13.5; 16.7 и 20 мм. При смене окуляров с уменьшением фокусного расстояния соответственно увеличивается их угловое поле и уменьшается диаметр выходного зрачка. В ряде случаев с ростом видимого увеличения телескопической системы приходится уменьшать поле. При этом размер полевой диафрагмы в передней фокальной плоскости короткофокусного окуляра будет определять поле. Окуляры устанавливаются так, что их передние фокальные плоскости совпадают с плоскостью изображения объектива. При использовании окуляров с фокусными расстояниями меньше 12 мм получается очень маленькое удаление выходного зрачка, при котором невозможно совместить зрачок глаза с выходным зрачком. При фокусных расстояниях окуляров более 50 мм чрезмерно увеличиваются диаметры линз окуляра и, кроме того, требуются значительные диоптрийные перемещения. Таким образом, практически используемый диапазон изменения увеличения не превышает $3^{\times} - 4^{\times}$.

2) Смена объективов – более редкий способ. Его применяют в некоторых перископах и прицелах. При этом положения плоскостей изображения всех объективов совпадают. Обозначим увеличение зрительной трубы с одним из двух сменных объективов Γ_{T1}, а с другим Γ_{T2}. **Отношение Γ_{T1}/Γ_{T2} называется кратностью изменения увеличения.**

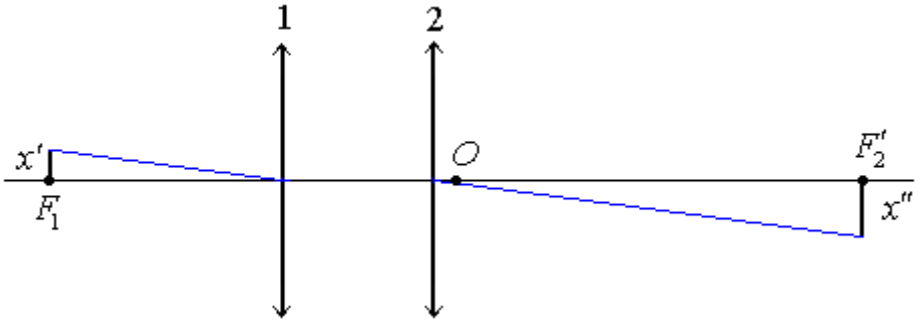
3) Наличие оборачивающей системы позволяет осуществить третий способ изменения увеличения как путем смены одного из ее объективов, так и обоих.

На рис. 55, *а* изображена оборачивающая система с линейным увеличением $\beta=-1$, то есть фокусные расстояния объективов 1 и 2 равны. Если фокусное расстояние объектива 1 уменьшить, а объектива 2 – увеличить на ту же величину (рис. 55,в), то линейное увеличение оборачивающей системы изменится в соответствии с формулой $\beta_{O.C.}=-f_2'/f_1'$, а положение плоскости изображения не изменится. Линейное поле зрения телескопа при этом остается постоянным и равным $2\cdot x''$, а линейное поле объектива телескопа изменяется в соответствии с изменением $\beta_{O.C.}$. Если, например, линейное увеличение оборачивающей системы по модулю будет возрастать, то линейное поле зрения объектива и, соответственно, угловое поле $2\cdot W$ телескопа будет уменьшаться.

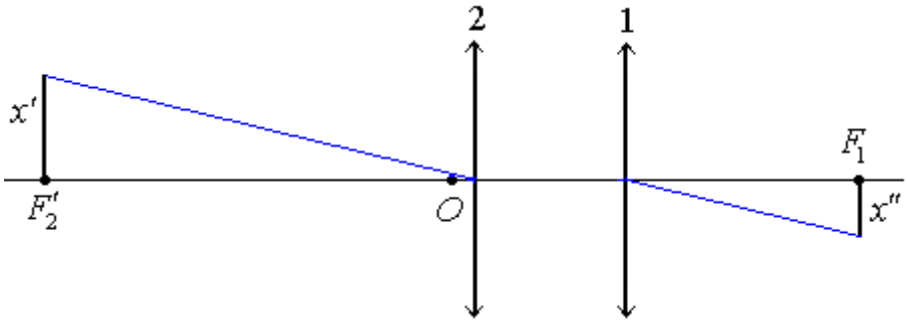
4) Изменение увеличения может быть достигнуто и поворотом оборачивающей системы из одного положения (рис. 55,б) в другое на 180° (рис. 55,в) относительно срединной точки O. Тогда первый объектив оборачивающей системы станет последним, и наоборот. Если в первом положении $\beta_{I\,O.C.}=\beta_{O.C.}$, то во втором положении $\beta_{II\,O.C.}=1:\beta_{O.C.}$.



а) $\beta = -1$; $f_1' = f_2'$;



б) $\beta < -1$, $f_1' < f_2'$;



в) $-1 < \beta < 0$;

Рис. 55. Сменные оборачивающие системы

5) Пятый способ удобен при использовании объектива, состоящего из нескольких групп линз, например, телеобъектива. Сменой передней или задней частей (групп линз) достигают изменения фокусного расстояния объектива. Разновидностью этого способа является и введение нового оптического элемента – групп линз или зеркала.

6) Смена объективов оборачивающей системы или ее поворот на 180° усложняет механику прибора и увеличивает его размеры в поперечном сечении. В этом отношении более удобен шестой способ, при котором вдоль оптической оси перемещается объектив однокомпонентной оборачивающей системы (рис. 56).

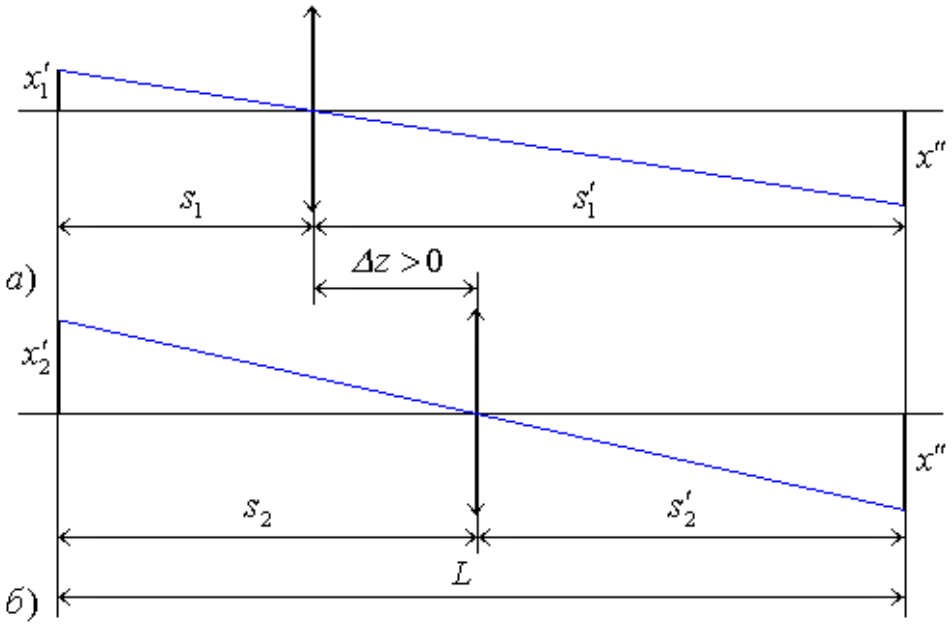


Рис. 56. Перемещение объектива оборачивающей системы

Пусть известна длина L оборачивающей системы, то есть расстояние между двумя промежуточными изображениями x и x':

$$L = s' - s = const \ . \tag{151}$$

Воспользуемся формулой для сопряженных отрезков:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \ . \tag{152}$$

Преобразуем формулу (152):

$$\frac{s - s'}{s \cdot s'} = \frac{1}{f'} \ ,$$

или с учетом (151):

$$-f' \cdot L = s \cdot (s + L) \ ,$$

откуда

$$s^2 + L \cdot s + f' \cdot L = 0 \ . \tag{153}$$

Уравнение (153) допускает два решения:

$$s_1 = -\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{f'}{L}} \ , \tag{154}$$

$$s_2 = -\frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{f'}{L}} \ . \tag{155}$$

Чтобы получить действительные решения, необходимо выполнить условие:

$$1-4\cdot\frac{f'}{L}\geq 0\ ,$$

откуда

$$f'\leq\frac{L}{4}\ . \qquad (156)$$

Складывая выражения (154) и (155), получим:

$$s_1+s_2=-L\ . \qquad (157)$$

Согласно (151):

$$s_1^{'}-s_1=L\ , \qquad (158)$$

$$s_2^{'}-s_2=L\ . \qquad (159)$$

Складывая выражения (158) и (159), с учетом (157) получим:

$$s_1^{'}+s_2^{'}=L\ . \qquad (160)$$

Складывая выражения (157) и (159), получим:

$$s_2^{'}=-s_1\,. \qquad (161)$$

Вычитая из выражения (160) выражение (159), получим:

$$s_1^{'}=-s_2\,. \qquad (162)$$

С учетом полученных соотношений можно записать:

$$\beta_1=\frac{s_1^{'}}{s_1}=\frac{-s_2}{-s_2^{'}}=\frac{1}{s_2^{'}/s_2}=\frac{1}{\beta_2}\ . \qquad (163)$$

Учитывая, что $s'=\beta\cdot s$, из формулы(152) можно получить:

$$f'=\frac{s\cdot s'}{s-s'}=\frac{\beta\cdot s}{1-\beta}\ . \qquad (164)$$

Запишем выражение (164) для двух полученных решений:

$$f'=\frac{\beta_1\cdot s_1}{1-\beta_1}\ , \qquad (165)$$

$$f'=\frac{\beta_2\cdot s_2}{1-\beta_2}=\frac{\beta_2\cdot s_2}{1-\frac{1}{\beta_1}}=-\frac{\beta_1\cdot\beta_2\cdot s_2}{1-\beta_1}=-\frac{s_2}{1-\beta_1}\ . \qquad (166)$$

Умножим выражение (166) на величину $\left(-\beta_1\right)$ и результат сложим с выражением (165), получим:

$$f'-\beta_1\cdot f'=\frac{\beta_1}{1-\beta_1}\left(s_1+s_2\right)=-\frac{\beta_1\cdot L}{1-\beta_1}\ ,$$

откуда

$$f'=-\frac{\beta_1\cdot L}{\left(1-\beta_1\right)^2}\ . \qquad (167)$$

Таким образом, для однокомпонентной оборачивающей системы с фиксированной длиной L существует две пары сопряженных отрезков: s_1 и $s_1^{'}$, s_2 и $s_2^{'}$, определяющих два крайних положения компонента. Если задано увеличение β_1 в первом крайнем положении, то во втором крайнем положении $\beta_2=1/\beta_1$. Фокусное расстояние компонента при заданных значениях L и β_1 определяется по формуле (167):

Сопряженные расстояния рассчитываются из формул (165) и (166):

$$s_1=\frac{\left(1-\beta_1\right)\cdot f'}{\beta_1},\quad s_1^{'}=\beta_1\cdot s_1\ , \qquad (168)$$

$$s_2=-\left(1-\beta_1\right)\cdot f',\quad s_2^{'}=\frac{s_2}{\beta_1}\ . \qquad (169)$$

Из рис. 56 с учетом (154), (155) и (168), (169) легко найти величину Δz перемещения объектива:

$$\Delta z=s_1-s_2=L\cdot\sqrt{1-4\cdot\frac{f'}{L}}=\frac{1-\beta_1^2}{\beta_1}\cdot f'\ . \qquad (170)$$

7) В ряде приборов смена увеличения достигается введением в ход параллельных лучей дополнительных телескопических труб системы Галилея (рис. 57).

Их устанавливают или перед первым объективом прибора, или внутри прибора, где имеется параллельный ход пучков лучей. Например, между компонентами 1 и 2 оборачивающей системы на рис. 55. Дополнительная труба может занимать три положения (рис. 57) и дает возможность получить три значения видимого увеличения прибора: $\Gamma_{\max}$, $\Gamma_{ср.}$, $\Gamma_{\min}$. Если видимое увеличение дополнительной трубы в положении, показанном на рис. 57,а, соответствует Γ_1, а в положении, показанном на рис. 57,б, – Γ_2, то

$$\Gamma_{\min} = \Gamma \cdot \Gamma_1 , \quad \Gamma_{ср.} = \Gamma , \quad \Gamma_{\max} = \Gamma \cdot \Gamma_2 , \qquad (171)$$

где Γ – видимое увеличение прибора без дополнительной трубы.

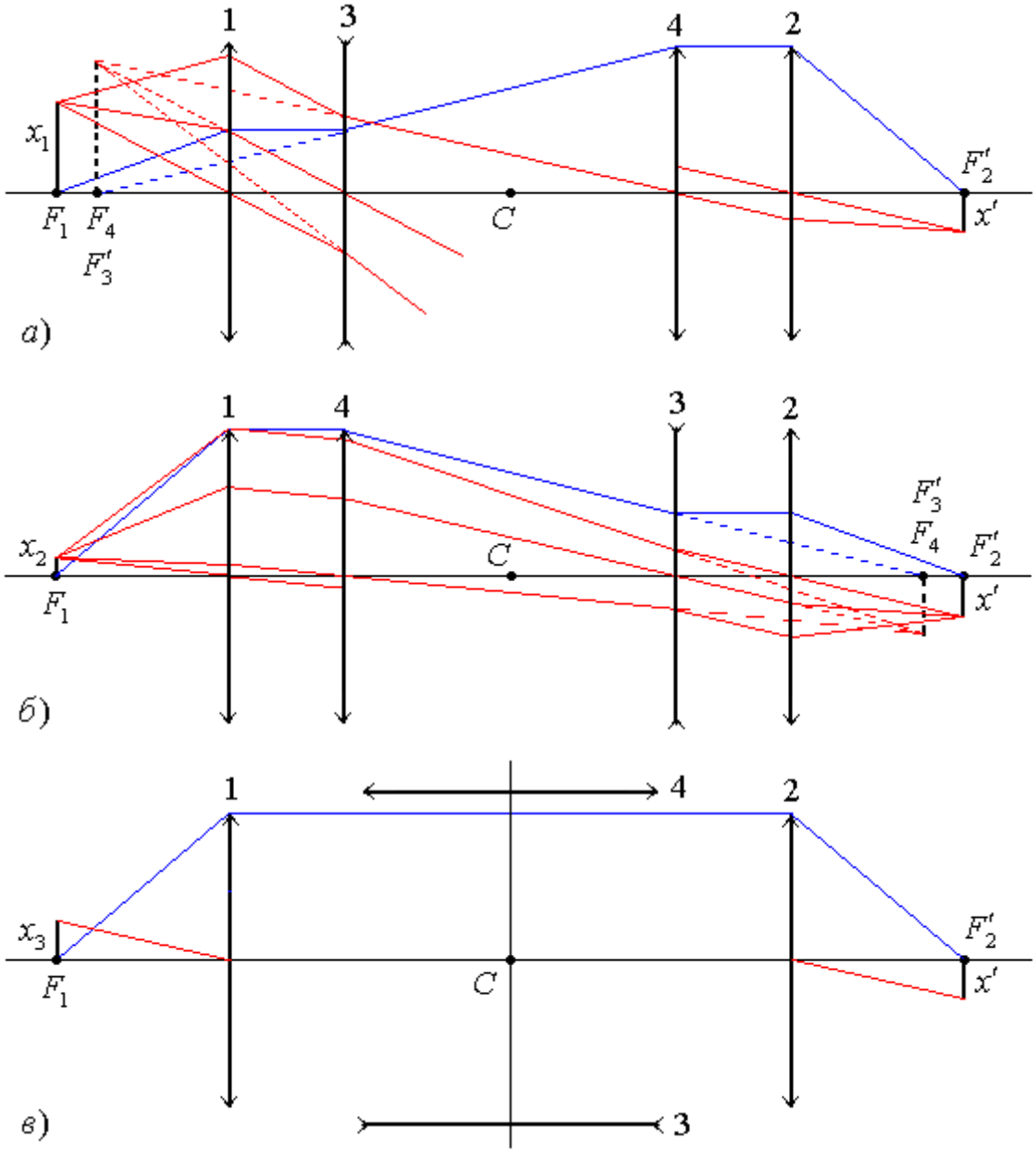


Рис. 57. Изменение увеличения путем ввода дополнительных труб Галилея

Очевидно, что $\Gamma_2 = 1/\Gamma_1$. Центром вращения трубы относительно оси, перпендикулярной к оптической оси, является точка C. Такие вращающиеся или сменные дополнительные трубы можно применять не только в телескопических системах, но и в других приборах, там, где имеется параллельный ход лучей, и с той же целью, то есть для увеличения или уменьшения масштаба изображения. Дополнительную теле-

скопическую трубу применяют совместно со всей телескопической системой или ее частью, для которой положение выходного зрачка определяется положением глаза наблюдателя.

Следовательно, выходной зрачок дополнительной трубы всегда должен совпадать с входным зрачком части оптической системы, расположенной за дополнительной трубой. Очевидно поэтому, что центр вращения C дополнительной трубы должен быть расположен посередине между ее входным и выходным зрачками.

Примечание 3.

Рассмотрим более подробно телескоп Кеплера с коллективом и двухлинзовой оборачивающей системой (рис. 58).

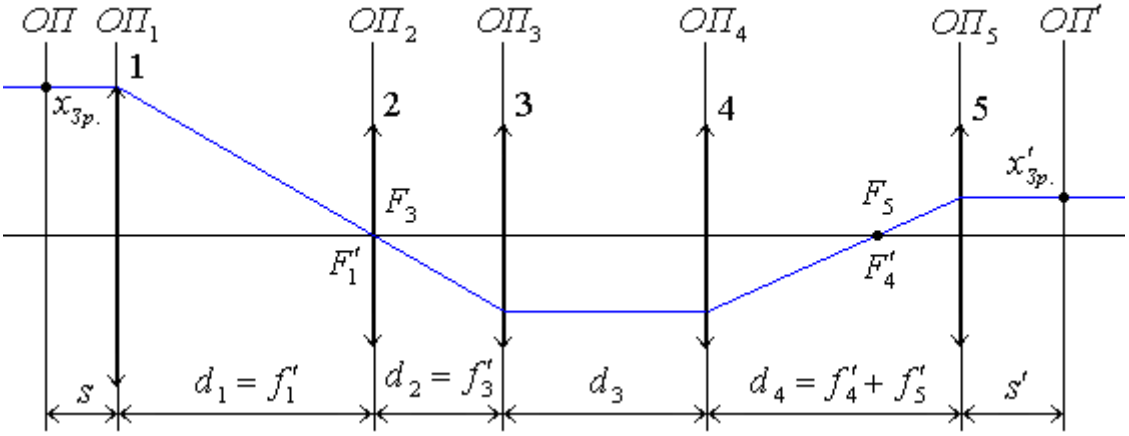


Рис. 58. Телескоп Кеплера с двухлинзовой оборачивающей системой

Запишем матрицу преобразования лучей между опорными плоскостями $ОП_1$ и $ОП_5$:

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & d_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & d_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_3 & 1 \end{pmatrix}\cdot$$
$$\cdot\begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, находим:

$$A=\frac{f_3'\cdot f_5'}{f_1'\cdot f_4'},$$

$$B=-\frac{f_5'}{f_4'}\cdot\left(f_1'+f_3'-\frac{f_1'\cdot f_3'}{f_2'}\right)-\frac{f_1'}{f_3'}\cdot\left(f_4'+f_5'-d_3\cdot\frac{f_5'}{f_4'}\right),$$

$$C=0\ ,\ D=\frac{f_1'\cdot f_4'}{f_3'\cdot f_5'}.$$

Пусть ОП – плоскость входного зрачка, ОП$'$ – плоскость выходного зрачка. Запишем матрицу преобразования лучей между зрачками:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\bar{A} = A\ ,\ \bar{B} = -s \cdot \left(A + s' \cdot C\right) + \left(B + s' \cdot D\right)\ ,$$
$$\bar{C} = C = 0\ ,\ \bar{D} = D - s \cdot C = D\ .$$

Из условия $\bar{B} = 0$ *находим:*

$$s' = -\frac{B - s \cdot A}{D - s \cdot C}$$ – положение выходного зрачка,

$$2 \cdot x'_{зр.} = 2 \cdot A \cdot x_{зр.}$$ – диаметр выходного зрачка.

По определению $\bar{D} = D$ *– угловое увеличение системы, или*

$$\bar{D} = D = \frac{f'_1 \cdot f'_4}{f'_3 \cdot f'_5} = \Gamma_{1,3} \cdot \Gamma_{4,5}\ ,$$

то есть угловое (видимое) увеличение всей системы равно произведению видимого увеличения системы, состоящей из компонентов 1 и 3, и видимого увеличения системы, состоящей из компонентов 4 и 5.

Примечание 4.

Рассмотрим телескоп Кеплера с коллективом, двухлинзовой оборачивающей системой и дополнительной трубой Галилея (рис. 59).

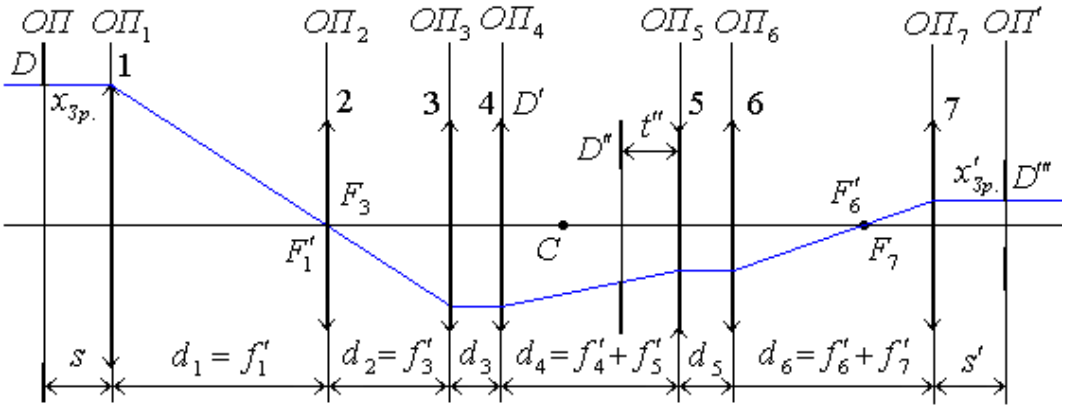


Рис. 59. Телескоп Кеплера с двухлинзовой оборачивающей системой и дополнительной трубой Галилея.

Запишем матрицу преобразования лучей между опорными плоскостями ОП$_1$ и ОП$_7$:

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_7 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & d_6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_6 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & d_5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & d_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & d_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получим:

$$A=-\frac{f_7'}{f_6'}\cdot\frac{f_5'}{f_4'}\cdot\frac{f_3'}{f_1'},$$

$$B=\frac{f_7'}{f_6'}\cdot\left[\frac{f_5'}{f_4'}\cdot\left(f_1'+f_3'-\frac{f_1'\cdot f_3'}{f_2'}\right)+\frac{f_1'}{f_3'}\cdot\left(f_4'+f_5'\right)\right]+$$

$$+\frac{f_1'}{f_3'}\cdot\left[\frac{f_4'}{f_5'}\cdot\left(f_6'+f_7'\right)-\frac{f_7'}{f_6'}\cdot\left(d_3\cdot\frac{f_5'}{f_4'}+d_5\cdot\frac{f_4'}{f_5'}\right)\right],$$

$$C=0,$$

$$D=-\frac{f_6'}{f_7'}\cdot\frac{f_4'}{f_5'}\cdot\frac{f_1'}{f_3'}.$$

Далее находим:

$s'=-\dfrac{B-s\cdot A}{D-s\cdot C}$ – положение выходного зрачка D''',

$2\cdot x_{зр.}'=2\cdot A\cdot x_{зр.}$ – *диаметр выходного зрачка* D'''.

Найдем промежуточное изображение D', *создаваемое телескопической системой (поз. 1–3), апертурной диафрагмы* D. *Запишем матрицу* M_{13} *преобразования лучей между опорными плоскостями* $ОП_1$ *и* $ОП_3$:

$$M_{13}=\begin{pmatrix} A_{13} & B_{13} \\ C_{13} & D_{13} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{13}=-\frac{f_3'}{f_1'},\ B_{13}=f_1'+f_3'\cdot\left(1-\frac{f_1'}{f_2'}\right),$$

$$C_{13}=0,\ D_{13}=-\frac{f_1'}{f_3'}.$$

Установим дополнительную трубу Галилея таким образом, чтобы ее входной зрачок (апертура объектива 4) совпал по положению с промежуточным изображением D' *апертурной диафрагмы* D. *Тогда:*

$$d_3=-\frac{B_{13}-s\cdot A_{13}}{D_{13}-s\cdot C_{13}}=\frac{f_3'}{f_1'}\cdot\left[f_1'+f_3'-\frac{f_1'\cdot f_3'}{f_2'}+s\cdot\frac{f_3'}{f_1'}\right].$$

Далее находим положение промежуточного изображения D'' апертурной диафрагмы (выходного зрачка трубы Галилея), создаваемого линзой 5:

$$t'' = -\frac{0-(-d_4)\cdot 1}{1-(-d_4)\cdot(-\varphi_5)} = -\frac{f_4' + f_5'}{1-\left(f_4' + f_5'\right)/f_5'} = \frac{f_5'}{f_4'}\cdot\left(f_4' + f_5'\right) .$$

Центр C вращения трубы Галилея располагается посередине между плоскостями изображений D' и D''.

11.4.4.7. Непрерывное изменение увеличения

Системы со скачкообразным изменением увеличения имеют существенные недостатки: **во-первых**, число возможных дискретных увеличений весьма ограничено – не более 2–3; **во-вторых**, во время смены увеличения наступает краткий момент, когда наблюдатель теряет из виду предмет наблюдения. Эти недостатки исключены в системах с плавным изменением увеличения в заданных пределах, называемых панкратическими. Такие системы дают возможность остановиться на любом промежуточном значении увеличения.

Для получения непрерывного увеличения используют объективы с переменным фокусным расстоянием либо линзовые оборачивающие системы с изменяющимся увеличением. И в том, и в другом случае необходимо перемещать по определенному закону не менее двух компонентов зрительной трубы.

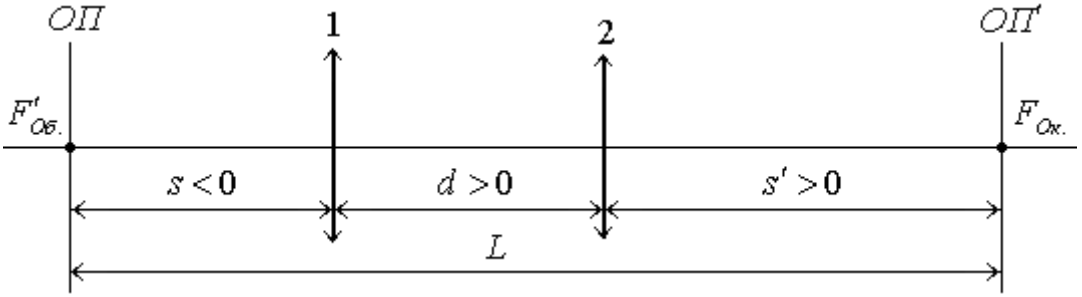


Рис. 60. Двухлинзовая панкратическая оборачивающая система

На рис. 60 изображена оптическая схема панкратической оборачивающей системы, состоящей из двух положительных компонентов. Предметом для панкратической системы является задний фокус объектива, изображением – передний фокус окуляра. Расстояние L между предметом и изображением есть величина постоянная, расстояние d между компонентами панкратической системы – величина переменная.

Заданными величинами в панкратической системе являются:

$L = const$ – длина системы (расстояние между задним фокусом объектива и передним фокусом окуляра);

φ_1 и φ_2 – оптические силы соответственно первого и второго компонентов;

$\beta_{\min} \le \beta \le \beta_{\max}$ – увеличение панкратической системы.

Запишем матрицу панкратической системы:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix} , \tag{172}$$

$$A = 1 - d \cdot \varphi_1 \ , \ B = d \ , \tag{173}$$

$$C = -\varphi_1 - \varphi_2 + d \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \ , \ D = 1 - d \cdot \varphi_2 \ . \tag{174}$$

Запишем матрицу преобразования лучей между опорными плоскостями $ОП$ и $ОП'$:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{175}$$

$$\overline{A} = A + s' \cdot C \ , \ \overline{B} = -s \cdot \left(A + s' \cdot C \right) + B + s' \cdot D \ , \tag{176}$$

$$\overline{C} = C \ , \ \overline{D} = D - s \cdot C \ . \tag{177}$$

Поскольку

$$\overline{A} = \beta \ ,$$

то с учетом (173)

$$\overline{A} = A + s' \cdot C = 1 - d \cdot \varphi_1 + s' \cdot \left(-\varphi \right) = \beta \ ,$$

откуда

$$s' = \frac{1}{\varphi} \cdot \left(1 - d \cdot \varphi_1 - \beta \right) \ ; \tag{178}$$

поскольку

$$\overline{D} = \frac{1}{\overline{A}} = \frac{1}{\beta} \ ,$$

то с учетом (174)

$$\overline{D} = D - s \cdot C = 1 - d \cdot \varphi_2 - s \cdot \left(-\varphi \right) = \frac{1}{\beta} \ ,$$

откуда

$$s = -\frac{1}{\varphi} \cdot \left(1 - d \cdot \varphi_2 - \frac{1}{\beta}\right) ; \qquad (179)$$

$$\varphi = -C = \varphi_1 + \varphi_2 - d \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \ . \qquad (180)$$

Из условия

$$-s + d + s' = const = L$$

находим:

$$-\frac{1}{\varphi} \cdot \left(\frac{1}{\beta} - 1 + d \cdot \varphi_2\right) + d + \frac{1}{\varphi} \cdot \left(1 - \beta - d \cdot \varphi_1\right) = L \text{ , или}$$

$$d^2 - d \cdot L + \left[L \cdot \left(f_1' + f_2'\right) + f_1' \cdot f_2' \cdot \frac{(1-\beta)^2}{\beta}\right] = 0 \ ,$$

отсюда

$$d = \frac{L}{2} - \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left[L \cdot \left(f_1' + f_2'\right) + f_1' \cdot f_2' \cdot \frac{(1-\beta)^2}{\beta}\right]} \ . \qquad (181)$$

<u>Сводка расчетных формул:</u>

Задано:

$$L \, , \varphi_1 \, , \varphi_2 \, , \beta \ ;$$

Расчет:

$$d = \frac{L}{2} - \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left[L \cdot \left(f_1' + f_2'\right) + f_1' \cdot f_2' \cdot \frac{(1-\beta)^2}{\beta}\right]} \ ,$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - d \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \ ,$$

$$s = \frac{1}{\varphi} \cdot \left(\frac{1}{\beta} - 1 + d \cdot \varphi_2\right) \ ,$$

$$s' = \frac{1}{\varphi} \cdot \left(1 - \beta - d \cdot \varphi_1\right) \ .$$

Конструктивным недостатком панкратической двухкомпонентной оборачивающей системы является перемещение одного из компонентов по нелинейному закону – это усложняет изготовление паза, по которому перемещается штифт, несущий оправу компонента. Технологическим преимуществом будет обладать такая система, в которой компоненты

перемещаются по линейному закону. Этому условию может удовлетворять четырехкомпонентная система.

11.4.4.8. Объективы и окуляры зрительных труб

Объективы и окуляры телескопических систем могут иметь различную оптическую схему в зависимости предъявляемых требований.

11.4.4.8.1. Объективы телескопических систем

Основными характеристиками объективов телескопических систем является фокусное расстояние $f'_{об.}$, относительное отверстие $D/f'_{об.}$ и угловое поле $2 \cdot W$.

Наибольшее распространение получили **двухлинзовые объективы** (рис. 61,а-в). Конструктивно они выполняются как склеенными, так и несклеенными. В двухлинзовом объективе одна из линз имеет положительную оптическую силу и выполняется из стекол типа крон, обладающих малой дисперсией; другая линза имеет отрицательную оптическую силу и выполняется из стекол типа флинт с большой дисперсией. Только в этом случае достигается исправление хроматизма положения при положительной оптической силе всего объектива. Выбором соответственной формы линз удается выполнить коррекцию сферической аберрации, а при подборе марок стекол можно повлиять и на другие аберрации, в частности, на кому. Склейка двух линз позволяет уменьшить потери света на отражение, однако этого можно достичь и за счет просветления.

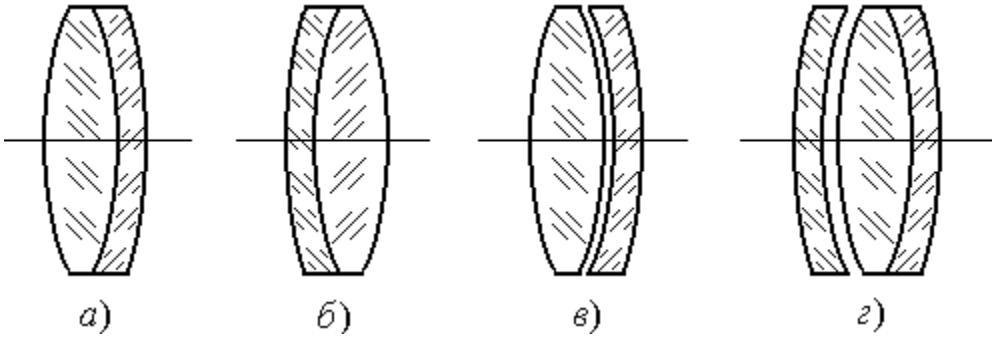


Рис. 61. Объективы телескопических систем

В склеенном дублете достигается хорошее исправление аберраций для относительного отверстия до 1:5 и угловом поле $2 \cdot W \leq 10^0$ (при $f'_{об.} \leq 200$ мм). Вариант «флинт впереди» позволяет несколько расширить полевые углы. Несклеенный дублет имеет больше свободных параметров, обладает предпочтительными возможностями по исправлению аберраций. Кроме того, такая конструкция позволяет при сборке

получить точно заданное значение фокусного расстояния за счет изменения расстояния между линзами.

Трехлинзовый объектив (рис. 61,г) обеспечивает более высокую коррекцию аберраций, особенно хроматических, применительно к системам большого увеличения, например, для геодезических инструментов.

Четырехлинзовый объектив (рис. 61,д) состоит из двух склеенных дублетов и позволяет повысить относительное отверстие и полевой угол в трубах малого увеличения.

Для сокращения длин зрительных труб часто используют **телеобъективы** (рис. 61,е), у которых в сходящемся пучке лучей после первого компонента устанавливают еще второй двухлинзовый компонент. Перемещение этого компонента вдоль оси может быть использовано для фокусировки зрительной трубы.

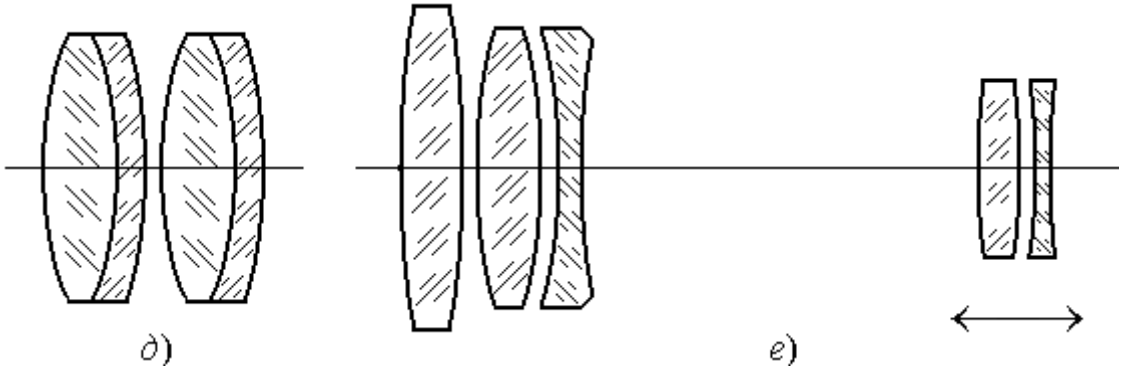


Рис. 61. Объективы телескопических систем

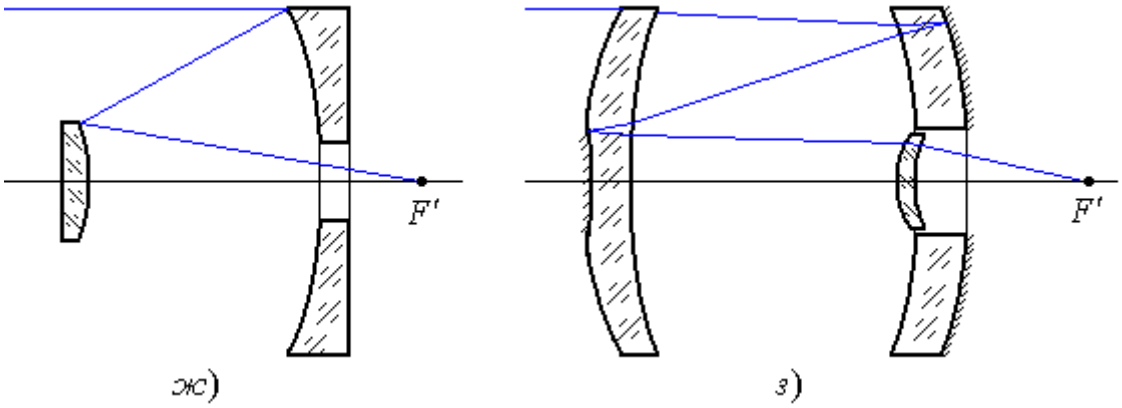


Рис. 61. Объективы телескопических систем

Наконец, **зеркальный и зеркально-линзовые объективы** дают значительное сокращение длины телескопической системы, что очень важно, например, для астрономических приборов.

В чисто **зеркальных объективах** для достижения высокого качества изображения часто используются асферические поверхности.

Например, в объективе Кассегрена (рис. 61,ж) большое зеркало имеет форму параболоида, малое – гиперболоида.

Так как изготовление точных асферических поверхностей вызывает значительные технологические сложности, то во многих случаях эквивалентный результат по качеству изображения удается получить в более сложных зеркально-линзовых системах без применения асферических поверхностей (рис. 61,з).

11.4.4.8.2. Окуляры телескопических систем

К основным характеристикам окуляров телескопических систем относят фокусное расстояние $f'_{ок.}$, относительное отверстие $D'/f'_{ок.}$ и угловое поле $2 \cdot W'$. В отличие от объективов телескопических систем окуляры функционируют в более трудных условиях при прохождении через них пучков со значительными углами наклона к оптической оси. Аберрационные возможности окуляров достаточно хорошо исследованы и систематизированы по типам. Оптические схемы окуляров основных типов приведены на рис. 62, а их данные для $f'_{ок.} = 25$ мм указаны в табл. 1.

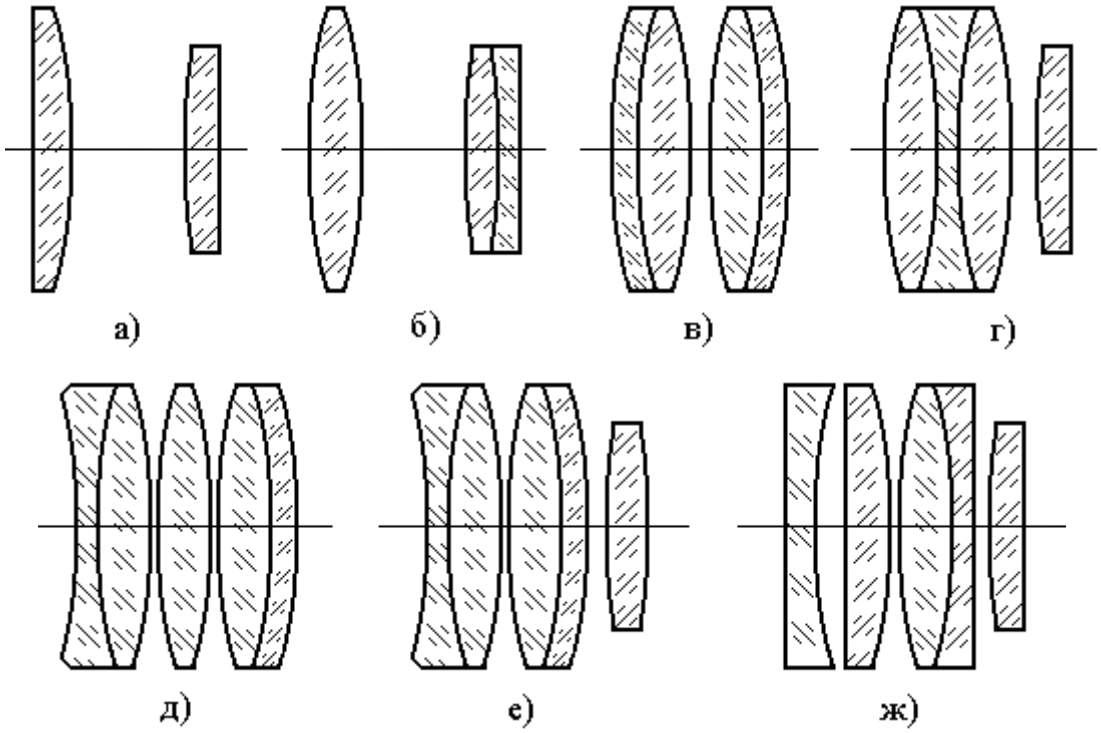


Рис. 62. Основные типы окуляров зрительных труб:
а) Рамсдена; б) Кельнера; в) симметричный; г) ортоскопический;
д) Эрфле; е) с удаленным зрачком; ж) широкоугольный

Для окуляров принят нормальный ряд значений фокусных расстояний: 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 и 50 мм. Окуляры телескопических систем

обычно имеют перемещения вдоль оптической оси для компенсации в диапазоне $\pm 5\ дптр$ близорукости или дальнозоркости наблюдателя. Для определения значения перемещения окуляра на $\pm 1\ дптр$ служит формула $\Delta = 0.001 \cdot f'^2_{ок.}$. При близорукости окуляр вдвигается, при дальнозоркости – выдвигается.

Таблица 1

Основные данные окуляров зрительных труб ($f'_{ок.} = 25$ мм)

Наименование окуляра	Угловое поле, $2 \cdot W'°$	Фокальные отрезки, мм		Длина окуляра Σd, мм
		S_F	$S'_{F'}$	
Рамсдена	30…40	–6.3	7.1	27.5
Кельнера	45…50	–7.4	9	31
Симметричный	40…50	–18.9	18.9	18.1
Ортоскопический	<40	–14.3	19.2	20.5
Эрфле	<65	–8.9	23.2	35.9
С удаленным зрачком	<50	–7.3	17	40.4
Широкоугольный	<90	–7	17	42.2

12. ХРОМАТИЧЕСКИЕ АБЕРРАЦИИ

При прохождении света через границу раздела двух сред белый луч не только преломляется, но и разлагается в спектр, вызывая изменения параметров системы (положение фокусов, главных точек) и окрашиваемость изображения. Это явление называется дисперсией света. Она появляется вследствие того, что показатель преломления прозрачной среды зависит от длины волны проходящего света:

$$n = f(\lambda) \ .$$

В количественном выражении дисперсией называется разность $\left(n_1 - n_2\right)$ двух значений показателя преломления среды для двух значений λ_1 и λ_2 длин волн света.

Оптические материалы могут работать только в определенном диапазоне длин волн (от λ_1 до λ_2), в пределах которого показатель преломления хорошо описывается дисперсионной формулой. Вблизи границ этого интервала зависимость показателя преломления сильно отличается от зависимости, описываемой дисперсионной формулой. Пограничные интервалы длин волн называются полосами поглощения. У различных стекол эти показатели разные.

Примечание.

Дисперсионная формула *– это аппроксимация, позволяющая описывать зависимость показателя преломления от длины волны* $n(\lambda)$ *в функциональном виде.*

Для каждой оптической среды определяется некоторый набор коэффициентов (различный для разных формул), значения которых позволяют восстанавливать показатель преломления в любой точке части спектра, где производилась аппроксимация. Длины волн, ограничивающие эту часть спектра, должны быть указаны для каждого отдельного разложения.

1. Дисперсионная формула Герцбергера*:*

$$n(\lambda) = c_1 + c_2 \cdot \lambda^2 + c_3 \cdot \lambda^4 + c_4 \cdot L + c_5 \cdot L^2 + c_6 \cdot L^3 \ ,$$

где

$$L = \frac{1}{\lambda^2 + 0.28} \ .$$

2. Формула Зелмейера*:*

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{c_1 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - c_4} + \frac{c_2 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - c_5} + \frac{c_3 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - c_6}} \ .$$

***3. Формула Конради**:*

$$n(\lambda) = n_0 + \frac{c_1}{\lambda} + \frac{c_2}{\lambda^{3.5}} \ .$$

***4. Формула Шотта**:*

$$n(\lambda) = \sqrt{c_1 + c_2 \cdot \lambda^2 + \frac{c_3}{\lambda^2} + \frac{c_4}{\lambda^4} + \frac{c_5}{\lambda^6} + \frac{c_6}{\lambda^8}} \ .$$

***5. Формула Резника**:*

$$n(\lambda) = c_2 + c_4 \cdot \nu + c_6 \cdot \nu^2 + c_8 \cdot \nu^3 + c_{10} \cdot \nu^4 + c_3 \cdot \mu + c_5 \cdot \mu^2 + c_7 \cdot \mu^3 + c_9 \cdot \mu^4 + c_{11} \cdot \mu^5 \ ,$$

где

$$L_\lambda = \frac{1}{\lambda^2 - c_1} \ , \ L_{\min} = \frac{1}{\lambda_{\min}^2 - c_1} \ , \ L_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\max}^2 - c_1} \ ,$$

$$\Delta L = \frac{L_{\min} - L_{\max}}{2} \ , \ L_{Q\nu} = \frac{L_{\min} + L_{\max}}{2} \ ,$$

$$\mu = \frac{L_\lambda - L_{Q\nu}}{\Delta L} \ ,$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_{\max}^2 - \lambda_{\min}^2}{2} \ , \ \lambda_{Q\nu} = \frac{\lambda_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}{2}$$

$$\nu = \frac{\lambda^2 - \lambda_{Q\nu}}{\Delta\lambda} \ .$$

В видимой области спектра имеются стандартные длины волн, называемые Фраунгоферовыми линиями:

Химический элемент	Обозначение линии	Длина волны, мкм
	i	0,365
Hg	*h*	0,4046
	G'	0,434
	g	0,4358
	F'	0,480
	F	0,4861
	e	0,546
	d	0,5875
Na	*D*	0,5893
	C'	0,6438
H	*C*	0,6562
	r	0,7065
	A'	0,768

Основными характеристиками стекла являются показатель преломления для основной длины волны n_{λ_0} и общая дисперсия $\left(n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}\right)$, где λ_1 и λ_2 – наибольшая и наименьшая длины волн, которые пропускает стекло.

В качестве опорных или **основных длин волн** для видимой области сейчас используются:

- центральная длина волны $\lambda_0 = \lambda_e$,
- крайние длины волн $\lambda_1 = \lambda_{F'}$ и $\lambda_2 = \lambda_{C'}$.

Ранее в качестве основных длин волн использовались:

$$\lambda_0 = \lambda_D \,,\ \lambda_1 = \lambda_F \,,\ \lambda_2 = \lambda_C \ .$$

Еще одной важной характеристикой стекла является **число Аббе** (коэффициент относительной дисперсии):

$$\nu_e = \frac{n_e - 1}{n_{F'} - n_{C'}} \text{ , или} \qquad (1)$$

$$\nu_D = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \qquad (2)$$

Чем меньше число Аббе, тем больше дисперсия, то есть сильнее зависимость показателя преломления от длины волны. По числу Аббе стекла делят на две группы:

$\nu_e > 55$ – кроны.

$\nu_e < 55$ – флинты.

Крон – стекло с небольшим показателем преломления и с большой дисперсией. **Флинт** – стекло с большим показателем преломления и малой дисперсией.

Комбинация стекол различных групп позволяет создать высококачественные оптические системы. Кроны и флинты – это основные группы оптических стекол. Их названия сформировались в Англии в 18 веке, когда впервые было основано промышленное производство оптических стекол.

В общем случае влияние дисперсии на параметры оптической системы и качество изображения определяется термином **хроматизм**, а количественные искажения в положении и окраске, вызванные изменением показателя преломления в зависимости от длины волны, – **хроматическими аберрациями первой и второй группы**.

К **первой группе** относятся хроматические аберрации, которые уже имеют место в параксиальной области. В области параксиальных лучей изображение определяется только двумя координатами – расстоянием от оптической системы до изображения s' и величиной изображения l'.

В соответствии с этим к хроматическим аберрациям первой группы относятся **хроматическая аберрация положения** изображения (или хроматизм отрезков вдоль оси) и **хроматическая аберрация увеличения**.

Устранить хроматические аберрации для пучков лучей всех цветов невозможно. Обычно эти погрешности устраняются для каких-либо длин волн, выбор которых определяется назначением системы. Поэтому всегда имеет место остаточный хроматизм вдоль оси, носящий название **вторичного спектра**.

Хроматические аберрации **второй группы** относятся исключительно к конечным апертурным углам и конечным углам поля зрения, то есть к действительным пучкам лучей.

Хроматические аберрации первой группы называются также хроматизмом первого порядка, а хроматические аберрации действительных лучей – хроматизмом высших порядков.

12.1. Хроматическая аберрация положения

Пусть на линзу падает луч SP_1 белого света (рис. 1). В точке P_1 падения луча на первую поверхность линзы происходит преломление и разложение белого света в спектр. Красный луч отклоняется меньше, чем фиолетовый. После преломления второй поверхностью линзы они пересекут оптическую ось в точках, положение которых определяется отрезками $s'_{C'}$ и $s'_{F'}$. Разность $\delta s'_{хр.} = s'_{F'} - s'_{C'}$ и определяет хроматическую аберрацию положения.

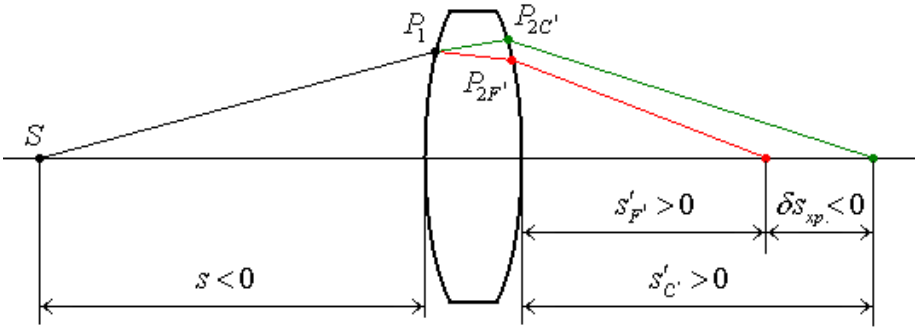


Рис. 1. Хроматическая аберрация положения

12.2. Хроматическая аберрация положения для тонкой линзы в воздухе

Для определения хроматической аберрации положения линзы запишем уравнения:

$$(n-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f'}=\varphi\ , \qquad (3)$$

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = \varphi \ . \tag{4}$$

Приравнивая левые части равенств (3) и (4), получим:

$$(n-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \ . \tag{5}$$

Запишем уравнение (5) для двух длин волн λ_1 и λ_2:

$$(n_{\lambda_1} - 1)\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{s'_{\lambda_1}} - \frac{1}{s} \ , \tag{6}$$

$$(n_{\lambda_2} - 1)\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{s'_{\lambda_2}} - \frac{1}{s} \ . \tag{7}$$

Вычтем уравнение (6) из уравнения (7):

$$(n_{\lambda_2} - n_{\lambda_1})\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{s'_{\lambda_2}} - \frac{1}{s'_{\lambda_1}} = -\frac{s'_{\lambda_2} - s'_{\lambda_1}}{s'_{\lambda_1}\cdot s'_{\lambda_2}} \ . \tag{8}$$

Из (3) для длины волны λ_1 находим:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{\varphi_{\lambda_1}}{n_{\lambda_1} - 1} \ . \tag{9}$$

Подставим (9) в (8):

$$(n_{\lambda_2} - n_{\lambda_1})\cdot\frac{\varphi_{\lambda_1}}{n_{\lambda_1} - 1} = -\frac{s'_{\lambda_2} - s'_{\lambda_1}}{s'_{\lambda_1}\cdot s'_{\lambda_2}} \ ,$$

отсюда:

$$\delta s'_{хр.} = s'_{\lambda_2} - s'_{\lambda_1} = -\frac{\varphi_{\lambda_1}}{\dfrac{n_{\lambda_1} - 1}{n_{\lambda_2} - n_{\lambda_1}}}\cdot s'_{\lambda_1}\cdot s'_{\lambda_2} \ ,$$

или

$$\delta s'_{хр.} = -\frac{\varphi_{\lambda_1}}{\nu}\cdot s'_{\lambda_1}\cdot s'_{\lambda_2} \ , \tag{10}$$

где

$$\nu = \frac{n_{\lambda_1} - 1}{n_{\lambda_2} - n_{\lambda_1}} \ .$$

Обычно принимают:

$$\lambda_1 = \lambda_e \ , \tag{11}$$

$$n_{\lambda_2} - n_{\lambda_1} = n_{F'} - n_{C'} \ \ \textbf{– дисперсия,} \tag{12}$$

$$\nu_e = \frac{n_{\lambda_1} - 1}{n_{\lambda_2} - n_{\lambda_1}} = \frac{n_e - 1}{n_{F'} - n_{C'}} \ , \tag{13}$$

ν_e **– коэффициент относительной дисперсии, или число Аббе**,

$s'_{\lambda_1} \cdot s'_{\lambda_2} \approx s'^2_{\lambda_1} = s'^2_{\lambda_e}$, поскольку $s'_{\lambda_2} = s'_{\lambda_1} + \delta s'_{хр.} \approx s'_{\lambda_1}$. (14)

Тогда получим:

$$\delta s'_{хр.} = -s'^2_e \cdot \frac{\varphi_e}{\nu_e} \tag{15}$$

где $\delta s'_{хр.}$ **– хроматизм положения тонкой линзы**.

12.3. Хроматическая аберрация положения для двухлинзового объектива

Пусть задана оптическая система, состоящая из двух тонких линз $(d = 0)$. Тогда:

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ – оптическая сила объектива, (16)

$\varphi_1 = (n_1 - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ – оптическая сила первой линзы, (17)

$\varphi_2 = (n_2 - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right)$ – оптическая сила второй линзы. (18)

Из (17) и (18) находим:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{\varphi_1}{n_1 - 1}, \qquad \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} = \frac{\varphi_2}{n_2 - 1} \ . \tag{19}$$

Запишем выражение (16) для двух длин волн:

$$\varphi_{\lambda_1} = \varphi_{1\lambda_1} + \varphi_{2\lambda_1} \ , \tag{20}$$

$$\varphi_{\lambda_2} = \varphi_{1\lambda_2} + \varphi_{2\lambda_2} \ . \tag{21}$$

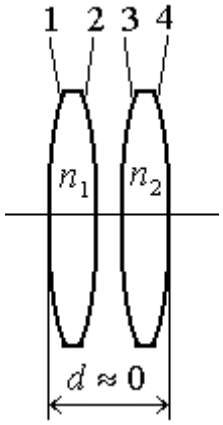


Рис. 2. Двухлинзовый тонкий объектив

Вычтем уравнение (20) из уравнения (21):

$$\left(\varphi_{1\lambda_2} - \varphi_{1\lambda_1}\right) + \left(\varphi_{2\lambda_2} - \varphi_{2\lambda_1}\right) = \varphi_{\lambda_2} - \varphi_{\lambda_1} \ . \tag{22}$$

Подставим (17) и (18) в (22)

$$(n_{1\lambda_2} - 1)\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) - (n_{1\lambda_1} - 1)\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) +$$

$$+(n_{2\lambda_2} - 1)\cdot\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) - (n_{2\lambda_1} - 1)\cdot\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) = \varphi_{\lambda_2} - \varphi_{\lambda_1} \text{ , или}$$

$$(n_{1\lambda_2} - n_{1\lambda_1})\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + (n_{2\lambda_2} - n_{2\lambda_1})\cdot\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) = \varphi_{\lambda_2} - \varphi_{\lambda_1} \ . \tag{23}$$

Запишем выражения (19) для линии λ_1:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{\varphi_{1\lambda_1}}{n_{1\lambda_1} - 1}, \qquad \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} = \frac{\varphi_{2\lambda_1}}{n_{2\lambda_1} - 1} \ . \tag{24}$$

Подставим (24) в (23):

$$\frac{\varphi_{1\lambda_1}}{\dfrac{n_{1\lambda_1} - 1}{n_{1\lambda_2} - n_{1\lambda_1}}} + \frac{\varphi_{2\lambda_1}}{\dfrac{n_{2\lambda_1} - 1}{n_{2\lambda_2} - n_{2\lambda_1}}} = \varphi_{\lambda_2} - \varphi_{\lambda_1} = \Delta\varphi \ ,$$

или

$$\frac{\varphi_{1\lambda_1}}{\nu_1} + \frac{\varphi_{2\lambda_1}}{\nu_2} = \Delta\varphi \ . \tag{25}$$

С учетом условий (11-13) выражение (25) можно записать в виде:

$$\frac{\varphi_{1e}}{\nu_{1e}} + \frac{\varphi_{2e}}{\nu_{2e}} = \Delta\varphi \ . \qquad (26)$$

Из (26) видно, что для устранения продольного хроматизма необходимо положить:

$$\Delta\varphi = 0 \ , \text{ или}$$

$$\frac{\varphi_{1e}}{\nu_{1e}} + \frac{\varphi_{2e}}{\nu_{2e}} = 0 \ . \qquad (27)$$

Из (27) находим:

$$\varphi_{1e} = -\frac{\nu_{1e}}{\nu_{2e}} \cdot \varphi_{2e} \ , \qquad (28)$$

тогда

$$\varphi_e = \varphi_{1e} + \varphi_{2e} = -\frac{\nu_{1e}}{\nu_{2e}} \cdot \varphi_{2e} + \varphi_{2e} = \varphi_{2e} \cdot \left(1 - \frac{\nu_{1e}}{\nu_{2e}}\right) = \frac{\nu_{2e} - \nu_{1e}}{\nu_{2e}} \cdot \varphi_{2e} \ ,$$

отсюда

$$\varphi_{2e} = \frac{\nu_{2e}}{\nu_{2e} - \nu_{1e}} \cdot \varphi_e \ . \qquad (29)$$

Подставим (29) в (28):

$$\varphi_{1e} = -\frac{\nu_{1e}}{\nu_{2e}} \cdot \varphi_{2e} = -\frac{\nu_{1e}}{\nu_{2e}} \cdot \frac{\nu_{2e}}{\nu_{2e} - \nu_{1e}} \cdot \varphi_e = -\frac{\nu_{1e}}{\nu_{2e} - \nu_{1e}} \cdot \varphi_e \ . \qquad (30)$$

Объектив, у которого хроматизм положения для двух длин волн равен нулю, называется **ахроматом**.

Объектив, у которого хроматизм положения равен нулю для трех длин волн, называется **апохроматом**.

Таким образом, если задана оптическая сила объектива φ, то для расчета ахромата необходимо положить:

$$\varphi_{1e} = -\frac{\nu_{1e}}{\nu_{2e} - \nu_{1e}} \cdot \varphi_e \ , \qquad (31\text{-}1)$$

$$\varphi_{2e} = \frac{\nu_{2e}}{\nu_{2e} - \nu_{1e}} \cdot \varphi_e \ . \qquad (31\text{-}2)$$

Рассмотрим простой пример.

Необходимо рассчитать двухлинзовый объектив, оптическая сила которого задана и равна φ.

Из уравнений (31) находим значения φ_{1e} *и* φ_{2e}. *Для однозначного решения примем дополнительные условия:* $r_2 = r_3$ *(склейка) и* $r_4 = \infty$. *Тогда:*

$$\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} = \frac{\varphi_{2e}}{n_{2e} - 1} \text{ , отсюда}$$

$$r_3 = r_2 = \frac{n_{2e} - 1}{\varphi_{2e}} = (n_{2e} - 1) \cdot f'_{2e} \ ; \qquad (32)$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} + \frac{\varphi_{1e}}{n_{1e} - 1}, \text{ отсюда с учетом (32):}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\varphi_{2e}}{n_{2e} - 1} + \frac{\varphi_{1e}}{n_{1e} - 1} \ . \qquad (33)$$

При практическом решении эта задача усложняется необходимостью исправления других аберраций, свойственных этому компоненту.

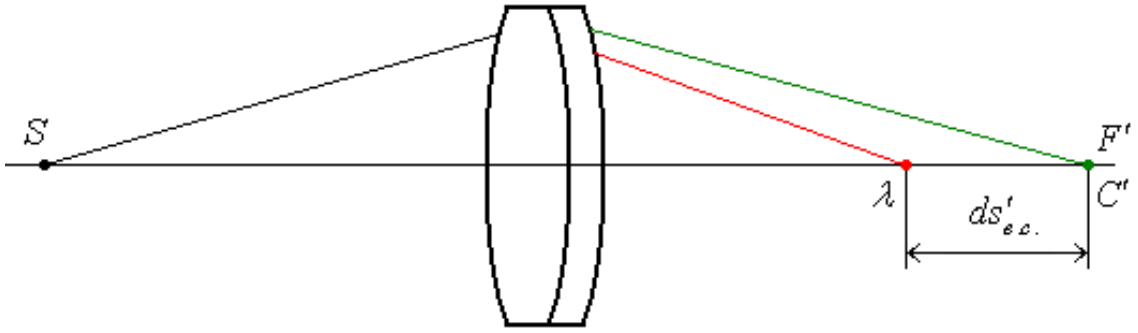


Рис. 3. Вторичный спектр

Система, ахроматизированная для параксиальных лучей двух каких-либо цветов, например, F' и C', еще не дает вполне бесцветное изображение точки на оси, так как изображения других длин волн будут располагаться на различных расстояниях от системы вдоль оси. Имеет место так называемый вторичный спектр. Вторичный спектр характеризуется отрезком $ds'_{в.с.}$, равным расстоянию от изображения для некоторого цвета λ до изображения, которое ахроматизировано для цветов F' и C' (рис. 3). Из практики расчета известно, что $ds'_{в.с.} \approx \dfrac{f'}{2500}$.

12.4. Хроматическая разность сферических аберраций

Условие ахроматизации обеспечивает совпадение изображений для двух длин волн лишь в параксиальной области (рис. 4).

Оптическая система будет ахроматизированной и для лучей широких пучков, если в ней отсутствует сферическая аберрация.

Реальные оптические системы всегда обладают сферической аберрацией. Поэтому лучи, выходящие из предметной точки A и имеющие большие апертурные углы u, по прохождении оптической системы пересекают оптическую ось в разных местах, то есть имеют разные значения продольной сферохроматической аберрации $\delta s'_{F'} \neq \delta s'_{C'}$. Изображение предметной точки A в любой плоскости Q' будет иметь форму круглого пятна (в видимой области спектра это пятно будет иметь цветную окраску). Размер этого пятна будет зависеть от разности $\delta s'$ продольных сферических аберраций для лучей длин волн $\lambda_{C'}$ и $\lambda_{F'}$:

$$\delta s' = \delta s'_{C'} - \delta s'_{F'} . \qquad (34)$$

Однако, как показывает опыт расчета оптических систем, соблюдение одновременно двух условий – ахроматизации и отсутствия сферохроматизма – оказывается невозможным.

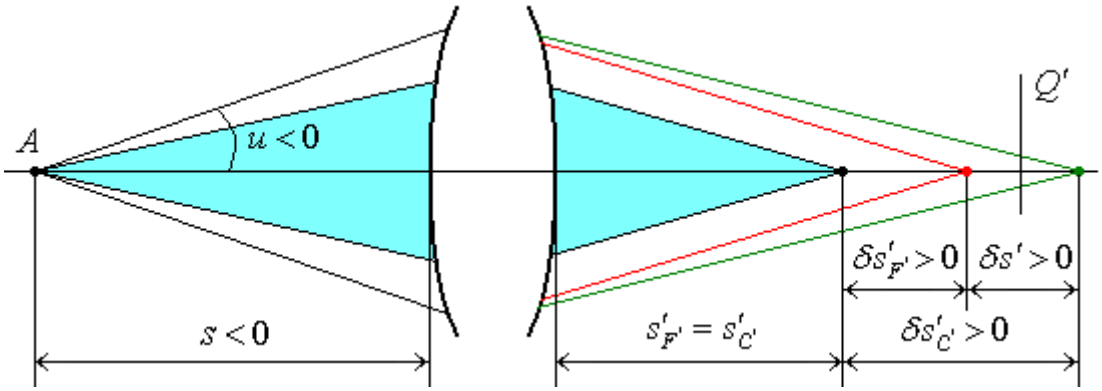


Рис. 4. Сферохроматизм в оптической системе

Для уменьшения сферохроматизма допускают наличие хроматической аберрации положения в параксиальной области, при этом сферохроматизм несколько уменьшается.

12.5. Хроматическая аберрация увеличения

Из геометрической оптики известно, что

$$\beta = \frac{l'}{l} = \frac{s'}{s} . \qquad (35)$$

Вершинный отрезок s' зависит от радиусов кривизны поверхностей, расстояний между вершинами поверхностей и показателей преломления сред. Так как показатель преломления есть функция длины волны, то и

$$l' = \beta \cdot l = l \cdot \frac{s'_\lambda}{s} = F(\lambda) \ . \qquad (36)$$

То есть изображения l' одного предмета l в лучах разных длин волн будут различными по величине (рис. 5). Это явление получило название хроматической аберрации увеличения.

В оптической системе могут присутствовать одновременно обе хроматические аберрации, при этом изображения l'_a, l'_b, l'_m предмета в лучах разных длин волн $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_m$ будут не одинаковы по величине и расположены в разных местах.

Для того, чтобы оптическая система была полностью свободна от хроматизма, необходимо исправление обеих хроматических аберраций. Только при этом условии изображения, образуемые лучами разных длин волн, будут лежать в одном месте и будут одного размера.

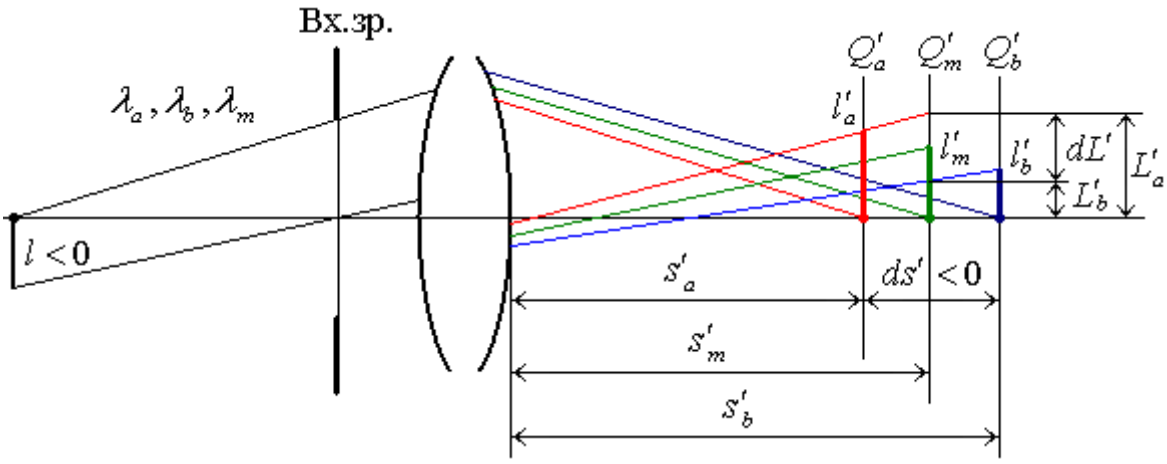


Рис. 5. Система, обладающая хроматическими аберрациями положения и увеличения

Величину хроматической аберрации увеличения характеризуют относительной величиной:

$$\frac{\delta l'}{l'} = \frac{l'_a - l'_b}{l'_m} \ . \qquad (37)$$

Формулу (37) в практике расчетов применяют редко, так как эта формула дает оценку хроматической аберрации увеличения для изображений, расположенных в разных плоскостях.

Обычно за плоскость изображения выбирается плоскость Q_m, в которой лежит изображение для лучей средней длины волны λ_m. Поэтому для практической оценки хроматической аберрации увеличения имеет значение разность ординат ($L'_a - L'_b$) точек пересечения главных лучей с длиной волны λ_a и λ_b с плоскостью Q'_m. Здесь также принято хроматизм увеличения характеризовать относительной величиной

$$\frac{\delta L'}{L'} = \frac{L'_a - L'_b}{l'_m} \quad . \tag{38}$$

Величины (38) рассчитываются на основе расчета хода реальных лучей.

13. УЧЕНИЕ ОБ АБЕРРАЦИЯХ

Гауссова теория изображения оптическими системами является приближением, пригодным только в тех случаях, когда поперечные размеры оптической системы и размеры объекта очень малы по сравнению с продольными размерами системы или, другими словами, когда поле зрения системы и ее апертура очень малы.

В реальных оптических системах закон косинусов не может быть строго выполнен, поэтому точечный предмет изображается в виде некоторого пятна, называемого кружком рассеяния, прямая линия изображается в виде кривой, изображение плоскости, перпендикулярной оптической оси, оказывается не плоским, а искривленным в той или иной степени и так далее. Иными словами, волновой фронт, выходящий из любой точки предмета, в пространстве изображений не имеет сферической формы, поэтому и лучи в пространстве изображений не пересекаются в одной точке. Картина усложняется еще явлениями дифракции.

Разности координат (угловых или линейных) точек изображения, даваемых реальной и идеальной оптическими системами, называется аберрациями оптических систем. Количественно аберрации могут быть получены сравнением координат изображения, вычисленных по точным формулам и по формулам параксиальной оптики.

Аберрации оптических систем разделяются на хроматические аберрации и монохроматические. Монохроматические аберрации характеризуют отступление реальных систем от идеальных систем для лучей строго определенной длины волны.

При прохождении пучков света через границы раздела прозрачных сред, пучок лучей естественного света при преломлении вследствие дисперсии разлагается в спектр. В результате изображение представляет собой сумму большого числа монохроматических изображений, не совпадающих между собой как по положению, так и по величине: изображение становится окрашенным. Это явление носит название хроматизма или хроматических аберраций.

К монохроматическим аберрациям относятся: астигматизм, кривизна поля изображения, сферическая аберрация, кома и дисторсия.

Процесс устранения как монохроматических, так и хроматических аберраций называется корригированием оптической системы. Полностью устранить аберрации оптических системах невозможно. Удается только уменьшить их до такой степени, что глаз или другой фотоприемник вследствие ограниченности их разрешающей способности практически не воспринимает аберраций.

13.1. Теория аберраций третьего порядка

При проектировании оптических систем могут быть использованы уже имеющиеся оптические системы и рассчитаны новые. В первом случае, зная конструктивные параметры системы r, d, n необходимо определить аберрации в изображении данной точки предмета. Выполнение этой задачи дает возможность судить о пригодности данной системы для того или иного ее практического применения. Эта задача не представляет особых трудностей. Для этого следует рассчитать ход пучка лучей, исходящих из данной предметной точки, и найти их направление на выходе оптической системы. Разность координат точек пересечения этих лучей с плоскостью изображения и координат идеального изображения точки и будет определять значения аберраций для этих лучей.

Во втором случае следует определить, какие конкретные параметры должна иметь оптическая система, если ее аберрации в изображении данной точки заданы.

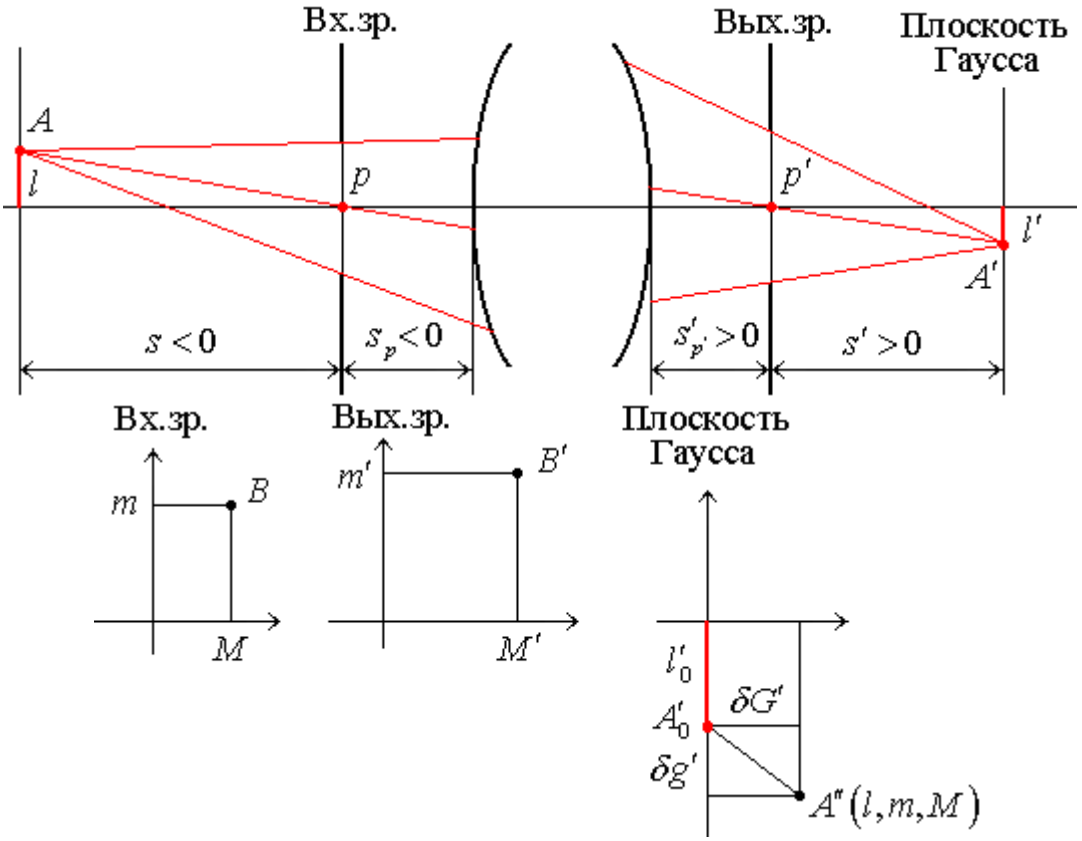


Рис. 1. К определению суммарной поперечной аберрации оптической системы

Пусть заданы конструктивные параметры оптической системы r, d, n. Положение предметной точки A относительно этой системы

определяется параметрами ℓ и s (рис. 1). Входной зрачок системы находится на расстоянии z_P от первой поверхности. Положение луча, идущего из точки A, определяется координатами его точки пересечения B (m, M) с плоскостью входного зрачка. Луч AB в общем случае не лежит в меридиональной плоскости A и называется косым лучом.

ℓ'_0 – величина идеального (параксиального) изображения, $\ell'_0 = \beta \cdot \ell$,

A'_0 – идеальное изображение предметной точки A,

A'' – реальное изображение предметной точки A в плоскости Гаусса. Производя расчет хода луча, найдем поперечные аберрации, которые в практике оптических расчетов получили следующие названия:

$\delta g'$ – меридиональная слагающая поперечной аберрации,

$\delta G'$ – сагиттальная слагающая поперечной аберрации.

Если рассчитать ход пучка лучей, то можно определить $\delta g'$ и $\delta G'$ для каждого луча и увидеть форму пятна рассеяния в плоскости изображения.

Поперечные аберрации являются функцией конструктивных параметров, положения предмета, параметров луча:

$$\begin{aligned} \delta g' &= f \cdot (r, d, n, \ell, z_P, m, M), \\ \delta G' &= \varphi \cdot (r, d, n, \ell, z_P, m, M). \end{aligned} \qquad (1)$$

К сожалению, функции (1) невозможно записать в виде простых аналитических зависимостей, поэтому не существует прямого решения задачи, связанной с нахождением конструктивных элементов r, d, n по заданным аберрациям $\delta g'$ и $\delta G'$ и положению предметной точки.

При расчете оптических систем можно воспользоваться следующим приемом решения этой задачи.

Уравнения (1) разлагаются в степенные ряды как функции некоторых вспомогательных параметров. Ряды эти начинаются со слагаемых третьего порядка, затем идут слагаемые пятого, седьмого и более высоких порядков. Коэффициенты при слагаемых порядка выше третьего имеют очень сложный вид и в практической работе очень неудобны. Поэтому степенные ряды ограничиваются, как правило, слагаемыми третьего порядка. Задавая числовые значения остаточным аберрациям для ряда лучей, из этих приближенных уравнений находят конструктивные элементы системы. Если относительное отверстие и поле зрения системы малы, то это приближенное решение дает уже приемлемые результаты. При больших относительных отверстиях и полях зрения после нахождения конструктивных параметров производят расчет хода лучей и находят действительные аберрации.

Разность между действительными аберрациями и принятыми при приближенном расчете, очевидно, составляет сумму слагаемых высшего порядка всего степенного ряда. Далее применяются программы по оптимизации и в результате находят искомую систему.

Аберрации $\delta g'$ и $\delta G'$ в данной конкретной системе зависят только от положения предметной точки A и параметров лучей, исходящих из точки A (координат на выходном зрачке и направляющих косинусов). При заданном положении предметной плоскости аберрации будут зависеть только от величины ℓ предмета и параметров луча, то есть:

$$\begin{aligned} \delta g' &= f \cdot (\ell, m, M), \\ \delta G' &= \varphi \cdot (\ell, m, M). \end{aligned} \tag{2}$$

Подставим эти функции в виде степенных рядов:

$$\begin{aligned} \delta g' &= \sum_i \sum_j \sum_k t_{ijk} \cdot m^i \cdot M^j \cdot \ell^k, \\ \delta G' &= \sum_i \sum_j \sum_k T_{ijk} \cdot m^i \cdot M^j \cdot \ell^k. \end{aligned} \tag{3}$$

где t и T – постоянные коэффициенты, зависящие от конструкции оптической системы; i, j, k – целые числа; сумма $(i + j + k)$ определяет порядок данного слагаемого.

Из условия симметрии оптической системы относительно оптической оси следует, что если координаты луча ℓ, m, M заменить на $(-\ell, -m, -M)$, то, очевидно, слагающие поперечной аберрации $\delta g'$ и $\delta G'$ при этом сохранят абсолютное значение, но изменят знак на обратный. Следовательно, ряды (3) могут содержать слагаемые только нечетных степеней, т. е. $i + j + k = 2 \cdot \nu + 1$ где ν – целое число.

Далее, если бы ряды содержали слагаемые первого порядка, то есть имели бы вид:

$$\begin{aligned} \delta g' &= t_{100} \cdot m + t_{010} \cdot M + t_{001} \cdot \ell + \ldots, \\ \delta G' &= T_{100} \cdot m + T_{010} \cdot M + T_{001} \cdot \ell + \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

то это означало бы, что поперечные аберрации рассматриваются в плоскости $\bar{Q}'$, не совпадающей с плоскостью изображения Q' (рис. 2). Из рис. 2 видно, что в плоскости $\bar{Q}'$ величина $\delta g'$ пропорциональна $m' = \beta_p \cdot m$ (где β_p – увеличение в зрачках). Аналогично $\delta G' \sim M$ и $l' \sim l$ (поскольку $l' = \beta \cdot l$). Поэтому совмещением плоскостей $\bar{Q}'$ и Q' можно избавиться от членов первого порядка.

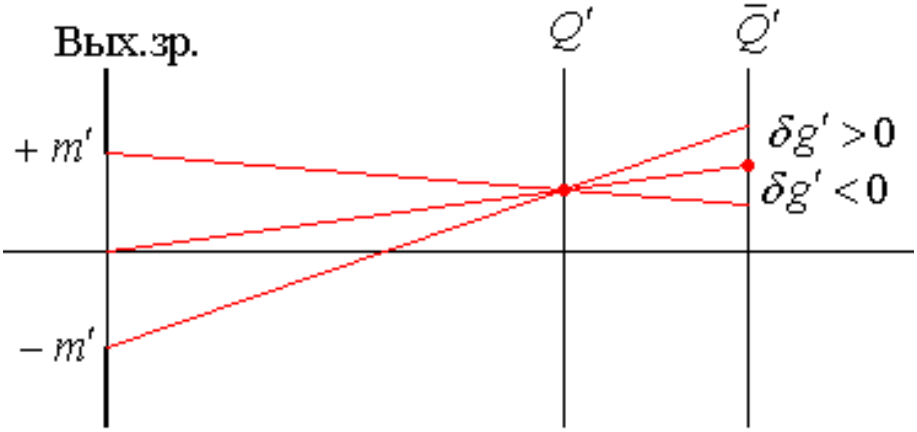


Рис. 2. К вопросу о слагаемых первого порядка

Таким образом, слагающие поперечных аберраций $\delta g'$ и $\delta G'$ могут быть представлены в виде степенных рядов, содержащих слагаемые нечетных порядков, начиная с третьего, то есть $i + j + k = 3,5,7,\ldots$.

Кроме того, из условия симметрии оптической системы относительно оптической оси можно сделать следующие выводы:

1) при замене $+M$ на $-M$ величина $\delta g'$ не изменится, поэтому в ряд для $\delta g'$ не могут входить слагаемые, содержащие M в нечетной степени, т. е. $M^1, M^3, M^5 \ldots$;
2) при $M = 0$ величина $\delta G' = 0$, поэтому в ряд для $\delta G'$ не могут входить слагаемые, не содержащие координаты M;
3) при замене $+M$ на $-M$ величина $\delta G'$ так же изменяет свой знак, сохраняя абсолютное значение; в этом случае в ряд для $\delta G'$ не могут входить слагаемые, содержащие координату M в четной степени, то есть $M^2, M^4 \ldots$.

Пользуясь сказанным, можно было бы написать ряды (3) в развернутом виде. Они содержали бы группу слагаемых третьего, пятого и так далее порядков.

Коэффициенты t и T при отдельных слагаемых этих рядов являются функциями конструктивных параметров оптической системы r, d, n и величин s и s_p. Для практических вычислений интерес представляют лишь слагаемые третьих порядков, так как только для этих слагаемых установлены указанные выше функциональные зависимости в форме, пригодной для вычислений. Однако коэффициенты при слагаемых пятого порядка уже настолько сложны, что их использование на практике не оправдывается.

Ограничиваясь в разложении поперечных аберраций только слагаемыми третьего порядка, из формул (3) получим:

$$\delta g' = t_{300} \cdot m^3 + t_{201} \cdot m^2 \cdot \ell + t_{120} \cdot m \cdot M^2 + t_{102} \cdot m \cdot \ell^2 + t_{021} \cdot M^2 \cdot \ell + t_{003} \cdot \ell^3 ,$$
$$\delta G' = T_{210} \cdot m^2 \cdot M + T_{111} \cdot m \cdot M \cdot \ell + T_{030} \cdot M^3 + T_{012} \cdot M \cdot \ell^2 . \quad (5)$$

Путем достаточно сложных расчетов ряды (5) приводятся к виду:

$$\delta g' = A \cdot (m^2 + M^2) \cdot m + B \cdot \ell \cdot (3 \cdot m^2 + M^2) + C \cdot \ell^2 \cdot m + E \cdot \ell^3 ,$$
$$\delta G' = A \cdot (m^2 + M^2) \cdot M + 2 \cdot B \cdot \ell \cdot m \cdot M + D \cdot \ell^2 \cdot M , \quad (6)$$

где A, B, C, D, E – коэффициенты, зависящие от конструктивных параметров r, d, n оптической системы, положения s предмета и положения s_p входного зрачка.

Теория аберраций третьего порядка была впервые разработана астрономом Зейделем, поэтому носит название зейделевой теории аберраций, а область, в которой она может быть применена, называется областью Зейделя.

13.2. Фигуры изображения точки при наличии различных аберраций третьего порядка

При наличии аберраций в оптической системе образуемое ею изображение точки имеет вид пятна. Фигура этого пятна зависит от значений коэффициентов A, B, C, D, E, входящих в уравнение (6). Каждому из этих коэффициентов, а стало быть, каждой их пяти сумм Зейделя соответствует характерная фигура в изображении точки.

13.2.1. Сферическая аберрация

Если $A \neq 0$, а $B = C = D = E = 0$, то говорят, что оптическая система обладает сферической аберрацией. Сферическая аберрация – это аберрация широкого пучка (наклонного и осевого).

Для удобства в плоскости входного зрачка перейдем к полярным координатам:

$$m = \rho \cdot \cos\varphi ,$$
$$M = \rho \cdot \sin\varphi , \quad (7)$$

тогда:

$$\delta g' = A \cdot (m^2 + M^2) \cdot m = A \cdot \rho \cdot \cos\varphi \cdot \left(\rho^2 \cdot \cos^2\varphi + \rho^2 \cdot \sin^2\varphi\right) = A \cdot \rho^3 \cdot \cos\varphi ,$$
$$\delta G' = A \cdot (m^2 + M^2) \cdot M = A \cdot \rho \cdot \sin\varphi \cdot \left(\rho^2 \cdot \cos^2\varphi + \rho^2 \cdot \sin^2\varphi\right) = A \cdot \rho^3 \cdot \sin\varphi ,$$

отсюда:

$$\left(\delta g'\right)^2 + \left(\delta G'\right)^2 = \left(A \cdot \rho^3\right)^2 = r_{сф.}^2 . \quad (8)$$

Уравнение (8) представляет собой уравнение окружности, центр которой совпадает с гауссовым изображением ℓ'_0. Изображение точки имеет вид круглого диска (рис. 3). Следует заметить, что $r_{сф.}$ кружка рассеяния не зависит от величины ℓ, то есть от положения точки на предметной плоскости. Это означает, что **сферическая аберрация третьего порядка существует в одинаковой мере для всех точек поля зрения** (чего нельзя сказать о сферической аберрации высшего порядка).

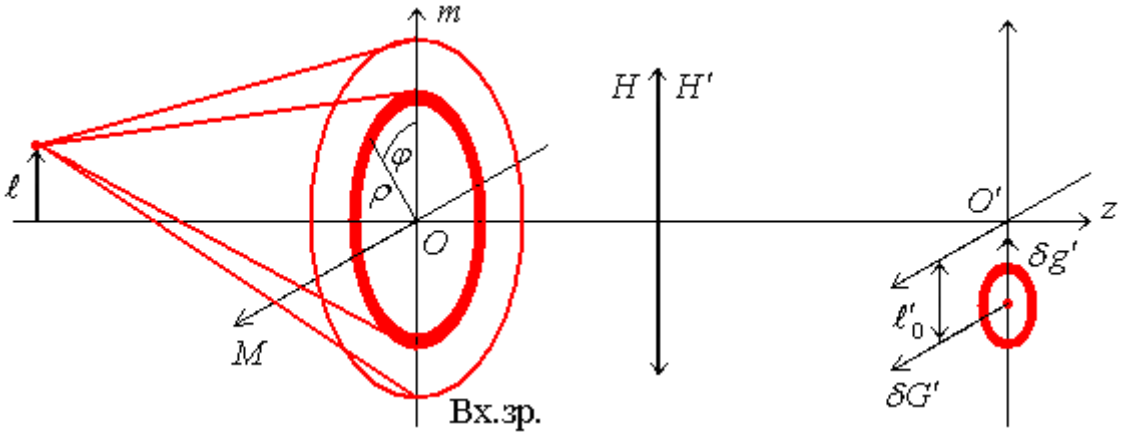
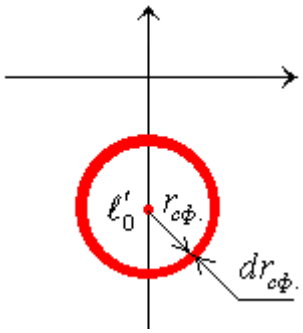


Рис. 3. Сферическая аберрация

Кроме того, как следует из (8), **сферическая аберрация не зависит от положения входного зрачка**.



Существует такое положение плоскости изображения (плоскость наилучшей установки), в которой кружок рассеяния имеет наименьший диаметр.

Найдем распределение освещенности в кружке рассеяния. Из (8) находим:

$$r_{сф.} = A \cdot \rho^3 \quad , \tag{9}$$

отсюда:

$$\rho = \left(\frac{r_{сф.}}{A} \right)^{\frac{1}{3}} \quad ,$$

$$d\rho = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{A} \right) \cdot \left(r_{сф.} \right)^{-\frac{2}{3}} dr_{сф.} \quad \text{, отсюда}$$

$$dr_{сф.} = \frac{3 \cdot A^{\frac{1}{3}}}{\left(r_{сф.} \right)^{-\frac{2}{3}}} \cdot d\rho \quad . \tag{10}$$

Пренебрегая потерями в оптической системе, можно считать, что поток энергии через кольцо $d\rho$ во входном зрачке равен потоку энергии через кольцо $dr_{сф.}$ в кружке рассеяния:

$$d\Phi = E_{вх.зр.} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \ , \tag{11}$$

здесь $E_{вх.зр.}$ – освещенность на входном зрачке; $d\Phi$ – поток энергии через кольцо $d\rho$.

Тогда:

$$E_{кр.} = \frac{d\Phi}{2 \cdot \pi \cdot r_{сф.} \cdot dr_{сф.}} = \frac{E_{вх.зр.} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho}{2 \cdot \pi \cdot A \cdot \rho^3 \cdot dr_{сф.}} = \frac{E_{вх.зр.}}{A \cdot \rho^2} \cdot \frac{d\rho}{dr_{сф.}} =$$

$$= \frac{E_{вх.зр.}}{A \cdot \left(\frac{r_{сф.}}{A}\right)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\left(r_{сф.}\right)^{-\frac{2}{3}}}{3 \cdot A^{\frac{1}{3}}} = \frac{E_{вх.зр.}}{3 \cdot A^{\frac{2}{3}} \cdot r_{сф.}^{\frac{4}{3}}} \tag{12}$$

13.2.2. Аберрация кома

Если $B \neq 0$, а $A = C = D = E = 0$,то говорят, что оптическая система обладает аберрацией кома. Из (6 следует):

$$\begin{aligned} \delta g' &= B \cdot \ell \cdot (3 \cdot m^2 + M^2) \, , \\ \delta G' &= 2 \cdot B \cdot \ell \cdot m \cdot M \ . \end{aligned} \tag{13}$$

Перейдем к полярной системе координат:

$$\delta g' = B \cdot \ell \cdot (3 \cdot \rho^2 \cdot \cos^2\varphi + \rho^2 \cdot \sin^2\varphi) = B \cdot \ell \cdot \rho^2 \cdot \left(2 \cdot \cos^2\varphi + 1\right),$$

$$= B \cdot \ell \cdot \rho^2 \cdot \left(\cos^2\varphi + \cos^2\varphi + 1\right) = B \cdot \ell \cdot \rho^2 \cdot \left(\cos^2\varphi + 1 + 1 - \sin^2\varphi\right) =$$

$$= B \cdot \ell \cdot \rho^2 \cdot \left[2 + \cos\left(2 \cdot \varphi\right)\right] \ ,$$

$$\delta G' = 2 \cdot B \cdot \ell \cdot \rho^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi = B \cdot \ell \cdot \rho^2 \cdot \sin\left(2 \cdot \varphi\right) \ ,$$

или

$$\begin{cases} \delta g' - 2 \cdot B \cdot \ell \cdot \rho^2 = B \cdot \ell \cdot \rho^2 \cdot \cos\left(2 \cdot \varphi\right), \\ \delta G' = B \cdot \ell \cdot \rho^2 \cdot \sin\left(2 \cdot \varphi\right), \end{cases} \tag{14}$$

или

$$\left(\delta g' - 2 \cdot B \cdot \ell \cdot \rho^2\right)^2 + \left(\delta G'\right)^2 = \left(B \cdot \ell \cdot \rho^2\right)^2 = r_k^2 \ ,$$

или

$$\left(\delta g' - 2\cdot r_k\right)^2 + \left(\delta G'\right)^2 = r_k^2 \ . \qquad (15)$$

Выражение (15) представляет собой уравнение окружности, радиус кривизны которой равен $r_k = B\cdot\ell\cdot\rho^2$, а центр ее смещен по оси $\delta g'$ на величину $2\cdot r_k$. Радиус кривизны окружности и смещение ее центра пропорциональны квадрату радиуса кольцевой зоны входного зрачка, следовательно, изображение точки будет представлять собой совокупность ряда окружностей, показанных на рис. 4.

Аберрация кома пропорциональна квадрату диаметра входного зрачка и сказывается тем сильнее, чем больше удалена предметная точка B_0 от оптической оси. Для точки на оси ($\rho = 0$) аберрация кома равна нулю.

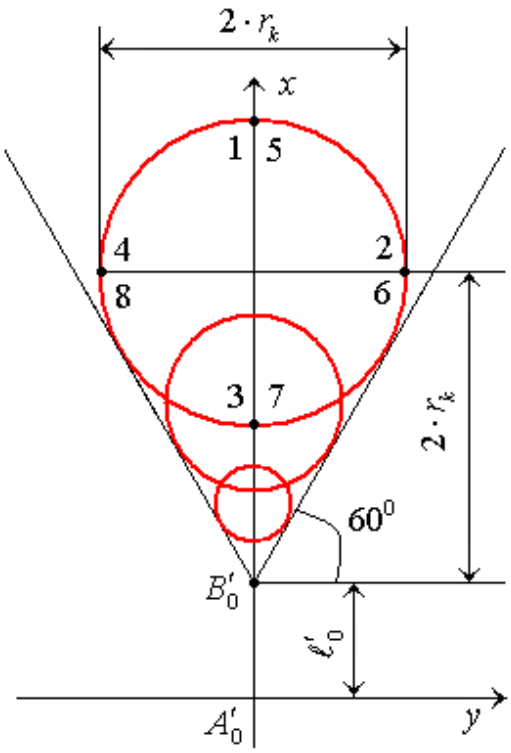


Рис. 4. Фигура изображения точки при наличии комы в оптической системе

Найдем уравнение огибающей указанной совокупности окружностей. Перепишем уравнение (15) в виде:

$$F\left(r_k\right) = \left(\delta g' - 2\cdot r_k\right)^2 + \left(\delta G'\right)^2 - r_k^2 = 0 \ . \qquad (16)$$

Далее находим:

$$\frac{dF}{dr_k} = 2\cdot\left(\delta g' - 2\cdot r_k\right)\cdot\left(-2\right) - 2\cdot r_k = 0 \ ,$$

$$-4\cdot\delta g' + 6\cdot r_k = 0 \text{ , отсюда}$$

$$r_k = \frac{2}{3}\cdot\delta g' \ . \qquad (17)$$

Подставим (17) в (16):

$$\left(\delta g' - 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\delta g'\right)^2 + \left(\delta G'\right)^2 = \frac{4}{9}\cdot\left(\delta g'\right)^2 \ , \qquad (18)$$

$$\frac{1}{9}\cdot\left(\delta g'\right)^2 + \left(\delta G'\right)^2 = \frac{4}{9}\cdot\left(\delta g'\right)^2 \ ,$$

$$\delta g' = \pm\sqrt{3}\cdot\delta G' \ . \qquad (19)$$

Следовательно, огибающими семейства окружностей будут две прямые линии, составляющие с осью $\delta G'$ углы по 60°. Угол между этими прямыми равен также 60° (рис. 5):

$$\sin\Theta = \frac{r_k}{2\cdot r_k} = \frac{1}{2}\text{, то есть } \Theta = 30^0 \ .$$

Вид изображения точки представляет собой яркую точку с постепенно затухающим веером-хвостом. Точка максимальной освещенности в кружке рассеяния при коме не совпадает с идеальным изображением (рис. 6), поэтому кому необходимо исправлять.

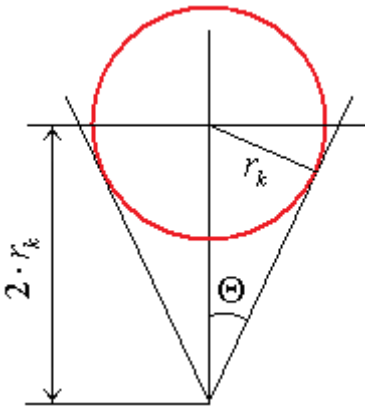


Рис. 5. Геометрия изображения точки при наличии комы

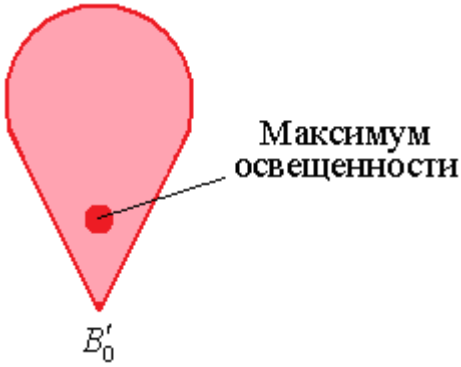


Рис. 6. Распределение освещенности при наличии комы

Возьмем на кольцевой зоне входного зрачка восемь лучей, идущих из точки B (рис. 7), и найдем их точки пересечения с плоскостью изображения по формулам (14). Получим следующие результаты:

Луч №	φ, град.	2φ, град.	$\cos 2\varphi$	$\sin 2\varphi$	$\delta g'$	$\delta G'$
1	0	0	1	0	$3\cdot r_k$	0
2	45	90	0	1	$2\cdot r_k$	r_k

Луч №	φ, град.	2φ, град.	$\cos 2\varphi$	$\sin 2\varphi$	$\delta g'$	$\delta G'$
3	90	180	–1	0	r_k	0
4	135	270	0	–1	$2\cdot r_k$	$-r_k$
5	180	360	1	0	$3\cdot r_k$	0
6	225	450 (90)	0	1	$2\cdot r_k$	r_k
7	270	540 (180)	–1	0	r_k	
8	315	630 (270)	0	–1	$2\cdot r_k$	$-r_k$

Точки пересечения этих лучей отмечены соответствующими цифрами на рис. 7.

Как видно, лучи 1,3,5,7 не имеют сагиттальной слагающей аберрации ($\delta G' = 0$). Меридиональная же слагающая $\delta g'$ для лучей 1 и 5 в три раза больше, чем для лучей 3 и 7. Это значит, что лучи, пересекающие плоскость входного зрачка по диаметру 1…5 (меридиональное сечение) и по диаметру 3…7 (сагиттальное сечение) сходятся попарно в точках плоскости изображения, лежащих на линии $A'_0B'_0$. Для того, чтобы кома для этих лучей была мала, достаточно рассчитать оптическую систему так, чтобы была мала величина $\delta g'$ для лучей 1 и 5.

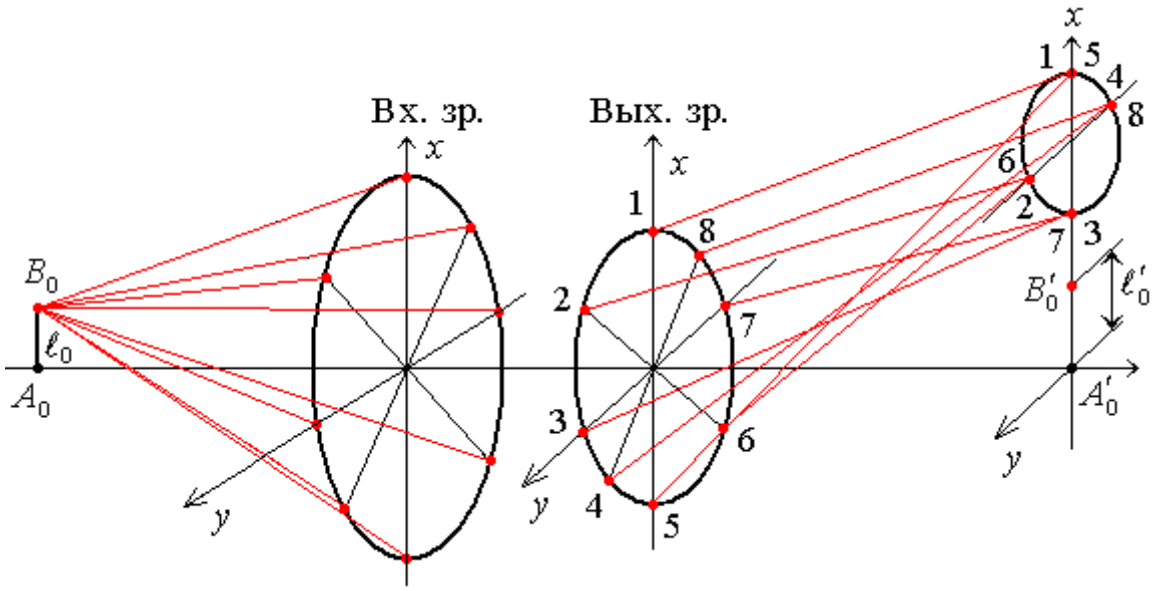


Рис. 6. Ход лучей в оптической системе, обладающей аберрацией кома

Из таблицы также видно: если луч, входящий из точки B_0, совершает по кольцевой зоне на входном зрачке один оборот, то в плоскости изображения этот луч совершает два оборота.

Если $B = 0$ (то есть $r_k = 0$) или имеет малое, допустимое для данного конкретного случая, значение, то говорят, что оптическая система не

обладает комой или имеет малое, допустимое для данного конкретного случая, значение.

Кома – это аберрация широкого наклонного пучка.

13.2.3. Астигматизм и кривизна поверхности изображения

Положим $A = B = E = 0$, а $D \neq 0$ и $C \neq 0$. Тогда из (6) получим:

$$\begin{aligned} \delta g' &= C \cdot \ell^2 \cdot \rho \cdot cos\varphi, \\ \delta G' &= D \cdot \ell^2 \cdot \rho \cdot \sin\varphi. \end{aligned} \qquad (20)$$

Уравнение (20) приводится к виду:

$$\left(\frac{\delta G'}{D \cdot \ell^2 \cdot \rho}\right)^2 + \left(\frac{\delta g'}{C \cdot \ell^2 \cdot \rho}\right)^2 = 1 \ . \qquad (21)$$

Следовательно, при $D \neq 0$ и $C \neq 0$ фигура изображения точки имеет вид эллипса, центр которого совпадает с параксиальным изображением B'_0 (рис. 8). Оси этого эллипса будут равны:

$$\begin{aligned} 2 \cdot a &= 2 \cdot C \cdot \ell^2 \cdot \rho, \\ 2 \cdot b' &= 2 \cdot D \cdot \ell^2 \cdot \rho. \end{aligned} \qquad (22)$$

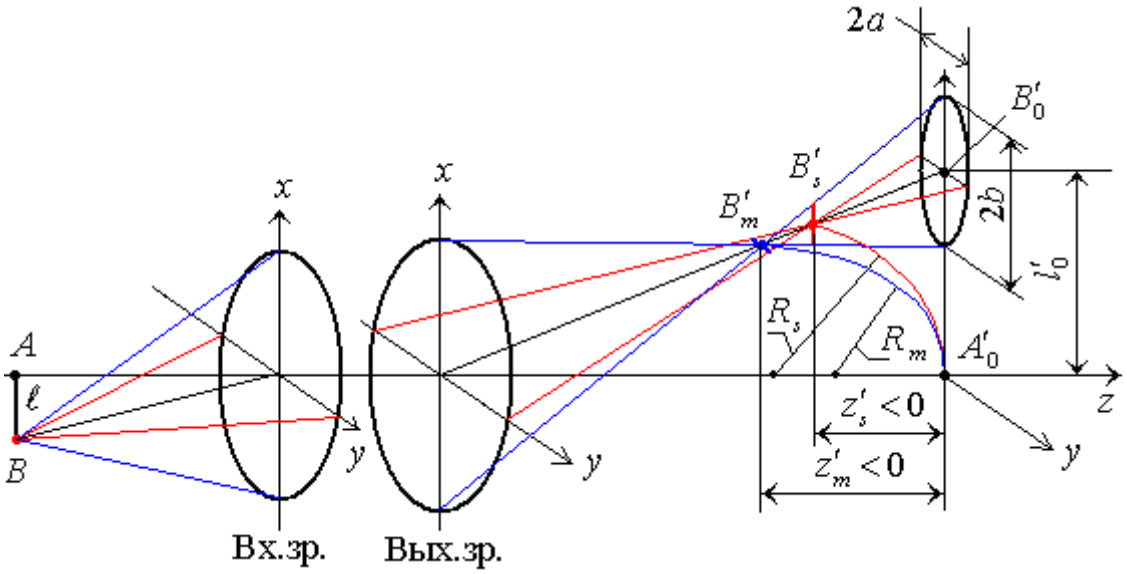


Рис. 8. Ход лучей и изображение точки в системе, обладающей астигматизмом и кривизной поверхности изображения

Рассмотрим вид изображения точки B в различных плоскостях $Q'_{\Delta'}$, параллельных плоскости Q' (совпадающей с плоскостью xoy) и расположенных от нее на расстоянии Δ'.

а) на рис. 9 изображено меридиональное сечение. Из рисунка находим:

$$\frac{\delta g'_{\Delta'} - \delta g'}{\Delta'} = -\frac{m' - \delta g'}{a'} \text{ , отсюда} \tag{23}$$

$$\delta g'_{\Delta'} = \delta g' - \Delta' \cdot \frac{m' - \delta g'}{a'} \approx \delta g' - \frac{\Delta' \cdot m'}{a'} \text{ , так как } \delta g' \ll m' .$$

Так как $m' = \beta_p \cdot m$, где β_p – линейное увеличение в зрачках, то:

$$\delta g'_{\Delta'} \approx \delta g' - \frac{\Delta' \cdot \beta_p}{a'} \cdot m = C \cdot \ell^2 \cdot m - \frac{\Delta' \cdot \beta_p}{a'} \cdot m = \left(C \cdot \ell^2 - \frac{\Delta' \cdot \beta_p}{a'} \right) \cdot m \ ,$$

или

$$\delta g'_{\Delta'} \approx \left(C \cdot \ell^2 - \frac{\Delta' \cdot \beta_p}{a'} \right) \cdot \rho \cdot \cos\varphi \ . \tag{24}$$

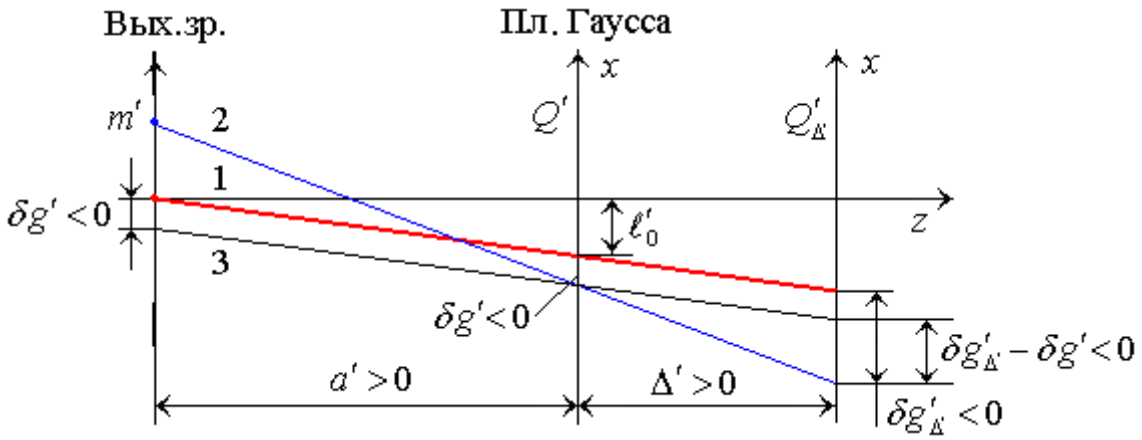


Рис. 9. Меридиональное сечение.
Ход лучей и вид изображения в плоскости дефокусировки $Q'_{\Delta'}$.
Здесь: 1 – главный луч; 2 – произвольный меридиональный луч;
3 – вспомогательная прямая, проведенная параллельно главному лучу 2
через точку пересечения луча 2 с плоскостью Гаусса Q'

Обозначим:

$$\overline{a} = \left(C \cdot \ell^2 - \frac{\Delta' \cdot \beta_p}{a'} \right) \cdot \rho \ . \tag{25}$$

Тогда:

$$\delta g'_{\Delta'} \approx \overline{a} \cdot \cos\varphi \ ; \tag{26}$$

б) рассмотрим сагиттальное сечение: проведем плоскость через главный луч 1 перпендикулярно плоскости xoz. Спроектируем ход лучей в сагиттальном сечении на плоскость yoz (рис. 10).

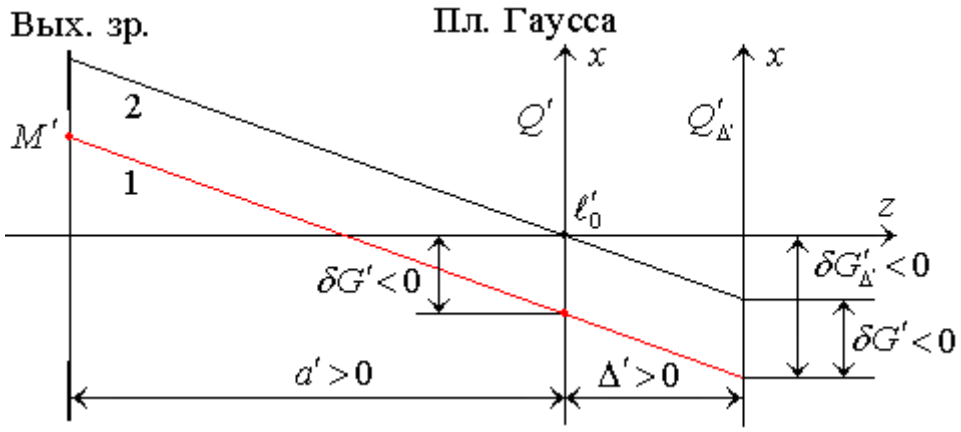


Рис. 10. Сагиттальное сечение.
Ход лучей и вид изображения в плоскости дефокусировки $Q'_{\Delta'}$.
Здесь: 1 – произвольный луч в сагиттальном сечении (проекция на плоскость yoz);
2 – вспомогательная линия, параллельная лучу 1

Из рисунка находим:

$$\frac{\delta G'_{\Delta'} - \delta G'}{\Delta'} = -\frac{M' - \delta G'}{a'} \text{, отсюда} \tag{27}$$

$$\delta G'_{\Delta'} = \delta G' - \Delta' \cdot \frac{M' - \delta G'}{a'} \approx \delta G' - \frac{\Delta' \cdot M'}{a'} \text{, так как } \delta G' \ll M' .$$

Так как $M' = \beta_p \cdot M$, то:

$$\delta G'_{\Delta'} \approx \delta G' - \frac{\Delta' \cdot \beta_p}{a'} \cdot M = D \cdot \ell^2 \cdot M - \frac{\Delta' \cdot \beta_p}{a'} \cdot M = \left(D \cdot \ell^2 - \frac{\Delta' \cdot \beta_p}{a'} \right) \cdot M ,$$

или

$$\delta G'_{\Delta'} \approx \left(D \cdot \ell^2 - \frac{\Delta' \cdot \beta_p}{a'} \right) \cdot \rho \cdot \sin\varphi . \tag{28}$$

Обозначим:

$$\overline{b} = \left(D \cdot \ell^2 - \frac{\Delta' \cdot \beta_p}{a'} \right) \cdot \rho . \tag{29}$$

Тогда:

$$\delta G'_{\Delta'} \approx \overline{b} \cdot \sin\varphi \ . \qquad (30)$$

Выражения (26) и (30) можно представить в виде:

$$\frac{\left(\delta g'_{\Delta'}\right)^2}{\overline{a}^2} + \frac{\left(\delta G'_{\Delta'}\right)}{\overline{b}^2} = 1; \qquad (31)$$

в) исследуем уравнение (31). Допустим, что имеется плоскость $Q'_{\Delta'}$ такая, что ось эллипса $2 \cdot \overline{b} = 0$. При этом расстояние Δ' от плоскости Q' до плоскости $Q'_{\Delta'}$ пусть равно z'_s (рис. 8), то есть при $\overline{b} = 0$ имеем $\Delta' = z'_s$.

Из (29) находим:

$$z'_s = \frac{D \cdot \ell^2 \cdot a'}{\beta_p} \ . \qquad (32)$$

Из (30) находим:

$$\delta G'_{\Delta'} = 0 = \delta G'_s \ . \qquad (33)$$

Это значит, что в плоскости $Q'_s = Q'_{\Delta'}\Big|_{\Delta'=z'_s}$ изображение точки имеет вид прямого отрезка B'_s, лежащего в меридиональной плоскости (рис. 8), то есть в плоскости, проходящей через оптическую ось и главный луч. Длина этого отрезка равна $2 \cdot \delta g'_m$ и определяется из формул (25), (31-33):

$$2 \cdot \delta g'_{\Delta'} = 2 \cdot \overline{a} = \cdot \left(C \cdot \ell^2 - \frac{z'_s \cdot \beta_p}{a'} \right) \cdot \rho =$$

$$= 2 \cdot \left(C \cdot \ell^2 - \frac{\cancel{\beta_p}}{\cancel{a'}} \cdot \frac{D \cdot \ell^2 \cdot \cancel{a'}}{\cancel{\beta_p}} \right) \cdot \rho = 2 \cdot \ell^2 \cdot \left(C - D\right) \cdot \rho \ , \text{ или}$$

$$2 \cdot \delta g'_m = 2 \cdot \ell^2 \cdot \left(C - D\right) \cdot \rho \ ; \qquad (34)$$

г) теперь допустим, что имеется плоскость $Q'_{\Delta'}$ такая, что ось эллипса $2 \cdot \overline{a} = 0$. При этом расстояние Δ' от плоскости Q' до плоскости $Q'_{\Delta'}$ пусть равно z'_m (рис. 8), то есть при $\overline{a} = 0$ имеем $\Delta' = z'_m$.

Из (25) находим:

$$z'_m = \frac{C \cdot \ell^2 \cdot a'}{\beta_p} \ . \qquad (35)$$

Из (26) находим:

$$\delta g'_{\Delta'} = 0 = \delta g'_m \ . \qquad (36)$$

Пусть изображение точки также имеет вид прямого отрезка B'_m, но лежащего в сагиттальной плоскости, то есть в плоскости, проходящей через главный луч и перпендикулярной меридиональной плоскости. Длина этого отрезка равна $2 \cdot \delta G'_s$ и находится из формул (29), (31), (35) и (36):

$$2 \cdot \delta G'_s = 2 \cdot \overline{b} = 2 \cdot \left(D \cdot \ell^2 - \frac{z'_m \cdot \beta_p}{a'} \right) \cdot \rho =$$

$$= 2 \cdot \left(D \cdot \ell^2 - \frac{\cancel{\beta_p}}{\cancel{a'}} \cdot \frac{C \cdot \ell^2 \cdot \cancel{a'}}{\cancel{\beta_p}} \right) \cdot \rho = 2 \cdot \ell^2 \cdot \left(D - C \right) \cdot \rho \text{ , или}$$

$$2 \cdot \delta G'_s = 2 \cdot \ell^2 \cdot \left(D - C \right) \cdot \rho \ ; \qquad (37)$$

д) пусть теперь положение плоскости $Q'_{\Delta'} = Q'_{ср.}$ будет такое, что изображение точки B имеет вид кружка. Для этого необходимо, чтобы уравнение (31) было уравнением окружности, что возможно при условии:

$$\overline{a}^2 = \overline{b}^2 = r_{ср.} \ . \qquad (38)$$

С учетом выражений (25) и (29) получим:

$$\overline{a}^2 - \overline{b}^2 = \left(\overline{a} - \overline{b} \right) \cdot \left(\overline{a} + \overline{b} \right) =$$

$$= \left(C \cdot \ell^2 - D \cdot \ell^2 \right) \cdot \rho \cdot \left(C \cdot \ell^2 + D \cdot \ell^2 - 2 \cdot \frac{\Delta' \cdot \beta_p}{a'} \right) \cdot \rho = 0 \ . \qquad (39)$$

Уравнение (39) имеет два решения:

1. $C \cdot \ell^2 + D \cdot \ell^2 - 2 \cdot \dfrac{\Delta' \cdot \beta_p}{a'} = 0$, отсюда

$$\Delta' = z'_{ср.} = \frac{a'}{\beta_p} \cdot \frac{C \cdot \ell^2 + D \cdot \ell^2}{2} = \frac{a'}{2 \cdot \beta_p} \cdot \left(C + D \right) \cdot \ell^2 \ . \qquad (40)$$

Или с учетом (32) и (35):

$$z'_{ср.} = \frac{z'_m + z'_s}{2} \ . \qquad (41)$$

Диаметр кружка рассеяния обозначим $2 \cdot r_{ср.}$. Тогда с учетом формул (25), (29) и (40) получим:

$$\pm r_{ср.} = \overline{a} = \left(C \cdot \ell^2 - \frac{z'_{ср.} \cdot \beta_p}{a'} \right) \cdot \rho = \left(C \cdot \ell^2 - \frac{\beta_p}{a'} \cdot \frac{a'}{\beta_p} \cdot \frac{C + D}{2} \cdot \ell^2 \right) \cdot \rho \text{ , или}$$

$$\pm r_{ср.} = \frac{C-D}{2} \cdot \ell^2 \cdot \rho \ , \qquad (42)$$

$$\pm r_{ср.} = \overline{b} = \left(D \cdot \ell^2 - \frac{z'_{ср.} \cdot \beta_p}{a} \right) \cdot \rho = \left(D \cdot \ell^2 - \frac{\beta_p}{a'} \cdot \frac{a'}{\beta_p} \cdot \frac{C+D}{2} \cdot \ell^2 \right) \cdot \rho \ , \text{ или}$$

$$\pm r_{ср.} = \frac{D-C}{2} \cdot \ell^2 \cdot \rho \ , \qquad (43)$$

таким образом, можно записать

$$2 \cdot r_{ср.} = (C-D)\ell^2 \cdot \rho \ . \qquad (44)$$

2. $C \cdot \ell^2 - D \cdot \ell^2 = 0$, то есть $C = D$. (45)

При $C = D$ из (44) получаем $r_{ср.} = 0$, то есть точка B изображается точкой (рис. 11).

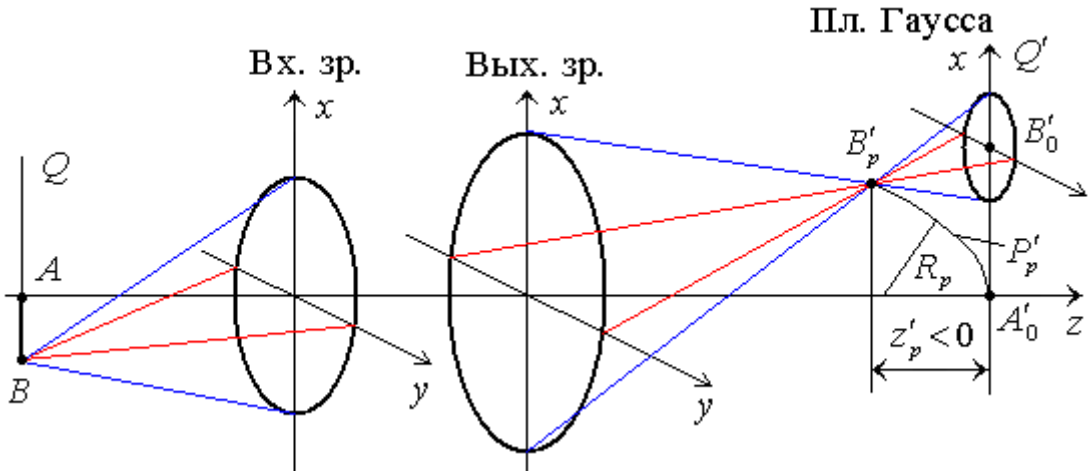


Рис. 11. Изображение точки, образуемое оптической системой, обладающей только аберрацией кривизны поверхности изображения

Из (32) и (35) следует:

$$z'_s = \frac{D \cdot \ell^2 \cdot a'}{\beta_p} = \frac{C \cdot \ell^2 \cdot a'}{\beta_p} = z'_m = z'_p \qquad (46)$$

В плоскости изображения Q' при этом получится пятно круглой формы, диаметр которого $2 \cdot r_p$ из уравнения:

$$\frac{(\delta g')^2}{\left(C \cdot \ell^2 \cdot \rho\right)^2} + \frac{(\delta G'')^2}{\left(D \cdot \ell^2 \cdot \rho\right)^2} = 1 \ ,$$

далее:

$$\left(\delta g'\right)^2 + \left(\delta G'\right)^2 = \left(C \cdot \ell^2 \cdot \rho\right)^2 = \left(D \cdot \ell^2 \cdot \rho\right)^2 = r_p^2 \ ,$$

отсюда

$$2 \cdot r_p = 2 \cdot C \cdot \ell^2 \cdot \rho = 2 \cdot D \cdot \ell^2 \cdot \rho \ . \qquad (47)$$

Таким образом, можно сделать следующие выводы об изображении, образуемом оптической системой, у которой коэффициенты $A = B = E = 0$, а $D \neq 0$ и $C \neq 0$:

А. Каждая точка предметной плоскости Q, перпендикулярной к оптической оси, изображается в виде двух взаимно перпендикулярных линий B'_m и B'_s. Аберрация эта носит название астигматизма (отсутствие точечного изображения даже в узких пучках). Расстояние $B'_m B'_s$ между этими астигматическими изображениями называется астигматической разностью, проекция которой на оптическую ось равна:

$$пр.\, B'_m B'_s = z'_s - z'_m = \frac{D \cdot \ell^2 \cdot a'}{\beta_p} - \frac{C \cdot \ell^2 \cdot a'}{\beta_p} = \left(D - C\right) \cdot \frac{\ell^2}{\beta_p} \cdot a' \ . \qquad (48)$$

Б. Величины z'_s и z'_m, определяющие удаление астигматических изображений B'_s и B'_m от плоскости идеального изображения Q', пропорциональны квадрату расстояния ℓ предметной точки B плоскости Q от оптической оси. Поэтому астигматические изображения B'_s и B'_m предметных точек B плоскости Q в пространстве изображений будут расположены на чашеобразных поверхностях P'_m (поверхность меридиональных изображений B'_m) и P'_s (поверхность сагиттальных изображений B'_s).

Представим уравнение поверхности P'_m в меридиональном сечении в виде:

$$x'^{\,2}_m = 2 \cdot R_m \cdot z'_m + \sum_{i=2}^{k} c_i \cdot z'^{\,i}_m \ . \qquad (49)$$

При малых значениях z'_m можно положить, что $z'^{\,i}_m \to 0$ и $x'_m \approx \ell'_0$, тогда

$$x'^{\,2}_m \approx 2 \cdot R_m \cdot z'_m \text{, отсюда} \qquad (50)$$

$$\frac{1}{R_m} \approx \frac{2 \cdot z'_m}{x'^{\,2}_m} \approx \frac{2 \cdot z'_m}{\ell'^{\,2}_0} = \frac{2 \cdot z'_m}{\beta^2 \cdot \ell^2} \ , \qquad (51)$$

где β – увеличение в сопряженных плоскостях Q и Q'. Аналогично находим:

$$\frac{1}{R_s} \approx \frac{2 \cdot z'_s}{x'^2_s} \approx \frac{2 \cdot z'_s}{\ell'^2_0} = \frac{2 \cdot z'_s}{\beta^2 \cdot \ell^2} \ . \qquad (52)$$

В. Между поверхностями P'_m и P'_s существует поверхность $P'_{ср.}$, на которой вместо точечного изображения предметной точки B получается круглое пятно $B'_{ср.}$. Расстояние от плоскости изображения Q' до центра этого пятна $B'_{ср.}$ определяется отрезком $z'_{ср.}$, который равен:

$$z'_{ср.} = \frac{z'_m + z'_s}{2} = \frac{D + C}{2} \cdot \frac{\ell^2}{\beta_p} \cdot a' \ . \qquad (53)$$

Диаметр $2 \cdot r'_{ср.}$ указанного пятна определяется выражением:

$$2 \cdot r'_{ср.} = 2 \cdot C \cdot \ell^2 \cdot \rho = 2 \cdot D \cdot \ell^2 \cdot \rho \ . \qquad (54)$$

Поверхность $P'_{ср.}$ называется поверхностью изображения средней кривизны.

Г. Если оптическая система рассчитана так, что коэффициенты $D \neq 0$ и $C \neq 0$, а $A = B = E = 0$, то астигматическая разность $z'_s - z'_m = 0$ и изображением предметной точки B плоскости Q будет точка B'_p (рис. 11). В этом случае изображения всех точек плоскости Q будут также точками, но расположатся они на поверхности P'_p, называемой поверхностью Петцваля. Удаление любой точки B'_p от поверхности Q' определяется отрезком:

$$z'_p = z'_s = z'_m = \frac{D \cdot \ell^2 \cdot a'}{\beta_p} = \frac{C \cdot \ell^2 \cdot a'}{\beta_p} \ . \qquad (55)$$

Поверхность Петцваля является параболоидом вращения. Радиус кривизны R_p при вершине этой поверхности равен:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{2 \cdot z'_p}{\ell^2 \cdot \beta^2} = \frac{2}{\ell^2 \cdot \beta^2} \cdot \frac{D \cdot \ell^2 \cdot a'}{\beta_p} = \frac{2 \cdot D \cdot a'}{\beta_p \cdot \beta^2} = \frac{2 \cdot C \cdot a'}{\beta_p \cdot \beta^2} \ . \qquad (56)$$

Идеальная оптическая система образует изображения отдельных точек плоскости Q, перпендикулярной к оптической оси, также в виде точек плоскости Q', перпендикулярной к оптической оси. Очевидно, для этого необходимы два условия:

- условие точечного изображения (отсутствие астигматизма) $C = D$;
- условие плоского изображения (отсутствие кривизны поля) $R_p = \infty$, откуда

$$C = D = 0 \ . \qquad (57)$$

Соблюдение при расчете условия (57) гарантирует получение плоского изображения с резким изображением его отдельных точек. Оптическая система, в которой отсутствует астигматизм ($C = D$) и кривизна поля ($R_p = \infty$), называется анастигматической или анастигматом.

13.2.4. Дисторсия

Оптическая система обладает дисторсией, если $A = B = C = D = 0$ и $E \neq 0$. Обозначая при этом слагающие поперечной аберрации через $\delta g'_\partial$ и $\delta G'_\partial$, из уравнения (6) получим:

$$\begin{aligned} \delta g'_\partial &= E \cdot \ell^3 \ , \\ \delta G'_\partial &= 0 \ . \end{aligned} \qquad (58)$$

Так как величины $\delta g'_\partial$ и $\delta G'_\partial$ не зависят от координат m и M, или ρ и φ, то, следовательно, все лучи, выходящие из точки B плоскости Q, сходятся в одной точке B' плоскости Q', которая находится на расстоянии $E \cdot \ell^3$ от места идеального изображения B'_0 (рис. 12).

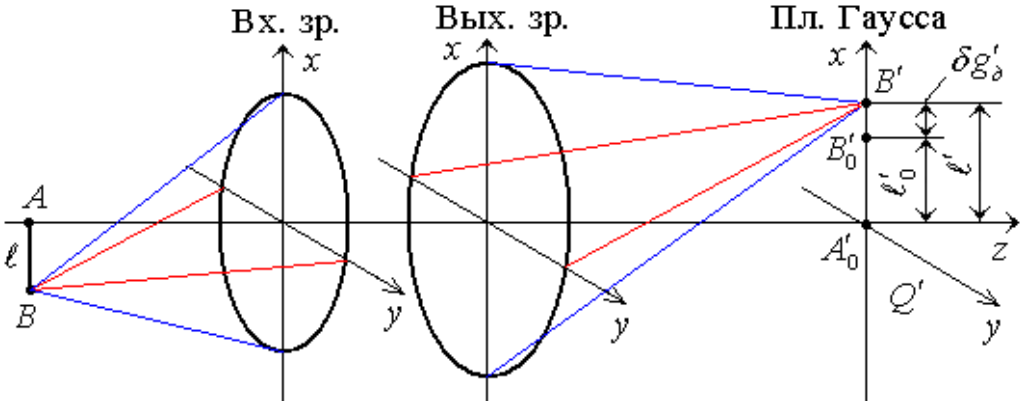


Рис. 12. Изображение точки при наличии в оптической системе аберрации дисторсии

Отрезок ℓ изображается отрезком ℓ', равным:

$$\ell' = \ell'_0 + \delta g'_\partial = \beta \cdot \ell + E \cdot \ell^3 \ . \qquad (59)$$

Масштаб изображения $\bar{M}$ равен отношению линейного размера изображения к линейному размеру самого предмета. Из формулы (59) для величины $\bar{M}$ получаем следующее значение:

$$\bar{M} = \frac{\ell'}{\ell} = \beta + E \cdot \ell^2 \ . \qquad (60)$$

Так как второе слагаемое для разных величин ℓ имеет разное значение, то, следовательно, при наличии дисторсии масштаб изображения в плоскости изображения не является постоянным.

Например, если в плоскости Q начерчен квадрат (рис. 13, а), то его изображением при $E > 0$ ($\bar{M} > \beta$) будет вид, показанный на рис. 13, *б*, а при $E < 0$ ($\bar{M} < \beta$) – на рис. 13, *в*. Обычно дисторсию измеряют в процентах. Из формулы (59) получим:

$$V = \frac{\ell' - \ell'_0}{\ell'_0} \cdot 100\% = \frac{\delta g'_\partial}{\ell'_0} \cdot 100\% = \frac{E \cdot \ell^3}{\ell'_0} \cdot 100\% = \frac{E \cdot \ell^2}{\beta} \cdot 100\%. \qquad (61)$$

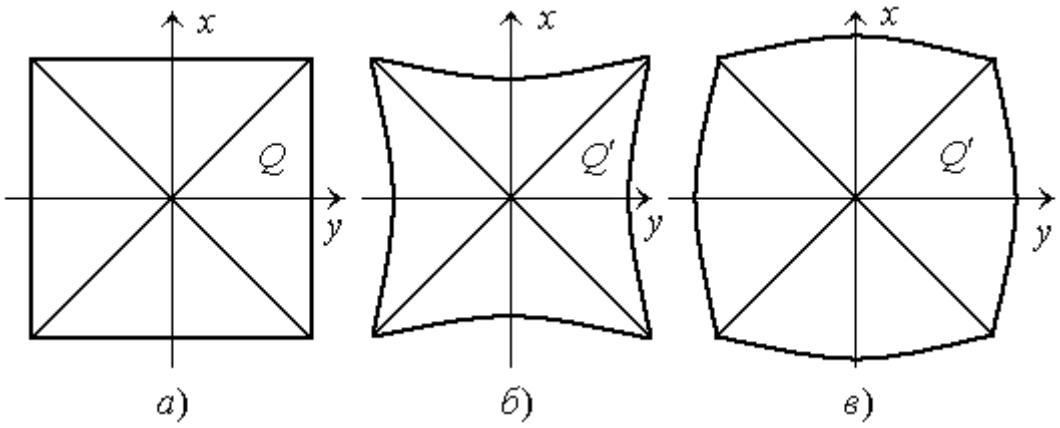


Рис. 13. Изображение квадрата плоскости Q (а) при положительной дисторсии (б) и отрицательной дисторсии (в)

Оптическая система, в которой отсутствует дисторсия, то есть $E = 0$, называется **ортоскопической**.

13.3. Анаберрационные поверхности

13.3.1. Преломляющие поверхности

Пусть преломляющая поверхность разделяет две среды с показателями преломления n и n' (рис. 14). Найдем уравнение этой поверхности, когда она образует безаберрационное изображение точки A, находящейся на оптической оси и удаленной от поверхности на расстояние s, в точке A', находящейся на расстоянии s'. Очевидно, что это будет поверхность вращения.

Рассмотрим произвольный луч AMA', который пересекает поверхность в точке M с координатами x и z.

Запишем закон Ферма для лучей AMA' и AOA':

$$-n \cdot \sigma + n' \cdot \sigma' = -n \cdot s + n' \cdot s', \qquad (62)$$

где $l < 0$ – длина луча AM, $l' > 0$ – длина луча MA'.

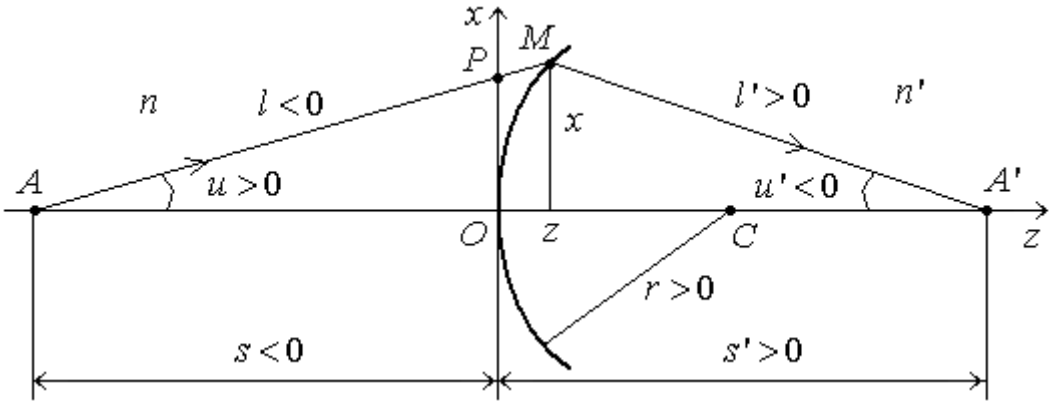


Рис. 14. Анаберрационная преломляющая поверхность

Из рис. 14 имеем:

$$l = \sqrt{x^2 + (s - z)^2} \ , \qquad (63\text{-}1)$$

$$l' = \sqrt{x^2 + (s' - z)^2} \ . \qquad (63\text{-}2)$$

Подставим (63) в (62):

$$-n \cdot \sqrt{x^2 + (s - z)^2} + n' \cdot \sqrt{x^2 + (s' - z)^2} = -n \cdot s + n' \cdot s' \ . \qquad (64)$$

Воспользуемся формулой 6.13 параксиальной оптики:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \ . \qquad (65)$$

Рассмотрим случай, когда точка A находится в бесконечности, то есть $s = \infty$, тогда

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{r} \ , \text{ отсюда}$$

$$s' = f' = \frac{n'}{n' - n} \cdot r \ . \qquad (66)$$

Перепишем (62) в виде:

$$-n \cdot (l - s) = -n' \cdot (l' - s') \ , \text{ или}$$

$$n \cdot (l - s) = n' \cdot (l' - s') \ . \qquad (67)$$

Проведем из точки A сферический волновой фронт радиусом $(-s)$ через вершину поверхности O.

Тогда величина $(l - s)$ есть длина отрезка луча PM от сферического фронта до поверхности. При $s \to \infty$ фронт становится плоским и совпа-

дающим с координатной плоскостью $x\,o\,y$; в этом случае, как видно из рис. 14, $(l-s)=-z$ Тогда условие (67) для бесконечно удаленной предметной точки A с учетом (63-2) и (66) приобретает вид:

$$-n\cdot z=n'\cdot\left(\sqrt{x^2+(f'-z)^2}-f'\right) \text{ или}$$

$$n\cdot z+n'\cdot\sqrt{x^2+\left(f'-z\right)^2}-n'\cdot f'=0\ . \qquad (68)$$

Преобразуем уравнение (68):

$$n'^2\cdot\left[x^2+(f'-z)^2\right]=\left(n'\cdot f'-n\cdot z\right)^2\ ,$$

$$n'^2x^2+\cancel{n'^2\cdot f'^2}-\underline{2\cdot n'^2\cdot f'\cdot z}+\underline{\underline{n'^2\cdot z^2}}=\cancel{n'^2\cdot f'^2}-\underline{2\cdot n\cdot n'\cdot f'\cdot z}+\underline{\underline{n^2\cdot z^2}}\ ,$$

$$n'^2\cdot x^2=2\cdot n'\cdot f'\cdot z\cdot(n'-n)-(n'^2-n^2)\cdot z^2\ ,$$

$$x^2=2\cdot\left(1-\frac{n}{n'}\right)\cdot f'\cdot z-\left[1-\left(\frac{n}{n'}\right)^2\right]\cdot z^2\ . \qquad (69)$$

В (69) подставим (66):

$$x^2=2\cdot\frac{n'-n}{n'}\cdot\frac{n'}{n'-n}\cdot r\cdot z+\left[\left(\frac{n}{n'}\right)^2-1\right]\cdot z^2\ \text{, или}$$

$$x^2=2\cdot r\cdot z+\left[\left(\frac{n}{n'}\right)^2-1\right]\cdot z^2\ \text{, или} \qquad (70)$$

$$x^2=2\cdot r\cdot z+\left[e^2-1\right]\cdot z^2\ , \qquad (71)$$

где $e=\dfrac{n}{n'}$. Уравнение (71) является уравнением поверхности вращения второго порядка, свойства которой были подробно рассмотрены в разделе 9.

13.3.2. Отражающие поверхности

Рассмотрим отражающие поверхности (рис. 15). Падающий луч AM от точки N падающего волнового фронта, проведенного через вершину поверхности O, пройдет путь NM до отражающей поверхности за время Δt. За это же время отраженный осевой луч AO пройдет путь OO'. Поскольку $n=n'$, то, очевидно, $OO'=MN$. Проведем через точки O' и M отраженный волновой фронт. Очевидно, что $A'M=A'O'=\sigma$. Тогда условие Ферма запишется в виде:

$$s-l=l'-s'\ \text{, или}$$

$$l + l' = s + s' \ . \tag{72}$$

$$\sqrt{x^2 + (s - z)^2} + \sqrt{x^2 + (s' - z)^2} = s + s' \ . \tag{73}$$

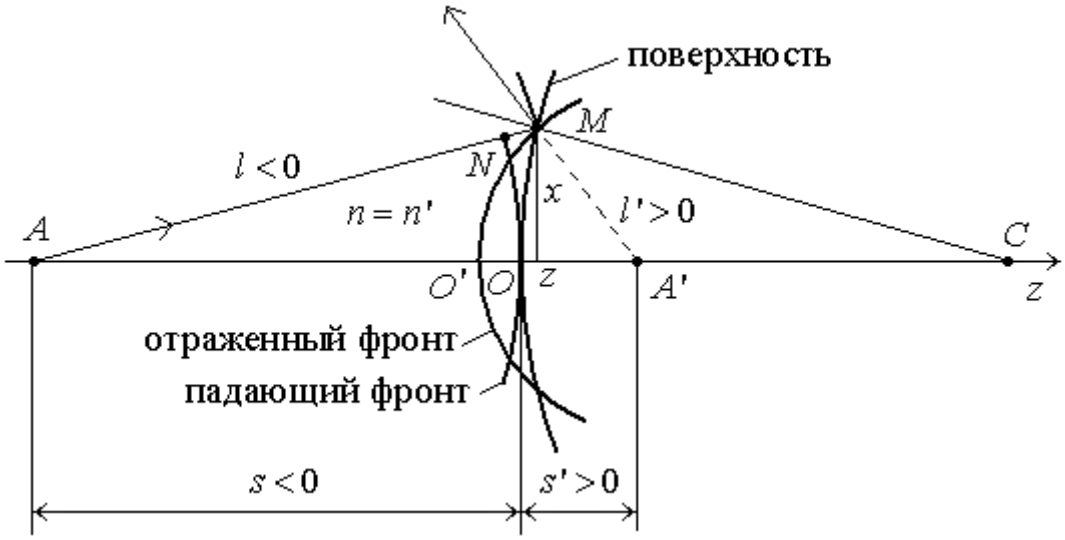


Рис. 15. Анаберрационная отражающая поверхность

Преобразуем уравнение (73):

$$x^2 + (s - z)^2 + x^2 + (s' - z)^2 + 2 \cdot \sqrt{x^2 + (s - z)^2} \cdot \sqrt{x^2 + (s' - z)^2} = (s + s')^2 \ ,$$

$$\underline{x^2} + \cancel{s^2} - 2 \cdot s \cdot z + \underline{\underline{z^2}} + \underline{x^2} + \cancel{s'^2} - 2 \cdot s' \cdot z + \underline{\underline{z^2}} - \cancel{s^2} - 2 \cdot s \cdot s' - \cancel{s'^2} =$$

$$= -2 \cdot \sqrt{x^2 + (s - z)^2} \cdot \sqrt{x^2 + (s' - z)^2} \ ,$$

$$2 \cdot x^2 + \underline{2 \cdot z^2} - \underline{2 \cdot s \cdot z} - \underline{\underline{2 \cdot s' \cdot z}} - \underline{\underline{2 \cdot s \cdot s'}} = -2 \cdot \sqrt{x^2 + (s - z)^2} \cdot \sqrt{x^2 + (s' - z)^2} \ ,$$

$$x^2 + z \cdot (z - s) - s' \cdot (z + s) = -\sqrt{x^2 + (s - z)^2} \cdot \sqrt{x^2 + (s' - z)^2} \ ,$$

$$\cancel{x^4} + z^2 \cdot (z - s)^2 + s'^2 \cdot (z + s)^2 +$$

$$+ 2 \cdot z \cdot x^2 \cdot (z - s) - 2 \cdot z \cdot s' \cdot (z^2 - s^2) - 2 \cdot x^2 \cdot s' \cdot (z + s) =$$

$$= \cancel{x^4} + x^2 \cdot (s - z)^2 + x^2 \cdot (s' - z)^2 + (s - z)^2 \cdot (s' - z)^2 ,$$

$$z^2 \cdot (z^2 - 2 \cdot z \cdot s + s^2) + s'^2 \cdot (z^2 + 2 \cdot z \cdot s + s^2) +$$

$$+ 2 \cdot z^2 \cdot x^2 - 2 \cdot z \cdot x^2 \cdot s - 2 \cdot z^3 \cdot s' + 2 \cdot z \cdot s' \cdot s^2 - 2 \cdot z \cdot x^2 \cdot s' - 2 \cdot x^2 \cdot s' \cdot s =$$

$$= x^2 \cdot (s^2 - 2 \cdot z \cdot s + z^2) + x^2 \cdot (s'^2 - 2 \cdot z \cdot s' + z^2) +$$

$$+ (s^2 - 2 \cdot z \cdot s + z^2) \cdot (s'^2 - 2 \cdot z \cdot s' + z^2) \ ,$$

$$\cancel{z^4} - \cancel{2 \cdot z^3 \cdot s} + z^2 \cdot s^2 + \cancel{z^2 \cdot s'^2} + 2 \cdot z \cdot s'^2 \cdot s + s'^2 \cdot s +$$

$$+ \cancel{2 \cdot z^2 \cdot x^2} - 2 \cdot z \cdot x^2 \cdot s - \underline{2 \cdot z^3 \cdot s'} + 2 \cdot z \cdot s' \cdot s^2 - \underline{\underline{2 \cdot z \cdot x^2 \cdot s'}} - 2 \cdot x^2 \cdot s' \cdot s =$$

$$= x^2 \cdot s^2 - 2 \cdot z \cdot x^2 \cdot s + \cancel{z^2 \cdot x^2} + x^2 \cdot s'^2 - \underline{\underline{2 \cdot z \cdot x^2 \cdot s'}} + \cancel{z^2 \cdot x^2} +$$

$$+ s'^2 \cdot s^2 - 2 \cdot z \cdot s'^2 \cdot s + \cancel{z^2 \cdot s'^2} - 2 \cdot z \cdot s' \cdot s^2 + 4 \cdot z^2 \cdot s' \cdot s - \underline{2 \cdot z^3 \cdot s'} +$$

$$+ z^2 \cdot s^2 - \cancel{2 \cdot z^3 \cdot s} + \cancel{z^4},$$

$$\cancel{z^2 \cdot s^2} + \underline{\underline{2 \cdot z \cdot s'^2 \cdot s}} + \cancel{s'^2 \cdot s} - \cancel{2 \cdot z \cdot x^2 \cdot s} + \underline{\underline{\underline{\underline{2 \cdot z \cdot s' \cdot s^2}}}} - \underline{2 \cdot x^2 \cdot s' \cdot s} =$$

$$= \underline{x^2 \cdot s^2} - \cancel{2 \cdot z \cdot x^2 \cdot s} + \underline{x^2 \cdot s'^2} + \cancel{s'^2 \cdot s^2} - \underline{\underline{2 \cdot z \cdot s'^2 \cdot s}} -$$

$$- \underline{\underline{\underline{\underline{2 \cdot z \cdot s' \cdot s^2}}}} + 4 \cdot z^2 \cdot s' \cdot s + \cancel{z^2 \cdot s^2},$$

$$x^2 \cdot (s^2 + s'^2 + 2 \cdot s' \cdot s) = 4 \cdot z \cdot s'^2 \cdot s + 4 \cdot z \cdot s' \cdot s^2 - 4 \cdot z^2 \cdot s' \cdot s,$$

$$x^2 \cdot (s' + s)^2 = 4 \cdot z \cdot s' \cdot s \cdot (s' + s) - 4 \cdot z^2 \cdot s' \cdot s,$$

$$x^2 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{s' \cdot s}{s' + s} \cdot z - 4 \cdot \frac{s' \cdot s}{(s' + s)^2} \cdot z^2, \tag{74}$$

(74) – уравнение линии второго порядка, в котором

$$2 \cdot \frac{s' \cdot s}{s' + s} = r \text{ – радиус кривизны при вершине,} \tag{75}$$

$$-4 \cdot \frac{s' \cdot s}{(s' + s)^2} = e^2 - 1. \tag{76}$$

Преобразуем выражение (76):

$$e^2 = 1 - 4 \cdot \frac{s' \cdot s}{(s' + s)^2} = \frac{s'^2 + 2 \cdot s' \cdot s - 4 \cdot s' \cdot s}{(s' + s)^2} = \frac{(s' - s)^2}{(s' + s)^2}, \text{ или}$$

$$e = \varepsilon \cdot \frac{s' - s}{s' + s}, \text{ где } \varepsilon = \pm 1. \tag{77}$$

По определению $e > 0$, исходя из этого выбирается знак ε в (77).
Из (77) находим:

$$e \cdot s' + e \cdot s = \varepsilon \cdot s' - \varepsilon \cdot s, \text{ или}$$

$$s' \cdot (e - \varepsilon) = -s \cdot (e + \varepsilon), \text{ или}$$

$$s' = -s \cdot \frac{e + \varepsilon}{e - \varepsilon} = s \cdot \frac{\varepsilon + e}{\varepsilon - e}. \tag{78}$$

Подставим (78) в (75):

$$r = 2 \cdot \frac{s' \cdot s}{s' + s} = 2 \cdot \frac{\dfrac{\varepsilon + e}{\varepsilon - e} \cdot s \cdot s}{\dfrac{\varepsilon + e}{\varepsilon - e} \cdot s + s} =$$

$$= 2 \cdot \frac{s \cdot (\varepsilon + e)}{\varepsilon + e + \varepsilon - e} = 2 \cdot \frac{s \cdot (e + \varepsilon)}{2 \cdot \varepsilon} = s \cdot (1 + \varepsilon \cdot e) \ ,$$

отсюда

$$s_{1,2} = \frac{r}{1 \pm e} \ . \qquad (79)$$

Отрезки s_1 и s_2 определяют положение сопряженных точек.

Рассмотрим несколько случаев:

а) положим $s' = s$,

тогда из (77) следует, что $e = 0$, а из (79) получаем:

$$s = s' = r \ ,$$

а это значит, что центр кривизны сферы ($e = 0$) изображается сам в себя ($r = s = s'$), то есть является апланатической точкой;

б) положим $s \to -\infty$,

тогда из (77) и (75) следует:

$$e = \varepsilon \cdot \frac{\frac{s'}{s} - 1}{\frac{s'}{s} + 1} = -\varepsilon = +1 \ ,$$

$$r = 2 \cdot \frac{s' \cdot s}{s' + s} = 2 \cdot \frac{s'}{\frac{s'}{s} + 1} = 2 \cdot s' = 2 \cdot f' \ .$$

Полученная кривая представляет собой параболу, фокус которой ($s' = f' = \frac{r}{2}$) сопряжен с бесконечностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герцбергер М. Современная геометрическая оптика. – М.: ИЛ, 1962. – 487 с.
2. Джеррад А., Берч Дж.М. Введение в матричную оптику. – М.: Мир, 1978. – 341 с.
3. Турыгин И.А. Прикладная оптика. 1 и 2 том. – М.: Машиностроение, 1966.
4. Апенко М.И., Дубовик А.С. и др. Прикладная оптика. – М.: Недра, 1982. – 612 с.
5. Апенко М.И., Дубовик А.С. Прикладная оптика. – М.: Наука, 1971. – 392 с.
6. Бегунов Б.Н., Заказнов Н.П. и др. Теория оптических систем. – М.: Машиностроение, 1981. – 432 с.
7. Агапов Н.А., Ашихмин В.Н. и др. Практикум по автоматизации проектирования оптико-механических приборов / под ред. В.В. Малинина. – М.: Машиностроение, 1989. – 272 с.
8. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука, 1985. – 751 с.
9. Чуриловский В.Н. Теория оптических систем. – М.: Машиностроение, 1966. – 563 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ 3
1.1. Экспериментальные законы геометрической оптики 3
1.2. Полное внутреннее отражение 12
1.3. Явления отражения и преломления света с точки зрения волновой теории 14
1.4. Закон преломления с точки зрения принципа Ферма 16
2. ЗАКОН ПРЕЛОМЛЕНИЯ В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ 18
3. СФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ 23
3.1. Расчет хода лучей через сферическую поверхность 23
3.2. Апланатические точки 33
3.3. Область параксиальных лучей 38
4. РАСЧЕТ ХОДА ЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ 40
4.1. Ход луча через одну поверхность 40
4.2. Ход луча через систему поверхностей 47
4.3. Параксиальное приближение 54
5. МАТРИЧНАЯ ОПТИКА. ЧАСТЬ 1 59
5.1. Параксиальное приближение 59
5.2. Одна поверхность 59
5.2.1. Преломление 59
5.2.2. Отражение 63
5.2.3. Перемещение луча 65
5.3. Правило знаков 66
5.4. Система поверхностей 67
5.5. Матричное описание свойств ОС 68
5.6. Система плоских поверхностей 74
5.7. Система тонких линз 75
5.8. Тонкая линза в воздухе 76
6. МАТРИЧНАЯ ОПТИКА. ЧАСТЬ 2 79
6.1. Главные точки 79
6.2. Узловые точки 82
6.3. Матрица преобразования лучей между фокальными плоскостями 84
6.4. Матрица преобразования лучей между сопряженными плоскостями, положение которых задано относительно главных плоскостей 86

6.5. Матрица преобразования лучей между сопряженными плоскостями, положение которых задано относительно фокальных плоскостей 87
6.6. Матрица преобразования лучей между сопряженными плоскостями, положение которых задано относительно узловых плоскостей 88
6.7. Выводы 90
6.8. Гауссова оптика для частных типов оптических систем 91
6.8.1. Одна поверхность 92
6.8.1.1. Преломляющая поверхность 92
6.8.1.2. Отражающая поверхность 92
6.8.2. Тонкая линза в воздухе 93
6.8.3. Система из двух тонких линз в воздухе (дуплет) 95
6.8.4. Толстая линза в воздухе 96
6.9. Примеры 100
6.9.1. Расчет телескопической системы 100
6.9.2. Расчет системы типа телескоп-микроскоп 101
6.9.3. Расчет оптической схемы проекционного объектива 104
6.10. Некоторые приложения 105
6.10.1. Линейное увеличение системы поверхностей 105
6.10.2. Инвариант Лагранжа-Гельмгольца 108
7. МАТРИЧНАЯ ОПТИКА. СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ 109
8. РАСЧЕТ ХОДА ЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА 115
8.1. Декартовые поверхности 120
8.1.1. Декартовые отражающие поверхности 120
8.1.1.1. Эллипсоид 126
8.1.1.2. Параболоид 127
8.1.1.3. Гиперболоид 127
8.1.1.4. Зеркальные оптические системы 128
8.1.2. Декартовые преломляющие поверхности 130
8.1.2.1. Декартовые преломляющие поверхности с $e = \frac{n'}{n}$ 130
8.1.2.1.1. Декартовые преломляющие поверхности с $e = \frac{n_2}{n_1} > 1$ 137
8.1.2.1.2. Декартовые преломляющие поверхности с $e = \frac{n_2}{n_1} < 1$ 138

8.1.2.2. Декартовые преломляющие поверхности с $e = \frac{n_1}{n_2}$ 140
8.2. Отражение от плоского зеркала.....146
8.3. Преломление лучей плоской поверхностью 147
8.4. Прохождение лучей через плоскопараллельную пластину, расположенную в воздухе 149
8.5. Преломление луча сферой.....151
9. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ХОДА ЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОБРАЗОМ РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ.....159
9.1. Децентрировки 1-го рода.....160
9.2. Децентрировки 2-го рода.....162
9.3. Децентрировки 3-го рода.....163
10. ГЛАЗ 165
10.1. Общие сведения.....165
10.2. Оптическая система глаза 172
10.2.1. Матрица конструктивных параметров глаза.....173
10.2.2. Схематичный нормальный глаз по Гульстранду 174
10.2.3. Матрица конструктивных параметров глаза.....174
10.2.4. Вклад роговицы в общую оптическую силу глаза 175
10.3. Поле зрения глаза.....176
10.4. Угловой предел разрешения глаза.....176
10.5. Адаптация глаза.....178
10.6. Чувствительность глаза 180
10.7. Стереоскопическое зрение 183
10.8. Недостатки оптической системы глаза и их коррекция.....187
10.8.1. Миопия 187
10.8.2. Гиперметропия 188
10.8.3. Компенсация аметропии глаза в оптическом визуальном приборе.....189
10.8.4. Астигматизм глаза 191
10.8.5. Афакический глаз.....191
10.9. Глубина резкости в пространстве предметов при наблюдении невооруженным глазом.....192
11. АПЕРТУРНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕНТРИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЗ 196
11.1. Апертурная диафрагма 196
11.2. Полевая диафрагма 202
11.3. Виньетирующая диафрагма 204

11.4. Зрачки и люки в некоторых типах систем 207
11.4.1. Фотообъектив 207
11.4.1.1. Зрачки и люки фотообъектива.....207
11.4.1.2. Основные характеристики фотообъектива 209
11.4.1.2.1. Фокусное расстояние.....209
11.4.1.2.2. Относительное отверстие 209
11.4.1.2.3. Угловое поле 211
11.4.1.3. Геометрическая глубина изображаемого пространства.....211
11.4.1.4. Дифракционная глубина изображаемого пространства.....216
11.4.2. Лупа 219
11.4.2.1. Принцип работы и основные характеристики 219
11.4.2.2. Зрачки и люки лупы.....222
11.4.2.3. Геометрическая глубина изображаемого пространства лупы совместно с глазом. 224
11.4.2.4. Аккомодационная глубина изображаемого пространства системы лупа – глаз 226
11.4.2.5. Дифракционная глубина изображаемого пространства системы лупа – глаз 227
11.4.2.6. Разрешающая способность лупы с глазом 227
11.4.2.7. Основные типы луп 227
11.4.3. Микроскоп 229
11.4.3.1. Зрачки и люки микроскопа 229
11.4.3.2. Основные характеристики микроскопа.....231
11.4.3.2.1. Видимое увеличение 231
11.4.3.2.2. Линейное поле зрения 233
11.4.3.2.3. Числовая апертура 233
11.4.3.2.4. Разрешающая способность 234
11.4.3.3. Основы дифракционной теории микроскопа.....234
11.4.3.4. Разрешающая способность микроскопа 240
11.4.3.5. Геометрическая глубина изображаемого пространства микроскопа 246
11.4.3.6. Аккомодационная глубина изображаемого пространства микроскопа 246
11.4.3.7. Дифракционная глубина изображаемого пространства микроскопа 246
11.4.3.8. Осветительная система микроскопа 247
11.4.3.9. Объективы и окуляры микроскопа 251
11.4.3.9.1. Объективы микроскопа.....251
11.4.3.9.2. Окуляры 253
11.4.4. Телескопические системы.....254
11.4.4.1. Телескоп Кеплера.....255
11.4.4.1.1. Зрачки и люки телескопа Кеплера 255

11.4.4.1.2. Увеличение и разрешающая способность телескопа Кеплера 259
11.4.4.1.3. Нормальное увеличение телескопа Кеплера....260
11.4.4.2. Телескоп Галилея 264
11.4.4.3. Зрительные трубы с линзовыми оборачивающими системами 267
11.4.4.4. Схемы с призменными оборачивающими системами 268
11.4.4.5. Схемы с линзовыми и призменными оборачивающими системами 271
11.4.4.6. Дискретное изменение увеличения 272
11.4.4.7. Непрерывное изменение увеличения 282
11.4.4.8. Объективы и окуляры зрительных труб 285
11.4.4.8.1. Объективы телескопических систем 285
11.4.4.8.2. Окуляры телескопических систем 287
12. ХРОМАТИЧЕСКИЕ АБЕРРАЦИИ 289
12.1. Хроматическая аберрация положения 292
12.2. Хроматическая аберрация положения для тонкой линзы в воздухе 292
12.3. Хроматическая аберрация положения для двухлинзового объектива 294
12.4. Хроматическая разность сферических аберраций 298
12.5. Хроматическая аберрация увеличения 298
13. УЧЕНИЕ ОБ АБЕРРАЦИЯХ 301
13.1. Теория аберраций третьего порядка 302
13.2. Фигуры изображения точки при наличии различных аберраций третьего порядка 306
13.2.1. Сферическая аберрация 306
13.2.2. Аберрация кома 308
13.2.3. Астигматизм и кривизна поверхности изображения 312
13.2.4. Дисторсия 320
13.3. Анаберрационные поверхности 321
13.3.1. Преломляющие поверхности 321
13.3.2. Отражающие поверхности 323
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 327

Учебное издание

АГАПОВ Н.А.

ПРИКЛАДНАЯ ОПТИКА

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Компьютерная верстка *К.С. Чечельницкая*
Дизайн обложки *О.Ю. Аршинова*

Подписано к печати 28.09.2011. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 19,37. Уч.-изд. л. 17,52.
Заказ ___-11. Тираж 35 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru