ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.К. Жуков

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

*Рекомендовано УМО по образованию
в области приборостроения и оптотехники
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлению подготовки 200100 «Приборостроение»*

Издательство
Томского политехнического университета
2009

УДК 621:53.08(075.8)
ББК 30.10я73
Ж86

Жуков В.К.

Ж86 Теория погрешностей технических измерений: учебное пособие / В.К. Жуков; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 180 с.

ISBN 978-5-98298-515-6

Учебное пособие раскрывает смысл эволюции теории погрешностей и предлагает способы творческого использования предложенных методик для систематизации и обобщения экспериментальных результатов. Разработано в рамках реализации Инновационной образовательной программы ТПУ по направлению «Неразрушающий контроль» и предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению «Приборостроение».

УДК 621:53.08(075.8)
ББК 30.10я73

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры
информационно-измерительной техники ТУСУРа
В.Ф. Отчалко

ISBN 978-5-98298-515-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Элементарные события и вероятность

Любой проводимый опыт (эксперимент) имеет результат. В теории вероятностей результат опыта называют *исходом опыта*. При бросании монеты возможны два исхода: появление герба – один исход, появление цифры – другой исход. При бросании игральной кости возможны шесть исходов, а именно: появление цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6. При вынимании шаров из урны, в которой находится два черных и три белых шара, возможны пять исходов: два исхода, когда вынимаются черные шары, и три исхода, когда вынимаются белые шары.

Исход или группа исходов, удовлетворяющих определённым требованиям, называются *событием*. Примеры событий: появление при бросании монеты только герба; появление двух гербов при двукратном бросании монеты; появление туза при вынимании карты из колоды карт; попадание в цель с первого выстрела. Событие при проведении опыта может произойти, а может и не произойти. Если считаем событием появление герба при бросании монеты, то при появлении цифры событие не произошло. Если считаем событием появление четного числа 2, 4, 6 при бросании игральной кости, выпало одно из нечётных чисел 1, 3, 5 – событие не произошло.

Исходы опытов, соответствующие установленному событию, называются благоприятными исходами.

Рассматривая приведённые выше примеры событий, можно утверждать, что одни из них более возможны, а другие менее возможны. Появление герба при одном бросании монеты более возможно, чем появление двух гербов при двух последовательных бросаниях монеты.

Чтобы количественно сравнивать между собой события по степени их возможности, нужно с каждым событием связать некоторое число, которое тем больше, чем более возможно событие. Такое число называют вероятностью события. *Вероятность события* есть численная мера степени объективной возможности этого события.

Событие, которое в результате опыта обязательно произойдёт, называют достоверным событием. Например, такое событие, как появление герба или цифры при бросании монеты, является достоверным событием. Вероятность достоверного события принимается равной единице, т. е. вероятность достоверного события является единицей измерения вероятности. Событие, которое в результате опыта не может произойти, называют недостоверным событием. При бросании монеты невозможно одновременное появление герба и цифры. Такое событие недостоверно, вероятность его равна нулю. Таким образом, диапазон изменения вероятности любых событий лежит в пределах от нуля до единицы.

Существует класс опытов, для которых исходы равновероятны. При бросании игральной кости в форме правильного куба появление каждой из шести цифр равновероятно. При многократном бросании игральной кости каждая цифра будет появляться в одной шестой части опытов и это утверждение будет тем более правильным, чем больше опытов (бросаний) будет произведено. Принимая вероятность достоверного события, каковым является появление одной из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, равным единице, естественно приписать вероятности появления одной из шести цифр число 1/6.

Для всякого опыта, в котором возможные исходы равновероятны, можно применить указанный приём подсчёта вероятности, который называется непосредственным подсчётом вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{n}, \qquad 1.1.1$$

где $P(A)$ – вероятность исхода А, n – число возможных равновероятных исходов.

Несколько возможных событий образуют *полную группу событий*, если в результате опыта обязательно должно произойти хотя бы одно из них. Примеры событий, образующих полную группу: появление герба или появление цифры при бросании монеты; попадание или промах при выстреле в цель; появление цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при бросании игральной кости; появление четного или нечётного числа при бросании игральной кости.

Несколько событий в данном опыте называются *несовместными*, если они не могут появиться вместе. Так одновременные появления герба и цифры в одном опыте являются несовместными событиями. Также несовместными событиями являются попадание в цель и промах при одном выстреле в цель.

Несколько событий в данном опыте называются *равновероятными*, если есть веские основания считать, что ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другое. Примеры равновозможных событий: появление герба и появление цифры при бросании монеты – равновозможные события; появление четного и нечетного числа при бросании игральной кости – равновозможные события.

Вероятность события A в данном опыте вычисляется как отношение благоприятного числа исходов опыта к общему числу исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad 1.1.2$$

где $P(A)$ – вероятность события A, m – благоприятное число исходов опыта, m – общее число исходов опыта.

Так как m заключено между 0 и n, то

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad 1.1.3$$

Выражение (1.1.2) называют классической формулой для вычисления вероятности события.

Пример использования формулы. В урне находятся два белых и три черных шара. Из урны вынимается один шар. Какова вероятность вынуть при этом белый шар? В этом опыте число возможных исходов пять (по числу шаров), число благоприятных исходов два (по числу белых шаров). Вероятность события, вынуть белый шар, равна 2/5. При бросании монеты вероятность появления герба равна 1/2, вероятность появления цифры так же 1/2.

Формула (1.1.2) применима только для определения вероятности события в опытах с равновероятными исходами, поэтому имеет ограниченное применение. Например, если у игральной кости сделать разные по площади грани, то появления чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при бросании кости будут не равновероятными исходами. В этом случае нельзя утверждать, что при бросании кости вероятность появления какой-либо цифры равна 1/6.

Для определения вероятности события A в опыте с разновероятными исходами пользуются понятием частота события. Частотой события A в данной серии одинаковых опытов, например при бросании игральной кости, называется отношение числа опытов, в которых появилось событие A, к общему числу произведённых опытов. Частоту события называют его статистической вероятностью в отличие от математической вероятности, определяемой по формуле (1.1.2). Статистическая вероятность (частота события) определяется формулой

$$P_c(A) = \frac{m}{n}, \qquad 1.1.4$$

где m – число появлений события A в серии одинаковых опытов, n – число опытов в серии.

Чем больше число опытов, тем точнее определяется вероятность появления события в отдельно взятом опыте.

Одним из важнейших понятий в теории вероятностей является понятие *случайная величина*. Случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причём до завершения опыта неизвестно какое. Примером случайной величины может служить погрешность измерения.

Случайные величины делят на непрерывные и дискретные. *Дискретная случайная величина* в заданном диапазоне может принимать конечное число значений. Например, число попаданий при 10 выстрелах в цель является дискретной случайной величиной с возможными значениями от нуля до десяти. *Непрерывная случайная величина* в заданном диапазоне значений может принимать любое значение, и число таких значений бесконечно. Границы непрерывной случайной величины могут быть точно определены, например координаты пасущейся на огороженном участке коровы, а чаще всего являются неопределёнными, расплывчатыми, например погрешность измерения.

1.2. Непрерывные случайные величины

Имеем некоторую непрерывную случайную величину x, которая в заданном интервале (в пределе от $-\infty$ до ∞) может принимать бесконечное количество значений.

Интегральной функцией распределения случайной величины x называют функцию $F(x)$, значение которой для каждого x является вероятностью события, заключающегося в том, что значение случайной величины x_i в i-м опыте меньше x:

$$F(x) = p\{x_i \prec x\} = p\{-\infty \prec x_i \prec x\}, \qquad 1.2.1$$

$p\{x_i \prec x\}$ – вероятность события, заключающегося в том, что в i-м опыте x_i меньше x, $p\{-\infty \prec x_i \prec x\}$ – вероятность того, что x_i находится в интервале от $-\infty$ до x.

Значение случайной величины в i-м опыте, обозначенное как x_i, может быть любым в интервале от $-\infty$ до x, поэтому x является непрерывной случайной величиной.

Свойства интегральной функции распределения непрерывной случайной величины:

1. $F(x) \geq 0$,
2. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 \succ x_1$,
3. $A(-\infty) = 0, F(\infty), A(\infty) = 1$. 1.2.2

Графически интегральная функция распределения случайной величины представлена на рис. 1.2.1.

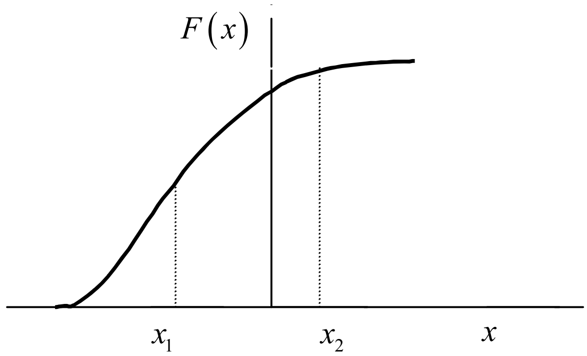


Рис. 1.2.1. Интегральная функция распределения случайной величины x

Вероятность нахождения x_i в интервале $x_1...x_2$ равна:

$$p\{x \prec x_i \prec x_2\} = F(x_2) - F(x_1). \qquad 1.2.3$$

Другой характеристикой непрерывной случайной величины является дифференциальная функция распределения, называемая чаще *плотностью распределения вероятностей,*

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \qquad 1.2.4$$

Эта функция неотрицательна и подчиняется условию нормирования в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1. \qquad 1.2.5$$

Интеграл (1.2.5) показывает, что площадь, ограниченная линией $p(x)$ и осью x, равна единице.

Вероятность того, что x лежит в интервале $x_1...x_2$, равна:

$$p\{x_1 \prec x_i \prec x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)d(x), \qquad 1.2.6$$

т. е. равна заштрихованной на рис. 1.2.2 площади.

Координата центра распределения называется *математическим ожиданием* или наиболее вероятным значением случайной величины:

$$\vec{x} = m_x = M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx. \qquad 1.2.7$$

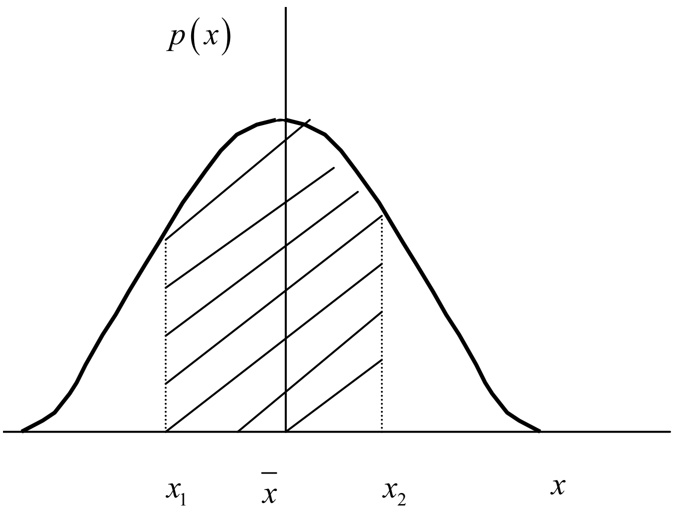


Рис. 1.2.2. Распределение плотности вероятностей случайной величины x

Рассеивание случайной величины относительно её математического ожидания называется *дисперсией* и определяется по формуле

$$D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot p(x) \cdot dx. \qquad 1.2.8$$

При $\vec{x} = 0$ имеем

$$D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) \cdot dx. \qquad 1.2.9$$

В теории погрешностей измерения широко используется понятие *среднее квадратическое отклонение* случайной величины от центра распределения

$$\sigma = \sqrt{D[x]}. \qquad 1.2.10$$

Если x – величина размерная (ампер, килограмм, секунда), то σ будет иметь ту же размерность, а дисперсия имеет размерность в квадрате.

1.3. Дискретные случайные величины

Непрерывная случайная величина в результате проведения операции квантования может превратиться в дискретную случайную величину. Например, погрешность измерения является непрерывной случайной величиной, но если провести *n* повторных измерений и получить *n* отсчётов, то эти отсчёты уже будут представлены дискретной случайной величиной

$$x = \{x_1 \ldots x_i \ldots x_n\}. \qquad 1.3.1$$

В формуле (1.3.1) x – множество результатов измерений, $x_1 \ldots x_2$ – элементы множества.

Математическое ожидание случайной величины, а в случае дискретных случайных величин это среднее арифметическое значение, равно:

$$\vec{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i. \qquad 1.3.2$$

Дисперсия дискретной случайной величины равна:

$$D[x] = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i - \vec{x})^2. \qquad 1.3.3$$

Среднее квадратическое отклонение (СКО) дискретной случайной величины от среднего арифметического значения определяется по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i - \vec{x})^2}. \qquad 1.3.4$$

Закон распределения плотности вероятностей дискретной случайной величины определяется по *гистограмме*.

Имеем множество дискретных значений случайной величины:

$$x = \{x_1 \ldots x_i \ldots x_n\}, \qquad 1.3.5$$

где $x_1 \ldots x_n$ – элементы множества.

В множестве 1.3.5 есть минимальное значение случайной величины $x_{\min}$ и есть максимальное $x_{\max}$. Разделим интервал $x_{\max} - x_{\min}$ на n равных участков:

$$n = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta x}. \qquad 1.3.6$$

Число попаданий случайной величины x в j-й участок обозначим $m_j(x)$. Это число означает множество дискретных значений x, удовлетворяющих условию быть больше значения $j \cdot \Delta x$ и меньше значения $(j+1) \cdot \Delta x$:

$$m_j(x) = \{x : j \cdot \Delta x \prec x \prec (j+1) \cdot \Delta x\}. \qquad 1.3.7$$

Будем считать попадание дискретной случайной величины в интервал $(j+1) \cdot \Delta x \div j \cdot \Delta x$ событием. Частота этого события

$$p_j(x) = \frac{m_j(x)}{n}, \qquad 1.3.8$$

в соответствии с 1.1.4 будет представлять вероятность попадания случайной величины в i-м опыте в рассматриваемый интервал.

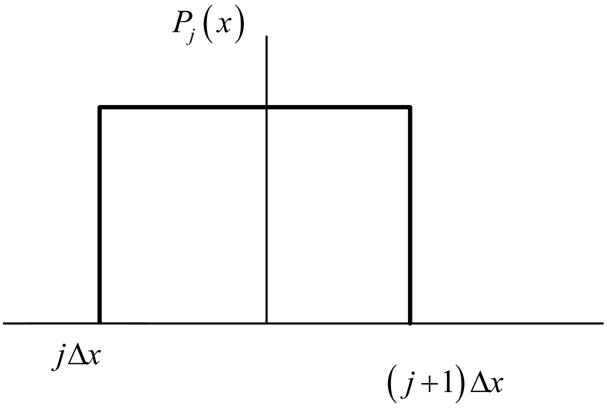


Рис.1.3.1. Частота попадания случайной величины x в j-й участок возможных значений

Если определить частоту попадания x во все n участков и отобразить на графике, то получится фигура, называемая гистограммой.

При увеличении числа опытов и числа интервалов гистограмма (рис. 1.3.2) стремится к графическому изображению плотности вероятностей.

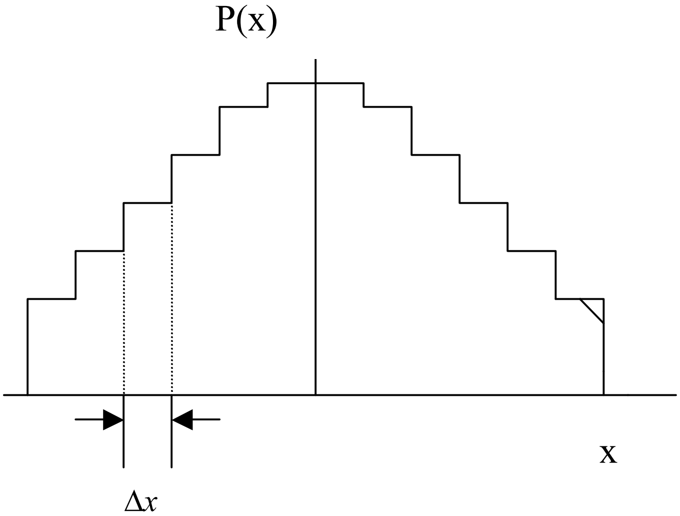


Рис.1.3.2. Гистограмма для экспериментального определения закона распределения случайной величины x

Однако, если при ограниченном числе опытов сделать большое число интервалов, то это может привести к появлению пустых интервалов, в которые не попадает ни один исход опыта, в результате гистограмма будет иметь изрезанный вид со многими провалами и всплесками.

При малом числе интервалов гистограмма будет отличаться от действительной кривой распределения, вследствие слишком крупной ступенчатости.

1.4. Законы распределения случайных величин

1.4.1. Распределение Коши

Плотность распределения вероятностей по закону Коши описывается выражением

$$p(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} = \frac{1}{a\pi\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}. \qquad 1.4.1$$

Значение параметра a определяется по гистограмме. При $x = 0$

$$p(x = 0) = \frac{1}{a\pi}, \qquad 1.4.2$$

откуда

$$a = \frac{1}{\pi\, p(x = 0)}. \qquad 1.4.3$$

Графически распределение Коши представлено на рис. 1.4.1.

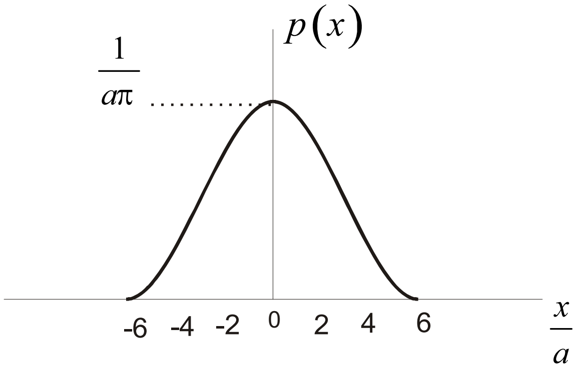


Рис. 1.4.1. Распределение плотности вероятностей по закону Коши

В распределении Коши дисперсия и СКО не существуют, так как определяющий их интеграл расходится и они будут бесконечно увеличиваться при росте числа экспериментальных данных.

1.4.2. Распределение Лапласа

Распределение Лапласа характеризует случайные величины с быстропадающей плотностью вероятностей при отклонении случайной величины x от центра распределения и описывается экспоненциальной двусторонней зависимостью

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\left|\frac{x}{\sigma}\right|}. \qquad 1.4.4$$

Параметр σ является средним квадратическим отклонением случайной величины x от центра распределения $x = 0$.

Графически распределение Лапласа представлено на рис. 1.4.2.

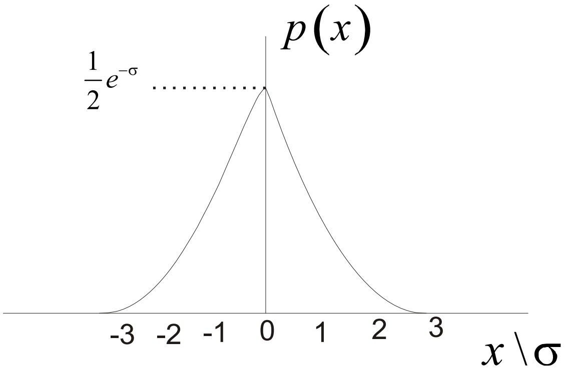


Рис. 1.4.2. Распределение плотности вероятностей случайной величины по закону Лапласа

1.4.3. Нормальный закон распределения

В теории погрешностей наиболее используемыми при прямых многократных измерениях являются нормальный закон распределения плотности вероятностей и распределение Стьюдента. Объясняется это следующими обстоятельствами. Случайная погрешность прямых измерений физической величины складывается из многих составляющих, обусловленных действием неизвестных, а иногда и известных, но неустранимых, причин. При этом каждая составляющая представляет незначительную часть в общей случайной погрешности, т. е. нет преобладающих составляющих погрешности.

Как следует из центральной предельной теоремы теории вероятностей (теорема Ляпунова), такая случайная погрешность имеет закон распределения близкий к нормальному.

Для получения достаточно точных результатов обработки многократных измерений их число n должно быть больше 20. Если $n \prec 20$, то при обработке результатов измерений используют распределение Стьюдента.

Нормальный закон распределения плотности вероятностей описывается выражением

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\vec{x})^2}{2\sigma^2}\right], \qquad 1.4.5$$

где $p(x)$ – плотность вероятностей случайной величины x, σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины х от центра распределения, $\vec{x}$ – математическое ожидание непрерывной случайной величины или среднее арифметическое значение дискретной случайной величины, x – значение случайной величины, вероятность появления которой определяется.

В теории погрешностей измерения

$$x - \overline{x} = \Delta x \qquad 1.4.6$$

есть абсолютное значение случайной погрешности при многократных измерениях, для которой

$$p(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}\right]. \qquad 1.4.7$$

На рис. 1.4.3 показан графически нормальный закон распределения плотности вероятностей по формуле (1.4.5) для двух значений среднего квадратического отклонения σ.

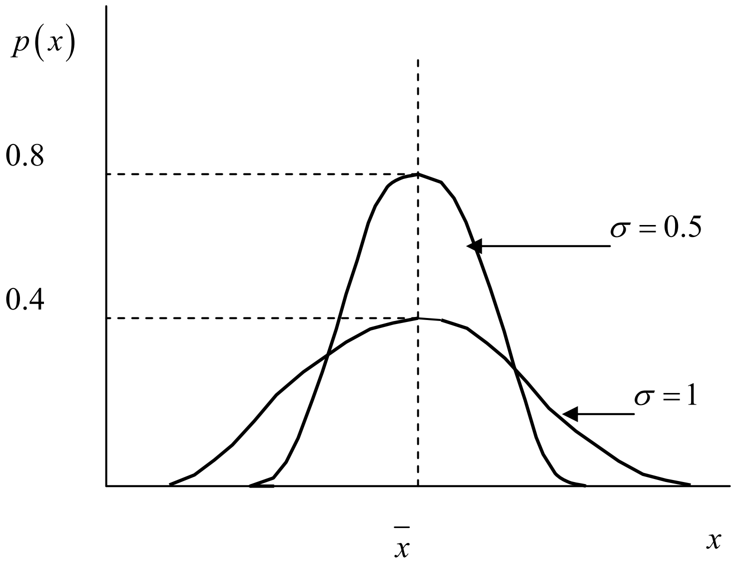


Рис. 1.4.3. Графическое представление нормального закона распределения плотности вероятностей случайной величины x

Наибольшее значение плотности вероятностей случайная величина имеет при $x = \overline{x}$

$$p(x)_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \qquad 1.4.8$$

Нормальный закон распределения, представленный в зависимости от относительного аргумента $t = \Delta x/\sigma$, называется нормированным нормальным законом распределения и описывается выражением

$$p(t) = p\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} p(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]. \qquad 1.4.9$$

Нормированный закон распределения совпадает с ненормированным при $\sigma = 1$.

Значение математического ожидания $\overline{x}$ определяется по формуле (1.2.7) для непрерывной случайной величины и по формуле (1.3.2) для дискретной случайной величины. Среднеквадратические отклонения находятся, соответственно, по формуле (1.2.10) для непрерывной случайной величины и по формуле (1.3.4) для дискретной случайной величины.

1.4.4. Распределения Стьюдента

Законы распределения Стьюдента используются тогда, когда число многократных измерений n меньше 20. Распределение Стьюдента отличается от нормального закона тем, что учитывают число измерений n и задаются функцией, зависящей от аргумента

$$t = \frac{\Delta x}{\overline{\sigma}}, \qquad 1.4.10$$

где $\Delta x = x - \overline{x}$, а

$$\overline{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad 1.4.11$$

является оценкой отклонения $\overline{x}$ от действительного значения измеряемой физической величины $x_д$. Для расчёта функции аргумента t имеется аналитическое выражение (1.4.12) и таблицы.

В (1.4.11) σ есть среднее квадратическое отклонение отдельных результатов измерений от центра рассеивания $\overline{x}$.

Аналитическое выражение распределения Стьюдента имеет вид

$$p(t)_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi(n-1)}}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}, \qquad 1.4.12$$

где $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ и $\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$ – гамма-функции (интеграл Эйлера), $n \geq 2$.

Законы распределения Стьюдента описывают плотность распределения вероятностей дискретной случайной величины при ограниченном числе n экспериментально полученных значений случайной величины. Распределение Стьюдента используют обычно при $2 \prec n \prec 20$. При $n \succ 20$ распределение Стьюдента стремится к нормальному закону распределения плотности вероятностей.

1.4.5. Равномерный закон распределения

Равномерный закон распределения плотности вероятностей описывает распределение случайной величины при равновероятных её значениях в интервале от $x_{\min}$ до $x_{\max}$. Графически равномерный закон распределения плотности вероятности случайной величины представлен на рис. 1.4.4. Таким законом, в частности, описывается погрешность от дискретности у цифровых измерительных приборов.

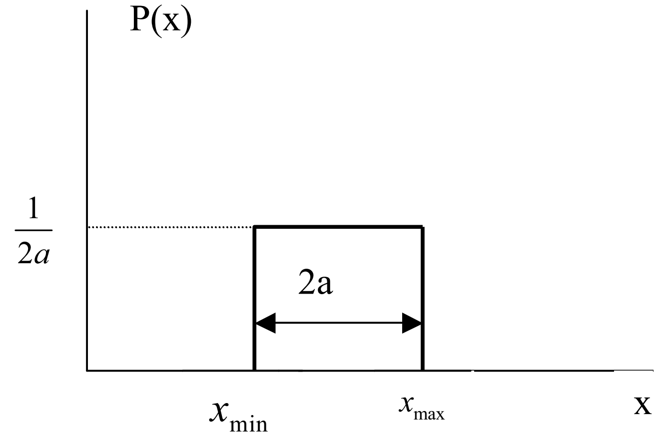


Рис. 1.4.4. Графическое представление равномерного закона распределения плотности вероятностей случайной величины x

Аналитическое представление равномерного закона распределения плотности вероятностей имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \prec \bar{x}-a, \quad x \succ \bar{x}+a, \\ \dfrac{1}{2a} & \text{при} \quad (\bar{x}-a) \prec x \prec (\bar{x}+a).\end{cases} \qquad 1.4.13$$

Существуют и другие законы распределения плотности вероятностей случайных величин, такие как треугольный, трапецеидальный и др., которые также используются в измерительной технике, но реже, чем нормальный закон распределения.

1.4.6. Треугольный закон распределения (закон Симпсона)

Треугольный закон распределения используется в цифровых средствах измерения, в которых измеряемая физическая величина преобразуется в пропорциональный интервал времени $T_{сч}$, а измерение этого интервала выполняется квантованием с помощью счётных импульсов стабильного генератора с периодом следования T_0. В связи со случайным положением счётных импульсов относительно интервала времени $T_{сч}$, а также случайным соотношением между периодом счётных импульсов T_0 и временем начала счёта $T_{сч2}$ треугольный закон представляет собой композицию (объединение) двух равномерных законов распределения с одинаковыми по величине погрешностями Δx.

Функция распределения случайной величины при треугольном законе распределения описывается следующими соотношениями:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x_m+x}{x_m^2}, & -x_m\le x\le 0\\ \dfrac{x_m-x}{x_m^2}, & 0\le x\le x_m\\ 0, \quad -x_m\succ; & x\succ x_m\end{cases}. \qquad 1.4.14$$

1.5. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Имеем произвольную случайную величину x с математическим ожиданием $\vec{x}$ и среднеквадратическим отклонением σ.

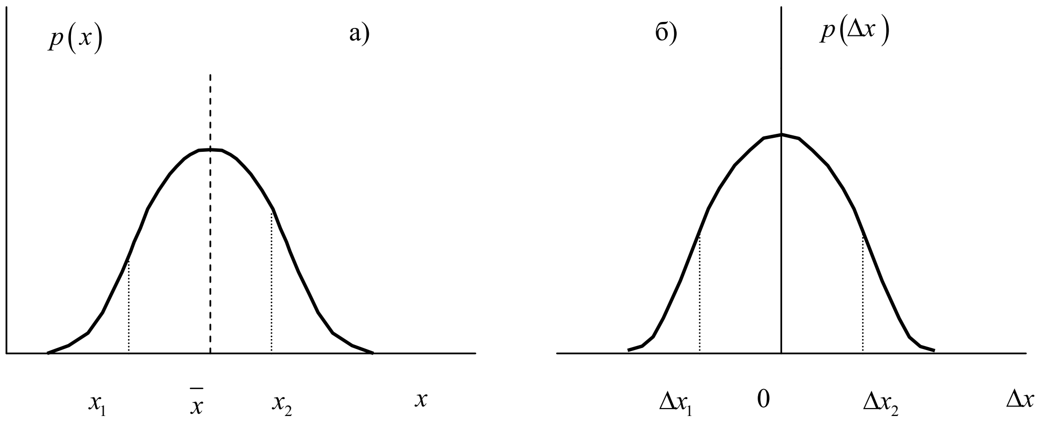


Рис. 1.5.1. Определение вероятности попадания случайной величины в интервал: а – величины x в интервал $x_1...x_2$; б – величины Δx в интервал $\Delta x_1...\Delta x_2$

Распределение плотности вероятностей случайной величины подчиняется нормальному закону.

Вероятность попадания случайной величины при каком-либо исходе опыта в интервал $x_2...x_1$ (рис. 1.5.1) равна:

$$p(x_1\prec x\prec x_2)=\int_{x_1}^{x_2}p(x)\cdot dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\vec{x})^2}{2\sigma^2}\right]dx, \qquad 1.5.1$$

где $p(x)$ – плотность вероятностей случайной величины x (1.4.5).

Введём новую переменную

$$\Delta x = x - \bar{x}. \qquad 1.5.2$$

Границами интервала для Δx будут Δx_1 и Δx_2. Предположим $|\Delta x_1| = |\Delta x_2| = |\Delta x_г|$, тогда $\Delta x_1 = -\Delta x_г$, а $\Delta x_2 = \Delta x_г$. Значением $\Delta x_г$ обозначены границы интервала, симметричного относительно центра распределения $\Delta x = 0$.

Вероятность попадания случайной величины Δx в интервал $-\Delta x \div \Delta x$ равна:

$$p\{-\Delta x_г \prec \Delta x \prec \Delta x_г\} = 2\int_0^{\Delta x_г} p(\Delta x) d(\Delta x) = 2\int_0^{\Delta ч_г} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-\Delta x^2}{2\sigma^2}\right] \cdot d(\Delta x), \qquad 1.5.3$$

где $p(\Delta x)$ – плотность вероятностей абсолютных отклонений случайной величины Δx от центра рассеивания $\overline{x}$ в соответствии с формулой (1.4.7).

Введём ещё одну переменную

$$t = \frac{\Delta x}{\sigma}, \qquad 1.5.4$$

границами интервала для которой будут:

$$t_г = \pm\frac{\Delta x_г}{\sigma}. \qquad 1.5.5$$

Вероятность попадания t в интервал $-t_г...t_г$ равна:

$$p\{-t_г \prec t \prec t_г\} = 2\int_0^{t_г} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \cdot (\sigma \cdot dt) =$$

$$= 2\int_0^{t_г} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \cdot dt = \Phi(t_г). \qquad 1.5.6$$

Полученное выражение обозначается $\Phi(t_г)$ и называется интегралом вероятности, для которого существуют графики и таблицы (табл. 1.5.1).

Таблица 1.5.1

Значения интеграла вероятности $\Phi(t_г)$

$t_г$	$\Phi(t_г)$	$t_г$	$\Phi(t_г)$	$t_г$	$\Phi(t_г)$	$t_г$	$\Phi(t_г)$
0,00	0,000	0,70	0,516	1,40	0,839	2,25	0,976
0,10	0,080	0,80	0,576	1,50	0,866	2,50	0,988
0,20	0,159	0,90	0,632	1,60	0,890	2,75	0,994
0,30	0,236	1,00	0,683	1,70	0,911	3,00	0,997
0,40	0,311	1,10	0,729	1,80	0,928	3,30	0,9990
0,50	0,383	1,20	0,770	1,90	0,943	3,50	0,9995
0,60	0,452	1,30	0,806	2,00	0,955	4,00	0,9999

Характерные значения интеграла, используемые в теории погрешности измерений:

1) $p\{-1 \prec t \prec 1\} = p\{-\sigma \prec \Delta x \prec \sigma\} = 0,683;$

2) $p\{-2 \prec t \prec 2\} = p\{-2\sigma \prec \Delta x \prec 2\sigma\} = 0,95;$

3) $p\{-3 \prec t \prec 3\} = p\{-3\sigma \prec \Delta x \prec 3\sigma\} = 0,997.$ 1.5.7

Приведённые значения интеграла вероятности показывают, что вероятность попадания Δx в каком-то опыте в интервал $\pm\sigma$ равна 0,683, вероятность попадания в интервал $\pm 2\sigma$ – 0,95, а в интервал $\pm 3\sigma$ – 0,997, т. е. практически достоверное событие.

Интервал значений Δx от $-\Delta x_г$ до $\Delta x_г$ в теории вероятностей называют доверительным интервалом. Вероятность попадания случайной величины в этот интервал после проведения опыта называют доверительной вероятностью.

В измерительной технике доверительный интервал берут обычно равным $\pm 2\sigma$, а в особо ответственных случаях, когда от погрешности измерения зависит нежелательный исход события (например, авария на объекте), доверительный интервал берут равным $\pm 3\sigma$.

Исходная случайная величина по (1.5.2) равна x = $\Delta x + \overline{x}$, поэтому вероятность попадания x в интервал $\overline{x} \pm \sigma$ равна 0,683, в интервал $x \pm 2\sigma$ – 0,95, а в интервал $x \pm 3\sigma$ – 0,997.

Таблица 1.5.2

Границы доверительного интервала по распределению Стьюдента

n	Доверительная вероятность $P_Д$				
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
2	6,31	12,71	31,82	63,68	636,62
3	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
4	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92
5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
6	2,02	2,57	3,37	4,06	6,87
7	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
8	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
9	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
10	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
12	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
14	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
16	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
18	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
20	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,29

При числе измерений меньше 20 и использовании распределения Стьюдента доверительный интервал и доверительная вероятность определяются по табл. 1.5.2.

Например, при числе измерений $n = 10$ и доверительной вероятности $P_Д = 0{,}95$ из таблицы находим границы доверительного интервала $t_г = \pm 2{,}26$. Следовательно, абсолютное значение погрешности с доверительной вероятностью 0,95 находится в границах $-2{,}26\sigma \prec \Delta x \prec 2{,}26\sigma$.

1.6. Функциональная, корреляционная связь двух случайных величин

Имеем две случайные величины x и y. При проведении опыта x и y принимают определённые значения. Если между значениями имеется такая связь, что любому x_i соответствует только одно значение y_i, то такая связь называется функциональной $y = kx$.

Графически функциональная связь двух величин представляется прямой линией или, в общем случае, какой-то кривой (рис. 1.6.1, *а*).

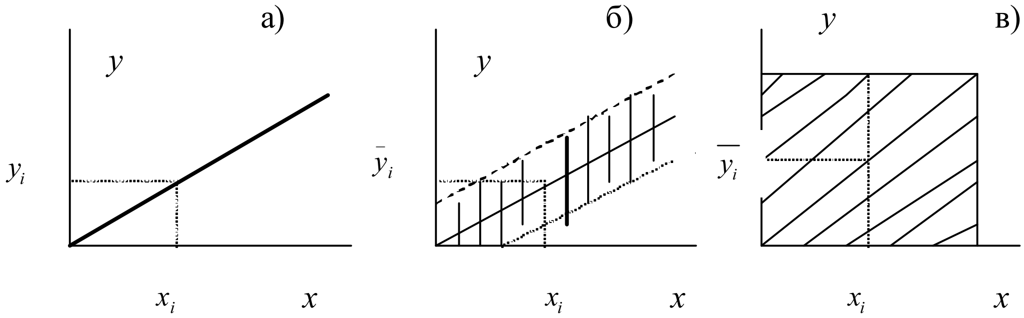


Рис. 1.6.1. Графическое представление связи между двумя физическими величинами: а) функциональная связь; б) корреляционная связь; в) отсутствие связи

Если любому значению величины x в повторяющихся опытах соответствуют различные значения величины y с математическим ожиданием $\overline{y}$, то такая связь величин называется корреляционной (рис. 1.6.1, *б*).

Степень тесноты корреляционной связи между двумя величинами определяется коэффициентом корреляции

$$\rho = \sqrt{1-(2\gamma)^2}, \qquad 1.6.1$$

$$\gamma = \frac{\Delta y_i}{y_i},$$

где Δy – есть половина полосы неопределённости.

Для функциональной связи $\Delta y_i = 0$ и $\rho = 1$. Для некоррелированных величин (абсолютно не связанных между собой) $\gamma = 1/2$ и $\rho = 0$ (рис. 1.6.1, *в*).

Дисперсия суммы двух коррелированных величин равна:

$$D[x_1 + x_2] = D[x_1] + D[x_2] + 2k_{x1x2}, \qquad 1.6.2$$

где $D[x_1]$ – дисперсия случайной величины x_1, $D[x_2]$ – дисперсия случайной величины x_2,

$$k_{x1x2} = \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \qquad 1.6.3$$

– взаимный корреляционный момент, зависящий от коэффициента корреляции ρ и среднеквадратических отклонений σ_1 и σ_2 величин x_1 и x_2 от их математических ожиданий.

Для физических величин, функционально связанных между собой,

$$D[x_1 + x_2] = D[x_1] + D[x_2] + 2\sigma_1\sigma_2. \qquad 1.6.4$$

Среднее квадратическое отклонение для суммы таких величин находится алгебраическим суммированием:

$$\sigma_\Xi = \sqrt{D[x_1 + x_2]} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sigma_1 + \sigma_2. \qquad 1.6.5$$

Для некоррелированных величин $\rho = 0$ и $k_{x1x2} = 0$, поэтому

$$D[x_1 + x_2] = D[x_1] + D[x_2]. \qquad 1.6.6$$

Среднее квадратическое отклонение таких независимых величин от их математического ожидания:

$$\sigma_\Xi = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \qquad 1.6.7$$

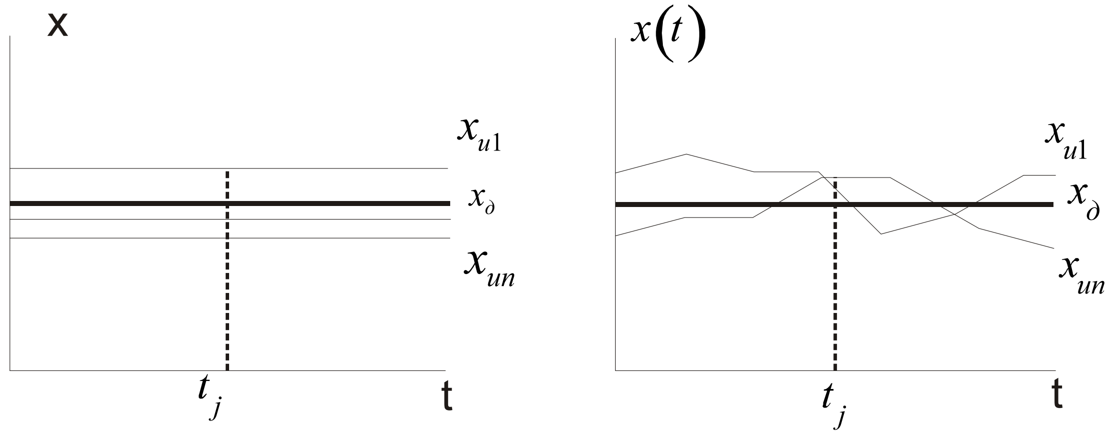
1.7. Случайные функции

Случайной функцией, по аналогии со случайной величиной, называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной вид, не известно заранее – какой.

Например, имеем измеряемое значение физической величины $x_д$. В результате проведения многократных измерений этой величины из-за случайной погрешности измерения получили множество показаний средства измерения

$$\{x_{u1} \cdots x_{ui} \cdots x_{un}\}. \qquad 1.7.1$$

Если показания разные и с течением времени не изменяются, мы имеем дело со случайной величиной (рис. 1.7.1, *а*). Если же показания разные и во времени изменяются, то мы имеем дело со случайной функцией (рис. 1.7.1, *б*).



а) б)

Рис. 1.7.1. Случайная величина x и случайная функция x(t)

Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате одного i-го опыта, называется i-й реализацией случайной функции. Если со случайной функцией провести группу опытов, то получится группа, или семейство, реализаций этой случайной функции.

У случайных функций аргументом может быть не только время, но и какая-либо другая физическая величина. Например, температура воздуха в различных слоях атмосферы может рассматриваться как функция высоты.

Каждая реализация случайной функции, взятая в отдельности, является не случайной функцией.

При фиксированном аргументе t_j случайной функции (рис. 1.7.1, *б*) её множество значений, соответствующих различным реализациям, превращается в случайную величину

$$x(t_j) = \{x(t_{j1}) \cdots x(t_{ji}) \cdots x(t_{jn})\}. \qquad 1.7.2$$

Эту случайную величину называют сечением случайной функции при аргументе t_j.

Случайная функция совмещает в себе понятия случайной величины и неслучайной функции. Если зафиксировать значение аргумента t, то получится случайная величина, соответствующая n-реализациям неслучайных функций. Если взять одну реализацию, то получится одна неслучайная функция.

Будем обозначать случайную функцию как $X(t)$, а $x_i(t)$ как i-ю реализацию случайной функции $X(t)$.

Случайная функция, как и случайная величина, оценивается числовыми характеристиками: математическим ожиданием, дисперсией, корреляционной функцией и спектральной плотностью. В отличие от числовых характеристик случайных величин, представляющих собой определённые числа, числовые характеристики случайных функций представляют собой в общем случае не числа, а неслучайные функции.

Рассмотрим сечение случайной функции (рис. 1.7.1) при аргументе t_j. Множество значений функции при этом аргументе будет представлять случайную величину (1.7.2). Математическое ожидание этой случайной величины, а следовательно, и математическое ожидание случайной функции $X(t)$ в сечении t_j равно:

$$m_x(t_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t_{ji}). \qquad 1.7.3$$

Математическое ожидание случайной функции $X(t)$ есть неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом значении аргумента $t = t_j$ равна математическому ожиданию $m_x(t_j)$ соответствующего сечения случайной функции (рис. 1.7.2).

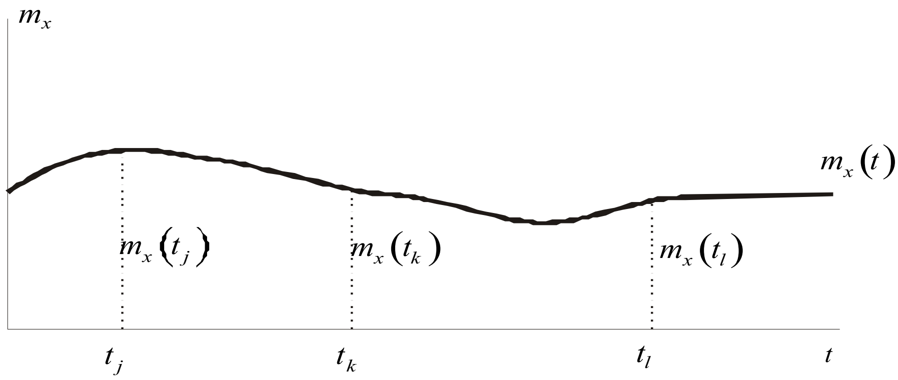


Рис. 1.7.2. Математические ожидания $m_x(t_j)$, $m_x(t_k)$, $m_x(t_l)$ сечений случайной функции; $m_x(t)$ – математическое ожидание случайной функции

По смыслу математическое ожидание случайной функции есть некоторая средняя (неслучайная) функция, около которой различным образом варьируются её конкретные реализации.

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $D_x(t)$, значения которой для каждого t равны дисперсии соответствующего сечения случайной функции.

При $t = t_j$

$$D_x(t_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [x(t_{ji}) - m_x(t_j)]^2, \qquad 1.7.4$$

где $x(t_{ji})$ – значение случайной функции в t_j-м сечении и i-й реализации, $m_x(t_j)$ – математическое ожидание случайной функции в t_j-м сечении.

Среднеквадратическое отклонение для значений случайной функции в определённом сечении определяется так же, как и для случайной величины:

$$\sigma_x(t_j) = \sqrt{D_x(t_j)}. \qquad 1.7.5$$

Математическое ожидание и дисперсия не характеризуют временные зависимости случайной величины или зависимости функции от её аргумента в общем случае (когда аргументом может быть не только время).

Рассмотрим два сечения случайных функций (рис. 1.7.3) при аргументах t_j и t_k. Очевидно, что при близких значениях аргументов величины $X(t_j)$ и $X(t_k)$ также будут близки по значению. Очевидно также, что при увеличении интервала между t_j и t_k связь между $X(t_j)$ и $X(t_k)$ будет ослабевать.

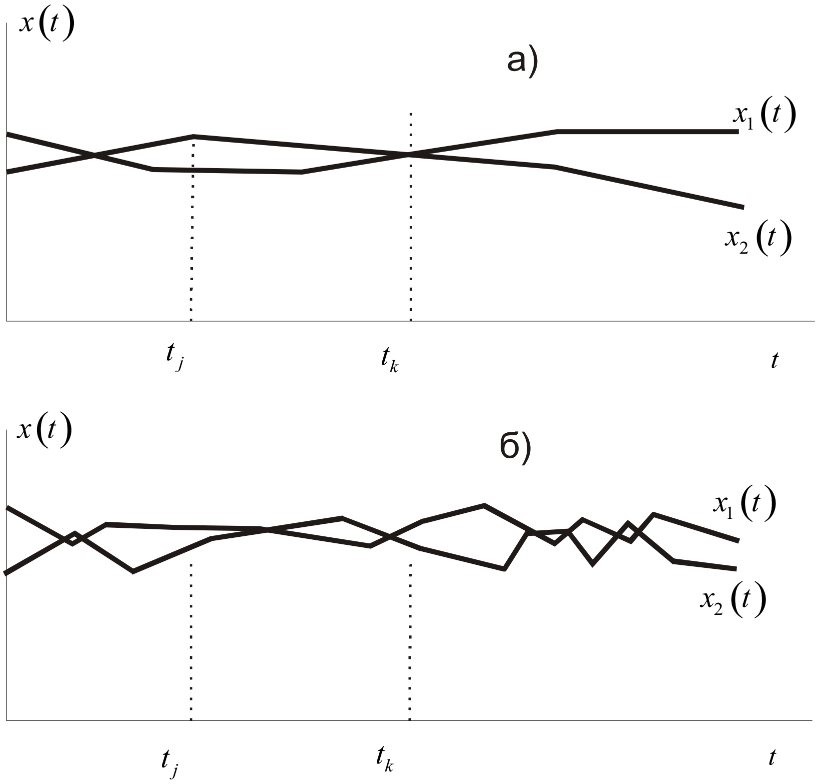


Рис. 1.7.3. Случайные функции X(t) со своими особенностями зависимости значения функции в конкретной реализации от аргумента: а) медленные изменения значения функции; б) быстрые изменения функции

Степень связи между значениями функции $X(t_j)$ и $X(t_k)$ в моменты времени t_j и t_k характеризуется автокорреляционной функцией.

Автокорреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $K_x(t_j,t_k)$ двух аргументов t_j и t_k, которая при каждой паре значений аргументов равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции:

$$K_x(t_j, t_k) = M[\overset{0}{X}(t_j) \cdot \overset{0}{X}(t_k)],$$

где

$$\overset{0}{X}(t_j) = X(t_j) - m_x(t_j),$$

$$\overset{0}{X}(t_k) = X(t_k) - m_x(t_k).$$

При примерно одинаковых $m_x(t)$ и $D_x(t)$ автокорреляционная функция случайной функции, изображенной на рис. 1.7.3, *а*, будет убывать медленнее, чем автокорреляционная функция случайной функции, изображенной на рис 1.7.3, *б*.

При $t_j = t_k = t$ автокорреляционная функция превращается в дисперсию случайной величины:

$$K_x(t, t) = M[\overset{0}{X}(t)^2] = D_x(t).$$

Рассмотрим, как опытным путём определить числовые характеристики случайной функции. Для этого проведём со случайной функцией n независимых опытов, в результате которых получим n реализаций случайной функции. Далее рассмотрим ряд сечений случайной функции для моментов времени $t_1 \ldots t_j \ldots t_m$ и зарегистрируем значения функции в эти моменты времени. Каждому из моментов времени будет соответствовать n значений случайной функции.

Экспериментальные данные занесём в табл. 1.7.1.

Таблица 1.7.1

Экспериментальные данные для определения числовых характеристик случайной функции

$X(t)$	t_1	...	t_j	...	t_k	...	t_m
$x_1(t)$	$x_1(t_1)$	...	$x_1(t_j)$	...	$x_1(t_k)$	...	$x_1(t_m)$
...	...	...	...	...	...	...	...
$x_i(t)$	$x_i(t_1)$	...	$x_i(t_j)$	...	$x_i(t_k)$	...	$x_i(t_m)$
...	...	...	...	...	...	...	...
$x_n(t)$	$x_n(t_1)$	...	$x_n(t_j)$	...	$x_n(t_k)$	...	$x_n(t_m)$

Каждая строка таблицы соответствует i-й реализации случайной функции.

Каждый столбец таблицы соответствует значению случайной функции в момент времени t_j.

Математическое ожидание случайной функции в момент времени t_j равно:

$$m_x(t_j) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i(t_j).$$

Дисперсия случайной функции в момент времени t_j равна:

$$D_x[t_j] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[x_i(t_j) - m_x(t_j)]^2.$$

Автокорреляционная функция для моментов времени t_j и t_k:

$$K_x(t_j, t_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[x_i(t_j) - m_x(t_j)][x_i(t_k) - m_x(t_k)].$$

1.8. Упражнения и задачи

Задача 1.8.1

Условия задачи. В урне находятся два белых, три чёрных и два жёлтых шара. Из урны вынимается один шар. Какова вероятность события, заключающегося в том, что будет вынут черный шар?

Решение задачи. Вынимание шара из урны есть опыт. Возможное число исходов опыта равно семи (по числу шаров в урне). Число благоприятных исходов опыта три (по числу чёрных шаров в урне). Вероятность события, заключающегося в вынимании чёрного шара, в соответствии с формулой (1.1.2), равна 3/7.

Задача 1.8.2

Условия задачи. Проведём десять бросаний игральной кости. Число 2 выпадает три раза. Какова вероятность появления числа 2 при одиннадцатом бросании кости?

Решение задачи. В соответствии с формулой (1.1.4) статистическая вероятность события, заключающегося в появлении числа 2, равна 3/10. Следовательно, при одиннадцатом бросании кости вероятность появления числа 2 будет равна также 3/10.

Задача 1.8.3

Условия задачи. Проведём n измерений одной и той же физической величины x. В результате получим n показаний x_u средства измерения, представленных в таблице. Необходимо по гистограмме определить закон распределения погрешности измерения.

$x_и$	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95
$\Delta x_и$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	–0,01	–0,02	–0,03	–0,04	–0,05
$p(x)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Решение задачи. Гистограмма соответствует равномерному закону распределения, так как на каждый один из одиннадцати интервалов $\Delta x_и$ приходится по одному значению погрешности.

Задача 1.8.4

Условия задачи. Проведём десять повторных измерений одной и той же физической величины $x_д$. Результаты измерений $x_и$ занесём в таблицу.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_и$	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	0,99	0,98	0,97	0,06	0,95

Определим математическое ожидание результата измерения и среднее квадратическое отклонение погрешности отдельного измерения от математического ожидания результата измерения.

Решение задачи. Математическое ожидание результата измерений

$$\overline{x_и} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1,01+1,02+1,03+1,04+1,05+ \\ +0,99+0,98+0,97+0,96+0,95 \end{pmatrix} = 1,00.$$

Абсолютные погрешности отдельных измерений

$$\Delta x_и = \begin{Bmatrix} 0,01;\ 0,02;\ 0,03;\ 0,04;\ 0,05;\ -0,01; \\ -0,02;\ -0,03;\ -0,04;\ -0,05; \end{Bmatrix}.$$

Среднее квадратическое отклонение значения отдельного измерения от математического ожидания результата всех измерений

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{9}[(0,01)^2+(0,02)^2+(0,03)^2+(0,04)^2+(0,05)^2]} \cong 0,035.$$

Задача 1.8.5

Условия задачи. Плотность вероятностей случайной величины x равна:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right].$$

Отклонение случайной величины от среднего значения равно:

$$\Delta x = x - \bar{x}.$$

Плотность вероятностей отклонений

$$p(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}\right].$$

Установлено, что $\bar{x}$ = 1,00, σ = 0,03.

Необходимо определить вероятность попадания случайной величины Δx в интервал –0,04 $\prec \Delta x \prec$ 0,04.

Решение задачи.

$$p\{-0,04 \prec \Delta x \prec 0,04\} = \int_{-0,04}^{0,04} p(\Delta x)\cdot d(\Delta x) = \int_{-0,04}^{0,04} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}\right]\cdot d(\Delta x).$$

Введём новую переменную $t = \Delta x/\sigma$. При этом пределы интегрирования изменятся и станут равными: нижний предел –0,04/σ = –0,04/0,03 ≅ –1,33 и верхний предел 0,04/0,03=1,33.

Вероятность попадания t в интервал –1,33 $\prec t \prec$ 1,33 равна:

$$p\{-1,33 \prec t \prec 1,33\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_Г} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt = \Phi(t_Г).$$

Интеграл

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_Г} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt = \Phi(t_Г)$$

называют интегралом вероятностей или функцией Лапласа (определённый интеграл с верхним переменным пределом интегрирования). Для него существуют таблицы численных значений (например: А.Г. Сергеев, В.В. Крохин. Метрология. М.: Логос, 2001; в рассматриваемом учебном пособии табл. 1.5.1).

Для нашего случая $t_Г$ = 1,33 и $\Phi(t_Г)$ = 0,816.

Следовательно, вероятность попадания случайных величин t в интервал {–1,33 $\prec t \prec$ 1,33}, а Δx в интервал {–0,04 $\prec t \prec$ 0,04} равна 0,816.

Задача 1.8.6

Условия задачи. Цифровой измерительный прибор имеет максимальную погрешность от дискретности показаний, равную $\Delta x_д$.

Погрешность от дискретности, как случайная величина, имеет равномерный закон распределения (рис. 1.8.1):

$$p(\Delta x)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad \Delta x \prec -0,5\Delta x_д \quad \text{и} \quad \Delta x \succ 0,5\Delta x_д \\ \dfrac{1}{\Delta x_д} \quad \text{при} \quad -0,5\Delta x_д \prec \Delta x \prec 0,5\Delta x_д\end{cases}. \qquad (1.8.1)$$

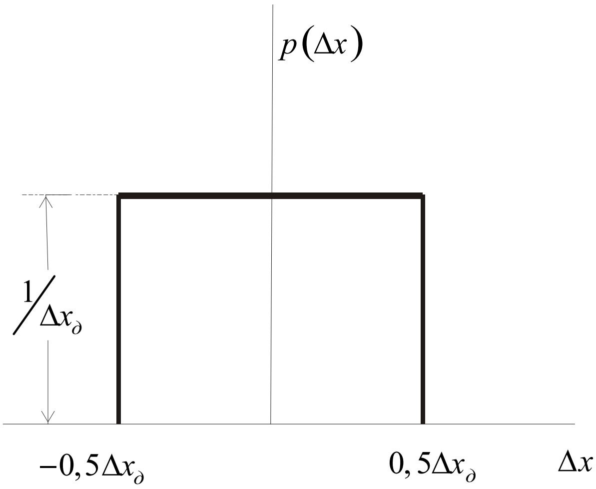


Рис. 1.8.1. Равномерный закон распределения случайной величины Δx

Требуется определить среднее квадратическое значение погрешности от дискретности показаний прибора и представить результат измерения.

Решение задачи. Дисперсия погрешности

$$D[\Delta x]=\int_{-0,5\Delta x_д}^{0,5\Delta x_д}(\Delta x)^2\cdot p(\Delta x)\cdot d(\Delta x)=\frac{1}{\Delta x_д}\int_{-0,5\Delta x_д}^{0,5\Delta x_д}(\Delta x)^2\cdot d(\Delta x)=$$

$$=\frac{1}{\Delta x_д}\cdot\frac{(\Delta x)^3}{3}\Bigg|_{0,5\Delta x_д}^{-0,5\Delta x_д}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\Delta x_д{}^2.$$

Среднее квадратическое отклонение погрешности от нулевого значения равно:

$$\sigma=\sqrt{D[\Delta x]}=\frac{\Delta x_д}{2\sqrt{3}}.$$

Значения погрешности находятся в интервале $\pm 0,5 = \Delta x_д$ с доверительной вероятностью $P_д = 1$.

Результат измерения

$$x_д=(N\pm 0,5)\Delta x_д,$$

где N – показания прибора (число), $\Delta x_д$ – ступень дискретности.

Задача 1.8.7

Условия задачи. Проведём десять повторных измерений одной и той же физической величины $x_д$. Результаты измерений $x_и$ занесём в таблицу.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_и$	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	0,99	0,98	0,97	0,06	0,95

Математическое ожидание результата измерений:

$$\overline{x_и} = \frac{1}{10}(1,01+1,02+1,03+1,04+1,05+0,99+0,98+0,97+0,96+0,9\ 5) = 1,00.$$

Абсолютная погрешность отдельных измерений:

$$\Delta x_и = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; -0,01; -0,02; -0,03; -0,04; -0,05\}.$$

Среднее квадратическое отклонение значения отдельного измерения от математического ожидания результата всех измерений

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{9}[(0,01)^2 + (0,02)^2 + (0,03)^2 + (0,04)^2 + (0,05)^2]} \cong 0,035.$$

Представить результат измерения, используя законы распределения Стьюдента.

Решение задачи. При числе измерений n=10 и доверительной вероятности $P_д$ = 0,95 квантильный множитель k = 2,26. Следовательно, результат измерения имеет вид

$$x_д = 1,00 \pm 2,26 \cdot 0,035 = 1,00 \pm 0,08.$$

Задача 1.8.8

Условия задачи. На входах сумматора действуют два сигнала:

$$x_1 = \overline{x_1} \pm k_1\sigma_1 \quad \text{и} \quad x_2 = \overline{x_2} \pm k_2\sigma_2,$$

где $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ – математическое ожидание значения информативного параметра сигналов, σ_1 и σ_2 – средние квадратические отклонения информативных параметров реальных сигналов от их математических ожиданий, k – квантильный множитель, равный одной единице или двум единицам.

Требуется определить среднее квадратическое отклонение информативного параметра входного сигнала от своего математического ожидания.

Решение задачи. Считаем, что случайные величины x_1 и x_2 имеют одинаковые законы распределения, поэтому $k_1 = k_2 = k$. Примем k = 1, тогда

$$x_1 = \overline{x_1} \pm \sigma_{x1}; \quad x_2 = \overline{x_2} \pm \sigma_{x2}.$$

Информативный параметр y выходного сигнала определяется суммой информативных параметров суммируемых сигналов:

$$y = x_1 + x_2 = \overline{x_1} + \overline{x_2} \pm \sigma_{x1} \pm \sigma_{x2} = \overline{y} \pm \sigma_y .$$

Среднее квадратическое отклонение информативного параметра выходного сигнала от своего математического ожидания равно:

$$\sigma_y = \pm\sigma_{x1} \pm \sigma_{x2}.$$

Для функционально связанных x_1 и x_2

$$\sigma_y = \sigma_{x1} + \sigma_{x2},$$

для некоррелированных или слабо коррелированных информативных параметров

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое исход опыта?
2. Дайте определение вероятности события.
3. В чем заключаются достоверное и недостоверное события?
4. Объясните суть непосредственного подсчёта вероятности равновероятных событий.
5. Какие события образуют полную группу событий?
6. Объясните классическую формулу подсчёта вероятностей?
7. Как определяется статистическая вероятность (частота) события?
8. Нарисуйте и объясните интегральную функцию распределения случайной величины.
9. Опишите свойства интегральной функции распределения вероятностей.
10. Что такое дискретная случайная величина и какими точечными оценками она описывается?
11. Какой формулой описывается нормальный закон распределения случайных величин?
12. Что такое доверительный интервал и доверительная вероятность?
13. Какая связь между физическими величинами называется функциональной, а какая корреляционной?
14. Как складывать дисперсии коррелированных и некоррелированных величин?
15. Дайте определение случайной функции.
16. Что называется сечением случайной функции?
17. Напишите формулу для математического ожидания случайной функции.
18. Как определить дисперсию случайной функции?
19. Как экспериментально находится автокорреляционная функция случайной функции?

2. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ

2.1. Основные понятия и определения

Объект измерения – реально существующий физический объект, среди многих свойств которого существует свойство с измеряемой физической величиной.

Субъект измерения – человек, осуществляющий измерительный эксперимент.

Математическая модель объекта измерения – упрощенное описание объекта измерения с помощью математических формул, адекватно отражающих интересующие субъект измерения свойства и связи между ними, необходимые для проведения измерительного эксперимента.

Субъект измерения не в состоянии представить себе всё многообразие свойств объекта измерения и существующих между ними связей, поэтому реальное взаимодействие субъекта измерения и объекта измерения возможно только на основе принятой математической модели измерения.

Математическая модель должна обеспечивать различие между реальными свойствами объекта измерения и этими же свойствами в модели не более 10 %. Если математическая модель не удовлетворяет этому требованию, то следует перейти к другой, более точной модели.

Математическую модель формирует субъект измерения при планировании измерительного эксперимента и на этой стадии он закладывает субъективную составляющую в методическую погрешность измерения.

Измерение – это процесс нахождения значения физической величины опытным путём с помощью специальных технических средств (ГОСТ 16263–70). Это определение относится только к области технических измерений, хотя существуют измерения в экономике, психологии, педагогике и других областях знаний.

В приведённом определении понятия *измерение* отражены три наиболее существенных момента:

- измерению подлежат только физические величины;
- для получения результата измерения нужно обязательно провести измерительный эксперимент;
- для осуществления измерительного эксперимента нужны специальные технические средства, имеющие нормированные метрологические характеристики.

По ГОСТ 16263–70 *физическая величина* есть одно из свойств физического объекта, в качественном отношении общее для многих физических объектов, а в количественном отношении индивидуальное для каждого из них. Например, температура есть физическая величина, присущая всем физическим объектам, но разная для каждого из них: в комнате температура воздуха может быть 20 °С, а на улице –20 °С.

Принцип измерения – совокупность физических эффектов, на которых основаны измерения. Например, эффект Холла при измерении магнитной индукции, эффект Джозефсона при измерении электрического напряжения, эффект Зеебека при измерении температуры термопарой. Принцип измерения всегда присутствует при измерении неэлектрических величин.

Метод измерения – совокупность приёмов сравнения измеряемой физической величины с её единицей в соответствии с используемым принципом измерения. В соответствии с этим определением методы измерения делят на две большие группы:

- методы непосредственной оценки;
- методы сравнения.

В методах непосредственной оценки измеряемое значение физической величины получают по показаниям индикатора одного средства измерения, проградуированного в единицах этой измеряемой величины. Образцовая мера, представляющая единицу измерения, при этом встроена в средство измерения. Например, метод непосредственной оценки используется при измерении напряжения вольтметром, электрического тока амперметром, электрического сопротивления омметром и т. д.

Методы сравнения подразделяют на дифференциальный, нулевой, совпадения и замещения. Во всех методах сравнения измеряемая физическая величина сравнивается с однородной регулируемой физической величиной, значение которой детерминировано, т. е. известно. Например, измерение массы тела на гиревых весах. В средствах измерения, работающих на методе сравнения, используется внешняя мера измерения.

Вид измерения – совокупность приёмов обработки экспериментальных данных, используемых для нахождения результатов измерения. Всё многообразие измерений по этому признаку делят на четыре вида: прямые, косвенные, совместные и совокупные измерения.

Прямые измерения – измерения, при которых искомое значение физической величины находится непосредственно по показаниям средства измерения. Пример прямого измерения – измерение амперметром силы тока в электрической цепи.

Косвенные измерения – измерения, при которых искомое значение физической величины находится с использованием известной зависимости между этой величиной и другими величинами, подвергаемыми прямым измерениям. Пример косвенного измерения – измерение электрической мощности на участке электрической цепи с использованием показаний амперметра, вольтметра и известной зависимости

$$P = UI, \tag{2.1.1}$$

где U – показания вольтметра, I – показания амперметра.

Совместные измерения – одновременные измерения нескольких разноимённых физических величин с целью установления зависимости между ними. Пример совместного измерения – экспериментальное нахождение зависимости сопротивления резистора от его температуры:

$$R_t = R_0(1 + \alpha t + \beta t^2), \tag{2.1.2}$$

где R_t – сопротивление резистора при окружающей температуре t, R_0, α, β – коэффициенты, подлежащие экспериментальному определению.

Поставленная цель достигается решением системы из трёх уравнений, полученных в результате проведения трёх измерений сопротивления резистора при трёх различных значениях температуры спая. При проведении эксперимента измеряются разноименные физические величины: температура и электрическое сопротивление резистора.

Совокупные измерения – измерения нескольких одноименных физических величин, заключающиеся в проведении прямых измерений различных сочетаний этих величин и в последующем решении полученной системы алгебраических уравнений. Пример совокупного измерения – измерение сопротивления резисторов, соединённых треугольником, путём проведения трёх измерений сопротивлений между вершинами треугольника и последующего решения системы из трёх полученных алгебраических уравнений.

Качество измерения оценивается погрешностью измерения. Следует различать понятия погрешность измерения и погрешность результата измерения.

Погрешность измерения есть абсолютная разность между измеренным значением физической величины $x_{си}$ (показания средства измерения) и истинным значением физической величины x:

$$\Delta x_{си} = x_{си} - x. \qquad 2.1.3$$

Истинное значение физической величины идеальным образом отражает свойство данного объекта в количественном отношении, не зависит от нашего познания и является той абсолютной истиной, которую при проведении измерения пытаются выразить численным значением. Истинное значение физической величины не известно, поэтому не известна и погрешность измерения и, строго говоря, никогда не может быть найдена. Однако качество измерения, т. е. погрешность измерения, оценивать необходимо. Для этого в метрологии введено понятие *действительное значение* измеряемой физической величины x_d, под которым подразумевается результат измерения, полученный с наивысшей достижимой точностью. Абсолютная погрешность измерения при таком допущении определяется как разность показаний средства измерения и действительного значения физической величины:

$$\Delta x_{си} = x_{си} - x_{д}. \qquad 2.1.4$$

Погрешность результата измерения есть абсолютная разность между численным значением результата измерения $x_и$ и действительным значением измеряемой физической величины:

$$\Delta x = x_{и} - x_{д}. \qquad 2.1.5$$

Результат измерения получается после обработки измеренных значений физической величины, например введением поправки на методическую погрешность, уменьшением систематической составляющей инструментальной погрешности, статистической обработкой результатов многократных измерений при наличии случайной погрешности.

2.2. Классификация погрешностей измерения

По месту возникновения в измерительном эксперименте погрешности подразделяют на методические, инструментальные и случайные.

Методические погрешности закладываются оператором, проводящим измерительный эксперимент, на стадии планирования эксперимента. Эти погрешности определяются несовершенством выбранной математической модели объекта измерения, методом измерения и влиянием средства измерения на объект измерения.

Например, при измерении площади сечения цилиндра путём измерения его диаметра считается, что сечение цилиндра есть круг, а в действительности сечение не круг, а эллипс или ещё более сложная геометрическая фигура. Допускаемая при этом методическая погрешность измерения будет обусловлена несовершенством выбранной математической модели объекта измерения.

Примером методической погрешности, обусловленной влиянием средства измерения на объект измерения, может служить физический эксперимент измерения электрического напряжения вольтметром с входным сопротивлением, соизмеримым с внутренним сопротивлением источника измеряемого напряжения.

Случайная погрешность является следствием действия многих известных и неизвестных причин. Часть этих причин обусловлена внешними условиями проведения эксперимента (электромагнитные помехи, вибрация, ориентация средства измерения в пространстве и др.), часть – внутренними причинами, такими как внутренние шумы электронных элементов и дрейф нуля. Случайную погрешность, порождённую процессами внутри средства измерения, относят к инструментальной погрешности.

Инструментальная погрешность определяется средством измерения и делится на основную, дополнительную и динамическую.

Основная погрешность средства измерения нормируется в нормальных условиях эксплуатации, указанных в нормативно-технической документации (НТД) на средство измерения, например, температура окружающей среды 20 °С, напряжение питающей электрической сети 220 В.

Основная погрешность средства измерения, в свою очередь, делится на систематическую, случайную и погрешность гистерезиса.

Систематическая составляющая основной погрешности средства измерения определяется разбросом характеристик компонентов, образующих в совокупности средство измерения: резисторов, конденсаторов, электронных элементов.

По зависимости систематической погрешности от значения измеряемой величины различают аддитивную составляющую, не зависящую от значения измеряемой величины, и мультипликативную, зависящую от значения измеряемой величины.

Случайная составляющая основной погрешности средства измерения определяется процессами внутри элементов, образующих средство измерения: дрейф параметров элементов, внутренние шумы, внутренние электромагнитные поля, создаваемые трансформаторами, дросселями, реле, тиристорами и др.

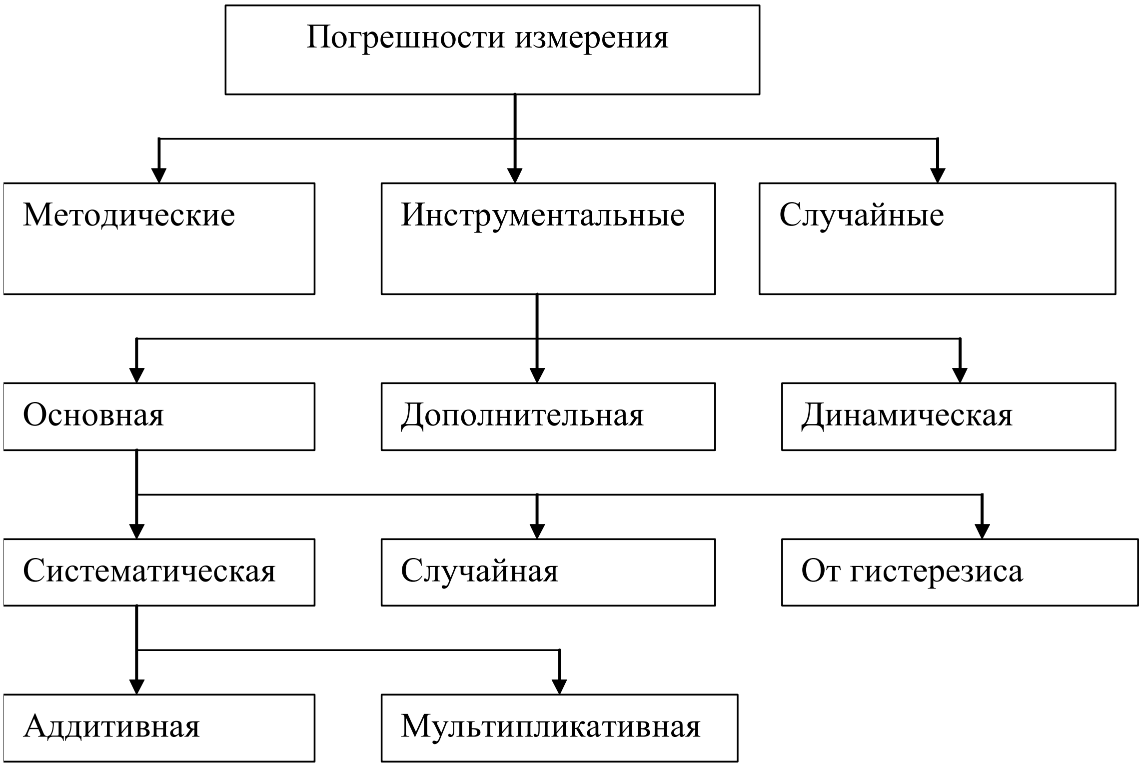


Рис. 2.2.1. Классификация погрешностей измерения

Погрешность гистерезиса определяется как разность показаний средства измерения, одно из которых есть показание, когда измеряемая величина подходит к установившемуся значению снизу (от меньшего значения, в том числе и от нуля), а другое показание, когда измеряемая величина подходит к установившемуся значению от большего значения (в пределе от верхнего предела измерения). Эта погрешность в основном присутствует у электромеханических средств измерения за счёт трения в опорах указателя значения измеряемой величины.

Дополнительная погрешность средства измерения появляется тогда, когда его условия эксплуатации отличаются от нормальных, но находятся в отведённом диапазоне значений, которые называются рабочими условиями эксплуатации. Например, температура окружающей среды от –10 до +30 °С, напряжение питающей сети от 200 до 250 В.

Динамические погрешности средства измерения возникают при условии, если измеряемая физическая величина изменяется во времени со скоростью, сравнимой с быстродействием средства измерения. В этой ситуации средство измерения не успевает следить за изменениями измеряемой физической величины, вследствие чего и появляется динамическая погрешность.

По способу выражения различают абсолютную, относительную и приведённую погрешности.

Абсолютная погрешность описывается формулой (2.1.3) и выражается в единицах измеряемой величины. Абсолютная погрешность не может в полной мере служить показателем качества результата измерения. Так, при измерении длины 100 мм абсолютная погрешность результата измерения в 0,1 мм может служить показателем высокой точности измерения, а при измерении длины 1 мм та же погрешность 0,1 мм будет служить показателем низкой точности измерения. Поэтому в метрологии вводится понятие *относительная погрешность* результата измерения.

Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности результата измерения к действительному значению измеряемой величины:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_{\partial}} \cong \frac{\Delta x}{x_{и}}. \qquad 2.2.1$$

Для нормирования инструментальной погрешности средства измерения используется часто приведённая погрешность.

Приведённая погрешность – это относительная погрешность, в которой абсолютная погрешность средства измерения отнесена к условно принятому значению x_m, постоянному во всём диапазоне измерений или его части:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x_m}. \qquad 2.2.2$$

Принятое значение x_m называют нормирующим. Чаще всего за это значение принимается верхний предел измерения данного средства измерения.

2.3. Методические погрешности измерения

Методические погрешности определяются математической моделью объекта измерения и выбранным методом измерения.

Отличительные особенности методических погрешностей состоят в том, что они не могут указываться в нормативно-технической документации на средство измерения, так как не зависят от него, а закладываются на стадии планирования измерительного эксперимента субъектом измерения, и в том, что они могут рассчитываться и исключаться из результата измерения введением соответствующей поправки.

2.3.1. Методическая погрешность, обусловленная математической моделью объекта измерения

Рассмотрим появление методической погрешности, обусловленной математической моделью объекта измерения, на конкретном примере измерения температуры спая термопары.

Математическая модель термопары основывается на эффекте Зеебека и в общем случае имеет вид

$$U = \alpha_1(T - T_0) + \alpha_2(T - T_0)^2 + \ldots + \alpha_n(T - T_0)^n, \qquad 2.3.1$$

где U – электрическое напряжение между холодными концами термопары, T – измеряемая температура спая, T_0 – некоторая заданная температура калибровки среды, окружающей холодные концы термопары, α_i $(i = 1...n)$ – коэффициенты Зеебека.

Для большинства контактов требуется примерно восемь коэффициентов α_i $(i = 1...n)$, чтобы получить погрешность измерения менее 1 %.

Чтобы получить линейную шкалу термометра, необходимо в математической модели термопары использовать всего один коэффициент Зеебека α_1. Математическая модель термопары в этом случае будет иметь вид

$$U = \alpha_1(T - T_0). \qquad 2.3.2$$

С целью упрощения последующих рассуждений примем $T_0 = 0$, в результате чего математическая модель термопары примет вид

$$U = \alpha_1 T. \qquad 2.3.3$$

Показания индикатора термометра, состоящего из термопары и вольтметра, при упрощенной модели термопары будут равны:

$$\varphi = k\alpha_1 T, \qquad 2.3.4$$

где φ – показания индикатора, k – коэффициент преобразования вольтметра, измеряющего напряжение термопары (2.3.3).

При использовании математической модели (2.3.1) термопары и $T_0 = 0$ показания термометра должны быть равны:

$$\varphi_d = k(\alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \ldots + \alpha_n T^n). \qquad 2.3.5$$

В результате упрощения математической модели термопары появляется методическая погрешность измерения температуры спая:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_d = -k(\alpha_2 T^2 + \ldots + \alpha_n T^n). \qquad 2.3.6$$

Подставляя в 2.3.6 измеренное значение температуры T из 2.3.4, получаем

$$\Delta\varphi = k\left[\alpha_2\left(\frac{\varphi}{k\alpha_1}\right)^2 + \ldots + \alpha_n\left(\frac{\varphi}{k\alpha_n}\right)^n\right]. \qquad 2.3.7$$

Результат измерения с введением поправки на методическую погрешность будет равен:

$$\varphi_d = \varphi + k\left[\alpha_2\left(\frac{\varphi}{k\alpha_1}\right) + \ldots + \alpha_n\left(\frac{\varphi}{k\alpha_n}\right)^n\right], \qquad 2.3.8$$

где φ – измеренное значение температуры термометром, использующим упрощенную математическую модель термопары.

2.3.2. Методическая погрешность, обусловленная влиянием средства измерения на объект измерения

Рассмотрим появление такой погрешности на примере измерения электрического напряжения вольтметром с входным сопротивлением, соизмеримым с внутренним сопротивлением источника напряжения, по методу непосредственной оценки (рис. 2.3.1).

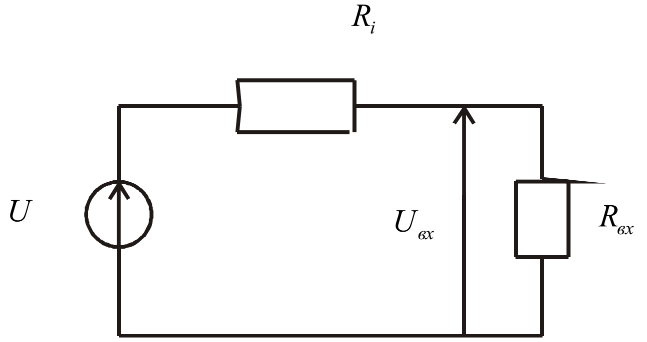


Рис. 2.3.1. Измерение напряжения U источником с внутренним сопротивлением R_i вольтметром с входным сопротивлением $R_{вх}$

Показания вольтметра будут определяться напряжением $U_{вх}$, действующим на его входных зажимах:

$$U_и = U_{вх} = U\frac{R_{вх}}{R_i + R_{вх}}. \qquad 2.3.9$$

Обозначим $R_i / R_{вх} = \alpha$, тогда

$$U_и = U\frac{1}{1+\alpha}. \qquad 2.3.10$$

Допустим $\alpha \prec\prec 1$, что в действительности имеет место, и разлагая (2.3.10) в ряд Тейлора, получим

$$U_и = U(1-\alpha). \qquad 2.3.11$$

Методическая погрешность, обусловленная влиянием средства измерения на объект измерения, будет равна:

$$\Delta U_м = U_и - U = -\alpha U. \qquad 2.3.12$$

Поскольку U не известно, но можно примерно считать

$$U \cong U_и, \qquad 2.3.13$$

то методическая погрешность равна:

$$\Delta U_м = -\alpha U_и. \qquad 2.3.14$$

Результат измерения при таком допущении с введением поправки на методическую погрешность будет равен:

$$U = U_и + \alpha U_и = U_и + \frac{R_i}{R_{вх}}U_и. \qquad 2.3.15$$

Из (2.3.15) видно, что для получения результата измерения с учтённой поправкой на методическую погрешность необходимо знать внутреннее сопротивление источника измеряемого напряжения и входное сопротивление вольтметра.

Рассмотрим измерение напряжения того же источника, но с использованием компенсационного метода измерения (рис. 2.3.2). Положение движка резистора R_k отградуировано в значениях напряжения U_k, получаемого от источника образцового напряжения U_0. При нулевых показаниях индикатора нуля измеряемое напряжение равно компенсирующему $U = U_k$ вне зависимости от значения внутреннего сопротивления источника напряжения, т. е. методическая погрешность, обусловленная наличием внутреннего сопротивления источника измеряемого напряжения, соизмеримого с входным сопротивлением вольтметра, имеющая место при использовании метода непосредственной оценки, отсутствует при использовании компенсационного метода измерения электрического напряжения.

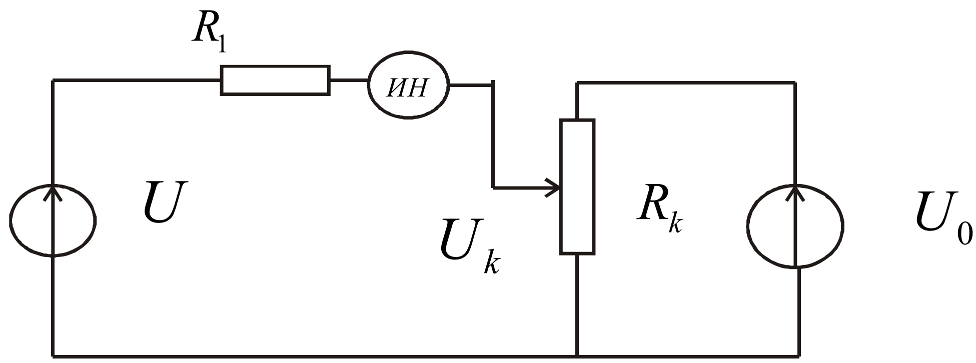


Рис. 2.3.2. Измерения напряжения компенсационным методом: U – измеряемое напряжение; U_k – компенсирующее напряжение; U_0 – образцовый источник напряжения; ИН – индикатор нуля; R_i – внутреннее сопротивление источника напряжения

2.4. Инструментальные погрешности измерения

2.4.1. Систематические инструментальные погрешности

Систематическая составляющая основной инструментальной погрешности приводит к появлению систематической погрешности в результатах измерения. Систематические инструментальные погрешности по виду зависимости от значения измеряемой физической величины делятся на аддитивные, которые не зависят от значения измеряемой физической величины, и мультипликативные, которые зависят от значения измеряемой физической величины (рис. 2.4.1).

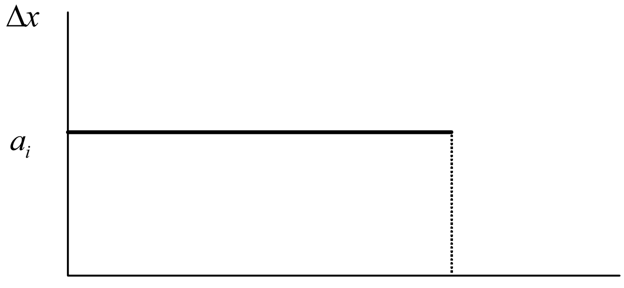


Рис. 2.4.1. Зависимость аддитивной погрешности одного экземпляра средства измерения от действительного значения измеряемой величины x_∂

Аддитивная систематическая погрешность постоянна во всём интервале изменения измеряемой физической величины x_∂ от 0 до $x_{\partial.\max}$ (рис. 2.4.1):

$$\Delta x_j = x_{uj} - x_\partial , \qquad 2.4.1$$

где Δx_j – абсолютная аддитивная погрешность измерения, $x_и$ – измеренное значение (показания прибора), $x_д$ – действительное (истинное) значение измеряемой физической величины.

Для конкретного экземпляра средства измерения аддитивная погрешность – величина постоянная. У различных экземпляров измерительных приборов одного типа аддитивные составляющие систематической погрешности различны и для всего типа приборов лежат в пределах от $-a_m$ до a_m (рис. 2.4.2). Аддитивная погрешность типа средств измерения есть величина случайная, определяемая множеством

$$\Delta x = a = \{-a_m \cdots a_i \cdots a_m\}. \qquad 2.4.2$$

Аддитивные погрешности называют погрешностями от смещения нуля шкалы отсчётов и для типа средств измерения задаются их границами

$$\Delta x_m = \pm a_m. \qquad 2.4.3$$

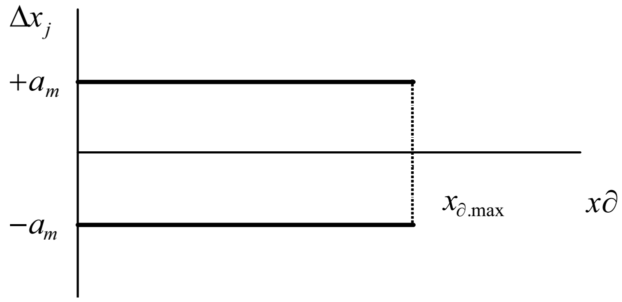


Рис. 2.4.2. Зависимость аддитивной погрешности от $x_д$ для одного типа средств измерения

Мультипликативная составляющая систематической погрешности Δx_j для конкретного j-го средства измерения зависит от значения измеряемой физической величины (рис. 2.4.3),

$$\Delta x_j = \pm b_j x_\partial, \qquad 2.4.4$$

где b_j – коэффициент, численно определяющий мультипликативную погрешность.

Эту погрешность называют погрешностью уравнения преобразования средства измерения (рис. 2.4.3).

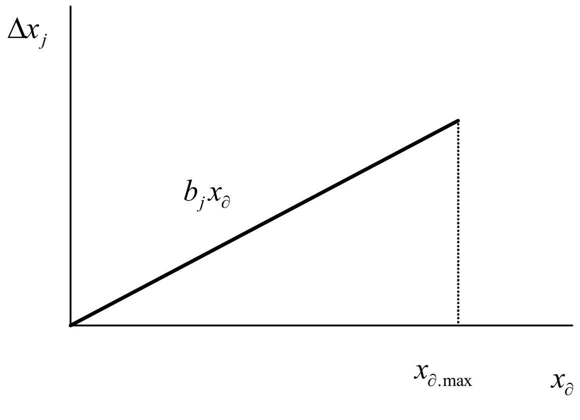


Рис. 2.4.3. Зависимость мультипликативной погрешности одного экземпляра средства измерения от действительного значения измеряемой величины $x_д$

Коэффициент b для каждого экземпляра средства измерения одного типа свой, индивидуальный. Для всего множества средств измерения одного типа коэффициент b – величина случайная, определяемая множеством

$$b = \{-b_m \cdots b_i \cdots b_m\}, \qquad 2.4.5$$

где b_m – границы интервала, в котором лежат значения b отдельных экземпляров средств измерения (рис. 2.4.4).

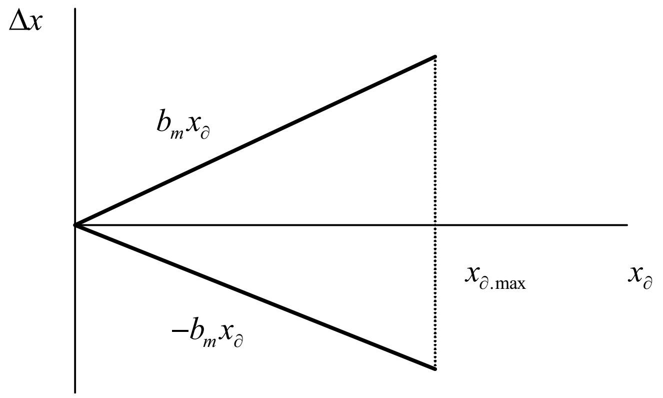


Рис. 2.4.4. Мультипликативная погрешность для одного типа средств измерения

Мультипликативная погрешность для типа средств измерения определяется границами интервала коэффициентов b:

$$\Delta x_m = \pm b_m x_\partial. \qquad 2.4.6$$

Для многих типов средств измерения в систематическую составляющую основной инструментальной погрешности средств измерения входят как аддитивная, так и мультипликативная погрешности. Для таких средств измерения (рис. 2.4.5) погрешность равна:

$$\Delta x_j = a_j + b_j x_\partial. \qquad 2.4.7$$

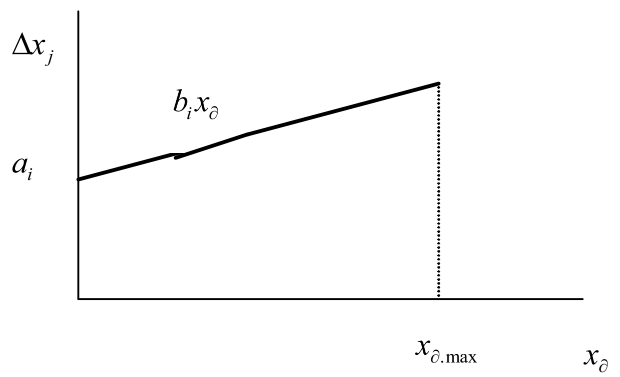


Рис. 2.4.5. Аддитивная и мультипликативная погрешности для одного типа средств измерения

Для всех приборов погрешность находится в части поверхности на рис 2.4.6 между линиями $-b_m x_\partial$ и $b_m x_\partial$ и определяется этими границами:

$$\Delta x_m = \pm(a_m + b_m x_\partial). \qquad 2.4.8$$

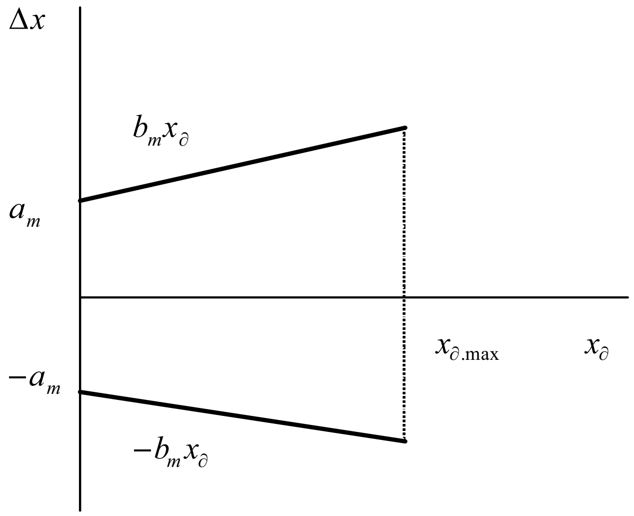


Рис. 2.4.6. Аддитивная и мультипликативная погрешности для одного типа средств измерения и их зависимость от измеряемой величины

2.4.2. Способы уменьшения систематической погрешности измерения

Постоянная систематическая погрешность результата измерения, обусловленная основной систематической погрешностью средства измерения, может быть обнаружена только путём сравнения показаний данного средства измерения с показаниями другого, однотипного, но более точного средства измерения. В предельном случае это может быть эталонное средство измерения.

Для уменьшения инструментальной систематической погрешности результата измерения применяют различные способы. Приведём наиболее простые и эффективные из них.

Метод замещения

Суть метода можно пояснить простым примером. Вольтметром измерили электрическое напряжение некоторого источника и получили показания 5,345 В. Затем к вольтметру подключили источник эталонного регулируемого напряжения, на котором установили значение 5,345 В. Вольтметр при этом выдал показания 5,348 В, завышенные на 0,003 В. Разность в показаниях 0,003 В и будет не исключённой систематической погрешностью используемого средства измерения. Чтобы исключить эту погрешность, в результат измерения необходимо ввести поправку и представить его в виде:

$$U_{\partial} = 5,345 - 0,003 \pm \Delta U_{osp} \ \text{В}, \qquad 2.4.9$$

где U_{∂} – действительное значение измеряемого напряжения, ΔU_{osp} – границы систематической погрешности эталонного средства измерения.

Метод компенсации по знаку

Этот метод предусматривает проведение двух измерений так, чтобы систематическая погрешность входила в результат каждого из них с разным знаком.

Например, проводим измерение напряжения U_{∂} вольтметром, с аддитивной погрешностью ΔU.

Результат первого измерения

$$U_{\partial} = U_{u1} + \Delta U, \qquad 2.4.10$$

где U_{u1} – показания вольтметра, ΔU – неизвестная систематическая аддитивная погрешность вольтметра.

Изменим полярность подключения источника измеряемого напряжения и проведём его измерение. Получим результат

$$U_{\partial} = U_{u2} - \Delta U. \qquad 2.4.11$$

Для исключения аддитивной составляющей инструментальной погрешности средства измерения находим среднее значение результатов двух измерений.

Из (2.4.10) и (2.4.11) следует

$$U_{u1} + \Delta U = U_{u2} - \Delta U, \qquad 2.4.12$$

откуда

$$\Delta U = \frac{U_{u2} - U_{u1}}{2}. \qquad 2.4.13$$

Подставляя (2.4.13) в (2.4.10), получим

$$U_{\partial} = U_{u1} + \frac{U_{u2} - U_{u1}}{2} = \frac{U_{u1} + U_{u2}}{2}. \qquad 2.4.14$$

Как видим, обработанные таким образом результаты измерения не содержат систематической аддитивной погрешности измерения.

Метод рандомизации

Суть метода состоит в том, что неизвестная величина x измеряется различными типами средств измерения с различными систематическими погрешностями. Систематические погрешности каждого участвующего в эксперименте средства измерения являются величинами случайными.

Для j-го средства измерения показания будут равны:

$$x_j = x_\partial - \Delta x_j , \qquad 2.4.15$$

где Δx_j – систематическая погрешность j-го средства измерения.

Среднее значение показаний всех N средств измерения, задействованных в проведении эксперимента, равно:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_\partial - x_j) = x_\partial - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Delta x_j . \qquad 2.4.16$$

Из полученного выражения следует, что в результате описанного приёма, именуемого рандомизацией, систематическая погрешность уменьшается в N раз, где N – число участвующих в измерительном эксперименте средств измерения.

2.4.3. Случайная инструментальная погрешность

Случайная составляющая основной инструментальной погрешности определяется различными флуктуационными процессами внутри средства измерения, которые или модулируют полезный сигнал (мультипликативная помеха), или добавляют к нему сигнал помехи (аддитивная помеха). К модуляции полезного сигнала приводит временной дрейф параметров средства измерения, определяющих его уравнение преобразования.

Аддитивные помехи возникают в результате действия внутренних шумов и электромагнитных излучений, создаваемых элементами средства измерения: диодами, транзисторами, трансформаторами, дросселями, реле, тиристорами и другими коммутирующими элементами.

Случайную составляющую основной инструментальной погрешности практически невозможно отделить от случайной погрешности, создаваемой внешними по отношению к средству измерения причинами, поэтому оценка случайной погрешности измерения проводится без разделения её на внутреннюю и внешнюю составляющие.

2.4.4. Гистерезисная инструментальная погрешность

Погрешность гистерезиса определяется как разность показаний средства измерения, одно из которых есть показание, когда измеряемая величина подходит к установившемуся значению снизу (от меньшего значения, в том числе и от нуля), а другое показание, когда измеряемая величина подходит к установившемуся значению от большего значения (в пределе от верхнего предела измерения). Эта погрешность в основном присутствует у электромеханических средств измерения за счёт трения в опорах указателя значения измеряемой величины. Оценить погрешность от гистерезиса можно только экспериментальным путём. По своему проявлению гистерезисная погрешность является случайной и при повторениях измерительного эксперимента она получается разной, а потому должна оцениваться с использованием теории вероятностей.

2.4.5. Дополнительная и динамическая инструментальные погрешности

Дополнительная погрешность средства измерения появляется тогда, когда его условия эксплуатации отличаются от нормальных, но находятся в отведённом диапазоне значений, которые называются рабочими условиями эксплуатации. Например, температура окружающей среды от −10 до +30 °С, напряжение питающей сети от 200 до 250 В.

Динамическая погрешность средства измерения возникает при условии, если измеряемая физическая величина изменяется во времени со скоростью, сравнимой с быстродействием средства измерения. В этой ситуации средство измерения не успевает следить за изменениями измеряемой физической величины, вследствие чего и появляется динамическая погрешность. Подробнее вопросы, связанные с динамической погрешностью, рассмотрены в главе 8.

2.5. Случайные погрешности измерения

Случайные погрешности измерения изменяются непредсказуемо от одного измерения к другому при нахождении значения одной и той же физической величины с помощью одного и того же средства измерения в неизменных условиях измерения.

Случайные погрешности порождаются различными причинами, источники которых лежат или внутри средства измерения, или находятся вне средства измерения (рис. 2.2.1). Разделить действие этих причин практически невозможно.

Значение случайной погрешности измерения можно существенно уменьшить, если провести статистическую обработку значений многократных измерений.

При проведении выбранным средством измерения многократных измерений одной и той же физической величины будет получено множество измеренных значений:

$$x_u = \{x_{u1} \cdots x_{ui} \cdots x_{un}\}, \qquad 2.5.1$$

где n – число проведённых измерений.

Среднее значение измеренных значений

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ui} \qquad 2.5.2$$

представляет собой лучшую возможную оценку значения $x_д$.

Погрешность отдельного измерения оценивается как разность:

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}. \qquad 2.5.3$$

Мерой рассеивания x_i в окрестностях $\bar{x}$ служит дисперсия

$$D[\Delta x_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \qquad 2.5.4$$

Обычно для оценки рассеивания x_i в метрологии используют среднее квадратическое отклонение (СКО)

$$\sigma = \sqrt{D[\Delta x_i]} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \qquad 2.5.5$$

Отклонение $\bar{x}$ от $x_д$ оценивается СКО:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \qquad 2.5.6$$

Таким образом, после проведения статистической обработки случайных погрешностей многократных измерений, случайная погрешность результата измерения будет оцениваться величиной σ_x.

2.6. Математическая модель погрешности измерения

Математическую модель погрешности измерения в общем случае можно представить в виде объединения трёх основных составляющих:

$$\Delta_и = \Delta_м * \Delta * \overset{o}{\Delta}, \qquad 2.6.1$$

где $\Delta_м$ – методическая погрешность измерения, Δ – инструментальная погрешность измерения, $\overset{o}{\Delta}$ – случайная погрешность, обусловленная действием внешних причин.

Методическая погрешность, как правило, рассчитывается и на неё вводятся поправки в результат измерения, поэтому её из дальнейшего рассмотрения исключаем.

Инструментальная погрешность определяется классом точности средства измерения или описывается математической моделью (5.1.1).

Если при проведении технических измерений границы внутренней случайной составляющей основной инструментальной погрешности

$$k\sigma[\overset{o}{\Delta}_o] \prec 0{,}1\Delta_{osp}, \qquad 2.6.2$$

то этой составляющей погрешности при обработке результатов измерений можно пренебречь.

Также можно пренебречь и гистерезисной составляющей основной инструментальной погрешности, если

$$k\sigma[\overset{o}{\Delta}_{oH}] \prec 0{,}1\Delta_{osp}. \qquad 2.6.3$$

При выполнении условий (2.6.2) и (2.6.3) в основной инструментальной погрешности остаётся только систематическая составляющая Δ_{os}.

Динамические погрешности привязаны к конкретным типам средств измерения, общих подходов для их расчётов нет, поэтому в данном учебном пособии на них остановимся в главе 8.

Дополнительная инструментальная погрешность в нормативно-технической документации указывается формулой или границами в рабочем диапазоне влияющих величин.

В большинстве случаев технических измерений математическая модель погрешности измерения имеет вид

$$\Delta_и = \Delta_{os} * \overset{o}{\Delta}, \qquad 2.6.4$$

т. е. является объединением систематической инструментальной погрешности и случайной погрешности, обусловленной действием внешних причин.

Систематическая инструментальная погрешность задаётся классом точности средства измерения по ГОСТ 8401–80 или границами систематической погрешности Δ_{osp} и её среднеквадратическим отклонением $\sigma[\Delta_{os}]$ по ГОСТ 8.009–84.

2.7. Формы представления результатов измерений

В соответствии с методическими указаниями Госстандарта МИ 1317–86 результаты измерения могут представляться в двух вариантах.

В первом варианте в качестве характеристик погрешности измерения используются точечные оценки, такие как среднее арифметическое значение или среднеквадратическое отклонение от среднего арифметического. Этот вариант применяют тогда, когда результат данного измерения будут использовать совместно с результатами других измерений с целью получения некоторого общего результата измерений. Например, при выполнении косвенных измерений используются результаты измерения нескольких приборов для определения по установленной формуле некоторого другого результата.

Во втором варианте в качестве характеристик погрешности используют интервальные оценки, т. е. границы, в пределах которых находятся погрешности измерения с заданной доверительной вероятностью.

Рассмотрим пример представления результатов измерения по первому варианту. Провели измерение добротности катушки индуктивности.

Результаты измерения: добротность катушки индуктивности $Q = 70$, среднеквадратическое отклонение систематической погрешности от среднего арифметического значения $\sigma[\Delta_{os}] = 0{,}1$, среднеквадратическое отклонение случайной погрешности $\sigma[\overset{o}{\Delta}] = 0{,}04$, диапазон значений измеряемой добротности от 50 до 80, диапазон температур окружающей среды от 15 до 25 °С.

Приведём пример представления результатов измерения по второму варианту. Измерили расход жидкости. Результаты измерения: расход жидкости $N = 30$ м^3/с, границы погрешности измерения $\Delta_{osp} = \pm\, 0{,}2$ м^3/с с доверительной вероятностью $P_д = 0{,}95$, температура жидкости от 15 до 30 °С, диапазон значений измеряемого расхода от 10 до 50 м^3/с.

2.8. Упражнения и задачи

Задача 2.8.1

Условия задачи. Требуется определить методическую погрешность косвенного измерения электрической мощности, потребляемой резистором R при пропускании по нему электрического тока I_R. Схема измерения представлена на рис. 2.8.1. Величина сопротивления резистора $R = 1000$ Ом, внутреннее сопротивление амперметра $R_A = 1$ Ом; входное сопротивление вольтметра $R_B = 1000$ Ом; показания амперметра $I_A = 1{,}5$ А; показания вольтметра $U_B = 100$ В.

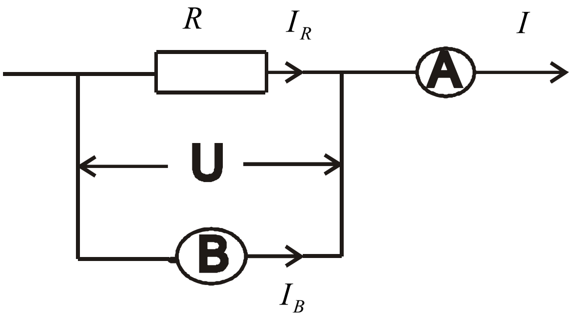


Рис. 2.8.1. Измерение мощности по методу амперметра и вольтметра (вариант 1)

Решение задачи. По показаниям приборов измеренное значение мощности равно:

$$P_И = U \cdot I, \tag{2.8.1}$$

где U – показания вольтметра, I – показания амперметра.

По условиям задачи $U = 100$ В, $I = 1{,}5$ А, поэтому $P_И = 100 \cdot 1{,}5 = 150$ Вт. Действительное значение потребляемой мощности равно:

$$P_д = U \cdot I_R, \tag{2.8.2}$$

где I_R – электрический ток, протекающий по резистору R.

Показания амперметра определяются суммой токов:

$$I = I_R + I_B. \tag{2.8.3}$$

После подстановки (2.8.3) в (2.8.1) получим:

$$P_И = U \cdot (I_R + I_B) = P_д + U \cdot I_B. \tag{2.8.4}$$

Второе слагаемое в (2.8.4) определяет методическую погрешность измерения $\Delta P_м$, обусловленную влиянием на результат измерения входного сопротивления вольтметра:

$$\Delta P_м = U \cdot I_B = \frac{U^2}{R_B}. \tag{2.8.5}$$

Результат измерения после внесения поправки на методическую погрешность будет равен:

$$P_д = P_И - \frac{U^2}{R_B}. \tag{2.8.6}$$

После подстановки численных значений получаем:

$$P_д = 150 - 10 = 140 \text{ Вт},$$

$$\Delta P_м = 10 \quad Вт,$$

$$\delta_м = \frac{10}{140} \cdot 100 = 7{,}1 \ \%.$$

Таким образом, если результат измерения представить в соответствии с формулой (2.8.1), используя только показания приборов, то будет допущена методическая погрешность, относительное значение которой равно 7,1 %. Если результат измерения представить в соответствии с формулой (2.8.6), то методическая погрешность будет исключена.

При косвенном измерении мощности (рис. 2.8.1) методическая погрешность определяется только входным сопротивлением вольтметра. Чем больше входное сопротивление вольтметра, тем меньше методическая погрешность. При $R_В \to \infty$ имеем $\Delta P_м \to 0$. Внутреннее сопротивление амперметра на методическую погрешность при этом не влияет.

Задача 2.8.2

Условия задачи. Проведём косвенное измерение мощности на том же резисторе, используя те же средства измерения, но по другой схеме их включения (рис. 2.8.2).

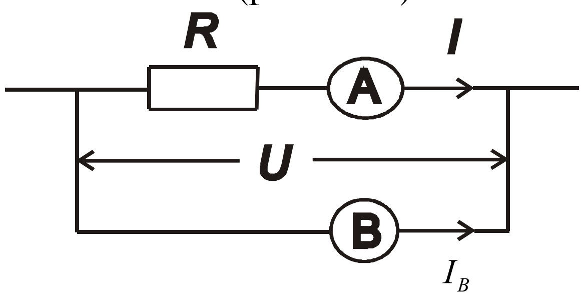


Рис. 2.8.2. Измерение мощности по методу амперметра и вольтметра (вариант 2)

Решение задачи. Измеренное значение мощности по показаниям приборов равно:

$$P_И = U \cdot I. \qquad 2.8.7$$

Показания вольтметра равны сумме падений напряжения на резисторе R и на внутреннем сопротивлении $R_А$ амперметра:

$$U = I \cdot R + I \cdot R_A. \qquad 2.8.8$$

Подставляя (2.8.8) в (2.8.7), получим:

$$P_И = I^2 R + I^2 R_A, \qquad 2.8.9$$

$I^2 R = P_д$ – действительное значение мощности, потребляемой резистором, $I^2 R_A = \Delta P_м$ – методическая погрешность измерения, определяемая внутренним сопротивлением амперметра.

Результат измерения с введением поправки на методическую погрешность будет равен:

$$P_д = P_И - I^2 R_A. \qquad 2.8.10$$

Подставляя численные значения показаний приборов $U = 100$ В и $I = 1{,}5$ В, получим:

$$P_д = 150 - (1{,}5)^2 \cdot 1 = 150 - 2{,}3 = 147{,}7 \text{ Вт},$$

$$\Delta P_м = 2{,}3 \text{ Вт},$$

$$\delta_м = \frac{2{,}3}{147{,}7} \cdot 100 = 1{,}5 \text{ \%}.$$

Методическая погрешность, при использовании для измерения схемы рис. 2.8.2, определяется только внутренним сопротивлением амперметра и не зависит от входного сопротивления вольтметра.

В приведённых примерах методическая погрешность обусловлена влиянием средств измерения на объект измерения.

Задача 2.8.3

Условия задачи. Необходимо измерить площадь сечения цилиндра, при этом возможны три математические модели объекта измерения (рис. 2.8.3).

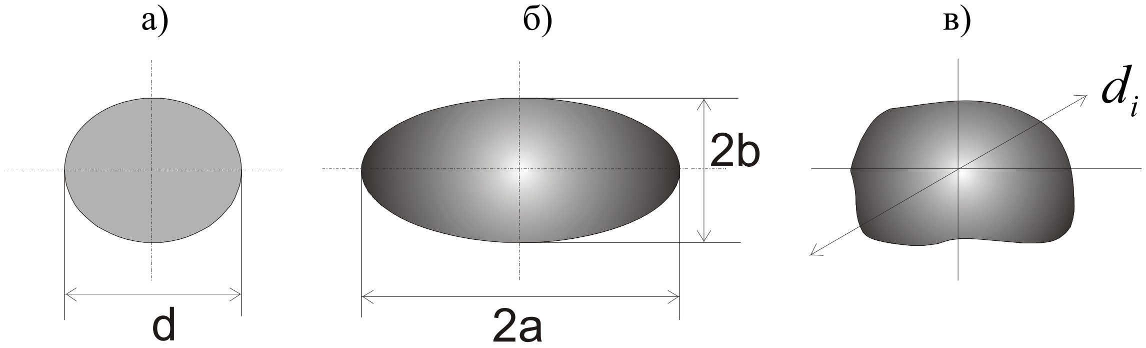


Рис. 2.8.3. Формы сечения цилиндра:
а) круглая; б) эллиптическая; в) сложная

Решение задачи. Модель первая применима для цилиндра, сечение которого имеет форму круга:

$$S = \frac{\pi d^2}{4}; \qquad 2.8.11$$

модель вторая пригодна для цилиндра с эллиптической формой сечения:

$$S = \pi ab, \qquad 2.8.12$$

модель третья, самая универсальная, она пригодна для цилиндров со сложной формой сечения:

$$S = \frac{\pi d_{cp}}{4}, \qquad 2.8.13$$

где

$$d_{cp} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i. \qquad 2.8.14$$

Измерения d_i проводятся через равные угловые интервалы $\Delta\varphi$.

Если реальные объекты измерения близки ко второй или третьей математической модели, а для измерения площади сечения используется первая модель, как наиболее просто реализуемая технически, то при этом будет допускаться методическая погрешность, обусловленная несовершенством выбранной модели объекта измерения. Методическую погрешность в этом случае невозможно учесть введением поправки.

Задача 2.8.4

Условия задачи. Из изготовленной опытной партии средств измерения взяли 10 экземпляров и экспериментально определили их инструментальные погрешности. Анализ результатов показал, что погрешности являются аддитивными. Их значения представлены в табл. 2.8.1.

Таблица 2.8.1

N_{cu}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	0,010	0,020	0,015	0,016	0,017	–0,010	–0,015	–0,014	–0,020	0,000

Требуется определить границы, в которых лежат аддитивные погрешности средств измерения исследуемой партии.

Решение задачи. Из табл. 2.8.1 следует, что максимальное положительное значение аддитивной погрешности: $a_m = 0{,}02$, а максимальное отрицательное значение $-a_m = -0{,}02$. Следовательно, аддитивная погрешность средств измерения исследуемой партии находится в пределах

$$-0{,}02 \prec a \prec 0{,}02.$$

Задача 2.8.5

Условия задачи. Проведём многократные измерения физической величины. Получим *n* измеренных значений, представленных в табл. 2.8.2.

Таблица 2.8.2

n_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x_{ui}	1,010	1,020	1,015	1,010	1,020	1,000	1,014	1,013	1,011	1,010	1,015	1,011	1,012	1,010
Δx	–0,002	0,008	0,003	–0,002	0,008	–0,012	0,002	0,001	–0,001	–0,002	0,003	–0,001	0,000	–0,002
$\Delta x^2 \cdot 10^6$	4	64	9	4	64	144	4	1	1	4	9	1	0	4

Требуется определить среднее значение измеряемой физической величины, дисперсию и СКО.

Решение задачи. Среднее значение измеряемой физической величины определяем по формуле (2.5.2)

$$\bar{x}_u = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ui}.$$

Подставив в указанную формулу измеренные значения, получим

$$\bar{x}_u = \frac{1}{14}\cdot 14,188 \cong 1,013.$$

Дисперсия измеренных значений

$$D[\Delta x_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2.$$

После подстановки численных значений

$$D[\Delta x_i] = \frac{1}{13}\cdot 249\cdot 10^{-6} = 19,2\cdot 10^{-6}.$$

Среднее квадратическое отклонение результатов отдельных измерений

$$\sigma(\Delta x_i) = \sqrt{19,2\cdot 10^{-6}} = 4,4\cdot 10^{-3}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определения понятиям «объект измерения» и «субъект измерения».
2. Что такое математическая модель объекта измерения?
3. Дайте пояснения определениям: измерение, принцип измерения, метод измерения.
4. Назовите и поясните четыре вида измерений.
5. Объясните связь между погрешностью измерения, истинным и действительным значениями измеряемой величины.
6. Назовите основные составляющие погрешности измерения в зависимости от места их появления в измерительном эксперименте.
7. Приведите классификацию инструментальной погрешности измерения.
8. Опишите классификацию погрешности измерения по способу её выражения (абсолютная, относительная, приведённая).
9. Покажите на конкретном примере механизм появления методической погрешности измерения, обусловленной математической моделью объекта измерения, и учёт её в конечном результате измерения.
10. Покажите на конкретном примере появление методической погрешности от влияния средства измерения на объект измерения.
11. Аддитивная инструментальная погрешность, Как она задаётся в нормативно-технической документации средства измерения?
12. Как связана мультипликативная погрешность СИ со значением измеряемой физической величины?
13. Средства измерения с аддитивной и мультипликативной составляющими инструментальной погрешности.
14. Поясните суть метода замещения, используемого для уменьшения систематической погрешности измерения.
15. В чём заключается метод компенсации по знаку, используемый для уменьшения систематической погрешности измерения?
16. В чём заключается метод рандомизации, используемый для уменьшения систематической погрешности измерения?
17. Назовите причины появления случайной инструментальной погрешности.
18. Назовите причины появления гистерезисной инструментальной погрешности измерения.
19. Каким приёмом уменьшается случайная погрешность измерения?
20. Опишите математическую модель погрешности измерения.
21. Назовите две формы представления результатов.

3. НОРМИРОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ НА СТАДИИ РАЗРАБОТКИ СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ

3.1. Средства измерения

Для проведения измерительного эксперимента используются различные средства измерения. По ГОСТ 16263–70 *средство измерения* определяется как техническое средство, используемое для измерения и имеющее нормированные метрологические характеристики. В первую очередь у средства измерения нормируется инструментальная погрешность.

Средства измерения делятся на элементарные и комплексные [5]. К элементарным средствам измерения относят меры, измерительные преобразователи и компараторы. К комплексным средствам измерения относят измерительные приборы, измерительные установки и информационно-измерительные системы.

Элементарным средством измерения является измерительный преобразователь. *Измерительный преобразователь* – это техническое устройство, построенное на определённом физическом принципе и выполняющее одно частное измерительное преобразование: преобразование одной физической величины в другую физическую величину или операцию преобразования входного сигнала x в выходной сигнал y, информативный параметр которого с заданной степенью точности связан с информативным параметром входного сигнала. Например, электронный усилитель электрического сигнала, по-другому называемый масштабным преобразователем, имеет уравнение преобразования

$$u_{\text{вых}} = k_y \cdot u_{\text{вх}}, \qquad 3.1.1$$

где $u_{\text{вх}}$ – уровень входного напряжения усилителя, $u_{\text{вых}}$ – уровень выходного напряжения усилителя, k_y – коэффициент преобразования (коэффициент усиления).

В нормативно-технической документации на усилитель обязательно должно быть указано значение коэффициента усиления и его допустимый разброс. Если допустимое отклонение коэффициента усиления от номинального значения не указано, то такой усилитель не может считаться, в соответствии с приведённым выше определением, измерительным преобразователем.

Измерительный преобразователь, на входе которого действует измеряемая физическая величина, а на выходе образуется электрический сигнал, информативный параметр которого связан со значением физической величины, называется *первичным измерительным преобразователем*. Примеры первичных измерительных преобразователей: термопара, преобразователь Холла, тензорезистор. Первичный преобразователь, конструктивно определённым образом оформленный для размещения на объекте контроля, физическая величина которого измеряется, называется *датчиком*.

Промежуточные измерительные преобразователи осуществляют различные преобразования сигналов. Преобразователи, осуществляющие преобразование сигнала в форму, удобную для визуального восприятия, называют *конечными преобразователями* или индикаторами: стрелочными или цифровыми.

Измерительный прибор – это средство измерения, предназначенное для получения значения измеряемой физической величины в форме, доступной для восприятия оператором, проводящим измерительный эксперимент (отклонение стрелки показывающего аналогового индикатора, показание цифрового индикатора).

Каждый измерительный преобразователь и измерительный прибор имеют *уравнение преобразования,* связывающее информативные параметры входного и выходного сигналов:

$$y = kx, \qquad 3.1.2$$

где x – информативный параметр входного сигнала, y – информативный параметр выходного сигнала, k – коэффициент преобразования (для линейного преобразования).

Для первичного измерительного преобразователя

$$y_д = k_д \cdot x_д, \qquad 3.1.3$$

где $x_д$ – действительное значение измеряемой физической величины; $y_д$ – значение информативного параметра выходного сигнала первичного преобразователя.

Для оконечного преобразователя (индикатора)

$$x_и = k_и \cdot y_и, \qquad 3.1.4$$

где $x_и$ – показания индикатора; $y_и$ – сигнал на входе индикатора; $k_и$ – коэффициент преобразования индикатора.

Измерительный прибор представляет собой набор, определённым образом включённых измерительных преобразователей. Если измерительные преобразователи включены последовательно, то

$$x_и = k_д \cdot k_1 \cdots k_i \cdots k_и, x_д. \qquad 3.1.5$$

В общем случае при наличии обратной связи

$$x_и = f(k_д \cdots k_i \cdots k_и \cdot x_д). \qquad 3.1.6$$

Выражение (3.1.6) является уравнением преобразование измерительного прибора.

Мера – это средство измерения, предназначенное для воспроизведения размеров физической величины в установленных единицах и с известной погрешностью.

Операцию воспроизведения физической величины можно формально представить как преобразование цифрового кода N в заданную физическую величину $x_д$, основанное на единице данной физической величины $[Q]$:

$$x_д = N[Q]. \qquad 3.1.7$$

На выходе меры находится квантованная аналоговая физическая величина $x_д$ заданного размера, а на входе находится числовое значение величины N.

Выражение (3.1.7) является уравнением преобразования меры.

Например, для магазина сопротивлений (многозначная мера) на входе находится число N, а на выходе электрическое сопротивление R_0N, где R_0 – единица сопротивления (ом), а N – числовой код, устанавливаемый на входе магазина оператором. Для эталона единицы физической величины $x_д = 1 \cdot [Q]$.

Меры могут быть элементарными, уравнение преобразования для которых (3.1.7), а могут быть комплексными, состоящими из элементарной меры и измерительных преобразователей одной физической величины в другую.

Например, образцовый генератор частоты RC,

$$\omega = \frac{1}{N[R]C},$$

состоит из меры электрического сопротивления $N[R]$ и элементарного преобразователя сопротивления в частоту периодических электрических колебаний.

Различают три вида уравнений преобразования средств измерения: номинальное, индивидуальное и действительное.

Номинальное уравнение преобразования указывается в нормативно-технической документации на данный тип средства измерения формулой или графиком. Оно устанавливается для средств измерения массового производства.

Индивидуальное уравнение преобразования устанавливается для конкретного средства измерения путём индивидуальной градуировки при определённом значении влияющих параметров.

Действительное уравнение преобразования отражает реально существующую связь между информативными параметрами входного и выходного сигнала. Существует это уравнение преобразования только теоретически, поскольку точное значения коэффициента преобразования неизвестно.

3.2. Расчёт основной погрешности измерительного преобразователя

Инструментальная погрешность средства измерения, будь то измерительный преобразователь или измерительный прибор, складывается из трёх составляющих: основной, дополнительной и динамической.

Основная составляющая погрешности зависит только от средства измерения, тогда как дополнительная и динамическая зависят не только от средства измерения, но и от многих внешних факторов, потому в чистом виде инструментальными погрешностями их можно считать только с некоторыми оговорками.

Основная составляющая инструментальной погрешности средства измерения, в свою очередь, является комбинацией систематической, случайной и гистерезисной составляющих. Гистерезисная составляющая погрешности имеет место у аналоговых средств измерения и её расчёт практически невозможен. Случайная составляющая инструментальной погрешности имеет много причин и её расчёт также практически невозможен. Наибольшая по численному значению систематическая составляющая основной инструментальной погрешности может рассчитываться. На её расчёте на стадии проектирования остановимся.

Рассмотрим вначале порядок расчёта систематической погрешности измерительного преобразователя.

Имеем измерительный преобразователь, у которого информативный параметр входного сигнала имеет значение $x_д$.

Информативный параметр выходного сигнала по номинальному уравнению преобразования равен:

$$y_н = f(a_{1н} \ldots a_{пн} \ldots x_д), \qquad 3.2.1$$

где $a_{1н}...a_{nн}$ – номинальные значения элементов, определяющих уравнение преобразования (резисторы, конденсаторы, индуктивности, микросхемы).

Действительные значения элементов, определяющих уравнение преобразования, отличаются от номинальных значений, указанных в нормативно-технической документации:

$$a_{1д} = a_{1н} + \Delta a_1 \ldots a_{nд} = a_{nн} + \Delta a_n, \qquad 3.2.2$$

$a_{1д}...a_{nд}$ – действительные значения параметров элементов, определяющих уравнение преобразования, $\Delta a_{1д}...\Delta a_{nд}$ – отклонения действительных значений параметров от номинальных значений.

Например, резистор с номинальным значением 100 Ом и с допустимым отклонением 1 % в действительности может иметь значение электрического сопротивления в пределах 99...101 Ом. Пределы отклонения значения сопротивления резистора от номинального значения определяются как доверительный интервал с доверительной вероятностью 2σ или 3σ.

Действительное уравнение преобразования измерительного преобразователя

$$y_д = (a_{1д} \ldots a_{nд}, x_д) + \Delta y_a \qquad 3.2.3$$

отличается от номинального (3.2.1). Величина Δy_a определяется смещением нуля измерительного преобразователя ($y_д = \Delta y_a$ при $x_д = 0$).

Абсолютная погрешность измерительного преобразователя определяется как разность значений информативного параметра выходного сигнала, полученных по номинальному и действительному уравнениям преобразования:

$$\Delta y = y_н - y_д = f(a_{1н} \ldots a_{nн}, x_д) - f(a_{1д} \ldots a_{nд}, x_д) - \Delta y_a. \qquad 3.2.4$$

Представим, что влияющие параметры в номинальном уравнении преобразования получили дифференциально малые приращения $da_1...da_n$. Тогда информативный параметр выходного сигнала получит также дифференциально малое приращение

$$dy = \frac{\partial f(a_{1н} \ldots a_{пн}, x_{\partial})}{\partial a_1} da_1 + \cdots \frac{df(a_{1н} \ldots a_{nн}, x_{\partial})}{\partial a_n} da_n, \qquad 3.2.5$$

где $\frac{\partial f(a_{1н} \ldots a_{nн}, x_{\partial})}{\partial a_1}$ и $\frac{\partial f(a_{1н} \ldots a_{nн} x_{\partial})}{\partial a_n}$ – частные производные от уравнения преобразования по аргументам a_1 и a_n.

Переходя к малым конечным приращениям, получим

$$\Delta y = \frac{\partial f(a_{1н} \ldots a_{mн}, x_{\partial})}{\partial a_1} \Delta a_1 + \cdots + \frac{\partial f(a_{1н} \ldots a_{nн} x_{\partial})}{\partial a_n} \Delta a_n. \qquad 3.2.6$$

В выражении (3.2.6) $\Delta a_1 \ldots \Delta a_n$ – границы отклонения значения параметров элементов, определяющих уравнение преобразования, от их номинального значения. Величина Δy будет представлять абсолютное значение мультипликативной составляющей инструментальной погрешности измерительного преобразователя.

Общая погрешность измерительного преобразователя

$$\Delta y_{\Sigma} = \Delta y + \Delta y_a \qquad 3.2.7$$

складывается из мультипликативной Δy и аддитивной Δy_a составляющих.

Расчёт аддитивной составляющей инструментальной погрешности не имеет общего подхода и представляет большие сложности. У многих средств измерения эта составляющая отсутствует, а у тех, где она присутствует, предусмотрена операция под названием коррекция нуля, которая проводится перед началом измерения при нулевом значении входной измеряемой величины. По названным причинам нормирование аддитивной составляющей основной инструментальной погрешности не рассматриваем.

Рассмотрим использование представленной методики расчёта мультипликативной составляющей основной инструментальной погрешности на примере расчёта погрешности делителя напряжения (масштабный измерительный преобразователь). Принципиальная схема делителя представлена на рис. 3.2.1.

Уравнение преобразования рассматриваемого масштабного измерительного преобразователя:

$$U_2 = \frac{R_{2н}}{R_{1н} + R_{2н}} U_1, \qquad 3.2.8$$

где $R_{1н}$ и $R_{2н}$ – номинальные значения электрического сопротивления резисторов. Действительные значения сопротивления резисторов $R_{1д} = R_{1н} \pm \Delta R_1$, $R_{2д} = R_{2н} \pm \Delta R_2$. Доверительные интервалы ΔR_1 и ΔR_2 указаны в нормативно-технической документации выбранного типа резисторов.

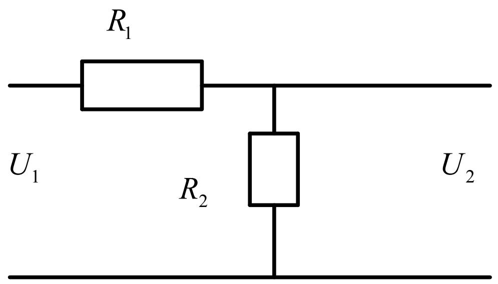


Рис. 3.2.1. Резистивный делитель напряжения (маситабный преобразователь)

Если действительное значение сопротивления резисторов отличается от номинального, то выходное напряжение делителя будет отличаться от значения определяемого (3.2.8), в соответствии с (3.2.6), на величину

$$\Delta U_2 = \pm \frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{R_{2н}}{R_{1н}+R_{2н}}\right)\Delta R_1 U_1 \pm \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{R_{2н}}{R_{1н}+R_{2н}}\right)\Delta R_2 U_1. \qquad 3.2.9$$

После нахождения частных производных

$$\Delta U_2 = \mp \frac{R_{2н}}{(R_{1н}+R_{2н})^2}\Delta R_1 U_1 \pm \frac{R_{1н}}{(R_{1н}+R_{2н})^2}\Delta R_2 U_1. \qquad 3.2.10$$

Относительная погрешность измерительного преобразователя

$$\delta = \frac{\Delta U_2}{U_{2н}} = \mp \frac{\Delta R_1}{R_{1н}}\frac{R_{1н}}{R_{1н}+R_{2н}} \pm \frac{\Delta R_2}{R_{2н}}\frac{R_{1н}}{R_{1н}+R_{2н}}. \qquad 3.2.11$$

Множитель $R_{1н}/(R_{1н} + R_{2н})$ можно рассматривать как коэффициент влияния параметров элементов на общую погрешность измерительного преобразователя. При $R_{1н} \prec\prec R_{2н}$ относительная погрешность $\delta \to 0$, при $R_{1н} \succ\succ R_{2н}$ относительная погрешность стремится к

$$\delta = \mp \frac{\Delta R_1}{R_{1н}} \pm \frac{\Delta R_2}{R_{2н}}. \qquad 3.2.12$$

Отклонения ΔR_1 и ΔR_2 в пределах доверительного интервала могут быть в обе стороны от номинального значения, и эти отклонения у разных резисторов даже одного типа не коррелированны, поэтому суммарную относительную погрешность в соответствии (1.6.7) определяем как

$$\delta = \frac{R_{1н}}{R_{1н} + R_{2н}} \sqrt{\left(\frac{\Delta R_1}{R_{1н}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_2}{R_{2н}}\right)^2} . \qquad 3.2.13$$

Рассмотрим другой вариант расчёта мультипликативной составляющей инструментальной погрешности измерительного преобразователя на примере расчёта погрешности измерительного усилителя, принципиальная схема которого представлена на рис. 3.2.2.

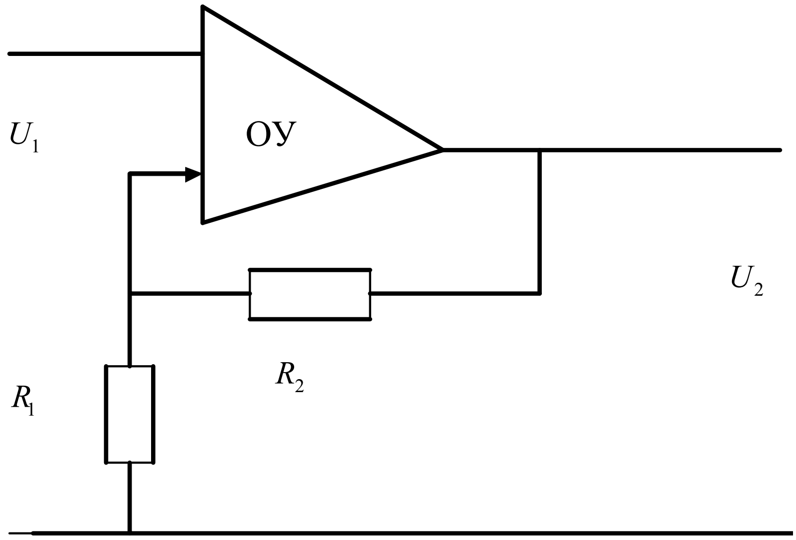


Рис. 3.2.2. Измерительный усилитель напряжения (масштабный преобразователь)

Коэффициент усиления измерительного усилителя

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1} + 1 \qquad 3.2.14$$

при условии, что коэффициент усиления операционного усилителя (микросхемы) много больше единицы. Номинальное значение электрического сопротивления резисторов равно $R_{1н}$ и $R_{2н}$, действительное значение сопротивления резисторов равно:

$$R_{1\partial} = R_{1н} \pm \Delta R_1,$$
$$R_{2\partial} = R_{2н} \pm \Delta R_2. \qquad 3.2.15$$

Номинальное значение коэффициента усиления

$$k_н = \frac{R_{2н}}{R_{1н}} + 1. \qquad 3.2.16$$

При $R_{2н} \succ R_{1н}$

$$k_{\text{н}} = \frac{R_{2\text{н}}}{R_{1\text{н}}}.$$

Действительное значение коэффициента усиления:

$$k_{\partial} = \frac{R_{2\text{н}} \pm \Delta R_2}{R_{1\text{н}} \pm \Delta R_1} + 1. \qquad 3.2.17$$

Абсолютная погрешность усилителя

$$\Delta k = k_{\text{н}} - k_{\partial} = \frac{R_{2\text{н}\partial}}{R_{1\text{н}}}\left(\pm \frac{\Delta R_2}{R_{2\text{н}}} \mp \frac{\Delta R_1}{R_{1\text{н}}} \right) = k_{\text{н}}\left(\pm \frac{\Delta R_2}{R_{2\text{н}}} \mp \frac{\Delta R_1}{R_{1\text{н}}} \right). \qquad 3.2.18$$

Отклонения параметров резисторов от номинального значения не коррелированны, поэтому при оценке суммарной погрешности нужно использовать геометрическое суммирование составляющих. Относительная погрешность усилителя

$$\delta = \frac{\Delta k}{k_{\text{н}}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_2}{R_{2н}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_1}{R_{1\text{н}}}\right)^2}. \qquad 3.2.19$$

3.3. Расчёт основной погрешности измерительного прибора

Измерительный прибор представляет собой совокупность измерительных преобразователей, определённым образом между собой соединённых. В частном случае измерительные преобразователи соединены последовательно и уравнение преобразования измерительного прибора имеет вид

$$x_{\text{ин}} = k_{1\text{н}} k_{2\text{н}} \cdots k_{m\text{н}} x_{\partial} = k_{\text{н}} x_{\partial}, \qquad 3.3.1$$

где $k_{1\text{н}}...k_{m\text{н}}$ – номинальные значения коэффициентов преобразования элементарных измерительных преобразователей, образующих в своей совокупности измерительный прибор, x_{∂} – значение измеряемой физической величины, $x_{\text{ин}}$ – номинальное значение измеренной величины (ожидаемые показания измерительного прибора).

При использовании действительных значений коэффициентов преобразования элементарных измерительных преобразователей уравнение преобразования измерительного прибора будет иметь вид

$$x_{и\partial} = (k_{1\text{н}} \pm \Delta k_1)\cdot(k_{2\text{н}} \pm \Delta k_2)\cdots(k_{m\text{н}} \pm \Delta k_n)\cdot x_{\partial} = k_{\partial}\cdot x_{\partial}, \qquad 3.3.2$$

где $x_{ид}$ – действительное показание измерительного прибора, $\Delta k_1 ... \Delta k_n$ – доверительные интервалы отклонений коэффициентов преобразования элементарных измерительных преобразователей от номинальных значений, указанных в нормативно-технической документации.

Абсолютная погрешность измерительного прибора может быть рассчитана одним из описанных в п. 2.3 приёмов.

Дифференциально малое изменение $x_{ин}$, вызванное дифференциально малыми изменениями коэффициентов преобразования элементарных измерительных преобразователей, образующих измерительный прибор, будет равно:

$$dx_{ин} = \frac{\partial k_{ин}}{\partial k_1} dk_1 x_д + \ldots + \frac{\partial k_{ин}}{\partial k_n} dk_n x_д . \qquad 3.3.3$$

При переходе к малым конечным приращениям имеем:

$$\Delta x_{ин} = \frac{\partial k_{ин}}{\partial k_1} \Delta k_1 x_д + \ldots + \frac{\partial k_{ин}}{\partial k_n} \Delta k_n x_д . \qquad 3.3.4$$

Относительная погрешность измерительного прибора будет равна:

$$\delta = \frac{\Delta x_{ин}}{x_{ин}} = \frac{\partial k_{ин}}{\partial k_1} \frac{\Delta k_1}{k_н} + \ldots + \frac{\partial k_{ин}}{\partial k_n} \frac{\Delta k_n}{k_н} . \qquad 3.3.5$$

Рассмотрим для примера расчёт мультипликативной погрешности вольтметра, принципиальная схема которого изображена на рис. 3.3.1.

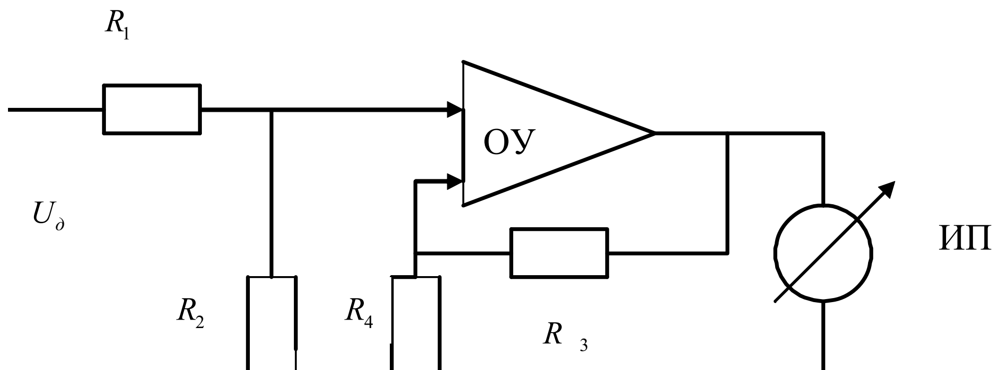


Рис. 3.3.1. Принципиальная схема вольтметра:
R_1R_2 – делитель напряжения; ОУ – операционный усилитель;
ИП – показывающий электромеханический прибор

Вольтметр состоит из трёх последовательно включённых элементарных измерительных преобразователей: делителя напряжения с номинальным значением коэффициента преобразования, равным:

$$k_{1н} = \frac{R_{2н}}{R_{1н} + R_{2н}}, \qquad 3.3.6$$

усилителя напряжения с коэффициентом преобразования

$$k_{2н} = \frac{R_{3н}}{R_{4н}} + 1 \qquad 3.3.7$$

и показывающего электромеханического прибора с коэффициентом преобразования $k_{3н}$.

Общий коэффициент преобразования прибора при номинальных значениях коэффициентов преобразований элементарных преобразователей равен:

$$k_{н} = k_{1н} k_{2н} k_{3н}. \qquad 3.3.8$$

Действительные значения коэффициентов преобразования у элементарных измерительных преобразователей отличаются от номинальных значений на Δk_1, Δk_2 и Δk_3, соответственно. Отклонения Δk_1 и Δk_2 находятся по формуле (2.3.6) и методике, изложенной в п. 2.3, а отклонение Δk_3 берётся из нормативно-технической документации на показывающий прибор.

Относительное значение мультипликативной погрешности измерительного прибора, в соответствии с формулой (2.4.5), будет равно:

$$\delta = \frac{\partial k_{н}}{\partial k_{1н}} \frac{\Delta k_1}{k_{н}} + \frac{\partial k_{н}}{\partial k_{2н}} \frac{\Delta k_2}{k_{н}} + \frac{\partial k_{н}}{\partial k_{3н}} \frac{\Delta k_3}{k_{н}} = k_{2н} k_{3н} \frac{\Delta k_1}{k_{н}} + k_{1н} k_{3н} \frac{\Delta k_2}{k_{н}} + k_{1н} k_{2н} \frac{\Delta k_3}{k_{н}}. \qquad 3.3.9$$

После подстановки в (3.3.9) значения $k_{н}$ из (3.3.8) получается формула для расчёта относительной погрешности измерительного прибора:

$$\delta = \frac{\Delta k_1}{k_{1н}} + \frac{\Delta k_2}{k_{2н}} + \frac{\Delta k_3}{k_{3н}}. \qquad 3.3.10$$

Поскольку погрешности элементарных преобразователей не коррелированны, то их нужно суммировать геометрически:

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{\Delta k_1}{k_{1н}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k_2}{k_{2н}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k_3}{k_{3н}}\right)} = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}. \qquad 3.3.11$$

Относительные погрешности δ_1, δ_2 и δ_3 элементарных измерительных преобразователей определяются, как описано в п. 2.3.

3.4. Расчёт дополнительной погрешности средства измерения

Дополнительная погрешность средства измерения появляется тогда, когда его условия эксплуатации отличаются от номинальных, но остаются в пределах рабочего интервала температур. Например, номинальное значение окружающей температуры для средства измерения установлено 20 °С , а рабочий интервал температур 20 ± 10 °С. Основная погрешность средства измерения каким-либо образом определена и указана в нормативно-технической документации. Отклонение окружающей температуры от 20 °С ведёт к появлению дополнительной погрешности средства измерения.

Рассмотрим порядок расчёта дополнительной температурной погрешности элементарного измерительного преобразователя.

Номинальное уравнение преобразования преобразователя представим в общем виде:

$$y = f(a_{1\text{н}}, \cdots a_{n\text{н}}, x), \tag{3.4.1}$$

где x – значение информативного параметра входного сигнала, $a_{1\text{н}} \ldots a_{n\text{н}}$ – номинальные значения параметров элементов преобразователя, определяющих уравнение преобразования (резисторы, конденсаторы, микросхемы), $y_\text{н}$ – номинальное значение информативного параметра выходного сигнала преобразователя.

Каждый элемент измерительного преобразователя имеет указанный в нормативно-технической документации температурный коэффициент. Температурный коэффициент элемента равен относительному изменению номинального значения параметра элемента, вызванному изменением окружающей температуры на один градус. Например, если в нормативно-технической документации на резистор указано, что его температурный коэффициент $\alpha_{Rt} = 0{,}001$, то это означает, что при изменении окружающей температуры на 1 °С сопротивление резистора изменится на 0,001, или на 0,1 %. При изменении окружающей температуры на Δt сопротивление резистора изменится на величину

$$\Delta R_t = \alpha_{Rt} R_\text{н} \Delta t, \tag{3.4.2}$$

где $R_\text{н}$ – номинальное значение сопротивления резистора при номинальной температуре окружающей среды. Таким образом, в рабочем интервале температур сопротивление резистора будет находиться в пределах

$$R = R_\text{н} \pm \Delta R_t. \tag{3.4.3}$$

Если для резистора 100 Ом указано номинальное значение температуры 20 °С, рабочий интервал температур ±10 °С и температурный коэффициент $\alpha_{Rt} = 0{,}001$, то в рабочем интервале температур сопротивление резистора будет находиться в пределах 100 1 Ом.

Вернёмся к уравнению (2.5.1). При изменении окружающей температуры на Δt значение $y_{\text{н}}$ изменится на Δy:

$$\Delta y = \frac{\partial f(a_{1\text{н}} \ldots a_{n\text{н}}, x)}{\partial a_1}\Delta a_{1t} + \ldots + \frac{\partial f(a_{1\text{н}} \ldots a_{n\text{н}}, x)}{\partial a_n}\Delta a_{nt}, \qquad 3.4.4$$

где $\Delta a_{1t} = \alpha_{1t} a_{1\text{н}} \Delta t$, $\Delta a_{nt} = \alpha_{nt} a_{n\text{н}} \Delta t$ – абсолютные значения изменений параметров элементов, определяющих уравнение преобразования, при отклонении окружающей температуры от номинального значения.

Используя формулу (2.5.4), рассчитаем температурную погрешность делителя напряжения, принципиальная схема которого изображена на рис. 2.3.1. Уравнение преобразования делителя напряжения

$$U_2 = \frac{R_{2\text{н}}}{R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}} U_1 = k_{\text{н}} U_1. \qquad 3.4.5$$

Заданы: номинальное значение температуры $t_{\text{н}} = 20$ °С, рабочий интервал температур 20 ± 10 °С, температурные коэффициенты резисторов R_1 и R_2, соответственно, $\alpha_{1t} = 0{,}001$ и $\alpha_{2t} = 0{,}002$, номинальные значения резисторов $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 200$ Ом.

В соответствии с формулой (2.5.4) температурное изменение выходного напряжения делителя будет равно:

$$\Delta U = U_1 \frac{\partial k_{\text{н}}}{\partial R_1} \Delta R_{1t} + U_1 \frac{\partial k_{\text{н}}}{\partial R_2} \Delta R_{2t}, \qquad 3.4.6$$

где ΔR_{1t} и ΔR_{2t} находятся по формуле (2.5.2).

Используя частные производные, получим:

$$\Delta U = -U_2 \frac{\Delta R_{1t}}{R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}} + U_2 \frac{R_{1\text{н}} \Delta R_{2t}}{(R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}) R_{2\text{н}}}. \qquad 3.4.7$$

Относительное значение дополнительной температурной погрешности равно:

$$\delta = \frac{\Delta U}{U_2} = -\frac{\Delta R_{1t}}{R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}}} + \frac{R_{1\text{н}} \Delta R_{2t}}{R_{2\text{н}} (R_{1\text{н}} + R_{2\text{н}})} = k_{\text{н}} \left(-\frac{\Delta R_{1t}}{R_{1\text{н}}} + \frac{\Delta R_{2t}}{R_{2\text{н}}} \right). \qquad 3.4.8$$

Используя выражение (2.5.2), получим расчётную формулу в окончательном виде:

$$\delta = k_{н}(-\alpha_{1t} + \alpha_{2t})\Delta t. \qquad 3.4.9$$

Если температурные коэффициенты резисторов равны, то дополнительная температурная погрешность у делителя напряжения отсутствует. В рассматриваемом примере относительная температурная погрешность, после подстановки числовых значений величин, будет равна:

$$\delta = \pm\frac{100}{100+200}(-0.001+0.002)10 = \frac{1}{300}.$$

3.5. Упражнения и задачи

Задача 3.5.1

Условия задачи. Необходимо определить мультипликативную погрешность делителя напряжения, принципиальная схема которого изображена на рис. 3.2.1. Дано $R_1 = 100 \pm 1$ Ом, $R_2 = 200 \pm 2$ Ом.

Решение задачи. В соответствии с (3.2.10) абсолютное значение мультипликативной погрешности будет равно:

$$\Delta U_2 = \pm\frac{200}{(100+200)}\cdot 1\cdot U_1 \pm \frac{100}{(100+200)}\cdot 2\cdot U_1. \qquad 3.5.1$$

Относительная погрешность делителя напряжения (3.2.11) равна:

$$\delta = \frac{\Delta U_2}{U_{2н}} = \pm\frac{1}{100}\cdot\frac{100}{100+200} \pm \frac{2}{200}\cdot\frac{100}{100+200} = \pm\frac{1}{300} \pm \frac{1}{300}. \qquad 3.5.2$$

Поскольку составляющие погрешности не коррелированны, то в соответствии с (1.6.7)

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{1}{300}\right)^2 + \left(\frac{1}{300}\right)^2} = \frac{1,41}{300}. \qquad 3.5.3$$

В процентном выражении

$$\delta = \frac{1,41}{300}\cdot 100 = 0,47,\ \%. \qquad 3.5.4$$

Задача 3.5.2

Условия задачи. Необходимо определить мультипликативную погрешность электронного термометра, принципиальная схема которого изображена на рис. 3.5.1.

Дано $R_1 = R_2 = R_3 = R_{t0} = 1000$ Ом. Терморезистор R_t имеет уравнение преобразования

$$R_t = R_{t0} + \alpha_t \Delta t, \qquad 3.5.5$$

где R_{t0} – значение сопротивления терморезистора при температуре $t = 0$ °C, $R_{t0} = R_{t0H} \pm \Delta R_{t0} = 1000 \pm 10$ Ом; $\alpha_t = 1{,}0 \pm 0{,}02$ Ом/°C – температурный коэффициент терморезистора; Δt – отклонение температуры среды, окружающей терморезистор, от нулевой.

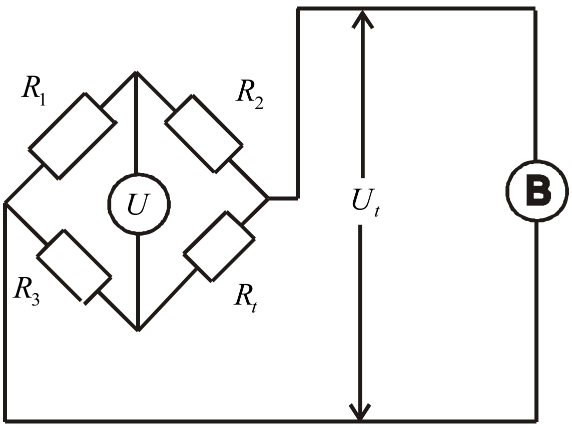


Рис. 3.5.1. Электронный термометр: U – источник стабильного напряжения; B – вольтметр; R_t – терморезистор

Решение задачи. Падение напряжения на резисторе R_3 равно:

$$U_{R3} = U\frac{R_3}{R_1 + R_3}, \qquad 3.5.6$$

а на терморезисторе R_t

$$U_{Rt} = U\frac{R_t}{R_2 + R_t}. \qquad 3.5.7$$

Считаем, что номинальные и действительные значения сопротивлений резисторов, в пределах пренебрежимо малой погрешности, совпадают, т. е.

$$R_{1н} = R_{1д} = R_1;\ R_{2н} = R_{2д} = R_2;\ R_{3н} = R_{3д} = R_3. \qquad 3.5.8$$

Для терморезистора номинальное и действительное значения сопротивления при нулевой температуре R_{t0} считаем, не совпадают:

$$R_{t0н} \neq R_{t0д}. \qquad 3.5.9$$

Из условия задачи следует, что

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_{t0}. \tag{3.5.10}$$

Разность напряжений

$$U_t = U_{R3} - U_{Rt}, \tag{3.5.11}$$

с учетом (3.5.6) и (3.5.7), будет равна:

$$U_t = U\frac{R_3}{R_1 + R_3} - U\frac{R_t}{R_2 + R_t}, \tag{3.5.12}$$

а с учетом ещё и (3.5.10)

$$U_t = U\left[\frac{1}{2} - \frac{R_{t0} + \alpha_t \Delta t}{2R_{t0} + \alpha_t \Delta t}\right] = U\left[\frac{1}{2} - \frac{R_{t0}\left(1 + \dfrac{\Delta R_t}{R_{t0}}\right)}{2R_{t0}\left(1 + \dfrac{\Delta R_t}{2R_{t0}}\right)}\right], \tag{3.5.13}$$

где

$$\Delta R_t = \alpha_t \Delta t. \tag{3.5.14}$$

Используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$U_t = \frac{U}{2}\left[1 - \left(1 + \frac{\Delta R_t}{R_{t0}}\right)\left(1 - \frac{\Delta R_t}{2R_{t0}}\right)\right] = -\frac{U}{2}\frac{\Delta R_t}{R_{t0}}. \tag{3.5.15}$$

Подставляя в (3.5.15) ΔR_t из (3.5.14), получим уравнение преобразования измерительной мостовой схемы:

$$U_t = -\frac{U}{2}\frac{\alpha_t \Delta t}{R_{t0}}. \tag{3.5.16}$$

Уравнение термометра

$$\varphi = U_t K_B = \frac{U}{2}\frac{\alpha_t \Delta t}{R_{t0}} K_B, \tag{3.5.17}$$

где φ – показания вольтметра, отградуированного в единицах температуры; K_B – коэффициент преобразования вольтметра, $K_B = 10 \pm 0{,}1$.

Для конкретного термометра, взятого из исследуемой партии приборов, показания будут отличаться от действительного значения измеряемой температуры на величину

$$\Delta\varphi = \pm\frac{\partial\varphi}{\partial K_B}\Delta K_B \pm \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_t}\Delta\alpha_t \pm \frac{\partial\varphi}{\partial R_{t0}}\Delta R_{t0} =$$

$$\pm\frac{U}{2}\frac{\alpha_t \Delta t}{R_{t0}}\Delta K_B \pm \frac{U}{2}K_B\frac{\Delta t}{R_{t0}}\Delta\alpha_t \pm \frac{U}{2}K_B \alpha_t \Delta t\left(-\frac{1}{R_{t0}^2}\right). \tag{3.5.18}$$

Относительная погрешность термометра равна:

$$\delta = \frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \pm\frac{\Delta K_B}{K_B} \pm \frac{\Delta\alpha_t}{\alpha_t} \mp \frac{\Delta R_{t0}}{R_{t0}}. \qquad 3.5.19$$

После подстановки численных значений

$$\delta = \pm\frac{0{,}1}{10} \pm \frac{0.02}{1{,}0} \mp \frac{10}{1000}. \qquad 3.5.20$$

С учётом некоррелированности составляющих погрешности, суммарная погрешность будет равна:

$$\delta = \sqrt{(1\cdot10^{-2})^2 + (2\cdot10^{-2})^2 + (1\cdot10^{-2})^2} = 0{,}025.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение понятию «измерение».
2. Что такое физическая величина?
3. Дайте определение понятию «погрешность измерения физической величины».
4. Какими причинами определяется методическая погрешность измерения?
5. Откуда появляется случайная погрешность измерения?
6. Из каких основных составляющих образуется инструментальная погрешность измерения?
7. Какие существуют разновидности средств измерения?
8. Дайте определение понятию «первичный измерительный преобразователь».
9. Что понимают под уравнением преобразования измерительного преобразователя?
10. Опишите порядок расчёта систематической погрешности измерительного преобразователя.
11. Опишите пример расчёта мультипликативной погрешности делителя напряжения.
12. Как рассчитать мультипликативную погрешность прибора, зная погрешности элементарных преобразователей, образующих прибор?
13. Что такое дополнительная погрешность средства измерения?
14. Как рассчитать дополнительную температурную погрешность средства измерения?

4. НОРМИРОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ КЛАССОМ ТОЧНОСТИ СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ

4.1. Класс точности средства измерения

4.1.1. Класс точности средства измерения с мультипликативной погрешностью

Класс точности средства измерения с мультипликативной инструментальной погрешностью определяется относительной максимальной погрешностью для типа средств измерения:

$$\delta_m = \pm\frac{\Delta x_m}{x_\partial}, \tag{4.1.1}$$

где Δx_m – максимальная абсолютная погрешность для типа приборов, x_∂ – действительное значение измеряемой физической величины.

Для установления класса точности такого средства измерения выбирается ближайшее большее к $100\delta_m$ число из ряда

$$1\cdot10^n;\quad 1{,}5\cdot10^n;\quad 2\cdot10^n;\quad 2{,}5\cdot10^n;\quad 4\cdot10^n;\quad 5\cdot10^n;\quad 6\cdot10^n, \tag{4.1.2}$$

где $n = 0; -1; -2...$

Например, в результате экспериментов над партией приборов данного типа установлено максимальное значение относительной погрешности

$$\delta_m = \pm0{,}013 \quad и \quad 100\delta_m = 1{,}3.$$

Классом точности таких приборов будет ближайшее к $100\delta_m$ число из ряда (4.1.2), а именно 1,5. Класс точности средств измерения с преобладающей мультипликативной погрешностью изображается числом на лицевой панели и в нормативно-технической документации числом, помещенным в круг. В рассматриваемом примере это будет 1,5.

4.1.2. Класс точности средства измерения с аддитивной погрешностью

Класс точности средства измерения с аддитивной погрешностью нормируется по максимальной приведённой погрешности типа средств измерения, к которому оно принадлежит:

$$\gamma_m = \pm\frac{\Delta x_m}{x_{\partial m}} = \pm\frac{a_m}{x_{\partial m}}, \quad 4.1.3$$

где $\Delta x_m = a_m$ – значение абсолютной максимальной аддитивной погрешности средства измерения данного типа; $x_{\partial m}$ – значение физической величины, соответствующее верхнему пределу измерения.

Классом точности средства измерения с преобладающей аддитивной погрешностью будет ближайшее большее к $100\gamma_m$ число из ряда (4.1.2).

Например, в результате экспериментов установлено для партии приборов данного типа $\gamma_m = 0{,}018$ и $100\gamma_m = 1{,}8$. В соответствии с определением, классом точности приборов данного типа будет число 2.

Класс точности средств измерения с аддитивной погрешностью отображается на лицевой панели приборов и в нормативно-технической документации числом без обрамления кругом.

4.1.3. Класс точности средств измерения с аддитивной и мультипликативной составляющими инструментальной погрешности

Нормирование инструментальной погрешности средств измерения, обладающих аддитивной и мультипликативной составляющими погрешности, осуществляется в соответствии с формулой

$$\delta_m = \frac{\Delta x_m}{x_\partial} = \frac{a_m + b_m x_\partial}{x_\partial} = c + d\left(\frac{x_{\partial m}}{x_\partial} - 1\right), \quad 4.1.4$$

где δ_m – максимальная относительная инструментальная погрешность измерения физической величины x_∂ приборами данного типа; Δx_m – максимальное значение абсолютной инструментальной погрешности средства измерения данного типа; $x_{\partial m}$ – максимальное значение измеряемой физической величины, соответствующее верхнему пределу измерения прибора; a_m – абсолютное значение аддитивной погрешности; b_m – коэффициент, определяющий максимальное значение мультипликативной погрешности; c и d – коэффициенты, нормирующие инструментальную погрешность средства измерения и определяющие его класс точности.

Коэффициенты c и d указываются в нормативно-технической документации на средство измерения рассматриваемого типа. Эти коэффициенты используются для вычисления погрешности измерения при проведении измерительных экспериментов.

4.2. Средства измерения с мультипликативной погрешностью

На приборостроительном заводе разработали новый тип измерительного прибора и выпустили опытную партию в количестве N экземпляров.

Метрологам завода ставится задача экспериментальным путём установить инструментальную погрешность приборов и в обобщённом виде предложить её для внесения в нормативно-техническую документацию на данный тип приборов.

Вместе с метрологами завода проследим возможный путь решения этой задачи.

Вначале, путём проведения многократных измерений в лабораторных условиях, убедимся в отсутствии случайной составляющей инструментальной погрешности. Проведением измерений фиксированного значения физической величины при подходе к точке отсчёта сверху и снизу убедимся в отсутствии гистерезисной составляющей инструментальной погрешности.

Убедившись в отсутствии случайной и гистерезисной составляющих инструментальной погрешности, делаем вывод о том, что инструментальная погрешность средства измерения состоит только из систематической составляющей.

Далее надо установить, какая разновидность систематической погрешности преобладает – аддитивная или мультипликативная. Для этого возьмём любой экземпляр из изготовленной партии приборов, установим несколько значений измеряемой физической величины (с использованием образцовых средств измерения),

$$x_\partial = \{x_{\partial 1} \cdots x_{\partial i} \cdots x_{\partial m}\}, \qquad 4.2.1$$

от 0 до максимального значения $x_{\partial m}$, определяемого верхним пределом измерения исследуемого средства измерения, и проведём измерения выбранных значений x_∂.

В результате проведения измерительных экспериментов получим множество результатов измерения, по числу установленных значений x_∂:

$$x_и = \{x_{и1} \cdots x_{иi} \cdots x_{иm}\}. \qquad 4.2.2$$

При каждом измерении будет иметь место абсолютная погрешность измерения Δx:

$$\Delta x = \{\Delta x_1 \cdots \Delta x_i \cdots \Delta x_m\}, \qquad 4.2.3$$

где $\Delta x_i = x_{иi} - x_{\partial i}$.

Представим графически зависимость $\Delta x = f(x_\partial)$. Если окажется, что Δx не зависит от x_∂ (рис. 2.4.1), то делаем вывод о том, что в инструментальной погрешности преобладает аддитивная составляющая. Если погрешность линейно зависит от значения измеряемой величины (рис. 2.4.3), то в инструментальной погрешности преобладает мультипликативная составляющая. Если же зависимость погрешности от значения измеряемой физической величины будет похожа на показанную на рис. 2.4.5, то в инструментальной погрешности присутствуют как аддитивная, так и мультипликативная составляющие.

Рассмотрим вначале случай, когда погрешность линейно зависит от значения измеряемой физической величины, т. е. является мультипликативной инструментальной погрешностью:

$$\Delta x = bx_\partial. \qquad 4.2.4$$

Для этого проведём измерения установленных значений x_∂ всеми N приборами изготовленной опытной партии. В результате получим N зависимостей вида (4.2.4), по числу приборов:

$$\Delta x = \{b_1 x_\partial \cdots b_j x_\partial \cdots b_N x_\partial\}. \qquad 4.2.5$$

Если все полученные зависимости изобразить графически, то все они разместятся в секторе между линиями $-b_m x_\partial$ и $b_m x_\partial$ (рис. 2.4.4). Коэффициент b для каждого прибора величина постоянная, отличная от коэффициентов других приборов, а для всей партии приборов этот коэффициент будет величиной случайной.

$$b = \{b_1 \cdots b_j \cdots b_N\}. \qquad 4.2.6$$

Построив гистограмму, убеждаемся, что закон распределения этой случайной величины близок к нормальному.

Среднее арифметическое значение коэффициента в этом случае равно:

$$\overline{b} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b_j = 0. \qquad 4.2.7$$

Среднее квадратическое отклонение b_j от $\overline{b}$ равно:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N} b_j^2}\,. \qquad 4.2.8$$

Принимая доверительный интервал, в котором лежат значения коэффициента, равным $\pm k\sigma_b$, найдём границы интервала

$$b_m = \pm k\sigma_b. \qquad 4.2.9$$

Если k =2, то доверительная вероятность нахождения коэффициента b_j в указанном интервале равна 0,95 (см. выражение 1.5.7), если k=3, то доверительная вероятность нахождения коэффициента в указанном доверительном интервале равна 0,997.

Абсолютное значение максимальной инструментальной погрешности, в соответствии с (4.2.4), будет равно:

$$\Delta x_m = k\sigma_b x_д. \qquad 4.2.10$$

Относительная максимальная погрешность для партии приборов

$$\delta_m = \pm\frac{\Delta x_m}{x_д} = \pm\frac{k\sigma_b x_д}{x_д} = \pm k\sigma_b\,. \qquad 4.2.11$$

Классом точности измерительных приборов исследуемой партии является ближайшее, большее к $100\delta_m$ число, выбираемое из ряда

$$1\cdot10^n;\ 1{,}5\cdot10^n;\quad 2\cdot10^n;\quad 2{,}5\cdot10^n;\quad 4\cdot10^n;\quad 5\cdot10^n;\quad 6\cdot10^n, \qquad 4.2.12$$

где $n = 0; -1; -2$.

Например, в результате описанных действий, для партии средств измерения одного типа, получили максимальное значение относительной погрешности $\delta_m = \pm0{,}013$ и $100\delta_m = 1{,}3$. Тогда классом точности приборов будет ближайшее к 1,3, число из ряда (4.2.12). Таким числом является 1,5. Следовательно, класс точности приборов исследуемой партии 1,5.

Класс точности измерительных приборов с преобладающей мультипликативной погрешностью изображается на лицевой панели приборов и в нормативно-технической документации числом, помещённым в круг 1,5.

Операцию по установлению класса точности средства измерения производит разработчик (научно-исследовательский и проектный институт, приборостроительный завод). Эта операция называется нормированием инструментальной погрешности средства измерения.

4.3. Средства измерения с аддитивной погрешностью

Как и в п. 4.2, берём партию однотипных средств измерения в количестве N экземпляров. Проводим эксперимент по установлению зависимости абсолютной погрешности измерения от значения измеряемой величины $x_д$ на одном, выбранном случайно экземпляре прибора.

Для этого устанавливаем ряд значений измеряемой физической величины

$$x_д = \{x_{д1} \cdots x_{дi} \cdots x_{дm}\}. \tag{4.3.1}$$

Проводим измерение установленных значений физической величины и получаем ряд измеренных значений:

$$x_и = \{x_{и1} \cdots x_{иi} \cdots x_{иm}\}. \tag{4.3.2}$$

Вычисляем погрешность каждого измерения и получаем множество

$$\Delta x = \{\Delta x_1 \cdots \Delta x_i \cdots \Delta x_m\}. \tag{4.3.3}$$

Если у средства измерения преобладает аддитивная составляющая погрешности, то

$$\Delta x_1 = \cdots \Delta x_i = \cdots \Delta x_m = a. \tag{4.3.4}$$

Проделаем описанную процедуру со всеми экземплярами N исследуемых приборов. В результате получим множество погрешностей:

$$\Delta x = a = \{a_1 \cdots a_j \cdots a_N\}. \tag{4.3.5}$$

На рис. 2.4.2 все значения погрешностей по оси ординат будут расположены между отметками $-a_m$ и a_m.

Рассматривая a_j для всей партии приборов как случайную величину с нормальным законом распределения, определим её среднее арифметическое значение, которое должно быть равно нулю,

$$\overline{a} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_j = 0, \tag{4.3.6}$$

и среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(a_j - \overline{a})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N} a_j^2}. \tag{4.3.7}$$

Принимая доверительный интервал, в котором лежит a_j, равным $\pm k\sigma_a$, найдём границы интервала:

$$\Delta x_m = a_m = \pm k\sigma_a. \qquad 4.3.8$$

При $k = 2$ любое a_j находится в интервале

$$-a_m \prec a_j \prec a_m$$

с доверительной вероятностью $P_д = 0{,}95$, а при $k = 3$ – с доверительной вероятностью 0,997.

Класс точности средств измерения, с преобладающей аддитивной погрешностью, определяется по приведённой максимальной погрешности измерения:

$$\gamma_m = \pm\frac{\Delta x_m}{x_{дm}} \pm \frac{a_m}{x_{дm}}, \qquad 4.3.9$$

где $x_{дm}$ – последнее в ряду (4.3.1) значение измеряемой физической величины, совпадающее с верхним пределом измерения исследуемых средств измерения.

Классом точности аттестуемой партии средств измерения будет ближайшее к $100\gamma_m$ число, выбираемое из ряда (4.2.12).

Например, в результате описанных измерительных экспериментов для партии средств измерения одного типа получили $\delta_m = 0{,}018$ и $100\gamma_m = 1{,}8$. В соответствии с определением класс точности приборов партии $\gamma_{кл} = 2$.

Класс точности средств измерения с преобладающей аддитивной погрешностью изображается числом на лицевой панели и в нормативно-технической документации без обрамления круговой линией.

4.4. Средства измерения, имеющие аддитивную и мультипликативную погрешности

Так же как описано в п. 4.2 и 4.3, из опытной партии приборов берём один j-й и проводим с ним эксперимент по установлению зависимости абсолютной погрешности измерения от значения измеряемой величины. Результаты эксперимента графически представлены на рис. 2.4.5. Представленная зависимость абсолютной погрешности измерения Δx_j от значения измеряемой физической величины $x_д$ для j-го средства измерения свидетельствует о том, что в общей погрешности измерения присутствуют как аддитивная, так и мультипликативная составляющие.

$$\Delta x_j = a_j + b_j x_\partial . \qquad 4.4.1$$

Проделав подобный эксперимент со всеми приборами исследуемой партии, увидим, что все зависимости $\Delta x = f(x_\partial)$ лежат между линиями $-b_m x_\partial$ и $b_m x_\partial$ на рис. 2.4.6.

При этом

$$-a_m \prec a_j \prec a_m ,$$

$$-b_m \prec b_j \prec b_m ,$$

где a_j и b_j – значения коэффициентов для j-го средства измерения, a_m и b_m – максимальные граничные значения коэффициентов для средств измерения исследуемой партии. Граничные значения a_m и b_m определяем как границы доверительных интервалов:

$$a_m = \pm k\sigma_a , \quad b_m = \pm k\sigma_b , \qquad 4.4.2$$

с доверительной вероятностью $P_\partial = 0{,}95$ при $k = 2$ и $P_\partial = 0{,}997$ при $k = 3$.

Нормирование погрешности средства измерения, обладающего как аддитивной, так и мультипликативной составляющими инструментальной погрешности, проводится по формуле

$$\delta_m = \frac{\Delta x_m}{x_\partial} \cdot 100 = \frac{a_m + b_m x_\partial}{x_\partial} \cdot 100 = c + d\left(\frac{x_{\partial m}}{x_\partial} - 1\right), \qquad 4.4.3$$

где δ_m – относительная максимальная погрешность измерения x_∂ приборами аттестуемой партии; Δx_m – максимальное значение абсолютной погрешности для приборов всей партии; x_∂ – измеряемая физическая величина; $x_{\partial m} = x_{\partial max}$ – максимальное значение измеряемой физической величины, соответствующее верхнему пределу измерения аттестуемых средств измерения; c и d – коэффициенты, нормирующие погрешность и определяющие класс точности средств измерения аттестуемой партии.

Значения нормирующих коэффициентов c и d определяется через значения коэффициентов a_m и b_m, которые, в свою очередь, находятся экспериментально путём проведения измерительных экспериментов.

Из (4.4.3) следует, что максимальная абсолютная погрешность измерения величины x_∂ равна:

$$\Delta x_m = a_m + b_m x_\partial . \qquad 4.4.4$$

При $x_\partial = 0$ имеем

$$\Delta x_m = a_m . \qquad 4.4.5$$

Для нахождения коэффициента a_m проведём измерение значения $x_д = 0$ всеми средствами измерения N исследуемой партии, в результате получим множество измеренных значений

$$x_и = \{x_{и1} \cdots x_{иj} \cdots x_{иN}\}. \qquad 4.4.6$$

При каждом измерении имеет место погрешность

$$\Delta x_{0j} = x_{иj} - 0. \qquad 4.4.7$$

Совокупность погрешностей всех средств измерения образует множество

$$\Delta x_0 = \{\Delta x_{01} \cdots \Delta x_{0j} \cdots \Delta x_{0N}\}. \qquad 4.4.8$$

Среднее квадратическое отклонение погрешностей

$$\sigma[\Delta x_0] = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N} \Delta x_{0j}}. \qquad 4.4.9$$

Максимальное значение абсолютной погрешности для всей опытной партии

$$\Delta x_{0m} = k\sigma[\Delta x_0] = a_m \qquad 4.4.10$$

с доверительной вероятностью при $k = 2$.

Для нахождения коэффициента b_m проведём измерение какого-либо значения $x_д$ всеми приборами исследуемой партии, при этом получим множество измеренных значений (4.4.6). При каждом измерении j-м прибором установленного значения физической величины $x_д$ будет иметь место погрешность

$$\Delta x_{дj} = x_{иj} - x_{dj} = a_j + b_j x_д. \qquad 4.4.11$$

Отклонение этих погрешностей от среднего значения

$$\sigma[\Delta x_д] = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N} \Delta x_{дj}}. \qquad 4.4.12$$

Максимальное значение абсолютной погрешности для партии приборов

$$\Delta x_{дm} = k\sigma[\Delta x_д]. \qquad 4.4.13$$

В соответствии с (4.4.4)

$$\Delta x_{дm} = a_m + b_m x_д, \qquad 4.4.14$$

откуда

$$b_m = \frac{\Delta x_{дm} - a_m}{x_д}. \qquad 4.4.15$$

Коэффициенты c и d указываются в нормативно-технической документации на все средства измерения тех типов приборов, класс точности которых нормируется рассматриваемым способом.

Установим связь между коэффициентами c и d, с одной стороны, и значениями a_m (4.4.10) и b_m (4.4.15), определяемыми экспериментально, с другой стороны.

Предположим $x_д = x_{дm}$, тогда из выражения (4.4.3) следует, что

$$\frac{a_m + b_m x_{дm}}{x_{дm}} \cdot 100 = c. \qquad 4.4.16$$

Для нахождения коэффициента d в нормирующую формулу (4.4.3) подставим значение коэффициента c из (4.4.16) в результате получим уравнение

$$\frac{a_m + b_m x_д}{x_д} \cdot 100 = \frac{a_m + b_m x_{дm}}{x_{дm}} + d\left(\frac{x_{дm}}{x_д} - 1\right). \qquad 4.4.17$$

Решив уравнение, найдём

$$d = \frac{a_m}{x_{дm}} \cdot 100. \qquad 4.4.18$$

Класс точности средств измерения, обладающих сопоставимыми аддитивной и мультипликативной составляющими инструментальной погрешности, задаётся в нормативно-технической документации коэффициентами c и d в виде c/d. Коэффициенты c и d находятся с использованием ряда (4.1.2) как ближайшее большее к значениям, полученным экспериментально.

Например, в результате проведённых измерительных экспериментов с опытной партией средств измерения получили $c = 0{,}14$ и $d = 0{,}07$. В этом случае класс точности средств измерения будет $c/d = 0{,}15/0{,}1$.

4.5. Упражнения и задачи

Задача 4.5.1

Условия задачи. Для нового типа вольтметров изготовили опытную партию в количестве 10 экземпляров. Ставится задача: используя опытную партию, экспериментально установить класс точности нового типа вольтметров.

Решение задачи. Необходимо провести два измерительных эксперимента. В первом эксперименте из опытной партии берём один экземпляр вольтметра. С помощью образцового источника напряжения устанавливаем через равные интервалы 10 действительных значений измеряемой величины U_{di} (табл. 4.5.1). Далее проводим измерение каждой установленной величины напряжения и получаем 10 измеренных значений U_{ui}. По формуле $\Delta U_i = U_{ui} - U_{di}$ определяем погрешность ΔU_i каждого измерения. Зависимость абсолютной погрешности измерений от значения измеряемого напряжения представлена на рис. 4.5.1.

Таблица 4.5.1

U_{di}	0,000	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000	7,000	8,000	9,000
U_{ui}	0,000	1,011	2,018	3,032	4,041	5,048	6,059	7,071	8,078	9,093
ΔU_i	0,000	0,011	0,018	0,032	0,041	0,048	0,059	0,071	0,078	0,093

Из представленной зависимости видно, что аддитивная составляющая инструментальной погрешности отсутствует, т. к. $\Delta = 0$ при $U_д = 0$, а мультипликативная погрешность почти линейно зависит от значения измеряемой величины $U_д$.

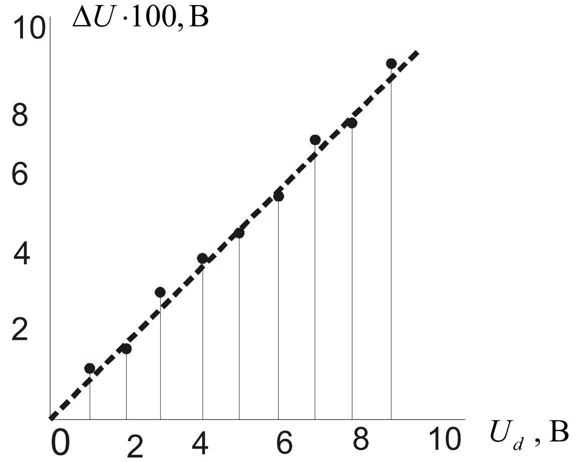


Рис 4.5.1. Зависимость мультипликативной погрешности от значения измеряемой величины для отдельного экземпляра, взятого из опытной партии

Во втором измерительном эксперименте устанавливаем с помощью образцового источника одно значение измеряемой величины, например 5,000 В, и измеряем это значение напряжения всеми вольтметрами опытной партии. Получаем 10 значений измеренной величины U_{uj} (по числу приборов $N = 10$) и 10 значений абсолютной погрешности $\Delta U_j = U_{uj} - 5{,}000$ (для каждого прибора погрешность своя, отличная от погрешности других приборов).

Результаты эксперимента представлены в табл. 4.5.2.

Таблица 4.5.2

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_{uj}	5,010	5,015	5,025	5,020	5,030	4,990	4,980	4,985	4,970	7,975
ΔU_j	0,010	0,015	0,020	0,0250	0,030	–0,010	–0,020	–0,015	–0,030	–0,025
$b_j \cdot 10^3$	2	3	5	4	6	–2	–4	–3	–6	–5

В соответствии с (4.2.4) абсолютная погрешность j-го вольтметра равна:

$$\Delta U_j = U_{uj} - 5{,}000 = b_j \cdot 5{,}000.$$

Отсюда

$$b_j = \frac{U_{uj} - 5{,}000}{5{,}000} = \frac{\Delta U_j}{5{,}000}.$$

Среднее значение коэффициента b_j для всей партии равно:

$$\bar{b}_j = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b_j = \frac{1}{10}(2+3+5+4+6-2-4-3-6-5) = 0.$$

Среднее квадратическое отклонение b_j от $\overline{b_j}$ по (4.2.8)

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{1}{9}(4+9+25+16+36+4+16+9+36+25)} = 4{,}47 \cdot 10^{-3}\text{ В}.$$

Максимальное значение коэффициента b_j по (4.2.9) равно: $b_m = k\sigma_b$.

Максимальная абсолютная погрешность измерения для партии приборов по (4.2.10)

$$\Delta U_m = b_m U_д = k\sigma_b U_д.$$

Максимальная относительная погрешность

$$\delta_m = \frac{\Delta U_m}{U_д} = \frac{k\sigma_b U_д}{U_д} = k\sigma_b = 2 \cdot 4{,}47 \cdot 10^{-3} \cong 8{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

Максимальная относительная погрешность в процентном выражении $\delta_m = 0{,}85$ %, ближайшим большим к этому значению числом ряда (4.1.2) является 1,0. Следовательно, классом точности вольтметров рассматриваемого типа будет число 1,0, помещаемое в нормативно-технической документации в окружность.

Задача 4.5.2

Условия задачи. Для нового типа амперметров с верхним пределом измерения 10 А изготовили опытную партию в количестве 10 экземпляров, хотя для получения представительной выборки нужно изготовить значительно больше приборов. Однако для учебных целей, чтобы не перегружать текст цифрами, ограничимся числом 10. Ставится задача: используя опытную партию амперметров, экспериментально установить класс точности разработанного типа средств измерения.

Решение задачи. Как и в предыдущей задаче, для решения данной необходимо провести два измерительных эксперимента.

В первом эксперименте из опытной партии приборов берём один, случайно выбранный, экземпляр амперметра. С помощью образцовых источников тока устанавливаем через равные интервалы 10 значений электрического тока. Проводим измерения выбранным экземпляром амперметра установленных значений тока и вычисляем погрешность измерения по формуле $\Delta I = I_{\text{н}} - I_{\partial}$, где $I_{\text{н}}$ – измеренные значения тока (показания амперметров), I_{∂} – установленные образцовым источником значения тока. Результаты эксперимента заносим в табл. 4.5.3.

Таблица 4.5.3

$I_{\partial i}$	0,000	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000	7,000	8,000	9,000
$I_{иi}$	0,011	1,012	2,013	3,012	4,011	4,989	5,988	6,987	7,988	8,989
ΔI_i	0,011	0,012	0,013	0,012	0,011	–0,013	–0,012	–0,011	–0,012	–0,013

Зависимость абсолютной погрешности от значения измеряемого тока представлена на рис. 4.5.2.

Из представленной графической зависимости видно, что инструментальная погрешность исследуемого средства измерения носит аддитивный характер.

Во втором измерительном эксперименте устанавливаем с помощью образцового источника значение электрического тока, соответствующее середине диапазона измерения амперметра, 5,000 А, и проводим измерение этого значения тока всеми десятью амперметрами опытной партии. В итоге получаем десять измеренных значений $U_{иj}$ и десять значений погрешности измерений $\Delta I_j = I_{иj} - 5{,}000$. У каждого экземпляра аттестуемых приборов погрешность измерения своя, отличная от погрешности других приборов. Результаты эксперимента заносим в табл. 4.5.4.

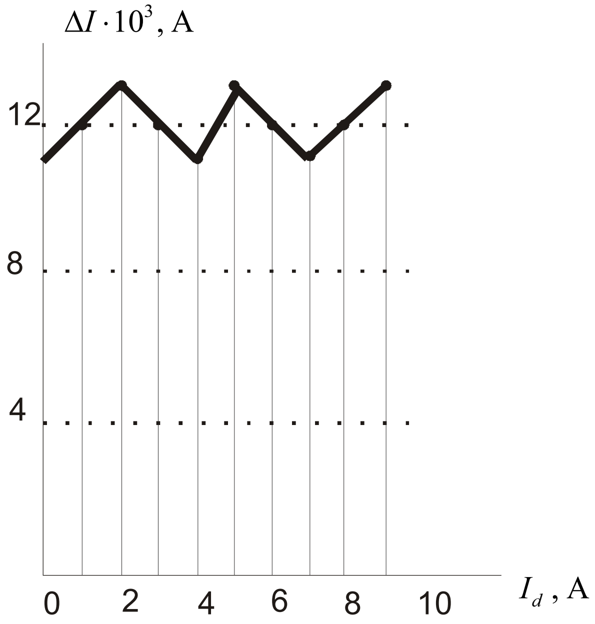


Рис. 4.5.2. Зависимость аддитивной погрешности от значения измеряемого тока для одного экземпляра амперметра

Таблица 4.5.4

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$I_{иj}$	5,010	5,015	5,025	5,020	5,030	4,990	4,980	4,985	4,970	4,975
ΔI_j	0,010	0,015	0,020	0,0250	0,030	–0,010	–0,020	–0,015	–0,030	–0,025
$\Delta I_j^{\,2}\cdot 10^6$	100	225	400	625	900	100	400	225	900	625

Среднее значение измеренного тока равно:

$$\overline{I_\text{и}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5,010+5,015+5,020+5,025+5,030+ \\ +4,990+4,980+4,985+4,970+4,975 \end{pmatrix} = 5,000\ \text{А}.$$

Среднее квадратическое отклонение погрешности измерения по (4.3.7)

$$\sigma_a = \sigma[\Delta I] =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}(100+225+400+625+900+100+400+225+900+625)\cdot 10^{-6}} =$$

$$= 0,022\ \text{А}.$$

Максимальное значение абсолютной погрешности измерения для приборов опытной партии равно (4.3.8):

$$\Delta I_m = k\sigma[\Delta I] = 2\cdot 0,022 = 0,044 \text{ A},$$

при k=2 и P_d = 0,95.

Максимальная приведённая погрешность

$$\gamma_m = \frac{0,044}{10}100 = 0,44\ \%.$$

В соответствии с определением класс точности амперметров данного типа будет $\gamma_{кл}$ = 0,5.

Задача 4.5.3

Условия задачи. Для разработанного типа многопредельного цифрового вольтметра изготовили опытную партию в количестве 10 экземпляров. Ставится задача: на выбранной шкале с верхним пределом измерения 10 В определить класс точности вольтметра данного типа.

Решение задачи. Необходимо провести три измерительных эксперимента.

В первом эксперименте: берём из опытной партии один любой вольтметр; с помощью образцового источника напряжения устанавливаем 10 значений напряжения через интервал в 1 В; проводим измерения выбранным вольтметром всех десяти значений напряжения образцового источника и получаем десять измеренных значений. Далее вычисляем погрешность каждого измерения по формуле $\Delta U = U_и - U_д$. Результаты измерения и вычисления заносим в табл. 4.5.5 и по полученным данным строим графическую зависимость ΔU от $U_д$ (рис. 4.5.3).

Таблица 4.5.5

$\Delta U_д$	0,0000	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000	6,0000	7,0000	8,0000	9,0000
$U_и$	0,0010	1,0011	2,0012	3,0013	4,0014	5,0015	6,0016	7,0017	8,0018	9,0019
$\Delta U\cdot 10^3$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9

Из рис. 4.5.3 видно, что абсолютная погрешность вольтметра содержит аддитивную и мультипликативную составляющие инструментальной погрешности и потому должна нормироваться коэффициентами c и d в соответствии с формулой (4.4.3).

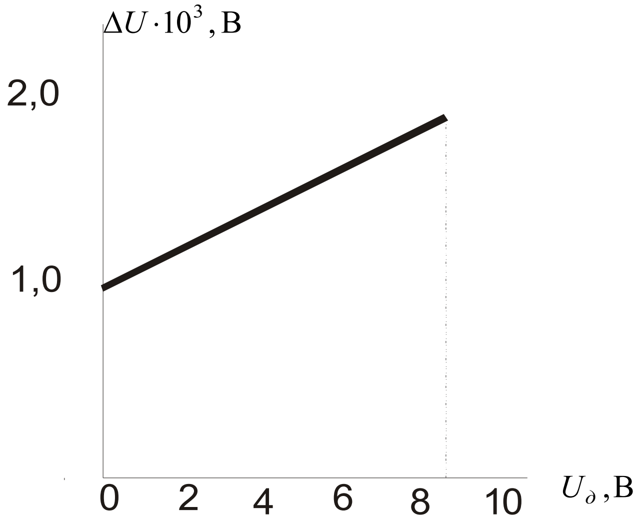


Рис. 4.5.3. Цифровой вольтметр с аддитивной и мультипликативной составляющими инструментальной погрешности

Для определения этих коэффициентов необходимо экспериментально найти максимальные значения аддитивной погрешности a_m и мультипликативной погрешности $b_m U_д$.

Вторым измерительным экспериментом определяем значение a_m.

Из (4.4.4) следует, что $\Delta U_m = a_m + b_m U_д$, где ΔU_m – максимальная абсолютная погрешность для исследуемой партии вольтметров при измерении напряжения $U_д$.

При измерении напряжения $U_д = 0$ абсолютная погрешность определяется только аддитивной составляющей $\Delta U_m = a_m$. Для её нахождения установим образцовым источником значение напряжения $U_д = 0$ и произведём его измерение всеми десятью вольтметрами. Результаты измерения занесём в табл. 4.5.6. Вычислим абсолютную погрешность каждого измерения $\Delta U = U_и - U_д = a$, результаты также занесём в табл. 4.5.6.

Таблица 4.5.6

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_{и.0}$	0,0010	0,0011	0,0012	0,0013	0,0000	0,0013	0,0012	0,0011	0,0010	0,0000
$\Delta U_j = a_j$	0,0010	0,0011	0,0012	0,0013	0,0000	0,0013	0,0012	0,0011	0,0010	0,0000
$\Delta U_j^2 \cdot 10^8$	100	121	144	169	0	169	144	121	100	0

Среднее квадратическое отклонение погрешностей измерения

$$\sigma[\Delta U] = \sqrt{\frac{1}{10-1}(100+121+144+169+0+169+144+121+100+0)\cdot 10^{-8}} =$$

$$= 1{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

Максимальное значение погрешности измерения для приборов аттестуемой партии, определяющее границы инструментальной погрешности данного типа вольтметров при $U_д = 0$, равно (4.4.10):

$$\Delta U_m = k\sigma[\Delta U] = 2 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-3} = 2{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{В}$$

при $k = 2$ и доверительной вероятности $P_д = 0{,}95$.

Таким образом, для исследуемой партии приборов аддитивная составляющая инструментальной погрешности равна: $a_m = \Delta U_m = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$. В процентном выражении $a_m = 0{,}22$ %.

Для нахождения коэффициента b_m проводим третий измерительный эксперимент. В начале эксперимента у образцового источника напряжения устанавливаем какое-либо значение в диапазоне шкалы вольтметра, например 5,000 В. Далее проводим измерение этого напряжения всеми десятью вольтметрами и получаем десять измеренных значений $U_{иj}$, из которых каждое получено с погрешностью (4.4.11) $\Delta U_j = U_{иj} - 5{,}000 = a_j + b_j \cdot 5{,}000$ В. Результаты измерений и вычислений заносим в табл. 4.5.7.

Таблица 4.5.7

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_{и,5}$	5,0021	5,0034	5,0042	5,0050	5,0015	5,0015	5,0050	5,0042	5,0034	5,0021
ΔU_j	0,0021	0,0034	0,0042	0,0050	0,0015	0,0015	0,0050	0,0042	0,0034	0,0021
$b_j \cdot 10^4$	11	23	30	37	15	2	38	31	24	21

В соответствии с (4.4.11) коэффициент b_j для каждого вольтметра определяется как

$$b_j = (\Delta U_j - a_j) \cdot \frac{1}{5},$$

a_j берётся из табл. 4.5.6.

Среднее квадратическое отклонение коэффициента b (4.4.12)

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{1}{10-1}(121 + 529 + 900 + 225 + 4 + 1444 + 961 + 576 + 441) \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 2{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{В}.$$

Максимальное для партии значение (4.4.13) $b_m = 2 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-3} = 5{,}4 \cdot 10^{-3}$.

Зная a_m и b_m, по формуле (4.4.16) находим значение нормирующего коэффициента c:

$$c = \frac{2,2 \cdot 10^{-3} + 5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{10} \cdot 100 = 0,56,$$

а по формуле (4.4.18) значение нормирующего коэффициента *d*:

$$d = \frac{2,2 \cdot 10^{-3}}{10} \cdot 100 = 0,022.$$

Класс точности вольтметров аттестуемой партии, в соответствии с правилом (4.1.2), будет $c/d = 0,6/0,025$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое аддитивная погрешность средства измерения?
2. Что такое мультипликативная погрешность средства измерения?
3. Как убедиться, что у средства измерения преобладает мультипликативная погрешность?
4. Как убедиться, что у средства измерения преобладает аддитивная погрешность?
5. Как убедиться, что у средства измерения присутствуют как аддитивная, так и мультипликативная составляющие погрешности?
6. Как осуществить нормирование инструментальной погрешности с преобладающей мультипликативной составляющей?
7. Как установить класс точности прибора с мультипликативной погрешностью?
8. Как осуществить нормирование инструментальной погрешности средства измерения с аддитивной погрешностью?
9. Что понимать под классом точности средства измерения с аддитивной погрешностью?
10. Как нормируется класс точности средств измерения, имеющих аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности?
11. Какие средства и способы существуют для уменьшения аддитивной погрешности средства измерения?
12. Какие средства и способы существуют для уменьшения мультипликативной составляющей погрешности средства измерения?

5. НОРМИРОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ В СООТВЕТСТВИИ С ГОСТ 8.009-84

5.1. Математические модели инструментальной погрешности

ГОСТ 8.009-84 для инструментальных погрешностей средств измерения устанавливаются две математические модели.

Модель первая:

$$\Delta = \Delta_{os} \cdot \overset{o}{\Delta}_o \cdot \overset{o}{\Delta}_{oH} \cdot \sum_1^l \Delta_{ci} \cdot \Delta_{dyn}\,. \qquad 5.1.1$$

Формула (5.1.1) представляет собой символическую запись объединения пяти составляющих инструментальной погрешности средства измерения. Под объединением понимают применение к составляющим погрешности некоторого функционала, позволяющего рассчитать общую погрешность измерения, обусловленную совместным воздействием этих составляющих.

В выражении (5.1.1) приняты следующие обозначения: Δ – абсолютная инструментальная погрешность средства измерения; Δ_{os} – систематическая составляющая основной погрешности средства измерения; $\overset{o}{\Delta}_o$ – случайная составляющая основной погрешности средства измерения; $\overset{o}{\Delta}_{oH}$ – случайная составляющая основной погрешности средства измерения, обусловленная гистерезисными явлениями; $\sum_1^l \Delta_{ci}$ – объединение дополнительных погрешностей средства измерения, обусловленных действием влияющих величин в рабочих условиях эксплуатации; Δ_{dyn} – динамическая погрешность средства измерения, обусловленная изменениями во времени значения измеряемой физической величины.

В зависимости от конкретного типа средства измерения и условий его эксплуатации в (5.1.1) могут отсутствовать отдельные составляющие погрешности. В предельном случае

$$\Delta = \Delta_{os}. \qquad 5.1.2$$

В этом случае инструментальная погрешность может быть представлена классом точности средства измерения, как описано в четвёртой главе данного учебного пособия.

Вторая математическая модель инструментальной погрешности средства измерения:

$$\Delta = \Delta_o \cdot \sum_{1}^{l} \Delta_{ci} \cdot \Delta_{dyn}. \qquad 5.1.3$$

В этой модели Δ_o есть основная погрешность средства измерения, используемая без разделения её на систематическую, случайную и гистерезисную составляющие. При определённых условиях использования средства измерения, дополнительная и динамическая составляющие инструментальной погрешности могут отсутствовать, и тогда

$$\Delta = \Delta_o. \qquad 5.1.4$$

Средства измерения, которые будут использоваться в таких регламентированных условиях, могут иметь инструментальную погрешность, нормированную классом точности.

5.2. Нормирование систематической погрешности средства измерения

При рассмотрении вопросов нормирования инструментальной погрешности средства измерения по ГОСТ 8.009–84 будем использовать первую математическую модель инструментальной погрешности (5.1.1). Первой в (5.1.1) стоит систематическая составляющая основной погрешности Δ_{os}.

Для нормирования систематической погрешности на основе экспериментальных данных выделим партию из N средств измерения одного типа. Далее, возьмём из этой партии одно j-е средство измерения и с его помощью экспериментально убедимся в отсутствии случайной $\overset{o}{\Delta}_o$ и гистерезисной $\overset{o}{\Delta}_{oH}$ составляющих инструментальной погрешности, затем определим, какая составляющая (аддитивная, мультипликативная или их совокупность) определяет систематическую погрешность выбранного средства измерения, а следовательно и всей партии приборов.

В начале измерительного эксперимента установим несколько дискретных значений измеряемой физической величины в интервале от

$x_{\partial 1} = 0$ до некоторого максимального значения, равного верхнему пределу измерения прибора $x_{\partial m}$:

$$x_{\partial} = \{x_{\partial 1} \cdots x_{\partial i} \cdots x_{\partial m}\}. \qquad 5.2.1$$

Проведём измерение установленных значений физических величин одним, выбранным из партии j-м средством измерения. В результате проведённых измерений получим ряд показаний прибора:

$$x_{\text{и}} = \{x_{\text{и}1} \cdots x_{\text{и}i} \cdots x_{\text{и}m}\}. \qquad 5.2.3$$

Определив абсолютную погрешность каждого проведённого измерения, получим ряд значений погрешности:

$$\Delta = \{\Delta_1 \cdots \Delta_i \cdots \Delta_m\}, \qquad 5.2.4$$

где

$$\Delta_i = x_{\text{и}i} - x_{\partial i}. \qquad 5.2.5$$

Далее нужно исследовать зависимость абсолютной погрешности измерения от значения измеряемой физической величины. При этом возможными могут быть три варианта зависимости.

В первом варианте абсолютная погрешность не зависит от значения измеряемой физической величины, т. е. является аддитивной погрешностью.

$$\Delta_j = \Delta_1 = \cdots \Delta_i = \cdots \Delta_m = a_j\,, \qquad 5.2.6$$

где a_j – аддитивная погрешность выбранного для эксперимента j-го средства измерения.

Во втором варианте абсолютная погрешность линейно зависит от значения измеряемой физической величины и, следовательно, является мультипликативной погрешностью измерения.

$$\Delta_j = b_j x_{\partial}, \qquad 5.2.7$$

где b_j – коэффициент, определяющий мультипликативную погрешность для выбранного j-го средства измерения.

В третьем варианте в абсолютной погрешности измерения присутствуют как аддитивная составляющая, так и мультипликативная составляющая.

$$\Delta_j = a_j + b_j x_{\partial}. \qquad 5.2.8$$

Проведём *нормирование систематической погрешности средств измерения с преобладающей аддитивной составляющей*. Для этого проведём измерение какого-либо одного установленного значения измеряемой физической величины из ряда (5.2.1) всеми средствами измерения выделенной партии. После проведения измерений вычислим аддитивную погрешность для каждого средства измерения, участвующего в измерительном эксперименте по формуле (5.2.5). В результате получим множество аддитивных погрешностей, образованное аддитивными погрешностями отдельно взятых средств измерения:

$$\Delta_{os} = \{a_1 \cdots a_j \cdots a_N\}, \qquad 5.2.9$$

где a_j – аддитивная погрешность j-го средства измерения; a_N – аддитивная погрешность последнего по счёту в партии средства измерения.

Для j-го средства измерения $\Delta_{os} = a_j$ есть величина постоянная. Для всей партии средств измерения Δ_{os} есть величина случайная.

Среднее значение систематической погрешности для партии средств измерения равно:

$$\bar{\Delta}_{os} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_j = 0. \qquad 5.2.10$$

Если среднее значение систематической погрешности окажется не равным нулю, то конструкторам средств измерения нужно внести соответствующие доработки в прибор и добиться выполнения равенства (4.2.10).

Среднее квадратическое отклонение систематической (аддитивной) погрешности от своего среднего значения равно:

$$\sigma_a = \sigma[\Delta_{os}] = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N} a_j^2}\,. \qquad 5.2.11$$

Границы систематической погрешности лежат в доверительном интервале

$$\Delta_{osp} = k\sigma[\Delta_{os}], \qquad 5.2.12$$

который при доверительной вероятности $P_д = 0{,}95$ равен $\Delta_{osp} = 2\sigma[\Delta_{os}]$, а при доверительной вероятности $P_д = 0{,}997$ равен $\Delta_{osp} = 3\sigma[\Delta_{os}]$.

В нормативно-технической документации на аттестуемое средство измерения метрологи приборостроительного завода должны, в соответствии с ГОСТ 8.009–84, указать среднее квадратическое отклонение систематической погрешности от своего среднего значения $\sigma[\Delta_{os}]$ и (или) границы доверительного интервала Δ_{osp}, в котором находятся значения систематической погрешности, с указанной доверительной вероятностью $P_д$.

Рассмотрим *нормирование систематической погрешности по второму варианту, когда она определяется мультипликативной составляющей*. В этом варианте для j-го средства измерения систематическая погрешность равна:

$$\Delta_{os} = b_j x_\partial . \qquad 5.2.13$$

Для j-го средства измерения коэффициент b_j – величина постоянная, а для всей партии средств измерения коэффициент b есть величина переменная и случайная.

Среднее значение коэффициента равно:

$$\bar{b} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b_j = 0. \qquad 5.2.14$$

Среднее квадратическое отклонение коэффициента от среднего значения

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum b_j^2}. \qquad 5.2.15$$

Среднее квадратическое отклонение абсолютной погрешности измерения от своего среднего значения с учётом (5.2.13) равно:

$$\sigma[\Delta_{os}] = x_\partial \sigma_b . \qquad 5.2.16$$

В нормативно-технической документации, в этом варианте нормирования систематической погрешности, нормируется $\sigma[\Delta_{os}]$, определяемое по (5.2.16), и (или) границы систематической погрешности, определяемые как границы доверительного интервала Δ_{osp}:

$$\Delta_{osp} = k\sigma[\Delta_{os}] = kx_\partial \sigma_b , \qquad 5.2.17$$

при $k = 2$ с доверительной вероятностью $P_\partial = 0{,}95$ и при $k = 3$ с доверительной вероятностью $P_\partial = 0{,}997$.

Рассмотрим *нормирование систематической погрешности средства измерения по третьему варианту, когда она определяется аддитивной и мультипликативной составляющими*. В этом варианте систематическая погрешность для j-го средства измерения равна:

$$\Delta_{osj} = a_j + b_j x_\partial . \qquad 5.2.18$$

Для любого j-го средства измерения из аттестуемой партии коэффициенты a_j и b_j являются величинами постоянными. Для всей совокупности средств измерения выбранной партии приборов они величины случайные и представляют собой множества:

$$a = \{a_1 \cdots a_j \cdots a_N\},\ b = \{b_1 \cdots b_j \cdots b_N\}.$$

Установим $x_\partial = 0$, проведём измерения этого значения физической величины всеми средствами измерения, затем вычислим абсолютные погрешности измерения, в результате чего получим множество погрешностей:

$$a = \{a_1 \cdots a_j \cdots a_N\}. \qquad 5.2.19$$

Среднее арифметическое значение коэффициента, определяющего аддитивную составляющую погрешности, равно:

$$\bar{a} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_j = 0. \qquad 5.2.20$$

Если в (5.2.20) $\overline{a}$ не равно нулю, то в приборах испытуемой партии нужно провести конструктивно коррекцию начала отсчёта по шкале, иными словами, коррекцию нуля шкалы.

Среднее квадратическое отклонение a_j от своего среднего арифметического значения равно:

$$\sigma_a = \sigma[a] = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N} a_j^{\,2}}. \qquad 5.2.21$$

С целью определения точечных оценок случайной величины b для всей партии средств измерения установим какое-либо значение $x_д$ измеряемой физической величины и проведём её измерение j-м средством измерения. В результате проведённого эксперимента получим измеренное значение физической величины $x_и$ и систематическую погрешность

$$\Delta_{osj} = x_{иj} - x_д = a_j + b_j x_д, \qquad 5.2.22$$

где Δ_{osj} – систематическая погрешность (5.2.22), определённая экспериментально, a_j – аддитивная составляющая погрешности, выбираемая из множества (5.2.19) и $x_д$ – установленное в эксперименте значение измеряемой физической величины.

Интересующее нас значение коэффициента определяем из (5.2.22):

$$b_j = \frac{\Delta_{osj} - a_j}{x_д}, \qquad 5.2.23$$

Проделав описанный эксперимент со всей партией средств измерения, получим множество значений коэффициентов b:

$$b = \{b_1 \cdots b_j \cdots b_N\}. \qquad 5.2.24$$

Среднее арифметическое значение коэффициента, при нормальном законе распределения, должно быть равно нулю:

$$\bar{b} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b_j = 0. \qquad 5.2.25$$

Среднее квадратическое отклонение j-го коэффициента от среднего арифметического значения всех коэффициентов равно:

$$\sigma_b = \sigma[b] = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N} b_j^2}. \quad 5.2.26$$

Среднее квадратическое отклонение мультипликативной погрешности от своего среднего значения

$$\sigma[bx_\partial] = x_\partial \sigma_b. \quad 5.2.27$$

Считаем аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности не коррелированными, тогда среднее квадратическое отклонение суммарной систематической погрешности от своего среднего значения будет равно:

$$\sigma[\Delta_{os}] = \sqrt{(\sigma_a)^2 + (x_\partial \sigma_b)^2}. \quad 5.2.28$$

В нормативно-технической документации в рассматриваемом варианте нормируются среднее квадратическое отклонение суммарной систематической погрешности $\sigma[\Delta_{os}]$ от своего среднего значения и границы доверительного интервала $\Delta_{osp} = k\sigma[\Delta_{os}]$.

Как и в двух предыдущих вариантах, границы интервала равны $2\sigma[\Delta_{os}]$ при доверительной вероятности $P_\partial = 0{,}95$ и $3\sigma[\Delta_{os}]$ при доверительной вероятности $P_\partial = 0{,}997$.

5.3. Нормирование случайной составляющей основной погрешности средства измерения

Случайная погрешность средства измерения стоит второй в математической модели инструментальной погрешности (5.1.1). Эта погрешность порождается различными явлениями внутри средства измерения, такими как внутренние шумы, дрейфы нуля, электромагнитные наводки от собственных электрических элементов (трансформаторы, реле, тиристоры и др. коммутирующие элементы). Рассматриваемая погрешность не зависит от значения измеряемой величины, т. е. носит аддитивный характер.

Для экспериментальной оценки случайной составляющей основной погрешности средства измерения возьмём из партии аттестуемых приборов одно j-е средство измерения и проведём им многократные измерения какого-либо значения величины x_∂, в результате получим множество измеренных значений:

$$x_{\text{и}} = \{x_{\text{и}1} \cdots x_{\text{и}i} \cdots x_{\text{и}n}\}. \quad 5.3.1$$

При каждом измерении будет иметь место погрешность измерения, их совокупность даст множество погрешностей:

$$\overset{o}{\Delta} = \{\overset{o}{\Delta}_1 \cdots \overset{o}{\Delta}_i \cdots \overset{o}{\Delta}_n\}. \qquad 5.3.2$$

Среднее значение погрешности измерений для j-го прибора

$$\overline{\overset{o}{\Delta}}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overset{o}{\Delta}_i. \qquad 5.3.3$$

В отсутствие случайной составляющей инструментальной погрешности, а также при нормальном законе распределения случайной составляющей погрешности, среднее арифметическое значение погрешности многократных измерений должно равняться систематической погрешности:

$$\bar{\Delta}_j = \Delta_{osj}. \qquad 5.3.4$$

Среднее квадратическое отклонение погрешности отдельных измерений от их среднего арифметического значения погрешности равно:

$$\sigma_j[\overset{o}{\Delta}] = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overset{o}{\Delta}_i - \bar{\Delta}_j)^2}. \qquad 5.3.5$$

Проделав со всеми N средствами измерения аттестуемой партии описанную выше процедуру, получим для каждого средства измерения среднее квадратическое отклонение его погрешностей многократных измерений от их среднего значения, которые в совокупности составят множество:

$$\sigma[\overset{o}{\Delta}] = \{\sigma_1[\overset{o}{\Delta}] \cdots \sigma_j[\overset{o}{\Delta}] \cdots \sigma_N[\overset{o}{\Delta}]\}. \qquad 5.3.6$$

Среднее для всей партии среднее квадратическое отклонение погрешностей будет равно:

$$\bar{\sigma}[\overset{o}{\Delta}] = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}\sigma_j[\overset{o}{\Delta}]. \qquad 5.3.7$$

Границы случайной погрешности для всей партии средств измерения:

$$\overset{o}{\Delta}_o = k\bar{\sigma}[\overset{o}{\Delta}]. \qquad 5.3.8$$

Как и в предыдущих случаях, $k=2$ при доверительной вероятности 0,95 и $k=3$ при доверительной вероятности 0,997.

В нормативно-технической документации на всю аттестуемую партию указываются границы случайной погрешности $\overset{o}{\Delta}_o$ и среднее квадратическое отклонение случайной погрешности от её среднего арифметического значения $\overline{\sigma}[\overset{o}{\Delta}]$.

При нормировании инструментальной погрешности по второй математической модели (5.1.3) границы погрешности будут определяться как систематической, так и случайной составляющими погрешности:

$$\Delta_o = \sqrt{\Delta_{os}^2 + \overset{o}{\Delta}_o^{\,2}}. \qquad 5.3.9$$

5.4. Нормирование случайной погрешности от гистерезиса

Погрешность от гистерезиса стоит третьей по порядку в математической модели инструментальной погрешности средства измерения (5.1.1). Погрешность гистерезиса определяется разностью показаний средства измерения, одно из которых получают при приближении измеряемой физической величины к установившемуся значению снизу (от меньших значений, в предельном случае от нуля), другое показание получают при приближении измеряемой физической величины к точке отсчёта сверху (от больших значений, в крайнем случае, от верхнего предела измерения прибора). Эта разность показаний является величиной случайной.

Для оценки погрешности гистерезиса, из партии аттестуемых приборов берём один j-й.

Изменяем значение измеряемой физической величины от нуля до установившегося значения $x_д$ и снимаем показания j-го средства измерения при достижении измеряемой физической величиной установившегося значения. Повторяем эксперимент n раз и получаем в результате n измеренных значений:

$$x_{иn} = \{x_{и1} \cdots x_{иi} \cdots x_{иn}\}. \qquad 5.4.1$$

Среднее значение показаний средства измерения

$$\bar{x}_{иn} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{иi}. \qquad 5.4.2$$

Погрешность i-го измерения равна:

$$\Delta_{нi} = x_{иi} - x_д. \qquad 5.4.3$$

Погрешности всех произведённых измерений образуют множество

$$\Delta_{нj} = \{\Delta_{н1} \cdots \Delta_{нi} \cdots \Delta_{нn}\}. \qquad 5.4.4$$

При нормальном законе распределения погрешностей их среднее арифметическое должно быть равно нулю:

$$\bar{\Delta}_{\text{н}j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{\text{н}i} = 0. \qquad 5.4.5$$

Среднее квадратическое отклонение погрешности измерения от его среднеарифметического значения равно:

$$\sigma[\Delta_{\text{н}}] = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{\text{н}i}^{2}}. \qquad 5.4.6$$

Проделав подобные эксперименты при приближении измеряемой физической величины к установившемуся значению сверху (от больших значений), найдём среднее арифметическое значение показаний средства измерения

$$\bar{x}_{\text{ив}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{\text{и}i} \qquad 5.4.6$$

и среднее квадратическое отклонение погрешности измерения от его среднего значения

$$\sigma[\Delta_{\text{в}}] = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{\text{в}i}^{2}}. \qquad 5.4.7$$

На рис. 5.4.1 результаты экспериментов представлены в графической форме.

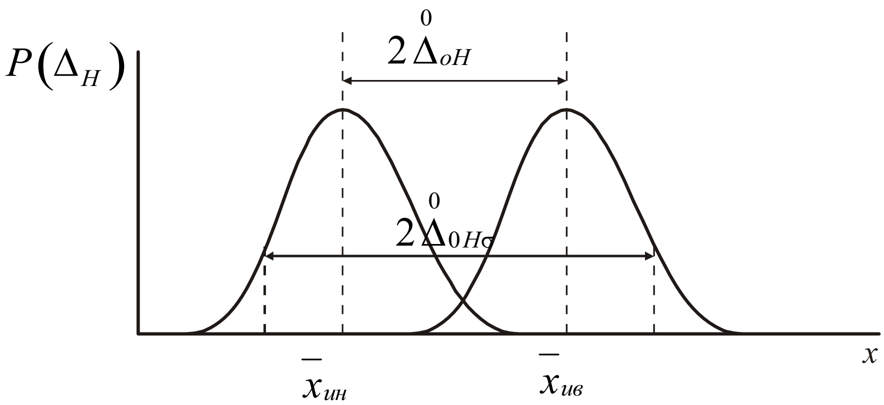


Рис. 5.4.1. Случайная погрешность средства измерения, обусловленная гистерезисными явлениями: $P(\Delta_H)$ – плотность вероятности гистерезисной случайной погрешности; $\bar{x}_{ин}$ – среднее арифметическое значение показаний средства измерения при приближении к точке отсчёта снизу; $\bar{x}_{ив}$ – среднее арифметическое значение показаний средства измерения при приближении к точке отсчёта сверху; $2\overset{o}{\Delta}_{oH}$ – интервал случайной погрешности от гистерезиса; $2\overset{o}{\Delta}_{oH\sigma}$ – интервал случайной погрешности от гистерезиса с учётом погрешности от разброса показаний средства измерения при повторяющихся измерительных экспериментах

Из рисунка видно, что интервал, в котором лежит среднее значение погрешности от гистерезиса, равен:

$$2\overset{o}{\Delta}_{oH} = \bar{x}_{\text{ив}} - \bar{x}_{\text{ин}}\,. \qquad 5.4.8$$

В нормативно-технической документации на всю партию приборов нужно указать границы погрешности от гистерезиса:

$$\bar{\Delta}_{oH} = \pm\frac{\bar{x}_{\text{ив}} - \bar{x}_{\text{ин}}}{2}. \qquad 5.4.9$$

Если требуется более точно указать границы погрешности от гистерезиса, то нужно учесть также разброс погрешностей, задаваемый их среднеквадратическими отклонениями $\sigma[\Delta_{\text{в}}]$ и $\sigma[\Delta_{\text{н}}]$, и границы установить по формуле

$$\overset{o}{\Delta}_{oH\sigma} = \pm\left(\frac{x_{\text{ив}} - \bar{x}_{\text{ин}}}{2} + k\sigma[\Delta]\right), \qquad 5.4.10$$

где $k\sigma[\Delta] = k\sigma[\Delta_{\text{в}}] = k\sigma[\Delta_{\text{н}}]$.

5.5. Нормирование дополнительных погрешностей средств измерения

Дополнительные погрешности средства измерения стоят четвёртыми по порядку в математической модели инструментальной погрешности средства измерения. Расчёт дополнительных погрешностей для конкретных типов средств измерения имеет свои особенности, которые невозможно рассмотреть в одном учебном пособии. Для иллюстрации одного из подходов расчёта дополнительной погрешности рассмотрим расчёт дополнительной погрешности, появляющейся при отклонении окружающей температуры от номинального значения, указанного в нормативно-технической документации.

Из опытной партии средств измерения берём один прибор и помещаем его в термостат с регулируемой температурой. Устанавливаем какое-либо значение измеряемой физической величины x_{∂}. При нескольких фиксированных значениях температуры в термостате,

$$t = \{t_1 \cdots t_{\text{ном}} \cdots t_n\}, \qquad 5.5.1$$

проводим измерения установленного значения физической величины и получаем ряд измеренных значений:

$$x_{и} = \{x_{и1} \cdots x_{иноm} \cdots x_i \cdots x_{иn}\}. \qquad 5.5.2$$

Далее вычисляем погрешности каждого измерения по общей формуле

$$\Delta_i = x_i - x_{д}. \qquad 5.5.3$$

После проведённых вычислений получим ряд погрешностей:

$$\Delta = \{\Delta_1 \cdots \Delta_{ном} \cdots \Delta_i \cdots \Delta_n\}. \qquad 5.5.4$$

Погрешность средства измерения при номинальном значении температуры есть не что иное, как систематическая не исключённая погрешность выбранного для эксперимента средства измерения:

$$\Delta_{ном} = \Delta_{os}. \qquad 5.5.5$$

Дополнительная погрешность средства измерения, обусловленная изменением температуры окружающей среды будет равна:

$$\Delta_t = \{\Delta_{t1} \cdots 0_{tном} \cdots \Delta_{tn}\}, \qquad 5.5.6$$

где $\Delta_{t1} = \Delta_1 - \Delta_{os}$, ... $\Delta_{tn} = \Delta_n - \Delta_{os}$.

При номинальном значении окружающей температуры дополнительная температурная погрешность отсутствует, т. е. равна нулю.

На рис. 5.5.1 показана графически зависимость дополнительной температурной погрешности от значения окружающей температуры. Эта зависимость в частном случае может быть линейной, а в общем случае она нелинейная.

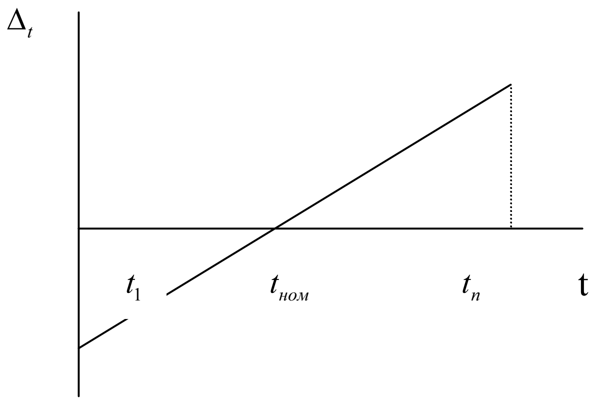


Рис. 5.5.1. Дополнительная температурная погрешность средства измерения: Δt – абсолютное значение дополнительной температурной погрешности; t – окружающая средство измерения температура; $t_{ном}$ – номинальное значение окружающей температуры

Для случая линейной зависимости она может быть аппроксимирована выражением

$$\Delta_t = k(t - t_{ном}). \qquad 5.5.7$$

При необходимости описанную процедуру можно проделать со всеми m приборами опытной партии и получить множество коэффициентов k в аппроксимирующем выражении (4.5.7):

$$k = \{k_1 \cdots k_j \cdots k_m\}. \tag{5.5.8}$$

Среднее значение аппроксимирующего коэффициента равно:

$$\bar{k} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} k_j. \tag{5.5.9}$$

В нормативно-технической документации на аттестуемую партию средств измерения указывается вид температурной зависимости и температурный коэффициент аппроксимирующей формулы.

5.6. Упражнения и задачи

Задача 5.6.1

Условия задачи. Для разработанного типа вольтметров с верхним пределом измерения 10 В изготовлена опытная партия в количестве 10 экземпляров. Ставится задача экспериментально осуществить нормирование инструментальной погрешности типа вольтметров в соответствии с ГОСТ 8.009–84.

Решение задачи. Для осуществления нормирования инструментальной погрешности по ГОСТ 8.009-84 необходимо провести ряд измерительных экспериментов.

Эксперимент первый. Выбранным из партии j-м средством измерения проводим многократные измерения и убеждаемся в наличии или отсутствии случайной составляющей инструментальной погрешности. Для этого образцовым источником напряжения устанавливаем какое-либо значение напряжения, например соответствующее середине шкалы 5,000 В, и проводим n измерений этого напряжения. Получаем n измеренных значений напряжения. Вычисляем абсолютную погрешность каждого измерения $\Delta U_i = U_{\text{н}i} - U_{\partial} = U_{\text{н}i} - 5{,}000$. Результаты измерения и вычисления заносим в табл. 5.6.1.

Таблица 5.6.1

$U_{\text{н}}$	5,011	5,010	5,011	5,010	5,011	5,009	5,010	5,009	5,01	5,009
$\Delta U \cdot 10^3$	11	10	11	10	11	9	10	9	10	9
$\Delta\Delta U \cdot 10^3$	1	0	1	0	1	–1	0	–1	0	–1

Среднее арифметическое значение погрешности измерений будет представлять систематическую погрешность выбранного экземпляра вольтметра:

$$\overline{\Delta U} = \frac{1}{10}(11+10+11+10+11+9+10+9+10+9)\cdot 10^{-3} = 10\cdot 10^{-3}\text{ В.}$$

Среднее квадратическое отклонение погрешности отдельных измерений $\Delta\Delta U_i = \Delta U_i - \Delta U$ – от их среднего квадратического значения ΔU – будет характеризовать случайную составляющую основной инструментальной погрешности вольтметра:

$$\sigma[\Delta U] = \sqrt{\frac{1}{9}(1+0+1+0+1+1+0+1+0+1)\cdot 10^{-6}} = 0{,}8\cdot 10^{-3}\text{ В.}$$

Границы случайной погрешности

$$\Delta \overset{o}{U}_o = 2\sigma[\Delta U] = 2\cdot 0{,}8\cdot 10^{-3} = 1{,}6\cdot 10^{-3}\text{ В.}$$

почти в шесть раз меньше систематической погрешности, поэтому случайную составляющую из рассмотрения исключаем.

Эксперимент второй. Устанавливаем значение $U_д = 0$ и затем плавно увеличиваем его до значения $U_д = 5{,}000$ В. Снимаем установившиеся показания вольтметра и заносим их в табл. 5.6.2. Проделываем эту процедуру несколько раз, например 10. Вычисляем погрешность каждого измерения и заносим её в ту же табл. 5.6.2.

Таблица 5.6.2

$U_д$	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000
$U_{ин}$	5,010	5,010	5,011	5,011	5,010	5,010	5,010	5,009	5,009	5,010
$\Delta U_и$	0,010	0,010	0,011	0,011	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,010

Вычисляем среднее значение погрешности вольтметра при подходе к установившемуся значению снизу:

$$\overline{\Delta U_н} = \frac{1}{10}(10+10+11+11+10+10+10+9+9+10)\cdot 10^{-3} = 0{,}010\text{ В.}$$

Затем устанавливаем источником образцового напряжения значение 10 В и плавно уменьшаем его до значения 5,000 В. Записываем показания вольтметра, вычисляем погрешность измерения и заносим результаты в табл. 5.6.3. Проделываем эту операцию десять раз.

Таблица 5.6.3

$U_д$	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000
$U_{\text{ив}}$	5,010	5,010	5,011	5,011	5,010	5,010	5,010	5,009	5,009	5,010
$\Delta U_{\text{в}}$	0,010	0,010	0,011	0,011	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,010

Вычисляем среднее значение погрешности измерений при подходе к установившемуся значению сверху (от больших значений):

$$\overline{\Delta U_{\text{в}}} = \frac{1}{10}(10+10+11+11+10+10+10+9+9+10)\cdot 10^{-3} = 0,010 \text{ В}.$$

При подходе снизу и подходе сверху к установившемуся значению погрешности измерения одинаковы, следовательно погрешность измерения от гистерезиса отсутствует.

Проводим эксперимент третий по установлению вида систематической погрешности: мультипликативная, аддитивная, или та и другая. Для этого образцовым источником устанавливаем через интервал в 1В десять значений напряжения. Проводим измерения установленных значений одним вольтметром, взятым из партии. Вычисляем погрешность каждого измерения и строим зависимость $\Delta U = f(U_д)$. При этом возможны три варианта зависимости. Если зависимость указывает на наличие мультипликативной погрешности, то её нормирование производится так же, как в задаче 4.5.1, если преобладает аддитивная погрешность, то её нормирование производится, как в задаче 4.5.2, если же в погрешности присутствуют мультипликативная и аддитивная составляющие, то нормирование проводим по алгоритму задачи 4.5.3.

Задача 5.6.2

Условия задачи. Предыдущими экспериментами установлено, что у аттестуемой партии амперметров отсутствуют случайная и гистерезисная составляющие основной инструментальной погрешности, присутствует только систематическая аддитивная составляющая погрешности. Требуется провести нормирование этой погрешности для партии амперметров по ГОСТ 8.009–84. Партия амперметров такая же, как и в задаче 4.5.2.

Решение задачи. Для решения задачи используем 10 амперметров аттестуемой партии и экспериментальные данные, полученные на них в задаче 4.5.2, которые занесены в табл. 5.6.4.

Таблица 5.6.4

$I_{иj}$	5,010	5,015	5,025	5,020	5,030	4,990	4,980	4,985	4,970	4,975
ΔI_j	0,01	0,015	0,020	0,025	0,030	–0,010	–0,020	–0,015	–0,030	–0,025
$\Delta I_j^2 \cdot 10^6$	100	225	400	625	900	100	400	225	900	625

$I_{иj}$ – показания j-го амперметра при измерении тока 5,000А; ΔI_j – абсолютная погрешность j-го амперметра; $\Delta I_j^2 \cdot 10^6$ – абсолютная погрешность в квадрате, умноженная на 10^6.

Среднее значение измеренного тока равно:

$$\overline{I_{и}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5,010+5,015+5,025+5,020+5,030+ \\ +4,990+4,980+4,985+4,970+4,975 \end{pmatrix} = 5,000 \text{ А}.$$

Среднее квадратическое отклонение погрешности от среднего значения (5.2.11)

$$\sigma[\Delta I_{os}] =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10-1}(100+225+400+625+900+100+225+900+625)\cdot 10^{-6}} =$$

$$= 0,022 \text{ А}.$$

Границы погрешности (5.2.12) $\Delta I_{osp} = k\sigma[\Delta I_{os}] = 0,044$ А.

В нормативно-технической документации на аттестуемые амперметры мы должны указать среднее квадратическое отклонение погрешностей измерения $\sigma[\Delta I_{os}] = 0,022$ F или границы абсолютной погрешности измерения $\Delta I_{osp} = k\sigma[\Delta I_{os}] = 0,044$ А во всём диапазоне измерения амперметров аттестуемой партии.

Задача 5.6.3

Условия задачи. Для разработанного нового типа вольтметров изготовили опытную партию в количестве 10 экземпляров. Предварительными экспериментами установлено, что случайная и гистерезисная составляющие погрешности у приборов отсутствуют, а систематическая инструментальная погрешность носит мультипликативный характер. Ставится задача провести нормирование инструментальной погрешности в соответствии с ГОСТ 8.009–84.

Решение задачи. Для решения задачи образцовым источником напряжения установим значение $U_д = 5,000$ В и проведём его измерение всеми десятью вольтметрами. Результаты измерения $U_{иj}$ занесём в табл. 5.6.5. Вычислим абсолютную погрешность измерения каждым вольтметром $\Delta U_j = U_{иj} - U_д$ и занесём её также в табл. 5.6.5.

Таблица 5.6.5

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_{иj}$	5,010	5,015	5,020	5,025	5,030	4,990	4,980	4,985	4,970	7,975
ΔU_{osj}	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	–0,010	–0,020	–0,015	–0,030	–0,025
b_j	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	–0,002	–0,004	–0,003	–0,006	–0,005

Среднее значение измеренного напряжения равно:

$$\overline{U_и} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5,010+5,015+5,020+5,025+5,030+ \\ +4,990+4,980+4,985+4,970+4,975 \end{pmatrix} = 5,000 \text{ В.}$$

Погрешность измерения j-м вольтметром равна:

$$\Delta U_{osj} = b_j \cdot 5,000 = U_{иj} - 5,000,$$

отсюда

$$b_j = \frac{U_{иj} - 5,000}{5,000} = \frac{\Delta U_{osj}}{5,000}.$$

Результаты вычислений b_j внесены в табл. 5.6.5.

Среднее значение коэффициента b_j по (5.2.14) равно:

$$\overline{b_j} = \frac{1}{10}(2+3+4+5+6-2-4-3-6-5)\cdot 10^{-3} = 0.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{1}{9}(4+9+16+25+36+4+16+9+36+25)} = 4,47\cdot 10^{-3}.$$

Среднее квадратическое отклонение погрешности измерения от среднего значения по (5.2.16) равно:

$$\sigma[\Delta U_{os}] = \sigma_b U_д = 4,47\cdot 10^{-3}\cdot U_д \text{ В.}$$

Границы доверительного интервала

$$\Delta U_{osp} = k\sigma_b = 2\cdot 4,47\cdot 10^{-3} U_д \cong 0,009\cdot U_д \text{ В.}$$

В нормативно-техническую документацию на аттестуемые средства измерения вносятся $\sigma[\Delta U_{os}] = 4,47\cdot 10^{-3}\cdot U_д$ В и (или) границы максимальной систематической погрешности $\Delta U_{osp} \cong 9\cdot 10^{-3}\cdot U_д$ В.

Задача 5.6.4

Условия задачи. Для разработанного нового типа вольтметров изготовили опытную партию в количестве 10 экземпляров. Предварительными экспериментами установлено, что случайная и гистерезисная составляющие погрешности у приборов отсутствуют, а систематическая инструментальная погрешность содержит аддитивную и мультипликативную составляющие. Ставится задача провести нормирование инструментальной погрешности в соответствии с ГОСТ 8.009–84.

Решение задачи. Для решения задачи проведём первый эксперимент. С этой целью образцовым источником установим значение $U_д = 0$ и проведём его измерение всеми десятью вольтметрами. Результаты измерения и результаты вычисления абсолютной погрешности занесём в табл. 5.6.6.

Таблица 5.6.6

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_{и,0}$	0,0010	0,0011	0,0012	0,0013	0,0000	0,0013	0,0012	0,0011	0,0010	0,0000
$\Delta U_j = a_j$	0,0010	0,0011	0,0012	0,0013	0,0000	0,0013	0,0012	0,0011	0,0010	0,0000
$\Delta U_j^2 \cdot 10^8$	100	121	144	169	0	169	144	121	100	0

Среднее квадратическое отклонение погрешностей измерения в соответствии с 5.2.21 равно:

$$\sigma[\Delta U_a] =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10-1}(100+121+144+169+0+169+144+121+100+0)\cdot 10^{-8}} =$$

$$= 1{,}1\cdot 10^{-3}\ \text{В}.$$

С целью определения мультипликативной составляющей погрешности установим образцовым источником значение напряжения $U_д = 5{,}000$ В и произведём его измерение всеми десятью вольтметрами. Показания вольтметров и их погрешности занесём в табл. 5.6.7.

Таблица 5.6.7

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_{и,5}$	5,0021	5,0034	5,0042	5,0050	5,0015	5,0015	5,0050	5,0042	5,0034	5,0021
ΔU_{5j}	0,0021	0,0034	0,0042	0,0050	0,0015	0,0015	0,0050	0,0042	0,0034	0,0021
$B_j \cdot 10^4$	11	23	30	37	15	2	38	31	24	21

В соответствии с (5.2.23) коэффициент b_j для каждого вольтметра определяется как

$$b_j = (\Delta U_j - a_j) \cdot \frac{1}{5},$$

a_j берётся из табл. 5.6.6.

Среднее квадратическое отклонение коэффициентов b_j от среднего значения по (5.2.26):

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{1}{10-1}(121+529+900+225+4+1444+961+576+441) \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 2,7 \cdot 10^{-3}.$$

Среднеквадратическое отклонение мультипликативной погрешности приборов партии по (5.2.27) равно:

$$\sigma[\Delta U_m] = U_д \sigma_b = U_д \cdot 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

Считаем аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности не коррелированными, тогда среднее квадратическое отклонение суммарной погрешности от своего среднего значения будет равно:

$$\sigma[\Delta U_{os}] = \sqrt{(\sigma[\Delta U_a])^2 + (U_д \sigma[\Delta U_m])^2} = \sqrt{(1,1 \cdot 10^{-3})^2 + (U_д \cdot 2,7 \cdot 10^{-3})^2} \text{ В}.$$

Границы инструментальной погрешности для партии приборов:

$$\Delta U_{osp} = k\sigma[\Delta U_{os}] = 2\sqrt{(1,1 \cdot 10^{-3})^2 + (U_д \cdot 2,7 \cdot 10^{-3})^2}.$$

Максимальное для партии значение погрешности имеет место при

$$U_д = 10,0 \text{ В}, \ \Delta U_{osp} = 2 \cdot \sqrt{(1,1 \cdot 10^{-3})^2 + (10 \cdot 2,7 \cdot 10^{-3})^2} = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ В}.$$

В нормативно-технической документации на аттестуемый тип вольтметров можно указывать $\sigma[\Delta U_{os}]$ и(или) ΔU_{osp}.

Задача 5.6.5

Условия задачи. У аттестуемых вольтметров опытной партии в количестве 10 экземпляров, с верхним пределом измерения 10 В, основная инструментальная погрешность состоит из аддитивной систематической погрешности и случайной погрешности (первая и вторая составляющие в математической модели (5.1.1)). Требуется в соответствии с ГОСТ 8.009–84 провести нормирование инструментальной погрешности для всех типов вольтметров.

Решение задачи. Установим образцовым источником напряжения значение $U_д$ = 5,000 В. Проведём многократные измерения этого напряжения всеми десятью вольтметрами. Результаты десяти (n = 10) измерений j-м вольтметром и погрешности этих измерений занесём в табл. 5.6.8.

Таблица 5.6.8

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_{иi}$	5,010	5,011	5,012	5,013	5,014	5,010	5,009	5,008	5,007	5,006
$\Delta U_i \cdot 10^3$	10	11	12	13	14	10	9	8	7	6

Среднее значение напряжения, измеренного вольтметром,

$$\overline{U_{иj}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_{иi}.$$

После подстановки численных значений из табл. 5.6.8 получаем:

$$\overline{U_{иi}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5,010 + 5,011 + 5,012 + 5,013 + 5,014 + \\ +5,010 + 5,009 + 5,008 + 5,007 + 5,006 + \end{pmatrix} = 5,0010 \text{ В}.$$

Абсолютная погрешность i-го измерения j-м вольтметром равна:

$$\Delta U_i = U_{иj} - U_д.$$

Средняя абсолютная погрешность измерения j-м вольтметром

$$\overline{\Delta U_i} = \Delta_{osj} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta U_i$$

является систематической погрешностью Δ_{osj} этого вольтметра. В рассматриваемом примере

$$\Delta_{osj} = \overline{\Delta U_j} = \frac{1}{10}(10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6+)\cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

Среднее квадратическое отклонение погрешностей отдельных измерений от их среднего значения Δ_{osj} будет определять случайную составляющую погрешности измерений $\overset{o}{\Delta}_{oj}$:

$$\sigma[\Delta U_i] = \sigma[\overset{o}{\Delta}_{oj}] = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(\Delta U_i - \overline{\Delta U_i})^2}.$$

В решаемой задаче

$$\sigma[\overset{o}{\Delta}_{oj}] = \sqrt{\frac{1}{9}(0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 0 + 4 + 9 + 16)\cdot 10^{-6}} = 2,58 \cdot 10^{-3}.$$

Границы случайной погрешности измерений для j-го вольтметра:

$$\overset{o}{\Delta}_{opj} = k\sigma[\overset{o}{\Delta}_{oj}] = 2 \cdot 2{,}58 \cdot 10^{-3} = 4{,}16 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

Определим систематическую погрешность Δ_{os} и среднее квадратическое отклонение $\sigma[\overset{o}{\Delta}_{o}]$ случайной погрешности от своего среднего значения для всей партии приборов. Для этого систематические погрешности и средние квадратические значения случайной погрешности каждого прибора аттестуемой партии занесём в табл. 5.6.9.

Таблица 5.6.9

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta_{osj} \cdot 10^3$	10	8	6	4	2	–2	–4	–6	–8	–10
$\sigma[\overset{o}{\Delta}_{o}]$	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2

Среднее значение систематической погрешности для всей партии приборов равно:

$$\overline{\Delta}_{os} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \Delta_{osj} = 0.$$

Среднее квадратическое отклонение систематических погрешностей от их среднего значения

$$\sigma[\Delta_{os}] = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(\Delta_{osj} - \overline{\Delta}_{os})^2}.$$

После подстановки численных значений

$$\sigma[\Delta_{os}] = \sqrt{\frac{1}{9}(100+64+36+16+4+4+16+36+64+100) \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 7{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

Границы систематической погрешности

$$\Delta_{osp} = \pm k\sigma[\Delta_{os}] = \pm 2 \cdot 7{,}0 \cdot 10^{-3} = \pm 0{,}014 \text{ В}.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной погрешности от своего среднего значения для всей партии приборов найдём усреднением средней квадратической погрешности отдельно взятых приборов:

$$\sigma[\overset{o}{\Delta}_{o}] = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma[\overset{o}{\Delta}_{oj}].$$

Подставив численные значения из табл. 5.6.9, получим

$$\sigma[\overset{o}{\Delta}_o] = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2,2+2,3+2,4+2,5+2,6+ \\ +2,6+2,5+2,4+2,3+2,2 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

Границы случайной погрешности будут в пределах

$$\overset{o}{\Delta}_o = \pm k\sigma[\overset{o}{\Delta}_o] = \pm 2 \cdot 2,4 \cdot 10^{-3} = \pm\, 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ В} \cong 0,005 \text{ В}.$$

В нормативно-технической документации на приборы данного типа указываем границы систематической погрешности $\Delta_{osp} = \pm 0,014$ В и границы случайной погрешности $\overset{o}{\Delta}_o = \pm 0,005$ В.

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите формулу первой математической модели инструментальной погрешности средства измерения по ГОСТ 8.009-84 и дайте пояснения.
2. Напишите формулу второй математической модели инструментальной погрешности средства измерения по ГОСТ 8.009-84 и дайте пояснения.
3. Как провести нормирование основной инструментальной погрешности у средства измерения с преобладающей аддитивной составляющей основной погрешности?
4. Как провести нормирование основной инструментальной погрешности у средства измерения с преобладанием мультипликативной составляющей погрешности?
5. Как провести нормирование основной инструментальной погрешности у средства измерения, у которого присутствуют соизмеримые аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности?
6. Опишите процесс нормирования случайной составляющей основной инструментальной погрешности средства измерения.
7. Опишите процесс нормирования случайной погрешности от гистерезиса.
8. Опишите процесс нормирования дополнительной инструментальной погрешности средства измерения.

6. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ОТ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ С ОБОЗНАЧЕННЫМ КЛАССОМ ТОЧНОСТИ

6.1. Прямые однократные измерения

Прямыми измерениями называют такие измерения, при которых искомое значение физической величины находят непосредственно по показаниям измерительного прибора, например напряжение – по показаниям вольтметра, температуру – по показаниям термометра.

Однократные измерения проводят тогда, когда случайная составляющая погрешности значительно меньше систематической погрешности средства измерения. Если границы случайной составляющей погрешности $k\sigma[\overset{o}{\Delta}x]$, обусловленной действием внешних и внутренних причин, значительно меньше границ систематической погрешности Δx_m,

$$k\sigma[\overset{o}{\Delta}x] \prec 0{,}1\Delta x_m, \qquad 6.1.1$$

то можно проводить однократные измерения. Математическая модель погрешности измерения в этом случае будет иметь вид

$$\Delta x_{\text{и}} = \Delta x_m. \qquad 6.1.2$$

При проведении прямых измерений приборами, с установленным классом точности, нужно иметь в виду, что у таких средств измерения не нормируется случайная составляющая погрешности от внутренних причин и не нормируется дополнительная погрешность в рабочем диапазоне влияющих внешних факторов.

В главе 4 показано, что класс точности средства измерения устанавливается по-разному, в зависимости от того, какая составляющая инструментальной погрешности преобладает: аддитивная, мультипликативная, или они соизмеримы. Обработка результатов измерений несколько различается, в зависимости от того, как установлен класс точности прибора.

6.1.1. Обработка результатов измерений, полученных от приборов, с нормированной мультипликативной погрешностью

Если однократное измерение проведено прибором, у которого класс точности нормирован мультипликативной погрешностью, то относительная погрешность измерения в соответствии с (4.2.11) будет равна:

$$\delta_m = \delta_{\text{кл}} = \frac{\Delta x_m}{x_{\text{и}}} 100, \qquad 6.1.3$$

где $x_{\text{и}}$ – показания измерительного прибора, используемые вместо действительного значения измеряемой величины x_{∂}, которое неизвестно; Δx_m – максимальная абсолютная погрешность измерения приборами данного типа; $\delta_{\text{кл}}$ – класс точности типа прибора, которым проведено измерение.

Из (6.1.3) находим максимальную абсолютную погрешность измерения:

$$\Delta x_m = \frac{1}{100} \delta_{\text{кл}} x_{\text{и}}. \qquad 6.1.4$$

Действительное значение измеряемой физической величины будет лежать в интервале:

$$x_{\text{и}} - \Delta x_m \prec x_{\partial} \prec x_{\text{и}} + \Delta x_m, \qquad 6.1.5$$

$$x_{\partial} = x_{\text{и}} \pm \Delta x_m, \; P_{\partial}. \qquad 6.1.6$$

Форму записи (6.1.5) используют, если нижняя и верхняя границы интервала погрешности по модулю не равны.

Например, провели измерение напряжения вольтметром с классом точности $\delta_{\text{кл}} = 1{,}0$, показания вольтметра равны 5,00 В. Границы абсолютной погрешности измерения, в соответствии с (6.1.4), при этом будут равны:

$$\Delta U = \frac{1{,}0 \cdot 5{,}00}{100} = 0{,}05 \text{ В}.$$

Результат измерения представляем границами, в которых с доверительной вероятностью 0,95 или 0,997 находится действительное значение измеряемого напряжения:

$$4{,}95 \text{ В} \prec U_{\partial} \prec 5{,}05 \text{ В}.$$

Доверительная вероятность устанавливается при нормировании инструментальной погрешности и указывается в нормативно-технической документации на средство измерения.

Если у средства измерения задана в нормативно-технической документации дополнительная погрешность, например температурная Δ_{ct}, определённая каким-либо способом, то результат измерения нужно представить с учётом дополнительной погрешности:

$$x_{\text{и}} - \Delta x_m + \Delta x_{ct} \prec x_{\partial} \prec x_{\text{и}} + \Delta x_m + \Delta x_{ct} ,$$

$$x_{\partial} = x_{\text{и}} \pm \Delta x_m + \Delta x_{ct} .$$

Дополнительная погрешность сдвигает границы доверительного интервала в одну сторону.

6.1.2. Обработка результатов измерений, полученных от приборов с нормированной аддитивной погрешностью

Если измерение проведено прибором, у которого класс точности нормирован аддитивной погрешностью, то приведённая погрешность измерения, в соответствии с (4.3.9), в этом случае будет равна:

$$\gamma_m = \gamma_{\text{кл}} = \frac{\Delta x_m}{x_m} 100, \qquad 6.1.7$$

где Δx_m – границы абсолютной погрешности измерения, x_m – верхний предел измерения прибора.

Из (6.1.7) находим границы абсолютной погрешности измерения:

$$\Delta x_m = \frac{1}{100} x_m \gamma_{\text{кл}} . \qquad 6.1.8$$

Результат измерения можно представлять в двух формах:

$$x_{\text{и}} - \Delta x_m \prec x_{\partial} \prec x_{\text{и}} + \Delta x_m , \qquad 6.1.9$$

$$x_{\partial} = x_{\text{и}} \pm \Delta x_m , \; P_{\partial} , \qquad 6.1.10$$

где $x_{\text{и}}$ – показания средства измерения, x_{∂} – действительное значение измеряемой физической величины, P_{∂} – доверительная вероятность нахождения погрешности измерения в доверительном интервале $\pm\Delta x_m$.

Запись в форме (6.1.9) необходимо использовать, когда границы доверительного интервала по модулю не равны.

Например, провели измерение электрического напряжения вольтметром, у которого класс точности нормирован аддитивной погрешностью $\gamma_{кл} = 1{,}0$. Верхний предел измерения $U_m = 10$ В, показания вольтметра $U_и = 5{,}00$ В. Границы абсолютной погрешности измерения в соответствии с (6.1.7) определятся числом

$$\Delta U_m = \frac{1}{100} U_m \gamma_{кл} = \frac{1}{100} 10 \cdot 1{,}0 = 0{,}1 \text{ В}.$$

Результат измерения представляем границами, в которых с доверительной вероятностью 0,95 или 0,997 лежит действительное значение измеряемого напряжения:

$$5{,}0 - 0{,}1 \text{ В} \prec U_\partial \prec 5{,}0 + 0{,}1 \text{ В}$$

или

$$U_\partial = 5{,}0 \pm 0{,}1 \text{ В}, \ P_\partial = 0{,}95 \ \ (0{,}997).$$

Рассмотренные два варианта являются наиболее употребляемыми при представлении результатов измерения, полученных аналоговыми средствами измерения.

6.1.3. Обработка результатов измерений, полученных прибором с аддитивной и мультипликативной составляющими погрешности

Класс точности средства измерения, обладающего аддитивной и мульти-пликативной составляющими инструментальной погрешности, определяется коэффициентами c и d, указанными в нормативно-технической документации на измерительный прибор. При выполнении измерения таким прибором относительная погрешность находится в интервале (4.1.4):

$$\delta = \frac{\Delta x_m}{x_и} \cdot 100 = \pm \left[c + d \left(\frac{x_m}{x_и} - 1 \right) \right], \qquad 6.1.11$$

где Δx_m – границы, в которых лежит действительное значение погрешности проведённого измерения, $x_и \cong x_\partial$ – показания измерительного прибора, x_m – верхний предел измерения прибора, c и d – коэффициенты, определяющие класс точности средства измерения.

Границы абсолютной погрешности измерения находим из (6.1.11):

$$\Delta x_m = \pm \frac{1}{100} x_и \left[c + d \left(\frac{x_m}{x_и} - 1 \right) \right]. \qquad 6.1.12$$

Результаты измерения представляем в форме (6.1.9) или (6.1.10):

$$x_{д} = x_{и} \pm \Delta_m\,,\ P_{д}. \qquad 6.1.13$$

Для примера рассмотрим представление результата измерения электрического тока амперметром, класс точности которого задан коэффициентами c и d, 2,0/1,0. Предел измерения амперметра 10 А, показания амперметра 4,53 А. Границы абсолютной погрешности выполненного измерения:

$$\Delta I = \frac{1}{100}\cdot 4{,}53\left[2{,}0 + 1{,}0\left(\frac{10}{4{,}5} - 1\right)\right] = 0{,}15\ \text{А}.$$

Окончательный результат измерения:

$$I_{д} = 4{,}53 \pm 0{,}15\ \text{А},\ P_{д} = 0{,}95\ (0{,}997).$$

6.2. Прямые многократные измерения

6.2.1. Прямые многократные измерения с преобладающей случайной составляющей погрешности измерения

Если при проведении нескольких повторных измерений одной и той же физической величины $x_{д}$ в одинаковых условиях окажется, что результаты измерения (показания средства измерения) заметно различаются, то из этого следует вывод о присутствии в погрешности измерения случайной составляющей и о необходимости проводить многократные измерения с целью оценки значения случайной погрешности.

Рассмотрим случай, когда систематическая погрешность пренебрежимо мала по сравнению со случайной погрешностью, что можно считать допустимым при выполнении неравенства

$$\Delta x_m \prec 0{,}1\sigma[\overset{o}{\Delta} x], \qquad 6.1.14$$

где Δx_m – границы основной систематической погрешности средства измерения, $\sigma[\overset{o}{\Delta} x]$ – среднее квадратическое отклонение результатов отдельных измерений от их среднего арифметического значения, определяемого объединением

$$\overset{o}{\Delta} x = \overset{o}{\Delta}_o\, x \cdot \overset{o}{\Delta}_{oH}\, x \cdot \overset{o}{\Delta}_{ext}\, x, \qquad 6.1.15$$

которое, в данном случае, является математической моделью погрешности измерения.

В (6.1.15) $\overset{o}{\Delta}_{\sigma}x$ – случайная составляющая основной инструментальной погрешности средства измерения, $\overset{o}{\Delta}_{oH}x$ – случайная погрешность от гистерезиса, $\overset{o}{\Delta}_{ext}x$ – случайная погрешность, порождённая внешними причинами, $\overset{o}{\Delta}x$ – суммарная случайная погрешность, обусловленная действием всех представленных в объединении (6.1.15) причин.

Для получения результата измерения физической величины $x_{д}$, при превалирующей случайной погрешности, проведём n измерений одним и тем же прибором, случайно взятым из партии приборов. Получим множество показаний средства измерения:

$$x_{и} = \{x_{и1} \cdots x_{иi} \cdots x_{иn}\}. \qquad 6.1.16$$

Среднее арифметическое значение показаний

$$\bar{x}_{и} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{иi}. \qquad 6.1.17$$

Абсолютная погрешность i-ого измерения равна:

$$\Delta x_i = x_{иi} - x_{д}. \qquad 6.1.18$$

Поскольку неизвестно значение измеряемой физической величины, то неизвестно и значение абсолютной погрешности измерения. Выражение (6.1.18) всего лишь математическая формула, которая никогда не может быть использована на практике. На практике мы имеем среднее арифметическое значение измеряемой величины (6.1.17) и среднее квадратическое отклонение результатов отдельных измерений от их среднего арифметического:

$$\sigma[\overset{o}{\Delta} x] = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{иi} - \bar{x}_{и})^2}. \qquad 6.1.19$$

Среднеквадратическое отклонение (6.1.19) характеризует разброс значений отдельных измерений $x_{иi}$ относительно их среднего арифметического $\bar{x}_{и}$, но не даёт информации относительно отклонения $\bar{x}_{и}$ от $x_{д}$.

Чтобы оценить отклонение среднего арифметического значения результата измерений $\bar{x}_{и}$ от действительного значения $x_{д}$ измеряемой физической величины, проведём m серий измерений по n измерений в каждой серии, в результате получим m средних арифметических значений измеренной физической величины

$$\bar{x}_{и} = \{\bar{x}_{и1} \cdots \bar{x}_{иj} \cdots \bar{x}_{иm}\} \qquad 6.1.20$$

и m средних квадратических отклонений, определяемых по (6.1.19):

$$\sigma[\overset{o}{\Delta} x] = \{\sigma[\overset{o}{\Delta}_1 x] \cdots \sigma[\overset{o}{\Delta}_j x] \cdots \sigma[\overset{o}{\Delta}_m x]\}. \qquad 6.1.21$$

Среднее из средних арифметических, которое наиболее близко к действительному значению измеряемой величины, равно:

$$\bar{\bar{x}}_{и} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_{иj}. \qquad 6.1.22$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[\overset{o}{\Delta} x]$ результатов отдельных серий измерения от $\bar{\bar{x}} \cong x_{д}$:

$$\sigma[\overset{o}{\Delta} x] = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} (\bar{x}_{иj} - \bar{\bar{x}}_{и})^2}. \qquad 6.1.23$$

Результат измерения в окончательном виде:

$$\bar{\bar{x}}_{и} - k\sigma[\overset{o}{\Delta}] \prec x_{д} \prec \bar{\bar{x}}_{и} + k\sigma[\overset{o}{\Delta}]. \qquad 6.1.24$$

В теории вероятностей доказано, что можно получить такую же точность измерения, проведя всего одну серию из n измерений, после чего вычислить среднее арифметическое по формуле (6.1.17) и среднее квадратическое отклонение среднего арифметического от действительного значения измеряемой физической величины по формуле

$$\sigma[\overset{o}{\Delta} x] = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n} \sum_{i=1}^{n} (x_{иi} - \bar{x}_{и})^2}. \qquad 6.1.25$$

Результат измерения представляется в окончательном виде

$$\bar{x}_{и} - k\sigma[\overset{o}{\Delta} x] \prec x_{д} \prec \bar{x}_{и} + k\sigma[\overset{o}{\Delta} x]. \qquad 6.1.26$$

Измеряемое значение физической величины находится в интервале, указанном в (6.1.26), с доверительной вероятностью $P_{д} = 0{,}95$ при $k = 2$ и $P_{д} = 0{,}997$ при $k = 3$.

На практике при обработке результатов многократных измерений используются формулы (6.1.17) и (6.1.25).

6.2.2. Прямые многократные измерения в присутствии систематической и случайной составляющих инструментальной погрешности измерения

Несколькими прикидочными измерениями установлено, что случайная погрешность соизмерима с систематической погрешностью средства измерения:

$$0{,}1\Delta x_m \prec \sigma[\overset{o}{\Delta} x] \prec \Delta x_m. \qquad 6.1.27$$

Математическая модель погрешности измерения в данном случае

$$\Delta x = \Delta x_m \cdot \overset{o}{\Delta} x. \qquad 6.1.28$$

Систематическая погрешность определяется классом точности средства измерения. Если у средства измерения преобладает мультипликативная составляющая инструментальной погрешности, то границы систематической погрешности определяются как

$$\Delta x_m = \pm \frac{1}{100} \delta_{кл} x_и, \qquad 6.1.29$$

где $\delta_{кл}$ – класс точности средства измерения, $x_и$ – показания средства измерения, Δx_m – границы систематической погрешности.

Если у средства измерения преобладает аддитивная составляющая инструментальной погрешности, то границы систематической погрешности определяются как

$$\Delta x_m = \pm \frac{1}{100} \gamma_{кл} x_m, \qquad 6.1.30$$

где $\gamma_{кл}$ – класс точности средства измерения с аддитивной погрешностью, x_m – верхний предел средства измерения.

При сопоставимых аддитивной и мультипликативной составляющих инструментальной погрешности, границы инструментальной погрешности определяются по формуле

$$\Delta x_m = \pm \frac{x_и}{100} \left[c + d \left(\frac{x_m}{x_и} - 1 \right) \right], \qquad 6.1.31$$

где c и d – коэффициенты, нормирующие класс точности средства измерения, $x_и$ – показания средства измерения, x_m – верхний предел средства измерения.

Границы доверительного интервала систематической погрешности связаны со средним квадратическим отклонением погрешности соотношением

$$\Delta x_m = k\sigma[\Delta x],$$

из которого следует

$$\sigma[\Delta x] = \frac{\Delta x_m}{k}. \qquad 6.1.32$$

Оценка случайной составляющей погрешности измерения производится после проведения многократных измерений и статистической обработки с использованием формул (6.1.17) и (6.1.25). Эта составляющая погрешности оценивается средним квадратическим отклонением среднего значения показаний средства измерения от действительного значения измеряемой физической величины (6.1.25).

Среднее квадратическое отклонение суммарной погрешности от среднего арифметического, согласно правилу сложения СКО некоррелированных случайных величин, равно:

$$\sigma[\Delta x] = \sqrt{\sigma[\Delta x_m]^2 + \sigma[\overset{o}{\Delta} x]^2}. \qquad 6.1.33$$

Определив суммарное значение среднеквадратического отклонения погрешности, находим границы погрешности измерения:

$$\Delta x_p = k\sigma[\Delta x]. \qquad 6.1.34$$

Результаты измерения в рассматриваемом случае

$$\bar{x}_{и} - \Delta x_p \prec x_д \prec \bar{x}_{и} + \Delta x_p, \qquad 6.1.35$$

где $\bar{x}_{и} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{иi}$, а Δx_p – по формуле (6.1.34).

6.3. Обработка результатов косвенных измерений

При осуществлении косвенных измерений искомая физическая величина находится путём вычислений с использованием результатов прямых измерений других физических величин, функционально с ней связанных.

Например, требуется измерить мощность, выделяемую током I на резисторе R (рис. 6.3.1).

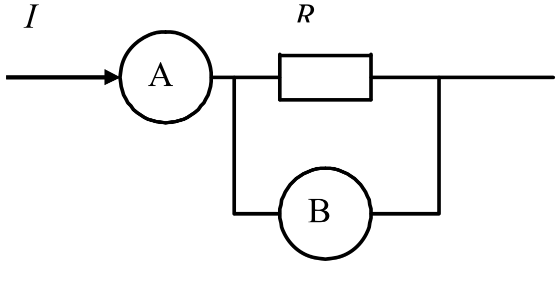


Рис. 6.3.1. Измерение электрической мощности, выделяемой током I на резисторе R, по методу амперметра и вольтметра

Соотношение между током, напряжением и мощностью устанавливает известное равенство

$$P = U \cdot I. \qquad 6.3.1$$

Падение электрического напряжения на резисторе измеряется вольтметром с известным классом точности. Электрический ток, протекающий по резистору, измеряется амперметром тоже с известным классом точности.

Вольтметр и амперметр осуществляют прямые измерения. Каждый из них имеет свою погрешность измерения. Как найти погрешность измерения мощности?

Для этого представим измеряемую косвенно физическую величину как функцию нескольких прямо измеряемых физических величин:

$$y = f(x_1 \cdots x_i \cdots x_n), \qquad 6.3.2$$

где $x_1 \ldots x_n$ – физические величины, определяемые прямыми измерениями, y – искомая физическая величина.

После проведения измерений и вычислений получим функцию

$$y_и = f(x_{и1} \cdots x_{иi} \cdots x_{иn}), \qquad 6.3.3$$

где $x_{и1} \ldots x_{иn}$ – показания средств измерения, осуществляющих прямые измерения, $y_и$ – измеренное значение искомой физической величины.

При прямом измерении i-й физической величины, в отсутствие случайных погрешностей, имеет место только систематическая погрешность измерения

$$\Delta x_i = x_{иi} - x_i. \qquad 6.3.4$$

Эта погрешность для данного типа прибора, которым осуществлено измерение величины x_i, может быть представлена границей интервала $\Delta x_{m.i}$, в котором лежат погрешности всех приборов данного типа, с доверительной вероятностью $P_д$:

$$\Delta x_{m.i} = k\sigma[\Delta x_i]. \qquad 6.3.5$$

В (6.3.5) $\sigma[\Delta x_i]$ есть среднеквадратическое отклонение систематической погрешности всех приборов от их среднего арифметического значения. Доверительная вероятность равна 0,95 при $k = 2$ и 0,997 при $k = 3$.

Поскольку все приборы, участвующие в косвенном измерении физической величины y, имеют погрешность измерения, определяемую их классом точности, то и значение искомой физической величины будет вычислено с погрешностью

$$\Delta_y = y_и - y. \qquad 6.3.6$$

Для нахождения этой погрешности найдём полный дифференциал функции (6.3.2):

$$dy = \frac{\partial f(x_1 \cdots x_i \cdots x_n)}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial f(x_1 \cdots x_i \cdots x_n)}{\partial x_n} dx_n. \qquad 6.3.7$$

Переходя от дифференциально малых приращений к малым конечным приращениям, получим:

$$\Delta y = \frac{\partial f(x_1 \cdots x_i \cdots x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \cdots \frac{\partial f(x_1 \cdots x_i \cdots x_n)}{\partial x_n} \Delta x_n. \qquad 6.3.8$$

Частные производные в (6.3.8) определяют вклад каждого средства измерения, участвующего в измерительном эксперименте, в погрешность измерения искомой физической величины y:

$$\Delta y = k_{x1} \Delta x_1 + \cdots k_{xi} \Delta x_i + \cdots k_{xn} \Delta x_n \, , \qquad 6.3.9$$

где $k_{x1} \ldots k_{xi} \ldots k_{xn}$ – весовые коэффициенты погрешностей средств измерения, участвующих в физическом измерительном эксперименте.

Поскольку погрешности участвующих в эксперименте приборов – величины случайные, то и Δy – величина случайная, границы которой определяют интервал:

$$\Delta y_m = k\sigma[\Delta y]. \qquad 6.3.10$$

Используя (6.3.5), можем записать:

$$\Delta y_m = k\sigma[\Delta y] = k_{x1} k\sigma[\Delta x_1] + \cdots k_{xi} k\sigma[\Delta x_i] + \cdots k_{xn} k\sigma[\Delta x_n]. \qquad 6.3.11$$

Коэффициент k определяет значение доверительной вероятности и равен 2 или 3. Если значение этого коэффициента у всех погрешностей одинаково и погрешности приборов коррелированны, то

$$\sigma[\Delta y] = k_{x1} \sigma[\Delta x_1] + \cdots k_{xn} \sigma[\Delta x_n]. \qquad 6.3.12$$

Если окажется, что погрешности приборов не коррелированны, то суммирование – геометрическое:

$$\sigma[\Delta y] = \sqrt{(k_{x1} \sigma[\Delta x_1])^2 + \cdots + (k_{xn} \sigma[\Delta x_n])^2}. \qquad 6.3.13$$

В качестве примера косвенных измерений рассмотрим измерение электрической мощности по методу амперметра и вольтметра.

Напряжение измерили вольтметром, с преобладающей мультипликативной составляющей погрешности и обозначенным классом точности $\delta_{кл}$ = 1,0. Показания вольтметра оказались $U_и$ = 5 В. Электрический ток измерили амперметром, с преобладающей аддитивной погрешностью и обозначенным классом точности $\gamma_{кл}$ = 1,0. Показание амперметра равно 1 А, верхний предел измерения по шкале амперметра – 5 А.

Абсолютную погрешность измерения электрического напряжения вольтметром вычисляем по классу точности прибора:

$$\delta_{\text{кл}} = \frac{\Delta U}{U_{\text{и}}} 100. \qquad 6.3.14$$

Из (6.3.14) следует

$$\Delta U = \frac{1}{100} \delta_{\text{кл}} U_{\text{и}}. \qquad 6.3.15$$

Подставляя в (6.3.15) численные значения, получим:

$$\Delta U = \frac{1}{100} \cdot 1{,}0 \cdot 5{,}00 = 0{,}05 \text{ В}.$$

Абсолютная погрешность

$$\Delta U = k\sigma[\Delta U], \qquad 6.3.16$$

отсюда среднеквадратическое значение погрешности равно:

$$\sigma[\Delta U] = \frac{\Delta U}{k}. \qquad 6.3.17$$

При $k = 2$, что соответствует доверительной вероятности 0,95,

$$\sigma[\Delta U] = 0{,}025 \text{ В}. \qquad 6.3.18$$

Абсолютную погрешность измерения электрического тока определяем по классу точности амперметра:

$$\gamma_{\text{кл}} = \frac{\Delta I}{I_m} 100. \qquad 6.3.19$$

Из (6.3.19) следует, что

$$\Delta I = \frac{1}{100} \cdot \gamma_{\text{кл}} I_m. \qquad 6.3.20$$

Подставляя численные значения величин, определим абсолютную погрешность измерения электрического тока:

$$\Delta I = \frac{1}{100} \cdot 1{,}0 \cdot 5{,}0 = 0{,}05 \text{ А}.$$

Среднее квадратическое значение погрешности измерения электрического тока

$$\sigma[\Delta I] = \frac{\Delta I}{k} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025 \text{ А}. \qquad 6.3.21$$

Определим далее весовые коэффициенты погрешностей вольтметра и амперметра:

$$k_u = \frac{\partial P}{\partial U} = \frac{\partial (UI)}{\partial U} = I = 1{,}00 \text{ А}, \qquad 6.3.22$$

$$k_I = \frac{\partial P}{\partial I} = U = 5{,}00 \text{ В}. \qquad 6.3.23$$

Так как погрешности амперметра и вольтметра не коррелированны, то на основании (6.3.13) среднеквадратическое значение погрешности измерения мощности будет равно:

$$\sigma[\Delta P] = \sqrt{(k_u \sigma[\Delta U])^2 + (k_i \sigma[\Delta I])^2}. \qquad 6.3.24$$

После подстановки численных значений величин, входящих в (6.3.24), получим:

$$\sigma[\Delta P] = \sqrt{(1{,}00 \cdot 0{,}025)^2 + (5{,}00 \cdot 0{,}025)^2} = \sqrt{6{,}25 \cdot 10^{-4} + 156{,}3 \cdot 10^{-4}} = 0{,}13.$$

В приведённом примере больший вес имеет погрешность амперметра. Это объясняется тем, что класс точности амперметра определён аддитивной погрешностью, которая особенно сильно сказывается в начале шкалы. В нашем случае предел измерения 5 А, а показания прибора 1 А, как раз находятся в начале шкалы.

Границы погрешности измерения мощности

$$\Delta P_m = k\sigma[\Delta P]. \qquad 6.3.25$$

При k =2 имеем ΔP_m = 0,26 Вт, а при k =3 имеем ΔP_m = 0,39 Вт.

Результат косвенных измерений представляем в виде

$$P_{\text{и}} - \Delta P_{osp} \prec P_\partial \prec P_{\text{и}} + \Delta P_{osp}. \qquad 6.3.26$$

После подстановки численных значений получаем результат измерения:

$$5{,}00 - 0{,}26 \text{ Вт} \prec P_\partial \prec 5{,}00 + 0{,}26 \text{ Вт}.$$

6.4. Обработка результатов совместных измерений

6.4.1. Совместные измерения и однофакторный эксперимент

Имеем две физические величины: независимую x и зависимую y. Задача совместных измерений или однофакторного эксперимента заключается в том, чтобы установить математическую зависимость между величинами x и y.

По ГОСТ 16263–70 эта процедура называется совместными измерениями, а по ГОСТ 24026–80 называется однофакторным экспериментом.

При нахождении зависимости y от x возможны два варианта.

Вариант первый: зависимость y от x функциональная, известна по виду, и нужно найти коэффициенты, входящие в зависимость

$$y = f(x). \tag{6.4.1}$$

Например, для термопары зависимость выходного напряжения от температуры имеет вид

$$U = \alpha(t^o - t_x^o) + \beta(t^o - t_x^o)^2, \tag{6.4.2}$$

где t^o – температура горячего спая термопары, t_x^o – температура холодных концов термопары, α и β – коэффициенты, которые нужно определить проведением совместных измерений.

В этом варианте можно говорить о совместном измерении температуры и напряжения.

Вариант второй. Зависимость между x и y носит корреляционный характер. В этом случае правильнее говорить об однофакторном эксперименте. Зависимость y от x выражается некоторой аппроксимирующей функцией

$$\bar{y} = f(x). \tag{6.4.3}$$

Математическим выражением, описывающим аппроксимирующую функцию, могут быть элементарные математические функции, а в общем случае многочлен вида

$$\bar{y} = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n. \tag{6.4.4}$$

6.4.2. Совместные измерения

Реализацию совместных измерений рассмотрим на примере определения коэффициентов уравнения преобразования термопары (6.4.2).

Для решения поставленной задачи необходимо провести два раза совместные измерения температуры и выходного напряжения термопары.

Число повторных совместных измерений определяется числом неизвестных коэффициентов уравнения преобразования. В рассматриваемом случае число неизвестных коэффициентов равно двум, поэтому необходимо провести минимум два совместных измерения.

При первом совместном измерении температуры и напряжения термопары устанавливаем температуру горячего спая t_1 (в термостате) и измеряем напряжение U_1 на выходных зажимах термопары, получаем уравнение преобразования в виде

$$U_1 = \alpha(t_1 - t_x) + \beta(t_1 - t_x)^2. \qquad 6.4.5$$

При проведении второго эксперимента по совместному измерению устанавливаем температуру в термостате t_2 и измеряем соответствующее этой температуре напряжение термопары U_2. В результате получаем второе уравнение преобразования

$$U_2 = \alpha(t_2 - t_x) + \beta(t_2 - t_x)^2. \qquad 6.4.6$$

Решив систему уравнений (6.4.5) и (6.4.6), найдём коэффициенты:

$$\alpha = \frac{U_2 t_1^2 - U_1 t_2^2}{t_2 t_1^2 - t_1 t_2^2}, \qquad 6.4.7$$

$$\beta = \frac{U_1}{t_1^2} - \frac{U_2 t_1^3 - U_1 t_2^2 t_1}{t_2 t_1^4 - t_1^3 t_2^2}. \qquad 6.4.8$$

Погрешность определения коэффициентов будет определяться погрешностью вольтметра, измеряющего выходное напряжение термопары, и термометра, измеряющего температуру в термостате.

В нормативно-технической документации на вольтметр и термометр указаны их класс точности. По классу точности и доверительной вероятности, с которой установлен класс точности, определяем среднеквадратическое значение погрешностей для вольтметра $\sigma[\Delta U]$ и для термометра $\sigma[\Delta t]$ при измеренных значениях U_1, U_2 и t_1, t_2.

Весовые коэффициенты погрешностей вольтметра и термометра при определении коэффициента α находим как частные производные:

$$k_{\alpha U2} = \frac{\partial \alpha}{\partial U_2}, \quad k_{\alpha U1} = \frac{\partial \alpha}{\partial U_1}, \quad k_{\alpha t1} = \frac{\partial \alpha}{\partial t_1}, \quad k_{\alpha t2} = \frac{\partial \alpha}{\partial t_2}. \qquad 6.4.9$$

Весовые коэффициенты погрешностей вольтметра и термометра при определении коэффициента β находим аналогичным образом:

$$k_{\beta U2} = \frac{\partial \beta}{\partial U_2}, \quad k_{\beta U1} = \frac{\partial \beta}{\partial U_1}, \quad k_{\beta t1} = \frac{\partial \beta}{\partial t_1}, \quad k_{\beta t2} = \frac{\partial \beta}{\partial t_2}. \qquad 6.4.10$$

Среднеквадратическое значение погрешности нахождения коэффициента α будет равно:

$$\sigma_a = \sqrt{(k_{\alpha U2}\sigma[\Delta U_2])^2 + (k_{\alpha U1}\sigma[\Delta U_1])^2 + (k_{\alpha t1}\sigma[\Delta t_1])^2 + (k_{\alpha t2}\sigma[\Delta t_2])^2}. \qquad 6.4.11$$

При

$$\sigma[\Delta U_2] = \sigma[\Delta U_1] = \sigma[\Delta U] \ \ и \ \ \sigma[\Delta t_1] = \sigma[\Delta t_2] = \sigma[\Delta t] \qquad 6.4.12$$

имеем

$$\sigma_a = \sqrt{(k_{\alpha U\,2}{}^2 + k_{\alpha U\,1}{}^2)\sigma[\Delta U]^2 + (k_{\alpha t\,1}{}^2 + k_{\alpha t\,2}{}^2)\sigma[\Delta t]^2}. \qquad 6.4.13$$

Среднеквадратическое значение погрешности нахождения коэффициента β равно:

$$\sigma_\beta = \sqrt{(k_{\beta U\,2}\sigma[\Delta U])^2 + (k_{\beta U\,1}\sigma[\Delta U])^2 + (k_{\beta t\,1}\sigma[\Delta t])^2 + (k_{\beta t\,2}\sigma[\Delta t])^2}. \qquad 6.4.14$$

Если при вычислении σ_β по (6.4.14) выполняется условие (6.4.12), то

$$\sigma_\beta = \sqrt{(k_{\beta U\,2}{}^2 + k_{\beta U\,1}{}^2)\sigma[\Delta U]^2 + (k_{\beta t\,1}{}^2 + k_{\beta t\,2}{}^2)\sigma[\Delta t]}. \qquad 6.4.15$$

6.4.3. Однофакторный эксперимент

По ГОСТ 24026–80 однофакторный эксперимент ставит целью установление корреляционной зависимости между двумя физическими величинами x и y. Одна физическая величина x объективно существует и имеет определённое количественное значение. Другая физическая величина, или результат измерения, y корреляционно связана с величиной x.

Установим несколько фиксированных значений измеряемой величины и будем их рассматривать как множество

$$x = \{x_1 \cdots x_i \cdots x_n\}. \qquad 6.4.16$$

При проведении многократных измерений значения физической величины x_i получаем множество результатов измерений:

$$y_i = \{y_{i1} \cdots y_{ij} \cdots y_{in}\}. \qquad 6.4.17$$

При проведении измерений других значений физической величины x будем иметь другие множества значений y.

Если полученные в результате измерительных экспериментов множества отобразить графически, то получится нечто вроде изображённого на рис. 6.4.1.

Значения y не укладываются на какую-либо монотонно изменяющуюся кривую. После нанесения экспериментальных данных на график проводят линии 1 и 2, между которыми располагаются экспериментальные точки.

Задача обработки результатов однофакторного эксперимента заключается в том, чтобы найти такую аппроксимирующую функцию

$$\bar{y} = f(x), \qquad 6.4.18$$

которая наилучшим образом отображала бы связь между x и y.

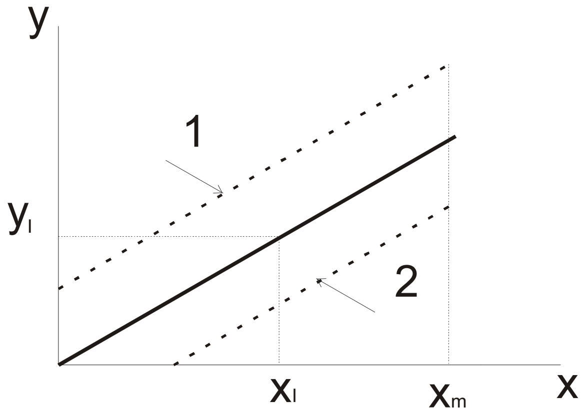


Рис. 6.4.1. Корреляционная зависимость y от x

Для решения означенной задачи существуют различные методы. Наибольшее распространение получил метод наименьших квадратов.

В методе наименьших квадратов для получения аппроксимирующей зависимости $\bar{y} = f(x)$ используем многочлен вида

$$\bar{y} = a_o + a_1 x + \cdots a_i x^i + \cdots a_n x^n. \qquad 6.4.19$$

Для рассмотрения сущности метода и с целью упрощения ограничимся двумя членами выражения (6.4.19):

$$\bar{y} = a_o + a_1 x. \qquad 6.4.20$$

Величину

$$\Delta y_i = y_i - \bar{y}_i \qquad 6.4.21$$

принято называть невязкой или остаточной погрешностью измерения.

Согласно методу наименьших квадратов, наилучшая оценка $\bar{y}_i$ величин y_i, соответствующих x_i, будет найдена при минимальном значении суммы квадратов невязок:

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 = \min. \qquad 6.4.22$$

Для определения коэффициента a_o, при котором сумма квадратов невязок минимальна, найдём производную от левой части (6.4.22) по a_o:

$$\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i^2\right)}{\partial a_o} = \frac{\partial\left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_o - a_1 x_i)^2\right]}{\partial a_o} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_o - a_1 x_i) = 0. \qquad 6.4.23$$

Для определения a_1, при котором сумма квадратов невязок минимальна, найдём производную от левой части (6.4.22) по a_1:

$$\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta y_i^2\right)}{\partial a_1}=\frac{\partial\left[\sum_{i=1}^{n}[(y_i-a_o-a_1x_i)^2]\right]}{\partial a_1}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_o-a_1x_i)x_i=0. \quad 6.4.24$$

Из (6.4.23) следует

$$\sum_{i=1}^{n}y_i=na_o+a_1\sum_{i=1}^{n}x_i. \quad 6.4.25$$

Из (6.4.24) имеем

$$\sum_{i=1}^{n}y_ix_i=a_o\sum_{i=1}^{n}x_i+a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2. \quad 6.4.26$$

Решая систему уравнений (6.4.25) и (6.4.26), определим формулы для расчёта коэффициентов a_o и a_1:

$$a_o=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-n\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}, \quad 6.4.27$$

$$a_1=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}. \quad 6.4.28$$

В (6.4.27) и (6.4.28) значения x_i и y_i берутся из данных эксперимента.

При большем числе коэффициентов аппроксимирующего выражения (6.4.19) получается большее число уравнений, для решения которых приходится использовать матрицы и определители.

Погрешность однофакторного эксперимента оценивается отличием y_i от $\overline{y}$ (6.4.21). Среднеквадратическое отклонение y_i от $\overline{y}$ определяется по известному правилу

$$\sigma[\Delta y_i]=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}_i)^2}. \quad 6.4.29$$

Подобным образом определяются коэффициенты a_o и a_1 для всех значений множества (6.4.16), после чего строится зависимость (6.4.20).

6.5. Обработка результатов совокупных измерений

Совокупными называют проводимые одновременно измерения нескольких связанных одноименных (по размерности) величин с целью определения их значения путём решения системы уравнений. Систему уравнений получают в результате измерения комбинации искомых величин.

Для пояснения сути косвенных измерений рассмотрим простой пример измерения сопротивления резисторов, включённых треугольником (рис. 6.5.1). Это могут быть, например, электрические сопротивления обмоток трёхфазного электродвигателя. Требуется измерить сопротивления обмоток, не нарушая их электрического соединения.

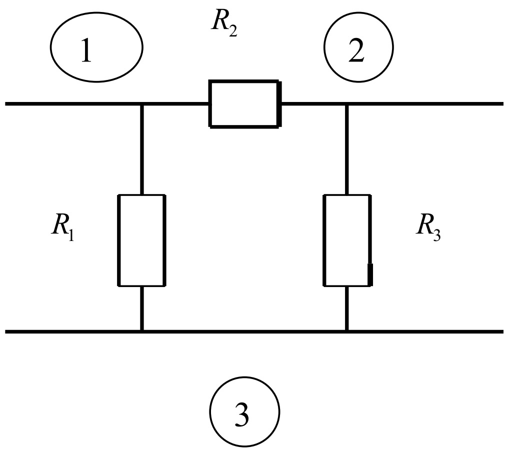


Рис. 6.5.1. Измерение электрического сопротивления резисторов по методу совокупных измерений

Для получения результата проведём последовательно три измерения.

При первом измерении находим электрическое сопротивление между точками 1 и 2, для чего подключаем к этим точкам омметр и делаем отсчёт R_{12}.

В соответствии с принципиальной схемой (рис.6.5.1)

$$R_{12} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad 6.5.1$$

Далее измеряем сопротивление R_{23} между точками 2 и 3 электрической цепи и сопротивление R_{31} между точками 3 и 1.

$$R_{23} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad 6.5.2$$

$$R_{31} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad 6.5.3$$

В результате имеем три уравнения, в которых известны R_{12}, R_{23} и R_{31}, полученные по показаниям средства измерения при трёх измерениях. В каждом измерительном эксперименте измерялись одноименные физические величины, в рассматриваемом случае это электрические сопротивления. В уравнениях (6.5.1), (6.5.2) и (6.5.3) три неизвестных величины R_1, R_2, R_3. Число уравнений равно числу неизвестных, следовательно система уравнений имеет однозначное решение.

С целью упрощения рассмотрения задачи возьмём частный случай, когда

$$R_1 = R_2 = R_3.$$

В этом простом случае

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_и = \frac{2}{3}R,$$

отсюда искомое значение сопротивления равно:

$$R = \frac{3}{2}R_и.$$

В общем случае, когда $R_1 \neq R_2 \neq R_3$, т. е. все сопротивления разные, для их нахождения необходимо решать систему из трёх алгебраических уравнений (6.5.1, 6.5.2 и 6.5.3). В результате решения системы уравнений получаются формулы для расчёта сопротивлений R_1, R_2, R_3.

Для оценки погрешности измерения сопротивлений представим расчётные формулы в виде

$$R_i = f_i(R_{12}, R_{23}, R_{31}). \qquad 6.5.4$$

Погрешность измерения сопротивлений плеч вычисляется, как и при косвенных измерениях, с учётом весовых коэффициентов составляющих погрешности, полученных при измерении сопротивлений между узлами R_{12}, R_{23}, R_{31}.

Абсолютная погрешность измерения сопротивления R_i (i = 1,2,3) равна:

$$\Delta R_i = \frac{\partial f_i(R_{12}, R_{23}, R_{31})}{\partial R_{12}}\Delta R_{12} + \frac{\partial f_i(R_{12,}\ R_{23}, R_{31})}{\partial R_{23}}\Delta R_{23} + \\ + \frac{\partial f_i(R_{12}, R_{23}, R_{31})}{\partial R_{31}}\Delta R_{31}, \qquad 6.5.5$$

где ΔR_{12}, ΔR_{23}, ΔR_{31} – абсолютные погрешности измерения сопротивлений между узлами электрической цепи R_{12}, R_{23}, R_{31}.

Частные производные в выражении (6.5.5) являются весовыми коэффициентами k_{i12}, k_{i23}, k_{i31} составляющих погрешности измерения сопротивления R_i:

$$k_{i12} = \frac{\partial f_i(R_{12}, R_{23}, R_{31})}{\partial R_{12}}, \qquad 6.5.6$$

$$k_{i23} = \frac{\partial f_i(R_{12}, R_{23}, R_{31})}{\partial R_{23}}, \qquad 6.5.7$$

$$k_{i31} = \frac{\partial f_i(R_{12}, R_{23}, R_{31})}{\partial R_{32}}. \qquad 6.5.8$$

Если все измерения проводились одним омметром, то все три погрешности измерения коррелированны, и следовательно, погрешность измерения R_i ($i = 1{,}2{,}3$) нужно находить алгебраическим суммированием составляющих:

$$\Delta R_i = k_{i12}\Delta R_{12} + k_{i23}\Delta R_{23} + k_{i31}\Delta R_{31}. \qquad 6.5.9$$

При одновременном измерении сопротивлений между узлами электрической цепи тремя разными омметрами погрешности измерения не коррелированны, и поэтому погрешность измерения сопротивления нужно находить геометрическим суммированием составляющих:

$$\Delta R_i = \sqrt{(k_{i12}\Delta R_{12})^2 + (k_{i\,23}\Delta R_{23})^2 + (k_{i\,31}\Delta R_{31})^2}. \qquad 6.5.10$$

Результат измерения в окончательной форме представляется в виде:

$$R_i = R_{iи} \pm \Delta R_i, \qquad 6.5.11$$

где $R_{iи}$ – сопротивление ветви, рассчитанное по формуле (6.5.4) с использованием показаний омметра или омметров, если использовались три омметра.

6.6. Правила округления результатов измерений

Класс точности средства измерения, используемый для расчёта абсолютной погрешности измерения, указывается числом с одной или двумя значащими цифрами, поэтому абсолютная погрешность измерения также должна указываться числом с одной или двумя значащими цифрами. В связи с этим при окончательном представлении результатов измерения необходимо руководствоваться тремя основными правилами.

Первое правило. Как проводить округление численного значения погрешности измерения?

Абсолютная погрешность измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной цифрой, если первая есть 3 и больше. Например, $\Delta x = 0{,}15$; $\Delta x = 0{,}025$; $\Delta x = 0{,}3$; $\Delta x = 0{,}005$. Округление до одной или двух значащих цифр осуществляется по правилам математики. Если первый отбрасываемый при округлении знак меньше 5, то последняя сохраняемая значащая цифра не изменяется. Если знак старшего разряда отбрасываемого при округлении числа больше 5, то последняя сохраняемая значащая цифра увеличивается на единицу. Например: в результате вычислений абсолютная погрешность измерения равна $\Delta x = 0{,}153$, после округления $\Delta x = 0{,}15$; если $\Delta x = 0{,}158$, то после округления по правилам математики $\Delta x = 0{,}16$.

Второе правило. Как проводить округление показаний средства измерения?

Показания средства измерения округляются до того же десятичного знака, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности измерения. Например, показания средства измерения равны: $x_и = 5{,}785$, вычисленная погрешность после округления $\Delta x = 0{,}05$, тогда результат измерения с учётом приведённых выше правил $x_d = 5{,}79 \pm 0{,}05$. Если абсолютная погрешность измерения равняется $\Delta x = 0{,}015$, то результат измерения будет $x_d = 5{,}785 \pm 0{,}015$.

Третье правило. В каком месте измерительного эксперимента проводить округление его результатов?

Округление производится лишь при окончательном представлении результата измерения. Все предварительные вычисления погрешности, например при косвенных измерениях, проводятся с одним – двумя лишними знаками.

Пример представления результатов однократных измерений. Вольтметром класса точности 1,5 и верхним пределом измерения $U_m = 10$ В провели измерение напряжения. Показания вольтметра при этом получены $U_и = 5{,}754$ В. Абсолютная погрешность измерения находится по классу точности прибора в соответствии с формулой (6.1.7), которая для рассматриваемого примера будет иметь вид

$$\gamma_{кл} = \frac{\Delta U}{U_m} 100. \qquad 6.6.1$$

Из (6.6.1) следует, что абсолютная погрешность измерения равна:

$$\Delta U = \frac{\gamma_{кл} U_m}{100}. \qquad 6.6.2$$

После подстановки численных значений

$$\Delta U = \frac{1,5 \cdot 10}{100} = 0,15 \text{ В.} \qquad 6.6.3$$

Результат измерения в рассматриваемом примере с учётом приведённых выше правил:

$$U_d = 5,75 \pm 0,15 \text{ В.}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Покажите представление результатов измерений, полученных от средства измерения с классом точности, определённым по мультипликативной погрешности.
2. Как обработать результат измерения, полученный от средства измерения, с классом точности по аддитивной погрешности?
3. Как обработать результат измерения, полученный от средства измерения, у которого класс точности определён по аддитивной и мультипликативной погрешностям?
4. Покажите на примере представление результата прямых многократных измерений с преобладающей случайной составляющей погрешности измерения.
5. Покажите на примере представление результата многократных измерений в присутствии случайной и систематической составляющих погрешности измерения.
6. Как представить результаты косвенных измерений на основе данных от прямых измерений других физических величин?
7. Как проводится обработка результатов совместных измерений? Покажите на примере.
8. В чём заключается однофакторный эксперимент?
9. Покажите на примере обработку результатов совокупных измерений.
10. Назовите основное правило округления абсолютной погрешности измерения.
11. Назовите основные правила округления результатов измерения.

7. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ, ПОЛУЧЕННЫХ ОТ ПРИБОРОВ С ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ, НОРМИРОВАННОЙ ПО ГОСТ 8.009-84

7.1. Обработка результатов прямых измерений

Математическая модель погрешности при прямых измерениях описывается объединением

$$\Delta_{и} = \Delta_{м} \cdot \Delta \cdot \overset{o}{\Delta}, \qquad 7.1.1$$

где $\Delta_{м}$ – методическая погрешность, Δ – инструментальная погрешность, $\overset{o}{\Delta}$ – случайная погрешность, обусловленная действием внешних причин.

Методическая погрешность, как правило, вычисляется и на неё в результате измерения вносится поправка. Как это делается, показано в п. 2.3.

Исключив из дальнейшего рассмотрения методическую погрешность, математическую модель погрешности измерения будем представлять в виде объединения инструментальной Δ и случайной $\overset{o}{\Delta}$ погрешностей:

$$\Delta_{и} = \Delta \cdot \overset{o}{\Delta}, \qquad 7.1.2$$

где $\Delta_{и}$ – абсолютная погрешность измерения.

Инструментальная погрешность по ГОСТ 8.009-84 представляется объединением

$$\Delta = \Delta_{os} \cdot \overset{o}{\Delta}_{o} \cdot \overset{o}{\Delta}_{oH} \cdot \sum_{i=1}^{l} \Delta_{ci} \cdot \Delta_{dyn}, \qquad 7.1.3$$

в котором Δ – абсолютная инструментальная погрешность средства измерения; Δ_{os} – систематическая составляющая основной погрешности средства измерения; $\overset{o}{\Delta}_{o}$ – случайная составляющая основной погрешности средства измерения; $\overset{o}{\Delta}_{oH}$ – случайная составляющая основной погрешности средства измерения, обусловленная внутренними гистерезисными явлениями; $\sum_{i=1}^{l}\Delta_{ci}$ – объединение дополнительных погрешностей средства измерения, обусловленных действием внешних влияющих величин в рабочем диапазоне их значений; Δ_{dyn} – динамическая погрешность средства измерения, вызванная изменением во времени значения измеряемой физической величины со скоростью, соизмеримой с быстродействием прибора.

Если преобладает инструментальная погрешность

$$\sigma[\overset{o}{\Delta}] \prec 0{,}1\Delta,$$

то математическая модель погрешности измерения будет определяться математической моделью инструментальной погрешности средства измерения в соответствии с (7.1.3).

При соизмеримых инструментальной и внешней случайной составляющих погрешностей математическая модель погрешности измерения будет иметь вид

$$\Delta_u = \Delta_{os} \cdot \overset{o}{\Delta}_0 \cdot \overset{o}{\Delta}_{oH} \cdot \sum_{i=1}^{n}\Delta_{ci} \cdot \Delta_{dyn} \cdot \overset{o}{\Delta}. \qquad 7.1.4$$

На практике может быть много частных моделей погрешности измерения, полученных из (7.1.4) как различные сочетания составляющих. Остановимся на некоторых из них подробнее.

Самая простая модель погрешности измерения имеет место тогда, когда погрешность измерения определяется только систематической составляющей инструментальной погрешности

$$\Delta_u = \Delta_{os}.$$

В приборах высокой точности приходится учитывать при представлении результатов измерения внутреннюю случайную погрешность и погрешность гистерезиса

$$\Delta_u = \Delta_{os} \cdot \overset{o}{\Delta}_o \cdot \overset{o}{\Delta}_{oH}. \qquad 7.1.5$$

Если прибор эксплуатируется в рабочих условиях и в нормативно-технической документации указана методика нахождения дополнительной погрешности, то модель имеет вид

$$\Delta_u = \Delta_{os} \cdot \sum_{i=1}^{l}\Delta_{ci}. \qquad 7.1.6$$

При использовании прибора для измерения изменяющихся во времени величин в математическую модель погрешности вводится динамическая составляющая Δ_{dyn}:

$$\Delta_и = \Delta_{os} \cdot \Delta_{dyn}. \quad 7.1.7$$

Когда повторными измерениями обнаружена внешняя случайная погрешность, соизмеримая с систематической инструментальной погрешностью, то используется математическая модель

$$\Delta_и = \Delta_{os} \cdot \overset{o}{\Delta} \quad 7.1.8$$

или

$$\Delta_и = \Delta_{os} \cdot \overset{o}{\Delta} \cdot \sum_{i=1}^{l} \Delta_{ci}. \quad 7.1.9$$

Последний случай (7.1.9) для обработки результатов самый сложный, так как для получения погрешности измерения должны учитываться инструментальная, дополнительная и внешняя случайная погрешности.

Рассмотрим порядок получения результата измерения с использованием представленных выше математических моделей погрешности измерения.

7.1.1. Обработка результатов прямых измерений с использованием только систематической погрешности средства измерения

В этом случае имеем математическую модель погрешности измерения по формуле $\Delta_и = \Delta_{os}$.

По ГОСТ 8.009–84 систематическая основная погрешность нормируется её границами Δ_{osp}, установленными с доверительной вероятностью $P_д = 0{,}95$ или $P_д = 0{,}997$, а также средним квадратическим отклонением $\sigma[\Delta_{os}]$ систематической погрешности для всего типа средств измерения.

Если систематическая погрешность задана границами, то результат измерения представляется в одном из двух видов:

$$x_и - \Delta_{osp} \prec x_д \prec x_и + \Delta_{osp}, \quad x_д = x_и \pm \Delta_{osp}. \quad 7.1.10$$

Если погрешность задана средним квадратическим отклонением, то

$$x_д = x_и \pm k\sigma[\Delta_{os}], \quad 7.1.11$$

где $x_д$ – действительное значение измеряемой физической величины, $x_и$ – показания средства измерения, $k = 2$ при доверительной вероятности нахождения систематической погрешности в интервале Δ_{osp}, равной 0,95, и $k = 3$ при доверительной вероятности, равной 0,997.

7.1.2. Обработка результатов прямых измерений при наличии систематической и внутренней случайной составляющих инструментальной погрешности

В рассматриваемом случае используем математическую модель погрешности измерения по формуле (7.1.5).

В нормативно-технической документации на средство измерения должны быть указаны границы систематической погрешности Δ_{osp}, среднеквадратическое отклонение систематической погрешности $\sigma[\Delta_{os}]$, а также среднеквадратическое отклонение случайной погрешности, порождённой процессами внутри средства измерения $\sigma[\overset{o}{\Delta}_o]$.

Для представления результата измерения в этом случае прежде всего необходимо найти суммарное среднеквадратическое значение погрешности измерения $\sigma[\Delta_{os}\cdot\overset{o}{\Delta}_o]$, которое находится суммированием среднеквадратических значений $\sigma[\Delta_{os}]$ и $\sigma[\overset{o}{\Delta}_o]$. Поскольку среднеквадратическое значение систематической погрешности не коррелированно со среднеквадратическим значением случайной погрешности средства измерения, то суммирование нужно проводить геометрически:

$$\sigma[\Delta_{os}\cdot\overset{o}{\Delta}_o]=\sqrt{(\sigma[\Delta_{os}])^2+(\sigma[\overset{o}{\Delta}_o])^2}. \qquad 7.1.12$$

Результат измерения представляется в виде

$$x_и - k\sigma[\Delta_{os}\cdot\overset{o}{\Delta}_o]\prec x_д \prec x_и + k\sigma[\Delta_{os}\cdot\overset{o}{\Delta}_o] \qquad 7.1.13$$

или

$$x_д = x_и \pm k\sigma[\Delta_{os}\cdot\overset{o}{\Delta}_o]. \qquad 7.1.14$$

7.1.3. Обработка результатов прямых измерений при наличии систематической, внутренней случайной и гистерезисной составляющих инструментальной погрешности

Используем математическую модель погрешности измерения по формуле (7.1.5).

Для реализации принятой модели измерения в нормативно-технической документации на средство измерения должны быть указаны границы систематической погрешности Δ_{osp}, среднеквадратическое отклонение систематической погрешности $\sigma[\Delta_{os}]$, среднеквадратическое значение случайной составляющей основной погрешности средства измерения $\sigma[\overset{o}{\Delta}_o]$ и среднеквадратическое значение основной погрешности, обусловленной гистерезисными явлениями $\sigma[\overset{o}{\Delta}_{oH}]$.

Если в нормативно-технической документации задано среднеквадратическое отклонение систематической погрешности, то геометрическим суммированием, поскольку погрешности не зависимы, находится среднеквадратическое значение суммарной погрешности измерения

$$\sigma[\Delta_{os}\cdot\overset{o}{\Delta}_{oH}\cdot\overset{o}{\Delta}_{o}]=\sqrt{(\sigma[\Delta_{os}])^2+\sigma([\overset{o}{\Delta}_{o}])^2+(\sigma[\overset{o}{\Delta}_{oH}])^2}. \qquad 7.1.15$$

Результат измерения представляем в виде

$$x_{и}-k\sigma[\Delta_{os}\cdot\overset{o}{\Delta}_{oH}\cdot\overset{o}{\Delta}_{o}]\prec x_{д}\prec x_{и}+k\sigma[\Delta_{os}\cdot\overset{o}{\Delta}_{oH}\cdot\overset{o}{\Delta}_{o}] \qquad 7.1.16$$

или

$$x_{д}=x_{и}\pm k\sigma[\Delta_{os}\cdot\overset{o}{\Delta}_{oH}\cdot\overset{o}{\Delta}_{o}]. \qquad 7.1.17$$

Если в нормативно-технической документации не задано среднеквадратическое отклонение систематической погрешности, то тогда для получения результата измерения несколько иной порядок действия.

Вначале определяется среднеквадратическое значение случайных погрешностей

$$\sigma[\overset{o}{\Delta}_{o}\cdot\overset{o}{\Delta}_{oH}]=\sqrt{(\sigma[\overset{o}{\Delta}_{o}])^2+(\sigma[\overset{o}{\Delta}_{oH}])^2}. \qquad 7.1.18$$

Затем определяются границы доверительного интервала для случайных погрешностей:

$$\Delta_{oo}=k\sigma[\overset{o}{\Delta}_{o}\cdot\overset{o}{\Delta}_{oH}]. \qquad 7.1.19$$

Границы суммарной погрешности находятся геометрическим суммированием доверительных интервалов систематической и случайной погрешностей при условии одинаковости законов распределения всех случайных величин (7.1.18) и (7.1.19):

$$\Delta_{\Sigma p}=\sqrt{(\Delta_{osp})^2+(\Delta_{oo})^2}. \qquad 7.1.20$$

Результат измерения:

$$x_{д}=x_{и}\pm\Delta_{\Sigma p}. \qquad 7.1.21$$

Зная границы доверительного интервала систематической погрешности, можно найти среднеквадратическое отклонение систематической погрешности

$$\sigma[\Delta_{os}]=\frac{\Delta_{osp}}{k},$$

где k – квантильный множитель, равный 2 или 3 при нормальном законе распределения и доверительной вероятности 0,95 или 0,997. Затем геометрически суммируются все среднеквадратические отклонения и находится СКО суммарной погрешности:

$$\sigma[\Delta_{\Sigma}] = \sqrt{\sigma[\Delta_{os}]^2 + \sigma[\overset{o}{\Delta}_o]^2 + \sigma[\overset{o}{\Delta}_{oH}]^2}. \qquad 7.1.22$$

Границы максимального интервала суммарной погрешности

$$\Delta_{\Sigma p} = k\sigma[\Delta_{\Sigma}]. \qquad 7.1.23$$

Результат измерения представляется в соответствии с (7.1.21).

7.1.4. Обработка результатов измерений при наличии систематической, дополнительной и динамической составляющих инструментальной погрешности

При таких измерениях могут присутствовать все три составляющие погрешности или их комбинации по две (7.1.6, 7.1.7).

Систематическая погрешность оценивается своими границами, которые устанавливаются для средств измерения одного типа и одного завода-изготовителя. Она закладывается в средство измерения при его проектировании и нормируется после изготовления. Для конкретного средства измерения систематическая погрешность постоянна, но не известна. Известно только, что она лежит в интервале Δ_{osp}. Систематическая погрешность по мере старения прибора изменяется (гл. 9).

Дополнительная погрешность прибора определяется условиями эксплуатации в рабочем диапазоне влияющих величин, имеет детерминированную зависимость от значения этих величин и не связана никак с систематической погрешностью.

Динамическая погрешность средства измерения зависит от скорости изменения измеряемой физической величины. В каждый момент времени процесса измерения она различна (гл. 8).

Таким образом, систематическая, дополнительная и динамическая погрешности имеют различную природу, разный временной характер проявления и по-разному зависят от условий эксплуатации. Они не могут быть оценены какой-то суммарной погрешностью. В результатах измерения эти погрешности представляются раздельно, каждая со своей оценкой.

7.1.5. Обработка результатов измерений при наличии систематической инструментальной и внешней случайной составляющих погрешности

Используем математическую модель погрешности измерения по формуле (7.1.8). Для оценки суммарной погрешности измерения выберем j-й прибор из партии однотипных средств измерения и проведём с ним измерительный эксперимент.

Известно, что выбранное средство измерения имеет систематическую погрешность Δ_{os}. Об этой погрешности известно, что для выбранного средства измерения она постоянна, по крайней мере на протяжении измерительного эксперимента, и находится в нормированном интервале Δ_{osp}, установленном для выбранного типа приборов.

Выбранным средством измерения провели измерение физической величины $x_д$ в отсутствие случайных погрешностей и получили показания прибора x_{uj}, которые отличаются от действительного значения на величину систематической погрешности

$$\Delta_{osj} = x_{uj} - x_д. \qquad 7.1.24$$

Далее, этим же прибором провели измерение той же физической величины $x_д$, но в условиях действия помех, которые создают случайные погрешности измерения, и получили множество показаний прибора:

$$x_u = \{x_{u1} \cdots x_{ui} \cdots x_{un}\}. \qquad 7.1.25$$

Отклонение отдельного измерения x_{ui} от x_{uj} равно:

$$\Delta x_i = x_{ui} - x_{uj}. \qquad 7.1.26$$

Среднее арифметическое значение измеренной физической величины, которое войдет в результат измерения:

$$\bar{x}_u = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_{ui}. \qquad 7.1.27$$

Отклонение $\overline{x}_u$ от x_{uj} для j-го средства измерения равно:

$$\sigma[\overset{o}{\Delta} x_j] = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1}^{n}(x_{ui} - \bar{x}_u)^2}. \qquad 7.1.28$$

Таким образом, $\sigma[\overset{o}{\Delta} x_j]$ есть среднее квадратическое отклонение среднего арифметического $\overline{x}_u$ от показаний средства измерения x_{uj} в отсутствие случайной погрешности.

В свою очередь, $x_{иj}$ отличается от действительного значения измеряемой физической величины $x_д$. Среднеквадратическое значение этого отличия для партии средств измерения

$$\frac{\Delta_{osp}}{k} = \sigma[\Delta_{os}]. \quad 7.1.29$$

Суммарное среднеквадратическое отклонение среднего значения показаний прибора $\overline{x}_и$ от действительного значения измеряемой величины равно:

$$\sigma[\Delta_\Sigma] = \sqrt{\sigma[\Delta_{os}]^2 + \sigma[\overset{o}{\Delta} x_j]^2}. \quad 7.1.30$$

Границы результирующей погрешности

$$\Delta_{\Sigma p} = k\sigma[\Delta_\Sigma], \quad 7.1.31$$

а результат измерения

$$x_д = \bar{x}_и \pm \Delta_{\Sigma p}. \quad 7.1.32$$

7.2. Обработка результатов косвенных измерений

При осуществлении косвенных измерений искомая физическая величина находится путём вычислений с использованием результатов прямых измерений других физических величин, функционально с ней связанных.

Представим измеряемую косвенно физическую величину как функцию нескольких прямо измеряемых величин:

$$y = f(x_1 \cdots x_i \cdots x_n), \quad 7.2.1$$

где $x_1 \dots x_j \dots x_m$ – физические величины, определяемые прямыми измерениями, y – искомая физическая величина, определяемая косвенными измерениями.

После проведения измерений имеем другую функцию:

$$y_и = f(x_{и1} \cdots x_{иj} \cdots x_{иm}), \quad 7.2.2$$

где $x_{и1} \dots x_{иj} \dots x_{иm}$ – показания индикаторов m средств измерения, участвующих в измерительном эксперименте.

При прямом измерении j-й физической величины имеет место погрешность измерения

$$\Delta_j = x_{иj} - x_j. \quad 7.2.3$$

Без учёта случайной, дополнительной и динамической погрешностей погрешность измерения j-й физической величины будет определяться первой математической моделью погрешности измерения и будет состоять из одной систематической составляющей, задаваемой доверительным интервалом Δ_{osp}, среднеквадратическим отклонением $\sigma[\Delta_{os}]$ или тем и другим.

Абсолютная погрешность косвенно измеряемой физической величины равна:

$$\Delta y = y_{\text{и}} - y. \qquad 7.2.4$$

Эта погрешность определяется погрешностями участвующих в эксперименте приборов и находится их суммированием с учётом весовых коэффициентов. Поскольку при проведении косвенных измерений используются разнотипные приборы с известными среднеквадратическими отклонениями систематической погрешности, результирующее значение среднеквадратической погрешности косвенных измерений находится геометрическим суммированием среднеквадратических погрешностей участвующих в эксперименте приборов (6.3.8), (6.3.9).

$$(\Delta_{osp})_y = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} [k_{xj} (\Delta_{osp})_j]^2}, \qquad 7.2.6$$

где $k_{x1}...k_{xj}...k_{xm}$ – весовые коэффициенты погрешностей, определяемые частными производными в соответствии с формулой (6.3.8).

Рассмотрим пример измерения электрической мощности, выделяемой на нагрузке электрическим током методом амперметра и вольтметра:

$$P = UI, \qquad 7.2.7$$

где I – ток, протекающий по нагрузке и измеряемый амперметром, U – падение напряжения на нагрузке, измеряемое вольтметром.

Весовой коэффициент погрешности вольтметра

$$k_U = \frac{\partial P}{\partial U} = \frac{\partial (UI)}{\partial U} = I, \qquad 7.2.8$$

а весовой коэффициент погрешности амперметра

$$k_I = \frac{\partial P}{\partial U} = \frac{\partial (UI)}{\partial I} = U. \qquad 7.2.9$$

Интервал погрешности измерения мощности, в соответствии с формулой (6.3.13), равен:

$$(\Delta_{osp})_P = \sqrt{[k_U (\Delta_{osp})_U]^2 + [k_I (\Delta_{osp})_I]^2}. \qquad 7.2.10$$

Результат измерения:

$$P = P_{\text{и}} \pm k(\Delta_{osp})_P. \qquad 7.2.11$$

В (7.2.11) $P_{\text{и}} = U_{\text{и}} I$ – мощность, вычисленная по показаниям вольтметра и амперметра.

Рассмотрим численный пример косвенного измерения мощности. Пусть показания вольтметра равны: $U_{\text{и}}$ = 5,00 В, границы систематической погрешности вольтметра $(\Delta_{osp})_U$ = 0,10 В; показания амперметра равны $I_{\text{и}}$ = 1,00 В, границы систематической погрешности амперметра $(\Delta_{osp})_A$ = 0,010 А.

В соответствии с формулой (7.2.10) интервал погрешности для мощности равен:

$$(\Delta_{osp})_P = \sqrt{[k_U\,(\Delta_{osp})_U\,]^2 + [k_I\,(\Delta_{osp})_I\,]^2}. \qquad 7.2.12$$

По формуле (7.2.8) весовой коэффициент погрешности вольтметра k_U = 1,00 А, а по формуле (7.2.10) весовой коэффициент погрешности амперметра k_I = 5,00 В.

После подстановки численных значений в (7.2.12) получается

$$(\Delta_{osp}) = \sqrt{(1,00 \cdot 0,10)^2 + (5,00 \cdot 0,010)^2} = 0,11 \quad \text{Вт}.$$

Результат измерения мощности:

$$P = 5,00 \pm 0,11 \quad \text{Вт}.$$

Относительная погрешность измерения мощности

$$\delta_P = \frac{0,11}{5,00} = 0,022; \quad \delta_P = 2,2 \ \%.$$

7.3. Обработка результатов совместных измерений

Обработку результатов совместных измерений рассмотрим на примере градуировки термопары, подобно тому как это было сделано в п. 6.4.2. Различие будет состоять в том, что инструментальная погрешность вольтметра и термометра нормируются не классом точности средства измерения, а границей систематической погрешности Δ_{osp} или её среднеквадратическим отклонением $\sigma[\Delta_{os}]$.

Уравнение преобразования термопары:

$$U = \alpha(t - t_x) + \beta(t - t_x)^2, \qquad 7.3.1$$

где t – температура в термостате, куда помещен горячий спай термопары, t_x – температура холодных концов термопары (температура окружающей среды), U – напряжение на концах термопары, α и β – коэффициенты, аппроксимирующие уравнение преобразования термопары.

Для нахождения коэффициентов α и β проводят два совместных измерения напряжения и температуры, при разных значениях установленной в термостате температуры, и получают два уравнения:

$$U_1 = \alpha(t_1 - t_x) + \beta(t_1 - t_x)^2, \qquad 7.3.2$$

$$U_2 = \alpha(t_2 - t_x) + \beta(t_2 - t_x)^2. \qquad 7.3.3$$

В полученных уравнениях U_1 и t_1 – напряжение на концах термопары и температура горячего спая при первом измерительном эксперименте, U_2 и t_2 – то же, но при втором измерительном эксперименте с другим значением температуры в термостате.

Коэффициенты α и β находятся в результате решения уравнений (7.3.2) и (7.3.3).

После решения уравнений получаются два выражения для расчёта искомых коэффициентов:

$$\alpha = \frac{U_2 t_1^2 - U_1 t_2^2}{t_2 t_1^2 - t_1 t_2^2},$$

$$\beta = \frac{U_1}{t_1^2} - \frac{U_2 t_1^3 - U_1 t_2^2 t_1}{t_2 t_1^4 - t_1^3 t_2^2}. \qquad 7.3.4$$

Погрешность нахождения коэффициентов будет определяться погрешностью измерения напряжения и температуры. При использовании математической модели (7.1.4) погрешности вольтметра и термометра определяются только систематической погрешностью. Систематическая погрешность по ГОСТ 8.009–84 нормируется доверительным интервалом Δ_{osp}, в котором с заданной доверительной вероятностью $P_д$ находится систематическая погрешность, и средним квадратическим отклонением систематической погрешности от своего среднего значения $\sigma[\Delta_{os}]$.

Весовые коэффициенты погрешностей вольтметра и термометра при определении погрешностей нахождения коэффициента α находятся как частные производные:

$$k_{\alpha U2} = \frac{\partial\alpha}{\partial U_2}; \quad k_{\alpha U1} = \frac{\partial\alpha}{\partial U_1}; \quad k_{\alpha t1} = \frac{\partial\alpha}{\partial t_1}; \quad k_{\alpha t2} = \frac{\partial\alpha}{t_2}, \qquad 7.3.5$$

где $k_{\alpha U1}$ и $k_{\alpha U2}$ – весовые коэффициенты погрешности вольтметра при первом и втором измерениях напряжения, соответственно, $k_{\alpha t1}$ и $k_{\alpha t2}$ –

весовые коэффициенты погрешности термометра при первом и втором измерениях температуры. Аналогичным образом определяются весовые коэффициенты погрешностей вольтметра и термометра при вычислении коэффициента β.

$$k_{\beta U2} = \frac{\partial\beta}{\partial U_2}; \quad k_{\beta U1} = \frac{\partial\beta}{\partial U}; \quad k_{\beta t1} = \frac{\partial\beta}{\partial t_1}; \quad k_{\beta t2} = \frac{\partial\beta}{\partial t_1}. \qquad 7.3.6$$

Среднеквадратическое значение погрешности нахождения коэффициента α:

$$\sigma[\Delta_\alpha] = \sqrt{\begin{matrix}(k_{\alpha U1}\sigma[\Delta_{os}]_U)^2 + (k_{\alpha U2}\sigma[\Delta_{os}]_U)^2 + \\ +(k_{\alpha t1}\sigma[\Delta_{os}]_t)^2 + (k_{\alpha t2}\sigma[\Delta_{os}]_t)^2\end{matrix}}. \qquad 7.3.7$$

Подобным образом находится среднеквадратическое отклонение погрешности вычисления коэффициента β подстановкой других весовых коэффициентов из ряда (7.3.6):

$$\sigma[\Delta_\beta] = \sqrt{\begin{matrix}(k_{\beta U1}\sigma[\Delta_{os}]_U)^2 + (k_{\beta U2}\sigma[\Delta_{os}]_U)^2 + \\ +(k_{\beta t1}\sigma[\Delta_{os}]_t)^2 + (k_{\beta t2}\sigma[\Delta_{os}]_t)^2\end{matrix}}. \qquad 7.3.8$$

Доверительный интервал для погрешности определения коэффициента α равен:

$$(\Delta_{osp})_\alpha = k\sigma[\Delta_\alpha]. \qquad 7.3.9$$

Доверительный интервал для погрешности вычисления коэффициента β равен:

$$(\Delta_{osp})_\beta = k\sigma[\Delta_\beta]. \qquad 7.3.10$$

Если в погрешности измерения напряжения и температуры присутствует случайная составляющая погрешности, обусловленная как внутренними, так и внешними причинами, то в погрешности определения коэффициентов α и β также появится случайная составляющая погрешности. Среднеквадратические значения случайной погрешности вольтметра и термометра равны $\sigma[\overset{o}{\Delta}]_U$ и $\sigma[\overset{o}{\Delta}]_t$, соответственно.

Среднеквадратическое значение случайной погрешности определения коэффициента находим с использованием формулы (7.3.7), заменяя $\sigma[\Delta_{os}]_U$ и $\sigma[\Delta_{os}]_t$ на $\sigma[\overset{o}{\Delta}]_U$ и $\sigma[\overset{o}{\Delta}]_t$.

После замены и подстановки получим:

$$\sigma[\overset{o}{\Delta}]_\alpha = \sqrt{(k_{\alpha U1}\sigma[\overset{o}{\Delta}]_U)^2 + (k_{\alpha U2}\sigma[\overset{o}{\Delta}]_U)^2 + (k_{\alpha t1}\sigma[\overset{o}{\Delta}]_t)^2 + (k_{\alpha t2}\sigma[\overset{o}{\Delta}]_t)^2}. \qquad 7.3.11$$

Аналогично находится среднеквадратическое значение случайной погрешности определения коэффициента β:

$$\sigma[\overset{o}{\Delta}]_{\beta} = \sqrt{(k_{\beta U1}\sigma[\overset{o}{\Delta}]_{U})^2 + (k_{\beta U2}\sigma[\overset{o}{\Delta}]_{U})^2 + (k_{\beta t1}\sigma[\overset{o}{\Delta}]_{t})^2 + (k_{\beta t2}\sigma[\overset{o}{\Delta}]_{t})^2}. \quad 7.3.12$$

Далее по правилу сложения нескольких некоррелированных среднеквадратических значений погрешностей находим суммарное среднеквадратическое значение погрешности определения коэффициентов α и β:

$$\sigma[\Delta_{\alpha}]_{\Xi 1} = \sqrt{(\sigma[\Delta_{os}])^2 + (\sigma[\overset{o}{\Delta}]_{\alpha})^2}. \quad 7.3.13$$

Границы интервала суммарной погрешности определения α

$$[\Delta_{osp}]_{\alpha \Xi 1} = k\sigma[\Delta_{\alpha}]_{\Xi 1}. \quad 7.3.14$$

Для коэффициента β аналогично:

$$\sigma[\Delta_{\beta}]_{\Xi 1} = \sqrt{(\sigma[\Delta_{os}])^2 + (\sigma[\overset{o}{\Delta}]_{\beta})}, \quad 7.3.15$$

$$[\Delta_{osp}]_{\beta \Xi 1} = k\sigma[\Delta_{\beta}]_{\Xi 1}. \quad 7.3.16$$

Если в нормативно-технической документации на вольтметр и термометр нормированы дополнительные погрешности измерения, то их необходимо учесть в результирующей погрешности определения значения коэффициентов α и β. Это можно сделать двояко, в зависимости от того, как задана дополнительная погрешность в нормативно-технической документации на средства измерения.

Если дополнительная погрешность средств измерения задана среднеквадратическими отклонениями $\sigma[\Delta_c]_U$ и $\sigma[\Delta_c]_t$, то её нужно учесть вначале при определении суммарного значения среднеквадратического отклонения погрешности определения коэффициентов α и β.

Для этого, используя формулы (7.3.7) и (7.3.8), определяем среднеквадратические значения погрешности определения коэффициентов α и β, вносимой дополнительными погрешностями вольтметра и термометра:

$$\sigma[\Delta_c]_{\alpha} = \sqrt{\begin{matrix}(k_{\alpha U1}\sigma[\Delta_c]_U)^2 + (k_{\alpha U2}\sigma[\Delta_c]_U)^2 + \\ +(k_{\alpha t1}\sigma[\Delta_c]_t)^2 + (k_{\alpha t2}\sigma[\Delta_c]_t)^2\end{matrix}}, \quad 7.3.17$$

$$\sigma[\Delta_c]_{\beta} = \sqrt{\begin{matrix}(k_{\beta U1}\sigma[\Delta_c]_U)^2 + (k_{\beta U2}\sigma[\Delta_c]_U)^2 + \\ +(k_{\beta t1}\sigma[\Delta_c]_t)^2 + (k_{\beta t2}\sigma[\Delta_c]_t)^2\end{matrix}}. \quad 7.3.18$$

Суммарное значение среднеквадратической погрешности определения коэффициентов α и β находим, используя формулы (7.3.13) и (7.3.15), добавляя под корнем третье слагаемое, определяемое дополнительной погрешностью вольтметра и термометра (7.3.17) и (7.3.18):

$$\sigma[\Delta_{\alpha}]_{\Xi 2} = \sqrt{(\sigma[\Delta_{os}])^2 + (\sigma[\overset{o}{\Delta}]_{\alpha})^2 + (\sigma[\Delta_{c}]_{\alpha})^2}, \qquad 7.3.19$$

$$\sigma[\Delta_{\beta}]_{\Xi 2} = \sqrt{(\sigma[\Delta_{os}])^2 + (\sigma[\overset{o}{\Delta}]_{\varepsilon})^2 + (\sigma[\Delta_{c}]_{\beta})}. \qquad 7.3.20$$

Границы доверительных интервалов, в которых находятся погрешности определения α и β, определяются аналогично (7.3.14) и (7.3.16):

$$[\Delta_{osp}]_{\alpha\Xi 2} = k\sigma[\Delta_{\alpha}]_{\Xi 2}. \qquad 7.3.21$$

Если дополнительная погрешность задана в нормативно-технической документации числом Δ_c, то в окончательном представлении результатов измерения это число с одним знаком нужно прибавить к границам интервалов погрешности, определяемых формулами (7.3.14) и (7.3.16):

$$[\Delta_{p\alpha}]_{\Xi 2} = k\sigma[\Delta_{\alpha}] + \Delta_{c}, \qquad 7.3.22$$

$$[\Delta_{p\beta}]_{\Sigma 2} = k\sigma[\Delta_{\beta}]_{\Xi 2} + \Delta_{c}. \qquad 7.3.23$$

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте описание математической модели инструментальной погрешности средства измерения по ГОСТ 8.009-84.
2. Опишите возможные частные случаи математической модели инструментальной погрешности средства измерения.
3. Как представить результат измерения при наличии только систематической погрешности средства измерения?
4. Как представить результат измерения при наличии систематической, случайной и гистерезисной составляющих инструментальной погрешности?
5. Как представить результат измерения при наличии систематической, внутренней случайной и дополнительной составляющих инструментальной погрешности измерения?
6. Как представить результат измерения при наличии инструментальной и внешней случайной погрешности измерения?
7. Как представить результат косвенных измерений по ГОСТ 8.009–84?

8. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ

8.1. Отклик измерительного преобразователя на входное воздействие

Измерительный сигнал представляет собой физический процесс, характеризуемый определёнными параметрами. Один или несколько параметров процесса могут быть измеряемыми величинами или параметрами, функционально связанными с другими измеряемыми величинами.

Например, физическим процессом является протекание по проводнику постоянного электрического тока или, как результат этого, падение напряжения на участке электрической цепи. В рассматриваемых случаях имеется единственный информативный параметр – уровень тока в первом случае и уровень напряжения во втором случае.

В качестве другого примера назовём процесс протекания по проводнику переменного электрического тока:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi), \qquad 8.1.1$$

где i – мгновенное значение протекающего тока, I_m – амплитуда переменного тока, ω – частота изменения переменного тока, φ – начальная фаза переменного процесса.

Все четыре названных параметра могут быть измеряемыми величинами. Амплитуда тока измеряется амперметром, частота измеряется частотомером, а начальная фаза – фазометром при наличии значения опорного тока

$$i = I_m \sin(\omega t). \qquad 8.1.2$$

Если какой-то параметр процесса (8.1.1) функционально связан с измеряемой физической величиной, то он является информативным параметром сигнала. Например,

$$I_m = kx, \qquad 8.1.3$$

где x – измеряемая физическая величина, k – коэффициент связи, I_m – информативный параметр сигнала, в основу которого положен физический процесс в виде переменного электрического тока (8.1.1).

Если измеряемая физическая величина изменяется во времени

$$x = x(t), \quad 8.1.4$$

то и информативный параметр будет изменяться во времени

$$I_m = kx(t), \quad 8.1.5$$

т. е. амплитуда тока будет модулирована во времени по закону изменения измеряемой физической величины.

Динамические характеристики средства измерения приходится учитывать тогда, когда скорость (частота) изменения физического процесса (8.1.1) или скорость изменения во времени информативного параметра (8.1.5) соизмеримы с быстродействием средства измерения.

Для примера возьмём измерительный преобразователь ИП (рис. 8.1.1), на входе которого действует сигнал в виде постоянного или переменного напряжения.

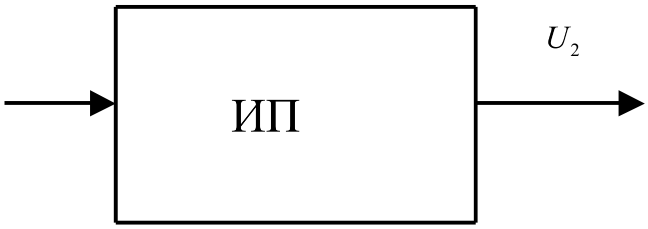


Рис. 8.1.1. Измерительный преобразователь: U_1 – входной сигнал в виде электрического напряжения; U_2 – выходной сигнал (отклик преобразователя на входное воздействие)

Если на вход измерительного преобразователя подействует напряжение в виде скачка, то напряжение на выходе преобразователя, вследствие его инерционных свойств, будет нарастать постепенно, а не скачком (рис. 8.1.2).

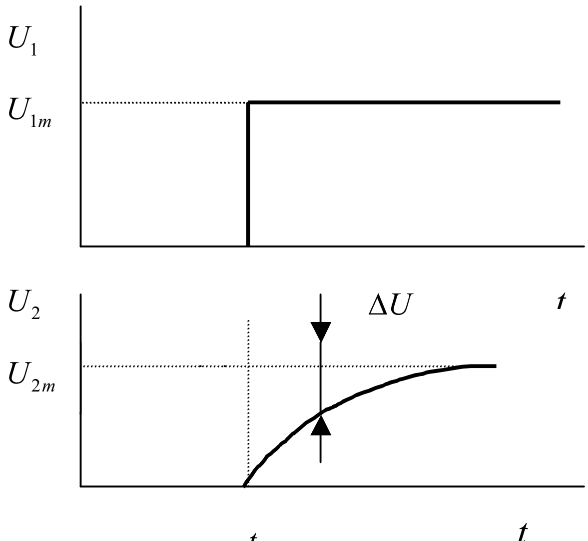


Рис. 8.1.2. Переходной процесс в измерительном преобразователе при воздействии на его вход скачка напряжения с уровнем U_{1m}: ΔU – динамическая погрешность

Установившееся значение напряжения на выходе преобразователя

$$U_{2m} = k_0 U_{1m}, \qquad 8.1.6$$

где k_0 – коэффициент преобразования (коэффициент усиления) в установившемся состоянии. Во время переходного процесса будет иметь место динамическая погрешность ΔU, которая со временем уменьшается и в пределе стремится к нулю.

Если ко входу преобразователя подключить в момент времени t_1 переменное напряжение, то изменение напряжения на выходе из-за действия инерционных процессов будет иметь вид, показанный на рис. 8.1.3.

Переменное напряжение на входе преобразователя изменяется по синусоидальному закону

$$u = U_{1m} \sin(\omega t + \varphi). \qquad 8.1.7$$

Допустим, что параметр процесса U_{1m} является информативным и связан с измеряемой физической величиной линейно через коэффициент связи k:

$$U_{1m} = kx, \qquad 8.1.8$$

где x – измеряемая физическая величина.

Если измеряемая физическая величина изменяется во времени,

$$U_{1m} = kx(t), \qquad 8.1.9$$

то, подставив (8.1.9) в (8.1.7), получим

$$u = kx(t)\sin(\omega t + \varphi). \qquad 8.1.10$$

Из (8.1.10) следует, что временные изменения сигнала связаны с изменениями измеряемой физической величины x, через информативный параметр U_{1m}, и с временными параметрами ωt физического процесса, лежащего в основе сигнала.

Временные изменения информативного параметра приводят к переходным процессам и динамической погрешности, а временные параметры процесса приводят к частотным погрешностям преобразователя, которые следует рассматривать как дополнительную погрешность.

Если временные изменения измеряемой физической величины, а следовательно и информативного параметра сигнала, носят периодический характер, то они могут сказаться и в установившемся состоянии как дополнительные частотные погрешности.

Для иллюстрации рассмотрим прохождение через преобразователь модулированного сигнала

$$u = (U_m \sin \Omega t)\sin \omega t, \qquad 8.1.11$$

где Ω – частота модуляции информативного параметра сигнала (амплитуды), ω – частота физического процесса, образующего основу измерительного сигнала.

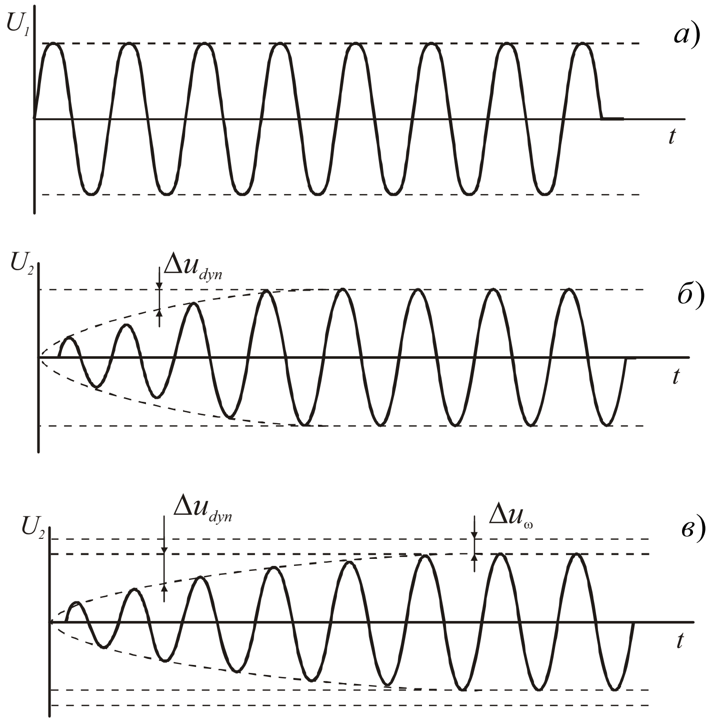


Рис. 8.1.3. Отклик измерительного преобразователя на подключение к его входу синусоидального напряжения:
а) входное напряжение;
б) отклик на входное воздействие при отсутствии частотной погрешности в установившемся режиме;
в) отклик на входное воздействие при наличии частотной погрешности в установившемся режиме;
ΔU_{dyn} – динамическая погрешность в переходном режиме; ΔU_{ω} – частотная погрешность в установившемся режиме

При разложении в ряд Фурье входной сигнал будет представлен суммой трёх гармоник:

$$U_1 = U_m \sin \omega_o t + kU_m \sin(\omega_o t + \Omega t) +$$
$$+ kU_m \sin n(\omega_o t - \Omega t) = U_o + U_{\text{в}} + U_{\text{н}}. \qquad 8.1.12$$

Спектр такого сигнала представлен на рис. 8.1.4, *а*.

Если полоса пропускания преобразователя шире спектра входного сигнала (рис. 8.1.4, *б*), то преобразуемый сигнал проходит без искажений и соотношение между гармониками в выходном сигнале сохраняется (рис. 8.1.4, *в*).

Если полоса пропускания частот у преобразователя относительно спектра сигнала узкая и неравномерная, то соотношение между гармониками на выходе преобразователя изменится, что свидетельствует об искажении сигнала и о наличии динамических погрешностей (рис. 8.1.5).

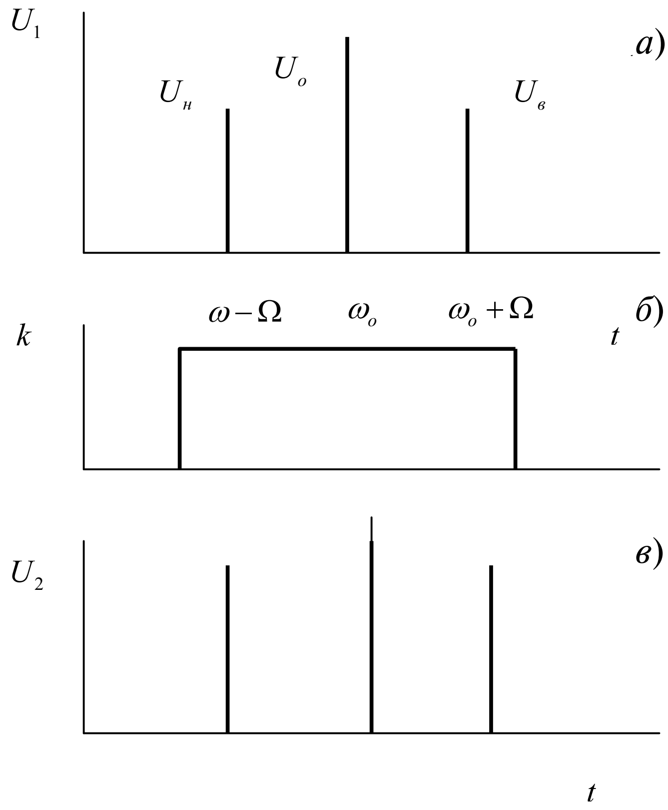


Рис. 8.1.4. Прохождение амплитудно-модулированного сигнала через преобразователь с равномерной полосой пропускания в диапазоне частот: $U_н$ – нижняя гармоника входного сигнала; $U_в$ – верхняя гармоника входного сигнала; k – коэффициент преобразования (усиления); U_2 – спектр выходного сигнала

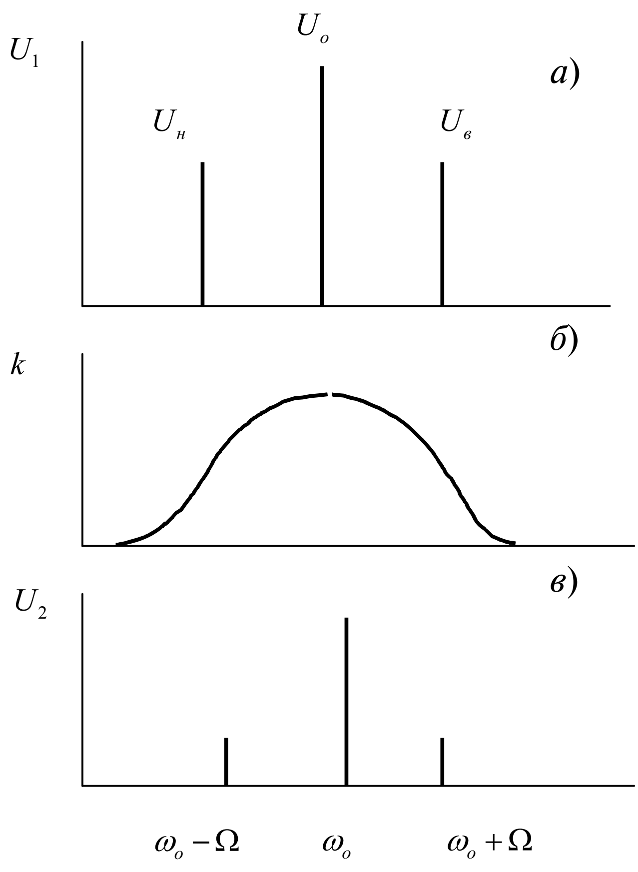


Рис. 8.1.5. Прохождение амплитудно-модулированного сигнала через преобразователь с неравномерной полосой пропускания частот входного сигнала: U_1 – спектр входного сигнала; k – коэффициент преобразования сигнала в неравномерной полосе частот преобразователя; U_2 – спектр выходного сигнала преобразователя

Очевидно, что для исключения динамической частотной погрешности нужно стремиться к тому, чтобы полоса пропускания частот у измерительного преобразователя была шире полосы частотного спектра преобразуемого сигнала.

8.2. Динамические характеристики средств измерения

8.2.1. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения наиболее полно описывают динамические свойства измерительных преобразователей.

Общий вид дифференциального уравнения m-го порядка с нулевыми начальными условиями имеет вид:

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} + \ldots + y(t) = k_o\, x(t). \qquad 8.2.1$$

Порядок уравнения (8.2.1) бывает высоким, по крайней мере выше второго. Его решение затруднительно, а часто и невозможно. Известно, что дифференциальные уравнения высокого порядка могут быть представлены системой дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Это означает представление сложного в динамическом отношении средства измерения совокупностью более простых динамических элементов нулевого, первого и второго порядка.

Самым простым в динамическом отношении измерительным преобразователем является преобразователь нулевого порядка. Преобразователь нулевого порядка есть безынерционное динамическое звено, которое описывается уравнением

$$y(t) = k_0 x(t). \qquad 8.2.2$$

У такого преобразователя отклик в точности повторяет входное воздействие. Измерительные преобразователи нулевого порядка наиболее предпочтительны для применения в измерительной технике.

Преобразователь с динамическими характеристиками первого порядка описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_o x(t), \qquad 8.2.3$$

где T – постоянная времени преобразователя.

Вместо постоянной времени используют также граничную частоту

$$\omega_г = \frac{1}{T}. \qquad 8.2.4$$

Динамические характеристики измерительного преобразователя второго порядка описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{\omega_o^2}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2\beta}{\omega_o}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_o x(t), \qquad 8.2.5$$

где ω_o – резонансная частота собственных колебаний измерительного преобразователя, β – коэффициент демпфирования, или, по-другому, степень успокоения преобразователя.

8.2.2. Частотные характеристики

Амплитудно-фазовая характеристика измерительного преобразователя

Если на вход линейного измерительного преобразователя подать гармонический сигнал, представленный в символической форме

$$x(j\omega) = x_m e^{j\omega t}, \qquad 8.2.6$$

то на выходе преобразователя образуется сигнал, запись которого в символической форме выглядит так:

$$y(j\omega) = y_m(\omega)e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} = \dot{y}_m(\omega)e^{j\omega t}, \qquad 8.2.7$$

где $\dot{y}_m$ – комплексная амплитуда выходного сигнала,

$$\dot{y}_m(\omega) = y_m(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \qquad 8.2.8$$

Амплитудно-фазовой характеристикой измерительного преобразователя называют отношение

$$G(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{\dot{y}_m}{x_m} = \frac{y_m(\omega)}{x_m}e^{j\varphi(\omega)}. \qquad 8.2.9$$

Эта динамическая характеристика описывает зависимость выходного сигнала измерительного преобразователя от изменения частоты физического процесса входного сигнала в установившемся состоянии (после окончания переходных процессов).

Амплитудно-частотная характеристика измерительного преобразователя

Амплитудно-частотная характеристика измерительного преобразователя описывается выражением

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{Y_m(\omega)}{x_m} \qquad 8.2.10$$

и представляет отношение амплитуд выходного сигнала и входного сигнала в установившемся режиме.

Фазочастотная характеристика измерительного преобразователя

Фазочастотная характеристика измерительного преобразователя определяет разность фаз между напряжениями выходного и входного сигналов в установившемся режиме. Эту характеристику описывает $\varphi(\omega)$ в формуле (8.1.17).

8.2.3. Переходная характеристика

Переходная характеристика – это временная зависимость выходного сигнала, полученная в результате подачи на вход измерительного преобразователя сигнала в виде единичной функции с заданной амплитудой:

$$x(t) = x_m 1(t). \qquad 8.2.11$$

Эта функция описывает инерционность средства измерения, обуславливающую запаздывание и, следовательно, искажение выходного сигнала относительно входного.

Переходная характеристика динамического элемента нулевого порядка:

$$h(t) = 0. \qquad 8.2.12$$

Для измерительного преобразователя с динамическими характеристиками первого порядка

$$h(t) = x_m k_0 (1 - e^{t/T}), \qquad 8.2.13$$

где T – постоянная времени измерительного преобразователя. Постоянная времени преобразователя определяется наклоном касательной к кривой переходного процесса при $t = 0$ (рис. 8.2.1).

Для измерительного преобразователя второго порядка при $x_m = 1$ переходная характеристика описывается выражением:

$$h(t) = k_0 \left[1 - \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin(\sqrt{1-\beta^2 \omega_0 t} + \arccos\beta) \right]. \qquad 8.2.14$$

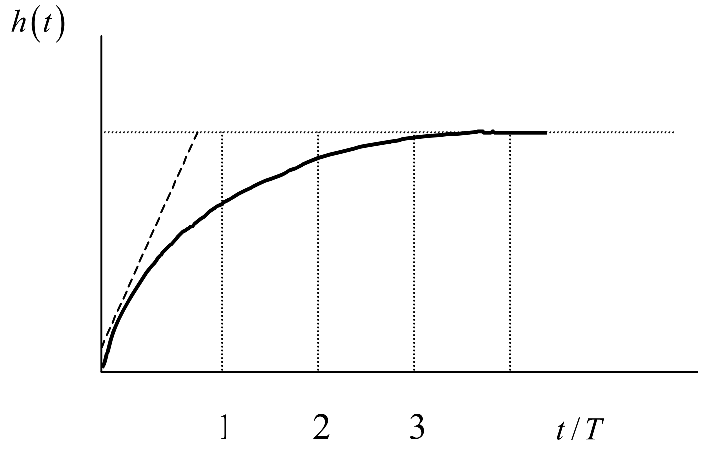


Рис. 8.2.1. Переходная характеристика измерительного преобразователя с динамической характеристикой первого порядка

Импульсная переходная характеристика $g(t)$ – это временная характеристика измерительного преобразователя, полученная в результате приложения к его входу сигнала в виде дельта-функции.

Выходной сигнал измерительного преобразователя при заданном $x(t)$ определяется с использованием переходной характеристики $h(t)$ или импульсной переходной характеристики $g(t)$ и интеграла Дюамеля:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) g(t-\tau) d\tau, \qquad 8.2.15$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau. \qquad 8.2.16$$

8.3. Измерительные преобразователи с динамическими характеристиками нулевого, первого и второго порядка

8.3.1. Безынерционный преобразователь

Идеальный безынерционный элемент, являющийся динамическим звеном нулевого порядка, описывается динамическими характеристиками:

$$G(j\omega) = k_o; \quad A(\omega) = k_o; \quad \varphi(\omega) = 0, \qquad 8.3.1$$

где $G(j\omega)$ – амплитудно-фазовая характеристика преобразователя, $A(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика, $\varphi(\omega)$ – фазочастотная характеристика.

Измерительный преобразователь с динамическими характеристиками звена нулевого порядка является частотно-независимым. Уравнение преобразования такого преобразователя:

$$y = k_0 x + a. \tag{8.3.2}$$

Второе слагаемое a в уравнении преобразования характеризует начальное смещение и в частных случаях может отсутствовать. Примером измерительного преобразователя нулевого динамического порядка может служить резистивный делитель напряжения (рис. 8.3.1).

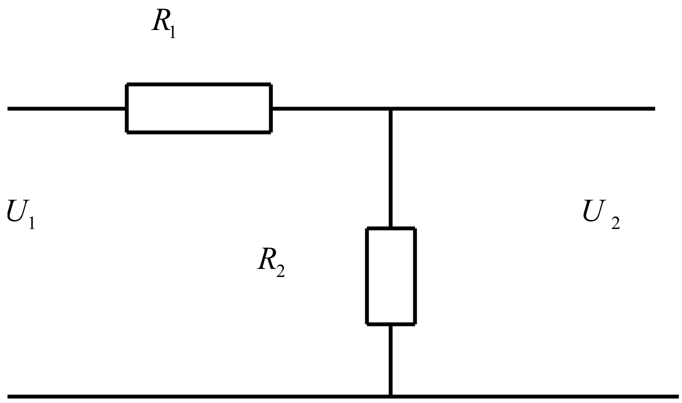


Рис. 8.3.1. Резистивный делитель напряжения как измерительный преобразователь с динамическими характеристиками нулевого порядка

8.3.2. Динамическое звено первого порядка

Преобразователь с динамическими характеристиками первого порядка описывается дифференциальным уравнением

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_o x(t), \tag{8.3.3}$$

где T – постоянная времени преобразователя.

Вместо постоянной времени используют также граничную частоту

$$\omega_г = \frac{1}{T}. \tag{8.3.4}$$

Для динамического элемента первого порядка, описываемого дифференциальным уравнением (8.3.3), частотные характеристики описываются выражениями:

$$G(j\omega) = \frac{k_o}{1 + j\omega T}; \quad A(\omega) = \frac{k_o}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}; \quad \varphi(\omega) = -arctg(\omega T). \tag{8.3.5}$$

Переходная характеристика динамического звена первого порядка имеет вид

$$y = y_0(1 - e^{-t/T}). \tag{8.3.6}$$

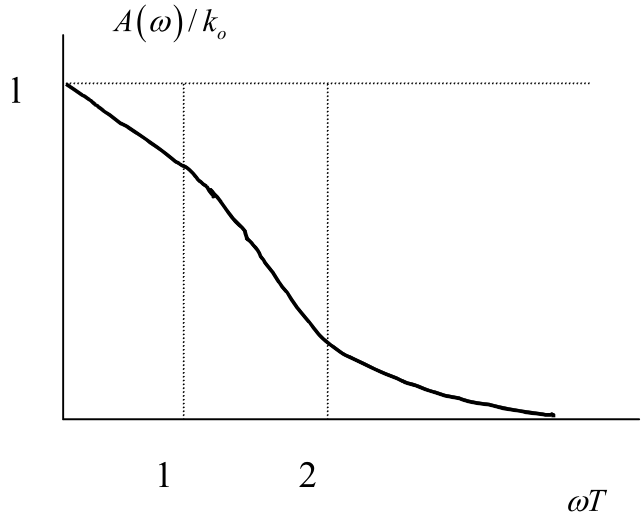


Рис. 8.3.2. Амплитудно-частотная характеристика динамического звена первого порядка

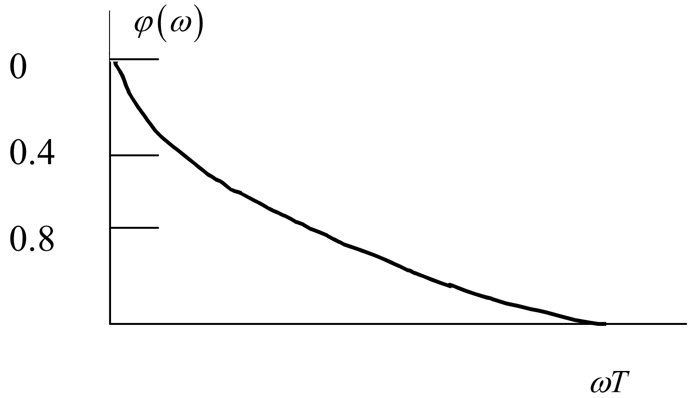


Рис. 8.3.3. Фазочастотная характеристика динамического звена первого порядка

Измерительный преобразователь с динамическими характеристиками звена первого порядка является инерционным звеном. Его отклик на входное ступенчатое воздействие происходит с запаздыванием, о чём наглядно свидетельствует вид переходной характеристики (рис. 8.3.4).

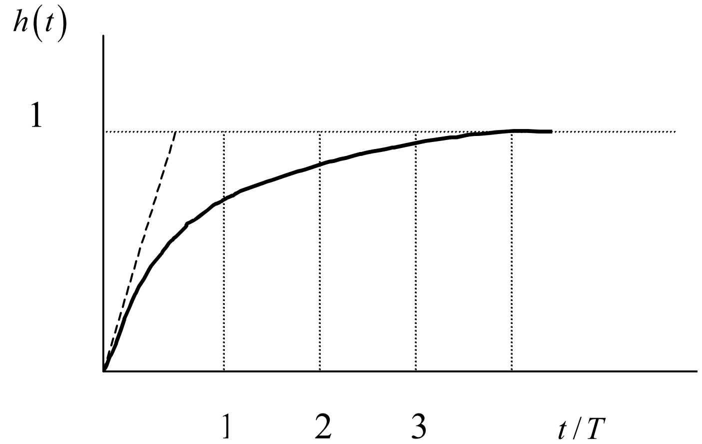


Рис. 8.3.4. Переходная характеристика измерительного преобразователя с динамической характеристикой первого порядка

8.3.3. Динамическое звено второго порядка

Динамические характеристики звена второго порядка описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{\omega_o^2}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{2\beta}{\omega_o}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k_o x(t), \qquad 8.3.7$$

где ω_o – резонансная частота собственных колебаний измерительного преобразователя, β – коэффициент демпфирования или, по-другому, степень успокоения преобразователя.

Измерительный преобразователь с динамическими характеристиками звена второго порядка, описываемый дифференциальным уравнением (8.3.7), имеет частотные характеристики:

$$G(j\omega)=\frac{k_o}{1-\frac{\omega^2}{\omega_o^2}+j2\beta\frac{\omega}{\omega_o}}, \qquad 8.3.8$$

$$A(\omega)=\frac{k_o}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_o^2}}+4\beta^2\frac{\omega^2}{\omega_o^2}}, \qquad 8.3.9$$

$$\varphi(\omega)=-\mathrm{arctg}\left(\frac{2\beta\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right). \qquad 8.3.10$$

Для измерительных преобразователей с динамическими характеристиками второго порядка вид частотных характеристик в значительной степени зависит от коэффициента демпфирования (рис. 8.3.5).

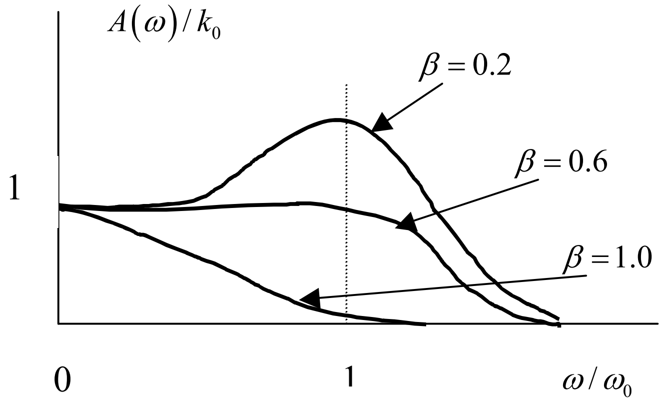


Рис. 8.3.5. Амплитудно-частотная характеристика измерительного преобразователя с динамическими характеристиками второго порядка

При $\beta \succ 0{,}6$, в относительно широком частотном диапазоне $A(\omega) = k_0$. Этот режим наиболее важен для практического применения. При $\beta \prec 0{,}6$ начинают проявляться резонансные явления, особенно при $\omega = \omega_0$.

Ясное физическое представление и относительная простота экспериментального определения частотных характеристик послужили причиной широкого их применения для оценки динамических свойств измерительных преобразователей в метрологии. Для примера на рис. 8.3.6 показана типичная для аналогового вольтметра, предназначенного для измерения постоянного и переменного напряжения, амплитудно-частотная характеристика измерительного тракта. Для вольтметра установлена граничная частота $\omega_{гр}$, выше которой спад амплитудно-частотной характеристики считается недопустимым. В пределах граничной частоты ΔA определяет частотную погрешность измерительного преобразователя. Полоса частот от 0 до $\omega_{гр}$ называется полосой пропускания измерительного преобразователя.

В нормативно-технической документации на средство измерения указываются $\omega_г$ и ΔA.

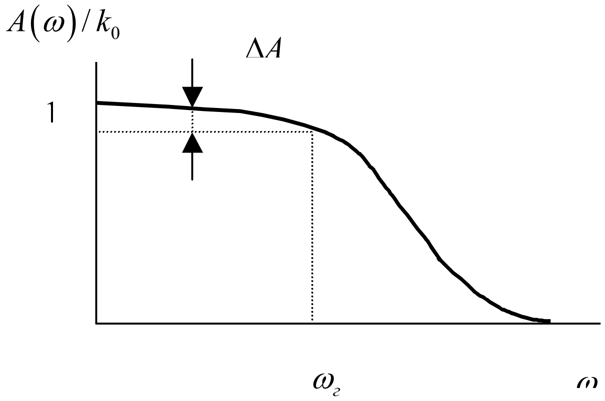


Рис. 8.3.6. Амплитудно-частотная характеристика аналогового вольтметра

8.4. Нормирование динамических характеристик средств измерения

В перечень нормальных условий, при которых нормируется основная погрешность средств измерения, работающих с меняющимися во времени сигналами, входит определённый спектр сигнала или определённая частота из этого спектра.

Для средств измерения, частотный диапазон которых начинается с нулевой частоты, нормирование основной погрешности производится на нулевой частоте при установившемся значении выходного сигнала.

Например, для вольтметра действующего значения напряжения, измеряющего постоянное и переменное напряжения, нормирование основной погрешности производят на постоянном напряжении.

Если средство измерения предназначено для работы в диапазоне частот, задаваемом частотой нижней границы диапазона $\omega_н$ и частотой верхней границы диапазона $\omega_в$, то основную погрешность нормируют на одной частоте, лежащей где-то в середине диапазона частот.

Для средств измерения, работающих с меняющимися во времени информативными параметрами, нормирование погрешности производится в установившемся режиме. Например, погрешность термопары определяют тогда, когда измеряемая температура достигла установившегося значения и все переходные процессы в термопаре закончились.

В аналоговых средствах измерения, работающих с переменными физическими процессами, лежащими в основе сигнала, нормируют амплитудно-частотную, фазо-частотную и амплитудно-фазовую характеристики.

В аналоговых средствах измерения, работающих с переменными информативными параметрами, нормируют переходную и импульсную переходную характеристики, постоянную времени, время установления показаний.

В цифровых средствах измерения нормируется максимальная частота преобразования, определяющая быстродействие цифрового прибора, и погрешность датирования отсчёта, т. е. привязки момента получения отсчёта к определённому моменту времени на временной оси.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие физические процессы могут лежать в основе измерительного сигнала?
2. Когда в результатах измерения необходимо учитывать динамическую погрешность?
3. В чём различие динамических и частотных погрешностей измерительного преобразователя?
4. Покажите на графике, как изменится выходной сигнал измерительного преобразователя при скачкообразном изменении входного сигнала, задаваемого уровнем напряжения.
5. Покажите рисунком, как проходит модулированный по амплитуде сигнал через измерительный преобразователь с равномерной и неравномерной аплитудно-частотной характеристиками.

6. Напишите дифференциальное уравнение динамического звена первого порядка.
7. Напишите дифференциальное уравнение динамического звена второго порядка.
8. Что понимают под амплитудно-фазовой характеристикой измерительного преобразователя?
9. Что понимают под амплитудно-частотной характеристикой измерительного преобразователя?
10. Что понимают под фазочастотной характеристикой измерительного преобразователя?
11. Изобразите на графике динамические свойства измерительного преобразователя второго порядка.
12. Назовите динамические характеристики средства измерения.
13. Напишите математическое выражение для переходной характеристики динамического измерительного преобразователя нулевого и первого порядка.
14. Что такое постоянная времени измерительного преобразователя с динамической характеристикой первого порядка?
15. Какие динамические характеристики нормируются у цифровых измерительных преобразователей и приборов?

9. МЕТРОЛОГИЧЕСКАЯ НАДЁЖНОСТЬ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ

9.1. Основные понятия теории метрологической надёжности

В процессе эксплуатации метрологические свойства средств измерения изменяются по причине старения элементов, образующих средство измерения. Эти изменения носят случайный монотонный или флуктуирующий характер и в некоторый момент времени могут привести к отказам, т. е. к невозможности средства измерения выполнять свои функции. Отказы делятся на неметрологические и метрологические.

Неметрологические отказы обусловлены причинами, не связанными с метрологическими свойствами средства измерения. Они носят явный характер, происходят внезапно и могут быть обнаружены без проведения поверки. Попросту говоря, неметрологический отказ – это поломка прибора (сгорел трансформатор в источнике питания, вышло из строя реле и т. д.).

Метрологический отказ вызывается выходом метрологических характеристик, указанных в нормативно-технической документации, за установленные пределы. При метрологическом отказе средство измерения работает, но не гарантирует установленную для него погрешность измерения, т. е. такому средству измерения нельзя верить.

Внезапный метрологический отказ характеризуется скачкообразным изменением одной или нескольких метрологических характеристик, выводящим эти характеристики за допустимые пределы. Такой отказ можно рассматривать как неполную поломку средства измерения. Этот отказ, как и полная поломка средства измерения, просто диагностируется в процессе эксплуатации. Особенностью внезапных метрологических отказов является постоянство во времени их интенсивности. Это даёт возможность применять для анализа внезапных метрологических отказов классическую теорию надёжности.

Постепенный метрологический отказ характеризуется монотонным изменением одной или нескольких метрологических характеристик. По характеру проявления постепенные отказы являются скрытыми и очень опасными, так как они могут быть выявлены только по результатам периодического контроля средства измерения, называемого его поверкой.

Метрологическая исправность средства измерения есть состояние средства измерения, при котором все его нормируемые метрологические характеристики соответствуют значениям, указанным в нормативно-технической документации.

Метрологическая надёжность есть способность средства измерения сохранять установленные в нормативно-технической документации метрологические характеристики в течение заданного времени при определённых режимах и условиях эксплуатации. Метрологическая надёжность оценивается временем, в течение которого выполняется это условие. Специфика метрологической надёжности состоит в том, что для неё основное положение классической теории надёжности о постоянстве во времени интенсивности отказов оказывается неправомерным. Современная классическая теория надёжности ориентирована на изделия, обладающие двумя состояниями работоспособности: работоспособное состояние и неработоспособное состояние. Постепенное изменение погрешности средства измерения позволяет ввести сколь угодно много работоспособных состояний с различным уровнем эффективности функционирования, определяемым степенью приближения погрешности к допустимым граничным значениям.

Понятие метрологического отказа является в определённой степени условным, поскольку определяется допуском на метрологические характеристики средства измерения.

Зафиксировать точно наступление метрологического отказа невозможно ввиду его скрытности. В классической теории надёжности явные отказы фиксируются в момент их возникновения. Такое различие потребовало разработки специальных методов анализа метрологической надёжности.

Надёжность средств измерения является обобщённой характеристикой средства измерения и детализируется другими характеристиками, такими как стабильность, безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость.

Стабильность средства измерения является качественной характеристикой, отражающей неизменность во времени его метрологических свойств. Стабильность описывается временными зависимостями параметров закона распределения инструментальной погрешности средства измерения. Стабильность определяется процессами старения внутри средства измерения и количественно их описывает.

Безотказность есть свойство средства измерения непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение определённого времени. Безотказность характеризуется двумя состояниями: работоспособное и неработоспособное. Отказ является случайным событием, связанным с прекращением работоспособного состояния средства измерения.

Долговечность средства измерения оценивается временем, в течение которого оно сохраняет работоспособное состояние до наступления предельного состояния. В предельном состоянии метрологические характеристики не соответствуют значениям, установленным в нормативно-технической документации, и эксплуатация средства измерения не допустима.

Ремонтопригодность есть свойство средства измерения, заключающееся в приспособленности к предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов, восстановлению и поддержанию его работоспособного состояния путём технического обслуживания и ремонта. Ремонт и восстановление являются затратными мероприятиями, и если их приходится проводить часто, то ставится вопрос о целесообразности дальнейшей эксплуатации средства измерения.

9.2. Изменение метрологических характеристик в процессе эксплуатации

Изменение метрологических характеристик средств измерения во времени обусловлено процессами старения его элементов, вызванными взаимодействием с внешней окружающей средой. Эти процессы протекают на молекулярном уровне и не зависят от того, находится ли средство измерения в эксплуатации или хранится на консервации. Основным фактором, определяющим старение средств измерения, является календарное время, прошедшее с момента их изготовления, т. е. их возраст. Скорость старения зависит от качества элементов, образующих средство измерения. Старение средств измерения протекает медленно и экспериментально его обнаружить можно только в течение длительного времени. В связи с этим большое значение приобретают математические методы прогнозирования процесса старения.

Теоретическая задача определения метрологической надёжности средства измерения состоит в нахождении начальных изменений метрологических характеристик и построении математической модели, экстраполирующей полученные результаты на большой интервал времени. Изменения во времени метрологических характеристик средств измерения являются случайным процессом, поэтому основным инструментом построения математических моделей процесса старения является теория случайных процессов. При этом нужно иметь в виду, что этот процесс нестационарный.

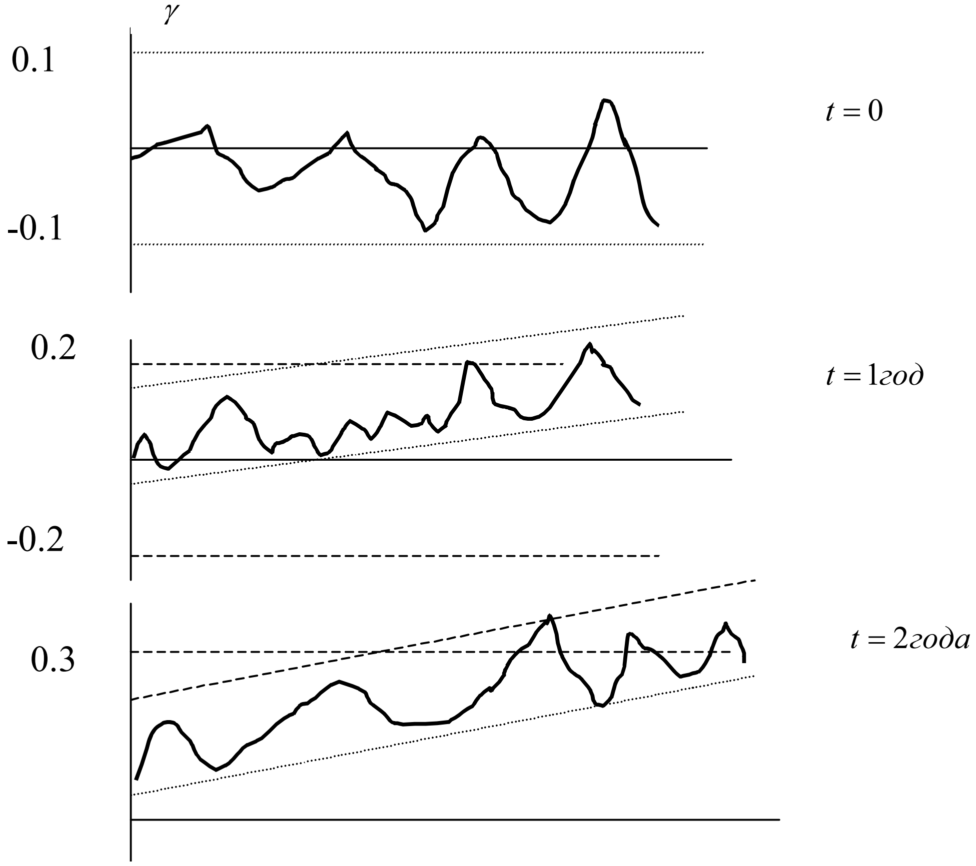


Рис. 9.2.1. Зависимость погрешности средства измерения от значения измеряемой величины после изготовления (t = 0, через один год и через два года)

С учётом неизбежного старения завод-изготовитель в нормативно-технической документации основную погрешность средства измерения устанавливает с 1,25...2,5-кратным запасом. Если, например, экспериментально установлен класс точности средства измерения 0,2, то в нормативно-технической документации указывается класс точности 0,5.

Для иллюстрации на рис. 9.2.1 показан процесс метрологического старения средства измерения.

При изготовлении средства измерения установлено, что его класс точности 0,1, однако завод-изготовитель в нормативно-технической документации установил класс точности 0,5, т. е. с пятикратным запасом. Поэтому через два года, несмотря на старение, прибор не имеет метрологических отказов.

9.3. Математическая модель надёжности метрологических характеристик

Так как заранее неизвестно, на каком участке шкалы погрешность прибора превысит нормированное для него значение класса точности, то процесс возрастания прогрессирующей погрешности в работе рассматривался как нестационарный случайный процесс, состоящий из пучка реализаций, соответствующих траекториям возрастания погрешности на отдельных участках шкалы. Далее определялся доверительный интервал погрешностей при доверительной вероятности 0,95. Если доверительный интервал на каком-то участке шкалы превышал интервал, установленный классом точности прибора, то это фиксировалось как метрологический отказ средства измерения.

В результате проведённых исследований оказалось, что для аналоговых и цифровых приборов текущее значение приведённой погрешности $\gamma(t)$ (в процентах) описывается выражением

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \frac{v_0}{a}(e^{at} - 1) = \gamma_0 + v_0\tau(1 - e^{t/\tau}), \qquad 9.3.1$$

где t – возраст прибора с момента его изготовления, в годах, τ – постоянная времени метрологической стабилизации прибора, в годах, $a = -1/\tau$ – отрицательное ускорение процесса старения (1/год), v_0 – начальная скорость прогрессирующего возрастания приведённой погрешности средства измерения (%/год), γ_0 – значение приведённой погрешности прибора в момент выпуска из производства, выраженное в процентах.

Эта зависимость графически представлена кривой 1 на рис. 9.2.2. При $t = 0$ кривая выходит из точки с ординатой γ_0, скорость её возрастания постепенно замедляется с отрицательным ускорением a и при $t \to \infty$ она стремится к установившемуся значению $\gamma_\infty = \gamma_0 + v_0\tau$.

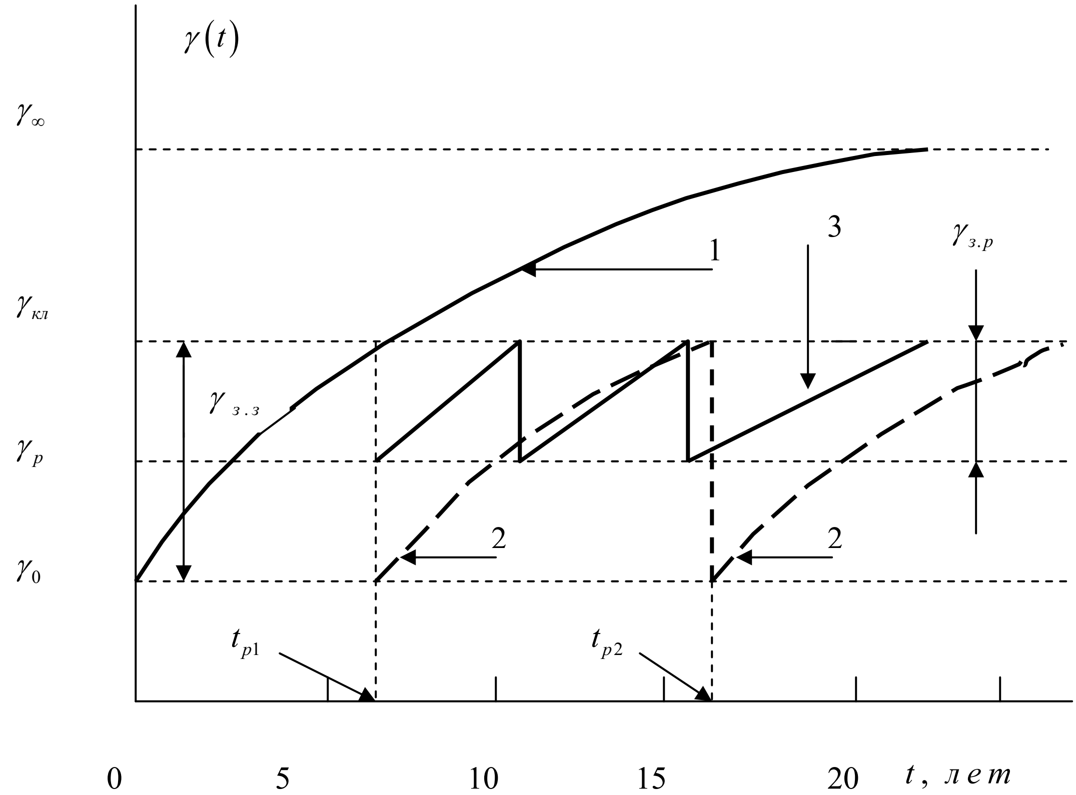


Рис. 9.2.2. Старение и метрологический ремонт средств измерения: 1 – кривая естественного старения; 2 – старение с регламентным ремонтом до первоначального значения погрешности γ_0; 3 – старение при некачественных метрологических ремонтах с восстановлением погрешности до γ_p

Если бы класс точности средства измерения устанавливался из условия $\gamma_{кл} = \gamma_{\infty}$, то основная инструментальная погрешность $\gamma(t)$ достигала бы своего значения $\gamma_{кл}$ при $t = \infty$, что означало бы отсутствие метрологических отказов за весь срок эксплуатации измерительного прибора. Однако заводы-изготовители, чтобы не снижать заметно класс точности средства измерения и тем самым не снижать его стоимость, устанавливают $\gamma_{кл} \prec \gamma_{\infty}$. Вследствие этого в возрасте прибора t_{p1} основная инструментальная погрешность достигает предельного значения $\gamma_{кл}$, прибор бракуется и направляется на первый метрологический ремонт и регулировку. Если при ремонте его погрешность будет доведена до значения γ_0, то при дальнейшей эксплуатации старение прибора будет идти по линии 2 (рис. 9.2.2). При достижении момента времени t_{p2} прибор направляется на второй метрологический ремонт.

Если при первом метрологическом ремонте была достигнута погрешность $\gamma_p \succ \gamma_{кл}$, то процесс старения пойдёт по кривой 3. В этом случае межповерочные интервалы становятся меньше, чем в случае старения по кривой 2.

Для аналоговых приборов среднее время наработки на первый метрологический отказ (момент времени t_{p1}) составляет от 4 до 14 лет. Некоторые типы приборов, хорошо сконструированные и качественно изготовленные, морально устаревают прежде, чем доживут до первого метрологического отказа, не говоря уже о втором.

9.4. Показатели метрологической надёжности средства измерения

Знание показателей метрологической надёжности позволяет потребителю оптимально использовать средство измерения, планировать мощность ремонтных подразделений, размер резервного фонда приборов, обоснованно назначать межповерочные интервалы и грамотно проводить мероприятия по техническому обслуживанию средств измерения.

Основная инструментальная погрешность средства измерения задаётся классом точности γ или доверительным интервалом Δ_{osp} с доверительной вероятностью $P_д = 0{,}95$ или $P_д = 0{,}997$.

На заводе-изготовителе в результате статистических экспериментальных исследований устанавливается класс точности средства измерения или доверительный интервал, обозначим их как γ_0 и $\Delta_{osp.0}$.

Стабильность средства измерения характеризуется изменением основной систематической погрешности во времени и задаётся плотностью распределения приращения погрешности:

$$\Delta\gamma = \gamma(t) - \gamma_0;$$

$$\Delta(\Delta_{osp}) = \Delta_{osp}(t) - \Delta_{osp\,.0}. \qquad 9.4.1$$

Вероятность безотказной работы средства измерения в процессе эксплуатации – это вероятность того, что в течение времени t погрешность не выйдет за границы доверительного интервала с заданной доверительной вероятностью. Если не сделать запаса по метрологической надёжности, то вероятность безотказной работы будет очень мала. Чтобы увеличить вероятность безотказной работы, завод-изготовитель в нормативно-технической документации на средства измерения конкретного типа указывает класс точности и границы доверительного интервала с увеличением в 1,2–2,5 раза:

$$\gamma = (1,2 \div 2,5)\gamma_0; \quad \Delta_{osp} = (1,2 \div 2,5)\Delta_{osp.0}, \qquad 9.4.2$$

где γ_0 – действительный класс точности средства измерения на момент изготовления, γ – завышенный класс точности, вносимый в нормативно-техническую документацию на приборы данного типа, $\Delta_{osp.0}$ – действительное значение доверительного интервала на момент изготовления, Δ_{osp} – значение доверительного интервала, вносимое в паспорт приборов данного типа.

Наработка до отказа – продолжительность работы средства измерения от начала эксплуатации до первого метрологического отказа. На рис. 9.2.2 это момент времени t_{p1}.

Вероятность безотказной работы является функцией времени и задаётся аналитически, таблицей или графиком (рис. 9.2.2). Аналитическое представление вероятности безотказной работы:

$$P(t) = 1 - F(t) = \int_t^{\infty} p_н(t), \qquad 9.4.3$$

где $F(t)$ и $p_н(t)$ – интегральная и дифференциальная функции распределения наработки на отказ.

Например, если вероятность безотказной работы в течение 1000 часов составляет $P(t) = 0,97$, то это означает, что из большого числа средств измерения данного типа около 97 % проработает более 1000 часов.

Средней наработкой до отказа называется математическое ожидание наработки средства измерения до первого отказа:

$$t_{cp} = \int_0^{\infty} t p_н(t) dt. \qquad 9.4.4$$

Гамма-процентная наработка до отказа – это наработка (продолжительность работы средства измерения), в течение которой отказ прибора не возникает с вероятностью γ, выраженной в процентах:

$$P(t_\gamma) = 1 - F(t_\gamma) = 1 - \int_0^{t_\gamma} p_н(t) dt = \gamma. \qquad 9.4.5$$

При $\gamma = 100$ % гамма-процентная наработка называется установленной безотказной наработкой, при $\gamma = 50$ % – медианной наработкой.

Частота (интенсивность) отказов $\omega(t)$ определяется как условная плотность вероятности возникновения отказа средства измерения, которая находится для рассматриваемого момента времени, при условии, что до этого момента отказов не было:

$$\omega(t) = -\frac{1}{p(t)}\frac{dp(t)}{dt} = p_{н}(t) / \int_{t}^{\infty} p_{н}(t)dt. \qquad 9.4.6$$

Вероятность того, что средство измерения, проработавшее безотказно в течение времени t , откажет в последующий малый промежуток dt, равна $\omega(t)d(t)$.

Срок службы средства измерения – это календарная продолжительность его работы от начала эксплуатации до перехода в предельное состояние, определяемое как метрологическим, так и не метрологическим отказом. Он измеряется в годах или месяцах.

Средним сроком службы для типа прибора называется математическое ожидание срока службы:

$$\bar{T}_{сл} = \int_{0}^{\infty} t f_{сл}(t)dt, \qquad 9.4.7$$

где $f_{сл}(t)$ – плотность вероятностей распределения срока службы для совокупности средств измерения данного типа.

9.5. Метрологическая надёжность и межповерочные интервалы

Основным способом поддержания средства измерения в исправном состоянии является его периодическая поверка, при которой показания поверяемого прибора сравниваются с показаниями более точного прибора того же вида при измерении одного и того же значения физической величины. Поверка проводится метрологическими службами согласно принципам, заложенным в нормативно-технической документации на средство измерения. Периодичность поверки должна быть согласована с требованиями к надёжности средства измерения. Поверку необходимо проводить через оптимально выбранные интервалы времени, называемые межповерочными интервалами.

Момент наступления метрологического отказа может выявить только поверка, результаты которой позволят утверждать, отказ произошёл в период времени между двумя последними поверками. Продолжительность межповерочного интервала должна быть оптимальной, поскольку частые поверки приводят к излишним материальным и трудовым затратам на их организацию и проведение, а редкие поверки ведут к большим погрешностям из-за метрологических отказов.

Межповерочные интервалы устанавливаются в календарном времени для средств измерения, изменение метрологических характеристик у которых обусловлено старением и не зависит от интенсивности эксплуатации. Значение интервала рекомендуется выбирать из следующего ряда: 0,25; 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 12 K месяцев, где K – целое положительное число. Для средств измерения, у которых изменение метрологических характеристик связано не со старением, а с износом его элементов, зависящим от интенсивности его эксплуатации, межповерочные интервалы назначаются по времени наработки.

При установлении межповерочного интервала в первую очередь учитывается самая короткоживущая метрологическая характеристика, обычно это бывает основная инструментальная погрешность, включая систематическую, случайную и гистерезисную.

Выбор межповерочного интервала проводят:

- на основе статистики отказов;
- на основе экономического критерия;
- путём произвольного назначения с последующей корректировкой в течение всего срока службы средства измерения.

Выбор конкретного способа определения межповерочного интервала зависит в первую очередь от исходной информации о надёжности и стабильности средства измерения.

Первый способ является эффективным при условии, что известны показатели метрологической надёжности. Наиболее полно такая информация содержится в моделях, описывающих старение средств измерения (рис. 9.2.2). Такие модели могут быть получены для типов средств измерения, находящихся в длительной эксплуатации.

Применение способа расчёта межповерочного интервала времени, основанного на статистике скрытых и явных отказов, требует большого количества экспериментальных данных. Такого рода исследования трудоёмки и занимают значительное время, в течение которого прибор может морально устареть.

Определение межповерочного интервала по экономическому критерию заключается в выборе такого интервала, при котором можно минимизировать расходы на эксплуатацию средства измерения и можно устранять последствия от возможных ошибок, вызванных его не предусмотренными метрологическими отказами. Исходной информацией при выборе такого способа служат данные о стоимости поверки и ремонта средства измерения, а также от ущерба от его изъятия из эксплуатации и от использования метрологически неисправного прибора.

Основная сложность применения этого способа заключается в том, что затраты на поверку и ремонт легко определяются, а вот потери от скрытых метрологических отказов, как правило, неизвестны. Приходится прибегать к приближенным математическим моделям, описывающим затраты на эксплуатацию средств измерения со скрытыми метрологическими отказами в виде функций потерь.

Наиболее универсальным является способ, состоящий в произвольном назначении межповерочного интервала с последующей корректировкой его величины. В этом способе при минимальной исходной информации назначается произвольно начальный интервал, а результаты последующих поверок становятся исходными данными для его корректировки.

Основной трудностью при применении названного способа является назначение первого межповерочного интервала. Поиск выхода из затруднения осуществляется тремя путями. Во-первых, для определения длительности первого межповерочного интервала используются показатели метрологической надёжности поверяемого средства измерения, заложенные на заводе-изготовителе. Во-вторых, длительность первого интервала может быть приблизительно оценена из анализа данных по эксплуатации, аналогичных поверяемому по конструкции и технологии изготовления средств измерения. В-третьих, первый межповерочный интервал выбирается по рекомендациям государственных и ведомственных метрологических служб.

Последующие межповерочные интервалы выбираются путём корректировки первого интервала, с учётом результатов проведённых первых поверок большого числа однотипных средств измерения.

Данный способ установления межповерочного интервала рекомендуется методикой МИ 1872–88 «ГСИ. Межповерочные интервалы образцовых средств измерения. Методика определения и корректировки» международным стандартом ИСЩ 10012-1 «Требования, гарантирующие качество измерительного оборудования».

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое отказ средства измерения? Чем отличается метрологический отказ от неметрологического?
2. Дайте определение метрологической исправности средства измерения.
3. Что следует понимать под метрологической надёжностью средства измерения?
4. Чем вызвано изменение во времени метрологических характеристик средств измерения? Приведите вариант математического описания старения измерительного прибора.
5. Что называется межповерочным интервалом средства измерения?
6. Какие способы выбора межповерочных интервалов существуют?
7. Назовите нормативный документ, в котором рассматриваются вопросы выбора межповерочных интервалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешности результатов измерений. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
2. Рабинович С.Г. Погрешности измерения. – Л.: Энергия, 1978.
3. Кузнецов В.А., Якунина Г.В. Общая метрология. – М.: Изд-во стандартов, 2001.
4. Шишкин И.Ф. Теоретическая метрология. – М.: Изд-во стандартов, 1990.
5. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология. – М.: Логос, 2002.
6. Куртев Н.Д., Голубь Б.И., Анцыферов С.С. Основы метрологии. – М.: Мир, 2002.
7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969.
8. Долинский Е.Ф. Обработка результатов измерений. – М.: Изд-во стандартов, 1973.
9. Куликов Е.И. Методы измерения случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1986.
10. Новицкий П.В., Зограф И.А., Лабунец В.С. Динамика погрешностей средств измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1990.
11. Грановский В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения. – Л.: Энергоатомиздат, 1984.
12. Земельман М.А. Метрологические основы технических измерений. – М.: Изд-во стандартов, 1991.
13. Грановский В.А., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных. – Л.: Энергоатомиздат, 1990.
14. Пиотровский Я.М. Теория измерений для инженеров. – М.: Мир, 1989.
15. Екимов А.В., Ревяков М.И. Надёжность средств электроизмерительной техники. – Л.: Энергоатомиздат, 1991.

Учебное издание

ЖУКОВ Владимир Константинович

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор *О.Н. Свинцова*
Компьютерная верстка *О.Ю. Аршинова*
Дизайн обложки *О.Ю. Аршинова*
О.А. Дмитриев

Подписано к печати 29.12.2009. Формат 60х84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 10,47. Уч.-изд. л. 9,47.
Заказ 244-10. Тираж 200 экз.

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30. Тел./факс: 8(3822) 56-35-35, www.tpu.ru