

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С.Б. Могильницкий, Б.В. Горячев, А.А. Ботаки

ПРАКТИКА ПО ФИЗИКЕ

Рекомендовано Государственным образовательным учреждением высшего профессионального образования «Московский государственный технологический университет «Станкин» в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям: «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств», «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»

Издательство
Томского политехнического университета
2009

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
М74

Могильницкий С.Б.

М74 Практика по физике: учебное пособие / С.Б. Могильницкий, Б.В. Горячев, А.А. Ботаки; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 310 с.

ISBN 5-98298-511-8

В пособии кратко изложены все разделы курса общей физики; даны разъяснения основных законов, явлений и понятий физической механики, молекулярной физики, термодинамики, электродинамики, колебаний и волн, оптики, физики атомов и атомного ядра; рассмотрены примеры решения задач по соответствующим разделам курса; предложены задачи для самостоятельного решения по каждому разделу курса. Пособие соответствует программе курса физики высших технических учебных заведений.

Предназначено для студентов инженерных специальностей, изучающих курс физики в течение трех семестров.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

Рецензенты

Кандидат физико-математических наук,
доцент ТГУ
В.М. Кузнецов

Доктор физико-математических наук,
профессор ТУСУРа
А.А. Мицель

ISBN 5-98298-511-8 © ГОУ ВПО «Томский политехнический университет», 2009
© Могильницкий С.Б., Горячев Б.В., Ботаки А.А., 2009
© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ	6
1. МЕХАНИКА	7
1.1. Кинематика	7
1.2. Динамика материальной точки. Законы Ньютона	12
1.3. Движение абсолютно твердого тела	19
1.3.1. Момент инерции и энергия вращающегося тела	19
1.4. Законы сохранения в системе взаимодействующих тел	26
2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА	43
2.1. Элементы молекулярно-кинетической теории	45
2.2. Элементы термодинамики	49
2.3. Второе начало термодинамики	53
2.4. Элементы физической кинетики	56
3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ	91
3.1. Электростатика	91
3.1.1. Основные понятия и законы электростатики	91
3.1.2. Проводники и изоляторы в электрическом поле	98
3.2. Электрический ток, условия его существования, законы Ома и Джоуля–Ленца, правила Кирхгофа	116
3.2.1. Электрические цепи постоянного тока	119
3.2.2. Электрический ток в газах и жидкостях	121
3.3. Электромагнетизм	133
3.3.1. Индукция магнитного поля. Взаимодействие токов.	
3.3.2. Напряженность магнитных полей, создаваемых токами	135
3.3.3. Работа при перемещении проводника с током в магнитном поле. Электромагнитная индукция	138
3.3.4. Самоиндукция	138
3.3.5. Магнитные свойства вещества	139
3.3.6. Контур с током в магнитном поле. Энергия контура. Работа в магнитном поле.	
4. ОПТИКА	165
4.1. Элементы геометрической оптики	165

4.2. Фотометрические величины и законы	181
4.3. Волновая оптика	197
4.3.1. Интерференция света	198
4.3.2. Дифракция света	218
4.3.3. Поляризация света	234
5. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ	247
6. ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ	263
7. ЭФФЕКТ КОМПТОНА	269
8. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ	274
9. ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ	289
10. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА	296
10.1. Атомное ядро. Ядерные силы	296
10.2. Дефект массы. Энергия связи ядра	297
10.3. Ядерные превращения	298
10.4. Взаимодействие излучений с веществом	300
10.5. Классификация элементарных частиц	301
СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ	306
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	308

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении курса физики большое значение придается правильному применению получаемых теоретических знаний, что, в частности, проявляется в умении решать задачи. Этому и посвящено предлагаемое учебное пособие. Содержание и расположение материала в нем соответствует программе курса физики для технических университетов, но этот курс излагается кратко, местами – конспективно. Главная цель – сообщить сведения, важные при решении задач. Изложение материала ведется на основе Международной системы единиц (СИ). Формированию навыков работы с задачами способствует значительное число физических задач, снабженных решениями. После краткого рассмотрения теоретического материала в каждом разделе приводятся примеры решения типовых задач, а также снабженные ответами задачи для самостоятельного решения. Подобный замысел позволяет использовать пособие при проведении семинарских и практических занятий, а также для самостоятельной работы студентов в течение семестра и при подготовке к экзаменам. По каждой теме представлены задачи приблизительно одинаковой степени трудности, предназначенные для самостоятельного решения студентами во время аудиторных занятий. В ответах в основном используются кратные и дольные единицы, образованные от единиц СИ. Для удобства пользования в конце пособия приведены необходимые справочные данные.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Вникнув в условие задачи, необходимо выполнить краткую запись ее условия, выразить все данные в СИ.
2. Всякую задачу, требующую вычислений, следует решать не только в числах, но и в общей алгебраической форме, заменяя данные и числовые величины буквенными знаками. Полученные в общем виде более сложные результаты следует по возможности подробно исследовать, выясняя влияние тех или других величин, входящих в условие задачи.
3. Для оценки получаемых результатов для многих числовых задач полезно предварительно попробовать дать приблизительный ответ, проверить правильность его размерности.
4. При числовых расчетах следует приобретать навык в различных приемах сокращенных вычислений.
5. Результаты решений следует проверять, для чего в различных задачах могут служить самые разнообразные приемы. В частности, при проверке числовых расчетов можно повторить вычисления с округленными числами.
6. При решении многих задач полезно по возможности правильно и тщательно делать соответствующие чертежи.
7. Как окончательные результаты решений, так и промежуточные расчеты желательно сохранять, чтобы пользоваться ими в случае надобности при решении других задач.

1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика

Механика — это наука о машинах, механических движениях материальных тел и происходящих при этом взаимодействиях между ними, а также об искусстве построения машин.

Механическое движение — это изменение с течением времени взаимного положения тел в пространстве.

Классическая механика, в основе которой лежат законы Ньютона, изучает движение материальных тел, скорости которых значительно меньше скорости распространения света. Движение тел со скоростями, близкими скорости света, рассматривает *релятивистская механика*, другое ее название — *специальная теория относительности*. Скорость света принято обозначать латинской буквой *c*, в вакууме скорость света $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Рассмотрением движения элементарных частиц занимается *квантовая механика*.

Для описания движения материальных тел вводятся абстрактные понятия, отражающие те или иные реальные свойства тел:

1. *Материальная точка* — это имеющий массу объект, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.
2. *Абсолютно твердое тело* — это тело, у которого расстояние между любыми его точками остается постоянным.
3. *Абсолютно упругое тело* — это тело, которое после прекращения на него внешнего механического воздействия, полностью восстанавливает свою первоначальную форму и размеры.
4. *Абсолютно неупругое тело* — это тело, которое после прекращения на него внешнего воздействия остается в деформированном состоянии.
5. *Пространство и время*. Все тела существуют и движутся в пространстве и во времени. Пространство выражает порядок сосуществования объектов, время — порядок смены явлений.

6. *Система отсчета* в механике — это совокупность тел отсчета, связанных с ними системы координат и часов, по отношению к которым изучается движение материальных точек или тел. В классической механике свойства пространства описываются геометрией Евклида, а ход времени одинаков во всех системах отсчета.

Сведения о векторах

Векторными называются величины, характеризующиеся не только численным значением (модулем), но и направлением. На чертежах векторы изображаются в виде прямолинейных отрезков со стрелкой на конце. Длина отрезка определяет модуль вектора, стрелка — его направление. *В тексте векторы обозначают буквами жирного шрифта или над буквой ставится стрелка.*

Сложение векторов осуществляется по следующей схеме: начало каждого последующего вектора совмещают с концом предыдущего, результирующий вектор проводится из начала первого в конец последнего. Эта операция называется правилом многоугольника.

Умножение векторов производится на скалярную или векторную величину. *Перемножение векторов может быть векторным или скалярным.*

Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , определяемый формулой

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} \ \vec{b}] = (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha) \cdot \vec{n},$$

где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ — модули перемножаемых векторов, α — угол между перемножаемыми векторами, \vec{n} — единичный вектор (его модуль равен единице), направленный перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы-сомножители. *Направление вектора \vec{n} , а также и результирующего вектора \vec{c} можно найти по правилу правой руки. **Захватив четырьмя сгибаемыми в кулак пальцами сначала умножаемый вектор, а затем тот, на который умножают, по отогнутому большому пальцу определяют направление результирующего вектора.*** На чертежах векторы, направленные к нам, обозначают точкой (\bullet), а от нас — крестиком (\times).

Скалярное произведение двух векторов \vec{a} и \vec{b} дает скалярную величину c и вычисляется по формуле

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a} \ \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha.$$

Радиус-вектором \vec{r} некоторой точки A называется вектор, проведенный из выбранного начала координат в данную точку (рис. 1.1). Его

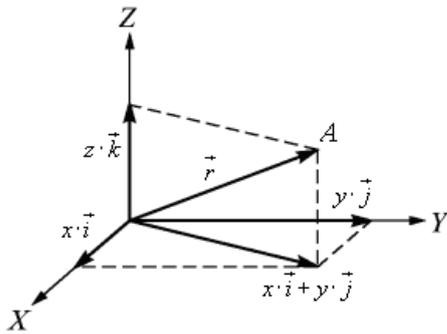


Рис. 1.1. Разложение радиус-вектора на составляющие вдоль координатных осей

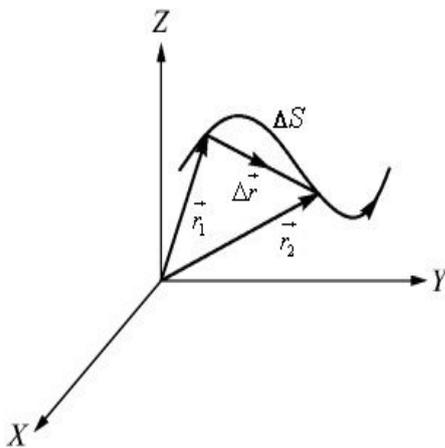


Рис. 1.2. Траектория и перемещение материальной точки

проекции на координатные оси равны декартовым координатам данной точки x, y, z . Умножив их на единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, вектор \vec{r} можно представить в виде $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, а его модуль $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Линейные кинематические характеристики

Материальная точка при своем движении описывает пространственную кривую, называемую *траекторией*, иллюстрация движения материальной точки приведена на рис. 1.2. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное или криволинейное движение.

В момент времени t_1 координаты точки могут быть определены радиус-вектором \vec{r}_1 , в момент времени t_2 — радиус-вектором \vec{r}_2 . Пройденное точкой за время $t_2 - t_1$ расстояние ΔS , отсчитанное вдоль траектории, называется *путь*. Прямолинейный отрезок $\Delta\vec{r}$, соединяющий начальное и конечное положение материальной точки, называют *вектором перемещения*, он равен

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k}.$$

Заметим, что величина ΔS , строго говоря, не равна модулю $|\Delta\vec{r}|$. Только когда $\Delta S \rightarrow 0$, Δr по модулю приближается к ΔS .

Средняя скорость движения точки равна

$$v_{cp} = \Delta S / (t_2 - t_1) = \Delta S / \Delta t.$$

Средняя скорость перемещения точки находится как

$$v_{cp}^r = |\Delta\vec{r}| / (t_2 - t_1) = |\Delta\vec{r}| / \Delta t.$$

Скоростью точки в момент времени t называется вектор \vec{v} , равный первой производной по времени от вектора перемещения

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\vec{r} / \Delta t = d\vec{r} / dt.$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения материальной точки. Вектор скорости можно представить через его проекции на координатные оси

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}.$$

или через производные по времени от проекций вектора \vec{r} на оси координат

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = (dx/dt) \cdot \vec{i} + (dy/dt) \cdot \vec{j} + (dz/dt) \cdot \vec{k}.$$

Следовательно,

$$v_x = dx/dt, v_y = dy/dt, v_z = dz/dt,$$

а модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

При неравномерном движении скорость изменяется во времени. Изменение скорости в единицу времени называется *ускорением*. Мгновенное ускорение, т. е. ускорение в данной точке, равно первой производной по времени от скорости:

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = (dv_x/dt) \cdot \vec{i} + (dv_y/dt) \cdot \vec{j} + (dv_z/dt) \cdot \vec{k} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$

а модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При криволинейном движении материальной точки вектор ускорения удобно разложить на две составляющие. Одна из них \vec{a}_τ — тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории движения, а другая \vec{a}_n — нормальное или центростремительное ускорение, направленное перпендикулярно к \vec{a}_τ , рис. 1.3.

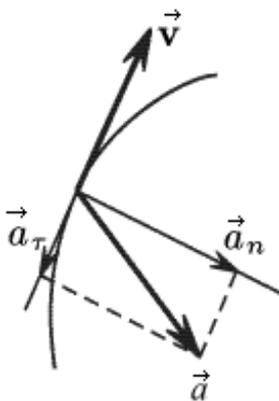


Рис. 1.3. Разложение ускорения на тангенциальную и нормальную составляющие

Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по величине, нормальное — по направлению. Изображенное на рисунке направление вектора тангенциального ускорения противоположным направлением вектора мгновенной скорости означает, что в рассматриваемом движении скорость убывает по величине. Модуль полного ускорения можно найти как $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$. При этом модуль тангенциального ускорения равен $a_\tau = v^2/R$, где v — скорость, R — радиус кривизны траектории в данной точке. Криволинейную траекторию любой формы можно представить себе как совокупность элемен-

тарных участков, каждый из которых рассматривается как дуга окружности некоторого радиуса R .

Равнопеременное движение – это движение с постоянным ускорением. Для равнопеременного поступательного движения, если начало отсчета координаты тела начинается от положения, в котором оно находилось в момент начала отсчета времени, справедливы следующие соотношения между модулями перемещения, скорости и ускорения:

$$a = \text{const}; v_t = v_0 + at; S = v_0 \cdot t + at^2/2; v_t^2 - v_0^2 = 2aS.$$

Индексы «0» относятся к началу отсчета времени, а индексы « t » – к моменту времени t . В системе СИ размерности времени, перемещения, скорости и ускорения соответственно – секунда (с), метр (м), м/с, м/с².

Угловые кинематические характеристики

Всякое *твердое тело* можно представить в виде совокупности бесконечно большого числа материальных точек. Если не учитывать деформации, то можно говорить об *абсолютно твердом теле*, т. е. о системе материальных точек, расстояния между которыми не изменяются. При вращении *абсолютно твердого тела* вокруг неподвижной оси все его точки описывают окружности. Линейные скорости этих точек различны, но угловая скорость для всех одинакова и поэтому может характеризовать движение всего тела. Для простоты рассмотрим движение, происходящее в одной плоскости (например, в плоскости OXY декартовой системы координат). Положение точки задается радиус-вектором \vec{r} , соединяющим ее с центром вращения, а также углом поворота φ радиус-вектора \vec{r} по отношению к направлению оси X . Центр вращения выбирается в качестве начала координат. Чтобы через изменение угла поворота $\Delta\varphi$ задать не только изменение положения, но и направление движения материальной точки, используется псевдовектор $\Delta\vec{\varphi}$. Ему приписывается направление, перпендикулярное плоскости, в которой лежит дуга ΔS , по которой движется точка. Для определения направления вектора углового перемещения $\Delta\vec{\varphi}$ служит правило буравчика (правого винта): *вращение рукоятки буравчика должно совпадать с движением точки, тогда поступательное движение буравчика укажет направление вектора $\Delta\vec{\varphi}$* . Угловой скоростью называют вектор $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$. Численно угловая скорость $\vec{\omega}$ равна углу поворота радиус-вектора точки в единицу времени, или углу поворота тела в единицу времени, если речь идет о вращении тела. Вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения. Угловое ускорение – это быстрота изменения угловой ско-

рости. Его находят из соотношения $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt = d^2\vec{\varphi}/dt^2$. При ускоренном движении направление вектора углового ускорения совпадает с направлением вектора угловой скорости. При замедленном – противоположное. Линейные и угловые кинематические характеристики точки, движущейся по окружности, связаны между собой простыми соотношениями. Для модулей рассматриваемых величин эти соотношения имеют вид:

$$S = R \cdot \varphi; v = R \cdot \omega; a = R \cdot \varepsilon.$$

Угловое перемещение φ измеряется в радианах. Угол, измеренный в радианах, находится через отношение стягивающей его дуги к ее радиусу. Радиан – безразмерная величина. Таким образом, размерность угловой скорости будет c^{-1} , а размерность углового ускорения – c^{-2} .

1.2. Динамика материальной точки. Законы Ньютона

Динамика изучает движение тел с учетом причин, вызвавших это движение. Основой классической механики являются законы Ньютона, сформулированные в результате обобщения большого количества экспериментальных фактов.

Первый закон Ньютона: всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Ускорение $\vec{a} = 0$, если действующая на тело результирующая сила $\vec{F} = 0$.

Свойство тел при отсутствии на них воздействия сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется *инерцией*. Поэтому первый закон называют также *законом инерции*. Он выполняется не во всех системах отсчета. Те системы отсчета, в которых он выполняется, называются *инерциальными*. Система отсчета будет инерциальной, если она покоится или движется с постоянной по величине и направлению скоростью по отношению к какой-либо другой инерциальной системе. Система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, инерциальной не является, но эффекты, обусловленные вращением Земли вокруг собственной оси и вокруг Солнца, при решении многих задач пренебрежимо малы, поэтому ее можно считать инерциальной.

Второй закон Ньютона: скорость изменения результирующего импульса тела \vec{P} равна действующей на тело результирующей силе \vec{F} :

$$d\vec{P}/dt = \vec{F}.$$

Это уравнение еще называют законом движения. Поскольку импульс тела $\vec{P} = m \cdot \vec{v}$, где m – масса тела, а \vec{v} – скорость, для тела постоянной массы возможен другой вариант записи второго закона Ньютона:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}.$$

Сила и ускорение материальной точки представляют собой векторы одинакового направления. При прямолинейном движении векторы скорости и ускорения, а значит, и вектор силы направлены вдоль прямой, по которой происходит движение материальной точки. Если сила равна нулю, то материальная точка или покоится, или движется прямолинейно с постоянной скоростью, поскольку ускорение также равняется нулю. Таким образом, первый закон Ньютона является частным случаем второго.

Третий закон Ньютона: силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, направлены вдоль одной прямой, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Обратите внимание, что здесь речь идет о силах, приложенных к различным телам. Этот закон определяет характер взаимодействия между материальными точками (телами).

Импульс силы $\vec{F} \cdot \Delta t$ позволяет вычислять величину сил реакции, возникающих при соударении. Импульс силы можно связать с изменением импульса тела, воспользовавшись вторым законом Ньютона и записав его следующим образом:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{P} = \Delta(m \cdot \vec{v}).$$

Инерциальные системы отсчета. Преобразования Галилея

Инерциальными называются **системы отсчета**, в которых **выполняется первый закон Ньютона** (закон инерции). Но и остальные **законы Ньютона тоже сформулированы для инерциальных систем отсчета**. Любая другая система отсчета, движущаяся ускоренно по отношению к идеальной инерциальной системе отсчета, называется **неинерциальной**. Инерциальных систем отсчета бесконечное множество. Всякая другая система отсчета, движущаяся по отношению к инерциальной прямолинейно и равномерно, также будет инерциальной. Для большинства задач система отсчета, связанная с Землей (**лабораторная система отсчета**), является хорошим приближением к инерциальной. Причиной ускорения лабораторной системы отсчета является вращение Земли во-

круг своей оси и вокруг Солнца. Ускорения, соответствующие этим движениям, равны $3,4 \cdot 10^{-2}$ и $6 \cdot 10^{-3}$ м/с², т. е. много меньше ускорения свободного падения $g \approx 9,8$ м/с². Система отсчета, начало координат которой совмещено с центром Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд, с высокой степенью точности может считаться инерциальной. Такую систему называют гелиоцентрической. Любая другая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно этой системы, также будет инерциальной. Переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой с постоянной скоростью v_0 , осуществляется с помощью преобразований Галилея. Пусть одна из систем отсчета, назовем её K , будет неподвижна, а другая K' будет двигаться со скоростью v_0 относительно K в направлении, противоположном направлению оси x . Выберем координатные оси x, y, z системы K и оси x', y', z' системы K' так, чтобы в начальный момент времени соответствующие оси обеих систем совпали. Тогда связь между координатами любой точки в системе x, y, z и системе x', y', z' определится следующими соотношениями:

$$x' = x + v_0 \cdot t; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t.$$

Совокупность записанных уравнений называют преобразованиями Галилея. Время в обеих системах отсчета течет одинаково. Найти связь между скоростями точки в системах K и K' можно, продифференцировав уравнения Галилея по времени. Отсюда следует закон сложения скоростей: $v' = v + v_0$, где v' и v — скорости точки в штрихованной и не штрихованной системах отсчета. Продифференцировав по времени последнее соотношение, получим для ускорений $a' = a$. Ускорение тела во всех инерциальных системах отсчета будет одинаковым. Уравнение движения (второй закон Ньютона) не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. В этом состоит *ограниченный принцип относительности*.

Сила. Масса

Принято различать четыре вида взаимодействий, которые называют фундаментальными: *гравитационное, электромагнитное, сильное или ядерное* (объясняющее связь частиц в атомном ядре) и *слабое* (ответственное за распад элементарных частиц). В рамках классической механики имеют дело с силами, обусловленными первыми двумя взаимодействиями, а также с упругими силами и силами трения. Эти силы не являются фундаментальными, их происхождение объясняется электромагнитными взаимодействиями.

Масса — это физическая величина, определяющая *инерционные и гравитационные* свойства тела. Понятие инертной массы введено Ньютоном в определение импульса $\vec{P} = m \cdot \vec{v}$ и силы $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. В уравнении движения $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ масса служит мерой инертности тела. Чем больше масса, тем большая сила требуется для сообщения телу одного и того же ускорения. Ньютоном был сформулирован **закон всемирного тяготения**. Для двух точечных масс m_1 и m_2 , находящихся друг от друга на расстоянии R , он записывается как

$$F = G \cdot m_1 \cdot m_2 / R^2.$$

Здесь $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ — гравитационная постоянная, впервые экспериментально определенная английским физиком Генри Кавендишем. В гравитационных взаимодействиях *масса* выступает как *источник поля тяготения* или, другими словами, характеризует способность тела притягивать другие тела. Эксперименты показывают, что **инертная и гравитационная массы равны**. Этот фундаментальный закон природы называют *принципом эквивалентности*. В системе СИ единицей массы является *килограмм* (кг), а силы — *ньютон* (Н); $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$.

Центр масс

При рассмотрении системы материальных тел *силы*, действующие на какое-либо тело со стороны других тел, входящих в эту систему, называют *внутренними*. Силы, обусловленные действием тел, не входящих в рассматриваемую систему, называют *внешними*. *Механическую систему* называют *замкнутой или изолированной*, если на каждое из тел, входящих в нее, *не действуют внешние силы*. Движение замкнутой системы взаимодействующих частиц может быть достаточно сложным, но в такой системе обязательно имеется точка, движущаяся прямолинейно и с постоянной скоростью. Эта точка называется *центром масс*. Положение центра масс по отношению к неподвижной лабораторной системе отсчета определяется радиус-вектором \vec{R}_{0i} , проведенным из ее начала. Его можно найти из соотношения

$$\vec{R}_{0i} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i / \sum m_i .$$

Фактически центр масс — это некое среднее положение системы материальных точек, при определении которого их массы m_i используются как весовые коэффициенты, \vec{r}_i — радиус-вектор i -ой точки, проведенный из начала координат лабораторной системы отсчета. Если наблюдатель покоится по отношению к центру масс, то говорят, что он

находится в *системе центра масс*. Взяв производные по времени от обеих частей записанного выражения, получим:

$$\frac{d \vec{R}_{0i}}{dt} = \frac{\sum m_i \cdot d \vec{r}_i / dt}{\sum m_i}.$$

Левая часть последнего равенства представляет собой скорость центра масс. Числитель правой части — это полный импульс, а знаменатель — полная масса системы. Поскольку импульс и масса замкнутой системы не изменяются со временем, мы таким образом доказали постоянство скорости центра масс замкнутой системы по величине и направлению.

Если на механическую систему действуют внешние силы, центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

Работа и механическая энергия

Энергия — это количественная мера различных форм движения материи и соответствующих им взаимодействий. Для различных форм движения принято говорить о различных видах энергии: механической, внутренней, электромагнитной, химической, ядерной. В механике имеют дело с механической энергией, являющейся мерой механического движения рассматриваемой системы. Изменения механической энергии тела происходят в результате воздействия на него других тел. Мэру этого воздействия определяют соответствующие силы. Для количественного описания процесса изменения энергии тела в механике вводится понятие, называемое *работой* силы. Элементарная работа dA силы \vec{F} , совершаемая над телом на малом перемещении $d\vec{r}$, определяется скалярным произведением \vec{F} на $d\vec{r}$:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos \alpha = F_r \cdot dr,$$

где α — угол между направлением силы \vec{F} и вектором перемещения $d\vec{r}$, $F_r = F \cdot \cos \alpha$ — проекция вектора \vec{F} на направление $d\vec{r}$. Работу, совершаемую на конечном перемещении тела, можно найти, интегрируя записанное соотношение. Единицей измерения энергии и работы является *джоуль (Дж)*; 1 Дж — это работа, совершаемая силой в 1 Н на пути в 1 м (1 Дж = 1 Н·м). Если зависимость силы F от перемещения r задана графически, работу на некотором участке перемещения можно найти как площадь под графиком зависимости F от r . Сила \vec{F} , действующая на те-

ло, называется **консервативной** (или потенциальной), если работа этой силы зависит только от начального и конечного положения тела. *Работа консервативной силы не зависит от траектории движения тела. По замкнутой траектории работа консервативной силы равна нулю. Все фундаментальные силы консервативны.* Гравитационные и электрические силы – это примеры консервативных сил.

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, введено понятие **мощности**. Средняя **мощность** N – это физическая величина, равная отношению работы ΔA к промежутку времени Δt , за который она совершается: $N = \Delta A / \Delta t$. Когда тело движется с постоянной скоростью v под действием приложенной силы F , мощность N может быть найдена как $N = \Delta A / \Delta t = F_{\gamma} \cdot \Delta r / \Delta t = F_{\gamma} \cdot v$. Мощность равна проекции силы на направление перемещения, умноженной на скорость тела. Если за одинаковые промежутки времени Δt совершается неодинаковая работа ΔA , говорят о мгновенной мощности, определяемой соотношением $N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}$. Единица мощности – ватт (Вт); 1 Вт – это мощность, при которой за время 1 с совершается работа в 1 Дж (1Вт = 1Дж/с).

Кинетическая и потенциальная энергии

Кинетическая энергия тела – это мера энергии его механического движения. Изменение кинетической энергии dW_k тела с массой m под действием силы \vec{F} равно работе, совершаемой этой силой:

$$dW_k = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Сила $\vec{F} = d\vec{P} / dt$, импульс тела $\vec{P} = m \cdot \vec{v}$. Отсюда следует, что кинетическая энергия тела, движущегося со скоростью \vec{V} , равна

$$W_k = P^2 / (2m) = m \cdot v^2 / 2.$$

Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий отдельных тел, входящих в эту систему.

Потенциальной энергией механической системы называется величина, равная работе, которую совершают все действующие на систему консервативные (потенциальные) силы при переводе системы из рассматриваемого состояния в состояние, где потенциальная энергия становится равной нулю. Это нулевое положение системы, для которого заданы координаты ее материальных точек, выбирается условно. Тогда работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы

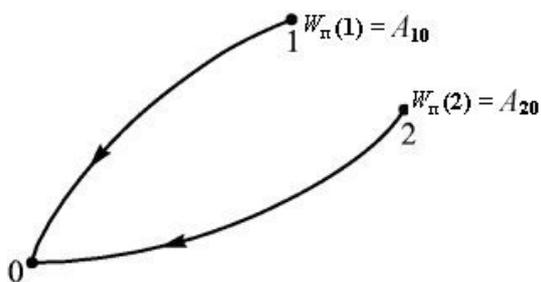


Рис. 1.4. Определение потенциальной энергии

Иными словами, потенциальная энергия W_{π} системы является функцией только ее координат. Иллюстрация этого приведена на рис. 1.4.

Если за нулевое принять положение 0, то в положении 1 система будет обладать потенциальной энергией $W_{\pi} = A_{10}$. Эта энергия равна работе консервативных сил при переходе системы из положения 1 в положение 0.

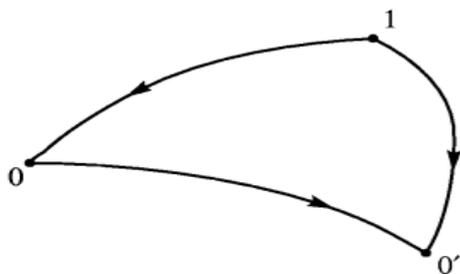


Рис. 1.5. Потенциальная энергия зависит от выбора нулевого положения

В положении 2 система будет обладать потенциальной энергией $W_{\pi} = A_{20}$, равной работе консервативных сил при переходе системы из положения 2 в положение 0. Из определения потенциальной энергии следует, что она зависит от выбора нулевого уровня (рис. 1.5). Если же за нулевое принять положение $0'$, то потенциальная энергия в точке 1 примет другое значение — $W' = A'_{10}$. При замене одного нулевого положения другим потенциальная энергия системы изменяется на постоянную величину. Если считать потенциальную энергию в нулевом положении равной не нулю, а некоторому значению, тогда вместо *потенциальной энергии* следует говорить о ее *разности* в двух состояниях системы.

Таким образом, определение потенциальной энергии производится с точностью до произвольной постоянной. Это не является проблемой, поскольку на практике важна разность потенциальных энергий. Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии. С другой стороны, при отсутствии потерь эта работа равна приращению кинетической энергии системы. Сумма кинетической и потенциальной энергий системы называется ее *полной механической энергией*. В системе с одними только консервативными силами полная механическая

из некоторого положения в нулевое, называется *потенциальной энергией* W_{π} системы в этом положении. Работа консервативных сил не зависит от пути перехода, а поэтому потенциальная энергия системы при фиксированном нулевом положении зависит только от координат материальных точек системы в рассматриваемом положении.

Работа консервативных сил при переходе системы из положения 1 в положение 0. В положении 2 система будет обладать потенциальной энергией $W_{\pi} = A_{20}$, равной работе консервативных сил при переходе системы из положения 2 в положение 0. Из определения потенциальной энергии следует, что она зависит от выбора нулевого уровня (рис. 1.5). Если же за нулевое при-

энергия остается неизменной. Могут происходить лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии системы измениться не может. Это утверждение называется *законом сохранения механической энергии*.

Рассмотрим вычисление потенциальной энергии тела массой m , находящегося на высоте h над поверхностью Земли. Если за ноль принять потенциальную энергию тела, лежащего на земле, то на высоте h она будет равна работе, которую нужно совершить для его перемещения туда с бесконечно малой скоростью. Такое перемещение производится под действием постоянной силы, равной силе тяжести mg и противоположной ей по направлению. Очевидно, что потенциальная энергия может быть найдена как $W_{\text{п}} = m \cdot g \cdot h$. Чем дальше от поверхности Земли находится тело, тем больше его потенциальная энергия. Разумеется, такой подход к вычислению потенциальной энергии применим только в тех случаях, когда расстояние от поверхности Земли невелико.

Потенциальную энергию растянутой (или сжатой) пружины вычисляют по формуле

$$W = k \cdot x^2 / 2,$$

где x — деформация, k — жесткость пружины. За нулевой уровень принимается потенциальная энергия недеформированной пружины.

Потенциальная энергия гравитационного притяжения двух точечных масс — m и M — определяется соотношением

$$W = - G \cdot M \cdot m / r,$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ — гравитационная постоянная, r — расстояние между центрами точечных масс. Энергия взаимодействия масс, находящихся бесконечно далеко друг от друга, принимается за ноль. Обратите внимание на знак «минус»: по мере сближения точечных масс потенциальная энергия убывает, возрастая при этом по абсолютной величине.

1.3. Движение абсолютно твердого тела

1.3.1. Момент инерции и энергия вращающегося тела

Для описания движения твердого тела используем две системы координат. Одну — неподвижную инерциальную систему x, y, z , а другую — движущуюся, x', y', z' , жестко связанную с твердым телом (рис. 1.6). Начало координат движущейся системы координат удобно совместить с центром масс тела.

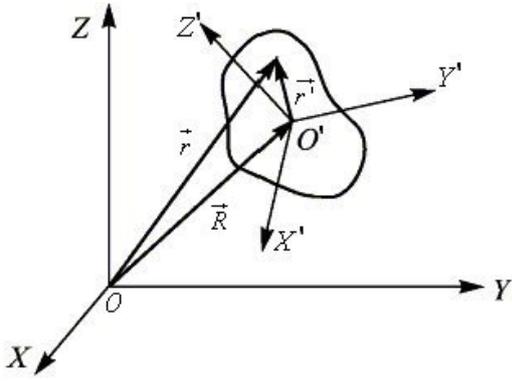


Рис. 1.6. Твердое тело и две системы координат, определяющие его положение в пространстве

Теперь положение движущейся системы координат определяет положение тела в неподвижной системе координат. Радиус-вектор \vec{R} указывает положение начала O' движущейся системы координат. Ориентация осей этой системы — x', y', z' — относительно неподвижной определяется тремя независимыми углами. В итоге вместе с тремя компонентами вектора \vec{R} мы имеем шесть координат. Таким образом, всякое твердое тело представляет собой механическую систему с шестью степенями свободы.

Рассмотрим бесконечно малое перемещение твердого тела. Такое перемещение можно представить в виде суммы двух составляющих. Одна из них — это бесконечно малый параллельный перенос тела, когда все его точки смещаются одинаково, центр масс (начало координат подвижной системы) переходит из начального положения в конечное. Ориентация осей подвижной системы координат остается неизменной. Вторая составляющая движения — бесконечно малый поворот вокруг центра масс, в результате которого твердое тело переходит в конечное положение. Очевидно, что порядок этих двух операций не важен. Радиус-вектор произвольной точки твердого тела в подвижной системе координат обозначим \vec{r}' , а радиус-вектор той же точки в неподвижной системе — \vec{r} . Тогда бесконечно малое смещение $d\vec{r}$ точки складывается из перемещения $d\vec{R}$ центра масс и перемещения $[d\vec{\varphi} \times \vec{r}']$ тела относительно центра масс при повороте на бесконечно малый угол $d\vec{\varphi}$ вокруг точки O' :

$$d\vec{r} = d\vec{R} + [d\vec{\varphi} \times \vec{r}'].$$

Разделив это равенство на интервал времени dt , в течение которого произошло перемещение, и обозначив скорости

$$d\vec{r}/dt = \vec{v}, \quad d\vec{R}/dt = \vec{V}, \quad d\vec{\varphi}/dt = \vec{\omega},$$

получим соотношение между ними

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\omega} \times \vec{r}'].$$

Вектор \vec{V} — это скорость движения центра масс твердого тела. Ее называют также *скоростью поступательного движения* твердого тела. Вектор $\vec{\omega}$ называется *угловой скоростью вращения* твердого тела. Его направление и направление вектора углового перемещения $d\vec{\varphi}$ совпадают

с направлением оси вращения в данный момент времени. Таким образом, скорость \vec{v} любой точки тела (относительно неподвижной системы координат) может быть выражена через поступательную скорость тела \vec{V} и угловую скорость его вращения $\vec{\omega}$.

В неподвижной лабораторной системе отсчета полная кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии, измеренной в системе центра масс, и кинетической энергии центра масс, определяемой из соотношения

$$W_{\text{ц.м.}}^{\text{кин.}} = m \cdot v_{\text{ц.м.}}^2 / 2.$$

Здесь m — полная масса системы, а $v_{\text{ц.м.}}$ — скорость ее центра масс в лабораторной системе отсчета. В системе центра масс твердое тело может обладать лишь вращательной кинетической энергией.

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси все его точки с массами m_i описывают окружности различных радиусов r_i , обладая при этом различными линейными скоростями v_i . Однако угловая скорость ω у всех этих точек одинакова. Кинетическую энергию вращающегося тела можно найти как сумму энергий его элементарных составных частей:

$$W_{\text{к}}^{\text{вр.}} = (m_1 \cdot v_1^2 / 2) + (m_2 \cdot v_2^2 / 2) + (m_3 \cdot v_3^2 / 2) + \dots$$

Поскольку $v_i = r_i \cdot \omega$, то оказывается, что

$$W_{\text{к}}^{\text{вр.}} = (\omega^2 / 2) \cdot [(m_1 \cdot r_1^2) + (m_2 \cdot r_2^2) + (m_3 \cdot r_3^2) + \dots].$$

Сумма произведений масс элементарных частей тела на квадраты их расстояний до определенной оси называется **моментом инерции** тела относительно этой оси:

$$J = (m_1 \cdot r_1^2) + (m_2 \cdot r_2^2) + (m_3 \cdot r_3^2) + \dots$$

Момент инерции тела является мерой его инертности при вращательном движении, подобно тому, как масса является мерой инертности при поступательном движении. Момент инерции зависит от распределения массы тела относительно оси вращения. Для вычисления момента инерции относительно некоторой оси сплошное твердое тело мысленно разбивают на большое число малых элементов объема dV — материальных точек (рис. 1.7). Тогда момент инерции элемента объема dV относительно оси вращения OO' находится как

Для вычисления момента инерции относительно некоторой оси сплошное твердое тело мысленно разбивают на большое число малых элементов объема dV — материальных точек (рис. 1.7). Тогда момент инерции элемента объема dV относительно оси вращения OO' находится как

$$dJ = dm \cdot r_i^2 = \rho \cdot r_i^2 dV,$$

а полный момент инерции тела из соотношения

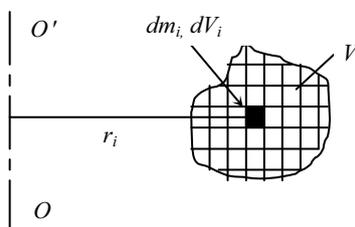


Рис. 1.7. Нахождение момента инерции абсолютно твердого тела

$$J = \int_V dJ = \int_V \rho \cdot r^2 dV,$$

где $dm = \rho \cdot dV$ – масса элемента объема dV ; r_i – расстояние до оси вращения; ρ – плотность вещества в элементе объема dV . Таким образом, задача нахождения момента инерции тела относительно оси вращения сводится к интегрированию.

Следует подчеркнуть, что момент инерции не зависит ни от момента внешних сил \vec{M} , ни от углового ускорения.

Момент инерции является скалярной величиной и измеряется в $\text{кг} \cdot \text{м}^2$. Использование момента инерции позволяет кинетическую энергию вращения записать в виде соотношения:

$$W_{\text{к}}^{\text{сп.}} = J \cdot \omega^2 / 2.$$

Момент инерции тела зависит от распределения массы, размеров и формы тела. Для тел правильной геометрической формы момент инерции относительно осей симметрии легко вычисляется по формулам, которые приводятся ниже.

Момент инерции материальной точки массой m , расположенной на расстоянии r от оси, определяется соотношением

$$J = m \cdot r^2.$$

Момент инерции кольца (тонкого обруча, тонкостенного цилиндра) массой m относительно оси симметрии, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости кольца, определяется соотношением

$$J = m \cdot R^2, \text{ где } R \text{ – радиус кольца.}$$

Момент инерции сплошного однородного диска (однородного сплошного цилиндра) массой m относительно оси симметрии, проходящей перпендикулярно плоскости диска через центр масс, определяется соотношением

$$J = m \cdot R^2 / 2,$$

где R – радиус диска.

Момент инерции сплошного однородного шара массой m относительно оси, проходящей через его центр, определяется соотношением

$$J = (2/5) \cdot m \cdot R^2,$$

где R – радиус шара.

Момент инерции сплошного однородного стержня массой m относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно его длине,

$$J = m \cdot l^2 / 12,$$

где l – длина стержня.

Часто при решении задач требуется знать момент инерции относительно оси, не проходящей через центр масс тела. В ряде случаев его нахождение не представляет серьезных трудностей, если воспользоваться теоремой Гюйгенса—Штейнера. Момент инерции J_a тела относительно произвольной оси a равен сумме момента инерции $J_{a'}$ этого тела относительно оси a' , параллельной оси a и проходящей через центр масс, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями a и a' (аналогично для произвольной системы материальных точек):

$$J_a = J_{a'} + md^2.$$

Очевидно, что момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, меньше момента инерции относительно любой параллельной ей оси.

Момент силы

Моментом силы \vec{M}_i относительно точки O называется векторное произведение радиус-вектора \vec{r}_i , проведенного из точки O в точку приложения силы, на вектор силы \vec{F}_i : $\vec{M}_i = [\vec{r}_i \vec{F}_i]$. Проекции \vec{M}_{ix} , \vec{M}_{iy} , \vec{M}_{iz} вектора \vec{M}_i на оси прямоугольной декартовой системы координат с центром в точке O связаны с проекциями на эти оси векторов \vec{r}_i и \vec{F}_i соотношениями: $M_{ix} = y_i F_{iz} - z_i F_{iy}$, $M_{iy} = z_i F_{ix} - x_i F_{iz}$, $M_{iz} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix}$, где x_i , y_i , z_i — координаты точки приложения силы \vec{F}_i .

Моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная проекции на данную ось вектора момента силы относительно какой-либо точки той же оси.

Главным моментом \vec{M} системы k сил называется вектор, равный сумме векторов моментов всех сил относительно центра приведения:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^k \vec{M}_i = \sum_{i=1}^k [\vec{r}_i \vec{F}_i].$$

В общем случае действие на абсолютно твердое тело некоторой системы сил эквивалентно действию главного момента \vec{M} и главного вектора \vec{F} системы сил, равного векторной сумме всех сил системы:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^k \vec{F}_i.$$

Точка O приложения главного вектора системы сил называется *центром приведения*. Выбор этой точки является произвольным. Главные моменты \vec{M} и \vec{M}' одной и той же системы сил для двух различных центров приведения O и O' связаны соотношением

$$\vec{M}' = \vec{M} - [\vec{r}_o, \vec{F}],$$

где \vec{r}_o' — радиус-вектор, проведенный из точки O в точку O' .

Момент системы сил относительно оси равен проекции на эту ось главного момента системы сил, соответствующего какой-либо точке той же оси.

Для изменения скорости вращения тела необходимо внешнее воздействие. Из приложенных к телу внешних сил необходимо выделить составляющие, вызывающие вращение. Вращение может быть вызвано только силой F , лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения и направленной по касательной к окружности, которую описывает точка приложения силы. Такую силу можно назвать вращающей.

Заметим, что составляющие сил, параллельные оси вращения, не совершают работы, поскольку точки приложения сил перемещаются перпендикулярно их направлениям. Найдем работу, совершаемую постоянной по величине вращающей силой, когда точка приложения силы смещается по окружности радиуса r на расстояние $\Delta l = r \cdot \Delta\varphi$. Угловое перемещение $\Delta\varphi$ в этом случае измеряется в радианах. Поскольку величина вращающей силы F не меняется, то совершаемая работа будет равна $\Delta A = F \cdot \Delta l = F \cdot r \cdot \Delta\varphi$. Произведение вращающей силы F на радиус r называют *моментом вращающей силы*, или *вращающим моментом*, действующим на данное тело. Момент силы принято обозначать латинской буквой M . Моментом данной силы относительно какой-либо оси называется произведение этой силы на ее плечо, т. е. на длину перпендикуляра, проведенного от указанной оси до направления действия силы. Следовательно, совершаемая вращающим моментом M работа равна произведению этого момента на угловое перемещение $\Delta\varphi$: $\Delta A = M \cdot \Delta\varphi$. Момент вращающей силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью вращения. Положительным считается вектор, в котором бы перемещался буравчик (правый винт), вращаемый этим моментом. Вращающий момент \vec{M} , приложенный к телу, сообщает ему угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$. Векторы \vec{M} и $\vec{\varepsilon}$ ориентированы по оси вращения в одну и ту же сторону. Для установления связи между величиной вращающего момента и сообщаемым телу угловым ускорением можно воспользоваться тем, что работа вращающей силы должна быть равна изменению кинетической энергии вращения: $dA = dW_k^{op}$. Таким образом, для вращающегося тела имеем

$$M \cdot d\varphi = d(J\omega^2/2) = J \cdot \omega \cdot d\omega.$$

Мы полагаем, что момент инерции J при вращении тела не изменяется. Разделив полученное уравнение на dt и сократив на $\omega = d\varphi/dt$, найдем

$$M = J \cdot d\varphi/dt ; M = J \cdot \varepsilon.$$

Записанное соотношение выражает *основной закон динамики вращательного движения* твердых тел, для которых $J = \text{const}$. Приобретаемое телом угловое ускорение прямо пропорционально вращающему моменту и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно оси вращения: $\varepsilon = M/J$. В векторной форме этот закон записывается в виде соотношения

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}.$$

Вращающий момент \vec{M} и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ являются векторными величинами, момент инерции J — скалярная величина.

Если тело при вращении деформируется, то его момент инерции будет меняться. Это означает, что даже при постоянной угловой скорости вращения тела меняется его кинетическая энергия. Из формулы для изменения кинетической энергии $dW_k^{ep} = d(J\omega^2/2)$, полагая момент инерции J переменной величиной, находим

$$dW_k^{ep} = J \cdot \omega \cdot d\omega + \omega^2 \cdot dJ/2.$$

Первое слагаемое характеризует изменение кинетической энергии, обусловленное изменением скорости вращения, а второе — изменением момента инерции. При изменении расстояния r_i от точечного тела до оси вращения внутренние силы, связывающие это тело с осью вращения, будут совершать работу. Эта работа dA будет отрицательная, если тело удаляется, и положительная, если приближаются к оси вращения. Работу можно найти, полагая силу, связывающую частицу массой m_i с осью вращения, равной центростремительной силе:

$$dA_i = F_{\text{ис}} \cdot dr_i = m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i \cdot dr_i = (\omega^2/2) \cdot d(m_i \cdot r_i^2).$$

Для тела, состоящего из множества частиц с массами m_i , получим:

$$dA = (\omega^2/2) \cdot d(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \dots) = (\omega^2/2) \cdot dJ.$$

В общем случае, когда на тело действует внешний вращающий момент M , изменение кинетической энергии должно быть приравнено сумме двух работ: работе внешнего вращающего момента $M \cdot d\varphi$ и работе внутренних сил $(\omega^2/2) \cdot dJ$. При ускоренном вращении величины dW_k^{ep} и $M \cdot d\varphi$ будут положительными, а работа внутренних сил dA будет отрицательна. Тогда получаем

$$dW_k^{ep} = M \cdot d\varphi - (\omega^2/2) \cdot dJ.$$

Поскольку $dW_k^{ep} = d(J \cdot \omega^2/2)$, заменив $d\varphi = \omega \cdot dt$, находим, что

$$M \cdot \omega \cdot dt = J \cdot \omega \cdot d\omega + \omega^2 \cdot dJ.$$

После сокращения получим

$$M = d(J \cdot \omega) / dt.$$

В векторной форме последнее уравнение записывается как

$$\vec{M} = \frac{d(J \cdot \vec{\omega})}{dt}.$$

Это и есть общий вид основного уравнения динамики для тел, вращающихся вокруг неподвижной оси. Закон применим и для деформирующихся тел. Заметим, что у деформирующегося тела изменение скорости вращения может происходить и при отсутствии внешнего вращающего момента. Она изменяется из-за вызванного внутренними силами изменения момента инерции.

Произведение момента инерции на угловую скорость $J \cdot \vec{\omega}$ называется *моментом импульса (моментом количества движения)*. Момент импульса принято обозначать латинской буквой \vec{L} . Произведение вращающего момента на время его действия $\vec{M} \cdot \Delta t$ называется импульсом вращающего момента. Поскольку J – скаляр, а $\vec{\omega}$ – вектор, то момент импульса $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ есть векторная величина, ориентированная по направлению вектора угловой скорости. Импульс вращающего момента $\vec{M} \cdot \Delta t$ также является вектором, ориентированным по направлению вектора \vec{M} . Пользуясь рассмотренными понятиями, основное уравнение динамики вращательного движения можно сформулировать следующим образом: *импульс вращающего момента равен изменению момента импульса тела, к которому приложен этот вращающий момент:*

$$\vec{M} \cdot dt = d(J \cdot \vec{\omega}).$$

Другая запись этого соотношения имеет вид $\vec{M} \cdot dt = d\vec{L}$ или $\vec{M} = d\vec{L}/dt$.

1.4. Законы сохранения в системе взаимодействующих тел

Законы сохранения импульса, момента импульса и энергии

Тела, образующие механическую систему, взаимодействуют между собой и с телами, не входящими в данную систему. Соответственно и силы, действующие на тела системы, подразделяются на внутренние и внешние. Если внешние силы отсутствуют, то система называется замкнутой. Для замкнутых систем остаются неизменными три физические величины: *импульс, момент импульса, энергия.*

Закон сохранения импульса можно доказать, воспользовавшись вторым законом Ньютона: $d\vec{P}/dt = \vec{F}^{\text{вн}}$. Для замкнутой системы внешняя сила $\vec{F}^{\text{вн}} = 0$, поэтому $d\vec{P}/dt = 0$, или $\vec{P} = \text{const}$. Импульс замкнутой системы с течением времени не изменяется.

Закон сохранения момента импульса следует из основного уравнения динамики вращательного движения: $d\vec{L}/dt = \vec{M}^{\text{вн}}$. Если внешний момент сил $\vec{M}^{\text{вн}} = 0$, то $d\vec{L}/dt = 0$, или $\vec{L} = \text{const}$. Момент импульса замкнутой системы с течением времени не изменяется.

Механическая система называется консервативной, если все действующие на нее не потенциальные (неконсервативные) силы не совершают работу, а все внешние потенциальные силы не меняются во времени. Эксперименты показывают, что механическая энергия консервативной системы не изменяется во времени (**закон сохранения энергии**).

Абсолютно упругие и неупругие соударения

Законы сохранения позволяют успешно решать многие физические задачи. Классическим примером являются столкновения физических тел, происходящие за очень короткий промежуток времени. Наиболее простым является центральное соударение двух тел. В этом случае центры масс тел движутся по одной прямой. Система рассматривается как замкнутая, и ее суммарный импульс при столкновении не изменяется. Принято рассматривать два идеализированных случая: абсолютно упругое и абсолютно неупругое соударения. При *абсолютно упругом соударении* механическая энергия соударяющихся тел не изменяется. При *абсолютно неупругом соударении* часть механической энергии расходуется на деформацию тел и переходит в тепло. После абсолютно неупругого соударения тела начинают двигаться с одинаковой скоростью, как одно целое.

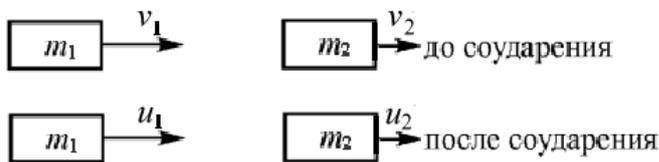


Рис. 1.8. Схема центрального абсолютно упругого соударения двух тел

Схематически центральное *абсолютно упругое соударение* двух тел представлено на рис. 1.8. Запишем для него законы сохранения.

Закон сохранения импульса: полный результирующий импульс системы не изменяется: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$.

Закон сохранения энергии: в момент соударения тел их потенциальная энергия не изменяется, поэтому в записанном соотношении присутствует только кинетическая энергия:

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{m_1 \cdot u_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot u_2^2}{2}.$$

Здесь m_1 и m_2 – массы тел, v_1, v_2, u_1, u_2 – скорости тел до и после соударения.

Объединив соотношения, записанные для законов сохранения, можно получить еще одну формулу, полезную при рассмотрении центрального абсолютно упругого соударения двух тел:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2.$$

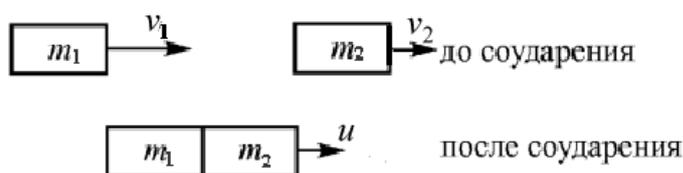


Рис. 1.9. Схема центрального абсолютно неупругого соударения двух тел

Схематически центральное абсолютно неупругое соударение двух тел иллюстрирует рис. 1.9.

Закон сохранения импульса для центрального абсолютно неупругого соударения двух тел имеет вид: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$.

Закон сохранения энергии – в момент соударения тел их потенциальная энергия не изменяется, поэтому в записанном соотношении присутствует только кинетическая энергия:

$$W_{\text{деф}} = \left(\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) \cdot u^2}{2}.$$

Здесь m_1 и m_2 – массы тел, v_1, v_2, u – скорости тел до и после соударения, $W_{\text{деф}}$ – энергия, затраченная на деформацию тел.

Основные расчетные формулы

Поступательное движение	Вращательное движение
Скорость $v = \frac{ds}{dt}$	Угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Равнопеременное движение	
Перемещение $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	Угловое перемещение $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
Скорость $v = v_0 + at$ $v = \omega R$ $\omega = 2\pi/T = 2\pi n$	Угловая скорость $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$

Ускорение	
тангенциальное $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \varepsilon R$ нормальное $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$ полное $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$	
Второй закон Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}; \vec{F} = m\vec{a}$	Основное уравнение динамики вращательного движения $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}; \vec{M} = J\vec{\varepsilon}$
Закон сохранения импульса $\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{const}$	Закон сохранения момента импульса $\sum_{i=1}^N J_i \vec{\omega}_i = \text{const}$
Работа и кинетическая энергия	
$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$	$A = M\varphi = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}$

Кинематика поступательного движения

Примеры решения задач

Пример 1. Уравнение движения материальной точки вдоль оси Ox имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 2$ м, $B = 1,5$ м/с, $C = -0,5$ м/с². Найти:
 1) координату x , скорость v_x и ускорение a_x точки в момент времени $t = 2$ с;
 2) среднюю скорость и среднее ускорение за этот промежуток времени.

Решение. Координату x найдем, подставив в уравнение движения числовые значения коэффициентов A , B , C и времени t . Тогда $x = 1$ м. Мгновенная скорость движения материальной точки вдоль оси X находится как первая производная от координаты по времени, то есть $v_x = dx/dt = B + Ct^2$. После подстановки численных значений получим $v_x = -4,5$ м/с. Ускорение материальной точки – это первая производная от скорости по времени, то есть $a_x = dv_x/dt = 2Ct = -6$ м/с². Средняя скорость находится как отношение всего пройденного телом пути точки ко времени, за которое этот путь пройден, т. е. $\langle v_x \rangle = \Delta S / \Delta t$. Чтобы найти ΔS , определим момент времени, когда тело изменило направление движения на обратное. В этот момент мгновенная скорость обращается в ноль: $v_x = dx/dt = B + Ct_1^2 = 0$. Из последнего уравнения находим, что

$t_1^2 = -B \cdot C/3$, откуда $t_1 = 1$ с. Путь, пройденный телом за все время движения $\Delta t = 2$ с, складывается из пути S_1 , пройденного до изменения направления движения, и пути S_2 , который был пройден после изменения направления движения. Время в пути $t_1 = t_2 = 1$ с. Поскольку $S_1 = A + Bt + Ct^3 = 2 + 1,5 \cdot 1 - 0,5 \cdot 1^2 = 3$ м, путь $S_2 = S_1 = 3$ м, тогда искомый путь $\Delta S = S_1 + S_2 = 6$ м. Отсюда средняя скорость $\langle v_x \rangle = \Delta S / \Delta t = 3$ м/с и ускорение $\langle a_x \rangle = \Delta v / \Delta t = (v_2 - v_1) / \Delta t$, где v_2 и v_1 — это скорости в конечный и в начальный моменты времени движения: $t = 2$ с и $t = 0$. Окончательно получаем $\langle a_x \rangle = -3$ м/с².

Пример 2. Шарик падает с высоты $H = 10$ м и на высоте $h = 5$ м упруго ударяется о площадку, расположенную под углом ($\alpha = 30^\circ$ к горизонту). Найти полное время движения и дальность полета.

Решение. Систему координат выберем следующим образом: ось x расположена на поверхности земли, ось y совпадает с траекторией вертикального падения шарика. На первом участке движения (до удара о площадку) уравнение запишется:

$$y = H - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

Скорость движения на этом участке:

$$v = gt. \quad (2)$$

В момент удара о площадку уравнения (1) и (2) примут вид:

$$h = H - \frac{gt^2}{2}; \quad v = \sqrt{2g(H-h)}.$$

Тогда

$$t_1 = \sqrt{2(H-h)/g}; \quad (3)$$

$$|v| = \sqrt{2g(H-h)}. \quad (4)$$

На втором участке траектории шарик движется по параболе, и уравнения движения имеют вид (отсчет времени начинается с момента удара):

$$x = v_x t, \quad (5)$$

$$y = h + v_y t - \frac{gt^2}{2}, \quad (6)$$

где $v_x = v \cdot \cos \alpha$; $v_y = v \cdot \sin \alpha$, или, с учетом (4)

$$v_x = \sqrt{2g(H-h)} \cdot \cos \alpha; \quad v_y = \sqrt{2g(H-h)} \cdot \sin \alpha. \quad (7)$$

В точке падения ($t = t_2$; $y = 0$; $x = S$) уравнение примет вид:

$$\frac{gt_2^2}{2} - v_y t_2 - h = 0.$$

Откуда $t_2 = \frac{v_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g}$ или, с учетом (7),

$$t_2 = \frac{\sqrt{2g(H-h)\sin\alpha} + \sqrt{2gh + 2g(H-h)\sin^2\alpha}}{g} \quad (8)$$

(отрицательный корень отбрасываем). Тогда полное время движения тела:

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{2(H-h)/g} + \sqrt{2(H-h)/g} \cdot \sin\alpha + \sqrt{2[h + (H-h)\sin^2\alpha]/g};$$

$$t = \sqrt{2(10-5)/9,8} + \sqrt{2(10-5)/9,8} \cdot 0,5 + \sqrt{2[5 + (10-5)0,25]/9,8} \approx 2,6(c).$$

Дальность полета находим из уравнения (5) с учетом (8):

$$S = 2 \cos\alpha \{ (H-h)\sin\alpha + \sqrt{(H-h)[h + (H-h)\sin^2\alpha]} \} \approx 14 \text{ м.}$$

Пример 3. Закон вращения колеса $R = 4$ см выражается формулой $\varphi = 1 + 2t + 3t^2$. Найти через 2 с вращения угловую, линейную скорости и полное ускорение точки, лежащей на ободе колеса.

Решение. По определению, угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2 + 9t^2 = 38 \text{ рад/с.}$$

Линейная скорость $v = \omega R = 1,52$ (м/с). По определению, угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 18t = 0,72 \text{ рад/с.}$$

Полное ускорение

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 57,76 \text{ м/с}^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Шарик вбрасывают в вертикально расположенную трубу со скоростью 1 м/с под углом 45° к вертикали. Считая удар шарика о стенки трубы абсолютно упругим, определить количество ударов внутри трубы, если длина трубы 1 м, диаметр 0,1 м.

2. Шарик падает на стенку, поставленную под углом 45° с высоты 1 м. На каком расстоянии от места падения он второй раз ударится о стенку?

3. Камень брошен с высоты 1 м под углом 30° к горизонту и упал на расстоянии 30 м от места бросания. Определить скорость бросания, время полета и наибольшую высоту.

4. Камень брошен со скоростью 10 м/с под углом 60° к горизонту. Определить радиус кривизны его траектории в верхней точке и в момент падения на поверхность.

5. Шарик падает с высоты 4 м. На высоте 2 м он упруго ударяется о плиту, расположенную под углом 30° к горизонту. Найти полное время и дальность полета шарика.

6. Дождевые капли, падающие отвесно, попадают на стекло автомобиля, движущегося со скоростью $v = 45$ км/ч, и оставляют на нем след под углом 30° к вертикали. Определить скорость падения капель и их размеры.

7. Шарик бросают под углом 30° к горизонту со скоростью 14 м/с. На расстоянии $S_1 = 11$ м от точки бросания шарик упруго ударяется о вертикальную стенку. На каком расстоянии S_2 от стенки шарик упадет на землю?

8. Камень брошен вверх со скоростью 20 м/с, а через 1 с – второй. На какой высоте встретятся камни?

9. С какой скоростью и по какому курсу должен лететь самолет, чтобы за 2 часа пролететь на юг 300 км, если дует юго-западный ветер со скоростью 27 км/ч?

10. Определить нормальное ускорение точек земной поверхности на экваторе и широте Томска ($\varphi = 56^\circ$), вызванное суточным вращением Земли.

11. Закон вращения колеса $\varphi = 4 - t + t^3$. Найти в конце первой секунды вращения угловую, линейную скорости и полное ускорение точки, лежащей на ободе. Радиус колеса 2 см.

12. Точка движется по окружности $R = 0,1$ м с постоянным тангенциальным ускорением a_τ . Найти нормальное ускорение a_n точки через 10 с, если к концу пятого оборота линейная скорость точки $v = 1$ м/с.

13. Колесо вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с². Найти радиус колеса, если через $t = 0,5$ с полное ускорение $a = 18$ см/с².

14. Закон вращения колеса $\varphi = 1 + t + t^2 + t^3$. Найти радиус колеса, если через 2 с нормальное ускорение $a_n = t^2$.

15. Плита движется вниз с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. С высоты h отпускают шарик, который начинает подпрыгивать на плите. Считая удары упругими, найти зависимость скорости шарика от времени и построить график этой зависимости.

16. Шарик движется между вертикальными стенками, соударяясь с ними. Одна из стенок закреплена, другая удаляется от нее с постоянной скоростью $v_1 = 0,5$ м/с. Считая движение шарика перпендикулярным стенкам, найти его окончательную скорость, если начальная скорость $v_0 = 20$ м/с, удары считать абсолютно упругими.

17. Ракета стартует с Земли вертикально вверх с ускорением, зависящим от времени по закону: $a = t^2$. На высоте $h = 100$ км двигатели выключают. Найти время, через которое ракета упадет на Землю.

18. По прямой дороге начинает двигаться автомобиль с ускорением 1 м/с² и по нему производится выстрел снарядом из пушки со скоростью 200 м/с. Найти путь, который пройдет автомобиль, если выстрел производится в момент, когда пушка и автомобиль находятся на перпендикуляре к дороге $L = 3$ км.

19. На высоте $h = 10$ км летит прямолинейно самолет со скоростью $v_1 = 100$ м/с. По самолету производится выстрел снарядом, вылетающим из ствола со скоростью $v_2 = 500$ м/с. Под каким углом α нужно установить ствол орудия, чтобы попасть в самолет? Найти время полета снаряда.

20. Два корабля вышли одновременно из двух портов с $S = 1000$ км на экваторе со скоростью 20 и 40 м/с под углом 60° к экватору. Определить наименьшее расстояние между кораблями.

21. Какое расстояние по горизонтали пролетит шарик, брошенный под углом 60° к горизонту с начальной скоростью $v = 10$ м/с, если шарик ударится о потолок высотой $h = 3$ м? Удар считать абсолютно упругим.

22. Самолет со скоростью $v = 2400$ км/ч на высоте $h = 10$ км пролетает над наблюдателем. Какой угол с вертикалью составляет направление на самолет, определяемое по звуку в тот момент, когда истинное направление на самолет составляет с вертикалью угол $\varphi = 18,5^\circ$ ($\text{tg}\varphi = 1/3$)?

23. Точка движется по окружности $R = 0,1$ м с постоянным тангенциальным ускорением a_τ . Найти нормальное ускорение a_n точки через $t = 20$ с, если известно, что к концу пятого оборота скорость точки $v = 0,1$ м/с.

24. Разгоняясь с максимально возможным ускорением на прямом участке шоссе, автомобиль за время $\Delta t_1 = 0,1$ с увеличивает скорость от $v_1 = 10$ м/с до $v_2 = 10,5$ м/с. За какое время он смог бы сделать то же самое на кольцевом участке шоссе с радиусом $R = 30$ м? При каком радиусе кольца он вообще не смог бы увеличить скорость выше 10 м/с?

25. катушка радиусом $r = 10$ см раскручивается под действием нити с грузом. Груз опускается равномерно за 2 с на 1 м. Найти угловое ускорение ε катушки и полное ускорение через 2 с.

Ответы

1. $n = 2$. 2. $l = 5,6$ м. 3. $v = 17,3$ м/с; $t = 1,9$ с; $l = 5$ м. 4. $R_1 = 7,5$ м; $R_2 = 20$ м. 5. $t = 1$ с; $S = 5,64$ м. 6. $v = 21,6$ м/с; $d = 1,44 \cdot 10^{-5}$ м. 7. $S_2 = 6$ м. 8. $h = 19,2$ м. 9. $\arctg(v_1 \sin \alpha / v_1 \cos \alpha + \ell / t)$. 10. $a_n = 3,4 \cdot 10^{-2}$ м/с². 11. $\omega = 2$ рад/с; $v = 0,04$ м/с; $a = 14,2$ м/с². 12. $a_n = 1,56$ м/с². 13. $R = 0,081$ м. 14. $R = 1,17$ м. 15. $[v_0 + (2n-1)\sqrt{v_0^2 + 2gh}] / g$. 16. $v = v_0 - 2nv_1 = 0$. 17. $t = 163$ с. 18. $l = 1,27 \cdot 10^{-2}$ м. 19. $\alpha = 78^\circ$. 20. $l_{\min} = 330$ км. 21. $S = 5$ м. 22. $\alpha = 11^\circ$. 23. $a_n = 0,01$ м/с². 24. $t = 0,15$ с; $R = 20$ м. 25. $\varepsilon = 0$ рад/с²; $a = 2,5$ м/с².

Динамика поступательного движения

Примеры решения задач

Пример 1. Две гири массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нерастяжимой нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти ускорение a , с которым движутся гири и силу натяжения нити T . Трением в блоке пренебречь.

Решение. Рассмотрим силы, действующие на гири. На гирю m_1 действует сила тяжести $m_1 g$; на гирю m_2 — сила $m_2 g$. Результирующая сила, сообщающая гилям ускорение, запишется в виде:

$$F_{\text{рез}} = ma = m_1 g - m_2 g, \quad (1)$$

где $m = m_1 + m_2$. Отсюда:

$$a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

Так как все силы действуют вдоль одной прямой, то мы перешли от векторной формы записи к скалярной. Чтобы найти силу натяжения нити, запишем уравнение движения для каждой гири. Для первой гири можно записать:

$$F_{1\text{рез}} = m_1 a = m_1 g - T_1; \text{ для 2-й: } F_{2\text{рез}} = m_2 a = T_2 - m_2 g, \quad (3)$$

где T_1 и T_2 — силы натяжения нити. В уравнениях (3) учтено, что ускорение грузов одинаково по величине и что ускорение второго груза направлено вверх, а первого — вниз. Подставляя ускорение a (2) в уравнения (3), найдем:

$$T_1 = T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

Как и следовало ожидать, сила натяжения нити $T_1 = T_2$. Численные значения a и T , найденные по формулам (2) и (4), равны: $a = 3,2$ м/с²; $T_1 = T_2 = 13$ Н.

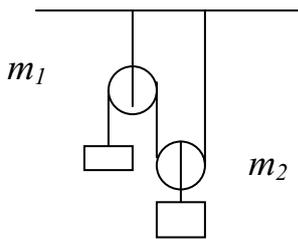
Пример 2. На горизонтальной доске лежит груз. Какое ускорение в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз соскользнул с нее? Коэффициент трения между доской и грузом $f = 0,2$.

Решение. В горизонтальном направлении на груз действует только сила трения $F_{\text{тр}}$. Следовательно, согласно второму закону Ньютона, можно записать: $ma = F_{\text{тр}}$. Отсюда ускорение $a = F_{\text{тр}}/m$. Полное ускорение находится по этой формуле. Сила трения равна: $F_{\text{тр}} = fN$. Следовательно, возможные значения ускорения груза удовлетворяют неравенству:

$$a \leq \frac{fN}{m} = \frac{fmg}{m} = fg = 1,96 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, доске нужно сообщить ускорение $a_1 > fg = 1,96 \text{ м/с}^2$. В этом случае сила трения не может сообщить грузу ускорение, достаточное для его движения без проскальзывания.

Задачи для самостоятельного решения



1. Две гири массами $m_1 = 3 \text{ кг}$ и $m_2 = 6,8 \text{ кг}$ висят на концах нити, перекинутой через неподвижный блок. Легкая гиря находится на 2 м ниже тяжелой. Гири пришли в движение без начальной скорости. Через какое время t они окажутся на одной высоте?

2. Найти натяжение T нерастяжимой нити в устройстве, изображенном на рисунке. Массы тел соответственно равны $m_1 = 100 \text{ г}$ и $m_2 = 300 \text{ г}$. Массой блоков пренебречь.

3. Тело движется по горизонтальной плоскости под действием силы \vec{F} , направленной под углом α к горизонту. Найти ускорение тела, если известна его масса m и коэффициент трения между телом и плоскостью f . При какой величине силы \vec{F}_1 движение будет равномерным?

4. Тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 30 \text{ м/с}$, достигло высшей точки подъема спустя время $t = 2,5 \text{ с}$. Определить среднее значение силы F сопротивления воздуха, действующей на тело во время полета, если масса тела $m = 40 \text{ г}$.

5. По склону горы длиной $l = 50 \text{ м}$ на веревке спускают санки массой $m = 60 \text{ кг}$. Высота горы $h = 10 \text{ м}$. Определить силу натяжения веревки T , считая ее постоянной, если санки у основания горы имеют скорость $v = 5 \text{ м/с}$, а сила сопротивления F составляет 10 % веса. Начальная скорость санок равна нулю.

6. На наклонной плоскости находится тело массой $m = 50$ кг, на которое действует горизонтально направленная сила $F = 300$ Н. Определить ускорение тела и силу, с которой оно давит на плоскость. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Трение отсутствует.

7. На гладком столе лежит брусок массой $m = 4$ кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, масса которых $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг. Найти ускорение a , с которым движется брусок и силу T натяжения каждого из шнуров. Массами блоков и трением пренебречь.

8. Пуля массой $m = 10$ г, двигавшаяся со скоростью $v = 200$ м/с, врезалась в доску и углубилась в нее на расстояние $l = 4$ см. Определить среднюю силу сопротивления F доски и время t движения пули в доске, считая движение пули внутри доски равнозамедленным.

9. Наклонная плоскость, образующая угол $\alpha = 25^\circ$ с плоскостью горизонта, имеет длину $l = 2$ м. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за время $t = 2$ с. Определить коэффициент трения тела о плоскость.

10. Молот массой $m = 1$ т падает с высоты $h = 2$ м на наковальню. Длительность удара $t = 0,01$ с. Определить среднее значение силы $\langle F \rangle$ удара.

11. Тело массой $m = 5$ кг брошено под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) импульс силы F , действующей на тело за время его полета; 2) изменение Δp импульса тела за время полета.

12. Материальная точка массой $m = 1$ кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиуса $r = 1,2$ м в течение времени $t = 2$ с. Найти изменение Δp импульса точки.

13. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязаны грузы с массами $m_1 = 1,5$ кг и $m_2 = 3$ кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

14. Тело массой $m = 0,2$ кг соскальзывает без трения по желобу высотой $h = 2$ м. Начальная скорость шарика $v_0 = 0$. Найти изменение ΔP импульса шарика и импульс P , полученный желобом при движении тела.

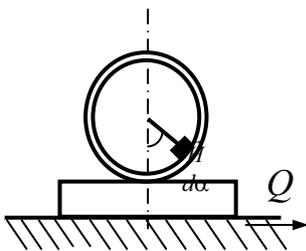
15. Автомобиль-тягач, имеющий тормоза на всех колесах, тянет прицеп со скоростью 30 км/ч. Масса автомобиля 5000 кг, масса прицепа 2000 г. На каком наименьшем пути можно затормозить этот автопоезд до полной остановки при следующих данных: коэффициент стати-

ческого трения шин о покрытие дороги равен 0,6; коэффициент силы тяги для тягача и для прицепа равен 0,03.

16. Конькобежец движется по горизонтальному пути равномерно, а затем с разгона проезжает путь $S = 60$ м в течение $t = 25$ с. Масса конькобежца $m = 50$ кг. Определить коэффициент трения, считая движение с разгона равнозамедленным.

17. Шайба, пущенная по поверхности льда с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с, остановилась через $t = 40$ с. Найти коэффициент трения шайбы о лед.

18. На горизонтальной поверхности находится брусок массой $m = 2$ кг. Коэффициент трения f_1 бруска о поверхность равен 0,2. На бруске находится другой брусок массой $m_2 = 8$ кг. Коэффициент трения f_2 верхнего бруска о нижний равен 0,3. К верхнему бруску приложена сила F . Определить: 1) значение силы F_1 , при которой начнется совместное скольжение брусков по поверхности; 2) значение силы F_2 , при которой брусок начнет проскальзывать относительно нижнего.



19. На горизонтальной поверхности находится обруч, масса которого ничтожно мала. К внутренней части обруча прикреплен груз, радиус-вектор которого составляет с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Определить, с каким ускорением a необходимо двигать плоскость, чтобы обруч с грузом не изменил своего положения относительно плоскости. Скольжение обруча по плоскости отсутствует.

20. На концах нити, перекинутой через блок, подвешенный к потолку, закреплены два груза общей массы $m_1 + m_2 = 30$ кг. Грузы движутся с ускорением $a = 0,3g$, направленным для одного груза вниз. Найти массы обоих грузов. Массой блока и нити, а также трением в оси блока пренебречь.

21. Санки скатываются с ледяной горы высотой h и останавливаются на ледяном поле на расстоянии S по от вершины наклонной плоскости. Показать, что коэффициент трения $f = h/S$.

22. По наклонной плоскости, имеющей угол наклона $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, скользит тело с ускорением $3,2$ м/с². Найти коэффициент трения.

23. По наклонной плоскости скользит тело. Коэффициент трения скольжения равен 0,3. Найти угол наклона плоскости к горизонту, если известно, что в конце второй секунды тело приобрело скорость $5,6$ м/с.

24. Из ствола орудия диаметром 100 мм вылетает снаряд со скоростью 600 м/с снаряд, имеющий массу 8 кг. Среднее давление пороховых газов в стволе равно 1 МПа. Найти время движения снаряда в стволе орудия.

25. Автомобиль стал тормозить, и спустя 2 с остановился. С какой скоростью ехал автомобиль в момент начала торможения, если коэффициент трения между дорогой и покрытием равен 0,4?

26. Из орудия вылетает снаряд массой $m = 10$ кг со скоростью $v = 500$ м/с. Найти силу давления пороховых газов, считая ее постоянной во все время движения снаряда $t = 0,01$ с внутри ствола орудия.

Ответы

1. $t = 0,7$ с. 2. $T = 1,26$ Н. 3. $a = \frac{F(\cos \alpha + f \sin \alpha) - fmg}{m}$. 4. $F = 0,088$ Н.

5. $T = 45$ Н. 6. $a = 10$ м/с; $F = 283$ Н. 7. $a = 1,4$ м/с; $T_1 = 11,2$ Н; $T_2 = 16,8$ Н. 8. $t = 4 \cdot 10^{-4}$ с; $F = 5$ кН. 9. $f = 0,35$. 10. $\langle F \rangle = 626$ кН. 11. 100 Н·с; 100 кгм/с. 12. $1,33$ кгм/с. 13. $F = 39,2$ Н. 14. $1,25$ кгм/с; -25 кгм/с. 15. $S = 8,1$ м. 16. $f = 0,02$. 17. $f = 0,051$. 18. $F_1 = 19,6$ Н; $F_2 = 39,2$ Н. 19. $a = 36,6$ м/с². 20. $m_1 = 10,5$ кг; $m_2 = 19,5$ кг. 21. $f = h/S$. 22. $f = 0,2$. 23. $\alpha = 30^\circ$. 24. $t = 0,61$ с. 25. $v = 28,8$ м/с. 26. $F = 500$ кН.

Динамика вращательного движения

Примеры решения задач

Пример 1. К ободу колеса радиусом $R = 0,5$ м и массой $m = 50$ кг приложена касательная сила $F = 98,1$ Н. Найти угловое ε ускорение колеса. Через какое время t после начала действия силы колесо будет иметь частоту вращения $n = 100$ об/с? Колесо считать однородным диском; трением пренебречь.

Решение. Запишем основной закон динамики вращательного движения: $M = J\varepsilon$. В нашем случае момент силы, действующей на колесо, равен $M = FR$, момент инерции диска равен $J = mR^2/2$, тогда $FR = (mR^2/2)\varepsilon$. Отсюда получаем $\varepsilon = 2F/mR$. Частота вращения и угловая скорость колеса связаны соотношением $\omega = 2\pi n$. При равноускоренном вращении колеса угловая скорость ω через время t после начала вращения определяется из соотношения $\omega = \varepsilon t$. Тогда $t = 2\pi n/\omega = \pi mRn/F$. Подставив численные значения, находим, что $\varepsilon = 7,8$ радс⁻²; $t = 80$ с.

Пример 2. Шарик лежит на горизонтальной пластине, которая начинает двигаться с ускорением a . Коэффициент статического трения скольжения равен f , коэффициент трения качения — k .

- а) при каком условии шарик будет двигаться вместе с пластиной с ускорением a ?
- б) при каком условии шарик будет катиться по пластине без скольжения?

Решение.

- а) Момент, вращающий шар, равен $FR = maR$. Момент, тормозящий вращение шара, равен $mgkR$. Чтобы шар покоился относительно пластины, а другими словами, двигался вместе с ней с тем же ускорением a , необходимо, чтобы $maR < mgkR$ и $a < gk$.
- б) При качении шара $a = a_1 + \varepsilon R$, где a_1 – линейное ускорение шара; ε – его угловое ускорение. Из основного закона динамики вращательного движения можно записать, что $\varepsilon = M/J$, где $M = ma_1R - mgkR$ – результирующий момент, действующий на шар, а $J = 2/5 mR^2$. Поэтому $\varepsilon R = 2,5[a_1 - gk]$. Тогда $a = a_1 + 2,5a_1 - 2,5gk$. По условию задачи $ma_1 < fmg$. Следовательно, $a < g(3,5f - 2,5k)$. Так как $f \gg k$, то практически $a < 3,5gf$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Масса диска 0,5 кг, диаметр 40 см. Диск вращается с постоянной угловой скоростью, совершая 1500 об/мин. При торможении диск останавливается в течение 20 с. Определить тормозящий момент M .

2. Деревянный стержень массой 1 г и длиной 40 см может вращаться вокруг оси, проходящей через его середину, перпендикулярную стержню. В конец стержня попадает пуля массой 10 г, летящая перпендикулярно оси и стержню со скоростью 200 м/с. Определить угловую скорость, которую получит стержень, если пуля застрянет в нем.

3. Какую работу нужно произвести, чтобы увеличить частоту оборотов маховиков от 12 до 120 об/мин? Массу маховика 500 кг считать равномерно распределенной по его объему. Диаметр маховика 1,5 м. Трением пренебречь.

4. Определить момент инерции системы, состоящей из четырех шариков массами 1, 2, 3 и 4 г, расположенных на одной прямой, относительно оси, перпендикулярной прямой, на которой расположены шарики и проходящей сквозь а) первый, б) второй, в) третий, г) четвертый шарики. Шарики считать точечными массами, расстояния между соседними шариками равны 10 см.

5. Найти кинетическую энергию велосипедиста вместе с велосипедом, едущего со скоростью 10,8 км/ч. Масса велосипедиста 75 кг, масса велосипеда 20 кг, причем на колеса приходится 5 кг. Колеса считать обручами.

6. В медном диске симметрично сделано два одинаковых круговых выреза с диаметрами, равными радиусу диска. Определить его момент инерции относительно оси, проходящей через центр и перпендикулярной плоскости диска. Толщина диска 4 мм, радиус диска 5 см, плотность меди $8,9 \cdot 10^3$ кг/м³.

7. Вал массой 100 кг и диаметром 10 см с частотой 8 об/с. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой 40 Н, под действием которой вал остановился через 10 с. Определить коэффициент трения.

8. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязаны грузы массой 100 и 110 г. С каким ускорением будут двигаться грузы, если масса блока равна 400 г? Трением при вращении блока пренебречь.

9. Маховик, имеющий момент инерции 300 кг·м², вращается, делая 10 об/с. Через 30 с после прекращения действия вращающего момента, маховик остановился. Чему равен момент сил трения? Сколько при этом оборотов сделал маховик до полной остановки?

10. Колесо, вся масса которого 5 кг равномерно сосредоточена в ободе, начинает равноускоренно вращаться под действием приложенной к ободу касательной силы 62,8 Н. За первые 10 с колесо успевает сделать 200 оборотов. Найти диаметр колеса.

11. На барабан диаметром 2 м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 15 кг. Найти момент инерции барабана, если известно, что груз опускается с ускорением 6 м/с². Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с².

12. Двигатель мощностью $0,1$ кВт приводит в движение токарный станок. Обрабатываемый на токарном станке деревянный цилиндр диаметром 6 см вращается с частотой 600 об/мин. Определить силу, с которой резец отделяет стружку, принимая во внимание, что мощность на валу станка составляет 80 % мощности двигателя.

13. Каково отношение момента импульса, связанного с вращением Земли, к моменту импульса, связанного с орбитальным движением Луны? Масса Земли равна $6 \cdot 10^{24}$ кг; масса Луны $7,3 \cdot 10^{22}$ кг; расстояние от центра Земли до центра Луны 384000 км; период обращения Луны вокруг Земли 27,3 суток.

14. Два маленьких шарика массой 40 и 120 г соединены стержнем, масса которого 90 г, а длина 20 см. Система вращается, совершая 180 об/мин вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр инерции системы. Определить момент количества движения системы.

15. Стержень массой 1 кг и длиной 3 м вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси, расположенной на расстоянии 0,5 м от конца стержня. При этом за 10 мин он совершает 135 оборотов. Чему равна кинетическая энергия стержня?

16. Маховик диаметром 40 см и массой 25 кг может накопить 10 кВт часов кинетической энергии.

- а) С какой угловой скоростью он должен вращаться?
- б) Чему равно центростремительное ускорение точек обода маховика?
- в) На автомобиле, полная масса которого равна 1000 кг, установили в п. а) маховик. Считая, что вся энергия расходуется на подъем автомобиля в гору, определить максимальную высоту, на которую поднимается автомобиль.

17. Обруч и сплошной цилиндр одинаковой массы 5 кг катятся по горизонтальной поверхности. Чему равна кинетическая энергия каждого из них, если скорость движения их центров масс одинакова и равна 2 м/с?

18. а) Велосипед может катиться с постоянной скоростью, если сила, действующая на заднее колесо со стороны дороги, равна 4 Н. С какой силой должна действовать велосипедная цепь на зубчатое колесо, если его диаметр в 6 раз меньше диаметра колеса велосипеда? б) Пусть теперь велосипедное колесо не касается земли. Определить время достижения линейной скорости обода 30 км/ч (8,33 м/с), если к цепи приложена сила 20 Н. Радиус велосипедного колеса равен 30 см, а полная масса обода 2 кг.

19. Горизонтально расположенный тонкостенный полый цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью, совершая 60 об/мин вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. При этом на внешней поверхности цилиндра действует центростремительное ускорение 4 м/с^2 . Найти массу цилиндра, если его кинетическая энергия равна 1 Дж.

20. Барабан имеет вид полого тонкостенного цилиндра, вращающегося без трения вокруг своей оси. На него намотан шнур, на конце которого привязан груз массой 3 кг. Масса цилиндра 7 кг. Найти ускорение, с которым будет опускаться груз. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 .

21. Человек находится на краю круглой горизонтальной платформы массой 1 т и с моментом инерции $800 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Какое минимальное число оборотов в минуту должна делать платформа вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр, чтобы человек не мог на ней удержаться при коэффициенте трения 0,27?

22. Маховик через 15 с после начала вращения приобретает момент количества движения, равный $73,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$. Полагая угловое ускорение постоянным и равным $0,5 \text{ рад}/\text{с}^2$, найти кинетическую энергию маховика через 20 с после начала вращения.

23. Круглый диск массой 2 кг и диаметром 2 м вращается вокруг оси, проходящей на расстоянии 20 см от его центра перпендикулярно плоскости диска. Какую работу нужно совершить, чтобы частота вращения диска увеличилась с 2 до 3 об/с?

24. Горизонтально расположенный маховик вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Масса маховика 200 кг. Маховик обладает кинетической энергией 80 МДж. Сколько оборотов в секунду совершает маховик, если его диаметр 80 см? Найти центростремительное ускорение на ободу маховика. Маховик имеет форму диска.

25. С маховиком связан жестко шкив радиусом 10 см, на шкив намотана нить, к свободному концу которой подвешен груз 19,6 кг. Когда грузу предоставили возможность падать, то он за первые 10 с прошел расстояние 1 м. Определить момент инерции маховика.

Ответы

1. $0,078 \text{ нм}$. 2. $29 \text{ рад}/\text{с}$. 3. $10,98 \text{ кДж}$. 4. а) $5\cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; б) $2\cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; в) $10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; г) $2\cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. 5. 450 Дж . 6. $2,18\cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. 7. $0,31$. 8. $0,24 \text{ м}/\text{с}^2$. 9. 628 нм ; 150 об . 10. 1 м . 11. $10 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. 12. $42,5 \text{ Н}$. 13. $0,25$. 14. $0,32 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$. 15. $1,75 \text{ Дж}$. 16. а) $1,2\cdot 10^4 \text{ рад}/\text{с}$; б) $5,76\cdot 10^7 \text{ м}/\text{с}^2$; в) $3,7 \text{ м}$. 17. 20 Дж ; 15 Дж . 18. а) 24 Н ; б) 5 с . 19. $2,46 \text{ кг}$. 20. $3 \text{ м}/\text{с}^2$. 21. $12,3 \text{ об}$. 22. 490 Дж . 23. $106,5 \text{ Дж}$. 24. $503 \text{ об}/\text{с}$; $4\cdot 10^6 \text{ м}/\text{с}^2$. 25. $96 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Молекулярная физика и термодинамика — это разделы физики, в которых изучаются *макроскопические процессы* в системах, содержащих огромное количество микрочастиц — атомов и молекул. Существует два качественно различных и взаимно дополняющих друг друга метода исследования: *статистический (молекулярно-кинетический)* и *термодинамический*. Первый лежит в основе молекулярной физики, второй — термодинамики.

Молекулярная физика изучает физические свойства и агрегатные состояния тел в зависимости от их молекулярного строения, сил взаимодействия между частицами тела и характера движения этих частиц. В ее основе лежат **основные положения молекулярно-кинетической теории строения вещества**: а) все тела состоят из атомов и молекул; б) атомы и молекулы находятся в состоянии непрерывного хаотического движения; в) между частицами тела действуют силы притяжения и отталкивания.

Термодинамика — аксиоматическая наука. В ее основе лежат принципы, являющиеся обобщением всей совокупности экспериментальных данных о превращении теплоты в механическую работу. Термодинамика изучает в основном общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями. Поскольку тела состоят из очень большого количества молекул (например, при нормальных условиях в 1 см^3 воздуха содержится около $3 \cdot 10^{19}$ молекул), то простое применение механических методов к описанию поведения этих тел ведет к непреодолимым трудностям. Поэтому при изучении физических свойств тел, состоящих из большого числа частиц, используются два взаимно дополняющих друг друга метода — статистический и термодинамический. Статистический метод базируется на анализе свойств макроскопических систем с помощью методов математической статистики. Термодинамический метод состоит в изучении свойств системы путем анализа

условий, при которых в системе происходит превращение энергии, и установлении связей между макроскопическими свойствами вещества. Термодинамика не рассматривает протекающие в системе микропроцессы. Этим термодинамический метод отличается от статистического.

Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика, отличаясь методами исследования, взаимно дополняют друг друга. Область применения термодинамики значительно шире, чем молекулярно-кинетической теории. Нет таких областей естествознания, где нельзя бы было пользоваться термодинамическим методом. Но этот метод, в отличие от молекулярно-кинетической теории, ограничен рассмотрением взаимосвязей только макроскопических свойств вещества, не касаясь его микроскопического строения.

Термодинамика имеет дело с *термодинамическими системами*, под которыми понимают *совокупности макроскопических тел, обменивающихся энергией друг с другом и с внешней средой (другими телами)*. Состояние термодинамической системы можно описать с помощью термодинамических параметров: температуры, давления и молярного объема.

Температура – это физическая величина, характеризующая энергию хаотического молекулярного движения и состояние термодинамического равновесия макроскопической системы. Существует две температурных шкалы, рекомендованных к применению Генеральной конференцией по мерам и весам: термодинамическая и международная практическая. В системе единиц СИ используется термодинамическая температура T (иначе называемая абсолютной температурой), измеряемая в кельвинах (К). В международной практической системе в качестве единицы измерения используются градусы Цельсия ($^{\circ}\text{C}$). Температуры, измеренные в кельвинах и градусах Цельсия, связаны между собой соотношением $T \approx t^{\circ} + 273$.

Давление p – физическая величина, численно равная силе, действующей нормально на единицу поверхности. В системе СИ давление измеряется в $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$ (паскаль).

Объем, занимаемый 1 молем вещества, называют *молярным*. Измеряется в $\text{м}^3/\text{моль}$.

Параметры состояния системы могут изменяться. Всякое изменение в термодинамической системе принято называть *термодинамическим процессом*. Если с течением времени состояние термодинамической системы не меняется, то она находится в *термодинамическом равновесии*.

2.1. Элементы молекулярно-кинетической теории

Материальные тела условно делят на твердые, жидкие и газообразные. Критерием такого разделения служит величина $\varepsilon(T, p)$, представляющая из себя отношение средней потенциальной энергии взаимодействия молекул (атомов) тела к их средней кинетической энергии. В твердых телах $\varepsilon \gg 1$; в жидких $\varepsilon \approx 1$, в газообразных $\varepsilon \ll 1$. Для описания свойств реальных тел и физических процессов необходимы модельные представления. В молекулярно-кинетической теории газов используется модель идеального газа. В ней частицы газа рассматриваются как материальные точки, потенциальная энергия взаимодействия которых не учитывается. Хаотическое движение частиц сопровождается столкновениями между собой и стенками сосуда. Столкновения считаются абсолютно упругими. Для любого реального газа, к которому применимы такие допущения, справедливы законы, называемые законами идеальных газов:

1) **закон Бойля-Мариотта:** при неизменной температуре для данной массы газа произведение его давления на объем есть величина постоянная:

$$p \cdot V = \text{const};$$

2) **первый закон Гей-Люссака:** при постоянном давлении для данной массы газа объем газа изменяется линейно с температурой

$$V = \alpha V_0 \cdot T,$$

где V_0 – объем газа при температуре $T = 273\text{К}$;

3) **второй закон Гей-Люссака:** при постоянном объеме для данной массы газа давление газа изменяется линейно с температурой

$$p = \alpha p_0 T,$$

где p_0 – давление газа при температуре $T = 273\text{К}$; этот закон часто называют **законом Шарля**.

Законы Гей–Люссака можно записать в виде $V/T = \text{const}$ и $p/T = \text{const}$; температурный коэффициент $\alpha = 1/273$, его размерность K^{-1} ;

4) **закон Авогадро:** при одинаковых давлениях и одинаковых температурах в равных объемах различных идеальных газов содержится одинаковое число молекул; в одном моле различных веществ содержится $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ молекул – это **постоянная (число) Авогадро**;

5) **закон Дальтона:** давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений p_i , входящих в нее газов:

$$p = \Sigma p_i = p_1 + p_2 + \dots p_n,$$

где p_i — это давление, которое оказывал бы определенный газ из смеси, если бы он один занимал весь объем при той же температуре.

В однородной термодинамической системе равновесное давление p является функцией ее объема V и температуры T . Уравнение $p = p(V, T)$ называется уравнением состояния системы. Для идеального газа — это уравнение Клапейрона—Менделеева:

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T,$$

где m — масса газа, M — молярная масса, R — универсальная газовая постоянная; $R = 8,31$ Дж/(моль·К). Уравнение состояния идеального газа можно переписать в виде $p = n \cdot k \cdot T$, или $p \cdot V = N \cdot k \cdot T$; здесь n — число молекул в единице объема газа, N — число молекул газа, $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — *постоянная Больцмана*. Уравнение состояния можно получить теоретически. Для идеального газа пренебрегают потенциальной энергией взаимодействия его частиц. Считается, что частицы атомарного газа обладают только кинетической энергией поступательного движения $W_{кин}^{пост} = m_i \langle v^2 \rangle / 2$. Таким образом, внутренняя энергия U газа, состоящего из N одинаковых частиц, будет в N раз больше кинетической энергии одной частицы с массой m_i , движущейся со средней скоростью $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$, которую принято называть среднеквадратичной. Предполагая, что молекулы газа движутся хаотически, и число взаимных столкновений между ними значительно меньше числа столкновений со стенками сосуда, можно получить уравнение, связывающее давление p , объем V и внутреннюю энергию $U = W_k = N \cdot W_{кин}^{пост}$. Это уравнение называется *основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов*, оно имеет вид: $p \cdot V = 2/3 \cdot W_k$, где W_k — кинетическая энергия всех молекул в объеме V .

Давление газа обусловлено столкновениями его частиц со стенками сосуда. Вводя в рассмотрение среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ их поступательного движения, можно записать выражение для средней кинетической энергии поступательного движения одной частицы идеального газа, связывающее эту энергию с абсолютной температурой T :

$$\frac{m_i \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} k \cdot T.$$

Постоянная Больцмана k — это коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единицы измерения температуры. ***Термодинамическая температура T пропорциональна средней кинетической энергии поступательного движения одной частицы идеального газа.***

Введем понятие степени свободы системы. *Степенью свободы* механической системы называется число независимых координат, определяющих ее положение и конфигурацию в пространстве. Число степеней свободы принято обозначать латинской буквой i . Частицы атомарного газа можно считать материальными точками. Чтобы определить положение точки в пространстве, необходимы три независимые координаты (x, y, z). Следовательно, число степеней свободы для частицы атомарного газа $i = 3$. Для двухатомной молекулы с жесткой связью (в виде гантели) необходимы три координаты для описания поступательного движения ($i_{\text{п}} = 3$) и две координаты для описания вращательного движения вокруг двух взаимно перпендикулярных осей, не проходящих через оба атома ($i_{\text{вр}} = 2$). Таким образом, общее число степеней свободы будет равно пяти, поскольку $i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} = 5$. Для трехатомной молекулы с жесткими связями между атомами необходимы три поступательных ($i_{\text{п}} = 3$) и три вращательных ($i_{\text{вр}} = 3$) степени свободы. Общее число степеней свободы трехатомной или многоатомной молекулы идеального газа равно шести, поскольку $i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} = 6$. Доказывается, что все степени свободы энергетически равноправны. Сущность этого положения выражает закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул: если система молекул находится в термодинамическом равновесии при температуре T , то средняя кинетическая энергия равномерно распределена между всеми степенями свободы. На каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится энергия, равная $1/2 \cdot kT$. Таким образом, среднюю кинетическую энергию одной молекулы можно подсчитать из соотношения $W_{\text{ср}} = (i/2) \cdot k \cdot T$; $i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}}$.

Внутренняя энергия идеального газа — это суммарная кинетическая энергия его частиц, для ν молей газа справедливо соотношение

$$U = (i/2) \cdot (m/M) \cdot R \cdot T.$$

Здесь число молей $\nu = m/M$ определяется отношением массы газа к его молярной массе. *Универсальная газовая постоянная* $R = k \cdot N_A$ равна произведению двух констант: постоянной Больцмана k и числа Авогадро N_A . Очевидно, что молекулярный газ при одинаковой температуре и одном и том же числе частиц будет обладать большей внутренней энергией, чем атомарный.

Распределение молекул по скоростям

Поведение частиц газа (атомов или молекул) подчиняется статистическим законам. Распределение частиц газа по скоростям определяется законом Максвелла

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2 dv,$$

где m – масса частицы газа, v – ее скорость, T – термодинамическая температура, N – общее число частиц газа, k – постоянная Больцмана.

Максимум кривой распределения соответствует наиболее вероятной скорости движения

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

где R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса газа. Существует еще две статистические характеристики скорости движе-

ния частиц газа: средняя скорость $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ и среднеквадратичная

$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$. Между собой эти характеристики связаны соотношением

$$v_{\text{вер}} : \langle v \rangle : \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 1 : 1,13 : 1,22.$$

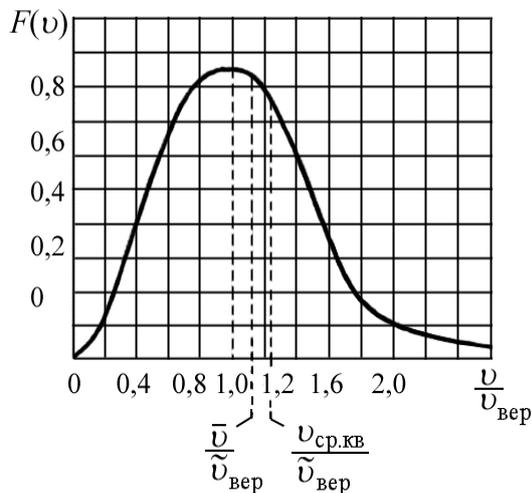


Рис. 2.1. График максвелловского распределения молекул по скоростям

Формула Максвелла приобретает более простой вид, если ввести относительную скорость $U = v/v_{\text{вер}}$. В этом случае

$$F(v) = \frac{dN_u}{NdU} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp(-U^2) U^2,$$

графически зависимость приведена на рис. 2.1.

Зависимость давления газа от высоты описывается барометрической формулой

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

Молекулы газа, или совокупность любых других частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения, в условиях действия потенциального силового поля любой природы, подчиняются закону распределения Больцмана:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{W_p}{kT}\right).$$

Здесь n — плотность молекул в том месте, где потенциальная энергия молекулы равна W_p , n_0 — плотность молекул в том месте, для которого энергия W_p принята равной нулю. Средняя длина свободного пробега молекул газа равна

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где d — эффективный диаметр молекулы.

Общее число столкновений всех молекул в единице объема за единицу времени равно $z = \langle v \rangle / \lambda$.

2.2. Элементы термодинамики

Термодинамика изучает превращения энергии в процессах, сопровождающихся тепловыми эффектами. Передача энергии от одного тела к другому осуществляется путем совершения работы A или путем теплового обмена (передачи теплоты ΔQ). Работа — это мера переданной механической энергии. Совершенная телом (системой) работа считается положительной ($A > 0$), а совершенная над телом (системой), — отрицательной ($A < 0$). Теплота ΔQ — это мера переданной энергии теплового движения молекул посредством теплообмена между телами. Полученную телом (системой) теплоту, принято считать положительной ($\Delta Q > 0$), а отданную — отрицательной ($\Delta Q < 0$). Применение закона сохранения энергии к тепловым процессам приводит к уравнению

$$\Delta Q = \Delta U + A.$$

Это уравнение представляет собой математическую запись *первого начала термодинамики: для системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, количество теплоты ΔQ , сообщенное системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии ΔU и на совершение системой работы A против внешних сил.* Если система периодически возвращается в первоначальное (исходное) состояние, то изменение внутренней энергии $\Delta U = 0$. Следовательно, в таком процессе совершенная системой работа $A = \Delta Q$. Последнее равенство говорит о том, что невозможно построить периодически действующий двигатель, который бы совершал работу, большую подводимой к нему извне энергии. То же самое можно сказать иначе: вечный двигатель первого рода невозможен. Для элементарного изменения состояния системы уравнение первого начала имеет вид:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

В такой форме записи подчеркивается, что внутренняя энергия является полным дифференциалом (dU), а работа и теплота (δA и δQ) не являются полными дифференциалами. Сказанное означает, что *внутренняя энергия — это функция состояния системы, а работа и теплота — функции процесса.*

Примечание. *Функция состояния — это такая физическая характеристика, изменение которой при переходе системы из одного состояния в другое не зависит от вида термодинамического процесса, а определяется начальным и конечным состояниями системы.*

При протекании термодинамического процесса система может совершать положительную или отрицательную внешнюю работу. Другими словами, система совершает работу над средой или среда над системой. Рассмотрим расширение газа в цилиндре с поршнем. Если давление газа равно p , а площадь поршня — S , то сила, действующая на поршень, равна $p \cdot S$. При перемещении поршня на бесконечно малое расстояние dl совершается работа $\delta A = p \cdot S \cdot dl$. Произведение $S \cdot dl$ равно увеличению объема системы dV , поэтому можно записать, что

$$\delta A = p \cdot dV,$$

если давление однородно по всему объему, находящемуся под поршнем. Выражение справедливо и в общем случае, оно не зависит от формы сосуда. Для конечного процесса полная работа, проделанная системой в результате равновесного расширения от объема V_1 к объему V_2 , может быть найдена в результате интегрирования:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV.$$

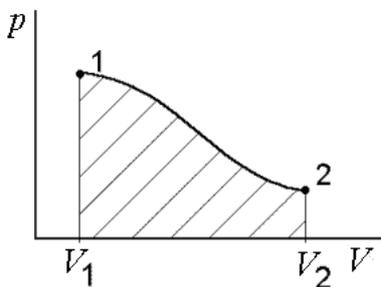


Рис. 2.2. Диаграмма «давление — объем»

При использовании графического метода работа A получает простое геометрическое истолкование. Процесс перехода системы из состояния 1 в состояние 2 на диаграмме давление — объем ($p - V$) изображается кривой, соединяющей точки 1 и 2 (рис. 2.2). Форма кривой зависит от вида рассматриваемого процесса. Работа графически соответствует заштрихованной площади, ограниченной зависимостью $p = f(V)$, осью абсцисс (ось V) и вертикальными прямыми, соответствующими начальному и конечному объему.

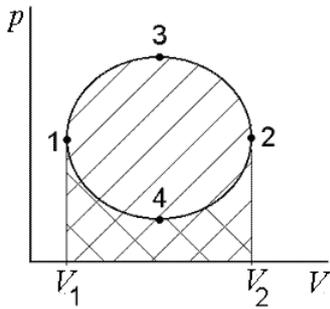


Рис. 2.3. Диаграмма циклического процесса

Особенно важны процессы, в которых начальное и конечное состояние системы одинаковы. Такие процессы называются *циклическими* или *циклами* (рис. 2.3). На диаграмме «давление – объем» цикл изображается кривой 13241. Работа A , выполненная системой за цикл, равна площади, заключенной внутри этой кривой. В самом деле, работа, выполняемая во время процесса 132, положительна и равна площади, заштрихованной один раз. Работа, выполняемая во время процесса 241, отрицательна и равна площади, заштрихованной дважды. Суммарная работа равна разности этих двух площадей и, следовательно, равна площади внутри замкнутой кривой, изображающей цикл. Заметим, что работа положительна, если цикл протекает по часовой стрелке, и отрицательна в противном случае. Если объем системы во время процесса не изменяется, т. е. $V = \text{const}$ и $dV = 0$, то работа не совершается: $\delta A = 0$.

Изопроцессами называют термодинамические процессы, протекающие при неизменном значении какого-либо параметра состояния (при неизменной массе системы).

Изохорный процесс протекает при постоянном объеме системы.

Изобарный процесс протекает при постоянном давлении.

Изотермический процесс протекает при постоянной температуре.

Адиабатический (или адиабатный) процесс протекает в термодинамической системе без теплообмена с окружающей средой.

Применим первое начало термодинамики к изопроцессам, протекающим в идеальных газах.

1. **Изохорный процесс** ($V = \text{const}$). Газ в таком процессе не совершает работы, $\delta A = 0$, и вся подводимая к нему теплота идет на увеличение внутренней энергии:

$$\delta Q = dU.$$

2. **Изобарный процесс** ($p = \text{const}$). Работа газа при таком процессе находится из соотношения:

$$A = p \cdot \Delta V = p \cdot (V_2 - V_1).$$

Подводимая к газу теплота расходуется на увеличение его внутренней энергии и на совершение газом работы:

$$\Delta Q = \delta U + p \cdot \Delta V.$$

3. *Изотермический процесс* ($T = \text{const}$). Внутренняя энергия газа остается постоянной $U = \text{const}$, а теплота, подведенная к газу, целиком расходуется на совершение работы расширения

$$A = (m/M) \cdot R \cdot T \cdot \ln(V_2/V_1).$$

4. *Адиабатический (адиабатный) процесс* ($\delta Q = 0$) описывается уравнением адиабаты (уравнение Пуассона) $p \cdot V^\gamma = \text{const}$. Здесь показатель степени $\gamma = C_p/C_v$. Это отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме. Для такого процесса $\delta A = -dU$, т. е. внешняя работа совершается газом за счет уменьшения его внутренней энергии. Кривая адиабаты в координатах «давление – объем» идет круче изотермы. Газ при адиабатическом расширении охлаждается, а при сжатии – нагревается.

Теплоемкостью тела C называется отношение элементарного количества теплоты δQ , сообщенного телу в каком-либо процессе, к соответствующему изменению температуры тела: $C = \delta Q/dT$.

Удельная теплоемкость $c_{уд}$ – это теплоемкость единицы массы однородного вещества: $c_{уд} = \delta Q/(m \cdot dT)$, измеряется в Дж/(кг·К).

Молярной теплоемкостью называют теплоемкость одного моля вещества: $c_m = \delta Q/(v \cdot dT)$. Измеряется в Дж/(моль·К).

Различают *теплоемкости при постоянном объеме* $C_v = (\delta Q/dT)_v$ и *постоянном давлении* $C_p = (\delta Q/dT)_p$. Чтобы оценить теплоемкость идеального газа, воспользуемся первым началом термодинамики и выражением для внутренней энергии газа. Для одного моля идеального газа находим

$$C_v = \frac{i}{2} \cdot R; \quad C_p = \frac{i+2}{2} \cdot R; \quad C_p - C_v = R.$$

Соотношение $C_p - C_v = R$, записанное для молярных теплоемкостей, называется *уравнением Майера*. Для одного моля идеального *одноатомного газа* ($i = 3$) получаем

$$C_v = (3/2)R; \quad C_p = (5/2)R; \quad \gamma = C_p/C_v = 1,66.$$

Для идеального *двухатомного газа* ($i = 5$):

$$C_v = (5/2)R; \quad C_p = (7/2)R; \quad \gamma = C_p/C_v = 1,4.$$

Для идеального *трехатомного и многоатомных газов* ($i = 6$):

$$C_v = 3R; \quad C_p = 4R; \quad \gamma = C_p/C_v = 1,33.$$

2.3. Второе начало термодинамики

Важным понятием в термодинамике является обратимость процессов. *Обратимым термодинамическим процессом* называется процесс, происходящий с системой, когда при возвращении системы в исходное состояние, во всей системе и окружающих систему телах не происходит никаких изменений. *Необратимый термодинамический процесс* — это такой процесс, при котором возвращение системы в исходное состояние сопровождается изменениями в самой системе или окружающих систему телах. Привести пример реального обратимого процесса не представляется возможным. В качестве примера необратимого процесса можно рассмотреть процесс расширения газа в пустоту: газ, первоначально занимающий часть объема сосуда и отделенный от другой части непроницаемой перегородкой, после удаления перегородки через некоторое время займет весь объем сосуда. Очевидно, что самопроизвольно, без дополнительных затрат энергии, газ уже не соберется в первоначальном объеме. *Квазистатическим* называется процесс, текущий бесконечно медленно и представляющий собой последовательность равновесных состояний. Такой процесс является обратимым. Обратимые процессы протекают в обоих направлениях (как в прямом направлении, так и в обратном). Необратимые процессы могут протекать только в одном направлении. Первое начало термодинамики не позволяет определить направление протекания термодинамических процессов. Обобщение результатов многочисленных экспериментов привело к выводу *о невозможности построения такой тепловой машины (вечного двигателя второго рода), рабочее тело которой (например, газ), совершая обратимый замкнутый процесс, получило бы энергию в форме теплоты от одного внешнего тела и целиком передало ее в форме работы другому внешнему телу.* Сущность этого вывода и составляет основу **второго начала термодинамики**. Можно привести несколько формулировок второго начала термодинамики. На первый взгляд они не похожи друг на друга, но по физическому смыслу выражают одно и то же:

- 1) *не существует вечного двигателя второго рода;*
- 2) *при тепловом контакте двух тел с различными температурами тепло самопроизвольно переходит от более горячего тела к более холодному, а не наоборот;*
- 3) *невозможна тепловая машина периодического действия, у которой коэффициент полезного действия больше, чем у цикла Карно при тех же температурах горячего и холодного тепловых резервуаров (нагревателя и холодильника);*
- 4) *энтропия замкнутой системы не может убывать.*

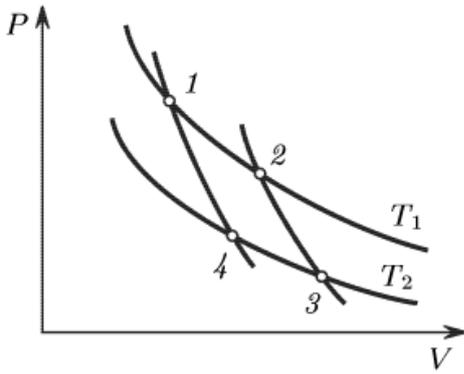


Рис. 2.4. Диаграмма цикла Карно

Французский инженер Карно рассмотрел идеальный круговой процесс, положенный в основу работы тепловой машины. *Круговым процессом (циклом)* называется такой процесс, при котором система после ряда изменений возвращается в исходное состояние. Машина Карно представляет собой систему цилиндр – поршень. Рабочим телом в машине является идеальный газ. Машина не имеет клапанов, то есть одно и то же

рабочее тело используется многократно. Тепловая машина имеет два тепловых резервуара: горячий с температурой T_1 и холодный с температурой T_2 , и работает, например, по циклу Карно (рис. 2.4).

При изотермическом расширении рабочее тело получает от горячего теплового резервуара количество теплоты $+\Delta Q_1$ (участок 1–2); затем происходит адиабатическое расширение (участок 2–3), и рабочее тело охлаждается до температуры T_2 . После чего начинается изотермическое сжатие (участок 3–4), в процессе которого рабочее тело отдает холодному тепловому резервуару количество теплоты ΔQ_2 . Затем происходит адиабатическое сжатие (участок 4–1), и температура рабочего тела повышается до T_1 . Полезная работа, произведенная машиной за цикл, равна разности между полученной и отданной теплотой, $A = \Delta Q_1 - \Delta Q_2$. В такой записи теплота ΔQ_2 положительна, если ее принять отрицательной, то должна быть записана алгебраическая сумма.

Коэффициент полезного действия цикла Карно не зависит от рода рабочего тела, а определяется только температурами нагревателя и холодильника, он равен $\eta = A/\Delta Q_1 = (\Delta Q_1 - \Delta Q_2)/\Delta Q_1 = (T_1 - T_2)/T_1$.

Из последнего соотношения следует, что

$$\begin{aligned} (\Delta Q_1 - \Delta Q_2)/\Delta Q_1 = (T_1 - T_2)/T_1 &\rightarrow (\Delta Q_2/\Delta Q_1) = \\ &= (T_2/T_1) \rightarrow (\Delta Q_1/T_1) - (\Delta Q_2/T_2) = 0. \end{aligned}$$

Величину $\Delta Q/T$ называют *приведенным количеством теплоты*. Мы видим, что для цикла Карно *алгебраическая сумма приведенных теплот равна нулю*. Доказывается, что она равна нулю и для любого обратимого кругового процесса; это так называемое *равенство Клаузиуса*.

Для характеристики направления теплообмена вводится термодинамическая характеристика S , называемая *энтропией* системы: $dS = \delta Q/T$. Изменение энтропии в любом обратимом термодинамиче-

ском процессе, переводящем систему из состояния 1 в состояние 2, находится через интегральную сумму приведенных теплот:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Физический смысл *энтропии* выяснен *Больцманом*. Это мера неупорядоченности системы, состоящей из множества частиц. Чем больше хаоса в координатах и скоростях частиц системы, тем больше вероятность того, что система находится в состоянии беспорядка. *Энтропия является количественной мерой степени молекулярного беспорядка*. Существуют понятия: *микросостояние* и *макросостояние* термодинамической системы. Под *микросостоянием* принято понимать рассмотрение системы на молекулярном уровне, когда молекулы, составляющие систему, изначально считаются отличающимися друг от друга. *Макросостояние* системы характеризуется только числом входящих в систему молекул, и об индивидуальных различиях молекул речи уже не идет. Больцман рассмотрел взаимосвязь микросостояний и макросостояний термодинамических систем. Было введено понятие *термодинамической вероятности* состояния \mathcal{P} . Это соответствующее данному макросостоянию число возможных микросостояний системы. Как правило, $\mathcal{P} \gg 1$. Формула Больцмана, связывающая энтропию с *термодинамической вероятностью* \mathcal{P} , имеет вид: $S = k \cdot \ln \mathcal{P}$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — *постоянная Больцмана*.

В *обратимых* термодинамических *процессах* изменение энтропии равно нулю:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = 0 \text{ (или } S_1 = S_2).$$

Если процессы *необратимы*, энтропия, т. е. беспорядок системы, возрастает:

$$\Delta S > 0.$$

Для *произвольного термодинамического* процесса можно записать:

$$dS \geq \delta Q/T.$$

Знак равенства относится к обратимым процессам, а знак неравенства — к необратимым. Для *замкнутой (адиабатической) системы* $dS \geq 0$. Приведенный результат является математической записью второго начала термодинамики: *энтропия изолированной системы при любых происходящих в ней процессах не может убывать, и максимальное значение энтропии соответствует состоянию равновесия* (наиболее вероятному состоянию системы, для которого число микросостояний макси-

мально). При всех процессах, происходящих в замкнутой системе, система самопроизвольно не может переходить из более вероятного в менее вероятное состояние.

Наконец, Нернст сформулировал утверждение: *при абсолютном нуле температуры энтропия системы равна нулю*:

$$S \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow 0.$$

Это утверждение называют *третьим началом термодинамики*.

Есть еще один принцип, устанавливающий существование температуры, как функции состояния системы. Им определяется тепловое равновесие термодинамических систем. Его называют принципом температуры или нулевым началом термодинамики. *Если две термодинамические системы находятся в тепловом равновесии и одна из них находится в тепловом равновесии с третьей, то и другая будет находиться с третьей в таком же тепловом равновесии, как если бы между ними существовал тепловой контакт.*

Основное уравнение термодинамики для обратимых процессов объединяет первое и второе начала термодинамики и имеет вид:

$$T \cdot dS = dU + \delta A.$$

2.4. Элементы физической кинетики

Если в системе существует пространственная неоднородность плотности (массы), температуры или импульса упорядоченного движения молекул газа в разных слоях, то на хаотическое тепловое движение молекул накладывается упорядоченное движение, выравнивающее неоднородности. Возникающие процессы называются явлениями переноса. Среди явлений переноса принято различать диффузию, теплопроводность и внутреннее трение, которое часто называют вязкостью. При диффузии происходит направленный перенос массы, теплопроводность характеризуется направленным переносом энергии, внутреннее трение (вязкость) — направленным переносом импульса (количества движения). В основе всех явлений переноса лежит один и тот же молекулярный механизм — хаотическое тепловое движение и столкновения молекул. Хотя скорость движения молекул велика, процессы переноса совершаются относительно медленно. Это вызвано столкновениями между молекулами, препятствующими их свободному движению, заставляющими двигаться по сложным траекториям.

Взаимодействие между молекулами становится заметными лишь при малых расстояниях между ними. Поэтому можно полагать, что частица газа между последовательными соударениями движется прямолинейно и равномерно, проходя в среднем расстояние $\langle \lambda \rangle$, называемое *средней длиной свободного пробега*. Для идеальных газов средняя длина свободного пробега

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi p d^2}.$$

Здесь d – эффективный диаметр молекулы (минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул), n – концентрация молекул, p – давление, T – абсолютная температура, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Эффективный диаметр зависит от скорости молекул, несколько уменьшаясь с увеличением скорости (с повышением температуры).

Диффузия – это обусловленное хаотическим движением молекул явление постепенного взаимного проникновения граничащих друг с другом веществ. Даже в газах диффузия происходит достаточно медленно. Причина этого в межмолекулярных столкновениях. Закон диффузии в жидкой и газообразной среде был найден немецким физиком Фиком:

$$dm = -D \cdot (dc/dl) \cdot dS \cdot dt.$$

Количество вещества dm , диффундирующее за время dt через элементарную площадку dS , перпендикулярную к направлению dl , вдоль которого происходит диффузия, пропорционально площади этой площадки, градиенту концентрации dc/dl и времени dt . Для газов коэффициент самодиффузии можно оценить из соотношения

$$D = (1/3) \cdot v_{ca} \cdot \langle \lambda \rangle,$$

где v_{ca} – средняя арифметическая скорость частиц газа. Для различных газов при нормальных условиях $D \approx (10^{-5} \div 10^{-4})$ м²/с.

Внутреннее трение (вязкость) возникает из-за сил трения между слоями газа, если слои движутся с различными скоростями v . Внутреннее трение в газах описывается законом Ньютона:

$$\tau = -\eta \cdot (dv/dy).$$

Здесь τ – напряжение трения (сила внутреннего трения, приходящаяся на единицу поверхности газового слоя), dv/dy – градиент скорости в направлении, перпендикулярном движению. Коэффициент вязкости (динамическую вязкость) η можно оценить через коэффициент

диффузии D и плотность ρ газа из соотношения $\eta = \rho \cdot D$. В СИ единица коэффициента вязкости – паскаль·секунда (Па·с). До 1980 г. допускалась к применению единица вязкости – пуаз (П): $1 \text{ П} = 0,1 \text{ Па}\cdot\text{с}$.

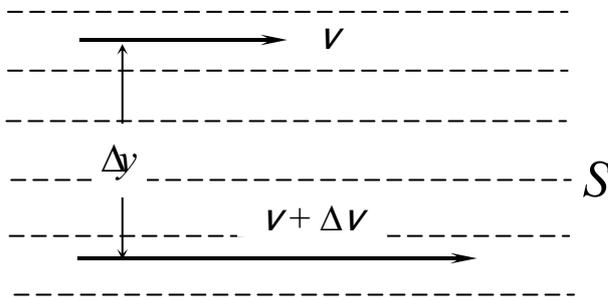


Рис. 2.5. Вязкость, обусловленная различием скоростей слоев газа

Менее точное, но практически более значимое соотношение записывают для конечных приращений Δv и Δy : $\tau = -\eta \cdot (\Delta v / \Delta y)$. Вязкость – это свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одного слоя вещества относительно другого. Пусть какой-либо

слой жидкости или газа течет со скоростью v (рис. 2.5), а слой, отстоящий от него на расстоянии Δy , со скоростью $v + \Delta v$. Скорость при переходе от слоя к слою изменяется на величину Δv , т. е. градиент $\Delta v / \Delta y$ характеризует быстроту изменения скорости в направлении y . При движении плоских слоев сила трения между ними равна

$$F = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta y} S,$$

где S – площадь соприкосновения слоев. Коэффициент вязкости зависит от рода газа или жидкости, давления и температуры. Направлены силы трения по касательной к поверхности соприкосновения слоев. В газах расстояние между молекулами существенно больше радиуса действия молекулярных сил, поэтому вязкость газов – следствие хаотического движения молекул. В жидкостях, где расстояние между молекулами много меньше, чем в газах, вязкость обусловлена межмолекулярным взаимодействием.

Теплопроводность у газов проявляется в том, что при наличии градиента температур возникает направленный поток тепла из горячей области в более холодную. Подсчет теплопроводности производится на основе закона Фурье:

$$dQ = -K \cdot (dT/dl) \cdot dS \cdot dt.$$

Так определяется количество теплоты, проходящей через элементарную площадку dS , нормальную к направлению переноса dl , за время dt . Здесь dT – разность температур, (dT/dl) – градиент температур в направлении переноса. Коэффициент теплопроводности $K = \eta \cdot c_v$, здесь c_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Основные расчетные формулы

1. Закон Бойля–Мариотта: $p \cdot V = \text{const}$.
2. Закон Гей–Люссака: $V = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)$, где V_0 – объем газа при температуре $t = 0$ °С.
3. Закон Шарля: $p = p_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)$, где p_0 – давление при температуре $t = 0$ °С.
4. Закон Дальтона: $p = \Sigma p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n$.
5. Уравнение Клапейрона–Менделеева: $p \cdot V = m/M \cdot R \cdot T$, где $R = 8,31$ Дж/(моль·К).
6. Уравнение состояния идеального газа: $p = n \cdot k \cdot T$; $p \cdot V = N \cdot k \cdot T$; $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.
7. Основное уравнение МКТ идеальных газов: $p \cdot V = 2/3 \cdot W_k$.

8. Средняя кинетическая энергия частицы газа: $\langle W \rangle = \frac{m_i \langle v_i \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} k \cdot T$.

9. Внутренняя энергия идеального газа: $U = (i/2) \cdot (m/M) \cdot R \cdot T$.

10. Первое начало термодинамики: $\Delta Q = \Delta U + A$.

11. Изохорный процесс ($V = \text{const}$). $\delta Q = dU$.

12. Изобарный процесс ($p = \text{const}$). $A = p \cdot \Delta V = p \cdot (V_2 - V_1)$.

13. Изотермический процесс ($T = \text{const}$). $A = (m/M) \cdot R \cdot T \cdot \ln(V_2/V_1)$.

14. Адиабатический процесс (уравнение Пуассона) $p \cdot V^\gamma = \text{const}$, $\gamma = C_p/C_v$.

$$A = [RT_1/(\gamma - 1)](m/M)[1 - (V_1/V_2)^{\gamma-1}] =$$

$$= [RT_1/(\gamma - 1)](m/M)[1 - (T_2/T_1)] = p_1 V_1 (T_1 - T_2)/[(\gamma - 1) T_1],$$

где p_1 и V_1 – давление и объем газа при температуре T_1 .

15. Удельная теплоемкость $c_{уд} = \delta Q/(m \cdot dT)$.

16. Молярная теплоемкость $c_m = \delta Q/(v \cdot dT)$.

17. Для одного моля газа: $C_v = i/2 \cdot R$; $C_p = (i+2)/2 \cdot R$; уравнение Майера: $C_p - C_v = R$.

18. Для одного моля газа:

одноатомного ($i = 3$) $C_v = (3/2)R$; $C_p = (5/2)R$; $\gamma = C_p/C_v = 1,66$.

двухатомного ($i = 5$) $C_v = (5/2)R$; $C_p = (7/2)R$; $\gamma = C_p/C_v = 1,4$.

трех- и многоатомного ($i = 6$) $C_v = 3R$; $C_p = 4R$; $\gamma = C_p/C_v = 1,33$.

19. Распределение Максвелла $\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2 dv$,

где m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, v – скорость молекулы, T – термодинамическая температура, N – общее число молекул.

20. Наиболее вероятная скорость движения молекул

$$v_{ver} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

21. Наиболее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости связаны соотношением $v_{ver} : \langle v \rangle : \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 1:1,13:1,22$.

22. Формула распределения Максвелла упрощается, если ввести так называемую относительную скорость $U = v/v_{ver}$

$$F(v) = \frac{dN_u}{NdU} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp(-U^2)U^2.$$

23. Барометрическая формула $p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)$.

24. Распределение Больцмана $n = n_0 \exp\left(-\frac{W_p}{kT}\right)$.

25. Средняя длина свободного пробега молекул $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$, где d –

эффективный диаметр молекулы. Общее число столкновений всех молекул в единице объема за единицу времени равно $z = \langle v \rangle / \lambda$.

26. КПД цикла Карно $\eta = A/\Delta Q_1 = (\Delta Q_1 - \Delta Q_2)/\Delta Q_1 = (T_1 - T_2)/T_1$.

27. Энтропия системы: $dS = \delta Q/T$.

28. Формула Больцмана $S = k \cdot \ln \mathcal{P}$, где \mathcal{P} – *термодинамическая вероятность*.

29. Основное уравнение термодинамики: $T \cdot dS = dU + \delta A$.

30. Перенос массы – диффузия – закон Фика

$$dM = -D \left(\frac{dn}{dx} \right) m dS dt; D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda,$$

где dM – масса вещества, перенесенного при диффузии через площадку dS за время dt , D – коэффициент диффузии.

31. Перенос энергии – теплопроводность – закон Фурье

$$dQ = -K \left(\frac{dT}{dx} \right) dS dt; K = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho C_v,$$

где dQ – количество теплоты, прошедшей через площадку dS за время dt , K – коэффициент теплопроводности, C_v – теплоемкость при постоянном объеме.

32. Перенос импульса – внутреннее трение (вязкость) – закон Ньютона

$$dF = -\eta \frac{dv}{dn} dS; \eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda,$$

где dF – сила внутреннего трения, действующая на элемент поверхности слоя площадью dS , η – коэффициент внутреннего трения (динамической вязкости).

Примеры решения задач

Пример 1. В баллоне объемом 10 л находится водород при давлении $p_1 = 10^5$ Па и температуре $T_1 = 300$ К. Из баллона вышло $m = 0,1$ г газа и температура понизилась на 10 К. Найти давление p_2 газа, оставшегося в сосуде.

Решение. Запишем дважды уравнение Клапейрона–Менделеева для начального и конечного состояний

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} RT_1; p_2 V = \frac{m_2}{M} RT_2.$$

Найдя из этих уравнений m_1 и m_2 , вычтем одно из другого, тогда

$$\Delta m = \frac{M p_1 V}{RT_1} - \frac{M p_2 V}{RT_2}.$$

Из этого уравнения определим p_2

$$p_2 = T_2 \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{\Delta m R}{M V} \right) = 290 \left(\frac{10^5}{300} - \frac{10^{-2} \cdot 8,31}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}} \right) = 8,5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Пример 2. Найти плотность смеси, состоящей из 4 г водорода и 32 г кислорода при температуре $T = 280$ К и давлении $p = 10^5$ Па.

Решение. По закону Дальтона давление смеси равно $p = p_1 + p_2$, где p_1 и p_2 – парциальные давления водорода и кислорода при данных условиях. Найдём p_1 и p_2 из закона Клапейрона–Менделеева и подставим в p :

$$p = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right); V = \frac{RT}{p} \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right).$$

По определению плотность смеси газов

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{(m_1 + m_2)p}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) RT} = 0,5 \text{ кг/м}^3.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Три сосуда объемами V_1 , V_2 , V_3 соединены тонкими трубами. Вначале они находятся при температуре T_0 и давлении p_0 . Затем сосуды объемами V_1 и V_3 нагревают до температур T_2 и T_3 . Найти давление p , установившееся в сосудах.

2. До какой температуры нужно нагреть колбу с воздухом, первоначально находившуюся при температуре $T = 300$ К, чтобы его плотность уменьшилась в 1,5 раза?

3. В запаянном сосуде находится вода, занимающая объем, равный половине объема сосуда. Найти давление p и плотность ρ водяного пара при температуре $t = 400$ °С.

4. В закрытом сосуде объемом $V = 1$ м³ находится масса $m_1 = 1,6$ кг кислорода и масса $m_2 = 0,9$ кг воды. Найти давление p в сосуде при $t = 500$ °С.

5. В сосуде объемом $V = 2$ м³ находится масса $m_1 = 1,6$ кг углекислого газа (CO_2) и масса $m_2 = 5$ г закиси азота (N_2O) при температуре $t = 127$ °С. Найти давление p смеси в сосуде.

6. В сосуде находится масса $m_1 = 14$ г азота и масса $m_2 = 9$ г водорода при $t = 10$ °С и давлении $p = 1$ МПа. Найти молярную массу μ смеси и объем V сосуда.

7. Закрытый сосуд объемом $V = 2$ л наполнен воздухом при нормальных условиях. В сосуд вводится диэтиловый эфир ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OC}_2\text{H}_5$). После испарения эфира давление в сосуде стало $p = 0,14$ МПа. Какая масса m эфира введена в сосуд?

8. В воздухе содержится 23,6 % кислорода и 76,4 % азота (по массе) при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 13$ °С. Найти плотность ρ воздуха и парциальные давления p_1 и p_2 кислорода и азота.

9. В баллоне $V = 25$ л находится водород при температуре $T = 290$ К. После того, как часть водорода израсходована, давление в баллоне понизилось на $\Delta p = 0,8$ МПа. Определить массу m израсходованного водорода.

10. Оболочка аэростата $V = 1600$ м³, находящегося у поверхности Земли, наполнен водородом на $7/8$ при давлении $p = 10^5$ Па и температуре $T = 290$ К. Аэростат подняли на некоторую высоту, где давление $p_1 = 80$ Па и температура $T_1 = 28$ К. Найти массу m водорода, вышедшего из оболочки аэростата при его подъеме.

11. Сосуд объемом $V = 20$ л содержит смесь водорода и гелия при температуре $t = 20$ °С и давлении $p = 2$ атм. Масса смеси $m = 5$ г. Найти соотношение между массами водорода гелия.

12. Сколько потребуется гелия, чтобы шар диаметром 10 м смог поднять груз массой 100 кг при давлении $p = 10^5$ Па и температуре $T = 290$ К?

13. В баллоне под давлением $p = 10^6$ Па находится газовая смесь кислорода и азота. Считая, что масса кислорода составляет 20 % от массы смеси, определить парциальные давления p_1 и p_2 отдельных газов.

14. В баллонах объемом $V_1 = 10$ л и $V_2 = 25$ л содержится газ при давлениях $p_1 = 2 \cdot 10^6$ Па и $p_2 = 10^6$ Па. Найти общее давление p и парциальные p_1' и p_2' после соединения баллонов при постоянной температуре.

15. Баллон емкостью $V = 30$ л содержит смесь водорода и гелия при температуре $T = 300$ К и $p = 10^6$ Па. Масса смеси $m = 100$ г. Найти массу m_1 водорода и m_2 гелия.

16. На сколько изменится подъемная сила аэростата, если газ в аэростате нагреть от $T_0 = 273$ К до $T = 293$ К? Давление газа в оболочке и атмосфере постоянны и равны $p = 10^5$ Па. Плотность воздуха при нормальных условиях $\rho_0 = 1,29$ кг/м³.

17. Плотность газа, состоящего из смеси гелия и аргона при давлении 152 кПа и температуре 300 К, равна $\rho = 2$ кг/м³. Сколько атомов гелия содержится в 1 см³ газовой смеси?

18. В баллоне объемом $V = 0,25$ м³ находится смесь углекислого газа и паров воды при температуре 500 К. Число молекул CO_2 $N_1 = 6,6 \cdot 10^{21}$, а паров воды $N_2 = 0,9 \cdot 10^{21}$. Найти давление p и молекулярную массу μ газовой смеси.

19. Из баллона со сжатым водородом $V = 10$ л выпускают газ. Первоначально при температуре $t = 7$ °С давление было $5 \cdot 10^4$ Па. Через некоторое время при температуре $t = 17$ °С давление газа оказалось таким же. Сколько газа вышло из баллона?

20. В баллоне $V = 7,5$ л при $t = 300$ К находится смесь газов: $\nu_1 = 0,1$ моля кислорода, $\nu_2 = 0,2$ моля азота и $\nu_3 = 0,3$ моля углекислого газа. Найти давление и молярную массу смеси.

21. В сосуде находится смесь $m_1 = 8$ г азота N_2 и $m_2 = 10$ г углекислого газа CO_2 при $T = 300$ К и давлении $p_0 = 1$ атм. Найти плотность этой смеси.

22. Объем пузырька воздуха по мере всплывания его со дна озера на поверхность увеличился вдвое. Какова глубина озера? $p_{\text{атм}} = 10^5$ Па.

23. В колбе емкостью $V = 400$ см³ содержится газ при $T = 300$ К. На сколько понизится давление p газа в колбе, если из колбы выйдет $N = 10^{20}$ молекул?

24. Объем воздуха в комнате 100 м³. Какова масса вышедшего из него воздуха при повышении температуры от 18 до 28 °С, если атмосферное давление 10^5 Па?

25. В закрытом сосуде $V = 4$ м³ находятся масса $m_1 = 1,6$ кг кислорода и масса $m_2 = 0,9$ кг воды. Найти давление в сосуде при температуре 500 °С.

26. В сосуде находятся масса $m_1 = 28$ г азота и масса $m_2 = 2$ г водорода при температуре $t = 27$ °С и давлении $p = 1$ МПа. Найти молярную массу M смеси и объем V сосуда.

27. В сосуд объемом $V = 10$ л, наполненный сухим воздухом при давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $T_0 = 0$ °С, вводят 3 г воды и нагревают до $T = 100$ °С. Найти давление влажного воздуха при этой температуре.

28. Газовая смесь, состоящая из кислорода и азота, находится в баллоне под давлением $p = 10^8$ Па. Считая, что масса кислорода составляет 80 % от массы смеси, найти парциальные давления p_1 и p_2 отдельных газов.

29. Найти давление смеси газов, находящихся в объеме $V = 10^{-2}$ м³ при температуре $T = 300$ К и состоящей из азота массой $m_1 = 14$ г и кислорода массой $m_2 = 16$ г.

30. В цилиндре под поршнем площадью $S = 100$ см² находится воздух. Поршень расположен на высоте $h = 50$ см от дна цилиндра. На поршень кладут груз массой $m = 50$ кг, при этом он опускается на $l = 10$ см. Найти температуру воздуха после опускания поршня, если до его опускания давление было $p_0 = 101$ кПа, а температура 12 °С.

31. Определить массу молекулы кислорода, зная его молярную массу.

32. Сколько молекул содержится в одном грамме углекислого газа?

33. Определить число атомов натрия в объеме 1 см³.

34. Определить концентрацию молекул кислорода в сосуде емкостью 3 литра, если масса газа в сосуде равна 1,4 г.

35. В сосуде емкостью 3,2 литра находится 4,6 молей углекислого газа. Определить его плотность.

36. В помещении объемом 45 м³ испарился 1 г ртути. Сколько молекул ртути содержится в 1 см³ воздуха?

37. За 10 суток из открытого стакана испарилось 0,1 кг воды. Сколько в среднем вылетало молекул с поверхности воды за 1 секунду?

38. В озеро средней глубиной 10 м и площадью 10 км² бросили 10 мг NaCl. Считая, что соль, растворившись, равномерно распределилась в воде, определить число ионов хлора в кубическом сантиметре.

39. Капля масла объемом $13 \cdot 10^{-3}$ мм³ растеклась по поверхности воды тонким слоем, образовав пятно площадью 320 см². Считая пятно мономолекулярным слоем, найти диаметр молекулы масла.

40. Слой серебра толщиной 1 мкм нанесен на поверхность площадью $2 \cdot 10^{-3}$ м². Сколько атомов серебра содержится в слое?

41. Зная плотность и молярную массу воды, найти среднее расстояние между молекулами воды.

42. В сосуде находится 17 г азота; 24 % всех молекул распалось на атомы. Определите число частиц в газе.

43. В сосуде находится 14 мг гелия, 79 мг азота и 15 мг водорода. Определите молярную массу смеси.

44. Воздух состоит из 78,1 % молекул азота, 20,9 % кислорода, 0,94 % аргона, 0,06 % водяных паров. Найти среднюю молярную массу воздуха.

45. Смесь аргона и гелия состоит по массе на 35 % из гелия. Определите молярную массу смеси.

Ответы

1. $p = (p_0/T_2)(V_1+V_2+V_3)(V_2/T_0+V_1/T_2+V_3/T_3)^{-1}$. 2. $T = 440$ К. 3. $p = 155$ МПа; $\rho = 500$ кг/м³. 4. $p = 640$ кПа. 5. $p = 415$ кПа. 6. $M = 0,0046$ кг/моль; $V = 11,7$ л. 7. $m = 2,5$ г. 8. $\rho = 1,2$ кг/м³; $p_1 = 21$ кПа; $p_2 = 79$ кПа. 9. $m = 9,6$ г. 10. $m = 6,2$ кг; $k = 7/8$. 11. $m_1/m_2 = 0,5$. 12. $m = 530$ кг. 13. $p_1 = 0,18$ МПа; $p_2 = 0,82$ МПа. 14. $p_1 = 570$ кПа; $p_2 = 0,714$ МПа. 15. $m_1 = 76$ г; $m_2 = 24$ г. 16. $\Delta F = 1,39$ кН. 17. $n = 7 \cdot 10^{18}$ см⁻³. 18. $p = 0,25$ кПа; $M = 41$ кг/кмоль. 19. $m = 1,48$ г. 20. $p = 2$ атм; $M = 36,7$ г/моль. 21. $\rho = 0,9$ кг/м³. 22. $h = 10,3$ м. 23. $\Delta p = 1$ кПа. 24. $\Delta m = 400$ кг. 25. $p = 160$ кПа. 26. $M = 15$ кг/кмоль; $V = 5$ л. 27. $p = 189$ кПа. 28. $p_1 = 26$ МПа; $p_2 = 30$ МПа. 29. $p = 250$ кПа. 30. $T_2 = 338$ К. 31. $m = 5,3 \cdot 10^{-26}$ кг. 32. $N = 1,4 \cdot 10^{22}$. 33. $N = 2,2 \cdot 10^{22}$. 34. $n = 8,8 \cdot 10^{24}$ м⁻³. 35. $\rho = 63$ кг/м³. 36. $N = 6,7 \cdot 10^{13}$. 37. $N = 3,9 \cdot 10^{18}$. 38. $N = 1,05 \cdot 10^6$. 39. $d = 4,1 \cdot 10^{-10}$ м. 40. $N = 1,2 \cdot 10^{20}$. 41. $d = 3,1 \cdot 10^{-10}$ м. 42. $N = 4,5 \cdot 10^{23}$. 43. $M = 7,8 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. 44. $M = 28,9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. 45. $M = 9,6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Элементы статистической физики

Примеры решения задач

Пример 1. В запаянном стеклянном баллоне заключен моль идеального газа при температуре $T = 300$ К. На сколько необходимо увеличить температуру газа, чтобы средняя скорость его молекул увеличилась на 10 %?

Решение. Средняя скорость молекул газа определяется формулой:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Мы можем записать

$$\langle v \rangle_1 = \sqrt{\frac{2kT_1}{m}} \quad \text{и} \quad \langle v \rangle_2 = \sqrt{\frac{2k(T_1 + \Delta T)}{m}}.$$

По условию задачи $\langle v \rangle_1 / \langle v \rangle_2 = 1,1$. Таким образом, имеем:

$$\frac{\langle v \rangle_2}{\langle v \rangle_1} = \frac{\sqrt{2k(T_1 + \Delta T)/m}}{\sqrt{2kT_1/m}} = \frac{\sqrt{T_1 + \Delta T}}{\sqrt{T_1}},$$

$$\left(\frac{\langle v \rangle_2}{\langle v \rangle_1} \right)^2 = 1 + \frac{\Delta T}{T}.$$

$$\text{Отсюда } \Delta T = \left[\left(\frac{\langle v \rangle_2}{\langle v \rangle_1} \right)^2 - 1 \right] T.$$

Подставляем данные: $\Delta T = [(1,1)^2 - 1]300 = 63 \text{ К}$.

Пример 2. Полагая температуру воздуха и ускорение свободного падения не зависящими от высоты, определить, на какой высоте h над уровнем моря плотность воздуха в 1,5 раза меньше своего значения на уровне моря. Температуру воздуха считать равной 15°C . Молярная масса воздуха $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Решение. При постоянной температуре плотность идеального газа пропорциональна давлению:

$$p = \frac{m}{V} \cdot \frac{1}{M} \cdot RT = \rho \frac{RT}{M}$$

или отсюда (с учетом барометрической формулы):

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} = \frac{p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)}{p_0} = \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

Логарифмируя данное выражение, получим:

$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{\rho_0}{\rho} = 3,37 \cdot 10^3 \text{ м} = 3,37 \text{ км}.$$

Пример 3. Какая часть молекул кислорода при температуре $t = 250^\circ\text{C}$ имеет скорости, лежащие в интервале от $v_1 = 400 \text{ м/с}$ до $v_2 = 1000 \text{ м/с}$?

Решение. Для нахождения искомого числа молекул найдем, какое количество молекул N_1 и N_2 имеет скорости, большие $\langle v \rangle_1$ и $\langle v \rangle_2$, соответственно. Тогда $N_x = N_1 - N_2$. Для нахождения чисел N_1 и N_2 воспользуемся распределением Максвелла. По определению $U = v/v_{\text{вер}}$. Для наших условий

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 521 \text{ м/с.}$$

$$\text{Отсюда } U_1 = \frac{400}{521} = 0,77; \quad U_2 = \frac{1000}{521} = 1,92.$$

По формуле Максвелла находим для этих значений U : $N_1/N = 0,74$ и $N_2/N = 0,05$. Полученные данные означают, что 74 % всех молекул движется со скоростями, превышающими скорость $\langle v \rangle_1 = 400$ м/с, и только 5 % молекул имеет скорости больше, чем $\langle v \rangle_2 = 1000$ м/с. Таким образом, относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от $\langle v \rangle_1$ до $\langle v \rangle_2$ будет равно:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{N_1}{N} - \frac{N_2}{N} = 0,69 \text{ \%}.$$

Пример 4. При некотором давлении и температуре $t = 10$ °С средняя длина свободного пробега молекул азота $\lambda = 95$ нм. Найти среднее число столкновений z_2 в единицу времени молекул азота, если при той же температуре давление азота уменьшить в 100 раз.

Решение. Среднее число столкновений молекул в единицу времени равно:

$$z = \frac{\langle v \rangle}{\lambda}; \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Отсюда $z_2 = \langle v \rangle / \lambda_2$. Мы знаем, что

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 n}}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad p = nkT$$

и при постоянной температуре $n_1/n_2 = p_1/p_2$. Таким образом,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{p_2}{p_1}; \quad \lambda_2 = \lambda_1 \frac{p_1}{p_2},$$

а искомое среднее число столкновений будет равно:

$$z_2 = \frac{\langle v \rangle}{\lambda_2} = \frac{\sqrt{8RT/\pi M}}{\lambda_1 p_1 / p_2} = 4,9 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В баллоне находится моль идеального газа при температуре $T = 293$ К. На сколько необходимо повысить температуру газа, чтобы средняя скорость его молекул увеличилась на 1 %?

2. Определить, на какой высоте h над уровнем моря плотность воздуха в 2 раза меньше своего значения на уровне моря. Температуру воздуха считать равной 0 °С.

3. Найти среднюю арифметическую $\langle v \rangle$, среднюю квадратичную $v_{\text{ср. кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ и наиболее вероятную $v_{\text{в}}$ скорости молекул газа, который находится при давлении $p = 0,3$ кг/м³.

4. При какой температуре T средняя квадратичная скорость молекул азота больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta v = 50$ м/с?

5. Какая часть молекул кислорода при $t = 0$ °С обладает скоростями от 100 до 110 м/с?

6. Какая часть молекул азота при $t = 150$ °С обладает скоростями v от 300 до 325 м/с?

7. Какая часть молекул водорода при $t = 0$ °С обладает скоростями v от 2000 до 2100 м/с?

8. Во сколько раз число молекул ΔN_1 , скорости которых лежат в интервале от $v_{\text{в}}$ до $v_{\text{в}} + \Delta v$, больше числа молекул ΔN_2 , скорости которых лежат в интервале $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ до $\sqrt{\langle v^2 \rangle} + \Delta v$?

9. Какая часть молекул азота при температуре T имеет скорости, лежащие в интервале от $v_{\text{в}}$ до $v_{\text{в}} + \Delta v$, где $\Delta v = 20$ м/с, если а) $T = 400$ К; б) $T = 900$ К?

10. Какая часть общего числа N молекул имеет скорости: а) больше наиболее вероятной скорости $v_{\text{в}}$; б) меньше наиболее вероятной скорости $v_{\text{в}}$?

11. В сосуде находится масса $m = 2,5$ г кислорода. Найти число N_x молекул кислорода, скорости которых превышают среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$.

12. Обсерватория находится на высоте $h = 3250$ м над уровнем моря. Найти давление P воздуха на этой высоте. Температуру воздуха считать не зависящей от высоты и равной 5 °С. Молярная масса воздуха $M = 0,029$ кг/моль. Давление воздуха на уровне моря $p_0 = 101,3$ кПа.

13. На какой высоте h давление воздуха составляет 75 % от давления на уровне моря? Температуру воздуха считать постоянной и равной $t = 0$ °С.

14. Самолет летит на высоте $h_1 = 8300$ м. В салоне при помощи компрессора поддерживается постоянное давление, соответствующее

высоте 2700 м. Найти разность Δp давлений внутри и снаружи салона. Температуру наружного воздуха t_1 считать равной 0°C .

15. Самолет летит на высоте $h_1 = 8300$ м, при этом в кабине поддерживается постоянное давление, соответствующее высоте 2700 м. Найти, во сколько раз плотность ρ_2 воздуха в кабине больше плотности ρ_1 воздуха вне ее, если температура наружного воздуха $t_1 = -20^\circ\text{C}$, а температура воздуха в кабине $t_2 = +20^\circ\text{C}$?

16. Найти плотность ρ воздуха: а) у поверхности Земли; б) на высоте $h = 4$ км от поверхности Земли. Температуру воздуха t считать не зависящей от высоты и равной 0°C . Давление воздуха у поверхности Земли $p_0 = 100$ кПа.

17. Найти среднюю длину свободного пробега молекул λ углекислого газа при температуре $t = 10^\circ\text{C}$ и давлении $p = 433$ Па. Диаметр молекул углекислого газа $d = 0,32$ нм.

18. Найти плотность ρ воздуха: а) у поверхности Земли; б) на высоте $h = 5$ км от поверхности Земли. Температуру воздуха t считать не зависящей от высоты и равной 10°C . Давление у поверхности Земли $p_0 = 750$ мм рт.ст.

19. В сосуде находится масса $m = 5$ г азота. Найти число N_x молекул азота, скорости которых превышают среднюю квадратичную скорость $\langle v^2 \rangle$.

20. Какая часть общего числа N молекул имеет скорости: а) больше средней скорости $\langle v \rangle$; б) меньше средней скорости $\langle v \rangle$?

21. Какая часть общего числа N молекул имеет скорости: а) больше средней квадратичной скорости $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$; б) меньше средней квадратичной скорости $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$?

22. В баллоне находится моль идеального газа при температуре $T = 300$ К. На сколько необходимо повысить температуру газа, чтобы средняя скорость его молекул увеличилась на 5 %?

23. В баллоне находится моль идеального газа при температуре $T = 273$ К. На сколько необходимо повысить температуру газа, чтобы средняя скорость его молекул увеличилась на 5 %?

24. В баллоне находится моль идеального газа при температуре $T = 280$ К. На сколько необходимо повысить температуру газа, чтобы средняя квадратичная скорость его молекул ($v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$) увеличилась на 3 %?

25. Найти среднее число столкновений z в единицу времени молекул кислорода при давлении $p = 50$ кПа и температуре $t = 27^\circ\text{C}$. Диаметр молекул кислорода принять равным $0,3$ нм; $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

26. Найти среднюю длину свободного пробега λ атомов водорода, если известно, что плотность водорода $\rho = 0,01 \text{ кг/м}^3$. Диаметр молекул водорода $d = 0,23 \text{ нм}$.

27. В сосуде находится кислород, плотность которого $\rho = 1,5 \text{ кг/м}^3$. Средняя длина свободного пробега его молекул $\lambda = 90 \text{ нм}$. Найти диаметр d молекул кислорода.

28. Найти среднюю арифметическую $\langle v \rangle$, среднюю квадратичную $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ и наиболее вероятную $v_{\text{в}}$ скорости молекул газа, который при давлении $p = 30 \text{ кПа}$ имеет плотность $\rho = 0,1 \text{ кг/м}^3$.

29. Найти среднюю арифметическую $\langle v \rangle$, среднюю квадратичную $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ и наиболее вероятную $v_{\text{в}}$ скорости молекул газа, который при давлении $p = 50 \text{ кПа}$ имеет плотность $\rho = 0,3 \text{ кг/м}^3$.

30. В сосуде находится масса $m = 15 \text{ г}$ азота. Найти число N_x молекул азота, скорости которых превышают наиболее вероятную скорость $v_{\text{в}}$.

31. Тепловое движение механизма пружинных весов определяет при заданной температуре T предел их чувствительности. Оценить предельно малую массу, которая может быть измерена при взвешивании на весах, если коэффициент жесткости пружины равен α .

32. Найти при 300 К среднеквадратичную относительную флуктуацию углового отклонения математического маятника, если длина маятника $0,1 \text{ м}$, масса 10^{-4} кг .

33. Определить среднюю энергию на одну степень свободы вращательного движения молекулы газа при 300 К , а также среднюю квадратичную частоту вращения молекулы кислорода. Момент инерции молекулы O_2 вокруг оси $I = 1,92 \cdot 10^{-46} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

34. Определить среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекулы водорода, если первоначально он находился при нормальных условиях, а затем был адиабатно сжат в 32 раза.

35. Какое количество столкновений за одну секунду происходит между молекулами кислорода, занимающего объем 1 см^3 при давлении $p = 10^5 \text{ Па}$ и температуре $T = 273 \text{ К}$? Диаметр молекулы кислорода $d = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

36. Идеальный газ нагревают изобарно. Определить изменение длины свободного пробега и число столкновений молекул с изменением температуры.

37. При какой температуре среднеквадратичная скорость молекул кислорода равна такой же скорости молекул азота при $T = 373 \text{ К}$?

38. Согласно экспериментальным данным, отношение коэффициентов вязкости азота и водорода равно 19,4. Найти отношение коэффи-

циентов теплопроводности тех же газов, пользуясь представлениями классической кинетической теории газов.

39. Оценить, на какое среднее расстояние l от своего исходного положения удалится за $t = 10$ с молекула воздуха при нормальных условиях, если средняя длина свободного пробега $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м.

40. Оценить размер алюминиевой частицы ($\rho = 2700$ кг/м³), взвешенной в воде вязкостью $\eta = 1$ П, для которой скорость вязкого падения сравняется со скоростью теплового движения при комнатной температуре.

41. Сосуд содержит равные массы гелия и азота. Как относятся массы газов, вытекающие из сосуда в вакуум через отверстие, размеры которого гораздо меньше длин свободного пробега обоих газов?

42. Два сосуда с идеальным газом соединены трубкой, диаметр которой заметно меньше длины свободного пробега в обоих сосудах. Температура в сосудах поддерживается постоянной и равной соответственно T_1 и $T_2 = 2T_1$. Найти отношение давлений p_2/p_1 .

43. Вычислить среднее значение, абсолютную и относительную среднеквадратичные флуктуации числа очков, выпадающих при бросании «правильной» игральной кости, т. е. кости, при бросании которой любая грань выпадает с равной вероятностью.

44. На экзамене 20 % студентов получают неудовлетворительную оценку. Допускаются две попытки пересдачи. Первая попытка оказывается удачной для 70 % сдающих, вторая — для 50 %. Какая часть студентов не сдаёт этот экзамен?

45. Скорости частиц с равной вероятностью принимают все значения от 0 до v_0 . Определить среднюю и среднеквадратичную скорости частиц, а также абсолютную и относительную среднеквадратичные флуктуации скорости.

46. Найти отношение средней квадратичной скорости молекул двухатомного газа к скорости звука в этом газе.

47. Определить, на какой высоте в изотермической атмосфере плотность уменьшится в 5 раз, если известно, что на высоте 5,5 км она уменьшается в 2 раза.

48. Внутри равномерно вращающейся центрифуги с радиусом 0,2 м находится кислород. Найти относительную разность плотностей газа у стенки и на оси, если центрифуга совершает 40 об/мин, а температура равна 300 К.

49. Потенциальная энергия частицы в магнитном поле может принимать два значения: $\pm W$. Определить температуру, при которой средняя энергия взаимодействия частиц с магнитным полем равна $\langle W \rangle = -W/2$.

Ответы

1. $\Delta T = 5,89$ К. 2. $h = 5532$ км. 3. $v_b = 513$ м/с; $\langle v \rangle = 579$ м/с; $v_{\text{кв}} = 628$ м/с.
4. $T = 83$ К. 5. $\Delta N/N = 0,004$. 6. $\Delta N/N = 0,028$. 7. $\Delta N/N = 0,045$. 8. $\Delta N_1/N_2 = 1,1$.
9. а) $v_b = 487$ м/с, $\Delta N/N = 0,034$; б) $v_b = 731$ м/с, $\Delta N/N = 0,022$. 10. а) $N_1/N = 0,57$;
б) $N_2/N = 0,43$. 11. $\Delta N = 1,9 \cdot 10^{22}$. 12. $p = 67,2$ кПа. 13. $h = 2,3$ км. 14. $p_1 = 35,8$ кПа;
 $p_2 = 72,5$ кПа; $\Delta p = 36,7$ кПа. 15. $\rho_2/\rho_1 = 1,1$. 16. а) $1,28$ кг/м³; б) $0,78$ кг/м³.
17. $\lambda = 0,2$ мкм. 18. а) $1,23$ кг/м³; б) $0,66$ кг/м³. 19. $\Delta N = 0,4 \cdot 10^{23}$. 20. а) 44 %;
б) 56 %. 21. а) 38 %; б) 62 %. 22. $\Delta T = 30$ К. 23. $\Delta T = 28$ К. 24. $\Delta T = 16,8$ К.
25. $z = 2200$ МГц. 26. $\lambda = 1,4$ мкм. 27. $d = 30$ нм. 28. $v_e = 775$ м/с; $\langle v \rangle = 874$ м/с;
 $v_{\text{кв}} = 949$ м/с. 29. $v_e = 577$ м/с; $\langle v \rangle = 652$ м/с; $v_{\text{кв}} = 704$ м/с. 30. $\Delta N = 1,8 \cdot 10^{23}$.
31. $m \approx (\alpha k T)^{1/2} / g$. 32. $\sigma = 6,5 \cdot 10^{-9}$. 33. $\langle W \rangle = 1/2 k T = 2,1 \cdot 10^{-21}$ Дж; $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = 7,2 \cdot 10^{11}$ Гц.
34. $\langle W \rangle = k T (V_1/V_2)^{\gamma-1} = 1,65 \cdot 10^{-20}$ Дж. 35. $v = 1,7 \cdot 10^{31}$ см⁻³с⁻¹. 36. $\lambda \sim T$; $z \sim T^{-1/2}$.
37. $T = 426$ К. 38. $n = 0,13$. 39. $l \sim 0,025$ м. 40. $d = 1,6 \cdot 10^{-5}$ м. 41. гелия вытекает больше в 2,65 раза. 42. $p_2/p_1 = 1,4$. 43. 3,5; 1,71; 0,488. 44. 3 %. 45. $0,5v_0$;
 $v_0/\sqrt{3}$; $v_0/(2\sqrt{3})$; $1/\sqrt{3}$. 46. 1,46. 47. $h = 12,8$ км. 48. $4,5 \cdot 10^{-6}$. 49. $2W/(k \ln 3)$.

Физические основы термодинамики

Примеры решения задач

Пример 1. Азот $m = 280$ г нагревается при постоянном давлении. Зная, что количество затраченного тепла $Q = 600$ Дж и $c_v = 745$ Дж/(кг·К), найти повышение температуры азота.

Решение. Согласно первому закону термодинамики, $Q = \Delta U + A$. Изменение внутренней энергии $\Delta U = c_v m \Delta T$; работа при изобарическом процессе $A = p \Delta V = (m/M) R \Delta T$. Следовательно, $Q = m \Delta T (c_v + R/M)$, откуда $\Delta T = Q/[m(c_v + R/M)]$.

Находим численный результат:

$$\Delta T = 600 / \{0,28[(745 + (8,31/0,028))]\} \text{ К} = 2,1 \text{ К}.$$

Пример 2. Для нагревания 10 г неизвестного газа на 1К при постоянном давлении требуется 9,12 Дж, а для нагревания того же количества газа при постоянном объеме 6,49 Дж. Что это за газ?

Решение. Количество теплоты, требуемое для нагревания газа, зависит от условий нагревания: $Q_x = (m/M)c_x \Delta T$. При $p = \text{const}$, $Q_p = (m/M)c_p \Delta T$; при $V = \text{const}$, $Q_v = (m/M)c_v \Delta T$, откуда $c_p = MQ_p/(m \Delta T)$; $c_v = MQ_v/(m \Delta T)$. Здесь символом c с индексами обозначены молярные теплоемкости газа. Поскольку $c_p - c_v = R$, то можно записать:

$$M(Q_p - Q_v)/(m \Delta T) = R.$$

Отсюда окончательно получим $M = R m \Delta T / (Q_p - Q_v)$. Проверяем размерность:

$$[M] = (\text{Дж/моль К}) \text{кг К} / (\text{Дж} - \text{Дж}) = \text{кг/моль}.$$

Находим численный результат: $M = 8,31 \cdot 10^{-21} / 2,63 \text{ кг/моль} = 0,032 \text{ кг/моль}$. Воспользовавшись таблицей Менделеева, находим, что нагреваемый газ – кислород.

Пример 3. В цилиндре с подвижным невесомым поршнем находится ν молей идеального газа. Газу при постоянном давлении сообщено некоторое количество теплоты ΔQ . Определить: 1) изменение температуры газа; 2) изменение внутренней энергии газа; 3) совершенную газом работу; 4) связь между молярными теплоемкостями при постоянном давлении C_p и постоянном объеме C_v идеального газа.

Решение. Учитывая, что процесс протекает при постоянном давлении, запишем первое начало термодинамики в следующем виде:

$$\Delta Q = \nu C_v \Delta T + p_0 \Delta V. \quad (1)$$

Приведенного уравнения недостаточно для ответа на поставленные в задаче вопросы. В данном случае нам поможет уравнение Клапейрона–Менделеева, записанное для начального и конечного состояния газа:

$$p_0 V_0 = \nu R T_0; \quad (2)$$

$$p_1 V_1 = \nu R T_1. \quad (3)$$

Так как нас интересует не состояние газа, а его изменение и поскольку $p_0 = p_1$, вычтя из уравнения (2) уравнение (3), получим:

$$p_0 \Delta V_0 = \nu R \Delta T. \quad (4)$$

Учитывая соотношение (4), уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\Delta Q = \nu (C_v + R) \Delta T; \quad (5)$$

откуда находим ΔT .

В уравнении (1) первое слагаемое означает изменение внутренней энергии газа. Таким образом, $\Delta U = \nu C_v \Delta T$, куда из соотношения (5) подставляем ΔT .

Для ответа на третий вопрос, т. е. для нахождения совершенной газом работы $p_0 \Delta V$ против внешних сил, из уравнения (1), при известном ΔQ и найденном из (5) ΔT , получим:

$$p_0 \Delta V = \Delta Q - \Delta U = \Delta Q - \nu C_v \Delta T = \Delta Q [1 - C_v / (C_v + R)].$$

Из определения молярной теплоемкости следует, что $C = \Delta Q / \nu \Delta T$. Из соотношения (5) $\Delta Q = \nu (C_v + R) \Delta T$, т. о. можно записать:

$$C = \nu C_v \cdot (C_v + R) \cdot \Delta T / (\nu \Delta T) = (C_v + R).$$

Уравнение (5) отражает процесс, протекающий в идеальном газе при постоянном давлении, поэтому $C = C_p$, значит $C_p = C_v + R$. Полученное соотношение для молярных теплоемкостей, чаще записываемое как $C_p - C_v = R$, называют уравнением Майера.

Пример 4. Десять молей ($\nu = 10$) идеального двухатомного газа (число степеней свободы молекул газа $i = 5$) при температуре $T_1 = 280$ К находится в вертикальном цилиндре под невесомым легко подвижным поршнем. Площадь поршня $S = 0,01$ м². На поршень положили гирю массой $m = 10$ кг, в результате чего поршень опустился на некоторую высоту. Атмосферное давление равно $p_a = 1,01 \cdot 10^5$ Па. Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с². Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К). Определить: 1) на сколько необходимо нагреть газ в цилиндре, чтобы поршень возвратился в первоначальное положение; 2) количество теплоты, переданной газу для подъема поршня; 3) изменение внутренней энергии газа; 4) совершенную газом работу по подъему поршня.

Решение. В начальном состоянии и после нагревания газ занимал один и тот же объем. Масса газа постоянна. Следовательно, на основании закона Шарля получаем

$$(p_1/T_1) = (p_2/T_2). \quad (1)$$

Начальное давление p_1 равно атмосферному $p_a = 1,01 \cdot 10^5$ Па. Начальная температура $T_1 = 280$ К. Конечное давление и температура обозначены соответственно через p_2 и T_2 . Положенная на поршень гиря создает добавочное давление mg/S , поэтому давление $p_2 = p_1 + mg/S$. Подставив его значение в соотношение (1), получим $(p_1/T_1) = (1/T_2)(p_1 + mg/S)$. Отсюда следует, что изменение температуры равно:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = mgT_1/Sp_1 = (10 \cdot 9,8 \cdot 280)/(0,01 \cdot 1,01 \cdot 10^5) \approx 28 \text{ К.}$$

Количество переданной газу для подъема поршня теплоты ΔQ можно найти, умножив изменение температуры ΔT на теплоемкость десяти молей газа при постоянном давлении νC_p . Увеличение внутренней энергии газа ΔU можно найти, умножив изменение температуры ΔT на теплоемкость десяти молей газа при постоянном объеме νC_v . Здесь C_p и C_v — молярные теплоемкости. На основании первого начала термодинамики совершенную газом работу W можно найти как разность между подведенной теплотой ΔQ и изменением внутренней энергии ΔU . Молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_v = (i/2)R$, а при постоянном давлении, на основании уравнения Майера, равна $C_p = C_v + R = (i/2)R + R = R[(i/2) + 1]$. Таким образом, окончательно получаем:

$$\Delta Q = \nu R[(i/2)+1] \cdot \Delta T = 10 \cdot 8,31[(5/2)+1] \cdot 28 \approx 8,1 \text{ кДж},$$

$$\Delta U = \nu(i/2)R \cdot \Delta T = 10 \cdot (5/2) \cdot 8,31 \cdot 28 \approx 5,8 \text{ кДж},$$

$$W = \Delta Q - \Delta U = 2,3 \text{ кДж}.$$

Пример 5. Идеальный двухатомный газ (число степеней свободы молекул газа $i = 5$), находящийся в цилиндре с поршнем, первоначально занимает объем $V_1 = 4$ л при давлении $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па. Газ сначала адиабатно расширяется до объема $V_2 = 6$ л, а затем изохорно охлаждается. В результате давление газа равно $p_2 = 10^5$ Па.

Определить: 1) работу, совершенную газом; 2) изменение его внутренней энергии; 3) количество поглощенной теплоты.

Решение. Из условия задачи следует, что газ участвует в двух процессах: а) адиабатном расширении из состояния 1 в промежуточное состояние X , где он занимает объем $V_x = V_2$, причем давление p_x неизвестно; б) изохорном охлаждении с переходом из состояния X в состояние 2. Чтобы найти работу W_{12} и количество поглощенной теплоты ΔQ_{12} при переходе из состояния 1 в состояние 2, необходимо каждый из процессов рассмотреть отдельно. При этом

$$W_{12} = W_{1X} + W_{X2} \text{ и } \Delta Q_{12} = \Delta Q_{1X} + \Delta Q_{X2}.$$

Изменение внутренней энергии не зависит от процесса и в любом случае равно

$$\Delta U_{12} = (i/2) \cdot (m/M) R (T_2 - T_1).$$

Неизвестные значения T_2 , T_1 и m/M можно найти из уравнения Клапейрона-Менделеева.

Адиабатный процесс протекает без теплообмена с окружающей средой. Поэтому на участке 1– X количество поглощенной газом теплоты $\Delta Q_{1X} = 0$. Исходя из первого начала термодинамики, работу газа W_{1X} можно найти по изменению внутренней энергии ΔU_{1X} с использованием уравнения Клапейрона–Менделеева и уравнения Пуассона для адиабатического процесса.

На участке X –2 изохорного охлаждения работа газа $W_{X2} = 0$, а количество поглощенной теплоты $\Delta Q_{X2} = C_v \cdot (m/M) R (T_2 - T_1)$.

Работа газа при адиабатном процессе находится как:

$$W_{1X} = -\Delta U_{1X} = (i/2) \cdot (m/M) R (T_1 - T_X).$$

Используя уравнение Клапейрона–Менделеева для состояний 1 и X , получим

$$W_{1X} = (i/2) \cdot (p_1 V_1 - p_2 V_2).$$

Уравнение адиабаты имеет вид: $p_1 \cdot V_1^\gamma = p_x \cdot V_x^\gamma$, где $\gamma = C_p/C_v = (i+2)/i$. Для двухатомного газа $\gamma = 1,4$. Из уравнения адиабаты следует, что $p_x = p_1(V_1/V_2)^\gamma = 1,7 \cdot 10^5$ Па. Тогда $W_{1x} = 450$ Дж. Следовательно, и $W_{12} = 450$ Дж.

Молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_v = (i/2)R$. Подставим это выражение в уравнение для нахождения поглощенной в изохорном процессе теплоты. Воспользовавшись уравнением Клапейрона–Менделеева для состояний 1 и 2, получим $\Delta Q_{12} = (i/2) \cdot (p_2 V_2 - p_1 V_1) = -1050$ Дж.

Поскольку $\Delta Q_{1x} = 0$, общее количество теплоты $\Delta Q_{12} = -1050$ Дж. Знак минус указывает, что газ отдавал теплоту в окружающую среду. Изменение внутренней энергии, на основании сказанного выше и использования уравнения Клапейрона–Менделеева, может быть найдено из соотношения

$$\Delta U_{12} = (i/2) \cdot (p_2 V_2 - p_1 V_1) = -1500 \text{ Дж.}$$

Пример 6. Десять молей идеального двухатомного газа, занимающего при давлении 0,1 МПа и температуре 0 °С объем 0,01 м³, адиабатно расширяется в два раза. Найти: совершенную газом при расширении работу, конечное давление газа, конечную величину внутренней энергии газа.

Решение. При адиабатном процессе конечное давление находится как $p_2 = p_1 \cdot (V_1/V_2)^\gamma$. Для двухатомного газа число степеней свободы $i = 5$, $\gamma = 1,4$. Тогда давление $p_2 = 0,38 \cdot 10^5$ Па. Совершаемая газом работа равна убыли внутренней энергии:

$$W = -\Delta U = (m/M) \cdot (i/2) R \cdot (T_1 - T_2),$$

Из уравнения Клапейрона–Менделеева получим:

$$(m/M) \cdot R \cdot T_1 = p_1 V_1; \quad (m/M) \cdot R \cdot T_2 = p_2 V_2.$$

Подставив эти выражения в формулу для работы, окончательно находим:

$$W = (i/2) \cdot (p_1 V_1 - p_2 V_2) = 600 \text{ Дж.}$$

Внутренняя энергия газа U_2 в конечном состоянии может быть найдена как:

$$U_2 = U_1 - \Delta U = (m/M) \cdot (i/2) \cdot R \cdot T_1 - \Delta U = 56116 \text{ Дж.}$$

Пример 7. Молекулярный кислород (O₂) массой 6 г расширяется вдвое при постоянном давлении. Начальная температура газа 303 К. Найти работу расширения газа, изменение его внутренней энергии и количество сообщенной газу теплоты.

Решение. Изменение внутренней энергии можно найти как

$$\Delta U = (m/M) \cdot [(i/2) \cdot R + R] \cdot \Delta T,$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$ – изменение температуры; T_1 и T_2 – начальная и конечная температуры газа. Поскольку расширение происходит при постоянном давлении, воспользовавшись законом Гей–Люссака $V_1/T_1 = V_2/T_2$, находим конечную температуру газа:

$$T_2 = T_1 \cdot V_2/V_1 = 2 \cdot T_1.$$

Таким образом, $\Delta T = T_1$, отсюда $\Delta U = 1,67$ кДж. Поскольку давление постоянно, то работа расширения

$$A = p \cdot \Delta V = p \cdot V_1.$$

Из уравнения Клапейрона–Менделеева объем газа при температуре T_1 $V_1 = mRT_1/(M \cdot p)$. Таким образом, $A = mRT_1/M = 0,47$ кДж. Количество теплоты, сообщенной газу, согласно первому началу термодинамики, равно:

$$Q = \Delta U + A = 1,67 + 0,47 = 2,14 \text{ кДж.}$$

Пример 8. Найти внутреннюю энергию идеального двухатомного газа, занимающего объем $V = 30$ л при давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Н/м².

Решение. Внутренняя энергия идеального газа находится как произведение полной средней энергии одной молекулы на общее число молекул N . Полная средняя энергия одной молекулы зависит не только от температуры, но и от структуры молекулы, что в уравнении для энергии задается числом степеней свободы i . Таким образом, полная энергия $W = (i/2)NkT$; $N = (m/M)N_A$, где N_A – число Авогадро; $kN_A = R$. Тогда $W = (i/2)(m/M)RT$. Из уравнения Клапейрона–Менделеева следует, что $(m/M)RT = pV$. Окончательно получаем:

$$W = (i/2)pV = 1,5 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Азот массой $m = 5$ кг, нагрет на $\Delta T = 150$ К при постоянном объеме V . Найти: 1) количество теплоты Q , сообщенное газу; 2) изменение ΔU внутренней энергии газа; 3) совершенную газом работу A .

2. Водород занимает объем $V_1 = 10$ м³ при давлении $p_1 = 100$ кПа. Газ нагрели при постоянном объеме до давления $p_2 = 300$ кПа. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) работу A , совершаемую газом; 3) количество теплоты Q , сообщенное газу.

3. При изохорическом нагревании 50 л кислорода давление газа изменилось на $\Delta p = 0,5$ МПа. Найти количество теплоты, сообщенное газу.

4. Баллон объемом 20 л содержит водород при $t = 27\text{ }^\circ\text{C}$ под давлением $p = 0,4\text{ МПа}$. Каковы будут температура T_1 и давление p_1 , если газу сообщить количество теплоты $Q = 6\text{ кДж}$?

5. Кислород при неизменном давлении $p = 80\text{ кПа}$ нагревается. Его объем увеличивается от $V_1 = 1\text{ м}^3$ до $V_2 = 3\text{ м}^3$. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии кислорода; 2) работу A , совершенную им при расширении; 3) количество теплоты Q , сообщенное газу.

6. Азоту сообщено количество теплоты $Q = 21\text{ кДж}$ при постоянном давлении. Определить работу A , которую совершил при этом газ, и изменение ΔU его внутренней энергии.

7. Кислород массой $m = 2\text{ кг}$ занимает объем $V_1 = 1\text{ м}^3$ и находится под давлением $p_1 = 0,2\text{ МПа}$. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3\text{ м}^3$, а затем при постоянном объеме до давления $p_2 = 0,5\text{ МПа}$. Найти 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную им работу A ; 3) количество теплоты Q , переданное газу.

8. Гелий массой $m = 1\text{ г}$ был нагрет на $\Delta T = 100\text{ К}$ при постоянном давлении p . Определить 1) количество теплоты Q , переданное газу; 2) работу A расширения; 3) приращение ΔU внутренней энергии газа.

9. Водород массой $m = 4\text{ г}$ был нагрет на $\Delta T = 10\text{ К}$ при постоянном давлении. Определить работу A расширения газа.

10. Газ, занимавший объем $V = 12\text{ л}$ под давлением $p = 100\text{ кПа}$, был изобарически нагрет от $T_1 = 300\text{ К}$ до $T_2 = 400\text{ К}$. Определить работу расширения газа.

11. Один моль газа N_2 , занимающий при давлении $p_1 = 1,01 \cdot 10^5\text{ Па}$ и температуре $0\text{ }^\circ\text{C}$ объем $V_1 = 22,4\text{ л}$, адиабатически расширяется до объема $V_2 = 2V_1$. Найти давление p_2 и температуру T_2 , а также работу, совершаемую при адиабатическом расширении.

12. Один моль газа N_2 , занимающий при давлении $p_1 = 0,38 \cdot 10^5\text{ Па}$ и температуре $-66\text{ }^\circ\text{C}$ объем $V_1 = 44,8\text{ л}$, изотермически сжимается до объема $V_2 = 22,4\text{ л}$. Найти давление p_2 и работу, совершаемую при изотермическом сжатии.

13. Один моль N_2 , занимавший при давлении $p_1 = 1,01 \cdot 10^5\text{ Па}$ объем $V_1 = 22,4\text{ л}$, адиабатически сжимается до объема $V_2 = V_1/2$, а затем изотермически расширяется до первоначального объема. Найти давление p_2 и температуру T_2 , а также работу, совершаемую газом при изотермическом расширении.

14. Рассмотрите газ, состоящий из маленьких, но не гладких, а шероховатых шаров (они могут вращаться). Масса каждого из шаров m .

а) Сколько степеней свободы имеет одна такая частица?

- б) Чему равно в состоянии равновесия отношение средних кинетических энергий вращательного и поступательного движения?
- в) Чему равна C_v (молярная теплоемкость при постоянном объеме)? Запишите ответ таким образом, чтобы в него входила газовая постоянная R .
- г) Напишите выражение для C_p (молярная теплоемкость при постоянном давлении) через R .
- д) Средний квадрат скорости равен v_0^2 . Как выражается через v_0 температура газа и какие еще константы при этом требуются?

15. В котле паровой машины температура равна 160°C , а температура холодильника 10°C . Какую максимальную работу можно теоретически получить от машины, если в топке, коэффициент полезного действия которой 60% , сожжено 200 кг угля с удельной теплотой сгорания $2,9 \cdot 10^7\text{ Дж/кг}$?

16. Паровая машина мощностью $N = 14,7\text{ кВт}$ потребляет за 1 ч работы $m = 8,1\text{ кг}$ угля с удельной теплотой сгорания $q = 3,3 \cdot 10^7\text{ Дж/кг}$. Температура котла 200°C , холодильника 58°C . Найдите КПД этой машины и сравните его с КПД идеальной тепловой машины.

17. При изобарическом нагревании 800 молей газа на 227°C газу сообщили количество теплоты, равное $9,4 \cdot 10^6\text{ Дж}$. Определите работу газа и приращение его внутренней энергии.

18. В цилиндрическом сосуде с площадью основания 250 см^2 находится 10 г азота, сжатого поршнем, на котором лежит гиря массой $12,5\text{ кг}$. Какую работу совершит газ при нагревании его от 25 до 625°C ? Атмосферное давление равно 10^5 Па .

19. Два моля идеального (одноатомного) газа, находящегося при 0°C сначала изохорически перевели в состояние, в котором давление в два раза больше первоначального, а затем — изобарически в состояние, при котором объем в два раза больше первоначального. Найти изменение внутренней энергии газа.

20. В цилиндре под поршнем находится некоторая масса воздуха. На его нагревание при постоянном давлении затрачено 5 кДж тепла. Найти работу, произведенную при этом газом. Теплоемкость воздуха при постоянном давлении $C_p = 10^3\text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$; масса 1 моля воздуха 29 г .

21. 200 г азота нагреваются при постоянном давлении от 20 до 100°C . Какое количество теплоты необходимо для этого? Каков прирост внутренней энергии газа? Какую работу при этом совершает газ?

22. В цилиндре под поршнем площадью $S = 10\text{ см}^2$ находится воздух. Определить работу поднятия поршня на высоту $h_1 = 10\text{ см}$, если на-

чальная высота столба воздуха $h_0 = 15$ см, наружное давление $p_0 = 10^5$ Па, температура постоянна.

23. Некоторая масса азота при давлении 10^5 Па имеет объем 5 л, а при давлении в три раза большем — объем 2 л. Переход из первого состояния во второе был произведен в два этапа: сначала изохорически, а затем изобарически. Найти изменение внутренней энергии газа и произведенную над ним работу.

24. Двухатомный газ сжимается один раз изотермически, другой — адиабатически. Начальные температура и давление газа в обоих случаях одинаковы. Конечное давление вдвое больше начального. Найти отношение работы сжатия при адиабатическом процессе к работе сжатия при изотермическом процессе.

25. В паровой турбине для получения пара с температурой 250 °С сжигают $0,35$ кг дизельного топлива. При этом пар совершает работу 1 кВт·ч. Температура холодильника 30 °С. Найти КПД турбины и максимальный КПД. Удельная теплота сгорания дизельного топлива 42 МДж/кг.

26. В цилиндре двигателя находится газ, для нагревания которого сжигают 2 кг нефти с удельной теплотой сгорания $4,3 \cdot 10^7$ Дж/кг. Расширяясь, газ совершил работу 1 кВт·ч. Насколько изменилась внутренняя энергия газа? Чему равен КПД установки?

27. Один литр гелия, находящегося при нормальных условиях, изотермически расширяется за счет полученного извне тепла до объема 2 л. Найти работу, совершенную газом при расширении и количество сообщенного газу тепла. Нормальные условия: температура 0 °С, давление 10^5 Па; 1 моль газа при нормальных условиях занимает $22,4$ л; масса 1 моля He — 4 г.

28. Один моль водорода при температуре 0 °С нагревается при постоянном давлении. Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы его объем удвоился? Какая работа при этом будет совершена газом?

29. Один кубический метр водорода при 0 °С находится в цилиндре под поршнем массой в 1 т и сечением $0,5$ м². Атмосферное давление 973 кПа. Какое количество теплоты потребуется на нагревание водорода до 300 °С? Найдите изменение его внутренней энергии.

30. Какая доля w_1 количества теплоты Q_1 , подводимого к идеальному одноатомному газу при изобарическом процессе, расходуется на увеличение ΔU внутренней энергии газа и какая доля w_2 — на работу A расширения?

31. На нагревание кислорода массой $m = 160$ г на $\Delta T = 12$ К было затрачено количество теплоты $Q = 1,76$ кДж. Как протекал процесс: при постоянном объеме или постоянном давлении?

32. Какая работа A совершается при изотермическом расширении водорода массой $m = 5$ г при $T = 290$ К, если объем газа увеличивается втрое?

33. Молекулярный азот (N_2) изотермически расширяется, изменяя давление от 202 до 101 кПа. Температура азота 253 К. Найти работу расширения, изменение внутренней энергии газа и количество сообщенной ему теплоты.

34. Воздушный шар диаметром 20 см, находящийся под водой, погружают с начальной глубины 10 м. В результате его диаметр уменьшается на 0,2 см. Найти работу сжатия газа в воздушном шаре. Натяжением оболочки шара и изменением температуры воды при погружении пренебречь.

35. В цилиндре под легко подвижным невесомым поршнем площадью 15 см² находится 0,2 г воздуха при температуре 293 К. Молярная масса воздуха 29 г/моль. Найти работу, необходимую для равномерного медленного (изотермического) подъема поршня с высоты 10 см до высоты 20 см. Атмосферное давление равно 10^5 Па.

36. В цилиндре под поршнем находится 2 кг кислорода (O_2). Поршень закреплен. Газ нагревают на 5 К. Найти подведенное к кислороду количество теплоты, увеличение внутренней энергии газа, совершенную газом работу и удельную теплоемкость кислорода для этого случая.

37. В стальном герметичном баллоне находится 20 г азота (N_2) и 32 г кислорода (O_2). Найти уменьшение внутренней энергии газовой смеси и совершенную работу, если температура смеси уменьшилась на 28 °С.

38. Воздух (молярная масса 29 г/моль) при 0 °С и давлении 1,82 атм. занимает в цилиндре под поршнем объем 200 л. Поршень первоначально находится на расстоянии 50 см от дна цилиндра. Найти работу, совершенную газом при его изобарном нагревании на 30 °С, поглощенное при этом количество теплоты и перемещение поршня.

39. В цилиндре под поршнем находится 22 г водорода при температуре 273 К и давлении 0,25 МПа. Площадь поршня 0,25 м². Газ изобарно нагревают, сообщая ему 17,2 кДж теплоты. Найти совершенную газом работу, изменение температуры в цилиндре и перемещение поршня.

40. В цилиндре под поршнем массой 100 кг находится азот (N_2) при температуре 293 К. Нижняя поверхность поршня находится на высоте 0,5 м от основания цилиндра. Найти работу, которую совершит газ при

его изобарном нагревании на 40 К. Площадь основания цилиндра 100 см², атмосферное давление 10⁵ Па, трением поршня о стенки цилиндра пренебречь.

41. Воздух ($M = 29$ г/моль) первоначально находившийся при температуре 260 К и давлении 0,15 МПа, был сжат адиабатически, при этом объем воздуха уменьшился в 12 раз. Масса воздуха 1 кг. Найти конечное давление, температуру газа и совершенную при сжатии работу.

42. Один моль идеального одноатомного газа и один моль идеального двухатомного газа по отдельности адиабатически сжимают до уменьшения их объемов в два раза. Найти отношение температур и внутренних энергий газов после их сжатия.

43. При нагревании одного моля идеального двухатомного газа на 1 К при постоянном давлении объем газа увеличился на 0,25 % от первоначального. Найти начальную температуру газа, увеличение его внутренней энергии, совершенную газом работу и количество подведенной к газу теплоты.

44. Атомарный кислород (O), молекулярный кислород (O₂) и озон (O₃) отдельно друг от друга расширяются изобарно. Определить, какая часть подводимого тепла расходуется: 1) на работу расширения; 2) на изменение внутренней энергии O, O₂, O₃.

45. При изобарном сжатии азота (N₂) была совершена работа, равная 12 кДж. Определить подведенное к газу количество теплоты и изменение внутренней энергии газа.

46. Определить работу расширения при постоянном давлении 7 кг водорода (H₂) и количество теплоты, переданное водороду, если при этом температура газа повысилась на 200 °С.

47. Идеальный газ объемом 2 м³ при изотермическом расширении изменяет давление от 12 до 2·10⁵ Па. Определить работу расширения газа, изменение внутренней энергии и количество подведенной теплоты.

48. В изотермическом процессе расширения 1,2 кг азота (N₂) ему было сообщено 120 кДж теплоты. Определить, во сколько раз изменилось давление азота. Температура газа 7 °С.

49. В баллоне емкостью 10 литров содержится кислород при температуре 27 °С и давлении 10 МПа. Нагреваясь солнечными лучами, кислород получил 8350 Дж теплоты. Определить температуру и давление кислорода после нагревания.

50. Азот (N₂), расширяясь адиабатически, совершает работу, равную 480 кДж. Определить конечную температуру газа, если до расширения она была 362 К. Масса азота 12 кг.

51. Азот (N_2) массой 2 г, имевший температуру 300 К, был адиабатически сжат так, что его объем уменьшился в 10 раз. Определить конечную температуру газа и работу сжатия.

52. Какое количество теплоты потребуется для нагревания 5 м³ окиси углерода (СО) от температуры 0 до 220 °С, если газ находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху невесомым поршнем? Атмосферное давление равно $9,35 \cdot 10^4$ Па.

53. Азот (N_2) массой 5 кг нагрели на 150 К при постоянном объеме. Найти количество теплоты, сообщенной газу, изменение его внутренней энергии и совершенную газом работу.

54. Водород (H_2), занимающий объем 10 м³ при давлении 100 кПа, нагрели при постоянном объеме. При этом давление газа повысилось до 300 кПа. Определить изменение внутренней энергии газа, совершенную им работу и количество подведенной к газу теплоты.

55. При изохорном нагревании 50 л молекулярного кислорода (O_2) давление газа изменилось на 0,5 МПа. Найти количество сообщенной газу теплоты.

56. Баллон объемом 20 л содержит молекулярный водород (H_2) при температуре 27 °С и давлении 0,4 МПа. Каковы станут температура и давление, если газу сообщить 6 кДж теплоты?

57. Кислород (O_2) нагревается при постоянном давлении 80 кПа. При этом объем газа увеличивается от 1 до 3 м³. Определить изменение внутренней энергии газа, совершенную им при расширении работу и количество сообщенной газу теплоты.

58. При изобарном нагревании молекулярного азота (N_2) ему было сообщено 21 кДж теплоты. Найти работу, совершенную газом, и изменение его внутренней энергии.

59. Кислород (O_2) массой 2 кг при давлении 0,2 МПа занимал объем 1 м³. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении и его объем газа увеличился до 3 м³. При этом объеме газ был нагрет еще, и давление газа увеличилось до 0,5 МПа. Найти изменение внутренней энергии газа, совершенную им работу и количество теплоты, подведенной к газу.

60. Гелий массой 1 г нагрет на 100 К при постоянном давлении. Определить количество подведенной к газу теплоты, работу, совершенную газом при расширении, увеличение внутренней энергии газа.

61. Водород (H_2) массой 4 г при постоянном давлении был нагрет на 10 °С. Найти работу, совершенную газом при расширении и количество теплоты, подведенной к газу.

62. Идеальный газ, занимавший первоначально объем 12 л при давлении 10^5 Па и температуре 300 К, был изобарно нагрет на 100 °С. Найти работу расширения газа.

63. Один моль азота (N_2), занимавший при давлении 10^5 Па и температуре 0 °С объем 22,4 л, адиабатически удвоил свой объем. Найти давление и температуру газа после расширения и совершенную им работу.

64. Один моль азота (N_2), занимавший при давлении $0,38 \cdot 10^5$ Па и температуре минус 66 °С объем 44,8 л, изотермически сжали до объема 22,4 л. Найти давление газа и работу, совершенную при его изотермическом сжатии.

65. Один моль азота, занимавший при давлении $1,01 \cdot 10^5$ Па и температуре 0 °С объем 22,4 л, адиабатически сжимают до объема, равного половине начального. После чего газ изотермически расширяется до первоначального объема. Найти конечное давление и температуру газа, а также совершенную им работу при изотермическом расширении.

66. При изобарном нагревании 800 молей идеального газа на 227 °С ему было сообщено 5,3 МДж теплоты. Определите совершенную газом работу и приращение его внутренней энергии.

67. В цилиндре под поршнем площадью 245 см² находится 1 моль идеального газа при температуре 27 °С. На поршне лежит груз массой 12,5 кг. Атмосферное давление вне цилиндра 0,1 МПа. Газ нагревают до температуры, при которой его объем увеличивается в 3 раза. Найти совершенную газом работу, первоначальный объем газа и число атомов в молекуле газа, если известно, что к газу было подведено 8725 Дж теплоты.

68. Два моля идеального одноатомного газа, находящегося при 0 °С сначала изохорно перевели в состояние, когда давление стало вдвое больше первоначального. Затем газ изобарно перевели в состояние, при котором его объем стал вдвое больше первоначального. Найти изменение внутренней энергии газа.

69. В цилиндре под поршнем находится воздух. На его нагревание при постоянном давлении было затрачено 5 кДж теплоты. Найти совершенную газом работу. Удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении равна 10^3 Дж/(кг·К), масса 1 моля воздуха 29 г.

70. Азот (N_2) массой 200 г нагревают при постоянном давлении от 20 до 100 °С. Найти подведенное к газу количество теплоты, увеличение внутренней энергии газа и совершенную работу.

71. В цилиндре под поршнем находится воздух. Какую работу необходимо произвести, чтобы поднять поршень на высоту $h_1 = 10$ см, если начальная высота столба воздуха в цилиндре была $h_0 = 15$ см? Ат-

мосферное давление вне цилиндра $1,01 \cdot 10^5$ Па, площадь поршня 10 см^2 , температура постоянна.

72. Двухатомный газ при давлении $1,01 \cdot 10^5$ Па занимает объем 5 л, а при давлении втрое большем — 2 л. Переход из первого состояния во второе был произведен в 2 этапа: сначала изохорно, а затем изобарно. Найти изменение внутренней энергии газа и произведенную над газом работу.

73. Двухатомный газ один раз сжали изотермически, а другой — адиабатно. Начальные температуры и давление газа в обоих случаях одинаковы. Конечное давление вдвое больше начального. Найти отношение работы адиабатного сжатия газа к работе изотермического сжатия.

74. В цилиндре двигателя находится идеальный газ. Для его нагревания сожгли 2 кг нефти с удельной теплотой сгорания $4,3 \cdot 10^7$ Дж/кг. Расширившись, газ совершил работу 2 кВт·ч. Найти изменение внутренней энергии газа и коэффициент полезного действия установки.

75. Один литр гелия, находившегося при нормальных условиях, за счет полученного извне тепла изотермически расширился до объема 2 л. Найти работу, совершенную газом при расширении, и количество подведенной к газу теплоты. Нормальные условия: температура $0 \text{ }^\circ\text{C}$, давление $1,01 \cdot 10^5$ Па; один моль газа при нормальных условиях занимает объем 22,4 л; масса 1 моля гелия 4 г.

76. Один моль водорода (H_2), первоначально имевший температуру $0 \text{ }^\circ\text{C}$, нагревается при постоянном давлении. Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы его объем удвоился? Найти работу, совершенную газом при расширении.

77. Один кубометр молекулярного водорода (H_2) при температуре $0 \text{ }^\circ\text{C}$ находится в вертикальном цилиндре, закрытом сверху легко скользящим поршнем. Масса поршня 1 т, а его площадь $0,49 \text{ м}^2$. Атмосферное давление 10^5 Па. Какое количество теплоты потребуется для нагревания водорода до $300 \text{ }^\circ\text{C}$?

78. Какая доля количества теплоты, подводимой к идеальному одноатомному газу при изобарном процессе, расходуется на увеличение внутренней энергии газа, и какая — на работу расширения?

79. Идеальный двухатомный газ изобарно сжимают до объема в 10 раз меньше начального. Найти отношение затраченной на сжатие работы к увеличению внутренней энергии газа.

80. Какую работу совершает 5 г водорода (H_2) при изотермическом расширении до утроенного объема? Температура газа $17 \text{ }^\circ\text{C}$.

81. Резиновый баллон был накачан до давления 220 кПа при температуре 17 °С. Нагревшись на солнце до температуры 57 °С, баллон лопнул. Считая процесс адиабатным, найдите изменение температуры вышедшего из баллона воздуха. Атмосферное давление 10^5 Па.

82. Кислород (O_2) нагрели при постоянном давлении на 12 °С. При этом было израсходовано 1760 Дж теплоты. Найдите массу кислорода.

83. Азот (N_2) в воздушном шаре занимает объем 2 дм³ при нормальном атмосферном давлении 10^5 Па. Определить количество тепла, которое необходимо сообщить газу, чтобы при постоянном давлении его объем увеличился вдвое. Натяжением оболочки шара пренебречь.

84. Азот (N_2) занимает объем 10 дм³ при давлении 10^5 Па. Определить количество тепла, которое необходимо сообщить газу, чтобы при постоянном объеме его давление увеличилось вдвое.

85. Кислород (O_2) массой 10 г, имевший начальную температуру минус 3 °С, нагревается при постоянном давлении 0,1 МПа. После нагревания объем газа стал 10 л. Определить количество полученной газом теплоты и увеличение внутренней энергии газа после нагревания.

86. В закрытом стальном баллоне находится 1,4 кг азота (N_2) при давлении 10^5 Па и температуре 300 К. После нагревания давление в баллоне увеличилось в 5 раз. Найти объем сосуда и количество теплоты, сообщенной газу.

87. Один моль идеального двухатомного газа при постоянном давлении нагрели на 50 К. Какое количество теплоты при этом было сообщено газу?

88. Некоторой массе окиси углерода (СО) при постоянном давлении было сообщено 29,1 кДж теплоты. В результате этого температура газа возросла от 300 до 400 К. Найти массу газа и увеличение его внутренней энергии.

89. В стальном баллоне объемом 1 литр находится азот (N_2), плотность которого 2,8 кг/м³. Азот нагрели на 100 °С. Какое количество теплоты было при этом сообщено газу?

90. Кислород (O_2), находящийся в стальном баллоне емкостью 100 л, при температуре 17 °С имеет давление 0,5 МПа. Какое количество теплоты нужно сообщить азоту, чтобы его давление возросло до 1,5 МПа?

91. В дизельном двигателе атмосферный воздух объемом 10 л подвергается двенадцатикратному сжатию. Считая процесс сжатия адиабатным, найти конечное давление, температуру и работу сжатия, если начальное?

92. Гелий, находящийся в закрытом стальном баллоне объемом 2 дм^3 при температуре 293 К и давлении 10^5 Па , нагревают на 100 К . Найти сообщенное гелию количество теплоты и его внутреннюю энергию при новой температуре.

93. В цилиндре с поршнем находится $1,6 \text{ кг}$ кислорода (O_2). Начальная температура газа 290 К , а давление $0,4 \text{ МПа}$. До какой температуры был нагрет газ, если совершенная при этом работа равна 40 кДж ?

94. В цилиндре с поршнем находится 2 кг воздуха. Начальная температура газа 293 К , а давление $0,98 \text{ МПа}$. Газ изобарно нагревают до температуры 393 К . Чему при этом равна работа, совершенная газом? Молярная масса воздуха $0,029 \text{ кг/моль}$.

95. Вертикальный цилиндр закрыт невесомым поршнем с площадью основания 1 м^2 . Под поршнем находится воздух при температуре $0 \text{ }^\circ\text{C}$ и давлении $1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Найти работу при нагревании воздуха под поршнем на $1 \text{ }^\circ\text{C}$.

96. Находящийся в цилиндре с поршнем кислород (O_2) нагревается при постоянном давлении. Начальная температура газа $0 \text{ }^\circ\text{C}$, масса газа 16 г . Какое количество теплоты было сообщено кислороду, если при этом его объем удвоился? Удельная теплоемкость кислорода при постоянном давлении $C_p = 913,4 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$.

97. В вертикальном цилиндре под поршнем находится 1 моль идеального газа. Масса поршня m , а площадь S . Найти работу по поднятию поршня при нагревании газа на 1 К . Давление наружного воздуха не учитывать.

98. Идеальный газ находится в вертикально расположенном цилиндре под поршнем площадью 10 см^2 и массой 20 кг . Начальный объем газа $11,2 \text{ л}$, температура 273 К . Теплоемкость этой массы газа при постоянном объеме $C_v = 21 \text{ Дж/К}$. Найти количество теплоты, необходимой для нагревания газа на 10 К . Давление наружного воздуха не учитывать.

99. Нагревание одного моля идеального газа при постоянном давлении на 50 К потребовало 1454 Дж теплоты. Найти число атомов в молекуле этого газа и работу, совершенную газом при его нагревании.

100. Азот (N_2) находится в закрытом баллоне, объем которого 3 л . Температура азота 300 К , а давление $0,3 \text{ МПа}$. После нагревания давление в баллоне повысилось на $2,2 \text{ МПа}$. Найти температуру газа после нагревания, количество сообщенной ему теплоты и совершенную газом работу.

101. Одноцилиндровый двигатель объемом 200 см^3 имеет степень сжатия 6 (т. е. объем цилиндра при работе изменяется в 6 раз). Макси-

мальное давление в цилиндре $2 \cdot 10^6$ Па. Рабочим телом является идеальный двухатомный газ. Найти работу, совершаемую за 1 цикл, полагая процесс адиабатным. Найти изменение внутренней энергии газа.

102. Идеальный двухатомный газ расширяется адиабатически, при этом его температура уменьшается на 54°C . Найти совершенную газом работу, если масса газа 12 кг, масса одного моля 28 г.

103. Один моль идеального многоатомного газа, имевший температуру 290 К, был адиабатически сжат до 0,1 своего первоначального объема. Определить работу, затраченную на сжатие газа, и температуру газа после сжатия.

104. Для нагревания 5 м^3 идеального двухатомного газа на 220 К при постоянном давлении 0,094 МПа потребовалось 1,3 МДж теплоты. Найти первоначальную температуру газа.

105. Один моль идеального двухатомного газа, занимающий при температуре 273 К и давлении 0,1 МПа объем 22,4 л, адиабатно сжимают до объема 11,2 л, после чего газ изотермически расширяется до первоначального объема. Найти изменение внутренней энергии газа и количество подведенной к нему теплоты.

106. Водород (H_2) при постоянном давлении был нагрет на 297 К, при этом газу было сообщено 5,3 МДж теплоты. Определить массу газа и совершенную им работу.

107. В цилиндре с поршнем находится идеальный газ. К газу было подведено 5 кДж теплоты. При этом газ совершил работу 1433 Дж. Масса одного моля газа 0,029 кг. Определить удельную теплоемкость газа при постоянном давлении.

108. Водород (H_2) изобарно нагрели на 100 К. Масса газа 20 кг. Найти совершенную газом работу и количество подведенной к нему теплоты.

109. Идеальный двухатомный газ находится в цилиндре с подвижным поршнем. Атмосферное давление вне цилиндра 10^5 Па. Газу сообщили 700 Дж теплоты. Во сколько раз при этом увеличился занимаемый газом объем?

110. Гелий массой 1,25 кг при температуре 270 К находится под давлением 0,1 МПа. Газ нагревают при постоянном давлении, и его объем становится равным 10^{-2} м^3 . Найти внутреннюю энергию газа после нагревания и количество подведенной к газу теплоты.

111. В баллоне при температуре 27°C и давлении 0,1 МПа находится 0,2 кг гелия. После нагревания давление в баллоне возросло в 5 раз. Найти объем баллона и количество теплоты, сообщенной газу.

112. Идеальный двухатомный газ при температуре 290 К находится под давлением 0,5 МПа в баллоне емкостью 0,1 м³. После нагревания давление газа возросло втрое. Найти температуру газа после нагревания и количество подведенной теплоты.

113. Четыре моля идеального газа при постоянном объеме охладили на 100 К, при этом от газа было взято 4986 Дж теплоты. Найти число степеней свободы молекул газа и уменьшение его внутренней энергии.

114. В герметично закрытом сосуде объемом 2 литра находится одинаковое по массе количество азота (N₂) и аргона. Давление в сосуде 0,1 МПа, температура 273 К. Найти количество теплоты, необходимое для нагревания этой смеси на 100 К.

115. В баллоне емкостью 2 л при температуре 20 °С и давлении 100 кПа находится гелий. Найти увеличение внутренней энергии газа при нагревании его до 120 °С.

116. Один моль азота (N₂) находится в баллоне под поршнем при давлении 100 кПа. Газу сообщается некоторое количество теплоты. В результате при постоянном давлении объем газа увеличивается вдвое. Найти количество подведенной к газу теплоты.

117. В баллоне объемом 2 л находится кислород (O₂) под давлением 0,1 МПа. После нагревания газа давление в баллоне становится равным 0,2 МПа. Найти количество сообщенной газу теплоты.

118. Найти КПД цикла, состоящего из двух изохор и двух изобар и проходящего последовательно через состояния: 1) p, V ; 2) $2p, V$; 3) $2p, 2V$; 4) $p, 2V$. Газ идеальный одноатомный.

119. Холодильный коэффициент идеальной машины равен κ . Найти производительность машины K при работе в режиме теплового насоса при тех же значениях температуры обоих термостатов.

Ответы

1. 1) 7,75 МДж; 2) 7,75 МДж; 3) 0. 2. 1) 5 МДж; 2) 0; 3) 5 МДж.
3. 62,5 Дж. 4. 390 К; 520 кПа. 5. 1) 0,4 МДж; 2) 160 кДж; 3) 560 кДж.
6. 6 кДж; 15 кДж. 7. 1) 3,25 МДж; 2) 0,4 МДж; 3) 3,65 МДж. 8. 1) 520 Дж;
2) 208 Дж; 3) 312 Дж. 9. 166 Дж. 10. 400 Дж. 11. 1) 380 кПа; 2) 207 К;
3) 1,37 кДж. 12. 1) $1,01 \cdot 10^5$ Па; 2) $-1,2$ кДж. 13. $2,7 \cdot 10^5$ Па; 360 К; 2,1 кДж.
14. а) 6; б) 1; в) $3R$; г) $4R$; д) $T = mv_0^2/3k$; 15. 1200 МДж. 16. $\eta \approx 20\%$;
 $\eta_{\text{ид}} = 30\%$. 17. 3,3 МДж; 6,1 МДж. 18. 1779 Дж. 19. 20 кДж. 20. 1,37 кДж.
21. 16,6 кДж; 11,8 кДж; 4,8 кДж. 22. $A = P_0 S [h_1 - h_0 \ln(h_0 + h_1/h_0)] = 2,37$ Дж.
23. 250 Дж; -900 Дж. 24. 1,5. 25. 0,42; 0,77. 26. 50 МДж; 0,42. 27. $A = 70$ Дж;

$Q = A = 70$ Дж. 28. 7,94 кДж; 2,25 кДж. 29. 370 кДж; 290 кДж. 30. 0,6; 0,4.
 31. $P = \text{const}$. 32. 6,62 кДж. 33. 520 Дж; 0 Дж; 0,52 кДж. 34. $-12,3$ Дж.
 35. 3,5 Дж. 36. 6,57 кДж; 6,57 кДж; 0 Дж; 657 Дж/(кг·К). 37. 1 кДж; 0 Дж.
 38. 4,05 кДж; 14,1 кДж; 55 мм. 39. 5 кДж; 55 К; 0,08 м. 40. 130 Дж.
 41. 4,93 МПа; 702 К; 316 кДж. 42. $(T_{\text{одноат.}}/T_{\text{двухат.}}) = (V_1/V_2)^{0,267} = 0,83; 0,5$.
 43. 400 К; 20. 8 Дж; 8,31 Дж; 29,1 Дж. 44. 1) 0,4; 0,29; 0,25; 2) 0,6; 0,71;
 0,75. 45. 18 кДж; 30 кДж. 46. 5817 кДж; 20360 кДж. 47. 4,3 МДж; 0 Дж;
 4,3 МДж. 48. уменьшилась в 3,3 раза. 49. 310 К; 10,3 МПа. 50. 308 К.
 51. 750 К; 668 Дж. 52. 1,3 МДж. 53. 7,75 МДж; 7,75 МДж; 0 Дж.
 54. 5 МДж; 0 Дж; 5 МДж. 55. 62,5 Дж. 56. 390 К; 520 кПа. 57. 0,4 МДж;
 160 кДж; 560 кДж. 58. 6 Дж; 15 кДж. 59. 3,25 МДж; 0,4 МДж; 3,65 МДж.
 60. 520 Дж; 208 Дж; 312 Дж. 61. 166 Дж; 581 Дж. 62. 400 Дж.
 63. 0,038 МПа; 207 К; 1371 Дж. 64. 0,076 МПа; 1192 Дж. 65. 0,13 МПа;
 360 К; 2074 Дж. 66. 1,5; 3,8 МДж. 67. 2493 Дж; $2,1 \cdot 10^{-3}$ м³; 2. 68. 20,4 кДж.
 69. 1433 Дж. 70. 16,6 кДж; 11,9 кДж; 4,7 кДж. 71. 7,7 Дж. 72. $-252,5$ Дж;
 909 Дж. 73. 0,7. 74. 78,8 МДж; 8,4 %. 75. 70 Дж; 70 Дж. 76. 3176 Дж;
 2269 Дж. 77. 461,5 кДж. 78. 0,6; 0,4. 79. 0,4. 80. 6,62 кДж. 81. 76 К. 82. 0,16 кг.
 83. 700 Дж. 84. 5 кДж. 85. 1050 Дж; 750 Дж. 86. 1,25 м³; 1,25 МДж. 87. 1454 Дж.
 88. 0,28 кг; 20,8 кДж. 89. 207,8 Дж. 90. 250 кДж. 91. 3,24 МПа; 764 К;
 4300 Дж. 92. 102 Дж, 400 Дж. 93. 383 К. 94. 57 кДж. 95. 370,4 Дж. 96. 7977 Дж.
 97. 8,31 Дж. 98. 297,5 Дж. 99. 2; 415,5 Дж. 100. 2500 К; 16,5 кДж; 0 Дж.
 101. 511 Дж; 511 Дж. 102. 480 кДж. 103. 10,8 кДж; 725 К. 104. 273 К.
 105. 1807 Дж; 2047 Дж. 106. 1,6 кг; 1,5 МДж. 107. 10³ Дж/(кг·К).
 108. 8,3 МДж; 29.1 МДж. 109. 2. 110. 1502 Дж; 950 Дж. 111. 1,25 м³;
 747,9 кДж. 112. 870 К; 250 кДж. 113. 3; 4,986 кДж. 114. 155 Дж. 115. 102 Дж.
 116. 350 Дж. 117. 500 Дж. 118. 15,4 %. 119. $K = \kappa + 1$.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

3.1. Электростатика

3.1.1. Основные понятия и законы электростатики

Существует два типа электрических зарядов — положительные и отрицательные. Принятое деление является условным. Исторически сложилось так, что заряды, возникающие на стекле, натираемом шелком, назвали *положительными*, а заряды на эбоните, натираемом о мех, назвали *отрицательными*. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные — притягиваются. Носителями отрицательных зарядов в атоме являются электроны, носителями положительных зарядов — протоны, входящие в состав ядра атома. Алгебраическая сумма положительных и отрицательных зарядов в атоме равна нулю. Заряды располагаются таким образом, что атом в целом является нейтральным. Процесс электризации заключается в том, что заряды разного знака распределяются неравномерно между телами.

Алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы (системы, не обменивающейся зарядами с внешними телами) остается неизменной, какие бы процессы не происходили внутри этой системы. В этом состоит *закон сохранения заряда*. Носителями заряда в различных средах могут быть электроны, оторванные от атомов, или ионы — части молекул или атомов, имеющие положительные или отрицательные заряды. Величина любого заряда по абсолютной величине кратна заряду электрона. В системе СИ заряд измеряется в кулонах (Кл); 1 Кл — это электрический заряд, проходящий за 1 секунду через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А. Заряд электрона имеет наименьшую возможную величину ($1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Эта наименьшая порция заряда называется *элементарным зарядом*. Положительный заряд протона имеет ту же величину.

Чисто электрическое притяжение или отталкивание наблюдается только у покоящихся зарядов. Взаимодействие зарядов зависит от их величины и взаимного расположения. Раздел физики, в котором рассматриваются такие взаимодействия, называется *электростатикой*. Поля, создаваемые покоящимися зарядами, как и силы их взаимодействия, принято называть электростатическими. Закон взаимодействия двух точечных зарядов был сформулирован Кулоном. *Два заряженных точечных тела взаимодействуют друг с другом с силами, равными по величине и противоположными по направлению. Величина электростатической силы F прямо пропорциональна произведению зарядов тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:*

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

Здесь q_1, q_2 — электрические заряды тел; ϵ_0 — электрическая постоянная, ее численное значение равно $8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. При тех же источниках электрического поля его напряженность в веществе будет в ϵ раз меньше, чем в вакууме. Значения относительной диэлектрической проницаемости ϵ среды можно найти в справочниках. Для вакуума $\epsilon = 1$, для масла $\epsilon = 5$, слюды, стекла $\epsilon = 6$, воды $\epsilon = 81$. Если рассматривать вектор \vec{r}_{12} , направленный от первого заряда ко второму, сила \vec{F}_{12} , действующая со стороны первого заряда q_1 на второй заряд q_2 :

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12}.$$

Это закон Кулона, записанный в векторной форме. Аналогично сила \vec{F}_{21} , действующая со стороны второго заряда q_2 на первый заряд q_1 :

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_{21}^3} \cdot \vec{r}_{21}.$$

Поскольку вектор \vec{r}_{21} , проведен от второго заряда к первому: $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$, очевидно, что $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ и справедлив третий закон Ньютона.

Количественной характеристикой силового действия электрического поля на заряды служит векторная величина \vec{E} — напряженность электрического поля. Она равна отношению силы \vec{F} , действующей со стороны поля на неподвижный положительный пробный точечный электрический заряд, помещенный в рассматриваемую точку поля, к величине этого заряда: $\vec{E} = \vec{F}/q$. Величину напряженности поля точечного заряда q на расстоянии r от него можно найти из соотношения

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

В векторной форме выражение для напряженности записывается в виде

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \cdot \vec{r}.$$

Если коэффициент пропорциональности $1/(4\pi\epsilon_0)$ обозначить через $k_0 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$, закон Кулона и выражение для напряженности поля точечного заряда в вакууме приобретают вид

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad E = k_0 \frac{q}{r^2}.$$

На заряд, не входящий в систему, действует сила, равная векторной сумме сил, с которыми действует на данный заряд каждый из зарядов системы в отдельности. В этом случае напряженность поля системы зарядов находится как векторная сумма напряженностей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Сформулированное правило называют *принципом суперпозиции* электрических полей.

Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов (теорема Гаусса), для вакуума это записывается в виде:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi k_0 q_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}.$$

Электрическое поле принято изображать графически в виде силовых линий. Густота этих линий пропорциональна модулю вектора напряженности. Направление силовых линий в каждой точке поля совпадает с направлением вектора электрической напряженности \vec{E} . Вектор напряженности направлен в ту же сторону, что и сила, действующая со стороны поля на положительный пробный заряд, помещенный в данную точку. Интеграл $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ берется по поверхности S_G , охватывающей суммарный заряд $q_{\text{вн}}$. Фактически, *поток* Φ_E — это только другое название числа силовых линий, пронизывающих воображаемую гауссову поверхность S_G .

Использование теоремы Гаусса позволяет найти напряженности электрических полей, образованных различными заряженными телами. Для примера рассмотрим вычисление напряженности электрического поля положительно заряженной проводящей сферы радиусом R , рис. 3.1. Поверхностная плотность заряда на сфере $\sigma = q/S$. Как следует из теоремы Гаусса, вспомогательная поверхность S_G может быть любой формы, но она должна охватывать заряд. Заряд расположен на ша-

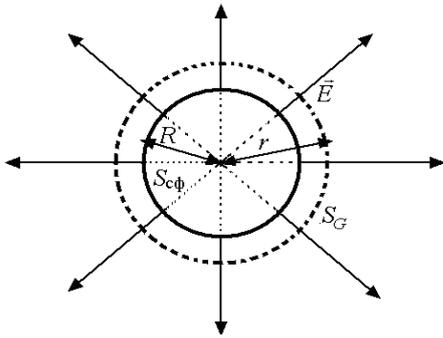


Рис. 3.1. Поле заряженной проводящей сферы

ре симметрично. Поле заряда имеет сферическую симметрию. Вектор \vec{E} вне поверхности, охватываемой сферой, в каждой точке направлен по продолжению ее радиуса R . Поэтому выберем вспомогательную поверхность в виде сферы радиусом $r > R$. Эта поверхность охватывает заряженную сферу. Из симметрии задачи следует, что напряженность поля \vec{E} в каждой точке сферы S_G одинакова по величине. Тогда поток вектора напряженности, пересекающий поверхность сферы S_G , равен $\Phi_E = E \cdot S_G$; $S_G = 4\pi r^2$. Отсюда $\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2$. По теореме Гаусса величина Φ_E пропорциональна суммарному заряду, охваченному поверхностью S_G , т. е. полному заряду на сфере. Если заряд шара $q_{\text{вн}} = \sigma \cdot S_{\text{сф}} = \sigma \cdot 4\pi R^2$, то

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_0 \cdot \sigma \cdot 4\pi \cdot R^2; E = k_0 q / r^2 = k_0 \cdot \sigma \cdot 4\pi \cdot R^2 / r^2.$$

Из полученного результата следует, что поле вне проводящей сферы не отличается от поля точечного заряда, сосредоточенного в месте расположения ее центра. Внутри сферы зарядов нет, и теорема Гаусса позволяет сделать вывод, что поле внутри сферы отсутствует.

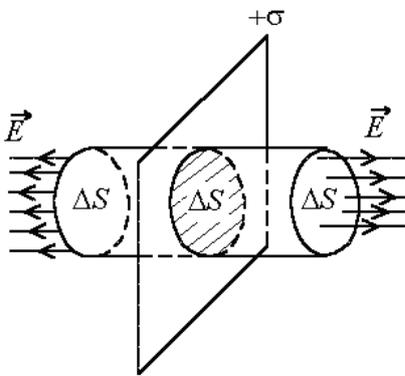


Рис. 3.2. Поле бесконечной заряженной плоскости

Другой пример – бесконечная равномерно заряженная плоскость с поверхностной плотностью заряда σ . Из соображений симметрии следует, что силовые линии поля перпендикулярны поверхности и в случае положительного заряда уходят в бесконечность. В качестве гауссовой удобно выбрать поверхность цилиндра. Она охватывает заряженную плоскость так, что боковая поверхность параллельна силовым линиям поля, а торцы, каждый площадью ΔS , перпендикулярны к ним. На рис. 3.2 показано, что поток вектора электрической напряженности существует только через торцы гауссовой поверхности, ее боковую составляющую силовые линии поля не пронизывают. Используя теорему Гаусса, находим, что

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E\Delta S = 4\pi k_0 \sigma \Delta S = \frac{\Delta S \cdot \sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E = 2\pi k_0 \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

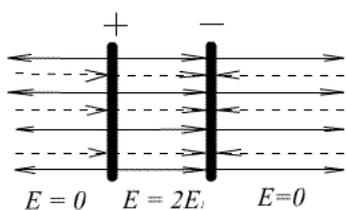


Рис. 3.3. Поле параллельных, разноименно заряженных пластин

Электрическое поле двух параллельных, одинаковых разноименно заряженных пластин (такую систему называют плоским конденсатором) можно рассматривать как результат наложения двух полей, созданных каждой из пластин (рис. 3.3). Заряды на пластинах по модулю равны.

Поля, создаваемые каждой из заряженных пластин, можно считать однородными, модуль напряженности любого из них определяется по формуле, полученной в предыдущем примере. Напряженность между пластинами оказалась вдвое больше напряженности, создаваемой одной пластиной. Поле вне пластин равно нулю.

Покоящиеся заряды создают электростатическое поле. В этом поле распределена электрическая энергия. При перемещении пробного заряда поле совершает работу. Работа не зависит от формы пути перемещения заряда. Это означает, что электростатическое поле является потенциальным. Заряд, расположенный в любой точке электростатического поля, обладает потенциальной энергией.

Потенциалом φ электрического поля в данной точке называется скалярная величина, численно равная потенциальной энергии, приходящейся на единицу положительного пробного заряда, помещенного в эту точку. Величина потенциала зависит от выбора точки с нулевым потенциалом. Эта точка может быть выбрана произвольным образом. Обычно за точку с нулевым потенциалом в физике принимают точку, бесконечно удаленную от источников поля. В электротехнике считается, что поверхность Земли имеет нулевой потенциал. *Разность потенциалов* $U = \varphi_1 - \varphi_2$ между двумя точками электрического поля часто называют электрическим напряжением. Единицей измерения напряжения и потенциала в системе СИ является вольт (В): 1 В — это такая разность потенциалов между двумя точками, когда при перемещении между ними заряда в 1 кулон совершается работа в 1 джоуль. Работа A при перемещении в электрическом поле заряда q находится как $A = qU$. Поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется *эквипотенциальной*. Силовые линии электростатического поля перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Работа электрических сил при перемещении заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю. Если A и B — две точки поля, то напряженность поля в точке A и разность потенциалов между этими точками связаны прибли-

женным соотношением $E_A \approx -\Delta\varphi/\Delta l$, где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между близко расположенными точками A и B , Δl – расстояние по силовой линии между эквипотенциальными поверхностями, проходящими через эти точки. Точная формула имеет вид $E = -d\varphi/dl$. Если электрическое поле однородно, т. е. напряженность во всех его точках постоянна по величине и направлению (например, в плоском конденсаторе), то $E=U/l$, где l – длина силовой линии. В системе СИ единицей измерения напряженности является В/м (вольт на метр).

Емкость. Два изолированных друг от друга проводника, один из которых заряжен положительно зарядом $+q$, а другой – отрицательно зарядом $-q$, называют обкладками конденсатора. Саму систему называют электрическим конденсатором. Заряд q называют зарядом конденсатора, а разность потенциалов между положительной и отрицательной обкладками называют напряжением на конденсаторе и обычно обозначают латинской буквой U . Напряжение на конденсаторе пропорционально его заряду: $U = (1/C) \cdot q$. C – это *емкость* (или просто *емкость*) конденсатора. Конденсатор называют простым, когда его электрическое поле сосредоточено в ограниченном пространстве между обкладками, которое заполнено однородным диэлектриком.

Единицей измерения электрической емкости в системе СИ является фарада (Ф). Конденсатор обладает электрической емкостью в 1 Ф, если при наличии заряда в 1 Кл на одной из обкладок разность потенциалов между обкладками равна 1 В.

Емкость плоского конденсатора можно найти из соотношения

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d,$$

где S – площадь поверхности одной из пластин (меньшей, если они не равны), d – расстояние между пластинами. Напряженность поля между обкладками конденсатора $E = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$. Напряжение на конденсаторе $U=E \cdot d$.

Емкость сферического конденсатора можно найти как

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Обкладками сферического конденсатора служат две концентрические сферы с радиусами R_1 и R_2 . Напряженность поля между обкладками

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2},$$

где r – расстояние до центра конденсатора. Напряжение на конденсаторе вычисляется по формуле

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \cdot dr.$$

Емкость цилиндрического конденсатора можно найти как

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Обкладками цилиндрического конденсатора служат два концентрических цилиндра с радиусами R_1 и R_2 и длиной $l \gg R_2 - R_1$. Напряженность поля между обкладками

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon r l},$$

где r — расстояние до центра конденсатора. Напряжение на конденсаторе вычисляется по формуле

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \cdot dr.$$

Соединяя обкладки простых конденсаторов, получают составной конденсатор. Емкость составного конденсатора определяется через емкости его компонент.

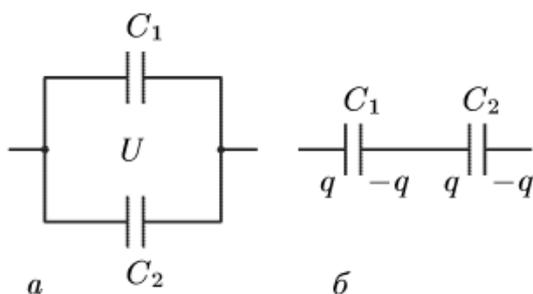


Рис. 3.4. Параллельное (а) и последовательное (б) соединение конденсаторов

Общая емкость параллельно соединенных конденсаторов (рис. 3.4, а) с емкостями C_1, C_2, \dots, C_n находится как

$$C_{\text{пар}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n.$$

При последовательном соединении (рис. 3.4, б) общую емкость определяют из соотношения

$$1/C_{\text{посл}} = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_n.$$

Полный заряд на каждой паре внутренних обкладок последовательно соединенных конденсаторов равен нулю.

Во многих случаях можно рассчитать емкость составного конденсатора, постепенно заменяя последовательно и параллельно соединенные конденсаторы на эквивалентные им емкости. В тех случаях, когда это не удастся, можно воспользоваться методом узловых потенциалов. В качестве примера рассмотрим схему, представленную на рис. 3.5.

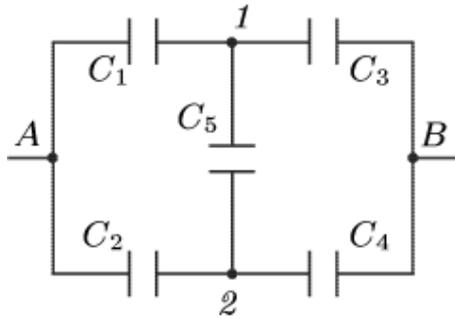


Рис. 3.5. Сложное соединение конденсаторов

Примем потенциал точки A за ноль ($\varphi_A=0$). Тогда $\varphi_B=U$. Потенциалы φ_1 и φ_2 найдем из системы уравнений, выражающих условия электронейтральности в узлах 1 и 2 (полный заряд трех обкладок, подходящих к каждому узлу, должен быть равен нулю):

$$(\varphi_1 - U) \cdot C_3 + (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot C_5 + \varphi_1 C_1 = 0;$$

$$(\varphi_2 - U) \cdot C_4 + (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot C_5 + \varphi_2 C_2 = 0.$$

Решив уравнения, найдем потенциалы φ_1 и φ_2 . Суммарный заряд конденсаторов C_1 и C_2 равен суммарному заряду всей системы, только в этом случае возможно выполнение условия электронейтральности для узлов 1 и 2: $q = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$. Поскольку заряд составного конденсатора равен суммарному заряду на конденсаторах C_1 и C_2 , емкость составного конденсатора может быть найдена из соотношения $C = q/U$.

Энергия, сосредоточенная в заряженном конденсаторе, находится как

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2,$$

где U – электрическое напряжение между обкладками конденсатора.

В пространстве, где имеется электрическое поле, сосредоточена энергия. Величина этой энергии в единице объема (плотность энергии) для однородного поля может быть вычислена по формуле $W_3 = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot E^2$, где E – напряженность поля.

3.1.2. Проводники и изоляторы в электрическом поле

В проводниках, помещенных в электрическое поле, заряды располагаются на их поверхности таким образом, что напряженность электростатического поля внутри проводника равна нулю, а поверхность проводника является эквипотенциальной.

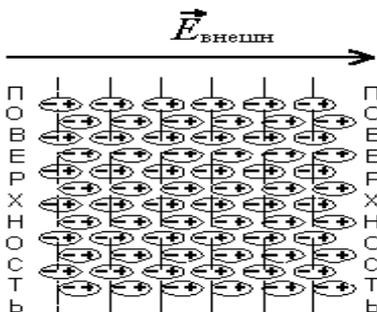


Рис. 3.6. Поляризация диэлектрика, помещенного в электрическое поле

Изоляторы (диэлектрики), помещенные в электрическое поле, поляризуются. Схематически поляризация диэлектрика изображена на рис. 3.6. Поляризация диэлектрика, помещенного в электрическое поле с напряженностью $E_{внешн}$, состоит в том, что заряды, входящие в состав молекул, смещаются. Смещение происходит таким образом, что поле каждой молекулы становится

подобным полю двух точечных зарядов, равных по абсолютной величине и расположенных на некотором (небольшом) расстоянии друг от друга. Такую систему называют электрическим диполем. Диполь характеризуется дипольным моментом. Это векторная величина, модуль которой равен $p_l = ql$, где l – плечо диполя (расстояние между разноименными зарядами, образующими диполь). Вектор \vec{p}_l направлен вдоль плеча от отрицательного заряда к положительному. Оценить величину общей поляризации диэлектрика позволяет *вектор поляризации*. Он равен векторной сумме всех электрических моментов диполей в единице объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{V}.$$

В результате поляризации напряженность электрического поля в диэлектрике становится в ε раз меньше напряженности внешнего поля. В диэлектрике векторы электрической напряженности \vec{E} поляризации \vec{P} и индукции \vec{D} связаны соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}; \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Две силовых характеристики электрического поля – D и E – имеют различные размерности: индукция поля D измеряется в кулонах на квадратный метр (Кл/м²), напряженность E измеряется в вольтах на метр (В/м) или в ньютонах на кулон (Н/Кл).

Основные расчетные формулы

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2}; \vec{E} = \vec{F}/q; E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2};$$

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = 4\pi k_0 q_{\text{вн}} = \frac{q_{\text{вн}}}{\varepsilon_0}; E = -d\varphi/dl; U = \varphi_1 - \varphi_2; A = qU;$$

$$C = q/\Delta\varphi; C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d; C_{\text{пар}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n; 1/C_{\text{посл}} = 1/C_1 + \dots + 1/C_n;$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2; W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon \cdot E^2; \vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{V}; \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}; \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Электростатика

Примеры решения задач

Пример 1. Напряженность электрического поля Земли вблизи ее поверхности составляет около 100 Н/Кл.

- а) Какова напряженность электрического поля Земли непосредственно под ее поверхностью?
- б) Чему равен поверхностный заряд Земли? Сколько для этого требуется избыточных электронов на каждый квадратный сантиметр поверхности?

Решение.

- а) Поскольку Земля – это проводник, то под ее поверхностью напряженность электрического поля равна нулю.
- б) Воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса. В качестве гауссовой поверхности умозрительно выберем сферу, окружающую Землю и имеющую чуть больший радиус (в расчетах принимаем его равным радиусу Земли) Напряженность электрического поля Земли E практически одинакова в любой точке вблизи ее поверхности. Поэтому поверхностный интеграл от скалярного произведения $E dS$ равен произведению напряженности на площадь поверхности Земли S_1 . Теорема Остроградского-Гаусса принимает вид: $ES_1 = q_1/\epsilon_0\epsilon$, где q_1 – полный поверхностный заряд. Поверхностная плотность заряда $\sigma = q_1/S_1 = \epsilon_0\epsilon E = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл/м² = $8,85 \cdot 10^{-14}$ Кл/см². Заряд одного электрона равен $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, поэтому на каждый квадратный сантиметр поверхности Земли должно приходиться по $5,52 \cdot 10^5$ избыточных электронов.

Пример 2. В предложенной Бором модели атома водорода электрон движется по круговой орбите с радиусом $R = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м, в центре которой находится протон. Найти:

- а) скорость электрона;
- б) электрическую потенциальную и полную энергию электрона.

Решение.

- а) Для нахождения скорости электрона воспользуемся вторым законом Ньютона $F = ma$, где полагаем силу $F = q_e q_p / 4\pi\epsilon_0 R^2$, а ускорение $a = v^2/R$. Чтобы электрон оставался на своей орбите, необходимо выполнение равенства

$$q_e q_p / 4\pi\epsilon_0 R^2 = mv^2/R.$$

Отсюда $v = (q_e q_p / 4\pi\epsilon_0 m R^2)^{1/2} = 2,18 \cdot 10^6$ м/с.

- б) Потенциальную энергию найдем из соотношения $W = q_e q_p / 4\pi\epsilon_0 R$. После подстановки числовых значений получим $W = -4,4 \cdot 10^{-18}$ Дж = -27,2 эВ. Умножив обе части уравнения $q_e q_p / 4\pi\epsilon_0 R^2 = mv^2 / R$ на $R/2$, найдем кинетическую энергию:

$$mv^2/2 = q_e q_p / 8\pi\epsilon_0 R^2 = -W/2.$$

Из последнего равенства следует, что по величине кинетическая энергия равна половине потенциальной. Полная энергия электрона в атоме водорода равна $-2,2 \cdot 10^{-18}$ Дж, или -13,6 эВ. Абсолютное значение этой величины равно той энергии, которую необходимо сообщить электрону, чтобы удалить его в бесконечность. Эта величина называется энергией ионизации.

Пример 3. Два небольших проводящих заряженных шара радиусом r расположены на расстоянии l друг от друга ($l > 2r$). Шары поочередно на некоторое время заземляют. Найти, чему станет равным потенциал φ_{1x} шара, который был заземлен первым.

Решение. При заземлении потенциал проводящего шара становится равным нулю, но при этом заряд на нем в ноль не обращается. Это связано с тем, что в данном случае потенциал шара складывается из потенциала поля самого шара и потенциалов полей, создаваемых зарядом q второго шара и зарядом, индуцированным на первом шаре. Потенциалом последнего можно пренебречь, поскольку по условию $l > 2r$. Потенциал первого шара после заземления

$$\varphi_1 = q' / 4\pi\epsilon_0 r + q / 4\pi\epsilon_0 l = 0.$$

Здесь q' – заряд на первом шаре после заземления. Из последнего равенства следует, что он $q' = -qr/l$. Потенциал второго шара после заземления также становится равным нулю:

$$\varphi_2 = q' / 4\pi\epsilon_0 l + q'' / 4\pi\epsilon_0 r = 0.$$

Отсюда следует, что после заземления заряд второго шара становится равным:

$$q'' = -q'r/l = q(r/l)^2.$$

Окончательно после заземления второго шара потенциал первого становится равным:

$$\varphi_{1x} = q'' / 4\pi\epsilon_0 l + q' / 4\pi\epsilon_0 r.$$

Подставив выражения для q' и q'' , получим: $\varphi_{1x} = -(q/4\pi\epsilon_0 l)[1 - (r/l)^2]$.

Пример 4. Электрическое поле создано равномерно заряженным бесконечно длинным цилиндрическим стержнем радиусом $R = 1$ см.

Линейная плотность заряда $\tau = 20$ нКл/м. Найти разность потенциалов двух точек поля, находящихся на расстояниях $x_1 = 0,5$ см и $x_2 = 2$ см от поверхности стержня.

Решение. Воспользуемся соотношением между напряженностью электрического поля и изменением потенциала $E = -grad\varphi$. Для поля с осевой симметрией это соотношение можно записать в виде

$$E = -d\varphi/dr, \text{ или } d\varphi = -E \cdot dr.$$

Интегрируя это выражение, найдем разность потенциалов двух точек, находящихся на расстояниях r_1 и r_2 от оси цилиндра:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{r_1}^{r_2} E dr.$$

Поскольку цилиндр длинный и все его точки взяты вблизи средней части, то для напряженности поля можно воспользоваться формулой

$$E = \tau / (2\pi\epsilon_0 r).$$

После интегрирования $\varphi_2 - \varphi_1 = -(\tau/2\pi\epsilon_0) \cdot \ln(r_2/r_1)$. Поскольку $r_1 = R + x_1$, $r_2 = R + x_2$, подставив численные значения, получим $\varphi_1 - \varphi_2 = 250$ В.

Пример 5. На продолжении оси тонкого прямого стержня длиной $b = 0,06$ м, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда $\tau = 15$ нКл/см, на расстоянии $a = 40$ см от конца стержня находится точечный заряд $q = 10$ мкКл. Определить силу, действующую на заряд q .

Решение. Найти силу, действующую на точечный заряд, непосредственно из закона Кулона нельзя, т. к. заряд стержня не является точечным. Но можно найти эту силу как результирующую элементарных сил, действующих на заряд q со стороны дифференциально малых равных элементов dl стержня. Заряд малого элемента стержня можно рассматривать как точечный, величина его равна $dq = \tau dl$ (т. к. заряд по длине стержня распределен равномерно). Выберем элемент dl на расстоянии l от заряда.

Сила взаимодействия двух точечных зарядов q и dq по закону Кулона численно равна

$$dF = \frac{q \cdot \tau \cdot dl}{4\pi\epsilon\epsilon_0 l^2}. \quad (1)$$

Все элементарные силы действуют по одной прямой и направлены в одну сторону, поэтому результирующую силу можно записать как

$$F = \int dF \quad \text{по стержню.} \quad (2)$$

Подставив выражение (1) в (2) и интегрируя полученное выражение в пределах от a до $(a+b)$, получим:

$$F = \int_a^{a+b} \frac{q\tau \cdot dl}{4\pi\epsilon\epsilon_0 l^2} = \frac{q\tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_a^{a+b} \frac{dl}{l^2} = \frac{q \cdot \tau}{4\pi \cdot \epsilon\epsilon_0 l} \Big|_a^{a+b} = \frac{q \cdot \tau \cdot b}{4\pi\epsilon_0 a (a+b)} = 0,2 \text{ Н.} \quad (3)$$

Пример 6. Два точечных электрических заряда $q_1 = 1$ нКл и $q_2 = -2$ нКл находятся в воздухе на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность поля, создаваемого этими зарядами в точке А, удаленной от заряда q_1 на расстояние $r_1 = 9$ см и от заряда q_2 на $r_2 = 7$ см.

Решение. Напряженность поля, создаваемого точечными зарядами q_1 и q_2 в точке А, найдем, воспользовавшись принципом суперпозиции, то есть напряженность E электрического поля в искомой точке может быть найдена как геометрическая сумма напряженностей E_1 и E_2 полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Напряженность электрического поля, создаваемого в воздухе ($\epsilon = 1$) первым зарядом $E_1 = q_1/4\pi\epsilon_0 r_1^2$, вторым $E_2 = q_2/4\pi\epsilon_0 r_2^2$. Направление векторов E_1 и E_2 найдем, поместив в точку А пробный заряд и определив направление силы Кулона в точке А на пробный заряд со стороны q_1 и $-q_2$. Абсолютное значение вектора E_1 найдем по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha}.$$

В этой формуле $\cos \beta = \cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$; α – угол между векторами E_1, E_2 .

$$\cos \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2} = -0,338.$$

Подставляя полученные выражения для E_1 и E_2 в формулу для E , получим:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2 \frac{q_1 q_2}{r_1^2 r_2^2} \cos \alpha}; \quad E = 3,6 \cdot 10^3 \text{ В/м.}$$

Пример 7. Два бесконечных длинных параллельных провода заряжены равномерно так, что линейная плотность заряда $\tau = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл/м. Расстояние между проводами $R = 0,5$ м. Определить силу, действующую на единицу длины провода.

Решение. Искомая величина равна $f = F/l$. Так как $F = Eq$, то $f = Eq/l$. Заряд q можно найти как τl . Тогда $f = E\tau l/l = E\tau$, т. е. необходимо найти напряженность поля E , создаваемого одним из проводов в том месте, где находится второй провод. Для этого нужно построить замкнутую поверхность в форме прямого цилиндра высотой l .

Электрическое поле имеет радиальный характер, напряженность E в каждой точке поля перпендикулярна оси цилиндра, модуль вектора зависит только от R . Поток вектора E сквозь торцы этого цилиндра N_E равен нулю ($N_E = E \cdot S \cdot \cos \alpha$, $\alpha = \pi/2$), а через боковую поверхность $N_E = E \cdot S = E \cdot 2\pi Rl$. По теореме Гаусса $N_E = q/\epsilon_0 = \tau \cdot l/\epsilon_0$. Следовательно,

$$E \cdot 2\pi Rl = \tau \cdot l/\epsilon_0; E = \tau/2\pi R\epsilon_0; f = E \cdot \tau^2/2\pi R\epsilon_0; f = 9 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м.}$$

Пример 8. Находящиеся в вакууме два параллельных тонких кольца, радиусы которых $r = 5$ см, имеют общую ось. Расстояние между их центрами $d = 12$ см. На первом кольце равномерно распределен заряд $q_1 = 82$ мкКл, на втором — заряд $q_2 = 60$ мкКл. Определить работу, необходимую для перемещения заряда $q_3 = 3$ нКл из центра одного кольца в центр другого.

Решение. 1) Заряды на кольцах не являются точечными. Так как работа при перемещении заряда зависит от разности потенциалов точек начала или конца перемещения (в нашем случае это центры колец), для решения задачи найдем потенциалы этих точек φ_{01} и φ_{02} . Искомая величина работы равна:

$$A = q_3(\varphi_{01} - \varphi_{02}). \quad (1)$$

Разделим каждое из колец на n достаточно малых частей, тогда заряд каждой части можно считать точечным $q_1' = q_1/n$; $q_2' = q_2/n$. Потенциал, образованный точечным зарядом q_1' в центре первого кольца, равен $\varphi_1' = q_1'/4\pi\epsilon_0 r$. Весь заряд q_1 образует в центре первого кольца потенциал φ_1 , равный алгебраической сумме потенциалов n точечных зарядов, или

$$\varphi_1 = \varphi_1' n = nq_1'/4\pi\epsilon_0 r = q_1/4\pi\epsilon_0 r. \quad (2)$$

Подобным образом можно найти потенциал в центре первого кольца, образованный зарядом q_2 . Так как

$$l = \sqrt{d^2 + r^2}, \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{d^2 + r^2}}. \quad (3)$$

По принципу суперпозиции потенциал электрического поля в центре первого кольца, образованный зарядами q_1 и q_2 , равен

$$\varphi_{01} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{d^2 + r^2}}. \quad (4)$$

Повторив все рассуждения, можно найти выражение для потенциала в центре второго кольца

$$\varphi_{02} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{d^2 + r^2}}. \quad (5)$$

Подставив (4) и (5) в (1), получим окончательно

$$A = q_3 \left(\frac{q_1 - q_2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2}} \right] = 7,3 \text{ мДж.}$$

Пример 9. Бесконечно длинный цилиндр радиуса $R = 1$ см заряжен с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м². Цилиндр является источником электронов. Какова должна быть скорость электронов, вылетающих перпендикулярно поверхности цилиндра, чтобы они могли улететь на расстояние, большее $r = 1$ м?

Решение. Найдем напряженность поля цилиндра. По теореме Гаусса: $2\pi rLE = 2\pi RL\sigma/\epsilon_0$; $E = R\sigma/\epsilon_0 r$. Для нахождения скорости используем закон сохранения энергии: $m_e v^2/2 = q_e(\varphi_0 - \varphi)$, где φ_0 — потенциал цилиндра, φ — потенциал поля на расстоянии r от оси цилиндра. Учитывая связь между потенциалом и напряженностью, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{R\sigma}{\epsilon_0 r}.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\varphi = -\frac{R\sigma}{\epsilon_0} \ln r; \varphi_0 = -\frac{R\sigma}{\epsilon_0} \ln R.$$

Из полученных выражений определяем начальную скорость электронов:

$$v = \sqrt{\frac{2q_e R\sigma \ln(r/R)}{\epsilon_0 m_e}} \approx 1,35 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Пример 10. Два металлических шарика радиусами $R_1 = 5$ см и $R_2 = 10$ см имеют: первый заряд $q_1 = 40$ нКл, второй $q_2 = -20$ нКл. Найти энергию W , которая выделится при разряде, если шары соединить проводником.

Решение. По закону сохранения энергии при разряде выделится та энергия, которая равна разности энергий шаров до и после соединения, т. е. $W = W_1 - W_2$, где W_1 — энергия шаров до соединения, W_2 — энергия шаров после соединения. Поэтому задача заключается в нахождении энергии шаров до и после соединения. Поскольку известен заряд шаров, а емкость можем найти, зная радиусы шаров, энергию шаров до соединения найдем как сумму энергий каждого из них

$$W_1 = q_1^2/2C_1 + q_2^2/2C_2.$$

После соединения шаров их емкость C будет равна $C = C_1 + C_2$.

По закону сохранения заряда на шарах после их соединения заряд q равен $q = q_1 + q_2$. Энергия шаров после соединения:

$$W_2 = (q_1 + q_2)^2 / 2(C_1 + C_2).$$

Энергия, которая выделяется при разряде, равна:

$$W_2 = W_1 - W_2 = q_1^2 / 2C_1 + q_2^2 / 2C_2 - (q_1 + q_2)^2 / 2(C_1 + C_2). \quad (1)$$

Емкости шаров:

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1; \quad C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2. \quad (2)$$

Подставив выражения (2) в (1) и приведя к общему знаменателю, получим

$$\Delta W = (R_2 q_1 - R_1 q_2)^2 / 8\pi\epsilon_0 R_1 R_2 (R_1 + R_2) = 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Закон Кулона

1. Два шарика массой 0,1 кг подвешены на нитях длиной 1 м. Какой заряд надо сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равна 1 Н?

2. Два одинаково заряженных шарика массой 1 г подвешены на нитях $l = 1$ м. Найти скорость утечки зарядов с каждого шарика, если скорость их сближения меняется по закону $v = 1/\sqrt{x}$, где x – расстояние между шариками.

3. В вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 0,1$ м расположены точечные заряды $q, 2q, 3q, 4q, 5q, 6q$ ($q = 0,1$ мкКл). Найти силу F , действующую на точечный заряд q , лежащий в плоскости шестигранника и равноудалённый от его вершин.

4. Тонкий очень длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = 10$ мкКл/м. На перпендикуляре к оси стержня на расстоянии $a = 0,2$ м находятся точечный заряд $q = 10$ нКл. Найти силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

5. Два одинаковых заряженных шарика плотностью $\rho = 1,6 \cdot 10^3$ кг/м³ подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины под углом α . Шары погружаются в масло плотностью $\rho_0 = 800$ кг/м³. Какова диэлектрическая проницаемость ϵ масла, если угол расхождения нитей при погружении шариков в масло остался неизменным?

6. По тонкому кольцу с радиусом $R = 0,1$ м равномерно распределен заряд $q = 0,4$ мкКл. Определить силу F , растягивающую кольцо.

7. Два шарика с массами $m = 0,1$ г каждый подвешены на нитях длиной $l = 0,2$ м. Получив одинаковый заряд, шарики разошлись так, что их нити образовали угол 60° . Найти заряд каждого шарика.

8. Два одинаковых шарика находятся на расстоянии $r = 0,3$ м и притягиваются с силой $F_1 = 90$ мкН. После того, как шары были приведены в соприкосновение и удалены на прежнее расстояние, они стали отталкиваться с силой $F_2 = 160$ мкН. Найти заряды q_1 и q_2 , которые были на шарах до соприкосновения.

9. Шарик массой $m = 0,1$ г и с зарядом $q = 16,7$ нКл подвешен на нити. На какое расстояние нужно поднести к нему такой же шарик, чтобы сила натяжения нити уменьшилась вдвое?

10. Два одинаково заряженных шарика, подвешенных на нитях равной длины, разошлись на некоторый угол. Какова плотность материала шариков, если при погружении их в керосин с $\varepsilon = 2$ и плотностью $\rho_k = 0,8 \cdot 10^3$ кг/м³, угол между нитями не изменился?

Ответы

1. $q = 1,9$ мкКл. 2. $dq/dt = 1,1$ мкКл/с. 3. $F = 54$ мН. 4. $F = 9$ мН.
5. $\varepsilon = 2$. 6. $F = 35$ мкН. 7. $q = 50$ нКл. 8. $q_1 = 90$ нКл; $q_2 = 10$ нКл.
9. $r = 2,25$ мм. 10. $\rho = 1600$ кг/м³.

Напряженность электрического поля

1. Найти минимальную и максимальную напряженности в центре куба с длиной ребра $a = 1$ м, если известно, что в вершинах расположены четыре заряда по 1 нКл.

2. Четыре одинаковых заряда находятся в вершинах квадрата со стороной $a = 1$ м. Найти на прямой, проходящей через центр квадрата параллельно одной из сторон, точку, в которой напряженность поля максимальна.

3. Найти напряженность в середине стороны квадратной рамки с линейной плотностью зарядов $\tau = 500$ нКл/м. Периметр квадрата равен 0,8 м.

4. Стержень длиной $l = 0,1$ м заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = 400$ нКл/м. Найти напряженность E в точке, расположенной на перпендикуляре к стержню, проведенном через один из концов стержня, на расстоянии $d = 0,08$ м.

5. Кольцо радиусом $R = 1$ м заряжено с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Найти напряженность поля E в точке, равноудаленной от кольца на расстояние $d = 5$ м.

6. Две бесконечные пластины расположены под прямым углом друг к другу и равномерно заряжены с поверхностными плотностями заряда $\sigma_1 = 1 \text{ нКл/м}^2$ и $\sigma_2 = 2 \text{ нКл/м}^2$. Найти напряженность электрического поля, создаваемого пластинами. Нарисовать картину силовых линий.

7. Найти напряженность электрического поля E в шаровой полости однородно заряженного шара, если объемная плотность заряда $\rho = 1 \text{ нКл/м}^3$, а расстояние между центром полости и центром шара равно $l = 0,5 \text{ м}$.

8. Точечный заряд $q = 1 \text{ нКл}$ находится в центре кольца радиусом $R = 1 \text{ м}$, по которому равномерно распределен заряд $q = -1 \text{ нКл}$. Найти напряженность электрического поля E на оси кольца в точке, отстоящей от центра кольца на расстоянии $d = 10 \text{ м}$.

9. Два концентрических бесконечных цилиндра с радиусами $R_1 = 0,06 \text{ м}$ и $R_2 = 0,1 \text{ м}$ заряжены с поверхностной плотностью $\sigma_1 = 1 \text{ нКл/м}^2$ и $\sigma_2 = -0,5 \text{ нКл/м}^2$. Найти напряженность поля E в точках, отстоящих от оси цилиндров на расстояниях $r_1 = 0,05 \text{ м}$; $r_2 = 0,09 \text{ м}$; $r_3 = 0,15 \text{ м}$. Построить график $E(r)$.

10. Две концентрические сферы с радиусами $R_1 = 0,05 \text{ м}$ и $R_2 = 0,1 \text{ м}$ имеют заряды $q_1 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ и $q_2 = 10^{-8} \text{ Кл}$. Определить напряженность поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 0,04 \text{ м}$, $r_2 = 0,08 \text{ м}$, $r_3 = 0,12 \text{ м}$.

Ответы

1. $E_{\max} = 34,3 \text{ В/м}$; $E_{\min} = 0$. 2. $x = 0,35 \text{ м}$. 3. $E = 60,2 \text{ кВ/м}$. 4. $E = 35,6 \text{ кВ/м}$. 5. $E = 113 \text{ В/м}$. 6. $E = 282,5 \text{ В/м}$. 7. $E = 18,8 \text{ В/м}$. 8. $E = 2,8 \text{ мВ/м}$. 9. $E_1 = 0$; $E_2 = 400 \text{ В/м}$; $E_3 = 60 \text{ В/м}$. 10. $E_1 = 0 \text{ В/м}$; $E_2 = 28114 \text{ В/м}$; $E_3 = 6247 \text{ В/м}$.

Потенциал электрического поля

1. Две одинаковые параллельные плоскости площадью 100 см^2 каждая находятся на расстоянии 2 мм друг от друга и имеют заряды 1 и 2 нКл . Найти разность потенциалов между плоскостями.

2. Электрическое поле создано длинным цилиндром с радиусом $R = 0,02 \text{ м}$. Линейная плотность зарядов $\tau = 40 \text{ нКл/м}$. Найти разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстоянии $a_1 = 0,01 \text{ м}$ и $a_2 = 0,04 \text{ м}$ от поверхности цилиндра.

3. N одинаковых капель ртути с потенциалом φ_1 каждая сливаются в одну каплю. Каков потенциал образовавшейся капли?

4. Металлический шарик диаметром $0,02$ м заряжен отрицательно до потенциала $\varphi = 150$ В. Сколько электронов находится на поверхности шарика?

5. Металлический шар с радиусом $R_1 = 0,1$ м заряжен до потенциала 1000 В. Какой потенциал будет иметь этот шар, если его окружить сферической проводящей заземленной оболочкой радиусом $R_2 = 0,15$ м?

6. Найти потенциал электростатического поля в центре куба со стороной $a = 1$ м, если в его вершинах находятся заряды $q = 1$ нКл.

7. Тонкая нить заряжена с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек поля, удаленных от нити на расстояниях $r_1 = 0,02$ м и $r_2 = 0,04$ м.

8. Тонкие стержни образуют квадрат со стороной a . Стержни заряжены с линейной плотностью $\tau = 1,33$ нКл/м. Найти потенциал φ в центре квадрата.

9. По тонкому кольцу с радиусом $R = 0,1$ м равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Определить потенциал φ в точке, лежащей на оси кольца, на расстоянии $0,05$ м от центра.

10. Два заряженных шарика, подвешенных на одинаковых нитях длиной $l = 0,1$ м, разошлись на угол 60° . Найти потенциал φ заряженных шариков, если масса каждого из них $m = 0,1$ г, а радиус $R = 0,1$ м.

Ответы

1. $U = 11,3$ В. 2. $U = 500$ В. 3. $\varphi = \varphi_1 N^{2/3}$. 4. $N = 10^9$. 5. $\varphi_2 = 333$ В. 6. $\varphi = 84,8$ В. 7. $U = 125$ В. 8. $\varphi = 84,4$ В. 9. $\varphi = 505$ В. 10. $\varphi = 22$ кВ.

Работа в электрическом поле

1. Два кольца радиусом $R = 0,1$ м с зарядами 1 и 2 нКл расположены параллельно на расстоянии $0,1$ м друг от друга. Найти работу по перемещению заряда $q = 1$ нКл между центрами колец.

2. Определить работу перемещения заряда $q = 10$ нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $r = 0,01$ м от поверхности шара радиусом $R = 0,01$ м с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10$ мкКл/м².

3. Какую работу, приходющуюся на единицу длины, необходимо совершить, чтобы сблизить две параллельных бесконечно длинных нити с расстояния $r_1 = 0,02$ м до расстояния $r_2 = 0,01$ м?

4. Какую работу необходимо совершить, чтобы два заряда $q_1 = 6,6$ нКл и $q_2 = 13,3$ нКл, находящихся на расстоянии $0,4$ м, сблизить до $0,25$ м?

5. Две плоскости, равномерно заряженные с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1 = 1$ мкКл/м², пересекаются под прямым углом. Найти работу по перемещению заряда $q = 2$ нКл из точки в одной плоскости, находящейся на расстоянии 0,1 м от линии пересечения до точки в другой плоскости, находящейся на расстоянии 0,2 м от линии пересечения.

6. Бесконечно длинная тонкая нить заряжена с линейной плотностью $\tau = 10^{-8}$ Кл/м. Найти работу по перемещению заряда 1 нКл между точками, удаленными от нити на расстояния $r_1 = 0,02$ м и $r_2 = 0,04$ м.

7. Круглая пластина с радиусом $R = 0,05$ м имеет заряд $q = 1$ нКл. Найти работу по перемещению точечного заряда $q_1 = 1$ нКл, расположенного в непосредственной близости от центра пластины, в точку, находящуюся на перпендикуляре к центру пластины на расстоянии $a = 0,05$ м от ее поверхности.

8. Найти работу по перемещению заряда $q = 1$ нКл от плоскости с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10$ нКл/м² до точки, удаленной от плоскости на расстояние $a = 0,1$ м.

9. Две плоскости находятся на расстоянии $d = 0,01$ м друг от друга и заряжены с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1 = 0,2$ мкКл/м² и $\sigma_2 = 0,5$ мкКл/м². Найти работу по перемещению заряда 1 мкКл между плоскостями.

10. Квадрат со стороной $a = 1$ м заряжен с линейной плотностью $\tau = 1,33$ нКл/м. Определить работу перемещения заряда $q = 1$ нКл из центра квадрата в бесконечность.

Ответы

1. $A = 5,14$ нДж. 2. $A = 56,5$ Дж. 3. $A = 0,112$ Дж. 4. $A = 1,2$ мкДж.
5. $A = 7,9$ мкДж. 6. $A = 125$ нДж. 7. $A = 211$ нДж. 8. $A = 56,6$ нДж.
9. $A = 170$ мкДж. 10. $A = 33,6$ нДж.

Поток вектора электрической напряженности

1. В центре сферы радиусом $R = 0,2$ м находится заряд $q = 10$ нКл. Определить поток Φ_E вектора электрической напряженности через часть сферической поверхности площадью $S = 20$ см².

2. Электрическое поле создано бесконечно длинной заряженной нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 1$ мкКл/м. На расстоянии $a = 1$ м от нити находится круглая площадка с радиусом $R = 0,01$ м. Найти поток вектора электрической напряженности через эту площадку, если она расположена под углом 45° к линии напряженности, проходящей через центр площадки.

3. В вершине конуса с раствором телесного угла $\Omega = 1$ стерadian находится точечный заряд $q = 10$ нКл. Найти поток вектора электрической напряженности через площадку, ограниченную линией пересечения поверхностей конуса с любой другой поверхностью.

4. В центре куба находится точечный заряд $q = 1$ нКл. Найти поток вектора электрической напряженности Φ_E через одну из граней куба.

5. В четырех вершинах куба с ребром $a = 1$ м находятся точечные заряды $q = 10$ нКл. Найти поток вектора напряженности электрического поля, создаваемого этими зарядами, через поверхность шарика радиусом $r = 1$ см, находящегося в центре куба.

6. Плоская квадратная пластина со стороной $a = 0,1$ м находится на расстоянии 1 м от бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 1$ мкКл/м². Найти поток вектора электрической напряженности Φ_E через эту поверхность.

7. Электрическое поле создано бесконечной заряженной нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 50$ нКл/м. На расстоянии $a = 0,3$ м от нити находится плоская квадратная площадка $S = 1$ см². Найти поток вектора электрической напряженности через эту площадку, если ее плоскость находится под углом $\beta' = 30^\circ$ к линии напряженности, проходящей через центр площадки.

8. Электрическое поле создано точечным зарядом $q = 0,1$ мкКл. Определить поток вектора электрической напряженности Φ_E через круглую площадку радиусом $R = 0,3$ м. Заряд одинаково удален от краев площадки и находится на расстоянии $a = 0,4$ м от ее центра.

9. Электрическое поле создано бесконечной заряженной нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 0,3$ мкКл/м. Найти поток вектора электрической напряженности Φ_E через прямоугольную площадку, две большие стороны которой параллельны заряженной нити и одинаково удалены от нее на расстояние $r = 0,2$ м. Стороны площадки имеют размеры: $a = 0,2$ м, $b = 0,4$ м.

10. Точечный заряд $q = 1$ мкКл равноудален от всех сторон квадратной площадки со стороной $a = 0,1$ м на расстояние $r = 0,4$ м. Найти поток вектора электрической напряженности Φ_E через эту площадку.

11. Два точечных заряда 1 и -1 Кл расположены на расстоянии 2 м. Найти поток вектора E через круг радиусом 1 м, расположенный между зарядами.

12. Два точечных заряда $q = 1$ нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 1 м. Найти поток вектора E через круг радиусом 5 см, расположенный в третьей вершине параллельно противоположной стороне.

13. Напряженность электрического поля \vec{E} определяется функцией вида $\vec{E} = (x\vec{i} + y\vec{j})/(x^2 + y^2)$, где \vec{i}, \vec{j} – орты. Найти поток вектора \vec{E} через сферу радиусом 1 м с центром в начале координат.

14. В вершинах куба с длиной ребра 2 м произвольно расположены два точечных заряда по 1 нКл. Найти наименьшее и наибольшее значение потока вектора \vec{E} через одну из граней куба.

15. В центре грани куба со стороной 1 м находится заряд 1 нКл. Найти потоки вектора напряженности \vec{E} через каждую из граней куба.

16. В центре основания цилиндра радиусом и высотой 1 м находится заряд 1 нКл. Найти поток вектора \vec{E} через другое основание.

17. В центре основания цилиндра с равными диаметром и высотой находится заряд 2 нКл. Найти поток вектора \vec{E} через другое основание.

18. В центре основания цилиндра радиусом и высотой 1 м находится заряд 1 нКл. Найти поток вектора \vec{E} через боковую поверхность.

19. В центре основания цилиндра с равными диаметром и высотой находится заряд 2 нКл. Найти поток вектора \vec{E} через боковую поверхность цилиндра.

20. Одна из граней куба со стороной 1 м заряжена с поверхностной плотностью 1 нКл/м². Найти поток вектора \vec{E} через противоположную грань.

Ответы

1. $\Phi_E = 4,5 \text{ В}\cdot\text{м}$. 2. $\Phi_E = 3,95 \text{ В}\cdot\text{м}$. 3. $\Phi_E = 90 \text{ В}\cdot\text{м}$. 4. $\Phi_E = 18,8 \text{ В}\cdot\text{м}$.
5. $\Phi_E = 0$; $\Phi_E = 0,075 \text{ В}\cdot\text{м}$. 6. $\Phi_E = 565 \text{ В}\cdot\text{м}$. 7. $\Phi_E = 0,15 \text{ В}\cdot\text{м}$. 8. $\Phi_E = 1130 \text{ В}\cdot\text{м}$.
9. $\Phi_E = 20 \text{ В}\cdot\text{м}$. 10. $\Phi_E = 3,7 \text{ В}\cdot\text{м}$. 11. $\Phi_E = 3,23 \cdot 10^{10} \text{ В}\cdot\text{м}$. 12. $\Phi_E = 4,8 \text{ мВ}\cdot\text{м}$.
13. $\Phi_E = 62,8 \text{ В}\cdot\text{м}$. 14. $\Phi_E = 8,4 \text{ В}\cdot\text{м}$. 15. $\Phi_E = 9 \text{ В}\cdot\text{м}$. 16. $\Phi_E = 12 \text{ В}\cdot\text{м}$.
17. $\Phi_E = 24 \text{ В}\cdot\text{м}$. 18. $\Phi_E = 101 \text{ В}\cdot\text{м}$. 19. $\Phi_E = 202 \text{ В}\cdot\text{м}$. 20. $\Phi_E = 56,5 \text{ В}\cdot\text{м}$.

Конденсаторы

1. Плоский конденсатор с площадью пластин 60 см², зарядом 1 нКл, имеет разность потенциалов между пластинами 90 В. Найти расстояние между пластинами конденсатора.

2. Вычислить силу, с которой притягиваются друг к другу пластины заряженного конденсатора емкостью 1 мкФ с расстоянием между пластинами 1 см, если напряжение на конденсаторе равно 1 кВ.

3. В пространство между обкладками плоского конденсатора параллельно его пластинам вводят диэлектрическую пластинку с проницаемостью $\varepsilon = 2$. Толщина диэлектрика составляет половину расстоя-

ния между обкладками конденсатора. Во сколько раз увеличится сила электростатического взаимодействия между обкладками конденсатора, если разность потенциалов между ними поддерживается постоянной?

4. Конденсатор заряжен до разности потенциалов 600 В и отключен от источника тока. Определить разность потенциалов между пластинами конденсатора, если расстояние между ними уменьшится вдвое.

5. Два конденсатора, рассчитанные на максимальное напряжение 300 В каждый, имеющие емкости C_1 и C_2 , соединены последовательно. Какое наибольшее напряжение можно приложить к такому составному конденсатору, не вызывая пробоя любого из них, если $C_2/C_1 = 0,6$?

6. Плоский конденсатор с расстоянием между обкладками 3 мм заполнен слоями слюды и парафина одинаковой толщины и подключен к источнику тока с напряжением 700 В. Определить напряженность электрического поля в каждом слое диэлектрика, если у слюды $\varepsilon = 6$, у парафина $\varepsilon = 2$.

7. Конденсатор состоит из трех металлических пластин площадью 5 см^2 каждая, разделенных двумя одинаковыми слоями слюды толщиной 100 мкм с $\varepsilon = 7$. Крайние пластины соединены между собой. Какова емкость такого конденсатора?

8. К конденсатору емкостью 1 мкФ подключены последовательно два конденсатора емкостью 1 и 2 мкФ, соединенные параллельно. Конденсаторы подключены к источнику постоянного напряжения 120 В. Какова общая емкость конденсаторов? Определить напряжение на каждом конденсаторе.

9. Обкладки конденсатора с неизвестной емкостью, заряженного до напряжения 80 В, соединяют с одноименными обкладками конденсатора емкостью 6 мкФ, заряженного до 16 В. Определить неизвестную емкость, если напряжение на конденсаторах после соединения равно 20 В.

10. К плоскому конденсатору, заряженному до напряжения 210 В и отключенному от источника, присоединили параллельно такой же по размерам, но не заряженный конденсатор с диэлектриком из стекла, заполняющим весь зазор. Определить диэлектрическую проницаемость стекла, если напряжение на зажимах батареи конденсаторов оказалось равным 30 В.

11. Плоский конденсатор емкостью 10 мкФ подключен к источнику $U = 6$ В. Не отключая конденсатор от источника, в него вставляют диэлектрическую пластинку с $\varepsilon = 6$. Каким станет заряд конденсатора?

12. Из плоского конденсатора с площадью обкладок 100 см^2 и $d = 10 \text{ мм}$, присоединенного к источнику $U = 1 \text{ кВ}$, вытаскивают заполняющий все пространство между обкладками диэлектрик с $\varepsilon = 3$. Какой заряд вернется в источник?

13. Во сколько раз увеличится емкость плоского конденсатора, если его погрузить до половины в жидкий диэлектрик с $\varepsilon = 5$?

14. Два одинаковых плоских конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику. Во сколько раз изменится напряженность поля в одном из конденсаторов, если в другой ввести пластинку $\varepsilon = 3$, так, чтобы диэлектрик полностью заполнил все пространство между обкладками?

15. Плоский конденсатор емкостью 100 пФ подключили к источнику постоянного напряжения 300 В . Затем источник отсоединили. Какую работу необходимо совершить, чтобы раздвинуть пластины конденсатора, удвоив расстояние между ними?

16. Напряженность электрического поля плоского конденсатора емкостью 4 мкФ равна 1 кВ/м . Расстояние между обкладками конденсатора 1 мм . Определить энергию электрического поля конденсатора.

17. Объем заряженного резинового шара увеличивается в восемь раз. Чему равна у поверхности шара доля объемной плотности электрической энергии, потерянной при этом?

18. Между пластинами заряженного плоского конденсатора, отключенного от источника, ввели диэлектрик с $\varepsilon = 3$, так, чтобы он заполнил пространство между пластинами конденсатора наполовину, прилегая при этом к обеим пластинам. Определить изменение энергии конденсатора.

19. Плоский конденсатор, заполненный керосином с $\varepsilon = 2$, зарядили, сообщив ему энергию $W = 1 \text{ Дж}$, затем конденсатор отсоединили от источника, слили керосин и разрядили. Какая энергия выделилась при разряде?

20. Плоский конденсатор имеет площадь обкладок 100 см^2 . Заряд конденсатора 100 нКл . В конденсатор вставлена металлическая пластина толщиной $1,15 \text{ мм}$. Определить работу внешних сил, которую нужно совершить, чтобы вынуть эту пластину из конденсатора при отключенном источнике.

21. Плоский конденсатор, с расстоянием между пластинами 30 мм и площадью каждой 60 см^2 , присоединен к источнику постоянного напряжения 2 кВ . Параллельно обкладкам в конденсатор ввели металлическую пластину толщиной 10 мм и такой же площади. Определить работу источника тока, совершенную при этом процессе.

22. Два одинаковых конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику ЭДС. Во сколько раз изменится энергия системы конденсаторов, если один из них погрузить в жидкость с $\varepsilon = 3$? Погружение осуществляется при подключенном источнике.

23. Конденсатор, заряженный до некоторого напряжения, соединяют разноименно заряженными обкладками с конденсатором такой же емкости, но заряженным до вдвое большего напряжения. Во сколько раз уменьшилась энергия системы после соединения?

24. К конденсатору емкостью $C = 1$ мкФ, заряженному до напряжения $U = 1$ кВ, подключают параллельно конденсатор емкостью $C/2$, далее к ним параллельно подключают конденсаторы емкостью $C/4$, $C/8$ и т. д. Определить, какое количество энергии выделится в системе при подключении 5 конденсаторов.

25. Два конденсатора емкостью 200 и 100 мкФ, соединенные последовательно, зарядили от источника напряжения 300 В и отсоединили от него. Затем конденсаторы соединили параллельно одноименными обкладками. Определить энергию, выделившуюся при этом соединении.

26. Конденсатор емкостью $C_1 = 1$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_1 = 300$ В. Конденсатор емкостью $C_2 = 2$ мкФ заряжен до $U_2 = 200$ В. Оба конденсатора соединены после зарядки параллельно одноименными полюсами. Найти разность потенциалов, установившуюся на пластинах конденсаторов после их соединения.

27. Радиус заряженной металлической сферы $R = 10$ см. Потенциал сферы $\varphi = 300$ В. С какой плотностью σ распределен заряд на поверхности сферы?

28. Шарик массой $m = 10$ г имеет заряд $q = 5$ нКл. С каким ускорением он движется под действием однородного электрического поля напряженностью $E = 30$ кВ/м?

Ответы

1. $d = 4,8$ мм. 2. $F = 50$ Н. 3. $N = 2,25$. 4. $U = 300$ В. 5. $U = 480$ В.
6. $E = 117$ кВ/м; $E = 350$ кВ/м. 7. $C = 620$ пФ. 8. $C = 0,75$ мкФ; $U_1 = 90$ В;
 $U_2 = 30$ В. 9. $C = 0,4$ мкФ. 10. $\varepsilon = 6$. 11. $q = 0,36$ мКл. 12. $q = 18$ нКл.
13. $n = 3$. 14. $n = 1,5$. 15. $A = 4,5$ мкДж. 16. $W = 2$ мкДж. 17. $n = 15/16$.
18. $n = 2$. 19. $W = 2$ Дж. 20. $A = 65$ мкДж. 21. $A = 3,5$ мкДж. 22. $n = 1,5$. 23. $n = 10$.
24. $W = 0,25$ Дж. 25. $W = 0,33$ Дж. 26. $U = (C_1 U_1 + C_2 U_2) / (C_1 + C_2) = 260$ В.
27. $\sigma = 26,55$ нКл/м². 28. $a = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м/с².

3.2. Электрический ток, условия его существования, законы Ома и Джоуля–Ленца, правила Кирхгофа

Электрический ток — это направленное движение его носителей (свободных зарядов). Чтобы свободные заряды, помимо хаотического теплового движения, находились еще и в упорядоченном движении, внутри проводника необходимо создать электрическое поле. Тогда положительные заряды будут двигаться из мест с большим потенциалом в места с меньшим потенциалом, а отрицательные — в обратную сторону. В металлах могут перемещаться только электроны. Подвижные заряды будут располагаться так, чтобы их собственные поля компенсировали первоначально созданное электрическое поле. Таким образом, они будут стремиться к выравниванию потенциала в объеме проводника. Для поддержания непрерывного упорядоченного движения свободных зарядов необходимо воспрепятствовать установлению электростатического равновесия. Для чего требуется совершения непрерывной работы против сил электростатического поля, стремящихся уравнивать потенциалы всех точек проводника и восстановить равновесие. Такая работа должна производиться за счет других видов энергии не электростатического происхождения, например, механической, химической, тепловой. Следовательно, для обеспечения упорядоченного движения свободных зарядов (протекания электрического тока) необходимо непрерывное превращение какого-либо вида энергии в электрическую, происходящее если не по всему объему проводника, то, по крайней мере, на некоторых его участках. Такие процессы имеют место в гальванических элементах, аккумуляторах, термоэлементах, динамо-машинах и других источниках электродвижущей силы. Этими источниками создается добавочное электрическое поле (добавляется к полю зарядов проводника), поддерживающее ток. Такое поле называется сторонним. Силой электрического тока называется количество электричества, протекающего через сечение проводника в единицу времени

$$I = dq/dt.$$

Еще одна характеристика называется плотностью тока. Ее можно найти, как отношение силы тока к площади поперечного сечения проводника:

$$j = I/S.$$

Плотность тока — векторная величина. Ее модуль можно выразить через скорость $\langle v \rangle$ упорядоченного движения зарядов в проводнике, их концентрацию n и заряд e носителя тока:

$$j = n \cdot e \cdot \langle v \rangle.$$

Направлен вектор плотности тока в сторону движения положительных зарядов. Направление тока в металлах оказывается противоположным направлению движения носителей тока — отрицательно заряженных электронов. Единицей силы тока является ампер (А). Сила тока в 1 А соответствует протеканию через поперечное сечение проводника каждую секунду 1 Кл электричества. Единицей измерения плотности тока является А/м². Электрический ток называется постоянным, если его сила и направление не изменяются со временем. Электрический ток может течь только по проводникам, образующим замкнутые цепи. В неразветвленной замкнутой цепи сила тока во всех частях одинакова. Для существования тока необходимо наличие в цепи устройства, способного создать и поддерживать разность потенциалов. Такие устройства часто называют источниками тока. Действующие на заряды со стороны источников силы называются сторонними. Внутри источника эти силы переносят заряды против направления действия электрических сил: электрические силы переносят положительные заряды внутри источника от положительного полюса к отрицательному, сторонние силы — от отрицательного к положительному. Благодаря сторонним силам на зажимах источника поддерживается разность потенциалов, а в цепи течет ток. Физическая величина, определяемая работой, затрачиваемой сторонними силами на перемещение единицы положительного заряда, называется электродвижущей силой (ЭДС):

$$\mathcal{E} = A/q.$$

Теперь можно дать определение тому, что принято называть электрическим напряжением. Это величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении положительного единичного заряда:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

В электростатическом поле, где нет движения зарядов и ЭДС $\mathcal{E}_{12} = 0$, электрическое напряжение равно разности потенциалов.

Закон Ома для участка цепи установлен экспериментально. *Сила тока в проводнике прямо пропорциональна приложенному напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению проводника:*

$$I = U/R.$$

Электрическое сопротивление измеряется в омах. По проводнику с сопротивлением 1 Ом протекает ток 1 А, если приложено электрическое напряжение 1 В. Величина, обратная сопротивлению, называется

электрической проводимостью $G = 1/R$. Единица проводимости – си- менс ($\text{См} = 1/\text{Ом}$). Сопротивление R зависит от размеров, формы и ма- териала проводника:

$$R = \rho \cdot l / S.$$

Здесь ρ – удельное сопротивление ($\text{Ом}\cdot\text{м}$); l – длина (м); S – пло- щадь поперечного сечения (м^2) проводника. Обозначив через $\sigma = 1/\rho$ удельную электрическую проводимость, закон Ома можно записать в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E},$$

где \vec{j} – вектор плотности тока, \vec{E} – вектор электрической напряженно- сти. В каждой точке изотропного проводника носители тока движутся в направлении вектора \vec{E} , то есть направления векторов \vec{j} и \vec{E} , совпа- дают, поэтому формула может быть записана и в скалярной форме: $j = \sigma \cdot E$. Закон Ома в дифференциальной форме связывает плотность тока в любой точке внутри проводника с напряженностью электриче- ского поля в этой же точке. В дифференциальной форме закон Ома не связан с формой проводника, а только с его материалом.

Удельное сопротивление зависит от температуры. Эта зависимость определяется соотношением $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$, где ρ_0 – удельное сопротив- ление при 0° , t – температура ($^\circ\text{C}$), α – температурный коэффициент сопротивления; для металлов $\alpha \approx 1/273 \text{ } 1/^\circ\text{C}$.

Общее сопротивление проводников зависит от способа их соедине- ния. При последовательном соединении оно равно сумме сопротивле- ний проводников: $R_\Sigma = R_1 + R_2 + \dots + R_n$. При параллельном соединении складываются проводимости, то есть величины, обратные сопротивле- нию $1/R_\Sigma = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n$.

В металлах при столкновениях носителей тока – свободных элек- тронов – с ионами кристаллической решетки электроны передают ио- нам избыток кинетической энергии, накопленной за время свободного движения в электрическом поле. Энергия, забираемая электронами у поля, в конечном счете, идет на нагрев кристалла. При протекании по- стоянного тока теплота Q , выделяющаяся за время t во всем объеме про- водника, электрическое сопротивление которого R , равна $Q = I^2 \cdot R \cdot t$.

Эта формула выражает закон Джоуля – Ленца для участка цепи: *ко- личество теплоты, выделяемое постоянным электрическим током на участке цепи, равно произведению квадрата силы тока на время его про- хождения и электрическое сопротивление участка цепи*. Используя диф- ференциальную форму закона Ома $j = \sigma \cdot E$ и соотношение $\sigma = 1/\rho$, мож- но записать выражение для удельной тепловой мощности тока:

$$w = \sigma \cdot E^2.$$

Эта формула выражает закон Джоуля—Ленца для выделяемого током тепла, записанный в дифференциальной форме.

Правила Кирхгофа. По этим правилам производится расчет токов, напряжений и ЭДС в разветвленных электрических цепях.

Первое правило: алгебраическая сумма сил токов в участках цепи, сходящихся в любой точке ее разветвления равна нулю, если считать подходящие к узлу токи положительными, а отходящие — отрицательными.

Второе правило: для любого замкнутого контура, выделенного из разветвленной цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов на соответствующие сопротивления равна алгебраической сумме всех электродвижущих сил в этом контуре. Токи и ЭДС, совпадающие с произвольно выбранным направлением обхода контура, считаются положительными, а направленные навстречу обходу — отрицательными.

Поскольку направления токов в процессе составления уравнений на основании правил Кирхгофа неизвестны, следует расставить стрелки, указывающие эти направления, предположительно, руководствуясь лишь тем, чтобы для каждого узла имелись как подходящие к нему, так и отходящие от него токи. Если значение какого-либо из токов, определенных из решения уравнений, получается отрицательным, это значит, что предположительно указанное направление тока следует изменить на противоположное.

3.2.1. Электрические цепи постоянного тока

Рассмотрим простейшую электрическую цепь, включающую в себя источник ЭДС \mathcal{E} с внутренним сопротивлением r , сопротивление нагрузки R , а также вольтметр V , амперметр A , ключ K (рис. 3.7). Оценим

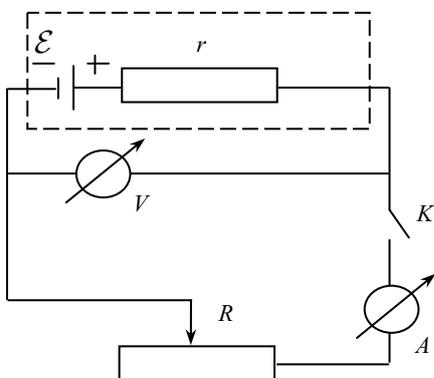


Рис. 3.7. Электрическая цепь

зависимости полезной и полной мощности, развиваемой источником тока, и его КПД от нагрузочного сопротивления.

При замкнутом ключе K через внешнее сопротивление R пойдет электрический ток, сила которого определяется законом Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Прохождение электрического тока в цепи вызывает падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника тока, равное $I \cdot r$. Поэтому показание вольтметра U будет меньше ЭДС источника на величину падения на внутреннем сопротивлении: $U = \mathcal{E} - I \cdot r$. Рассмотрим теперь конкретные режимы работы источника тока. Из записанного соотношения для силы тока следует, что ток в замкнутой цепи достигает наибольшего значения $I_{\max} = \mathcal{E}/r$ при $R = 0$. Этот режим работы источника называется режимом короткого замыкания. Если, наоборот, сопротивление внешней цепи $R \rightarrow \infty$, то ток асимптотически стремится к нулю. Такой режим называется режимом холостого хода. В этом случае напряжение между клеммами источника равно ЭДС. Отметим также, что разность потенциалов U на клеммах источника одновременно является и падением напряжения на внешнем сопротивлении. Поэтому по закону Ома для участка цепи $U = R \cdot I$. Так как сила тока I и разность потенциалов U измеряются приборами, задействованными в электрической цепи, то записанные соотношения позволяют определить величину внешнего (нагрузочного) сопротивления R . Мощность, выделяемая в виде тепла при прохождении электрического тока через сопротивление, определяется законом Джоуля–Ленца:

$$P_{\text{полезн}} = I^2 \cdot R = U \cdot I.$$

Это соотношение определяет полезную мощность, развиваемую источником на внешнем сопротивлении R . Аналогичное соотношение, но с сопротивлением r определяет мощность, выделяющуюся в виде тепла на внутреннем сопротивлении источника. Полная мощность является суммой полезной мощности и мощности, выделяющейся на внутреннем сопротивлении:

$$P_{\text{полн}} = I^2 \cdot R + I^2 \cdot r = I^2 \cdot (R + r) = \mathcal{E} \cdot I.$$

Коэффициент полезного действия источника постоянного тока — это отношение полезной мощности к полной:

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{полн}}} = \frac{UI}{\mathcal{E}I} = \frac{U}{\mathcal{E}}.$$

Используя записанные соотношения можно показать, что

$$P_{\text{полн}} = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + r)}; \quad P_{\text{полезн}} = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}; \quad \eta = \frac{R}{R + r}.$$

Полная мощность, развиваемая источником тока, достигает максимума в режиме короткого замыкания, т. е. при $R = 0$. В этом случае вся тепловая мощность выделяется внутри источника тока на его внутрен-

нем сопротивлению. С ростом внешнего сопротивления полная мощность уменьшается, асимптотически приближаясь к нулевому значению.

Полезная мощность изменяется в зависимости от внешнего сопротивления более сложным образом. Действительно, $P_{\text{полезн}} = 0$ при крайних значениях внешнего сопротивления: при $R = 0$ и $R \rightarrow \infty$. Таким образом, максимум полезной мощности должен приходиться на промежуточные значения внешнего сопротивления. Можно показать, что максимум полезной мощности соответствует $R = r$, т. е. равенству внешнего и внутреннего сопротивлений. В электротехнике режим максимальной полезной мощности называется режимом согласования источника тока с его нагрузкой. Очевидно, что $\eta = 0$ при $R = 0$. При $R \rightarrow \infty$ величина η асимптотически стремится к единице, в режиме полезной максимальной мощности $\eta = 0,5$, т. е. 50 %.

3.2.2. Электрический ток в газах и жидкостях

При электролизе имеют место два закона Фарадея. *Первый закон Фарадея* – масса вещества, выделившегося при электролизе, находится из соотношения $m = K \cdot I \cdot t = Kq$, где q – количество электричества, прошедшего через электролит, K – электрохимический эквивалент. *Второй закон Фарадея* – электрохимический эквивалент пропорционален химическому эквиваленту:

$$K = (1/F) \cdot (M/Z),$$

где M – молярная масса, Z – валентность, $F = 96,48456 \cdot 10^3$ Кл/моль – число Фарадея. *Удельная проводимость электролита* определяется формулой

$$\sigma = 1/\rho = \alpha \cdot C \cdot Z \cdot F \cdot (u_+ + u_-),$$

где α – степень диссоциации, C (моль/м³) – молярная концентрация, u_+ и u_- [м²/(В·с)] – подвижности ионов. При этом степень диссоциации определяется как отношение числа диссоциировавших молекул к числу всех молекул растворенного вещества: $\alpha = n_d/n$.

При небольших плотностях тока, текущего в газе, имеет место закон Ома: $j = q \cdot n \cdot (u_+ + u_-) \cdot E = \sigma \cdot E$, где j – плотность тока в газе, E – напряженность поля, σ – удельная проводимость газа, q – заряд иона, u_+ и u_- – подвижности ионов, n (м⁻³) – число пар ионов каждого знака, находящихся в единице его объема. При этом $n = (N/\gamma)^{1/2}$, где N (м⁻³·с⁻¹) – число пар ионов, создаваемых ионизирующим излучением в единице объема в единицу времени, γ [м³/с] – коэффициент рекомбинации. Плотность тока насыщения в газе определяется формулой $j_{\text{н}} = N \cdot q \cdot d$, где d – расстояние между электродами. Чтобы покинуть поверхность ме-

талла, электрон должен обладать кинетической энергией $mv^2/2 \geq A_{\text{вых}}$, где $A_{\text{вых}}$ – работа выхода электрона из металла. Плотность тока насыщения при термоэлектронной эмиссии определяется формулой:

$$j_n = BT^2 \cdot \exp(-A/kT).$$

Здесь T – термодинамическая температура катода, A – работа выхода, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, B [А/(м²·К²)] – эмиссионная постоянная, ее значение для различных металлов можно найти в справочниках.

Основные расчетные формулы

- Сила тока $I = dq/dt$.
- Плотность тока $j = I/S$; $j = n \cdot e \cdot \langle v \rangle$; ЭДС $\mathcal{E} = A/q$.
- Закон Ома $I = U/R$; $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$.
- $R = \rho \cdot l/S$; $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$; $\sigma = 1/\rho$.
- Закон Джоуля-Ленца $Q = I^2 \cdot R \cdot t$; $w = \sigma \cdot E^2$.
- Правила Кирхгофа $\sum_{k=1}^N I_k = 0$; $\sum_{k=1}^N I_k R_k = \sum_{i=1}^M \mathcal{E}_i$.
- Законы Фарадея $m = K \cdot I \cdot t = Kq$, $K = (1/F) \cdot (M/Z)$.
- Плотность тока насыщения при термоэлектронной эмиссии $j_n = BT^2 \cdot \exp(-A/kT)$.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить заряд, прошедший по проводу с сопротивлением $R = 3$ Ом, при равномерном нарастании напряжения на концах провода от $U_0 = 2$ В до $U = 4$ В в течение 20 с.

Решение. Силу тока в проводе можно представить $dq = Idt$, откуда

$$q = \int_0^t Idt = \int_0^t \frac{U}{R} dt.$$

Поскольку напряжение нарастает равномерно, то $U = U_0 + kt$, где k – коэффициент пропорциональности

$$q = \int_0^t \left(\frac{U_0}{r} + \frac{kt}{r} \right) dt = \frac{U_0}{r} \int_0^t dt + \frac{k}{r} \int_0^t t dt.$$

$$q = (U_0 t/r) + (kt^2/2r) = (t/2r)(2U_0 + kt).$$

Если при $t = 20$ с $U_0 = 4$ В, то $k = (U - U_0)/t = 0,1$ (В/с).

Рассчитаем величину заряда: $q = (t/2r)(2U_0 + 0,1t) = 20$ Кл.

Пример 2. По медному проводу сечением $S = 0,17 \text{ мм}^2$ течет ток силой $I = 0,15 \text{ А}$. Определить, какая сила действует на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля.

Решение. Искомая величина равна $F = eE$. Чтобы найти напряженность поля E , воспользуемся законом Ома в дифференциальной форме: $j = E/\rho$, где ρ – удельная проводимость меди, j – плотность тока. Тогда $E = j\rho$, $j = I/S$; $F = eI\rho/S = 2,4 \cdot 10^{-21} \text{ Н}$.

Пример 3. Принимая, что на один атом меди приходится один свободный электрон, определить среднюю скорость упорядоченного движения электронов в медном проводе при плотности тока $j = 5 \text{ А/мм}^2$.

Решение. Согласно классической электронной теории проводимости металлов искомая величина $\langle v \rangle$ связана с плотностью тока соотношением $j = en \cdot \langle v \rangle$, где n – число электронов в единице объема, которое можно найти по формуле $n = \rho N_A/M$. Здесь ρ – плотность меди, M – молярная масса, N_A – число Авогадро. Тогда $j = e\rho N_A \langle v \rangle / M$; $\langle v \rangle = jM / e\rho N_A$; $\langle v \rangle = 0,0004 \text{ м/с}$.

Пример 4. Найти сопротивление трубки длиной $l = 0,5 \text{ м}$ и площадью поперечного сечения $S = 5 \text{ мм}^2$, если она наполнена азотом, ионизированным так, что в объеме $V = 1 \text{ см}^3$ его находится при равновесии $n = 108$ пар ионов. Подвижность положительных ионов азота $1,27 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, а отрицательных – $1,81 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$.

Решение. Сопротивление трубки с газом можно найти как:

$$R = \rho l / S, \quad (1)$$

где ρ – удельное сопротивление газа, заполняющего трубку, l – длина, S – площадь поперечного сечения трубки. Задача сводится к определению удельного сопротивления газа в трубке. Удельное сопротивление обратно пропорционально удельной проводимости $\rho = 1/\sigma$.

Удельную проводимость найдем, применив закон Ома в дифференциальной форме и зависимость плотности тока в газах вдали от насыщения. Поскольку имеет место равновесие между числом возникающих и исчезающих в результате рекомбинации ионов то, следовательно, концентрация n числа пар ионов является величиной постоянной, и ток в трубке далек от насыщения, поэтому плотность тока равна

$$j = qn(U_+ + U_-)E, \quad (2)$$

q – заряд иона, n – концентрация ионов, U_+ и U_- – подвижности ионов, E – напряженность электрического поля. Так как ток далек от насыщения, то закон Ома выполняется и запишется в виде

$$j = \sigma E. \quad (3)$$

Приравняв правые части уравнений (2) и (3), найдем σ

$$\sigma = nq(U_+ + U_-). \quad (4)$$

Подставив (4) в (1), получим $R = 1/[qnS(U_+ + U_-)] = 2 \cdot 10^{13}$ Ом.

Пример 5. Найти массу меди, выделившейся на аноде из раствора медного купороса при пропускании в течение двух минут тока, меняющегося по закону $I = 0,05 t$. Электрохимический эквивалент меди $k = 0,329$ мг/Кл.

Решение. По закону Фарадея для электролиза массу вещества, выделившегося на электроде, можно представить как $dm = kIdt$, где k –

электрохимический эквивалент, $m = \int_0^t kIdt = k \int_0^{120} 0,05 \cdot t \cdot dt = 118$ мг.

Пример 6. Имеется три одинаковых элемента с ЭДС $\mathcal{E} = 1,5$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Как нужно соединить эти элементы для получения максимального тока, если: 1) внешнее сопротивление R меньше или сравнимо с внутренним сопротивлением; 2) много больше его?

Решение. При последовательном соединении элементов $I_1 = 3\mathcal{E}/(3r+R)$, при параллельном соединении $I_2 = \mathcal{E}/(r/3+R)$. Если $r \approx R$, то $I_1 = 1,125$ А, $I_2 = 1,125$ А, т. е. токи одинаковы. Если $R \gg r$, например, $R = 10 r$, то $I_1 = 0,346$ А, $I_2 = 0,145$ А. Таким образом, при большом внешнем сопротивлении элементы выгоднее соединять последовательно.

Пример 7. Три последовательно соединенных элемента с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E} = 1,5$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0,5$ Ом, $r_2 = 0,6$ Ом и $r_3 = 0,7$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление $R = 1$ Ом. Найти разность потенциалов U на зажимах каждого элемента.

Решение. По закону Ома для полной цепи ток в цепи $I = 3\mathcal{E}/(R+r_1+r_2+r_3) = 1,6$ А. Разность потенциалов на зажимах первого элемента $U_1 = \mathcal{E} - Ir_1 = 0,7$ В; разность потенциалов на зажимах второго элемента $U_2 = \mathcal{E} - Ir_2 = 0,54$ В; разность потенциалов на зажимах третьего элемента $U_3 = \mathcal{E} - Ir_3 = 0,375$ А.

Пример 8. Ток в проводнике меняется по закону $I = 1+1t+1t^2$, где I – сила тока в амперах, t – время секундах. Определить количество электричества q , прошедшее через сечение проводника за время от $t_1 = 5$ с до $t_2 = 10$ с.

Решение. Сила тока в данном случае является величиной переменной, поэтому воспользуемся формулой $dq = I \cdot dt$. После интегрирования и подстановки численных значений получим $q = 1t + 1t^2/2 + 1t^3/3 = 334$ Кл.

Пример 9. Сила тока в проводнике с сопротивлением $R = 10$ Ом изменяется по закону $I = 1 + 2t$. Определить количество теплоты Q , выделившейся в проводнике за пятую секунду.

Решение. Закон Джоуля–Ленца для малого промежутка времени записывается в виде $dQ = I^2 R dt = (1 + 2t)^2 R dt$. Для определения количества теплоты, выделившейся в проводнике за конечный промежуток времени dt , dQ надо проинтегрировать в пределах от $t_1 = 4$ с до $t_2 = 5$ с. После интегрирования получим: $Q = Rt(1 + 2t + 4t^2/3) = 501,7$ Дж.

Пример 10. Количество теплоты, выделившееся в проводнике с сопротивлением $R = 25$ Ом, равно $Q = 500$ Дж. Определить количество электричества, прошедшее через проводник за время $t = 9$ с, если ток возрастает по квадратичному закону.

Решение. Из условия квадратичности возрастания тока следует $I = dq/dt = kt^2$, где k – коэффициент пропорциональности. После интегрирования получим $q = kt^3/3$. Коэффициент k найдем из закона Джоуля–Ленца $dQ = I^2 R dt = k^2 t^4 R dt$. Интегрируя, получим $Q = k^2 R t^5/5$. Отсюда $k = (5Q/Rt^5)^{1/2}$. Подставляя в формулу для q , получим $q = (5Qt/9R)^{1/2} = 10$ Кл.

Пример 11. Найти ток, создаваемый электроном, вращающимся вокруг ядра атома водорода с радиусом орбиты $5,3 \cdot 10^{-7}$ м.

Решение. Ток по орбите равен $I = q/T = qv/2\pi r$, где $T = 2\pi r/v$ – период обращения электрона по орбите, q – заряд электрона, v – скорость электрона, r – радиус орбиты электрона. Скорость определяется из равенства центростремительной и кулоновской сил $mv^2/r = q^2/4\pi\epsilon_0 r^2$, откуда $I = q^2/2\pi r(4\pi\epsilon_0 r m)^{1/2} = 10^{-3}$ А.

Пример 12. Два элемента с ЭДС 2В каждый, соединены параллельно и замкнуты на внешнее сопротивление. Внутреннее сопротивление первого элемента 1 Ом, а второго – 2 Ом. Через первый элемент течет ток силой 1 А. Найти величину внешнего сопротивления, протекающий через него ток и ток, текущий через второй элемент.

Решение. По второму правилу Кирхгофа получаем:

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = I_2 r_2 - I_1 r_1; \mathcal{E}_1 = -I_1 r_1 - IR.$$

Решая систему уравнений, находим ток

$$I = I_1 + I_2 = 1,5 \text{ А}; R = (\mathcal{E}_1 - I_1 R)/I = 0,66 \text{ Ом}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Ток в проводнике меняется со временем по квадратичному закону. Какое количество электричества q проходит через поперечное сечение проводника за время $t = 3$ с? При каком постоянном токе через поперечное сечение проводника за то же время проходит такое же количество электричества?

2. Сопротивление проводника $R = 3$ Ом уменьшается в три раза линейно за время $t = 10$ с. Определить количество электричества q , прошедшего через поперечное сечение проводника при напряжении на его концах $U = 12$ В.

3. Определить количество электричества, прошедшего за 10 с через поперечное сечение медного проводника, имевшего первоначальное сопротивление $R = 10$ Ом. Температура за это время линейно изменилась от $T_1 = 373$ К до $T_2 = 273$ К. Напряжение на концах проводника $U = 50$ В.

4. Определить количество электричества, прошедшего через проводник с сопротивлением $R = 1,5$ Ом, при квадратичном нарастании напряжения на концах провода от $U_1 = 1$ В до $U_2 = 2$ В за время $t = 10$ с.

5. Сила тока в проводнике с сопротивлением $R = 5$ Ом линейно возрастает от $I_1 = 2$ А до $I_2 = 4$ А за время $t = 10$ с. Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за это время.

6. Сила тока в проводнике с сопротивлением $R = 30$ Ом линейно возрастает в течение 10 с, при этом выделилось количество теплоты $Q = 100$ Дж. Определить количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника.

7. В проводнике сопротивлением $R = 25$ Ом за 1,5 мин выделилось количество теплоты $Q = 5$ кДж при линейном возрастании тока. Найти среднее значение силы тока в проводнике за этот промежуток времени.

8. В проводнике сопротивлением $R = 5$ Ом за 10 с выделилось количество теплоты $Q = 9$ кДж при квадратичном возрастании силы тока. Определить среднее значение силы тока в проводнике за этот промежуток времени.

9. Сила тока в проводнике с сопротивлением $R = 10$ Ом возрастает по квадратичному закону от нуля до максимального значения в течение 5 с. За это время выделяется количество теплоты $Q = 9$ кДж. Найти скорость нарастания тока в проводнике dI/dt .

10. Определить скорость направленного движения свободных электронов внутри медного проводника длиной 1 м, если к нему приложена разность потенциалов 1 В.

11. По медному проводу диаметром 1 мм течет ток силой $I = 1$ А. Найти силу, действующую на электроны со стороны электрического поля.

12. Найти массу меди, выделившейся на катоде из раствора медного купороса, при пропускании через него в течение 100 с электрического тока, изменяющегося по закону $I = 0,2 t$.

13. Начертить схему включения трех 110-вольтовых лампочек мощностью $P_1 = P_2 = 40$ Вт и $P_3 = 80$ Вт, чтобы они давали нормальный накал при напряжении в сети 220 В. Найти токи, текущие через лампочки.

14. Две электрические батареи, с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом каждая, соединяются в одном случае последовательно, а в другом параллельно. К ним необходимо подключить лампочку. Каково должно быть сопротивление этой лампочки, чтобы выделяющаяся на ней мощность была наибольшей?

15. Электрическую батарею замыкают один раз на резистор с сопротивлением $R_1 = 2$ Ом, а в другой раз на резистор с сопротивлением $R_2 = 0,5$ Ом. Найти ЭДС батареи, а также ее внутреннее сопротивление r , если известно, что мощность, выделяющаяся на внешнем сопротивлении в обоих случаях была одинакова и равна 2,54 Вт.

16. Вольтметр и резистор $R = 10$ кОм, соединенные последовательно, подключают к электрической сети с напряжением $U_0 = 120$ В. При этом вольтметр показывает $U_1 = 50$ В. Если вольтметр соединить последовательно с неизвестным сопротивлением R_x , то при том же напряжении сети он покажет $U_2 = 10$ В. Определить величину этого сопротивления.

17. Три батареи с ЭДС 1,3; 1,4 и 1,5 В и с внутренними сопротивлениями по 0,3 Ом каждая включены параллельно друг другу на внешнее сопротивление 0,6 Ом. Определить ток в каждой батарее.

18. К элементу с ЭДС 1,5 В присоединили сопротивление 0,1 Ом. Амперметр показал силу тока 0,5 А. Когда к элементу присоединили последовательно еще один элемент с такой же ЭДС, то сила тока в сопротивлении оказалась 0,4 А. Определить внутреннее сопротивление первого и второго элементов.

19. Электрическую лампочку мощностью 40 Вт, рассчитанную на напряжение 120 В, необходимо включить в сеть с напряжением 220 В. Какое добавочное сопротивление нужно включить последовательно с лампочкой, чтобы она давала нормальный накал?

20. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление элемента, замкнутого на внешнее сопротивление, если наибольшая мощность, выделяющаяся во внешней цепи, равна 9 Вт, при этом в цепи течет ток силой 3 А.

21. В электрической цепи при внешних сопротивлениях 16 и 25 Ом выделяется одинаковая мощность. Найти внутреннее сопротивление источника.

22. Полезная мощность, выделяемая во внешней части цепи, достигает наибольшего значения 25 Вт при силе тока 5 А. Найти внутреннее сопротивление и ЭДС источника тока.

23. Внутреннее сопротивление источника с ЭДС 3 В равно 3 Ом. Оно в 2 раза меньше внешнего сопротивления, подключенного к зажимам источника. Во сколько раз напряжение ЭДС источника больше напряжения на его зажимах?

24. В помещении горит лампочка мощностью $P_1 = 60$ Вт. Включается прибор мощностью $P_2 = 240$ Вт. Напряжение в сети 120В, сопротивление соединяющих проводов $R_0 = 6$ Ом. На сколько вольт изменится напряжение, подводимое к лампочке, при включении прибора?

25. Какое сопротивление R нужно подключить к десяти одинаковым последовательно соединенным источникам с ЭДС 1В и внутренним сопротивлением 2 Ом у каждого, чтобы потребляемая мощность была максимальна?

26. Какое сопротивление R надо подключить к пяти источникам, соединенным параллельно, с ЭДС 3 В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом у каждого, чтобы потребляемая мощность была максимальной?

27. Два электрических элемента, один с ЭДС 1,2 В и с внутренним сопротивлением 0,1 Ом, а второй с ЭДС 0,9 В и с внутренним сопротивлением 0,3 Ом, соединены одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводов равно 0,2 Ом. Найти силу тока в цепи.

28. Амперметр для измерения токов до 10 А, имеющий внутреннее сопротивление 0,18 Ом, необходимо использовать для измерения токов до 100 А. Найти величину необходимого для этого шунтирующего сопротивления.

29. ЭДС батареи аккумуляторов равна 12 В. Сила тока короткого замыкания этой батареи равна 5 А. Какую наибольшую мощность можно получить во внешней цепи, подсоединенной к этой батарее?

30. Определить скорость направленного движения свободных электронов внутри медного проводника длиной 1 м, если на концах его поддерживается разность потенциалов 0,01 В.

31. Какая мощность выделяется в единице объема медного проводника ($\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) длиной $l = 10$ м, если на его концах поддерживается разность потенциалов $U = 12$ В?

32. Начертить схему включения трех шестивольтовых лампочек мощностью $P_1 = P_2 = 4$ Вт и $P_3 = 8$ Вт, чтобы они давали нормальный накал при напряжении в сети 12 В. Найти токи, текущие через лампочки.

33. Три батареи с ЭДС 12,5 и 10 В, имеющие одинаковые внутренние сопротивления по 1 Ом, соединены между собой одноименными полюсами. Найти токи, текущие через батареи. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

34. К двум батареям с ЭДС $E_1 = 1,2$ В, внутренним сопротивлением $r_1 = 0,1$ Ом и с ЭДС $E_2 = 1$ В, внутренним сопротивлением $r_2 = 0,1$ Ом подключили лампу. Во сколько раз мощность, потребляемая лампой, будет меньше максимальной, если ток, проходящий через первую батарею, не должен превышать 1,5 А?

35. Если вольтметр соединить последовательно с сопротивлением $R = 1$ кОм, то при напряжении $U_0 = 220$ В он покажет $U_1 = 120$ В. Если соединить его последовательно с неизвестным сопротивлением R_x , то он при том же напряжении покажет $U_2 = 20$ В. Определить это сопротивление.

36. Две батареи с ЭДС 1 и 2 В и с внутренними сопротивлениями 1 и 2 Ом включены параллельно друг другу на внешнее сопротивление 1 Ом. Определить ток в каждой батарее.

37. К элементу с ЭДС 12 В присоединили сопротивление 1 Ом. Амперметр показал силу тока 5 А. Когда к элементу присоединили последовательно еще один элемент с такой же ЭДС, то сила тока в сопротивлении оказалась 4 А. Определить внутреннее сопротивление первого и второго элементов.

38. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление элемента, замкнутого на внешнее сопротивление, если наибольшая мощность, выделяющаяся во внешней цепи равна 1,5 кВт, при этом в цепи течет ток $I = 10$ А.

39. В электрической цепи при внешних сопротивлениях 4 и 9 Ом выделяется одинаковая мощность. Найти внутреннее сопротивление источника.

40. Полезная мощность, выделяемая во внешней части цепи, достигает наибольшего значения 1 кВт при силе тока 10 А. Найти внутреннее сопротивление и ЭДС источника тока.

41. Внутреннее сопротивление источника тока $r = 10$ Ом, внешнее сопротивление $R = 100$ Ом. Во сколько раз напряжение на зажимах элемента меньше ЭДС источника?

42. Вольтметр, имеющий внутреннее сопротивление 2 кОм, предназначен для измерения электрических напряжений до 30 В. Какое добавочное сопротивление необходимо включить последовательно с вольтметром для измерения напряжений до 75 В?

43. В электрическую цепь последовательно включены батарея с ЭДС 100 В, резисторы с сопротивлением $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 200 \text{ Ом}$ и $R_3 = 300 \text{ Ом}$. Найти показания вольтметра, включенного между R_1 и R_2 и клеммой батареи. Сопротивление вольтметра $R_V = 2 \text{ кОм}$. Внутренним сопротивлением источника ЭДС пренебречь.

44. Батарея с ЭДС 10 В и внутренним сопротивлением $r = 1 \text{ Ом}$ имеет КПД $\eta = 0,8$. Падение напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2 соответственно равны $U_1 = 4 \text{ В}$ и $U_2 = 2 \text{ В}$. Найти падение напряжения U_2 на сопротивлении R_2 и ток в цепи, если R_1 и R_2 соединены параллельно.

45. Батарея с ЭДС 100 В и внутренним сопротивлением $r = 2 \text{ Ом}$ включена параллельно в электрическую цепь с резисторами, сопротивления которых равны $R_1 = 25 \text{ Ом}$ и $R_2 = 78 \text{ Ом}$. На резисторе R_1 выделяется мощность $P_1 = 16 \text{ Вт}$. Найти показания амперметра.

46. Два элемента с ЭДС по 2 В каждый замкнуты параллельно на внешнее сопротивление R . Внутренние сопротивления элементов соответственно равны: $r_1 = 1 \text{ Ом}$ и $r_2 = 2 \text{ Ом}$. Через первый элемент течет ток $I_1 = 1 \text{ А}$. Найти величину сопротивления R , ток, протекающий через него и ток, протекающий через второй элемент.

47. Найти время, за которое при электролизе медного купороса масса катода, представляющего из себя медную пластинку площадью 25 см^2 , увеличится на 99 мг. Плотность тока равна 200 А/м^2 . Определить толщину слоя меди, образовавшегося на пластинке.

48. Определить, на сколько меньшее значение силы тока показывает амперметр, включенный последовательно с электролитической ванной с раствором AgNO_3 . Показания амперметра 0,90 А. Известно, что за 5 секунд прохождения тока выделилось 316 мг серебра.

49. Две электролитические ванны, одна с раствором AgNO_3 , а другая с раствором CuSO_4 , соединены последовательно. Найти массу выделившейся меди, если известно, что за то же самое время в другой ванне выделилось 180 мг серебра.

50. Определить электрическую энергию, которую необходимо затратить при электролизе раствора AgNO_3 , чтобы выделилось 500 мг серебра. Разность потенциалов на электродах 4 В.

51. Через раствор азотной кислоты в течение 1 минуты пропускают электрический ток силой 2 А. Определить количество электричества, перенесенное ионами каждого знака.

52. При рентгеновском облучении сосуда с газом в единице объема за единицу времени ионизировалось число молекул $N = 10^{16} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$. В результате рекомбинации в сосуде установилось равновесие, при

этом в единице объема газа находится число ионов каждого знака $n = 10^{14} \text{ м}^{-3}$. Найти коэффициент рекомбинации γ .

53. Расстояние между электродами газоразрядной трубки равно 10 см. К электродам приложена разность потенциалов 5 В. Газ, находящийся в трубке, однократно ионизирован. Число ионов каждого знака в единице объема газа равно $n = 10^8 \text{ м}^{-3}$. Подвижности ионов $u_+ = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ и $u_- = 3 \cdot 10^2 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Найти плотность тока в трубке, и определить, какая часть полного тока переносится положительными ионами.

54. В ионизационной камере площадь каждого из электродов равна $0,01 \text{ м}^2$. Расстояние между электродами равно 62 мм. Найти силу тока насыщения, если известно, что в единице объема камеры за 1 секунду образуется число однозарядных ионов каждого знака $N = 10^{15} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$.

55. Определить сопротивление R газоразрядной трубки, заполненной воздухом, если известно, что в единице его объема при равновесии содержится $n = 10^{13} \text{ м}^{-3}$ однозарядных ионов каждого знака. Подвижности ионов $u_+ = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ и $u_- = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Длина трубки равна 0,84 м, площадь поперечного сечения 5 мм^2 .

56. Какой наименьшей скоростью должен обладать электрон, чтобы он мог ионизировать атом водорода? Потенциал ионизации атома водорода 13,5 В. Потенциалом ионизации атома называется разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы при соударении с атомом его ионизировать.

57. Найти работу ионизации атома гелия, если известно, что потенциал ионизации атома гелия равен 24,5 В.

58. Во сколько раз катод из торированного вольфрама при температуре 1800 К дает большую удельную эмиссию, чем катод из чистого вольфрама при той же температуре? Эмиссионная постоянная чистого вольфрама $B_1 = 0,6 \cdot 10^6 \text{ А}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^2)$, для торированного вольфрама $B_2 = 0,3 \cdot 10^7 \text{ А}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^2)$.

59. Две электролитические ванны соединены последовательно. При пропускании электрического тока за одно и то же время в одной ванне выделилось 3,9 г цинка, а в другой 2,24 г железа. Цинк двухвалентен. Определить валентность железа.

60. Сила тока, проходящего через электролитическую ванну с раствором медного купороса CuSO_4 , за 20 с равномерно возрастает от нуля до 2 А. Найти массу меди, выделившейся на катоде ванны за это время.

61. Найти число атомов двухвалентного металла, выделившихся на 1 см^2 поверхности электрода за время 5 минут при плотности тока $10 \text{ А}/\text{м}^2$.

62. Объем газа, заключенного между электродами ионизационной камеры, равен 0,5 л. Газ ионизируется рентгеновским излучением. Сила тока насыщения равна $4 \cdot 10^{-9}$ А. Сколько пар ионов образуется за 1 с в 1 см^3 газа? Заряд каждого иона равен заряду электрона.

63. В комнате горит лампочка мощностью $N_1 = 60$ Вт и включается плитка мощностью $N_2 = 240$ Вт. Напряжение сети $U = 120$ В, сопротивление соединяющих проводов $R_0 = 6$ Ом. Найти изменение напряжения на лампочке при включении плитки.

64. Электрон вращается по окружности вокруг ядра атома водорода. Найти силу тока, создаваемого электроном в атоме, если известно, что радиус электронной орбиты $r = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м.

65. К источнику тока подключены последовательно амперметр и соединенные параллельно вольтметр и резистор. Показания вольтметра 200 В, амперметра 0,5 А. Определить сопротивление резистора при двух значениях сопротивления вольтметра: 1) ∞ ; 2) 2 кОм.

Ответы

1. 9 Кл; 3 А. 2. 80 Кл. 3. 35 Кл. 4. 20 Кл. 5. 233 Дж. 6. 5 Кл. 7. 2,6 А. 8. 10 А. 9. 2 А/с. 10. 3 мм/с. 11. $3,46 \cdot 10^{-21}$ Н. 12. 0,329 г. 13. $I_1 = I_2 = 0,365$ А; $I_3 = 0,73$ А. 14. 2 Ом; 0,5 Ом. 15. 4 В; 1 Ом. 16. 78,6 кОм. 17. $I_1 = 1/3$ А; $I_2 = 2/3$ А; $I_3 = 1$ А. 18. 2,9 Ом; 4,5 Ом. 19. 300 Ом. 20. 6 В; 1 Ом. 21. 20 Ом. 22. 1 Ом; 10 В. 23. В 1,5 раза. 24. $\Delta U = 10,4$ В. 25. 20 Ом. 26. 0,1 Ом. 27. 0,5 А. 28. 0,02 Ом. 29. 15 Вт. 30. $2,8 \cdot 10^{-5}$ м/с. 31. 84,7 мВт. 32. $I_1 = I_2 = 0,67$ А; $I_3 = 1,33$ А. 33. 3 А; 4 А; 1 А. 34. В 5,8 раза. 35. 12 кОм. 36. 0,2 А; 0,6 А. 37. 1,4 Ом; 5 Ом. 38. 300 В; 15 Ом. 39. 6 Ом. 40. 10 Ом; 200 В. 41. В 1,1 раза. 42. 3 кОм. 43. 80 В. 44. 2 В; 2 А. 45. 1 А. 46. 0,66 Ом; 1,5 А; 0,5 А. 47. 10 мин; 4,6 мкм. 48. 0,04 А. 49. 53 мг. 50. 1,8 кДж. 51. $q_+ = 100$ Кл; $q_- = 20$ Кл. 52. 10^{-12} м³/с. 53. 0,24 мкА/м². 54. 0,1 мкА. 55. $75 \cdot 10^{12}$ Ом. 56. $2,2 \cdot 10^6$ м/с. 57. $392 \cdot 10^{-20}$ Дж. 58. $1,1 \cdot 10^4$. 59. 3. 60. 6,6 мг. 61. $9,3 \cdot 10^{17}$. 62. $5 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$. 63. $\Delta U = 10,4$ В. 64. 1,05 мА. 65. 400 Ом; 500 Ом.

3.3. Электромагнетизм

3.3.1. Индукция магнитного поля. Взаимодействие токов. Магнитный момент

Проводники с токами, проводники с токами и магнит, два магнита взаимодействуют между собой посредством поля, которое называют *магнитным*. Это поле возникает в результате упорядоченного движения зарядов. Вокруг неподвижных зарядов магнитное поле не возникает. В постоянных магнитах магнитное поле создается упорядоченным движением электронов в атомах. Поле обнаруживается по его действию на проводники с током или движущиеся заряды, а также по действию на магнитные стрелки. На неподвижные заряды оно не действует.

Для характеристики магнитного поля вводится векторная величина, называемая *магнитной индукцией*, она обозначается прописной латинской буквой \vec{B} . *Направление вектора индукции магнитного поля совпадает с направлением северного конца магнитной стрелки, помещенной в это поле.* Величина и направление силы, которая действует на проводник с током, помещенный в магнитное поле, определяются *законом Ампера*: $d\vec{F}_A = I [d\vec{l}, \vec{B}]$. В скалярной форме этот закон записывается как $dF_A = I \cdot B \cdot dl \cdot \sin \alpha$. Здесь I — сила тока в проводнике, dl — элемент длины проводника, B — индукция магнитного поля, α — угол между направлениями \vec{B} и $d\vec{l}$. Элемент длины проводника является вектором, направление которого совпадает с направлением тока. Произведение $I \cdot dl$ называют элементом тока. Индукция магнитного поля численно равна силе, с которой магнитное поле действует на единичный элемент тока $I \cdot dl = 1 \text{ А} \cdot \text{м}$, расположенный перпендикулярно к вектору магнитной индукции. Магнитная индукция зависит от свойств среды. В системе СИ единицей измерения индукции является тесла: 1 Тл — это индукция такого поля, которое действует на единичный элемент тока, расположенный перпендикулярно вектору магнитной индукции, с силой в 1 ньютон. Другой векторной характеристикой магнитного поля является его напряженность, она обозначается прописной латинской буквой \vec{H} . *Напряженность не зависит от среды, в которой существует магнитное поле.* Напряженность должна равняться индукции магнитного поля в вакууме. Чтобы определить напряженность магнитного поля, необходимо удалить вещество из пространства, в котором имеется поле. Затем измерить силу, действующую на единичный элемент тока, расположенный перпендикулярно вектору индукции. Но в системе СИ индукция и на-

пряженность магнитного поля измеряются в различных единицах. Размерность напряженности — ампер на метр (А/м). Поэтому связь между индукцией и напряженностью в вакууме определяется соотношением $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$, где коэффициент пропорциональности $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$. Его называют магнитной постоянной. Если поле существует не в вакууме, а в некоторой среде, тогда отношение $B/H = \mu_0 \mu$, его называют абсолютной магнитной проницаемостью среды, μ — это относительная магнитная проницаемость. Как и диэлектрическая проницаемость ϵ , относительная магнитная проницаемость μ является безразмерной величиной. *Напряженность магнитного поля* — это векторная величина, в однородной среде она по направлению совпадает с вектором индукции. Направление силы Ампера, действующей на проводник с током, определяется *правилом левой руки*: если расположить ладонь левой руки так, чтобы силовые линии магнитного поля входили в нее, а вытянутые пальцы указывали направление тока, то отставленный большой палец укажет направление силы, действующей на проводник.

Два длинных прямолинейных параллельных проводника с токами притягиваются друг к другу, если токи текут в одном направлении, и отталкиваются, если токи текут в разных направлениях. Математическое выражение для силы их взаимодействия имеет следующий вид:

$$F/l = \mu_0 \mu \cdot I_1 I_2 / 2\pi a.$$

Здесь a — расстояние между проводниками, длина каждого из которых равна l ; I_1 и I_2 — силы тока в них.

На движущуюся со скоростью \vec{v} частицу, несущую заряд q , в электромагнитном поле действует сила Лоренца. В общем случае она равна векторной сумме электрической и магнитной составляющих:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_э + \vec{F}_м.$$

Часто силой Лоренца называют только ее магнитную составляющую, которую можно определить из соотношения $\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$.

Из записанного векторного произведения следует, что магнитная сила перпендикулярна направлению скорости движения частицы. Поэтому магнитная сила не может изменить ее кинетическую энергию, а значит и модуль скорости частицы. Влетая в однородное магнитное поле под произвольным углом к вектору индукции \vec{B} , заряженная частица начинает двигаться по спирали. Если заряженная частица влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции, движение происходит по окружности.

На плоский проводящий контур с током в однородном магнитном поле действует момент сил $\vec{M} = q[\vec{p}_m, \vec{B}]$, в скалярной форме выражение записывается как $M = I \cdot S \cdot B \cdot \sin \alpha$, где $\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$ – вектор магнитного момента контура, I – сила тока, S – площадь контура, \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности контура, B – индукция поля, α – угол между нормалью к плоскости витка и вектором \vec{B} . В записанном соотношении произведение $I \cdot S = p_m$ определяет модуль вектора *магнитного момента контура*. Направление магнитного момента находят по *правилу правого винта (буравчика)*: если головку винта поворачивать по направлению тока в контуре, то поступательное перемещение винта будет совпадать с направлением вектора \vec{p}_m . Положительное направление вектора внешней нормали к поверхности контура соответствует протеканию тока против часовой стрелки, если смотреть из конца этого вектора. Магнитный момент нескольких контуров с током равен векторной сумме их магнитных моментов.

3.3.2. Напряженность магнитных полей, создаваемых токами

Силовыми линиями магнитного поля называют такие линии, касательные к которым совпадают с направлением напряженности этого поля в данной точке. Магнитные силовые линии поля, в отличие от силовых линий электростатического поля, являются замкнутыми. Такие поля называют *вихревыми*. Силовые линии прямолинейного тока представляют собой концентрические окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной проводнику. Направление силовой линии магнитного поля определяется по *правилу правого винта (буравчика)*: если винт поворачивать так, чтобы он поступательно перемещался по направлению тока, то направление вращения его головки будет совпадать с направлением силовых линий.

Величину и направление вектора магнитной напряженности $d\vec{H}$ в произвольной точке O магнитного поля, создаваемого в вакууме элементом тока $I \cdot d\vec{l}$, можно определить из соотношения, называемого законом Био–Савара–Лапласа:

$$d\vec{H} = I \cdot [d\vec{l} \times \vec{r}] / (4\pi \cdot r^3) .$$

Здесь \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от элемента тока $I \cdot d\vec{l}$ в рассматриваемую точку, φ – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} . Вектор $d\vec{H}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $d\vec{l}$ и \vec{r} , а направление его в пространстве определяется по правилу правого буравчика:

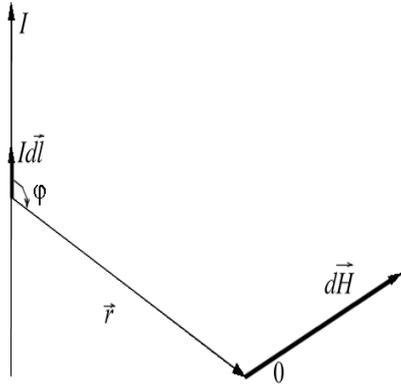


Рис. 3.8. Применение закона Био–Савара–Лапласа для расчетов магнитных полей, создаваемых электрическими токами

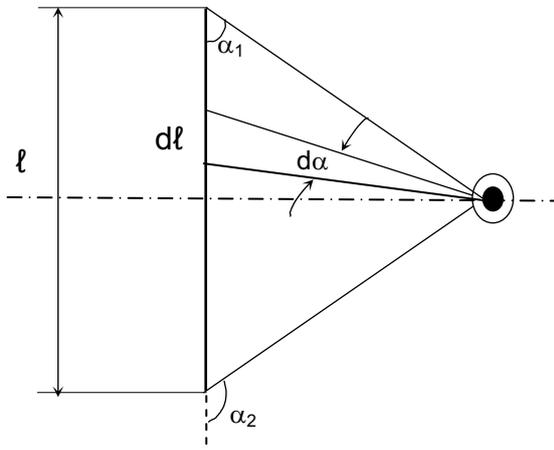


Рис. 3.9. Нахождение поля прямолинейного тока

элементарного отрезка проводника и направленный по току; \vec{r} – радиус-вектор, соединяющий элемент с рассматриваемой точкой P . Отдельные элементарные участки проводника создают поля dH , направленные в одну сторону (перпендикулярно плоскости чертежа), поэтому напряженность магнитного поля в точке P может быть найдена интегрированием:

$$H = \int dH = \int \frac{I \sin \alpha dl}{4\pi \cdot r^2}.$$

Так как $l = r_0 \operatorname{ctg} \alpha$, здесь r_0 – кратчайшее расстояние от точки P до проводника с током, то

$$dl = \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Кроме того, $r = r_0 / \sin \alpha$. Поэтому

ручка буравчика поворачивается от $d\vec{l}$ к \vec{r} по наименьшему углу, а поступательное движение буравчика показывает направление $d\vec{H}$. Чертеж, приведенный на рис. 3.8, поясняет применение закона Био–Савара–Лапласа. Интегрируя записанное выражение можно получить формулы для вычисления полей вблизи токов различной конфигурации.

Оценим магнитное поле вблизи прямолинейного проводника с током, рис. 3.9. Проводник, по которому протекает электрический ток, создает в пространстве вокруг себя магнитное поле.

Согласно закону Био–Савара–Лапласа, напряженность магнитного поля, создаваемого отрезком проводника dl ,

$$d\vec{H} = \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi \cdot r^3},$$

где I – сила тока в проводнике; $d\vec{l}$ – вектор, имеющий длину элементарного отрезка проводника и направленный по току; \vec{r} – радиус-вектор, соединяющий элемент с рассматриваемой точкой P .

$$H = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{I \sin^3 \alpha}{4\pi \cdot r_0^2} \left(\frac{r_0 d\alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{I}{4\pi \cdot r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha.$$

После интегрирования получим

$$H = \frac{I}{4\pi \cdot r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где α_1 и α_2 – углы между крайними элементами проводника и соответствующими радиус-векторами \vec{PA} и \vec{PB} .

Если определять напряженность поля в точках, расположенных на перпендикуляре, восстановленном к середине проводника, то $\cos \alpha_2 = \cos(180^\circ - \alpha_1) = -\cos \alpha_1$, поэтому

$$(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = 2\cos \alpha_1 = \frac{2b}{\sqrt{r_0^2 + b^2}}.$$

Тогда полученное соотношение для напряженности магнитного поля можно записать в виде

$$H = \frac{I}{4\pi \cdot r_0} \left(\frac{2b}{\sqrt{r_0^2 + b^2}} \right).$$

Напряженность магнитного поля прямого бесконечно длинного провода с током находится по формуле $H = I/2\pi a$, здесь a – кратчайшее расстояние от проводника до точки поля, в которой определяется напряженность.

Напряженность магнитного поля в центре кругового тока находится из соотношения $H = I/2R$, здесь R – радиус витка.

Напряженность поля внутри длинной катушки, называемой соленоидом, находят по формуле $H = nI$, где n – число витков на единицу длины соленоида. Магнитное поле внутри соленоида однородно. Его напряженность одинакова по величине и направлению во всех точках.

Напряженность поля, создаваемого движущейся заряженной частицей, можно найти по формуле $H = (q \cdot v \cdot \sin \alpha) / 4\pi r^2$, где q – заряд частицы, v – ее скорость, r – расстояние от частицы до точки, в которой определяется напряженность, α – угол между направлением скорости и прямой, проведенной от частицы в данную точку поля.

3.3.3. Работа при перемещении проводника с током в магнитном поле. Электромагнитная индукция

При движении проводника с током в магнитном поле совершается работа. Она определяется соотношением $A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$. В приведенной формуле Φ_1 – это магнитный поток сквозь контур тока в начале перемещения, Φ_2 – магнитный поток в конце перемещения контура. Единицей магнитного потока в системе СИ является вебер (Вб). В однородном поле магнитным потоком через контур называют произведение магнитной индукции B на площадь контура S и на косинус угла α между направлением поля и нормалью к поверхности контура: $\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$.

Явление электромагнитной индукции – это возникновение электродвижущей силы индукции \mathcal{E}_i в проводящем контуре, находящемся в переменном магнитном поле. При этом в замкнутом контуре протекает индукционный электрический ток.

Согласно *закону электромагнитной индукции Фарадея* ЭДС электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока Φ_m через поверхность, ограниченную этим контуром: $\mathcal{E}_i = - d\Phi_m / dt$. Направление обхода контура и внешней нормали \vec{n} к нему при вычислении \mathcal{E}_i и Φ_m взаимосвязаны: из конца вектора нормали обход контура должен быть виден происходящим против часовой стрелки. Индукционный ток в проводнике имеет направление, при котором его магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающему появление индукционного тока (*правило Ленца*).

Охватываемый контуром магнитный поток может изменяться по разным причинам: из-за деформации или перемещения контура во внешнем магнитном поле, а также при изменении магнитного поля во времени.

Когда замкнутый контур состоит из нескольких последовательно соединенных витков, необходимо учитывать полный магнитный поток через поверхность, охватываемую всеми витками.

3.3.4. Самоиндукция

Электромагнитную индукцию в неподвижных проводниках можно вызвать при помощи переменного магнитного поля, создаваемого переменным электрическим током. Если ЭДС индукции в проводнике вызывается током, протекающим в других расположенных рядом проводниках, такое явление называют *взаимоиндукцией*. Если ЭДС индукции возбуждается в том же самом проводнике, по которому течет пере-

менный ток, то это явление называется *самоиндукцией*. ЭДС самоиндукции можно найти по формуле

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Здесь L – коэффициент самоиндукции, называемый индуктивностью, dI/dt – скорость изменения тока; L зависит от формы, размеров проводника и от магнитных свойств среды, характеризующихся магнитной проницаемостью μ . За единицу измерения индуктивности в системе СИ принимается генри (Гн): 1 Гн – это индуктивность проводника, в котором при скорости изменения тока 1 А/с возникает ЭДС, равная 1 В. Установив единицу измерения индуктивности, можно иначе записать размерность магнитной постоянной $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Энергия магнитного поля вокруг проводника с током находится по формуле

$$W_M = \frac{L \cdot I^2}{2}.$$

В пространстве, где имеется магнитное поле, распределена энергия. Плотность энергии однородного магнитного поля (энергия в единице объема) определяется по формуле

$$W_m = \mu_0 \mu \cdot H^2 / 2 .$$

С явлением электромагнитной индукции связано возникновение *вихревых токов*. Вихревые токи (или токи Фуко) – это индукционные токи, возникающие в массивных проводниках, помещенных в изменяющееся магнитное поле.

Явление электромагнитной индукции наглядно демонстрирует, что реально следует говорить о едином электромагнитном поле, а не об отдельно существующих электрических и магнитных полях.

3.3.5. Магнитные свойства вещества

В атомах и молекулах вещества имеются движущиеся заряды, на которые действует магнитное поле. Поэтому все вещества обладают магнитными свойствами. Эти свойства обнаруживаются, когда тела оказываются в магнитном поле. Суть наблюдаемых явлений сводится к следующему.

1. *Поле действует на тела с некоторыми силами или механическими моментами. В неоднородном поле одни тела (парамагнитные) перемещаются в сторону возрастания напряженности поля, т. е. втягиваются в*

поле. Другие тела (диамагнитные) перемещаются в сторону убывания напряженности поля, т.е. выталкиваются из поля. В однородном поле на тела, имеющие продолговатую форму (стержни, стрелки), действуют механические моменты, которые устанавливают парамагнитные тела вдоль направления поля, а диамагнитные – перпендикулярно к нему.

2. Поле намагничивает вещество, вследствие чего тела создают свое собственное магнитное поле, которое складывается с основным (намагничивающим) полем. У диамагнитных тел собственное поле направлено против внешнего поля, у парамагнитных тел собственное и внешнее поля имеют одинаковое направление.

Если вещество полностью заполняет пространство, занятое однородным магнитным полем, тогда вектор магнитной индукции результирующего магнитного поля в среде будет равен сумме векторов магнитной индукции внешнего (намагничивающего) поля $\vec{B}_0 = \mu_0 \cdot \vec{H}$ (создаваемого макроскопическими токами) и собственного внутреннего магнитного поля \vec{B}' (создаваемого молекулярными токами в веществе):

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

Вектор \vec{B}' собственного магнитного поля среды зависит от намагничивающего поля, эту зависимость можно представить как

$$\vec{B}' = \chi \cdot \vec{B}_0.$$

Безразмерная величина χ называется *магнитной восприимчивостью*. Тогда можно записать, что

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \chi \cdot \vec{B}_0 = (1 + \chi) \cdot \vec{B}_0 = \mu \cdot \vec{B}_0 = \mu \mu_0 \cdot \vec{H}.$$

Таким образом, относительная магнитная проницаемость среды связана с магнитной восприимчивостью соотношением: $\mu = (1 + \chi)$. У диамагнитных веществ χ – отрицательная величина, а $\mu < 1$. Вектор \vec{B}' направлен против вектора \vec{B}_0 . У парамагнитных веществ χ – положительная величина, $\mu > 1$. Вектор \vec{B}' имеет одинаковое направление с \vec{B}_0 . В качестве примера диамагнитных веществ можно назвать воду, цинк, золото, серебро, висмут. Примеры парамагнитных веществ: платина, алюминий, жидкий кислород.

Намагниченность вещества можно оценить по магнитному моменту \vec{J} , которым обладает единица объема вещества. Это суммарный магнитный момент всех молекул, атомов и электронов:

$$\vec{J} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_{mi}}{V}.$$

Вектор \vec{J} также называют *интенсивностью намагничения*, или *намагниченностью*. По физическому смыслу $\vec{J} = \vec{H}'$. Поскольку вектор магнитной индукции в веществе $\vec{B}' = \chi \cdot \vec{B}_0$, а с другой стороны, $\vec{B}' = \mu_0 \cdot \vec{H}' = \mu_0 \cdot \vec{J}$ и вектор индукции внешнего намагничивающего поля $\vec{B}_0 = \mu_0 \cdot \vec{H}$, то вектор намагниченности пропорционален вектору напряженности внешнего намагничивающего поля: $\vec{J} = \chi \cdot \vec{H}'$. Следовательно, если вещество находится во внешнем магнитном поле с напряженностью \vec{H} , то внутри него индукция поля будет равна

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{J} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}).$$

Из этого уравнения можно определить \vec{H} или \vec{J} по измеренным значениям \vec{B} . Особый класс веществ называют ферромагнетиками (железо, кобальт, никель). Это вещества, у которых намагниченность нелинейно зависит от напряженности внешнего магнитного поля $\vec{J} = f(\vec{H})$. Магнитная проницаемость μ таких веществ не постоянна, она также зависит от напряженности магнитного поля. Ее численное значение много больше единицы ($\mu \approx 10^3 \dots 10^5$). График зависимости магнитной проницаемости μ от напряженности H внешнего намагничивающего поля называется кривой Столетова. Нелинейную зависимость магнитной индукции B в веществе от напряженности H называют кривой намагничивания (рис. 3.8). Магнитная проницаемость $\mu = B/\mu_0 H$, поэтому из графика по кривой намагничивания можно для каждой пары значений B и H найти магнитную проницаемость вещества. Магнитные свойства ферромагнетиков связаны с наличием у них магнитных доменов — областей спонтанной намагниченности. Когда нет внешнего магнитного поля, направления векторов намагниченности доменов не совпадают и результирующая намагниченность всего ферромагнетика равна нулю. При внесении в магнитное поле ферромагнетики намагничиваются из-за изменения направлений спонтанной намагниченности отдельных доменов и всего магнетика в целом, а также из-за смещения границ доменов, приводящего к увеличению числа доменов, у которых намагниченность ориентирована наиболее близко к направлению внешнего поля. Намагниченность остается и после удаления ферромагнетика из внешнего магнитного поля. Чтобы размагнитить ферромагнетик, его необходимо поместить в поле противоположной направленности. Поэтому кроме нелинейной зависимости $B = f(H)$ для ферромагнетиков характерно также явление гистерезиса — отставание изменения магнитной индукции \vec{B} (и намагниченности \vec{J}) в ферромагнетиках от изменения напряженности переменного по величине и направлению внешнего намагничивающего поля. Если раз-

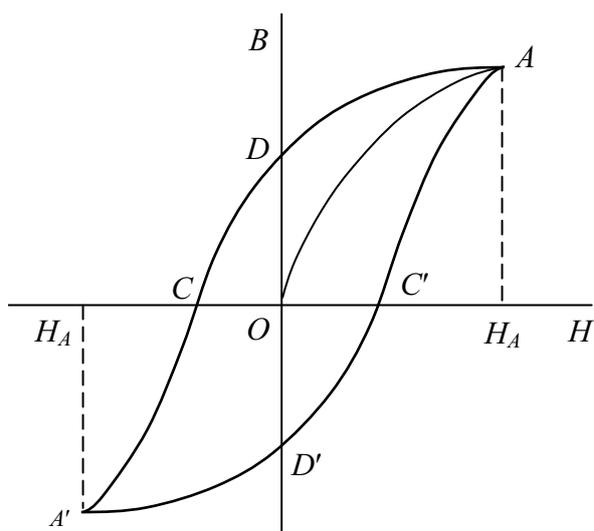


Рис. 3.10. Кривая намагничивания ферромагнетика

магнитный ферромагнетик поместить во внешнее магнитное поле, напряженность которого непрерывно увеличивается, то магнитная индукция будет возрастать в нем по кривой OA (рис. 3.10), называемой основной кривой намагничивания.

Если затем, начиная с некоторой точки A , произвести полный цикл перемагничивания, т.е. изменять напряженность магнитного поля от H_A до $-H_A$ и от $-H_A$ до H_A , то значения магнитной индукции \vec{B} будут изме-

няться по замкнутой симметричной относительно осей координат $B-H$ кривой, называемой петлей гистерезиса. Гистерезисная кривая дает значительную информацию о свойствах изучаемого ферромагнетика. Отрезки OD и OD' , отсекаемые петлей на оси ординат ($H = 0$), соответствуют остаточной индукции образца. Отрезки OC и OC' указывают значение напряженности H_k внешнего магнитного поля, при котором остаточная индукция падает до нуля. Напряженность H_k называется коэрцитивной силой или коэрцитивным полем. Можно показать, что площадь, охватываемая гистерезисной кривой, пропорциональна энергии перемагничивания ферромагнетика.

3.3.6. Контур с током в магнитном поле. Энергия контура.

Работа в магнитном поле. Энергия магнитного поля.

1. Работа перемещения замкнутого контура с током в магнитном поле $A = I \cdot \Delta\Phi$, где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром, I – сила электрического тока в контуре.

2. Основной закон электромагнитной индукции (закон электромагнитной индукции Фарадея) $\mathcal{E}_i = -N \cdot (d\Phi/dt) = -d\Psi/dt$, где \mathcal{E}_i – электродвижущая сила индукции (ЭДС); N – число витков контура; Ψ – потокосцепление.

Частные случаи применения основного закона электромагнитной индукции:

Разность потенциалов U на концах проводника длиной l , движущегося со скоростью v в однородном магнитном поле с индукцией B : $U = Blv \cdot \sin \alpha$, где α – угол между направлениями векторов скорости v и магнитной индукции B . Электродвижущая сила индукции \mathcal{E}_i , возникающая в рамке, содержащей N витков, площадью S , при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B

$$\mathcal{E}_i = - B \cdot N \cdot S \cdot \omega \cdot \sin \omega t,$$

где ωt – мгновенное значение угла между вектором B и вектором нормали к плоскости рамки.

3. Количество электричества Q , протекающего в контуре

$$Q = \Delta \Psi / R,$$

где R – сопротивление контура; $\Delta \Psi$ – изменение потокосцепления.

4. Электродвижущая сила самоиндукции \mathcal{E}_i , возникающая в замкнутом контуре при изменении силы тока в нем

$$\mathcal{E}_i = -L(dI/dt),$$

где L – индуктивность контура.

5. Потокосцепление контура $\Psi = L \cdot I$.

6. Индуктивность соленоида (тороида)

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость сердечника, n – число витков на единицу длины катушки, V – объем соленоида (тороида).

7. Магнитная энергия контура с током $W = LI^2/2$.

Основные расчетные формулы

- Закон Био–Савара–Лапласа $d\vec{H} = I[d\vec{l} \times \vec{r}]/(4\pi r^3)$.
- Закон Ампера $dF_A = I \cdot B \cdot dl \cdot \sin \alpha$.
- Сила Лоренца $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$.
- Связь индукции и напряженности $B = \mu_0 \mu H$.
- Магнитный момент витка с током $p_m = IS$.
- Поле прямого тока $H = I/4\pi a(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$,
- Поле на оси кругового тока $H = p_m/4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}$. Здесь R – радиус витка.
- Поле соленоида $H = nI(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)/2$, где n – число витков на единицу длины соленоида.
- Поле движущейся заряженной частицы $H = (q \cdot v \cdot \sin \alpha)/4\pi r^2$.

- Работа перемещения провода с током $A = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1)$.
- Магнитный поток через контур $\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$.
- Электродвижущая сила индукции $\mathcal{E} = -Nd\Phi/dt = -d\Psi/dt$, где N – число витков контура; Ψ – потокосцепление.
- Разность потенциалов U на концах проводника длиной l , движущегося со скоростью v в однородном магнитном поле с индукцией B : $U = Blv \cdot \sin \alpha$. ЭДС самоиндукции $\mathcal{E} = -L(dI/dt)$, L – коэффициент самоиндукции. ЭДС индукции \mathcal{E}_i в рамке, вращающейся с угловой скоростью ω в поле с индукцией B : $\mathcal{E}_i = -B \cdot N \cdot S \cdot \omega \cdot \sin \omega t$, где ωt – мгновенное значение угла между вектором B и вектором нормали к плоскости рамки. Количество электричества Q , протекающего в контуре $Q = \Delta\Psi/R$, где R – сопротивление контура; $\Delta\Psi$ – изменение потокосцепления.
- Электродвижущая сила самоиндукции \mathcal{E}_i , возникающая в замкнутом контуре при изменении силы тока в нем $\mathcal{E}_i = -L(dI/dt)$, где L – индуктивность контура. Потокосцепление контура $\Psi = L \cdot I$.
- Индуктивность соленоида (тороида) $L = \mu_0 \mu n^2 V$, μ – магнитная проницаемость сердечника, n – число витков на единицу длины катушки, V – объем соленоида (тороида).
- Энергия магнитного поля вокруг проводника с током $W_M = (L \cdot I^2)/2$. Плотность энергии магнитного поля $W_M = \mu_0 \mu \cdot H^2/2$.

Примеры решения задач

Пример 1. В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0,25$ Тл, находится плоская катушка диаметром $d = 50$ см, содержащая $N = 75$ витков. Плоскость катушки составляет угол $\varphi = 60^\circ$ с направлением вектора индукции. Найти вращающий момент, действующий на катушку в магнитном поле, если по виткам течет ток силой $I = 3$ А. Какую работу необходимо совершить, чтобы удалить катушку из магнитного поля?

Решение. На катушку, содержащую N витков, со стороны магнитного поля действует вращающий момент $M = N \cdot p_m \cdot B \cdot \sin \alpha$, где магнитный момент витка $p_m = I \cdot S$, площадь витка $S = \pi d^2/4$; угол $\alpha = \pi/2 - \varphi$. Преобразуя выражение для момента, получим:

$$M = N \cdot I \cdot (\pi d^2/4) \cdot B \cdot \sin (\pi/2 - \varphi) = N \cdot I \cdot (\pi d^2/4) \cdot B \cdot \cos \varphi; M = 5,5 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Работа магнитного поля при удалении из него катушки равна

$$A = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1).$$

Таким образом, чтобы удалить катушку из поля, к ней нужно приложить внешнюю силу с совершением работы $A_{\text{вн}} = -A = I \cdot (\Phi_1 - \Phi_2)$.

Здесь $\Phi_1 = N \cdot B \cdot S \cdot \cos \alpha$; $\Phi_2 = 0$. Подставляя эти выражения в формулу для момента, получаем:

$$A_{\text{вн}} = N \cdot I \cdot B \cdot (\pi d^2 / 4) \cdot \sin (\pi / 2 - \varphi) = N \cdot I \cdot B \cdot (\pi d^2 / 4) \cdot \cos \varphi; A_{\text{вн}} = 8,6 \text{ Дж.}$$

Пример 2. Имеется два проволочных контура одинаковой длины $l = 20$ см: один квадратный, а другой круговой. Оба контура помещены в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Линии поля составляют угол $\varphi = 45^\circ$ с плоскостью каждого контура. По контурам течет постоянный электрический ток силой $I = 2$ А. Найти вращающие моменты сил, действующих на каждый контур.

Решение. В магнитном поле на замкнутый контур с током действует вращательный момент сил, равный: $M = B \cdot I \cdot S \cdot \sin \varphi$. Площадь квадратного контура $S_1 = (l/4)^2$. Площадь кругового контура $S_2 = \pi R^2$, где $R = l/2\pi$. Таким образом, $S_2 = l^2/4\pi$. Тогда вращательный момент, действующий на квадратный контур, будет равен:

$$M_1 = (B \cdot I \cdot l^2 / 16) \cdot \sin \varphi = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

На круговой контур действует вращательный момент:

$$M_2 = (B \cdot I \cdot l^2 / 4\pi) \cdot \sin \varphi = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Пример 3. В однородное магнитное поле с напряженностью $H = 150$ кА/м перпендикулярно линиям поля помещен плоский круговой проволочный контур. По контуру течет ток $I = 2$ А. Радиус контура $0,02$ м. Найти работу, которую необходимо совершить для поворота контура на угол $\varphi = 90^\circ$ вокруг оси, совпадающей с его диаметром.

Решение. Работа по перемещению контура с током в однородном магнитном поле равна $A = I \cdot \Delta \Phi = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1)$, где $\Phi_2 = B \cdot S \cdot \cos \varphi_2 = 0$; $\Phi_1 = B \cdot S \cdot \cos \varphi_1 = B \cdot S$. Площадь контура $S = \pi R^2$. Окончательно получаем:

$$A = I \cdot B \cdot \pi \cdot R^2 = I \cdot \mu_0 \cdot H \cdot \pi \cdot R^2 = 0,5 \text{ мДж.}$$

Пример 4. Прямолинейный проводник с током равномерно движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,3$ Тл перпендикулярно линиям поля. Длина проводника $l = 0,3$ м. По проводнику течет ток $I = 4$ А. Скорость движения проводника $v = 0,3$ м/с. Найти работу перемещения проводника за время $t = 10$ с.

Решение. Работа по перемещению проводника с током в однородном магнитном поле равна: $A = I \cdot \Delta \Phi$, где $\Delta \Phi$ – магнитный поток, пересекаемый проводником при своем движении. $\Delta \Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$. S – это площадь, «заметаемая» проводником за время t . $S = l \cdot v \cdot t$. Окончательно получаем:

$$A = I \cdot B \cdot l \cdot v \cdot t \cdot \cos \alpha = 1,08 \text{ Дж.}$$

Пример 5. По катушке с размерами $S = 5 \times 6 \text{ см}^2$, содержащей $N = 200$ витков тонкого провода протекает переменный электрический ток с амплитудой $I = 2 \text{ А}$. Под действием этого тока катушка вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$, совершая за 1 с 60 оборотов. Найти максимальную мощность P , потребляемую таким двигателем.

Решение. При равномерном движении мощность находится из соотношения $P = F \cdot v$, где F – сила, v – скорость. При движении по окружности с радиусом r имеем $P = (rF) \cdot (v/r) = M \cdot \omega$, где M – вращательный момент, $\omega = 2\pi n$ – циклическая частота. Для катушки с N витками момент сил запишется в виде $M = N \cdot I \cdot S \cdot B \cdot \sin \omega t$. Таким образом, мощность может быть найдена из соотношения: $P = (N \cdot I \cdot S \cdot B \cdot \sin \omega t) \cdot \omega$. Максимальное значение мощности равно $P = N \cdot I \cdot S \cdot B \cdot \omega = N \cdot I \cdot S \cdot B \cdot 2\pi n = 226 \text{ Вт}$.

Пример 6. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,25 \text{ Тл}$ находится плоская катушка, содержащая $N = 75$ витков. Плоскость катушки составляет угол $\varphi = 60^\circ$ с направлением линий магнитной индукции. Радиус катушки равен $r = 0,25 \text{ м}$. Сила тока $I = 8 \text{ А}$. Найти вращательный момент, действующий на катушку и работу, необходимую для удаления катушки из магнитного поля.

Решение. Вращательный момент, действующий в магнитном поле на контур с током, находится из соотношения: $M_k = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha$, где α – угол между векторами магнитной индукции B и магнитного момента p_m . Этот угол равен: $\alpha = 90^\circ - \varphi = 30^\circ$. Поскольку в катушке N одинаковых витков, то действующий на нее вращательный момент будет в N раз больше. Магнитный момент контура с током выражается формулой: $p_m = I \cdot S = I \cdot \pi R^2$. Работа по перемещению катушки с током под действием сил магнитного поля $A_M = N \cdot I (\Phi_2 - \Phi_1)$, где $\Phi_1 = B \cdot S \cdot \cos \alpha$ – поток, пронизывающий катушку, находящуюся в магнитном поле, $\Phi_2 = 0$ – это поток вне поля. Таким образом работа по удалению катушки, совершаемая против сил магнитного поля, равна $A = -A_M$. После подстановки данных окончательно получаем: $M = 15 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $A = 25 \text{ Дж}$.

Пример 7. Внутри соленоида с диаметром витков $d = 0,07 \text{ м}$ и длиной $l = 0,7 \text{ м}$ вдали от краев расположена плоская катушка, состоящая из 20 витков площадью $S = 0,3 \text{ см}^2$ каждый. Плоскость витков катушки составляет угол $\beta = 37^\circ$ с осью соленоида. В обмотке соленоида течет ток силой $I_1 = 4 \text{ А}$, число витков в соленоиде равно $N_1 = 300$. В катушке течет ток силой $I_2 = 0,1 \text{ А}$. Найти: 1) вращающий момент, действующий на катушку в начальном положении; 2) работу, совершаемую силами поля при повороте катушки до положения устойчивого равновесия;

3) работу внешних сил при перемещении катушки после поворота из центра соленоида в середину одного из оснований.

Решение. Индукция магнитного поля в центре длинного соленоида находится из соотношения $B_1 = \mu_0 I_1 N_1 / l$. Вращательный момент, действующий на плоскую катушку, равен $M = p_m \cdot B_1$, где магнитный момент p_m катушки равен $p_m = I_2 S N_2$. В скалярной форме выражение для вращательного момента после подстановки приобретает вид: $M = \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot S \cdot \sin \alpha / l = 1 \cdot 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{м}$. Здесь $\sin \alpha = \cos \beta$, угол α равен либо $\pi/2 - \beta$, либо $\pi/2 + \beta$, поскольку в условии задачи не оговорены направления токов в катушке и соленоиде.

Катушка будет находиться в состоянии устойчивого равновесия, когда направление вектора ее магнитного момента совпадает с направлением вектора магнитной индукции поля соленоида. В этом положении вращательный момент, действующий на катушку, равен нулю. Если векторы p_m и B_1 направлены в противоположные стороны, вращательный момент тоже равен нулю, но это положение соответствует неустойчивому равновесию. На катушку действуют силы, которые в случае отклонения катушки от положения равновесия стремятся повернуть катушку на 180° . При повороте плоской катушки в магнитном поле работа сил поля находится из соотношения $A_1 = I_2(\Phi_2 - \Phi_1)$. В начальном положении поток, пронизывающий витки катушки равен $\Phi_1 = B_1 N_2 S \cdot \cos \alpha$, при этом $\cos \alpha = \pm \sin \beta$ в зависимости от угла α . Поток Φ_2 в положении устойчивого равновесия равен $\Phi_2 = B_1 N_2 S$. После подстановки окончательно получаем

$$A_1 = -I_2 B_1 N_2 S (1 \pm \sin \beta).$$

Если $\alpha = \pi/2 - \beta$, то $A_1 = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$; если $\alpha = \pi/2 + \beta$, то $A_1 = 2,1 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$. Индукция поля в середине основания длинного соленоида

$$B_2 = B_1 / 2 = \mu_0 I_1 N_1 / 2l.$$

Следовательно, при перемещении катушки из центра соленоида в середину его основания пронизывающий ее поток изменится от $\Phi_1 = B_1 N_2 S$ до $\Phi_2 = B_2 N_2 S$. Работа внешних сил равна $A_{\text{вн}} = -A_2 = I_2(\Phi_1 - \Phi_2)$. После подстановки численных значений получаем $A_{\text{вн}} = 6,5 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}$.

Пример 8. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2} \text{ Тл}$ расположены вертикально на расстоянии $L = 0,5 \text{ м}$ два металлических стержня, замкнутых сверху. Плоскость, в которой расположены стержни, перпендикулярна к направлению индукции магнитного поля. По стержням без трения и без нарушения контакта скользит вниз с постоянной скоростью $v = 1 \text{ м/с}$ перемычка ab массой $m = 10^{-3} \text{ кг}$. Опреде-

лить электрическое сопротивление R переключки, если сопротивлением остальной части системы можно пренебречь.

Решение. Поскольку переключка движется вниз с постоянной скоростью, то сила тяжести уравновешивается силой, действующей на переключку со стороны магнитного поля: $mg = F$. Найдем силу F . При движении переключки в замкнутом контуре, образованном вертикальными стержнями, горизонтальной верхней переключкой и перемещающейся нижней переключкой, наводится ЭДС индукции, равная $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$. Мощность джоулевых потерь равна $P = \mathcal{E}^2/R$. Согласно закону сохранения, эта энергия равна энергии, затраченной на перемещение переключки: $P = F \cdot v$, отсюда сила $F = \mathcal{E}^2/Rv$. Поскольку $\mathcal{E} = -BL(\Delta x/\Delta t)$, решая систему уравнений, получаем $R = B^2 L^2 v/mg = 2,55 \cdot 10^{-3}$ Ом.

Пример 9. Плоская прямоугольная проволочная рамка $abcd$ перпендикулярна к линиям индукции однородного магнитного поля. Индукция поля равна $B = 10^{-3}$ Тл. Подвижная сторона рамки $bc = L = 10^{-2}$ м скользит без нарушения контакта со скоростью v по сторонам ab и dc . Между точками a и d включена лампочка с сопротивлением R . Сопротивлением остальной части рамки можно пренебречь. Найти силу, необходимую для перемещения стороны bc с постоянной скоростью.

Решение. Для осуществления равномерного движения переключки к ней необходимо приложить силу $F = \mathcal{E}^2/Rv = B^2 L^2 v/R$ (см. решение предыдущей задачи). После подстановки численных значений, получим $F = 2 \cdot 10^{-12}$ Н.

Пример 10. Два параллельных проводника с одинаковыми по силе токами находятся на расстоянии $r = 8,7$ см друг от друга и притягиваются с силой $F = 0,025$ Н. Определить силу тока в проводниках длиной $l = 320$ см, если токи направлены в одну сторону.

Решение. Так как по условию задачи $r \ll l$, то провода можно считать бесконечно длинными. Поэтому индукцию магнитного поля B_1 , созданного проводником с током силой I_1 , найдем по формуле

$$B_1 = \mu\mu_0 I_1 / (2\pi r).$$

По закону Ампера, на проводник с током I_2 действует сила $F_2 = I_2 B_1 l$ или, с учетом выражения для B_1 , $F_2 = I_2 \mu\mu_0 I_1 / (2\pi r)$. Так как $I_1 = I_2 = I$, то

$$F_2 = \mu\mu_0 I^2 / (2\pi r), \text{ откуда } I = [2\pi r F_2 / (\mu\mu_0)]^{1/2} = 58 \text{ А.}$$

Пример 11. По двум одинаковым круговым виткам радиусом $R = 5$ см, плоскости которых взаимно перпендикулярны, а центры совпадают, текут одинаковые токи силой $I = 2$ А. Найти индукцию B магнитного поля в центре витков.

Решение. Индукцию магнитного поля, созданного каждым круговым током в центре соответствующего витка, можно найти по формуле $B_1 = B_2 = \mu\mu_0 I / (2R)$. По правилу буравчика можно найти направления векторов B_1 и B_2 . При любом выборе направления токов в витках векторы B_1 и B_2 будут взаимно перпендикулярны. По принципу суперпозиции индукция результирующего магнитного поля находится как векторная сумма $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Поскольку векторы \vec{B}_1 и \vec{B}_2 взаимно перпендикулярны, то по теореме Пифагора находим $B = (B_1^2 + B_2^2)^{1/2} = B_1 2^{1/2}$. После подстановки в последнее равенство выражения для B_1 находим $B = \mu\mu_0 I (2^{1/2} R)$; $B = 33,6$ мкТл.

Пример 12. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 300$ В, движется параллельно прямолинейному проводнику на расстоянии $r = 4$ мм от него. Какая сила будет действовать на электрон, если по проводнику пустить ток силой $I = 5$ А?

Решение. При пропускании по проводнику тока на электрон действует сила Лоренца $F = eBv$. Так как электрон был предварительно ускорен в электрическом поле, то $A = W_{\kappa}$, или $eU = mv^2/2$, где m — масса электрона. Тогда $v = (2eU/m)^{1/2}$. Индукция магнитного поля, образованного прямым длинным проводником с током, равна $B = \mu\mu_0 I / (2\pi r)$. Объединив эти выражения, находим, что сила, действующая на электрон со стороны магнитного поля, равна $F = [\mu\mu_0 e I / (2\pi r)] (2eU/m)^{1/2} = 4 \cdot 10^{-16}$ Н.

Пример 13. Пучок электронов влетает в пространство с электрическим полем напряженностью $E = 1$ кВ/м, и перпендикулярным ему магнитным полем, с индукцией $B = 1$ мТл. Скорость электронов постоянна и направлена перпендикулярно векторам E и B . Найти скорость движения электронов. Как будут двигаться электроны, если электрическое поле выключить? Каков радиус кривизны траектории электронов в этом случае?

Решение. На электрон в электрическом и магнитном полях действуют силы $F_{\text{эл}} = eE$ и $F_{\text{маг}} = F_{\text{л}} = evB$. Поскольку электрон движется прямолинейно и равномерно, электрическая и магнитная силы взаимно уравновешены. То есть $F_{\text{маг}} - F_{\text{эл}} = 0$. Учитывая записанные выше выражения, получим, что $evB - eE = 0$. Откуда следует: $v = E/B = 10^6$ м/с. Если выключить электрическое поле, то на электрон будет действовать только магнитное поле с силой $F_{\text{маг}} = F_{\text{л}} = evB$. Поскольку скорость электрона перпендикулярна вектору магнитной индукции поля, электрон будет двигаться по окружности. По второму закону Ньютона, $F_{\text{л}} = ma_{\text{ц}}$. Учитывая приведенные выше выражения и что $a_{\text{ц}} = v^2/R$, получаем $evB = mv^2/R$, откуда $R = mv/eB = 5,7 \cdot 10^{-3}$ м.

Пример 14. Электрон движется в магнитном поле, индукция которого $B = 2$ мТл, по винтовой линии радиусом $R = 2$ см и шагом винта $h = 5$ см. Определить скорость электрона.

Решение. Движение электрона по винтовой линии можно представить как движение по окружности со скоростью v_y под действием силы Лоренца в плоскости, перпендикулярной индукции поля, и равномерное движение вдоль поля со скоростью v_x . Тогда скорость электрона можно определить по формуле: $v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$.

Найдем отдельно скорости v_x и v_y . Запишем для электрона уравнение второго закона Ньютона в скалярной форме относительно оси y : $F = ma_y$, где $F = eBv$; $a_y = v_y^2/R$. Тогда $eBv_y = mv_y^2/R$, откуда $v_y = eBR/m$. Скорость v_x может быть найдена из соотношения $h = v_x T$, откуда $v_x = h/T$, где T – время, в течение которого электрон продвинется по горизонтальному направлению на один шаг винта. С другой стороны, T равно времени, в течение которого электрон пройдет со скоростью v_y расстояние, равное длине окружности, то есть $T = 2\pi r/v_y$ или, с учетом выражения для v_y , получаем $T = 2\pi r R m / (eBR) = 2\pi m / (eB)$. Используя последнее соотношение и соотношение для v_x , получим: $v_x = h/T = heB/2\pi m$. Теперь мы можем получить окончательное выражение для скорости электрона: $v = \{[h^2 e^2 B^2 / (4\pi^2 m^2)] + [e^2 B^2 R^2 / m^2]\}^{1/2} = eB/2\pi m (h^2 + 4\pi^2 R^2)^{1/2}$; $v = 7,6 \cdot 10^6$ м/с.

Пример 15. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл, вектор которой направлен под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали, вертикально вверх движется прямой проводник массой $m = 2$ кг. По проводнику течет ток силой $I = 4$ А. Через $t = 3$ с после начала движения скорость проводника $v = 10$ м/с. Определить длину проводника.

Решение. На проводник, движущийся в магнитном поле, действуют: mg – сила тяжести, F – сила Ампера. Так как проводник движется под углом α к направлению вектора магнитной индукции B , то сила Ампера $F = IB_x l$, где $B_x = B \sin \alpha$ – составляющая вектора B по оси OX . Следовательно, $F = IB \sin \alpha l$. Поскольку движение проводника по условию задачи равноускоренное, запишем уравнение второго закона Ньютона в скалярной форме относительно оси OZ : $F - mg = ma$, или, с учетом выражения для силы Ампера, имеем: $IB \sin \alpha l - mg = ma$. Из формулы $v = at$ определим $a = v/t$ и перепишем последнее уравнение в виде $IB \sin \alpha l - mg = mv/t$, откуда $l = m(g + v/t) / (IB \sin \alpha)$; $l = 6,55$ м.

Пример 16. По трем длинным прямым проводам, расположенным в одной плоскости, параллельно друг другу на расстоянии $r = 3$ см, текут токи силой $I_1 = I_2$ и $I_3 = I_1 + I_2$. Определить положение прямой, в каждой точке которой индукция магнитного поля, создаваемого токами, равна нулю.



Решение. Пусть токи I_1, I_2, I_3 текут в плоскости, перпендикулярной рисунку, в направлении от нас. Векторы индукции магнитных полей, создаваемых токами, направлены, по правилу буравчика, по касательной в любой точке линии индукции. Очевидно, что искомая прямая, на которой вектор индукции магнитного поля равен нулю, проходит через точку, находящуюся между токами I_2 и I_3 на некотором расстоянии x от оси тока I_2 . Действительно, векторы индукции B_1 и B_2 полей, создаваемых в рассматриваемой точке токами I_1 и I_2 , направлены вниз, а вектор индукции B_3 поля, создаваемого в этой точке током I_3 , направлен вверх. Согласно принципу суперпозиции магнитных полей, $B_1 + B_2 + B_3 = 0$, или в скалярной форме относительно вертикальной оси, $B_1 + B_2 - B_3 = 0$. Индукция поля, образованного бесконечно длинным прямым проводом с током, равна

$$B = \mu\mu_0 I / (2\pi r).$$

Тогда $B_1 = \mu\mu_0 I_1 / [2\pi(r+x)]$; $B_2 = \mu\mu_0 I_2 / (2\pi x)$; $B_3 = \mu\mu_0 (I_1 + I_2) / [2\pi(r-x)]$. Окончательно получим:

$$\mu\mu_0 I_1 / [2\pi(r+x)] + \mu\mu_0 I_2 / (2\pi x) - \mu\mu_0 (I_1 + I_2) / [2\pi(r-x)] = 0.$$

Или после преобразований: $4x^2 + rx - r^2 = 0$, откуда

$$x = [-r + (r^2 + 16r^2)^{1/2}] / 8.$$

Следовательно, $x = 0,012$ м. Второй корень квадратного уравнения отбрасываем, так как он соответствует точке, расположенной между токами I_1 и I_2 , что невозможно.

Пример 17. По двум прямым проводникам, находящимся на расстоянии $l = 5$ см друг от друга, протекают в одном направлении токи силой $I = 10$ А. Определить индукцию магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $r = 3$ см от каждого проводника.

Решение. Вектор магнитной индукции B поля в точке A равен векторной сумме индукций B_1 и B_2 полей, создаваемых в этой точке каждым током в отдельности (см. рис.). Направления векторов B_1 и B_2 определяем по правилу буравчика. Числовое значение индукции магнитного поля в точке A может быть найдено по теореме косинусов:

$$B = (B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha)^{1/2}.$$

Индукции магнитных полей, создаваемых каждым током в точке A , соответственно равны: $B_1 = \mu\mu_0 I / (2\pi r_1)$; $B_2 = \mu\mu_0 I / (2\pi r_2)$. Поскольку $r_1 = r_2 = r$, $B_1 = B_2$, то выражение для результирующего вектора магнитной индукции примет вид: $B = B_1(2 + 2\cos\alpha)^{1/2}$. Из $\triangle DAC$ по теореме косинусов найдем

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha.$$

Выразив из последнего соотношения $\cos\alpha$ и подставив полученное выражение вместе с выражением для B_1 в формулу для B , окончательно получим

$$B = [\mu\mu_0 I / (2\pi r)](4r^2 - l^2); B = 66,6 \text{ мкТл.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Движение заряженных частиц в полях

1. Электрон движется в однородном магнитном поле напряженностью $H = 4 \text{ кА/м}$ со скоростью $v = 10^6 \text{ м/с}$, направленной перпендикулярно линиям напряженности. Найти силу F , с которой поле действует на электрон, и радиус окружности, по которой он движется.

2. Магнитное поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$ перпендикулярно электрическому полю с напряженностью $E = 100 \text{ кВ/м}$. Перпендикулярно к обоим полям прямолинейно движется заряженная частица. Найти скорость v частицы.

3. Магнитное поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$ направлено перпендикулярно электрическому полю с напряженностью $E = 1 \text{ кВ/м}$. Электрон влетает в поле перпендикулярно B и E . Найти скорость электрона v , если при одновременном действии обоих полей электрон не отклоняется.

4. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 104 \text{ В}$ и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое ($E = 10 \text{ кВ/м}$) и магнитное ($B = 0,1 \text{ Тл}$) поля. Найти удельный заряд частицы, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не отклоняется от прямолинейной траектории.

5. Электрон, ускоренный постоянным электрическим полем за $0,01 \text{ с}$, влетает перпендикулярно в магнитное поле $B = 100 \text{ мкТл}$. Найти отношение нормального ускорения электрона к тангенциальному в этот момент.

6. Электрон влетает в магнитное поле перпендикулярно его вектору магнитной индукции $B = 1 \text{ мТл}$ со скоростью $v = 4 \cdot 10^7 \text{ м/с}$. Найти тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения электрона в магнитном поле.

7. Реактивный самолет, имеющий размах крыльев 50 м , летит горизонтально со скоростью 800 км/ч . Определить разность потенциалов, возникающую между концами крыльев, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$.

8. Два иона с одинаковым зарядом, пройдя одну и ту же разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно

линиям индукции. Ион с массой $m_1 = 12$ а.е.м. стал двигаться по окружности радиусом 4 см. Найти массу второго иона, который движется по окружности радиусом 6 см.

9. Пучок электронов движется в вакууме в магнитном поле с индукцией $B = 2$ мТл по винтовой линии радиусом $R = 2$ см с шагом $h = 5$ см. Определить скорость электрона.

10. Однородное электрическое ($E = 3$ В/см) и магнитное ($B = 10^{-4}$ Тл) направлены взаимно перпендикулярно. Каковы должны быть направление и величина скорости электрона, чтобы его траектория была прямолинейной?

11. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле напряженностью $H = 10$ кА/м. Найти период вращения электрона.

12. В однородном магнитном поле с напряженностью $H = 4$ кА/м перпендикулярно линиям напряженности движется электрон со скоростью $v = 10^6$ м/с. Найти силу, действующую со стороны магнитного поля на электрон и радиус окружности, по которой он движется.

13. Протон с кинетической энергией 1 МэВ влетает в однородное магнитное поле с индукцией 1 Тл перпендикулярно линиям индукции. Найти радиус окружности, по которой будет двигаться протон в магнитном поле.

14. Частица с зарядом $1,6 \cdot 10^{-10}$ Кл, прошедшая ускоряющую разность потенциалов 2 кВ, движется в однородном магнитном поле $B = 1$ мТл по окружности радиусом 0,01 м. Найти массу и скорость этой частицы.

15. Электрон влетает со скоростью $4 \cdot 10^7$ м/с в магнитное поле с индукцией 1 мТл перпендикулярно линиям индукции. Найти тангенциальное и нормальное ускорения электрона в магнитном поле.

16. Протон движется в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл перпендикулярно линиям индукции. Определить силу, действующую на протон со стороны магнитного поля, если радиус кривизны траектории равен 0,5 м.

17. Электрон движется по окружности радиусом 1 см в магнитном поле с индукцией 0,02 Тл. Какова кинетическая энергия электрона?

18. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 300 В, движется параллельно прямолинейному проводнику на расстоянии 4 мм от него. Какая сила действует на электрон со стороны проводника с током, если по проводнику течет ток силой 5 А?

19. Пучок электронов влетает в пространство, где возбуждено однородное электрическое поле с напряженностью 1 кВ/м и перпендикулярное ему магнитное поле с индукцией 1 мТл. Скорость электронов

постоянна и направлена перпендикулярно векторам E и B . Найти скорость движения электронов.

20. Электрон движется в однородном магнитном поле в вакууме перпендикулярно линиям магнитной индукции по окружности радиусом 10 см. Определить скорость движения электрона, если напряженность поля 160 А/м.

21. В однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл влетает электрон со скоростью 5000 км/с, направленной перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определить силу, действующую на электрон в магнитном поле и радиус окружности, по которой он движется.

22. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле со скоростью $v = 0,8c$ ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме). Магнитная индукция B поля равна 0,01 Тл. Определить радиус окружности, не учитывая и учитывая увеличение массы электрона со скоростью. Масса покоя электрона $9,11 \cdot 10^{-31}$ кг.

23. Заряженная частица движется по окружности радиусом $R = 1$ см в параллельных однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл и электрическом поле с напряженностью $E = 100$ В/м. Найти время, необходимое для увеличения вдвое кинетической энергии частицы под действием приложенного электрического поля.

24. Протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией 0,01 Тл со скоростью $v = 10^4$ м/с под углом 60° к линиям индукции. Определить радиус и шаг винтовой линии, по которой будет двигаться протон в магнитном поле. Масса покоя протона $1,672 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответы

1. $F = 8,10^{-16}$ Н; $R = 1$ мм. 2. $v = 10^6$ м/с. 3. $v = 2 \cdot 10^3$ м/с.
4. $q/m = 4,8 \cdot 10^9$ Кл/кг. 5. $a_n/a_\tau = 17600$. 6. $a_\tau = 0$; $a_n = 7 \cdot 10^{15}$ м/с².
7. $U = Blv = 0,55$ В. 8. $m_2 = (R_2/R_1)^2 m_1 = 27$ а.е.м. 9. $v = 8,05 \cdot 10^6$ м/с.
10. $v = 1543 \cdot 10^6$ м/с. 11. $T = 2,8 \cdot 10^{-9}$ с. 12. $F = 8 \cdot 10^{-16}$ Н; $R = 1,1$ мм.
13. $R = 0,14$ мм. 14. $m = 4 \cdot 10^{-24}$ кг; $v = 2 \cdot 10^8$ м/с. 15. $a_\tau = 0$; $a_n = 7 \cdot 10^{15}$ м/с².
16. $F = 8 \cdot 10^{-14}$ Н. 17. $W = 5,63 \cdot 10^{-16}$ Дж. 18. $F = 4 \cdot 10^{-16}$ Н. 19. $v = 10^6$ м/с.
20. $v = 3,53 \cdot 10^6$ м/с. 21. $F = 8 \cdot 10^{-5}$ Н; $R = 284$ мкм. 22. $R = 0,137$ м;
 $R = 0,228$ м. 23. $t = 10$ мкс. 24. $R = 0,009$ м; $h = 0,033$ см.

Закон Био-Савара-Лапласа

1. Провод изогнут в виде правильного шестиугольника со стороной $a = 10$ см. Найти индукцию B в центре, если по проводу течет ток $I = 25$ А.

2. По двум параллельным проводам текут токи $I_1 = 50$ А и $I_2 = 100$ А в противоположных направлениях. Расстояние между проводниками $d = 0,2$ м. Найти индукцию магнитного поля B в точке, удаленной от первого проводника на расстояние $r_1 = 0,25$ м и от второго на $r_2 = 0,4$ м.

3. По двум прямым проводам, расположенным в одной плоскости параллельно друг другу на расстоянии 5 см и одном направлении текут токи $I_1 = 5$ А и $I_2 = 10$ А. Определить положение прямой, в каждой точке которой индукция магнитного поля, создаваемого токами, равна нулю.

4. Из проволоки длиной 1 м сделана квадратная рамка. По рамке течет ток $I = 10$ А. Найти напряженность магнитного поля H в центре рамки.

5. По двум параллельным бесконечно длинным проводникам в одном направлении текут токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А. Расстояние между проводниками $d = 10$ см. Найти индукцию B магнитного поля в точке, удаленной от обоих проводников на расстояние $r = 10$ см.

6. По проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась индукция B магнитного поля в центре контура?

7. По контуру в виде равностороннего треугольника со стороной $a = 0,3$ м течет ток $I = 10$ А. Найти индукцию B магнитного поля в точке пересечения высот треугольника.

8. Индукция магнитного поля в точке, которая находится на расстоянии 4,5 см от прямолинейного бесконечно длинного проводника с током, равна 28 мТл. Найти напряженность поля в этой точке и силу тока в проводнике.

9. Напряженность магнитного поля, созданного прямолинейным током 12 А, в некоторой точке равна 12 А/м. Определить индукцию магнитного поля в этой же точке и расстояние от нее до проводника.

10. По тонкостенному цилиндру диаметром 2 см течет ток 10 А. Найти магнитную индукцию в центре цилиндра и на расстоянии 1 см от поверхности проводника.

11. По двум прямолинейным параллельным бесконечно длинным проводникам, расположенным в воздухе на расстоянии 3 м друг от друга, текут токи 24 и 12 А. Найти геометрические места точек, в которых

индукция магнитного поля равна нулю при одинаковых и противоположных направлениях токов в проводниках.

12. По двум длинным параллельным проводникам в противоположных направлениях текут токи по 6,28 А. Расстояние между проводниками 1 м. Найти напряженность поля в точке, удаленной от обоих проводников на такое же расстояние.

13. По двум длинным параллельным проводникам в одном направлении текут токи по 10 А. Расстояние между проводниками 1 м. Найти напряженность поля в точке, удаленной от обоих проводников на такое же расстояние.

14. По трем бесконечным прямолинейным параллельным проводникам, расположенным в воздухе на равных расстояниях 1 м друг от друга, текут одинаковые токи по 10 А. В двух проводниках направления токов совпадают, а в третьем ток течет в противоположном направлении. Найти напряженность и индукцию магнитного поля в точке, расположенной на одинаковом расстоянии от всех проводников.

15. Напряженность магнитного поля в центре кругового тока силой 12 А равна 12 А/м. Определить диаметр окружности, по которой течет ток и индукцию магнитного поля в центре.

16. Два проводника представляют собой концентрические окружности с радиусами 50 и 30 см. По наружному проводнику течет ток 10 А, по внутреннему — 6 А. Найти напряженность магнитного поля в центре окружностей при одинаковых и противоположных направлениях токов.

17. Найти напряженность магнитного поля в центре петли диаметром 1 м, образованной бесконечно длинным проводником с током 10 А.

18. Два круговых проводника одинакового радиуса с общим центром расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях. Магнитная индукция результирующего поля в центре $B_0 = 20$ мТл. Магнитная индукция поля первого проводника с током в этой же точке $B_1 = 16$ мТл. Определить магнитную индукцию поля второго проводника в центре и силу тока в нем. Ток в первом проводнике равен 8 А.

19. По двум длинным проводам, расположенным параллельно друг другу на расстоянии 5 м, текут в одном направлении токи 4 и 8 А. Определить напряженность поля в точке, отстоящей на 3 м от первого провода и на 4 м от второго.

20. По двум круговым виткам радиусом 5 и 10 см, плоскости которых взаимно перпендикулярны, а центры совпадают, текут одинаковые токи силой 1 А. Найти индукцию магнитного поля в центре витков.

21. Бесконечно длинный прямой проводник, по которому течет ток силой $I = 5$ А, согнут под прямым углом. Найти индукцию магнитного поля на расстоянии $a = 10$ см от вершины угла в точках, лежащих на биссектрисе прямого угла, и на продолжении одной из сторон.

Ответы

1. $B = \frac{\sqrt{3}\mu_0 J}{\pi a} = 173$ мкТл. 2. $B = 21$ мкТл. 3. $x = 1,7$ см. 4. $H = 17,8$ А/м.
 5. $B = 87,2$ мкТл. 6. $B_1/B_2 = 1,13$. 7. $B = 30$ мкТл. 8. $H = 22,3$ кА/м; $I = 6,3$ кА.
 9. $B = 15$ мкТл; $a = 0,16$ м. 10. $B_1 = 0$; $B_2 = 0,2$ мТл. 11. $x_1 = 2$ м; $x_2 = 5$ м.
 12. $H = 1$ А/м. 13. $H = 2,7$ А/м. 14. $H = 5,4$ А/м. 15. $d = 1$ м; $B = 15,1$ мкТл.
 16. $H_1 = 10$ А/м; $H_2 = 0$. 17. $H = 13,2$ А/м. 18. $B_2 = 12$ мТл; $I_2 = 6$ А.
 19. $H = 38,3$ А/м. 20. $B = 7$ мкТл. 21. $B_1 = 24$ мкТл; $B_2 = 5$ мкТл.

Закон Ампера

1. Провод в виде полукольца радиусом $R = 10$ см с током $I = 10$ А находится в магнитном поле с индукцией $B = 50$ мТл. Найти силу, действующую на провод, если плоскость полукольца перпендикулярна вектору магнитной индукции B .

2. По кольцу радиусом $R = 20$ см течет ток $I = 100$ А. Магнитное поле с индукцией $B = 20$ мТл перпендикулярно плоскости кольца. Найти силу, растягивающую кольцо.

3. По двум параллельным проводам длиной $l = 2$ м каждый, находящимся на расстоянии $d = 0,2$ м друг от друга, текут токи $I = 1$ кА. Найти силу взаимодействия проводников.

4. Провод в форме полукольца $R = 1$ м с током $I = 1$ А находится в магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Найти силу, действующую на провод, если плоскость полукольца перпендикулярна линиям индукции.

5. Найти силу, действующую на стержень с током $I_1 = 1$ А длиной 1 м, со стороны перпендикулярного провода с током 1 А, находящегося на расстоянии 15 см от провода до ближайшего конца стержня.

6. В магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл, направленном под углом 30° к вертикали, вертикально вверх движется стержень $m = 1$ кг с током 1 А. Найти длину проводника, если через 1 с после начала движения стержень имеет скорость 1 м/с.

7. Линейный проводник с током помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2$ Тл. Определить силу, действующую на проводник, если длина проводника $l = 10$ см, сила тока $I = 3$ А, а направление тока составляет с направлением поля угол $\alpha = 45^\circ$.

8. Между полюсами магнита на двух проволочках подвешен горизонтально проводник массой $m = 102$ г и длиной $l = 1$ м. Вектор индукции магнитного поля $B = 1$ Тл направлен вверх. Весь проводник находится в магнитном поле. На какой угол α от вертикали отклонятся проволочки, поддерживающие проводник, если по нему пропустить ток силой $I = 1$ А?

9. В горизонтальном магнитном поле находится проводник, расположенный горизонтально, его направление перпендикулярно магнитному полю. Какой ток должен идти через проводник, чтобы он висел, не падая, если индукция поля равна $B = 0,01$ Тл и вес проводника $P = 0,1$ Н на один метр длины?

10. Два кольца $R = 1$ м с токами 1 А расположены параллельно на расстоянии между центрами 1 м. Найти силу взаимодействия колец.

11. Прямолинейный проводник длиной 88 см расположен перпендикулярно к линиям магнитной индукции однородного поля. Чему равна магнитная индукция этого поля, если на проводник действует сила 1,6 Н при силе тока в нем 23 А?

12. В однородном магнитном поле с индукцией 1 Тл находится квадратный проводник длиной 1 м, на который действует сила 1 Н. Определить угол между стороной квадрата и направлением магнитного поля, если сила тока в проводнике 1 А.

13. На проводник в форме квадрата с током 1 А в однородном магнитном поле с индукцией 1 Тл действует сила 1 Н. Определить длину квадрата, если его сторона расположена под углом 45° к линиям магнитной индукции.

14. Прямолинейный проводник весом 1 Н и длиной 1 м горизонтально висит в однородном магнитном поле с напряженностью 100 кА/м, направленном под углом 30° к проводнику. Какова сила тока, протекающего по проводнику?

15. Квадратная рамка со стороной 1 м и током $I = 1$ А находится в магнитном поле $B = 1$ Тл. Найти минимальную и максимальную силу, растягивающую кольцо.

16. По трем бесконечно длинным параллельным проводам, находящимся на одинаковом расстоянии $a = 1$ м друг от друга, протекают одинаковые токи силой по 1 А. В двух проводах направления токов сов-

падают. Найти силу, действующую на каждый метр длины третьего провода.

17. Определить силу взаимодействия двух квадратных контуров со стороной 1 м и током 1 А, если расстояние между ними равно 1 м.

18. Линии индукции однородного магнитного поля перпендикулярны плоскости кольца диаметром $d = 0,4$ м с током $I = 100$ А. Индукция магнитного поля B равна 20 мТл. Найти силу, растягивающую кольцо.

19. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,02$ Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, расположено проволочное полукольцо длины $l = 3$ см, с током $I = 0,1$ А. Найти результирующую силу, действующую на полукольцо. Изменится ли сила, если проводник распрямить?

20. В однородное магнитное поле с индукцией 10 мТл в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции, помещены два параллельных бесконечных проводника на расстоянии 1 м друг от друга. По проводникам в противоположных направлениях текут токи по 10 А. Определить силы, действующие на единицу длины проводников.

Ответы

$F = 2BJR = 0,1$ Н. 2. $F = BIR = 0,4$ Н. 3. $F = 2$ Н. 4. $F = 2$ Н. 5. $F = 1 \cdot 10^{-7}$ Н. 6. $l = 21,6$ м. 7. $F = 42$ мН. 8. $\alpha = 45^\circ$. 9. $I = 10$ А. 10. $F = 1,26$ мкН. 11. $B = 0,07$ Тл. 12. $\alpha = 45^\circ$. 13. $l = 1,4$ м. 14. $I = 16$ А. 15. $F_1 = 2$ Н; $F_2 = 4$ Н. 16. $F = 34$ мкН. 17. $F = 0,8$ мкН. 18. $F = 0,4$ Н. 19. $F = 38$ мкН, увеличится в $\pi/2$ раз. 20. $F = 2$ мН.

Электромагнитная индукция

1. Проволочную рамку площадью 1 дм² и с сопротивлением 0,45 Ом вращают с угловой скоростью 100 с⁻¹ в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. Ось вращения рамки лежит в ее плоскости и перпендикулярна вектору магнитной индукции B . Какое количество теплоты выделяется в рамке за 1000 оборотов? Самоиндукцией пренебречь.

2. По прямолинейному проводнику длиной 0,08 м течет постоянный электрический ток силой 2 А. Проводник находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл и расположен перпендикулярно линиям его индукции. Под действием сил поля проводник переместился на расстояние 0,005 м. Найти работу сил поля.

3. Плоский проволочный контур в виде кольца диаметром 19,5 см находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл. Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. В контуре поддерживается неизменный электрический ток силой 10 А. Найти работу внешних сил по перемещению контура с током в область пространства, где отсутствует магнитное поле.

4. По проволочному витку диаметром 0,1 м течет постоянный электрический ток. Сила тока 20 А. Виток свободно установился в магнитном поле с индукцией 0,016 Тл. Какую работу необходимо совершить, чтобы повернуть виток на угол 90° вокруг оси, совпадающей с диаметром витка?

5. В однородном магнитном поле с индукцией 0,4 Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной 0,1 м. Частота вращения 16 об/с. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Чему равна разность потенциалов, возникающая на концах стержня?

6. Проволочная рамка площадью $0,01 \text{ м}^2$ содержит 10^8 витков тонкого провода. Сопротивление провода 12 Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление 20 Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл, совершая за одну секунду 8 оборотов. Найти максимальную мощность возникающего в рамке переменного электрического тока.

7. В однородном магнитном поле с индукцией 0,35 Тл равномерно вращается проволочная рамка, совершая за 1 секунду 8 оборотов. Рамка содержит 1500 витков. Площадь рамки 50 см^2 . Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Найти амплитудное значение ЭДС, возникающей в рамке.

8. Вычислить энергию магнитного поля соленоида, содержащего 1000 витков. В обмотке соленоида протекает электрический ток силой 1 А. Магнитный поток через поперечное сечение соленоида равен 0,1 мВб.

9. Обмотка тороида содержит 10 витков на каждый сантиметр. Сердечник немагнитный. По обмотке течет электрический ток силой 16 А. Найти объемную плотность энергии магнитного поля в тороиде.

10. Проволочная катушка, содержащая 1000 витков, помещена в магнитное поле, направленное вдоль оси катушки. Площадь поперечного сечения катушки 40 см^2 . Ее полное сопротивление 160 Ом. Обмотка катушки замкнута накоротко. Найти количество теплоты, выделяющейся в катушке за 1 с, если индукция магнитного поля изменяется со скоростью 10^{-3} Тл/с .

11. Проводник длиной 1 м скользит по рельсам, расположенным в плоскости, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля, с постоянной скоростью 10 м/с. Индукция магнитного поля 0,01 Тл. Концы рельсов замкнуты на сопротивление 2 Ом. Найти количество теплоты, выделяющейся на этом сопротивлении за 1 с. Сопротивлением рельсов и проводника пренебречь.

12. Проволочная рамка площадью 0,01 м² равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией 0,05 Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Сопротивление проводов рамки 0,01 Ом. Какое количество электричества протечет через рамку при повороте ее на угол от 60 до 90°. Угол отсчитывается между направлением вектора магнитной индукции и нормалью к плоскости рамки.

13. Ось плоской катушки, имеющей 1000 витков, расположена вдоль направления линий напряженности магнитного поля. Диаметр катушки 0,1 м. По катушке протекает электрический ток силой 0,5 А. Напряженность магнитного поля 16 А/м. Какую работу необходимо совершить, чтобы повернуть катушку на 180°?

14. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл перпендикулярно линиям индукции расположен плоский виток диаметром 0,1 м. По витку течет постоянный ток силой 6 А. Виток поворачивают на 90° вокруг оси, совпадающей с диаметром витка. Найти совершенную при этом работу.

15. В однородном магнитном поле с индукцией 2 Тл под углом 30° к линиям поля расположен прямолинейный проводник длиной 0,2 м. В проводнике течет постоянный ток силой 5 А. Найти работу перемещения проводника на расстояние 3 м в направлении, перпендикулярном линиям поля.

16. Прямолинейный проводник длиной 2 м и сопротивлением 5 Ом перемещается в однородном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл перпендикулярно линиям поля с постоянной скоростью 10 м/с. Проводник подключен к источнику с постоянной ЭДС, равной 3В и внутренним сопротивлением 1 Ом. Найти максимальную силу тока в проводнике.

17. Плоская квадратная катушка, со стороной 5,5 см, содержит 100 витков провода. Под действием протекающего в катушке переменного электрического тока с амплитудой 1 А она вращается в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. Катушка вращается с постоянной скоростью, совершая 60 об/с вокруг оси, проходящей в пло-

скости катушки через середины двух ее противоположных сторон. Ось вращения перпендикулярна линиям поля. Найти максимальную мгновенную мощность, потребляемую таким двигателем.

18. Квадратный проволочный виток со стороной $l = 0,2$ м пересекает участок однородного магнитного поля с постоянной скоростью $v = 14,4$ км/час. Индукция поля $B = 0,4$ Тл. Ширина этого участка значительно больше длины витка. Вектор скорости параллелен двум из четырех сторон витка и лежит в его плоскости. Линии поля составляют с плоскостью витка угол $\alpha = 30^\circ$. Электрическое сопротивление рамки $R = 1$ Ом. Найти количество теплоты Q , выделившейся в контуре.

19. В однородном магнитном поле с индукцией $0,5$ Тл по двум вертикальным проводящим стержням, замкнутым сверху сопротивлением $R = 2$ Ом, с постоянной установившейся скоростью скользит вниз прямолинейный проводник массой 10 г. Расстояние между стержнями $0,2$ м. Линии поля перпендикулярны плоскости, в которой находятся стержни и проводник. Чему равна скорость движения проводника и мощность, выделяющаяся на сопротивлении R ?

20. По прямоугольной проволочной рамке со сторонами длиной 4 см и 5 см протекает постоянный электрический ток. Рамка находится в однородном магнитном поле с индукцией $0,2$ Тл. Линии поля параллельны плоскости рамки. Найти: 1) работу, которую необходимо совершить для поворота рамки в положение, когда линии поля будут перпендикулярны ее плоскости; 2) силу тока в рамке. Известно, что момент сил, действующих на рамку в положении, когда угол между нормалью к ее плоскости и направлением вектора индукции магнитного поля составляет 30° , равен $2 \cdot 10^{-3}$ Н·м.

21. Металлический стержень длиной $0,3$ м и массой $0,5$ кг помещен между двумя горизонтальными направляющими, находящимися в однородном вертикальном магнитном поле. По стержню протекает постоянный электрический ток силой 50 А. Найти напряженность поля, необходимого для того, чтобы стержень мог равномерно перемещаться вдоль направляющих. Чему равна мгновенная мощность, потребляемая при перемещении проводника с постоянной скоростью $0,1$ м/с? Коэффициент трения стержня о направляющие $\mu = 0,2$.

22. Металлическое кольцо диаметром $0,2$ м вносят со скоростью 1 м/с в однородное магнитное поле. Электрическое сопротивление кольца равно 1 Ом. Индукция поля равна 2 Тл. Линии поля составляют с плоскостью кольца угол 30° . Найти совершаемую при этом работу.

23. Проволочное кольцо диаметром $0,1$ м расположено в однородном магнитном поле с индукцией 1 Тл так, что вектор индукции перпендикулярен плоскости кольца. Электрическое сопротивление кольца $0,1$ Ом. Определить среднюю ЭДС индукции, возникающую в кольце при повороте его на 90° за время $0,1$ с, и совершенную при этом работу.

24. В однородном магнитном поле с индукцией $0,1$ Тл расположен плоский проволочный виток. Площадь витка $0,1$ м². Сопротивление проводника 2 Ом. Плоскость витка перпендикулярна линиям поля. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, протекший через гальванометр при повороте рамки оказался равным $7,5$ мКл. На какой угол повернули виток?

25. Провод длиной $l = 0,1$ м находится в поле с индукцией $B = 1$ Тл. Сопротивление цепи $R = 0,4$ Ом. Какая мощность потребуется для того, чтобы двигать проводник перпендикулярно линиям индукции со скоростью $v = 20$ м/с?

26. В поле с индукцией $B = 0,35$ Тл с частотой $\nu = 480$ об/мин вращается рамка, состоящая из $N = 1500$ витков площадью $S = 50$ см². Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции, возникающую в рамке.

27. Индукция поля между полюсами генератора $B = 0,8$ Тл. Ротор имеет 100 витков площадью 400 см². Сколько оборотов в минуту делает якорь, если максимальное значение ЭДС индукции 200 В.

28. Кольцо радиусом $0,1$ м лежит на столе. Какое количество электричества протечет по кольцу, если его повернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца 1 Ом. Вертикальная составляющая магнитного поля Земли $B = 50$ мкТл.

29. Медный провод массой 1 г согнут в виде квадрата и концы его замкнуты. Квадрат помещен в магнитное поле с $B = 0,1$ Тл так, что его плоскость перпендикулярна линиям поля. Определить количество электричества, которое протечет по проводу, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию.

30. Переменное магнитное поле индуцирует в витке радиусом $R = 1$ м ЭДС $\mathcal{E} = kt^2$. Угол между нормалью к плоскости контура и вектором магнитной индукции равен $\alpha = 30^\circ$. Найти зависимость $B = f(t)$, если $B = 0$ при $t = 0$.

31. По цилиндрическому проводу радиусом $R = 1$ мм течет ток $I = 1$ А. Найти давление, которое испытывают стенки цилиндра.

32. Величина тока в катушке равномерно увеличивается на 0,1 А в 1 с. Катушка имеет 1000 витков длину 0,5 м и радиус 5 см. На катушку надето кольцо из медной проволоки площадью сечения 2 мм². Считая, что магнитные потоки, пронизывающие катушку и кольцо, в любой момент равны между собой, найти ток в кольце.

33. Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости. Рамку поступательно перемещают относительно провода со скоростью v . Найти ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x между рамкой и проводом.

34. Два витка расположены параллельно. Расстояние между их центрами $R = 6$ м и значительно больше их радиусов. Один из витков начали удалять от второго со скоростью $v = 1$ м/с так, что его центр стал перемещаться по прямой. Во сколько раз уменьшилась их взаимная индуктивность через 3 с после начала движения?

Ответы

1. $Q = 0,7$ Дж. 2. $A = 80$ мкДж. 3. $A = 3$ мДж. 4. $A = 2,5$ мДж.
 5. $U = 201$ мВ. 6. $P = 79$ Вт. 7. $\mathcal{E} = 132$ В. 8. $W = 50$ мДж. 9. $w = 161$ Дж/м³.
 10. $Q = 10^{-9}$ Дж. 11. $Q = 5$ мДж. 12. $q = 25$ мКл. 13. $W = 15,7$ мДж.
 14. $A = 4,7$ мДж. 15. $A = 3$ Дж. 16. $I = 2,16$ А. 17. $P = 11,4$ Вт.
 18. $Q = (2B^2vl^3/R)\sin^2\alpha = 1,3$ мДж. 19. $v = 20$ м/с; $P = 1,9$ Вт. 20. $A = 4$ мДж;
 $I = 10$ А. 21. $H = 84,5$ нА/м; $P = 0,1$ Вт. 22. $A = 5$ мДж. 23. $\mathcal{E} = 78,5$ мВ;
 $A = 6,2$ мДж. 24. 120° . 25. $P = 10$ Вт. 26. $E_{\max} = 2\pi vNBS = 132$ В.
 27. $v = 600$ об/мин. 28. $q = 3,14$ мкКл. 29. $Q = mB/16\rho D = 41,4$ мКл.
 30. $B = kt^3/3\pi R^2 \cos\alpha$. 31. $P = \mu_0 I^2/8\pi^2 R^2 = 1,6 \cdot 10^{-2}$ Па. 32. $I = 7,4 \cdot 10^{-4}$ А.
 33. $\mathcal{E} = 2\mu_0 I a^2 v/4\pi x(x+a)$. 34. $L_1/L_2 = 3,38$.

4. ОПТИКА

4.1. Элементы геометрической оптики

Главное условие применимости законов геометрической оптики сводится к малости длины световой волны по сравнению с размерами препятствий на пути ее распространения. Основным понятием геометрической оптики является *световой луч*. Это идеализация очень узкого светового пучка, указывающего направление распространения света. Пучки света рассматриваются как совокупности бесконечного числа независимых лучей. Ниже приведены формулировки основных законов геометрической оптики.

1. В прозрачной однородной среде свет распространяется прямолинейно.

2. Распространение светового пучка в среде не зависит от наличия других пучков света.

3. Луч, падающий на плоскую границу раздела двух однородных изотропных прозрачных сред (S_1 , рис. 4.1), отраженный луч (S_3) и нормаль (N), восстановленная к границе раздела в точке падения луча S_1 , лежат в одной плоскости (*плоскость падения*). Угол падения (φ_1) равен углу отражения (φ_3).

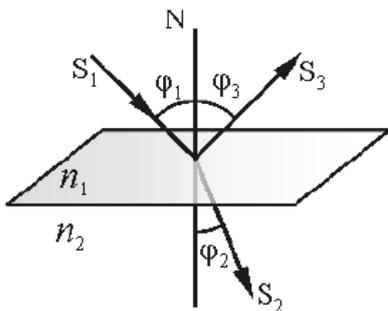


Рис. 4.1. Преломление и отражение света на границе раздела двух сред с абсолютными показателями преломления n_1 и n_2

4. Луч, падающий на границу раздела двух однородных изотропных прозрачных сред (S_1 , рис. 4.1), преломленный луч (S_2) и нормаль N , восстановленная к границе раздела в точке падения луча S_1 , лежат в одной плоскости. Углы падения φ_1 и преломления φ_2 для монохроматического света связаны соотношением $n_1 \cdot \sin \varphi_1 = n_2 \cdot \sin \varphi_2$, где n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления сред (закон Снеллиуса).

Закон прямолинейного распространения света нарушается и понятие светового луча утрачивает смысл, если свет проходит через малые отверстия или вблизи препятствий, размеры которых сравнимы с длиной волны. Таким образом, геометрическая оптика, опирающаяся на представление о световых лучах, есть предельный случай волновой оптики, когда длина волны $\lambda \rightarrow 0$.

Физический смысл показателя преломления n — это отношение скорости распространения v_1 волн в первой среде к скорости их распространения v_2 во второй среде. Показатель преломления n называют *относительным*, если речь идет о двух средах со скоростями распространения света меньше, чем в вакууме. Показатель преломления среды относительно вакуума называют *абсолютным показателем преломления*. Абсолютный показатель преломления равен отношению скорости света c в вакууме к скорости света v в среде. Относительный показатель преломления двух сред равен отношению их абсолютных показателей преломления $n = n_2/n_1$. Законы отражения и преломления находят объяснение в волновой физике. Согласно волновым представлениям, преломление является следствием

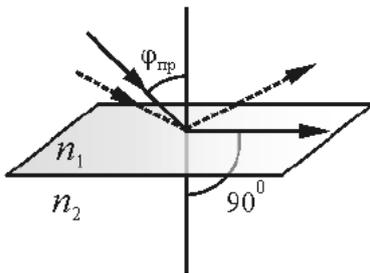


Рис. 4.2. Полное внутреннее отражение света

изменения скорости распространения волн при переходе из одной среды в другую.

При сравнении двух прозрачных веществ то из них, которое имеет больший абсолютный показатель преломления, называют «оптически более плотным». Когда свет распространяется из оптически более плотной среды в оптически менее плотную ($n_1 > n_2$), угол преломления оказывается больше угла падения (рис. 4.2).

При достижении углом падения φ_1 значения $\varphi_{\text{пр}} = \arcsin(n_2/n_1)$, угол φ_2 становится равным 90° . Этот угол падения называется *предельным*. Если свет падает на границу раздела сред под углом больше предельного (то есть $\varphi_{\text{пр}} < \varphi_1 < \pi/2$), свет во вторую среду не проникает. Такое явление называется *полным внутренним отражением* света.

Оптические системы. Построение оптических изображений

Оптическую систему, образованную сферическими отражающими и преломляющими поверхностями, называют *центрированной*, если центры кривизны всех поверхностей лежат на одной прямой. Эта прямая называется *главной оптической осью* системы.

Если пучок лучей, исходящих из точки S , после прохождения оптической системы сходится в точке S_i , то S_i является стигматическим (то есть точечным) изображением точки S , а точки S и S_i называют сопряженными. Оптическую систему можно считать идеальной, если она дает стигматическое изображение, геометрически подобное отображенному предмету. Рассмотрение построения изображений значительно упрощается, когда все лучи *параксиальны*, то есть проходят на небольшом расстоянии от оптической оси системы и образуют с ней малые углы.

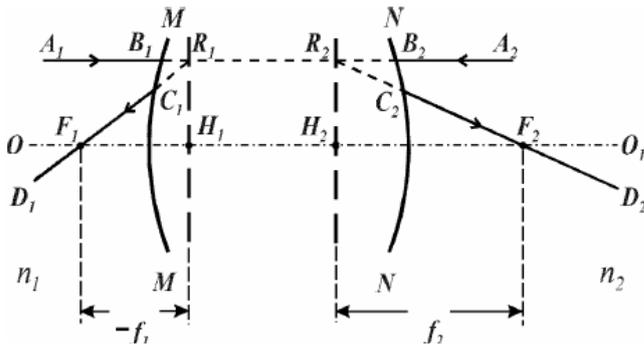


Рис. 4.3. Кардинальные точки и плоскости центрированной оптической системы

Центрированная оптическая система характеризуется *кардинальными* точками и плоскостями, задание которых полностью описывает все ее свойства. Можно пользоваться ими, не рассматривая реального хода лучей. На рис. 4.3 изображена система, ограниченная сферическими поверхностями MM и NN .

Если на эту систему направить луч A_1B_1 , параллельный *главной оптической оси* OO_1 , сопряженный ему луч выйдет из системы по направлению C_2D_2 и пересечет главную оптическую ось в точке F_2 — *заднем главном фокусе системы*. Плоскость, проходящая через F_2 и перпендикулярная главной оптической оси OO_1 , называется *фокальной*. Точно так же луч A_2B_2 при прохождении через систему пересечет ось OO_1 в точке F_1 — *переднем главном фокусе*. Лучи, исходящие из точек F_1 и F_2 , после системы будут идти параллельно главной оптической оси. Продолжения лучей A_1B_1 и D_1C_1 (A_2B_2 и D_2C_2) пересекаются в точке R_1 (R_2). Плоскости, проходящие через точки R_1 и R_2 и перпендикулярные оптической оси, носят названия *главных плоскостей*, а точки H_1 и H_2 — *главных точек*. Точки H_1 , H_2 , F_1 и F_2 являются *кардинальными* точками *центрированной оптической системы*. Расстояния от главных точек до фокусов $f_1 = H_1F_1$ и $f_2 = H_2F_2$ называются *фокусными расстояниями* системы. Главный фокус может лежать как слева, так и справа от соответствующей главной точки. Чтобы отличать эти два случая, необходимо пользоваться *правилом знаков*: если отсчет отрезков производится от главных точек к фокусу *против* хода луча, то фокусное расстояние равно длине отрезка, умноженного на -1 , если *по* ходу луча, то на $+1$. В соответствии с этим на рис. 4.3 фо-

кусное расстояние f_1 — отрицательная величина, а f_2 — положительная. Обратим внимание, что на рисунках указываются *длины* отрезков, то есть модули соответствующих величин (например, $-f_1, f_2$, рис. 4.3). Число кардинальных точек в общем случае равно четырем. В некоторых частных случаях их число уменьшается, например, в тонкой линзе обе

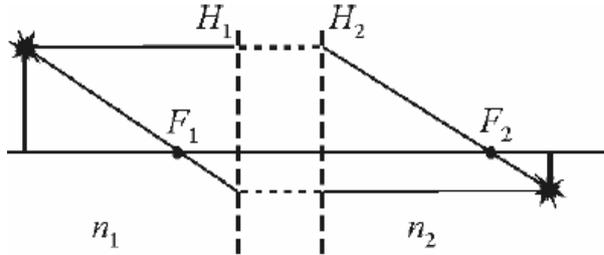


Рис. 4.4. Ход лучей в центрированной оптической системе

главные плоскости сливаются в одну.

Рис. 4.4 дает представление о том, как геометрическим построением найти изображение предмета, используя кардинальные элементы *центрированной оптической системы*.

Построение изображений в зеркалах

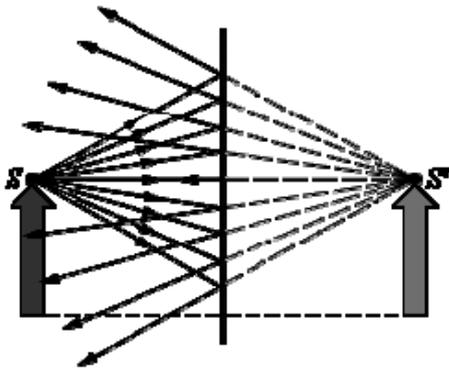


Рис. 4.5. Ход лучей при отражении от плоского зеркала. Точка S' является мнимым изображением точки S

Простейшим оптическим устройством, способным создавать изображения предметов, является плоское зеркало. Изображение формируется за счет лучей, отраженных от зеркальной поверхности. Оно является *мнимым*, так как после отражения от зеркала пересекаются не сами лучи, а их продолжения. Мнимое изображение имеет те же размеры, что и предмет, и располагается за зеркалом симметрично по отношению к его поверхности, на таком же расстоянии от зеркала, как и предмет перед зеркалом (рис. 4.5).

Сферическим зеркалом называют зеркальную отражающую поверхность, которая имеет форму сферического сегмента. Центр сферы, называют оптическим центром зеркала. Вершину сферического сегмента называют полюсом. Прямая, проходящая через оптический центр и полюс зеркала, называется главной оптической осью. Ее выделяют из всех других прямых, проходящих через оптический центр, только потому, что она является осью симметрии зеркала.

Сферические зеркала бывают вогнутыми и выпуклыми. Если на вогнутое сферическое зеркало падает пучок лучей, параллельный главной оптической оси, то после отражения от зеркала лучи пересекутся в

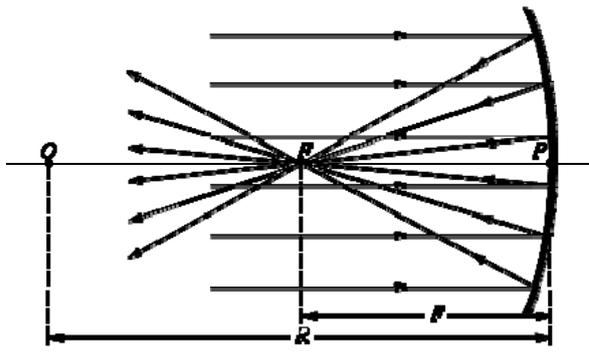


Рис. 4.6. Отражение параллельного пучка лучей от вогнутого сферического зеркала. Точки O – оптический центр, P – полюс, F – главный фокус зеркала; OP – главная оптическая ось, R – радиус кривизны зеркала

точке, которая называется главным фокусом зеркала F . Расстояние от фокуса до полюса зеркала называют фокусным расстоянием и обозначают той же буквой F . У вогнутого сферического зеркала главный фокус действительный. Он расположен посередине между центром и полюсом зеркала (рис. 4.6).

Следует отметить, что отраженные лучи пересекаются приблизительно в одной точке в том случае, если падающий параллельный пучок достаточно узкий (параксиальный пучок).

Главный фокус *выпуклого зеркала* является мнимым. Если на выпуклое зеркало падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси, то после отражения в фокусе пересекутся не сами лучи, а их продолжения (рис. 4.7).

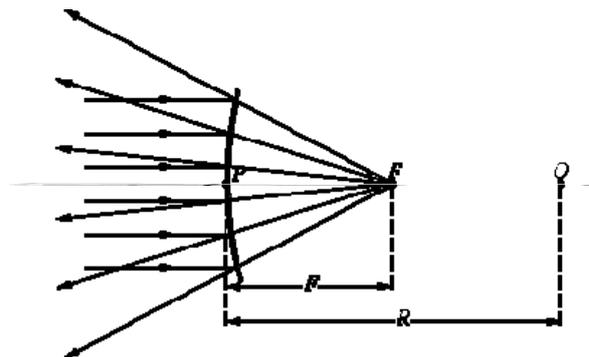


Рис. 4.7. Отражение параллельного пучка лучей от выпуклого зеркала.

F – мнимый фокус зеркала, O – оптический центр; OP – главная оптическая ось

фокусе пересекутся не сами лучи, а их продолжения (рис. 4.7).

Фокусным расстояниям сферических зеркал приписывается определенный знак: для вогнутого зеркала $F=R/2$, а для выпуклого $F=-R/2$, где R – радиус кривизны зеркала. Для построения изображения некоторой точки A предмета в сферическом зеркале можно использовать любую пару «стандартных» лучей:

- луч AOC , проходящий через оптический центр зеркала; отраженный луч COA идет по той же прямой;
- луч AFD , идущий через фокус зеркала; отраженный луч идет параллельно главной оптической оси;
- луч AP , падающий на зеркало в его полюсе; отраженный луч симметричен относительно главной оптической оси с падающим;
- луч AE , параллельный главной оптической оси; отраженный луч EFA_1 проходит через фокус зеркала.

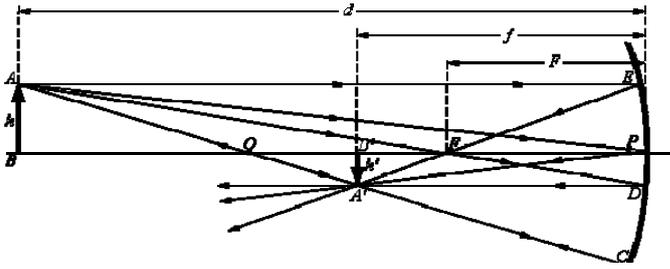


Рис. 4.8. Построение изображения в вогнутом сферическом зеркале

На рис. 4.8 все эти лучи изображены для вогнутого зеркала. Лучи проходят через точку A' , которая является изображением точки A . Любой другой луч, исходящий из этой точки также пройдет через точку A' . Ход лучей, при котором все лу-

чи, вышедшие из одной точки, собираются в другой точке, называется *стигматическим*. Отрезок $A'B'$ является изображением предмета AB . Аналогичным образом производится построения для выпуклого зеркала.

Положение изображения и его размер можно также определить с помощью *формулы сферического зеркала*:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Здесь d – расстояние от предмета до зеркала, f – расстояние от зеркала до изображения. Величины d и f подчиняются правилу знаков: $d > 0$ и $f > 0$ – для действительных предметов и изображений; $d < 0$ и $f < 0$ – для мнимых предметов и изображений. Для случая, изображенного на рис. 4.8, имеем: $F > 0$ (зеркало вогнутое); расстояние от зеркала до предмета $d = 3F > 0$ (действительный предмет). По формуле сферического зеркала получаем, что расстояние от зеркала до изображения $f = (3/2)F > 0$. Следовательно, изображение действительное. Если бы вместо вогнутого было выпуклое зеркало с тем же по модулю фокусным расстоянием, мы получили $f = -3/4F < 0$, а $d = -3F > 0$. То есть в этом случае изображение мнимое.

Линейное увеличение сферического зеркала Γ определяется как отношение линейных размеров изображения h' и предмета h . Величине изображения h' обычно приписывается знак в зависимости от того, является изображение прямым ($h' > 0$) или перевернутым ($h' < 0$). Величина h всегда положительна. Линейное увеличение сферического зеркала находят по формуле

$$\Gamma = \frac{h'}{h} = -\frac{f}{d}.$$

В рассмотренных примерах для первого случая $\Gamma = -1/2 < 0$, то есть изображение перевернутое и уменьшенное вдвое. Во втором случае $\Gamma = 1/4 > 0$, значит изображение прямое и уменьшенное в 4 раза.

Построение изображений в линзах

Линза – это оптическая система, состоящая из двух преломляющих поверхностей, которые разделены оптически однородным промежутком. Линзу называют *тонкой*, если толщина этого промежутка много меньше радиусов кривизны преломляющих поверхностей. Главные и узловые плоскости тонкой линзы совпадают друг с другом, и пересечение этой плоскости с оптической осью называется оптическим центром линзы. *Линзы* бывают собирающими и рассеивающими, они входят в состав практически всех оптических приборов. Основное свойство линз – способность давать изображения предметов. Изображения бывают прямыми и перевернутыми, действительными и мнимыми, увеличенными и уменьшенными. Для построения *изображения* в линзе обычно используется пара лучей, ход которых заранее известен.

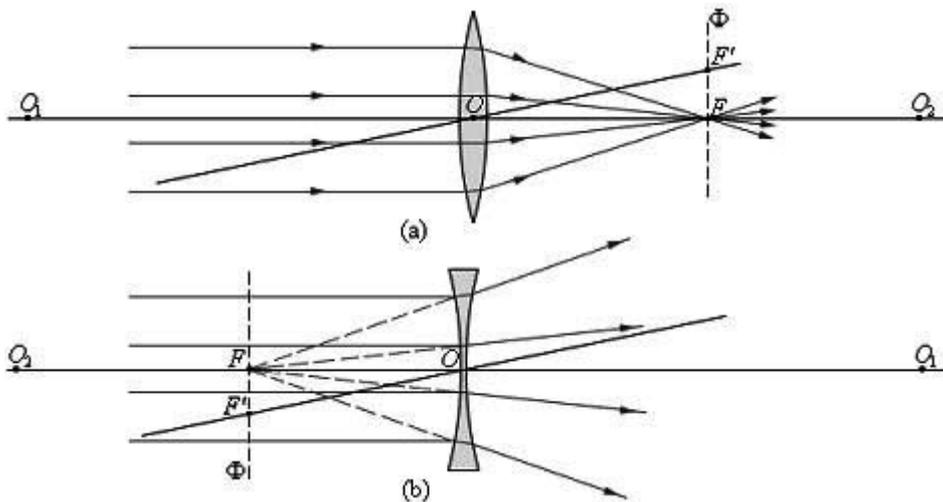


Рис. 4.9. Преломление параллельного пучка лучей в собирающей (а) и рассеивающей (б) линзах. Точки O_1 и O_2 – центры сферических поверхностей, O_1O_2 – главная оптическая ось, O – оптический центр, F – главный фокус, F' – побочный фокус, OF' – побочная оптическая ось, Φ – фокальная плоскость

Рассмотрим основные элементы оптической системы, характерные для тонких линз, они приведены на рис. 4.9. Прямая, проходящая через центры кривизны O_1 и O_2 сферических поверхностей, называется главной оптической осью линзы. Для тонких линз можно считать, что главная оптическая ось пересекается с линзой в одной точке, которую называют оптическим центром линзы, это точка O . Световой луч проходит через оптический центр, не отклоняясь от первоначального направления. Все прямые, проходящие через оптический центр, называются побочными оптическими осями. Если на линзу направить пучок лучей,

параллельных главной оптической оси, то после прохождения через линзу лучи (или их продолжения) соберутся в одной точке F , которая называется главным фокусом линзы. У тонкой линзы имеется два главных фокуса, симметрично расположенных относительно линзы на главной оптической оси. Фокусы собирающих линз являются действительными, а рассеивающих – мнимыми. Пучки лучей, параллельных одной из побочных оптических осей, также фокусируются после прохождения через линзу в точку F' , которая расположена при пересечении побочной оси с *фокальной плоскостью* Φ , то есть плоскостью перпендикулярной главной оптической оси и проходящей через главный фокус (рис. 4.9). Расстояние между оптическим центром линзы O и главным фокусом F называется фокусным расстоянием. Оно обозначается той же буквой F .

Для построения *изображений* используют «стандартные» лучи, ход которых известен. Это лучи, проходящие через оптический центр или один из фокусов линзы, а также лучи, параллельные главной или одной

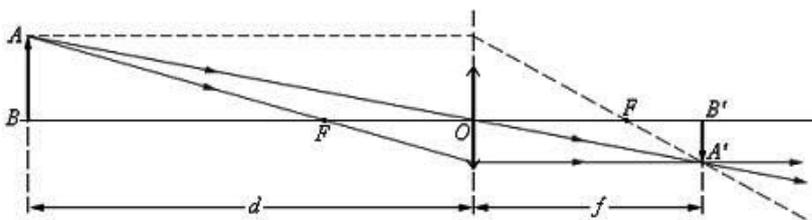


Рис. 4.10. Построение изображения в собирающей линзе

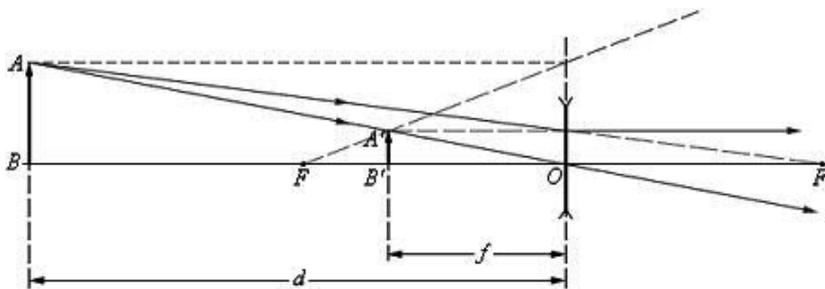


Рис. 4.11. Построение изображения в рассеивающей линзе

из побочных оптических осей. Примеры таких построений представлены на рис. 4.10 и 4.11. Некоторые из используемых здесь лучей не проходят через линзу. То есть в создании изображения они не участвуют, но, тем не менее, могут быть использованы для построений.

Положение изображения можно также оценить с помощью формулы тонкой линзы. Если расстояние от предмета до линзы обозначить через d , а расстояние от линзы до изображения через f , то формулу тонкой линзы можно записать в виде

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = D.$$

Величину D , обратную фокусному расстоянию, называют *оптической силой* линзы. Единицей измерения оптической силы является *диоптрия* (дптр). Линза с фокусным расстоянием 1 м имеет оптическую силу в одну диоптрию, то есть $1 \text{ дптр} = \text{м}^{-1}$. Формула тонкой линзы аналогична формуле сферического зеркала. Для параксиальных лучей ее можно получить из подобия треугольников на рис. 4.10 или 4.11. Фокусным расстояниям линз приписывают знаки: у собирающей линзы $F > 0$, у рассеивающей $F < 0$. Величины d и f также подчиняются правилу знаков: $d > 0$ и $f > 0$ – для действительных предметов (реальных источников света, а не продолжений лучей, сходящихся за линзой) и изображений; $d < 0$ и $f < 0$ – для мнимых источников и изображений. Для случая, изображенного на рис. 4.10, $F > 0$ (линза собирающая), $d = 3F > 0$ (действительный предмет). Таким образом, из формулы тонкой линзы следует, что $f = (3/2)F > 0$. Следовательно, изображение действительное. Для случая, изображенного на рис. 4.11, $F < 0$ (линза рассеивающая), действительный предмет *имеет* $d > 0$ (в данном случае $d = 2|F|$), $f = -(3/2)F < 0$, то есть изображение мнимое.

От положения предмета по отношению к линзе зависят линейные размеры изображения. Линейным увеличением линзы Γ называют отношение линейных размеров изображения h' к соответствующим линейным размерам предмета h . Величине h' , как и для сферического зеркала, приписывают знаки плюс или минус в зависимости от того, является изображение прямым или перевернутым. Величина h всегда считается положительной. В результате для прямых изображений $\Gamma > 0$, а для перевернутых $\Gamma < 0$. Из подобия треугольников на рис. 4.10 и рис. 4.11 можно получить формулу для линейного увеличения тонкой линзы:

$$\Gamma = \frac{h'}{h} = -\frac{f}{d}.$$

В примере с собирающей линзой (рис. 4.10) $f = (3/2)F > 0$ и $d = 3F > 0$, следовательно, $\Gamma = -1/2 < 0$, изображение перевернутое и уменьшенное в 2 раза. В примере с рассеивающей линзой (рис. 4.11): $d = 2|F| > 0$, $f = -(3/2)|F| < 0$; следовательно, $\Gamma = 1/3 > 0$. Изображение прямое и уменьшенное в 3 раза.

Оптическая сила D линзы зависит от радиусов кривизны R_1 и R_2 ее сферических поверхностей и от показателя преломления n материала по отношению к окружающей среде. Эта зависимость определяется соотношением

$$D = \frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Радиус кривизны выпуклой поверхности считается положительным, а вогнутой – отрицательным.

Если свет от предмета последовательно проходит через две или более линз, изображение, даваемое первой линзой, служит предметом (действительным или мнимым) для второй линзы, которая создает второе изображение предмета. Это второе изображение может быть как действительным, так и мнимым. Расчет оптической системы из двух тонких линз сводится к двукратному применению формулы линзы, при этом расстояние d_2 от первого изображения до второй линзы следует положить равным величине $l - f_1$, где l – расстояние между линзами. Рассчитанная по формуле линзы величина f_2 определяет положение второго изображения и его характер ($f_2 > 0$ – действительное изображение, $f_2 < 0$ – мнимое изображение). Общее линейное увеличение Γ системы из двух линз равно произведению линейных увеличений обеих линз: $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$. Если предмет или его изображение находятся в бесконечности, то линейное увеличение утрачивает смысл.

Рассмотрим отдельно лучи, обычно используемые для *построения изображений*. Для построения изображения точки, не лежащей на главной оптической оси, можно использовать любые два из трех указанных ниже лучей.

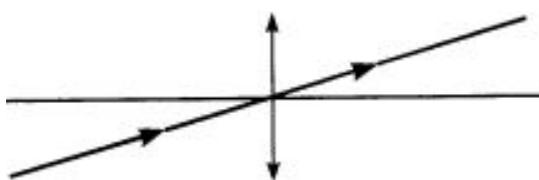


Рис. 4.12. Луч, проходящий через оптический центр

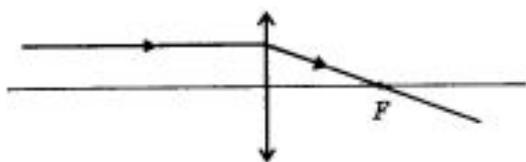


Рис. 4.13. Луч, параллельный главной оптической оси собирающей линзы

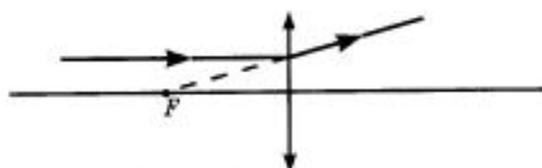


Рис. 4.14. Луч, параллельный главной оптической оси рассеивающей линзы

ной оптической оси, можно использовать любые два из трех указанных ниже лучей.

- Луч, проходящий через оптический центр, после прохождения через линзу он не изменяет направления (рис. 4.12).
- Луч, параллельный главной оптической оси, после прохождения через собирающую линзу идет через фокус, расположенный по другую сторону линзы (рис. 4.13). После прохождения через рассеивающую линзу, через фокус, расположенный по ту же сторону линзы, откуда падает луч, проходит продолжение луча (рис. 4.14).
- Луч, идущий через «ближний» фокус (для собирающей линзы) или направленный так, что его продолжение проходит через «дальний»

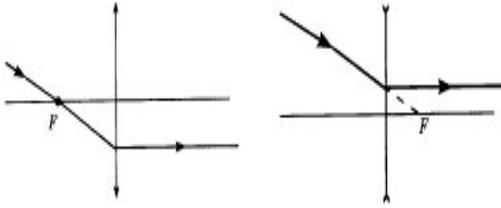


Рис. 4.15. Лучи в собирающей и рассеивающей линзах, после преломления идущие параллельно главной оптической оси

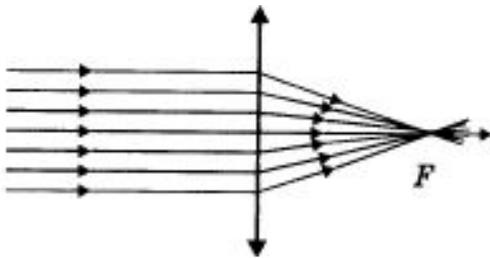


Рис. 4.16. Падающий пучок параллелен главной оптической оси, лучи после прохождения линзы собираются в ее главном фокусе

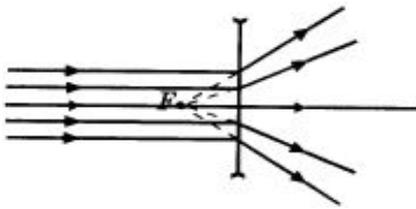


Рис. 4.17. Падающий пучок параллелен главной оптической оси, продолжения лучей после прохождения линзы собираются в ее главном фокусе

фокус (для рассеивающей линзы), после прохождения через линзу идет параллельно главной оптической оси (рис. 4.15).

В *собирающей линзе* параллельный пучок лучей после прохождения через линзу становится сходящимся. Если падающий пучок параллелен главной оптической оси, лучи после прохождения линзы собираются в ее главном фокусе (рис. 4.16).

В *рассеивающей линзе* параллельный пучок лучей после прохождения через линзу становится расходящимся. Если падающий пучок параллелен главной оптической оси, то после прохождения линзы лучи идут так, что их продолжения проходят через фокус, расположенный с той стороны линзы, откуда падает параллельный пучок (рис. 4.17).

Основные расчетные формулы

Закон Снеллиуса $n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \sin \beta_1$, где n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления сред. Предельный угол полного внутреннего отражения $\alpha = \arcsin(n_2/n_1)$. Формула тонкой линзы и вогнутого зеркала

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = D.$$

Линейное увеличение тонкой линзы:

$$\Gamma = \frac{h'}{h} = -\frac{f}{d}.$$

Оптическая сила D линзы

$$D = \frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Примеры решения задач

Пример 1. Скорость распространения света в некоторой среде равна $1,5 \cdot 10^8$ м/с. Определить предельный угол полного внутреннего отражения при переходе луча света из данной среды в воздух.

Решение. Запишем закон преломления для границы двух сред с абсолютными показателями преломления n_1 и n_2 :

$$\sin\alpha/\sin\beta = n_2/n_1. \quad (1)$$

Поскольку по условию задачи для данного угла падения α наблюдается явление полного внутреннего отражения, то угол преломления β равен 90° , а $\sin 90^\circ = 1$, и уравнение примет вид:

$$\sin\alpha = n_2/n_1. \quad (2)$$

Абсолютный показатель преломления среды показывает, во сколько раз скорость распространения света в вакууме больше скорости распространения света в данной среде, поэтому:

$$n_1 = c/v_1; \quad n_2 = c/v_2. \quad (3)$$

Подставим (3) в (2):

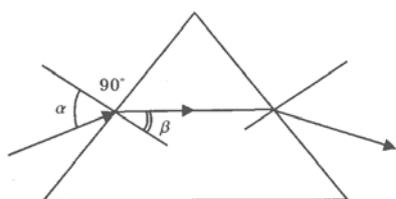
$$\sin\alpha = v_1/v_2. \quad (4)$$

Так как свет в воздухе ($n_2 = 1$) распространяется со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, то уравнение запишется так: $\sin\alpha = v_1/c = 0,5$; $\alpha = 30^\circ$.

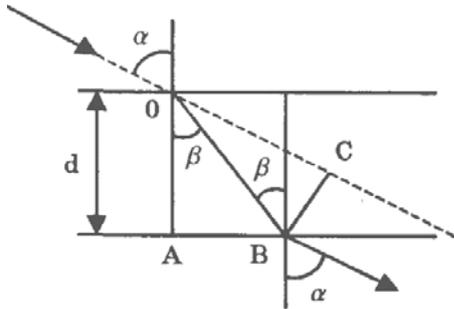
Пример 2. При падении на плоскую границу двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 свет частично отражается, частично преломляется. При каком угле падения α отраженный луч перпендикулярен преломленному?

Решение. По закону преломления $\sin\alpha/\sin\beta = n_2/n_1$. По условию задачи $\alpha + \beta = \pi/2$, следовательно, $\cos\alpha = \sin\beta$. Окончательно получим, $\alpha = \arctg n_2/n_1$.

Пример 3. Сечение призмы представляет собой равносторонний треугольник. Луч проходит сквозь призму, преломляясь в точках, равностоящих от вершины. Каково наибольшее допустимое значение показателя преломления n вещества линзы?



Решение. Из рисунка видно, что угол $\beta = 30^\circ$, тогда $\sin\beta = 1/2$. Поскольку угол падения α может меняться от нуля до 90° , его синус может меняться от нуля до 1. Таким образом, наибольшее допустимое значение показателя преломления находится из условия $1/\sin\beta = n$. Поэтому $n = 2$.



Пример 4. Определить смещение луча x при прохождении через стеклянную плоскопараллельную пластину толщиной $0,1$ м, если угол падения луча $\alpha = 70^\circ$. Показатель преломления стекла $n = 1,5$.

Решение. Из рисунка видно, что $BC = x$; $x = OB \sin(\alpha - \beta)$; $OB = d / \cos \beta$. Таким образом,

$$x = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}.$$

Пример 5. Расстояние от предмета до собирающей линзы в 5 раз больше фокусного расстояния линзы. Во сколько раз изображение будет меньше предмета?

Решение. Формула линзы $1/F = 1/5F + 1/f$. Тогда $b = 5F/4$, $\Gamma = 1/4$; размеры изображения в 4 раза меньше размеров предмета.

Пример 6. Расстояние от предмета до линзы и от линзы до изображения одинаковы и равны $0,5$ м. Во сколько раз увеличится изображение, если сместить предмет на расстояние $l = 20$ см по направлению к линзе?

Решение. Используем формулу линзы: $1/F = 1/d + 1/f$.

Учитывая, что $d = f$, получаем: $F = d/2$. Применим формулу линзы для нового положения:

$$2/d = 1/(d - l) + 1/f_2; f_2 = d(d - l)/(d - 2l); \Gamma = d/(d - 2l) = 5.$$

Изображение увеличилось в 5 раз.

Пример 7. Расстояние между свечой и экраном $L = 3,75$ м. Между ними помещается собирающая линза, которая дает на экране резкое изображение свечи при двух положениях линзы. Определить фокусное расстояние F линзы, если расстояние между указанными положениями линзы $l = 0,75$ м.

Решение. Первое положение линзы $1/d_1 + 1/f_1 = 1/F$, $d_1 + f_1 = L$. При втором положении линзы $1/d_2 + 1/f_2 = 1/F$, $d_2 + f_2 = L$, $d_1 - d_2 = l$. Тогда $1/d_1 + 1/(L - d_1) = 1/(d_1 - l) + 1/(L + l - d_1)$, получим $d_1 = (L + l)/2$. Окончательно $F = (L^2 - l^2)/4L = 0,9$ м.

Пример 8. Над озером взлетела красная ракета ($\lambda = 0,7$ мкм). Какова длина волны λ_1 этого света в воде? Какой цвет увидит аквалангист, плывущий под водой? Показатель преломления красных лучей для воды $1,33$.

Решение. Так как $\lambda = c/v$, $n = c/v$, то $\lambda_1 = \lambda/n = 0,526$ мкм; красный цвет.

Задачи для самостоятельного решения

1. Лампочка находится в воде на глубине 1 м. На поверхности воды плавает диск так, что его центр находится над лампочкой. Определить, при каком минимальном радиусе диска свет от лампочки не будет выходить из воды.

2. Луч света падает под углом 30° на поверхность трехслойной среды: воздух, стекло, вода. Толщина каждого слоя 5 см. Найти боковое смещение луча после прохождения среды.

3. Найти положение изображения объекта, расположенного на расстоянии 4 см от поверхности стеклянной пластины толщиной 3 см, задняя поверхность которой посеребрена.

4. Изображение предмета на светочувствительном слое фотоаппарата с расстояния 10 м получилось высотой 6 см, а с расстояния 6 м — 10,5 см. Найти фокусное расстояние объектива.

5. Расстояние от предмета до переднего фокуса втрое меньше, чем от изображения до заднего фокуса. Определить, как изменится расстояние между предметом и изображением, если предмет подвинуть на 1 м к линзе с фокусным расстоянием 1 м.

6. Высота изображения равна $h_1 = 18$ мм при расстоянии между предметом и изображением $l_1 = 1,5$ м, и $h_2 = 40$ мм при $l_2 = 4,5$ м. Найти фокус линзы и размер предмета.

7. Из стеклянной пластины изготовлены три линзы. Фокусное расстояние линз 1 и 2, сложенных вместе, равно F' , а линз 2 и 3 — F'' . Найти фокусное расстояние каждой линзы.

8. Две собирающие линзы с $F_1 = 0,2$ м и $F_2 = 0,15$ м, составленные вместе, дают четкое изображение на экране. Определить, как надо передвинуть экран для получения четкого изображения предмета, если линзы раздвинуть на 10 см.

9. Собирающая линза, радиусы кривизны поверхностей которой $R_1 = 15$ см и $R_2 = 25$ см, дает действительное изображение предмета на расстоянии 50 см от линзы, если предмет находится на расстоянии 25 см от линзы. Найти показатель преломления материала линзы и ее оптическую силу. Линза находится в воздухе.

10. Собирающие линзы с $F_1 = 0,12$ м и $F_2 = 0,15$ м находятся на расстоянии $l = 0,36$ м. Определить, на каком расстоянии l_2 от второй линзы получится изображение предмета, если он стоит на расстоянии $l_1 = 0,48$ м от первой линзы.

11. Стеклянная линза имеет оптическую силу $D = 5$ дп, при погружении в жидкость с показателем n_2 она действует как рассеивающая с $F = 1$ м. Найти n_2 .

12. Плосковыпуклая стеклянная линза с зеркальной плоской стороной имеет фокусное расстояние $F_1 = 1$ м. Найти фокусное расстояние линзы, если посеребрить выпуклую сторону.

13. Двояковыпуклая стеклянная линза с $n = 1,6$ имеет фокус $F = 10$ см. Найти фокус линзы, если ее поместить в среду с $n_1 = 1,5$.

14. На плоскую стеклянную пластину $d = 1$ см падает луч под углом $\alpha = 60^\circ$. Первый луч отражается от верхней грани, а второй от нижней и выходит обратно в воздух параллельно первому лучу. Найти расстояние между лучами.

15. Расстояние от предмета до переднего фокуса в три раза меньше, чем от изображения до заднего фокуса. Определить, как изменится расстояние между предметом и изображением, если предмет приблизить на 3 м к линзе с фокусным расстоянием 2 м.

16. Найти фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала, сделанное из двояковыпуклой линзы с посеребренной поверхностью и радиусом кривизны $R = 40$ см.

17. Определить, на каком расстоянии d от вогнутого зеркала с фокусом $F = 60$ см надо поставить предмет, чтобы получить мнимое изображение с увеличением в 4 раза.

18. Определить, на каком расстоянии d от вогнутого зеркала с фокусом F надо поставить предмет, чтобы получить действительное изображение с увеличением в n раз.

19. Определить, на каком расстоянии d от выпуклого зеркала с фокусом $F = 20$ см надо поставить предмет, чтобы получить мнимое изображение с уменьшением в 2 раза.

20. Свеча находится на расстоянии $d = 0,8$ м от стены. Вогнутое зеркало с $F = 0,3$ м находится за свечой на расстоянии x и дает действительное увеличенное изображение свечи на стене. Найти расстояние x .

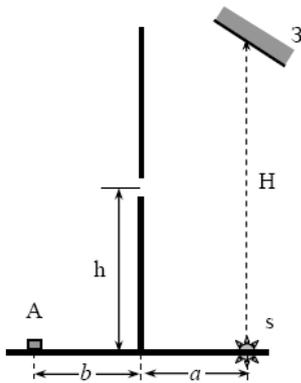
21. Собирающая линза дает действительное, увеличенное в три раза изображение предмета. Найти фокус линзы, если расстояние между изображением и линзой равно $b = 0,4$ м.

22. Найти фокусное расстояние двояковыпуклой стеклянной линзы, помещенной в воду, если ее фокус в воздухе равен 0,2 м.

23. Изображение, получаемое при помощи вогнутого зеркала, в $k = 2$ раза больше предмета. При перемещении зеркала на расстояние $l = 1$ м по главной оптической оси увеличение изображения равно $k = 2$. Найти радиус кривизны зеркала.

24. На краю бассейна глубиной $h = 3$ м стоит человек и наблюдает под углом $\varphi = 60^\circ$ монету, лежащую на дне. Определить, на каком расстоянии от поверхности воды видно изображение монеты.

25. Водолаз, стоящий на дне реки, видит отражение от поверхности воды предмета, лежащего на дне на расстоянии 9,4 м от его ног. Найти глубину, если расстояние от дна до глаз водолаза 1,75 м.



26. Две части комнаты отгорожены перегородкой с окошком на высоте $h = 1$ м. В правой части на полу находится лампа S на расстоянии $a = 3$ м от стенки (см. рис.). На какой высоте H над лампой нужно повесить зеркальце, чтобы осветить предмет A в левой части комнаты на расстоянии $b = 3$ м от стенки?

27. Два плоских зеркала расположены под углом $\alpha = 120^\circ$ друг к другу, так что расстояние между мнимыми изображениями источника света $L = 25$ см. Определить, на каком расстоянии от линии пересечения зеркал расположен источник, если он находится на биссектрисе угла α .

Ответы

1. $R = h/(n^2 - 1)^{1/2} = 1,14$ м.
2. $\Delta x = 3,5$ см.
3. 12 см от объекта.
4. $F = (d_2 h_2 - d_1 h_1)/(h_2 - h_1) = 0,974$ м.
5. $\Delta l = 1,7$ м.
6. $F = 9,3$ см; $l = 1,3$ см.
7. $F_1 = F''$; $F_2 = F'F''/(F' - F'')$; $F_3 = F'$.
8. $x = 1,75$ см.
9. $n = 1,56$.
10. $l_2 = 0,6$ м.
11. $n_2 = FDn_1/(FD+1-n_1) \approx 1,67$.
12. $F = R/2n = 0,33$ м.
13. $F_1 = 0,12$ м.
14. $l = 5,8$ мм.
15. $\Delta l = 3,86$ м.
16. $F = 0,1$ м.
17. $d = F(1 + 1/k) = 0,75$ м.
18. $d = F(1 + 1/n)$.
19. $d = 20$ см.
20. $d_1 = 0,4$ м.
21. $F = b/(k + 1) = 8$ см.
22. $F = 0,78$ м.
23. $R = kl = 2$ м.
24. $h' = (hn^2 \cos^3 \varphi)/(n^2 - \sin^2 \varphi)^{3/2} = 0,525$ м.
25. $h = 6,5$ м.
26. $H = 2$ м.
27. $x = 14$ см.

4.2. Фотометрические величины и законы

Выделим на поверхности излучающего тела элементарную площадку dS и обозначим через $d\Phi_0$ весь лучистый поток, испускаемый этой площадкой по всем направлениям (в одну сторону), а через $d\Phi$ — лучистый поток, исходящий от площадки в данном направлении внутри телесного угла $d\omega$. Тогда излучательную способность площадки можно характеризовать следующими величинами: $R = d\Phi/dS$; $I = d\Phi/d\omega$. Величина R называется энергетической светимостью поверхности и равна лучистой энергии, испускаемой площадкой, в единицу времени (Вт/м). Величина I (энергетическая сила света) равна потоку излучения, который приходится на единицу телесного угла (Вт/ст). Для точечного источника излучения: $I = \Phi/4\pi$; $\Phi = 4\pi I$. Если лучистый поток падает на поверхность тела, то отношение $E = d\Phi/dS$ называется энергетической освещенностью (Вт/м).

Излучение, падающее на поверхность тела, оказывает на него давление. Величина давления P определяется формулой: $P = (1+\rho)w$, где ρ — коэффициент отражения поверхности, w — объемная плотность энергии. Давление солнечного излучения приблизительно равно $4 \cdot 10^{-6}$ Па.

Энергия электромагнитного излучения воспринимается и измеряется по ее воздействию на различные приемники излучения. Среди них особое значение имеет глаз. Каждый из приемников имеет различную чувствительность на разные участки спектра. Допустим, что монохроматический поток $d\Phi_\lambda$ вызвал в приемнике показание, равное dX_λ . Показанием приемника излучения может быть: изменение температуры или электрического сопротивления датчика, сила тока в цепи фотоэлемента, электродвижущая сила в цепи термоэлемента, количество вещества, выделившегося при химической реакции и т. д. Отношение $\Psi = dX_\lambda/d\Phi_\lambda$ называется спектральной чувствительностью приемника излучения к длине волны λ . Для излучения в интервале длин волн от λ_1 до λ_2 введено понятие интегральной чувствительности $\Psi = X/\Phi$, где

$$X = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} dX_\lambda; \quad \Phi = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} d\Phi_\lambda.$$

Глаз обладает различной чувствительностью в пределах видимого спектра. Спектральную чувствительность глаза как функцию длины волны обозначают K_λ и называют спектральной световой эффективностью. Наибольшей чувствительностью глаз обладает для $\lambda = 0,555$ мкм, причем $K_\lambda = 625$ лм/Вт. Это означает, что свет с длиной волны 0,555 мкм

мощностью 1Вт воспринимается как световой поток равный 625 лм. Обратная величина $M = 1/K_{тм} = 0,0016$ Вт/лм называется механическим эквивалентом света.

Относительная спектральная световая эффективность (чувствительность) глаза $V_{\lambda} = K_{\lambda} \cdot K_M$ (иногда называемая функцией видности) имеет, по усредненным данным, следующие значения: λ , мкм...0,4; 0,5; 0,555; 0,590; 0,650; 0,700; 0,760. V ...0,0004; 0,323; 1; 0,757; 0,107; 0,0041; 0,00006. По спектральной плотности излучения в данном участке спектра можно найти соответствующую спектральную плотность в световом потоке умножением на K_{λ} .

Перечислим фотометрические величины, характеризующие источник света. Световой поток Φ есть величина $\Phi = \int_{400}^{700} K_{\lambda} \cdot d\Phi_{\lambda}$, где

$d\Phi_{\lambda}$ – часть потока излучения, приходящаяся на участок спектра с длинами волн от λ до $\lambda + d\lambda$. Для монохроматического излучения 1 Вт лучистого потока равен $625 \cdot V_{\lambda}$ люменов светового потока. Световой поток, испускаемый изотропным точечным источником в пределах телесного угла ω , в вершине которого находится источник, пропорционален силе света I источника и величине ω : $\Phi = I\omega$.

Если световой поток ограничен боковой поверхностью кругового конуса с углом раствора 2φ , где φ – угол между осью конуса и образующей, телесный угол конуса определяется формулой: $\omega = 2\pi(1 - \cos\varphi)$. Полный поток изотропного точечного источника равен: $\Phi = 4\pi I$. Световая энергия, излучаемая источником за время t , выражается в люмен-секундах: $W = \Phi_{cp} t$, где Φ_{cp} – среднее значение потока за время t .

Светимость поверхности источника – отношение величины излучаемого светового потока к площади светящейся (собственным или отраженным светом) поверхности – выражается в лм/м²: $R = d\Phi/dS$. Светимость киноэкранов должна быть (50...100) лм/м², бумаги при письме или чтении – (35...50) лм/м², светимость снежного покрова в безлунную ночь – 0,002 лм/м².

Сила света источника в данном направлении есть отношение светового потока $d\Phi$, испускаемого им в этом направлении внутрь телесного угла $d\omega$, к величине этого угла: $I = d\Phi/d\omega$. Сила света измеряется в канделах (ранее называлась свечой). Источник света в 1кд излучает по всем направлениям световой поток, равный $4\pi I$ люменов.

Яркость светящейся поверхности в данном направлении есть отношение светового потока $d\Phi$, излучаемого площадкой dS в этом на-

правлении внутрь телесного угла $d\omega$, к величине этого угла и к проекции площадки dS на плоскость, перпендикулярную указанному направлению: $B = d\Phi/(dS \cdot d\omega \cos\alpha)$.

Яркость светящейся поверхности измеряется в нитах (нт). Поскольку $d\Phi/d\omega = I$ — это сила света площадки dS в данном направлении, то для определения яркости необходимо эту силу света I разделить на указанную проекцию площадки $dS \cdot \cos\alpha$, где α — угол между данным направлением и нормалью к площадке: $B = I/(dS \cdot \cos\alpha)$. Яркостью в 1 нт обладает площадка, если в перпендикулярном ей направлении отношение силы света к площади равно 1 кд/м^2 . Если это отношение равно 1 кд/см^2 , то яркость равна 1 стильбу (сб), следовательно, $1 \text{ нт} = 10^{-4} \text{ сб}$. Яркость листа белой бумаги при чтении и письме должна быть не менее 0,001 сб, люминесцентной лампы 0,7 сб, нити накаливания электрической лампочки ~ 500 сб, поверхности Солнца 120000 сб, белой поверхности, освещенной полной Луной, около $6 \cdot 10^{-6}$ сб, ночного безлунного неба 10^{-8} сб. Наименьшая яркость светящихся поверхностей, воспринимаемая глазом в полной темноте, 10^{-9} сб — называется пороговой яркостью для человеческого глаза.

В СИ дано следующее определение единицы силы света: кандела — это сила света, испускаемого с площади $1/600000 \text{ м}^2$ сечения полного излучателя в перпендикулярном этому сечению направлении при температуре излучателя, равной температуре затвердевания платины при давлении 101 325 Па.

Яркость светящихся поверхностей различна в разных направлениях. Если она одинакова по всем направлениям, то говорят, что источник света излучает по *закону Ламберта*. С некоторым приближением такими источниками являются: поверхность Солнца, шар из матового стекла и т. д. Для таких источников легко рассчитываются полный световой поток $d\Phi$, излучаемый площадкой dS по всем направлениям в одну сторону: $d\Phi = \pi B dS$, и светимость $R = \pi B$.

При падении светового потока на поверхность тела определяют следующие величины.

Освещенность поверхности — отношение светового потока, равномерно распределенного по поверхности, к ее площади (выражается в люксах, $1 \text{ лк} = 1 \text{ лм/м}^2$):

$$E = d\Phi/dS.$$

Освещенность, создаваемая изотропным точечным источником на расстоянии r от него, определяется формулой: $E = I \cdot \cos\alpha/r^2$, где α — угол падения лучей. Освещенность земной поверхности при полной Луне (в зените) равна 0,2 лк, в безлунную ночь 0,002 лк.

Световая экспозиция — произведение освещенности на время освещения (измеряется в люкс-секундах):

$$H = \int_0^T E(t) \cdot dt.$$

Поверхности тел рассеивают падающий на них световой поток. Если каждый элемент поверхности рассеивает свет по всем направлениям (в одну сторону, т. е. в телесный угол 2π для каждой точки) с одинаковым коэффициентом отражения ρ , то поверхность называется диффузно рассеивающей; для нее соблюдаются следующие соотношения между светимостью, освещенностью и яркостью:

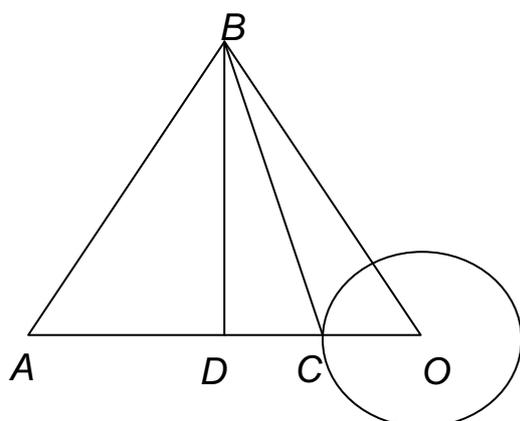
$$R = \rho E; B = \rho E/\pi.$$

Коэффициент диффузного отражения для белых экранов, покрытых окисью магния, $\rho = 0,98$, белой клеевой краской – $0,8$. Если $\rho = 1$ для всех направлений и длин волн, то поверхность является идеальным рассеивателем; для нее $R = E$, $B = E/\pi$; яркость рассеивающих поверхностей выражают в апостильбах ($1 \text{ асб} = 1/\pi \text{ нт}$).

Основные расчетные формулы

- Световой поток $\Phi = \int_{400}^{700} K_{\lambda} \cdot d\Phi_{\lambda}$.
- Световой поток точечного источника $\Phi = I\omega$.
- Телесный угол конуса $\omega = 2\pi(1 - \cos\varphi)$.
- Полный световой поток точечного источника $\Phi = 4\pi I$.
- Световая энергия $W = \Phi_{cp}t$, где Φ_{cp} – среднее значение потока за время t .
- Светимость поверхности источника $R = d\Phi/dS$.
- Сила света измеряется в канделах (ранее эта единица силы света называлась свечой). Источник света в 1 кд излучает по всем направлениям световой поток, равный $4\pi I$ люменов.
- Освещенность поверхности $E = d\Phi/dS$.
- Освещенность точечного источника $E = I \cdot \cos\alpha/r^2$, α – угол падения лучей.
- Световая экспозиция $H = \int_0^T E(t) \cdot dt$.
- Яркость светящейся поверхности $B = d\Phi/(dS \cdot d\omega \cdot \cos\alpha)$.
- Сила света $I = d\Phi/d\omega$.
- Яркость точечного источника $B = I/(dS \cdot \cos\alpha)$.
- Соотношения между светимостью, освещенностью и яркостью:
 $R = \rho E; B = \rho E/\pi$.

Примеры решения задач



Пример 1. Шар радиусом $R = 1$ м освещается двумя одинаковыми лампами, находящимися на одинаковом расстоянии $l = 3$ м друг от друга и от центра шара. Определить освещенность в точке на поверхности шара, лежащей на прямой, соединяющей один из источников с центром шара. Полный световой поток, создаваемый каждой лампой, равен $\Phi = 10^3$ лм.

Решение. Обозначим расстояния $AC = r_1$, $BC = r_2$.

Тогда освещенность в точке С равна: $E = I \cos \alpha_1 / r_1^2 + I \cos \alpha_2 / r_2^2$, где $I = \Phi / 4\pi$; $\alpha_1 = 0$, так как луч AC идет по направлению радиуса шара и совпадает с направлением нормали к поверхности шара в точке падения. Из $\triangle BCD$ находим $\cos \alpha_2$:

$$\cos \alpha_2 = DC / BC = (l/2 - R) / \sqrt{l^2 - lR + R^2}.$$

Из рисунка видно, что $r_1 = l - R$.

Подставим выражения для I , r_1 , r_2 , $\cos \alpha_2$ в формулу для освещенности:

$$E = \Phi / 4\pi [1 / (l - R)^2 + (l/2 - R) / (l^2 - lR + R^2)^{2/3}] = 25,3 \text{ лк.}$$

Для того, чтобы свет от второй лампочки попадал в точку С, должно выполняться условие $l > 2R$.

Пример 2. Найти освещенность поверхности земли на широте Томска (56°) в полдень 22 июня. Яркость Солнца $B = 1,2 \cdot 10^9$ кд/м², радиус $R = 7,10^8$ м, расстояние от Земли до Солнца $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ м.

Решение. Вследствие большого расстояния от Земли до Солнца считаем, что лучи идут параллельным пучком. Принимая Солнце за плоский светящийся диск, находим, что его яркость $B = 2I/S$, где $S = \pi R^2$.

Коэффициент 2 введен потому, что плоский диск излучает по двум направлениям. Тогда $I = \pi B R^2 / 2$.

По условию задачи $\cos \alpha = 0,56$. Тогда освещенность поверхности Земли равна:

$$E = \pi B R^2 \cos \alpha / 2r^2 \approx 4,48 \cdot 10^4 \text{ лк.}$$

Пример 3. Электрическая лампа, сила света которой $I = 10$ кд, помещена в матовый сферический плафон диаметром $d = 0,05$ м. Найти светимость и яркость лампы.

Решение. По определению, светимость источника равна $R = \Phi/S$, где $\Phi = I \cdot \omega$; $\omega = 4\pi$ – полный телесный угол; $S = \pi d^2$. Тогда $R = 4I/d^2 = 1,6 \cdot 10^4$ лм/м². Яркость лампы $B = R/\pi = 5,1 \cdot 10^3$ кд/м².

Пример 4. Сфера освещена параллельным пучком света, создающим в области нормального падения освещенность E_0 . Найти среднюю освещенность облучаемой половины поверхности сферы.

Решение. Найдем площадь пояса, на который лучи падают под углом от $\alpha - d\alpha$ до α .

$$dS = 2\pi R^2 \sin\alpha \cdot d\alpha.$$

Освещенность пояса $E_\alpha = E_0 \cos\alpha$, а падающий на него световой поток

$$\Phi = E_\alpha dS = 2\pi R^2 E_0 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha.$$

Полный поток, падающий на полусферу, равен: $\pi/2$

$$\Phi = \int \pi R^2 E_0 \cdot 2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha = \pi R^2 E_0 [-\cos^2\alpha] = \pi R^2 E_0.$$

Площадь полусферы равна $2\pi R^2$. Поэтому средняя освещенность $\langle E \rangle = E_0/2$.

Пример 5. Круглый стол освещен лампой, висящей на высоте H над его центром. Определить расстояние от лампы до края центральной зоны, на которую приходится половина светового потока, падающего на стол, если радиус стола равен R . Лампу считать точечным источником света.

Решение. Расстояние от лампы до края искомой зоны обозначим через r . Тогда телесный угол, опирающийся на эту зону, $\omega_1 = 2\pi(r - H)/r$, а опирающийся на всю поверхность стола $\omega_2 = 2\pi[(R^2 + H^2)^{1/2} - H]/(R^2 + H^2)^{1/2}$. Для точечного источника света $\Phi_1 = I\omega_1$ и $\Phi_2 = I\omega_2$. Но $\Phi_1 = 1/2\Phi_2$, откуда $[(R^2 + H^2)^{1/2} - H]r = 2(r - H)(R^2 + H^2)^{1/2}$ и тогда $r = 2H(R^2 + H^2)^{1/2}/[H + (R^2 + H^2)^{1/2}]$.

Пример 6. Определить среднюю яркость идеально матовой сферы с коэффициентом отражения ρ , если наблюдение производится со стороны падения параллельного пучка света. Создаваемая светом в области нормального падения освещенность равна E_0 . Определить также максимальную яркость поверхности B_0 .

Решение. Освещенность пояса dS $E_\alpha = E_0 \cos\alpha$. Яркость этого пояса B_α не зависит от направления и равна $\rho E_\alpha / \pi = \rho E_0 (\cos\alpha) / \pi$. Видимая величина поверхности пояса при наблюдении со стороны падения света равна:

$$dS_\perp = dS \cos\alpha = 2\pi R^2 \sin\alpha \cos\alpha \cdot d\alpha.$$

Среднее значение яркости равно:

$$\langle B \rangle = \int B_\alpha dS_\perp / \int dS_\perp = 2\rho E_0 R^2 \int \sin\alpha \cos^2\alpha \cdot d\alpha / \pi R^2 \int 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha = 2\rho E_0 / 3\pi.$$

Так как $\rho E_0/\pi = B_0$ – максимальная яркость, то средняя яркость

$$\langle B \rangle = 2/3 B_0 \approx 0,667 B_0.$$

Пример 7. Однородные шар и куб одинаковой массы из одного и того же материала излучают с постоянной яркостью по всей поверхности. Какое тело имеет большую среднюю силу света?

Решение. При одинаковой яркости светимости равных участков выпуклых или плоских поверхностей одинаковы, поэтому излучаемые световые потоки прямо пропорциональны площадям поверхностей тел. Поскольку массы и плотности материала одинаковы, то должны быть равны объемы тел: $l^3 = 4/3\pi R^3$, где l – длина ребра куба, R – радиус шара, откуда $l/R = (4/3\pi)^{1/3}$. Площадь поверхности куба $S_1 = 6l^2$; площадь поверхности шара $S_2 = 4\pi R^2$; $S_1/S_2 \approx 1,24$. $I_1/I_2 = S_1/S_2 = 1,24$. Средняя сила света куба в 1,24 раза больше.

Пример 8. Сравнить яркость солнечного диска и идеально белой матовой поверхности, расположенной перпендикулярно к солнечным лучам на поверхности Земли.

Решение. Освещенность бумаги $E = B_c \pi R_c^2/r^2$, где B_c и R_c – яркость и радиус Солнца, r – расстояние от Земли до Солнца. Яркость бумаги $B = \rho E/\pi = \rho B_c R_c^2/r^2$, откуда $B_c/B = r^2/\rho R_c^2 \approx 1/\rho \alpha^2$, где α – угол, под которым виден перпендикулярный к лучу зрения радиус Солнца с Земли; $\alpha \approx 15'$; $B_c/B = 5,24 \cdot 10^4$.

Пример 9. В центре квадратной комнаты площадью $S = 100 \text{ м}^2$ висит лампа. На какой высоте h от пола должна находиться лампа, чтобы освещенность в углах комнаты была наибольшей?

Решение. Освещенность в углах комнаты определяется формулой:

$$E = I \cdot \cos\alpha / r^2.$$

Расстояние r от лампы до угла комнаты, величина l – половина диагонали квадратного пола комнаты, сторона b квадратного пола и высота лампы над полом h связаны равенством:

$$l = r \sin\alpha = b\sqrt{2} = h \cdot \text{tg}\alpha.$$

На основании этой формулы выражение для освещенности может быть записано так:

$$E = I \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha / l^2.$$

Для нахождения максимума E возьмем производную $dE/d\alpha$ и приравняем ее нулю:

$$dE/d\alpha = I \cdot (2\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin^3\alpha) = 0;$$

отсюда $\text{tg}^2 \alpha = 0$. Тогда $h = l/\text{tg}\alpha = b/\sqrt{2}\text{tg}\alpha = b/2 = 5 \text{ м}$.

Пример 10. Цилиндрическая лампа диаметром 5 см и длиной 1 м создает на расстоянии 10 м в направлении, перпендикулярном к оси лампы, освещенность 1 лк. Считая лампу косинусным излучателем, определить силу света в данном направлении, яркость, светимость лампы.

Решение. Длина лампы в 10 раз больше расстояния, на котором измеряется освещенность, поэтому для вычисления силы света в данном направлении можно принять лампу за точечный источник и использовать формулу $E = I/r^2$, откуда $I = Er^2 = 100$ кд. Для вычисления яркости используем формулу $B = I/S$, где S – площадь проекции протяженного источника света на плоскость, перпендикулярную к направлению наблюдения. В случае цилиндрической лампы проекция имеет форму прямоугольника длиной l и шириной d . Следовательно, $B = I/l d = 2000$ кд/м². По условию лампа является косинусным излучателем и ее светимость равна: $R = \pi B = 6280$ лк.

Пример 11. Точечный источник света находится на расстоянии 0,2 м от вогнутого сферического зеркала радиусом 0,5 м. Найти освещенность в центре экрана, расположенного перпендикулярно главной оптической оси зеркала на расстоянии 0,6 м от вершины, если при удалении экрана на 1 м от зеркала освещенность в его центре оказывается равной 290 лк.

Решение. Если за источником света поместить вогнутое зеркало, то освещенность в точке экрана станет равной сумме освещенностей, создаваемых самим источником и его изображением: $E = E_1 + E_2$. Для вычисления этой освещенности нужно сначала определить положение изображения. Расстояние f между изображением и зеркалом можно найти из формулы собирающего зеркала, Учтываем, что предмет находится между фокусом и зеркалом и его изображение будет мнимым. Поскольку радиус зеркала равен R и расстояние от зеркала до источника равно d , то $2/R = 1/d - 1/f$. Из этого уравнения находим, что $f = 1$ м.

Так как в первом положении экран находится от вершины зеркала на расстоянии l_1 , сила света источника и его изображения I (потери света при отражении не учитываются), то освещенность в середине экрана будет равна:

$$E_{1A} = I/(l_1 - d)^2 + I/(l_1 + f)^2.$$

Если экран отодвинуть от зеркала на расстояние l_2 , освещенность в центре экрана станет равной:

$$E_{2A} = I/(l_2 - d)^2 + I/(l_2 + f)^2.$$

Из этого уравнения находим силу света источника $I = 160$ кд. Подставляя числовые значения величин, находим $E_{2A} = 1060$ лк.

Пример 12. Какую экспозицию нужно сделать при фотографировании рисунка с линейным увеличением k_1 , если при фотографировании рисунка с увеличением k_2 правильная выдержка равняется t_2 ? Диаметр объектива считать малым по сравнению с его фокусным расстоянием.

Решение. При фотографировании предмета с двух различных расстояний негатив получается одинаковым при условии, что в обоих случаях на единицу площади пленки, где получается изображение объекта, приходится одинаковое количество энергии световых волн. При съемке предмета с расстояния l_1 площадь изображения равна S_1 и за время экспозиции на нее падает энергия W_1 . При съемке того же предмета с расстояния l_2 эти величины равны S_2, t_2, W_2 , то $W_1/S_1 = W_2/S_2$. Соответственно $E_1 t_1 = E_2 t_2$, где E_1 и E_2 — освещенности изображения в первом и втором случаях. Это уравнение позволяет сравнить время двух экспозиций, если известно отношение освещенностей изображений.

По условию задачи фотографируются мелкие детали предмета, поэтому его нужно расположить между фокусом и двойным фокусом линзы. Изображение предмета на пленке получается в этом случае увеличенным в k_1 раз и удаленным от линзы на расстояние f_1 . Если пренебречь потерями светового потока и считать, что весь поток Φ_1 , падающий от предмета на линзу, попадает на изображение, то его освещенность будет равна $E_1 = \Phi_1/S_1$.

Основная трудность решения всех задач, где рассматриваются протяженные источники, состоит в нахождении Φ_1 . В этом случае применяют искусственный прием, дающий удовлетворительную точность лишь при условии, что диаметр объектива мал по сравнению с его фокусным расстоянием.

Предположим, что с каждой единичной площадки в единицу телесного угла за единицу времени излучается энергия W , и выберем малую площадку S , лежащую на главной оптической оси объектива. По условию задачи диаметр линзы мал по сравнению с фокусным расстоянием F (а, следовательно, и d). Поэтому при подсчете телесных углов, под которыми линзу видно из различных точек предмета, их можно считать равными друг другу, а площадь S_n — равной площади соответствующего шарового сегмента $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = S_n / d_1^2$, где d_1 — расстояние между предметом и линзой. Учитывая это, для светового потока, падающего на линзу от единичной площадки предмета, получим $\Phi_0 = W S S_n / d_1^2$. Полный световой поток, падающий на линзу со всей площади предмета S_0 , будет равен:

$$\Phi_1 = \Sigma \Phi_0 = W S_0 S_n / d_1^2.$$

Подставляя это выражение в формулу освещенности изображения, получим: $E_1 = WS_d S_0 / S_1 d_1^2$.

Расстояние d_1 , на которое нужно поместить предмет, чтобы получить данное увеличение изображения, а также отношение площади изображения к площади предмета, определяется из основных формул собирающей линзы:

$$1/F = 1/d_1 + 1/f_1; k_1 = f_1/d_1; k_1^2 = S_1/S_0.$$

Исключая из уравнений с помощью этих формул величины d_1 , S_0 и S_1 , получим окончательное выражение для освещенности изображения при экспозиции t_1 :

$$E_1 = WF^2(1 + k_1)^2 S_d.$$

Проводя точно такие же рассуждения для второго положения предмета, находим:

$$E_2 = WF^2(1 + k_2)^2 S_d.$$

Подставляя эти формулы и проводя преобразования, находим:

$$T_1 = t_2[(1 + k_2)/(1 + k_1)]^2.$$

Пример 13. Фотографический снимок печатали контактным способом. При этом лампа располагалась на расстоянии $r_1 = 60$ см от снимка, а экспозиция длилась t_1 с. Каково должно быть время экспозиции, если заменить лампу на другую, сила света которой втрое меньше, поместив ее от снимка на расстоянии $r_2 = 45$ см?

Решение. Фотографическое действие света пропорционально световой энергии, попавшей на фотобумагу за время экспозиции. Эта энергия пропорциональна произведению освещенности фотобумаги на время. Чтобы получить одинаковые снимки, необходимо добиться выполнения равенства $(I_1/r_1^2)t_1 = (I_2/r_2^2)t_2$. Здесь через I обозначена сила света. Окончательно получаем $t_2 = (I_1/I_2)(r_2/r_1)^2 t_1$. По условию задачи $I_1/I_2 = 3$, поэтому $t_2 = 27$ с.

Пример 14. Две лампы силой света $I_1 = 25$ кд и $I_2 = 8$ кд находятся на расстоянии $l = 1,8$ м друг от друга. Найти, на каком расстоянии x от первой лампы нужно поместить лист бумаги, чтобы освещенность его со стороны первой лампы была вдвое больше, чем со стороны второй.

Решение. Освещенность экрана с одной стороны $E_1 = I_1/r_1^2$, с другой, $E_2 = I_2/r_2^2$. По условию $E_1 = E_2$ и $r_1 + r_2 = l$. Отсюда $r_1 = l[I_1 - (I_1 I_2)^{1/2}]/(I_1 - I_2) = 1$ м и $r_2 = l[-I_2 + (I_1 I_2)^{1/2}]/(I_1 - I_2) = 0,8$ м. Вторым корнем квадратного уравнения не соответствует условиям задачи, поскольку экран должен быть расположен между лампами.

Пример 15. Лампа, подвешенная к потолку, обладает в горизонтальном направлении силой света $I = 96$ кд. Какой световой поток Φ падает на картину, площадь которой $S = 0,5$ м², если картина висит вертикально на стене напротив лампы на расстоянии $a = 4$ м от нее, а на противоположной стене находится большое плоское зеркало на расстоянии $b = 2$ м от лампы?

Решение. Из точки, где расположена лампа, картина видна под телесным углом $\omega_1 = S/a^2$, так как можно считать, что все точки картины одинаково удалены от источника. Следовательно, на картину от лампы падает световой поток $\Phi_1 = I\omega_1$. Влияние зеркала можно учесть, если заменить его дополнительным источником, обладающим той же силой света I и находящимся на расстоянии $2b$ от первого источника, т. е. на расстоянии $r = a + 2b$ от картины. Световой поток от второго источника, падающий на картину, $\Phi_2 = I\omega_2$, где $\omega_2 \approx S/r^2$. Полный световой поток

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = [IS/a^2] + [IS/(a + 2b)^2] \approx 3,75 \text{ лм.}$$

Пример 16. Лампа, сила света которой $I = 200$ кд, укреплена на потолке комнаты. Определить суммарный световой поток, падающий на все стены и пол комнаты.

Решение. Стены и пол комнаты видны из точки, находящейся на потолке под телесным углом $\omega = 2\pi$ стерадиан, поэтому $\Phi = I \cdot \omega = 1256$ лм.

Задачи для самостоятельного решения

1. На столбах высотой 5 и 8 м горят две лампы силою 1000 и 750 кд, расстояние между столбами 20 м. Какая точка между основаниями столбов освещается обоими источниками одинаково?

2. На высоте 2 м над серединой круглого стола диаметром 3 м висит лампа 100 кд. Ее заменили лампой 25 кд, изменив расстояние до стола так, что освещенность середины стола не изменилась. Как изменится освещенность края стола?

3. Два точечных источника света расположены на расстоянии 2 м друг от друга. На перпендикуляре, восстановленном к линии, соединяющей источники, в ее середине расположена под углом α к перпендикуляру небольшая площадка на расстоянии 1 м от этой линии. При $\alpha = 15^\circ$ освещенности обеих сторон площадки одинаковы и равны 20 лк. Определить силы света источников.

4. Три лампочки стоят в углах равностороннего треугольника, причем центр этого треугольника находится на расстоянии l от внутренней поверхности цилиндрического экрана. Две лампочки потушили. На ка-

ком расстоянии нужно поставить оставшуюся лампочку, чтобы освещенность в точке экрана, лежащей ближе всего к этой лампочке, осталась неизменной? Расстояние между лампочками равно l .

5. Над круглым столом радиуса R на высоте $h = 3R$ висит точечный источник света. Во сколько раз изменится освещенность в центре стола и на его краях, если над источником света на расстоянии $2h$ от поверхности стола поместить плоское зеркало, расположенное параллельно плоскости стола?

6. Поверхность освещается перпендикулярными лучами точечного источника, находящегося на расстоянии 4 м от освещаемой поверхности. Поверхность отодвигают от источника на 1 м. На каком расстоянии сбоку источника нужно поместить плоское зеркало перпендикулярно поверхности, чтобы максимальная освещенность экрана осталась неизменной?

7. Яркость светящегося куба с ребром 0,2 м одинакова во всех направлениях и равна 5 ккд/м². В каком направлении сила света куба максимальна? Определить максимальную силу света куба.

8. В вершинах равностороннего треугольника находятся одинаковые источники света. Показать, что маленькая пластинка, помещенная в центре треугольника под произвольным углом к сторонам треугольника, освещена одинаково с обеих сторон.

9. Над центром круглого стола радиусом 1 м подвешен светильник в виде плоского горизонтального диска площадью 100 см². Яркость светильника не зависит от направления и равна 16000 кд/м². На какой высоте от поверхности стола надо поместить светильник, чтобы освещенность периферийных точек стола была максимальной? Какова будет эта освещенность?

10. На высоте 1 м над центром круглого стола радиусом 1 м подвешен точечный источник, сила света которого так зависит от направления, что освещенность всех точек стола оказывается равномерной. Найти световой поток, падающий на стол, если $I_0 = 100$ кд.

11. Над столом находится светильник — плоский горизонтальный диск радиусом 0,25 м. Расстояние от него до поверхности стола 0,75 м. Освещенность стола под центром светильника равна 70 лк. Найти светимость этого источника, считая его ламбертовским.

12. Светильник, имеющий вид равномерно светящейся сферы радиуса 6 см, находится на расстоянии 3 м от пола. Яркость светильника равна $2 \cdot 10^4$ кд/м² и не зависит от направления. Найти освещенность пола непосредственно под светильником.

13. Как должны относиться спектральные интенсивности волн с длинами $\lambda_1 = 0,555$ мкм и $\lambda_2 = 0,51$ мкм, чтобы световое ощущение человеческого глаза было одинаковым (при дневном свете)?

14. Световому потоку в 1 лм на длине волны 555 нм соответствует поток энергии, равный 0,0016 Вт. Какой поток энергии соответствует световому потоку в 100 лм, образованному излучением, для которого относительная спектральная чувствительность глаза равна 0,762?

15. Точечный изотропный источник силой света 50 кд висит над центром круглого стола радиусом 0,5 м на высоте 1 м. Определить величину потока, падающего на стол, и долю полного потока.

16. Лампа, подвешенная к потолку, обладает в горизонтальном направлении силой света $I = 96$ кд. Какой световой поток Φ падает на картину, площадь которой $S = 0,5$ м², если картина висит вертикально на стене напротив лампы на расстоянии $a = 4$ м от нее, а на противоположной стене находится большое плоское зеркало на расстоянии $b = 2$ м от лампы?

17. Для чтения считается нормальной освещенность в 50 лк. На какой высоте над столом следует повесить лампу в 50 кд, чтобы обеспечить такую освещенность в точках поверхности стола, лежащих непосредственно под лампой?

18. Ширина кадрового окна киноаппарата 1,2 см, ширина экрана 2,4 м. Во сколько раз освещенность экрана будет меньше освещенности окна в аппарате? Какая освещенность кадрового окна должна быть создана, если минимально допустимая освещенность экрана должна быть 4 лк?

19. На столе стоит настольная лампа высотой $h = 30$ см. определить освещенность в точке поверхности стола, удаленной на расстояние $a = 60$ см от центра основания лампы. Сила света от лампы 25 кд.

20. На каком расстоянии необходимо ставить мачты для уличных фонарей, чтобы освещенность на земле в точке, лежащей посередине расстояния между мачтами, была не менее 4/15 лк? Высота мачт $h = 12$ м. Сила света ламп $I = 300$ кд. Считать, что заметную освещенность создают только два ближайших фонаря.

21. Электрическая лампа в 100 кд потребляет 0,5 Вт электроэнергии на 1 кд. Определить коэффициент полезного действия η этой лампы, если механический эквивалент света равен 0,00161 Вт/лм. Найти световую энергию, излучаемую лампой ежесекундно.

22. Солнечные лучи, достигающие земной поверхности, приносят на поверхность Земли в 1 м² за 1 с энергию, равную 1350 Дж (при перпендикулярном падении). Определить величину энергии, получаемое всей поверхностью Земли, и какую долю это составляет от всей энергии све-

тового излучения Солнца. Расстояние от Земли до Солнца 150 млн км, радиус Земли 6300 км.

23. Во время работ в трубе большого диаметра электрический светильник укрепили в ее верхней точке. Во сколько раз освещенность, создаваемая светильником в самой нижней точке трубы, будет меньше освещенности в точке, лежащей на уровне центра круга поперечного сечения трубы. Силу света светильника считать по всем направлениям одинаковой.

24. Стол диаметром $d = 1$ м освещается лампой, висящей на высоте $h = 1$ м над центром стола. Найти освещенность края стола, если полный световой поток, излучаемый лампой, равен $\Phi = 600$ лм.

25. На высоте $h = 8$ м над землей висит лампа силой света $I = 1000$ кд. Найти площадь участка, в пределах которого освещенность не меньше $E = 1$ лк.

26. Над площадью висит фонарь. Освещенность на земле в тех точках, где лучи падают под углом $\alpha_1 = 72,5^\circ$, равна $E_1 = 10$ лк. Найти освещенность E_2 в точках, где лучи падают на землю под углом $\alpha_2 = 53^\circ$.

27. Круглый зал диаметром $d = 30$ м освещается лампой, укрепленной в центре потолка. Найти высоту h зала, если известно, что наименьшая освещенность стены зала в 2 раза больше наименьшей освещенности пола.

28. На высоте $h_1 = 2$ м над серединой круглого стола диаметром $d = 3$ м висит лампа силой света $I_1 = 100$ кд. Ее заменили лампой силой света $I_2 = 25$ кд, изменив расстояние до стола так, что освещенность середины стола не изменилась. Как изменится освещенность края стола?

29. Площадка освещается двумя различными лампами, висящими на столбе одна над другой на высоте $h_1 = 8$ м и $h_2 = 27$ м. На каком расстоянии l от основания столба находятся точки площадки, освещенность которых не изменится, если поменять лампы местами?

30. Три одинаковых точечных источника света расположены в вершинах равностороннего треугольника. В центре треугольника перпендикулярно к его плоскости и параллельно одной из его сторон находится маленькая пластинка. Определить освещенность обеих сторон пластинки, если сила света каждого из источников $I = 10$ кд, а длина стороны треугольника $l = 1$ м.

31. На столбе одна над другой висят две лампы силой света по $I = 200$ кд на высоте $h_1 = 3$ м и $h_2 = 4$ м над землей. Найти освещенность поверхности земли на расстоянии $l = 2$ м от основания столба.

32. В комнате имеются две одинаковые лампы, прикрепленные к потолку на расстоянии $l = 4$ м друг от друга. Найти отношение осве-

шенностей центра стола в двух его положениях: 1) под одной из ламп; 2) посередине между лампами. Высота лампы от поверхности стола по вертикали равна $h = 2$ м. Излучение ламп считать одинаково по всем направлениям.

33. Точечный источник излучает мощность $W_0 = 10$ Вт на длине волны $\lambda = 0,5$ мкм. Найти максимальное расстояние, на котором этот источник будет замечен человеком, если глаз реагирует на световой поток 60 фотонов в секунду. Диаметр зрачка $d = 0,5$ см.

34. Две электрические лампочки, поставленные рядом, освещают экран. Расстояние от лампочек до экрана 1 м. Одну лампочку погасили. На сколько нужно приблизить экран, чтобы освещенность его не изменилась?

35. По обе стороны от точечного источника света на одинаковых расстояниях, равных 1 м, помещены экран и плоское зеркало, плоскости которых параллельны. Какова освещенность, создаваемая в центре экрана, если сила света источника 2 кд?

36. На какой угол нужно повернуть площадку, чтобы ее освещенность уменьшилась вдвое по сравнению с той освещенностью, которая была при перпендикулярном падении лучей?

37. На высоте 5 м висит лампа и освещает площадку на поверхности земли. На каком расстоянии от центра площадки освещенность поверхности земли в два раза меньше, чем в центре?

38. Найти освещенность поверхности Земли, создаваемую нормально падающими солнечными лучами. Яркость Солнца $1,2 \cdot 10^9$ кд/м². Расстояние от Земли до Солнца $1,5 \cdot 10^8$ км, радиус Солнца $7 \cdot 10^5$ км.

39. Электрическая лампа, сила света которой 100 кд, имеет матовый сферический плафон диаметром 5 см. Найти светимость и яркость лампы. Поглощением света в стекле плафона пренебречь.

40. Лампа силой света 60 кд применяется для печатания фотоснимка. Если лампу расположить на расстоянии 1,5 м от снимка, то время экспозиции равно 2,5 с. Определить время экспозиции, если применить лампу силой света 40 кд, расположенную на расстоянии 2 м от снимка.

41. Во сколько раз Юпитер получает больше лучистой энергии от Солнца, чем Земля? Расстояние от Солнца до Юпитера в 5,2 раза больше, чем до Земли, а диаметр Юпитера в 11,14 раз больше земного.

42. Экран один раз освещается лампой с силой света в 1 кд, находящейся на расстоянии d от экрана. В другой раз экран освещается лампой с силой света в n кд, находящейся на расстоянии nd от экрана. В каком случае экран будет освещен сильнее и во сколько раз?

43. Проектор установлен на высоте 15 м над освещаемой площадью. В некоторой точке площади освещенность горизонтальной поверхности равна 10 лк. Определить силу света прожектора по направлению к этой точке, если наибольшая освещенность вертикальной плоскости составляет 20 лк.

44. Над горизонтальной поверхностью на высоте 2 м и на расстоянии 1 м друг от друга помещены два источника света, дающие световые потоки по 300 лм каждый. Определить освещенность на поверхности в точках под источниками света и на середине расстояния между ними.

45. При фотографировании объекта, освещенного лампой мощностью 100 Вт на расстоянии 1 м, требуется экспозиция 8 с. Определить экспозицию, чтобы общее количество световой энергии осталось тем же, при освещении двумя такими же лампами, расположенными на расстоянии: одна на расстоянии 3 м, а другая на расстоянии 4 м.

46. Какова сила света точечного источника, если световой поток, излучаемый им, равен 188,4 лм?

47. На столбе высотой 10 м висит электролампа. Какова сила света лампы, если на расстоянии 20 м от основания столба освещенность равна 1 лк?

48. На какой высоте над столом нужно повесить лампу в 60 кд, чтобы стол был освещен так же, как от лампы в 120 кд, висящей на высоте 1,5 м?

49. На высоте 2,5 м над столом висит лампа 100 кд. На какой высоте над столом надо повесить лампу в 25 кд, чтобы получить прежнее освещение стола?

50. Для освещения улицы лампочки по 500 кд подвешиваются на столбах на высоте 3 м. Определить расстояние между столбами, если освещенность посредине между ними должна быть не меньше 1 лк.

51. На расстоянии 1 м расположены два источника в 16 и 64 кд. Между источниками находится точка, которая одинаково ими освещается. На каком расстоянии от меньшего источника находится эта точка?

52. Освещенность стола под лампой, висящей над столом, равна 50 лк. Какова освещенность тех точек стола, в которые свет от лампы падает под углом 60° ?

53. Экспозиция при фотографировании предмета, освещенного лампой мощностью 150 Вт при расстоянии 1,2 м, равна 8 с. Определить экспозицию при освещении этого же предмета лампой 100 Вт с расстояния 1 м.

54. На расстоянии 0,5 м от экрана поставлен источник света силой в 10 кд, а с другой стороны от источника света на расстоянии 40 см от него поставлено плоское зеркало параллельно экрану. Определить освещенность экрана.

55. При падении параллельного пучка лучей нормально на плоскость получается освещение 8 лк. Найти освещение при падении тех же лучей под углом 30° к плоскости.

Ответы

1. 2,25 м от высокого столба. 2. $E_2 = E_1/3$. 3. 80 кд; 46 кд. 4. 0,39 л. 5. $1,11E_1$; $1,13E_1$. 6. 1,71 м. 7. По диагонали куба. 350 кд. 8. 0. 9. $h = R$; $E = LS/4R^2 = 40$ лк. 10. $\Phi = \pi I_0 R^2/h^2 = 300$ лм. 11. $R = E_0(1 + h^2/R^2) = 700$ лм/м². 12. $E_0 = \pi BR^2/h^2 = 25$ лк. 13. 0,5. 14. 0,21 Вт. 15. 33 лм; 0,053. 16. 3,75 лм. 17. 1 м. 18. в 40000 раз; 160000 лк. 19. 25 лк. 20. 27,5 м. 21. $\eta \approx 4\%$, приблизительно 2 Дж. 22. $\sim 10^{19}$ Дж; $\sim 10^{-10}$ энергии излучения Солнца. 23. в 1,4 раза. 24. 34,2 лк. 25. 1055 м². 26. 80 лк. 27. 7,5 м. 28. уменьшится в 3 раза. 29. 21,6 м. 30. 30 лк; 30 лк. 31. 14,26 лк. 32. 1,54. 33. 1000 км. 34. 0,3 м. 35. 2,2 лк. 36. 60° . 37. 3,83 м. 38. 80000 лк. 39. $1,6 \cdot 10^5$ лм/м², $5,1 \cdot 10^4$ кд/м². 40. 6,64 с. 41. в 4,6 раза. 42. в первом яркость в n раз больше. 43. 25000 кд. 44. 10,2 лк; 10,9 лк. 45. 46 с 46. 15 кд. 47. 1118 кд. 48. 1,06 м. 49. 1,25 м. 50. 28 м. 51. 33,3 см. 52. 6,25 лк. 53. 8,3 с. 54. 46 лк. 55. 6,93 лк.

4.3. Волновая оптика

Волновая оптика рассматривает явления, в которых проявляется волновая природа света (интерференция, дифракция, поляризация и дисперсия света). Свет — это электромагнитные волны, в которых во взаимно перпендикулярных плоскостях совершают колебания векторы электрической \vec{E} и магнитной напряженности \vec{H} . Световыми принято называть электромагнитные волны, длина которых в вакууме лежит в пределах от 380 до 770 нм. Более короткие и более длинные волны не вызывают в зрительном органе человека световых ощущений. Как показывает опыт, физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие свойства света обусловлены электрической составляющей. Поэтому в дальнейшем, говоря о световом векторе, будем подразумевать под ним вектор напряженности \vec{E} электрического поля.

4.3.1. Интерференция света

Интерференция света – это явление, обусловленное его волновыми свойствами. Интерференцией волн называют явление усиления колебаний в одних точках пространства и ослабления в других в результате наложения двух или нескольких волн, приходящих в эти точки. Поскольку свет представляет собой электромагнитные волны, должна наблюдаться интерференция света. Но отдельные световые импульсы, излучаемые атомами его источника, не согласованы между собой по фазе, а также могут отличаться по частоте. В результате, картина взаимного усиления в какой-либо точке пространства через миллиардные доли секунды может смениться ослаблением. Хаотическая картина таких мгновенных перераспределений интенсивности света глазом не воспринимается, а создается ощущение ровного светового потока. Для наблюдения устойчивой во времени интерференционной картины необходимо, чтобы частоты, поляризации и разности фаз интерферирующих лучей были постоянными в течение времени наблюдения. Интерферировать могут только *когерентные волны*. Световые волны называют *когерентными*, если их разность фаз в тех точках пространства, куда они приходят, не изменяется со временем. При одновременном распространении двух или более волн, колебания вызываются каждой из пришедших волн. Результирующее колебание можно рассматривать как сумму составляющих. При наложении двух волн, линейно поляризованных в одной плоскости, амплитуда A результирующей волны связана с амплитудами a_1 и a_2 и фазами φ_1 и φ_2 складываемых волн в рассматриваемой точке волнового поля соотношением

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Для некогерентных волн среднее значение квадрата амплитуды результирующей волны: $\langle A^2 \rangle = a_1^2 + a_2^2$. Поэтому при наложении некогерентных волн наблюдается суммирование их интенсивностей: $I = I_1 + I_2$. При наложении когерентных волн, линейно поляризованных в одной плоскости, амплитуда A результирующей волны не зависит от времени, но меняется от точки к точке поля в зависимости от разности фаз $(\varphi_1 - \varphi_2)$. Если $a_1 = a_2$, то минимальная интенсивность равна нулю, а максимальная вдвое превысит сумму интенсивностей складываемых волн.

Для электромагнитных волн речь идет о сложении векторов электрической напряженности \vec{E} и магнитной напряженности \vec{H} . Явление интерференции света состоит в усилении или ослаблении колебаний, которое происходит в результате сложения двух или более волн, рас-

пространяющихся в пространстве, и зависит от соотношения между фазами складывающихся колебаний. Необходимым условием интерференции волн является их когерентность, то есть равенство частот и постоянная во времени разность фаз. Этому условию удовлетворяют только монохроматические световые волны, то есть волны одного цвета. Для световых волн, как и для любых других, справедлив принцип суперпозиции. Результирующий световой вектор двух волн, проходящих через одну точку, равен векторной сумме световых векторов каждой из волн в отдельности. Под световым вектором понимается вектор электрической напряженности. Амплитуда результирующего колебания находится путем геометрического сложения амплитуд исходных колебаний. Условия усиления или ослабления результирующего колебания обычно формулируются не через разность фаз $\Delta\varphi$, а через разность хода волн δ . Известно, что разности фаз $\Delta\varphi = \pi$ соответствует пройденный волновой путь, равный половине длины волны $\lambda/2$. Отсюда можно сформулировать условие максимумов. Максимальное усиление результирующего колебания наступает при разности хода световых волн кратном четному числу полуволен, или целому числу длин волн

$$\Delta = 2k(\lambda/2) = k\lambda.$$

Аналогично формулируется условие минимумов. Наибольшее ослабление результирующего колебания соответствует разности хода, кратной нечетному числу полуволен

$$\Delta = (2k+1)(\lambda/2),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ называется порядком интерференционного максимума или минимума.

Различают геометрический и оптический пути света. Когда свет распространяется в среде с абсолютным показателем преломления n , его оптическая длина пути S связана с геометрической длиной l соотношением: $S = n \cdot l$.

При отражении луча от среды оптически более плотной, чем та среда, в которой распространяется падающий луч, фаза колебаний изменяется на π радиан. Говорят, что в данной точке происходит «потеря» половины длины волны. Среди наиболее распространенных примеров интерференции света в природе можно назвать интерференцию в тонких пленках, какими являются мыльные пузыри, радужные пленки нефти на воде, оксидные пленки на поверхности металлов.

В результате интерференции из-за наложения когерентных волн в одних точках пространства возникают максимумы, а в других — мини-

мумы интенсивности колебаний. При рассмотрении световых колебаний речь идет о перераспределении энергии в пространстве.

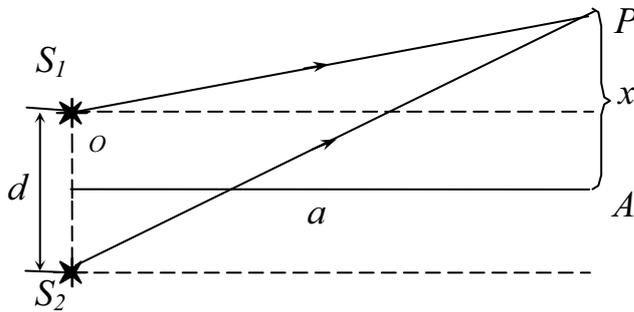


Рис. 4.18 Интерференция от двух точечных источников

Интерференция наблюдается от двух когерентных источников S_1 и S_2 , расстояние между которыми равно d . Проведем перпендикулярно отрезку S_1S_2 через его середину прямую OA . Возьмем точку P на прямой AB и введем обозначения: a — длина отрезка OA , x — длина отрезка AP . Тогда по теореме Пифагора: $(S_1P)^2 = a^2 + (x - d/2)^2$; $(S_2P)^2 = a^2 + (x + d/2)^2$, где S_1P и S_2P — пути лучей от источников S_1 и S_2 до точки P , в которой наблюдается интерференция. Из записанных уравнений следует, что $(S_2P)^2 - (S_1P)^2 = 2xd$ или $(S_2P - S_1P)(S_2P + S_1P) = 2xd$, откуда

$$\Delta = S_2P - S_1P = \frac{2xd}{S_2P + S_1P},$$

где Δ — разность хода между интерферирующими лучами. Если x и d малы по сравнению с a , то приближенно можно записать:

$$S_2P + S_1P \approx 2a \text{ и } \Delta = xd / a.$$

Если разность хода Δ равна нечетному числу полуволен, световые волны придут в точку P в противофазе и погасят друг друга, соответственно интенсивность в этой точке будет минимальной. Если Δ равна четному числу полуволен, то световые волны придут в точку P в одинаковых фазах и усилят друг друга — интенсивность будет максимальной. Условия минимума и максимума интенсивности имеют вид:

$$\frac{xd}{a} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \text{ — условие максимума; } \frac{xd}{a} = k\lambda \text{ — условие минимума.}$$

Здесь $k = 0, 1, 2, \dots$; λ — длина волны.

Впервые интерференцию света от двух когерентных источников наблюдал Юнг. Результат выполненного им опыта, как и наблюдение интерференции с помощью бипризмы или бизеркала Френеля, укладывается в простую схему (рис. 4.18), которую мы рассмотрим. Интерференция наблюдается

В точках $x = k \frac{\lambda a}{d}$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$) будут светлые участки интерференционной картины, а в точках $x = \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{\lambda a}{d}$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$) — темные участки интерференционной картины. В результате в плоскости AB будут наблюдаться светлые и темные полосы.

Расстояние между центрами соседних светлых полос находят как

$$b = \frac{\lambda a}{d}(k+1) - k \frac{\lambda a}{d} = \frac{a\lambda}{d}.$$

Такое же расстояние будет и между центрами темных полос.

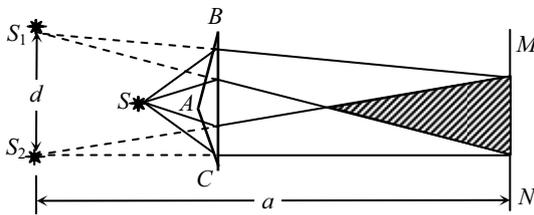


Рис. 4.19. Интерференция света в бипризме Френеля

Рассмотрим реальный эксперимент (рис. 4.19), укладывающийся в рассмотренную схему. Это наблюдение интерференции с помощью бипризмы Френеля, состоящей из двух остроугольных призм, сложенных основаниями. Обычно обе призмы изготовляются из одного куска стекла и имеют очень малые преломляющие углы B и C .

В сечении бипризма Френеля представляет собой равнобедренный треугольник с углом A при вершине, близким к 180° . Свет от источника S (например, от узкой освещенной щели, перпендикулярной плоскости чертежа) падает на бипризму и преломляется в ней. В заштрихованной области за бипризмой преломленные пучки складываются, т. е. интерферируют, и образующуюся интерференционную картину, состоящую из светлых и темных полос можно наблюдать с помощью микроскопа. Все происходит так, будто интерферирующие пучки света исходят из точек S_1 и S_2 . В этих точках находятся мнимые источники, образованные действительным источником света S . Эти два мнимых источника являются когерентными. Измерив расстояние d между мнимыми источниками света S_1 и S_2 , расстояние a от мнимых источников света до плоскости наблюдения, а также расстояние между соседними полосами b , можно вычислить длину волны λ , испускаемую источником света.

При интерференции света в тонких плоскопараллельных пластинках в отраженном свете условия максимума и минимума интенсивности света имеют вид:

- условие максимума — $\Delta = (2d \cdot n \cdot \cos\beta) - \lambda/2 = 2k \cdot \lambda/2$;
- условие минимума — $\Delta = (2d \cdot n \cdot \cos\beta) - \lambda/2 = (2k + 1) \cdot \lambda/2$.

Здесь d — толщина пластинки, n — показатель преломления ее материала, β — угол преломления света в пластинке. Для тонких пленок и плоскопараллельных пластин при нормальном падении светового пучка на их поверхность формулы упрощаются (можно считать $\cos\beta = 1$):

- условие максимума — $\Delta = 2d \cdot n - \lambda/2 = 2k \cdot \lambda/2$;
- условие минимума — $\Delta = 2d \cdot n - \lambda/2 = (2k + 1) \cdot \lambda/2$.

При интерференции в проходящем свете условия максимума и минимума меняются местами. Поэтому в приводимых ниже формулах условия максимума и минимума для наблюдения в отраженном свете соответствуют условиям минимума и максимума в проходящем. Эти условия, воспользовавшись законом преломления света, можно выразить и через угол падения α . Тогда, при наблюдении в отраженном свете, приведенные выше формулы имеют вид:

- условие максимума — $\Delta = 2d \cdot (n^2 - \sin^2\alpha)^{1/2} - \lambda/2 = 2k \cdot \lambda/2$;
- условие минимума — $\Delta = 2d \cdot (n^2 - \sin^2\alpha)^{1/2} - \lambda/2 = (2k + 1) \cdot \lambda/2$.

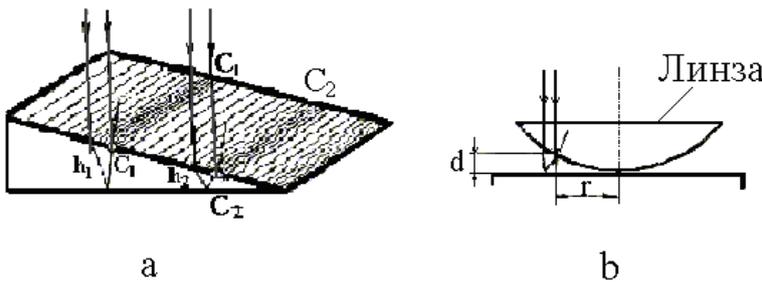


Рис. 4.20. Схемы наблюдения интерференции: *a* — полосы равной толщины на поверхности прозрачного клина; *b* — кольца Ньютона

Реально, в отраженном свете интерференция света проявляется в том, что тонкая плоскопараллельная пластинка при освещении ее белым светом выглядит окрашенной в те цвета, для которых выполняется условие

максимума. Если толщина пластинки не постоянна, но показатель преломления и угол падения лучей везде одинаковы, в монохроматическом свете можно наблюдать так называемые *полосы равной толщины*. Это означает, что вдоль какой-либо темной или светлой интерференционной полосы, возникающей на поверхности пластинки, толщина этой пластинки одна и та же. Например, интерференционными полосами равной толщины являются полосы, образующиеся на поверхности прозрачного клина параллельно его ребру (рис. 4.20, *a*). Темные полосы видны на тех участках, для которых при наблюдении в отраженном свете разность хода интерферирующих световых волн кратна нечетному числу полуволн. Для k -й по счету темной полосы имеем

$$\Delta = 2d_k \cdot (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2} - \lambda/2 = (2k+1) \cdot \lambda/2,$$

где d_k — толщина клина в том месте, где наблюдается темная полоса, соответствующая номеру k . Для k — й по счету светлой полосы будет

$$\Delta = 2d_k \cdot (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2} - \lambda/2 = 2k \cdot \lambda/2 = k\lambda.$$

Здесь все обозначения аналогичны приведенным выше, но соответствуют светлым полосам. Для света, падающего нормально к поверхности, выражение для разности хода упрощается

$$\Delta = 2d_k \cdot n - \lambda/2 = (2k+1) \cdot \lambda/2 \text{ и } 2d_k \cdot n = k\lambda + \lambda.$$

Если последнее условие записать для двух соседних полос и вычесть из одного из них другое, получим $2n \cdot (d_{k+1} - d_k) = \lambda$.

Обозначим через X расстояние между темными или светлыми интерференционными полосами. Тогда можно утверждать, что малый угол γ при вершине клина, измеренный в радианах, равен $\gamma = (d_{k+1} - d_k)/X$.

Угол γ очень мал, поэтому полагаем $\sin \gamma \approx \gamma$. Число приходящихся на единицу длины темных или светлых интерференционных полос вдоль направления, перпендикулярного ребру клина, равно

$$N/l = 1/X = 1/(d_{k+1} - d_k) = 2\gamma \cdot n/\lambda.$$

Интерференционные полосы могут возникать на воздушном или заполненном прозрачным веществом клине между плосковыпуклой линзой и пластинкой. При параллельности плоской поверхности линзы и пластинки они имеют вид колец. Пучок света при этом направлен вдоль главной оптической оси линзы. Подобное устройство называют установкой для наблюдения колец Ньютона (рис. 4.20, *b*). Результат интерференции зависит от оптической разности хода, которая в случае нормального падения лучей имеет вид

$$\Delta = 2d_k \cdot n.$$

В записанном соотношении d_k — толщина клина из вещества, заполняющего пространство между линзой и пластинкой в месте, где наблюдается интерференция (k -е светлое или темное кольцо), n — абсолютный показатель преломления этого вещества. Для воздуха $n = 1$. Толщина клина в месте наблюдения k -го светлого или темного кольца, может быть найдена из геометрических соображений как $d_k = r_k^2/2R$, R — радиус кривизны линзы. При наблюдении в проходящем свете условие максимума интерференции (светлое кольцо) соответствует разности хода лучей Δ , кратной четному числу полуволен:

$$\Delta = 2d_k \cdot n = 2k \cdot \lambda/2 = k \cdot \lambda.$$

Условие минимума (темное кольцо), соответствующее кратности Δ нечетному числу полуволн, в проходящем свете оно имеет вид

$$\Delta = 2d_k \cdot n = (2k+1)\lambda/2.$$

Здесь $k = 0, 1, 2, \dots$ При наблюдении в отраженном свете условия максимума и минимума меняются местами. Центральное светлое пятно в проходящем свете и центральное темное в отраженном свете считаем нулевыми ($k = 0$). В проходящем свете радиусы светлых колец Ньютона находятся по формуле $r_k = (2d_k R)^{1/2} = (k \cdot n \cdot R \cdot \lambda)^{1/2}$, $k = 1, 2$. Радиусы темных колец находятся по формуле $r_k = [(2k - 1) \cdot n \cdot R \cdot \lambda]^{1/2}$.

В опыте с кольцами Ньютона можно оценить показатель преломления вещества, заполняющего пространство между линзой и пластинкой. По наблюдениям в проходящем свете можно найти, что абсолютный коэффициент преломления жидкости $n = k \cdot \lambda \cdot R / r_k^2$, где r_k — радиус светлого кольца с номером k . Если наблюдается темное кольцо с радиусом r_k , то $n = (2k - 1) \cdot \lambda \cdot R / r_k^2$.

Наблюдение возможно и в отраженном свете. Но формулы для светлого и темного колец следует поменять местами.

При решении некоторых задач, в которых рассматривается установка для получения колец Ньютона, можно использовать формулу для тонкой плосковыпуклой линзы: $(n_l - 1)/R = 1/F = D$. Здесь R — радиус кривизны выпуклой поверхности линзы, F — фокусное расстояние, D — оптическая сила линзы, n_l — относительный показатель преломления материала линзы.

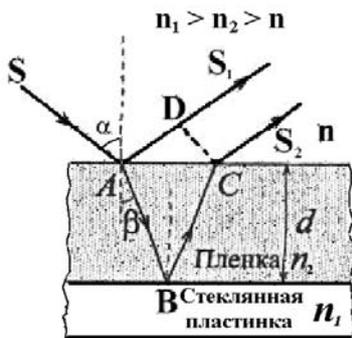


Рис. 4.21. Интерференция света в тонких пленках

«Просветление» оптики связано с нанесением на поверхность линз тонких пленок. Чтобы оценить необходимую толщину пленки для максимального ослабления отражения света с длиной волны λ , рассмотрим малый участок пленки, нанесенной на поверхность стекла (рис. 4.21). Абсолютные показатели преломления соответственно равны: воздуха $n = 1$, стекла n_1 , пленки n_2 . Причем $n_1 > n_2 > n$. Из световой волны выделим узкий луч SA . В точках A и B падающий луч частично отражается и частично преломляется. Отраженные лучи AS_1 и CS_2 могут интерферировать между собой. Поскольку показатель преломления воздуха меньше показателя преломления пленки, который, в свою очередь, меньше показателя преломления стекла, в обоих случаях происходит отражение от оптически более плотных сред. В результате изменение фазы

колебаний, связанное с отражением от границ раздела сред, оказывается одинаковым для обоих интерферирующих лучей. В этом случае условие интерференции для максимального ослабления отраженного света имеет вид $\Delta = (2k+1)\lambda/2$. Из схемы, представленной на рис. 4.21, следует, что оптическая разность хода Δ может быть найдена из соотношения $\Delta = l_2 \cdot n_2 - l_1 \cdot n$. Здесь $l_2 = AB + BC$, а $l_1 = AD$. Если свет падает почти нормально к поверхности пленки (угол падения α очень мал), тогда $AB + BC = 2d$, здесь d – толщина пленки. Тогда $\Delta = 2d \cdot n_2 = (2k+1)\lambda/2$. Необходимая толщина пленки может быть найдена из соотношения

$$d = (2k+1)\lambda/4n_2.$$

Минимальная толщина пленки d_{\min} соответствует $k = 0$; $d_{\min} = \lambda/4n_2$. Полученный результат означает, что свет с длиной волны λ будет полностью «гаситься» на просветляющей пленке с оптической толщиной $d_{\text{опт}} = n_2 \cdot d_{\min} = n_2 \lambda/4$. Для света с длиной волны λ' , отличной от λ , полного гашения наблюдаться не будет. Это связано с тем, что кроме разности хода $\lambda'/2$ у интерферирующих волн возникает дополнительная оптическая разность хода $\Delta\lambda/4 = (\lambda - \lambda')/4$, которая соответствует разности фаз суммируемых световых колебаний $\Delta\varphi = \pi[1 + (\lambda - \lambda')/2\lambda]$. Считая интенсивность I интерферирующих волн одинаковой, найдем относительную интенсивность I_s/I суммарных колебаний через отношение квадратов соответствующих амплитуд. Амплитуду суммарных колебаний определим, воспользовавшись теоремой косинусов. В результате получаем

$$(I_s/I) = 2 + 2\cos(\Delta\varphi) = 2 + 2\cos\{\pi[1 + (\lambda - \lambda')/2\lambda]\}.$$

Интерференция света используется в ряде точных измерительных приборов, называемых *интерферометрами*. На рис. 4.22, а изображена

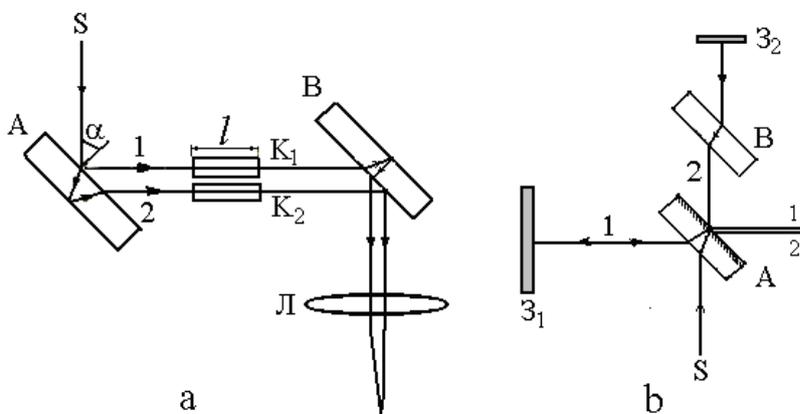


Рис. 4.22. Интерферометры: а – Жамена; б – Майкельсона

принципиальная схема *интерферометра Жамена*, применяемого для точных измерений показателей преломления газов. Две одинаковые толстые плоскопараллельные стеклянные пластины, обозначенные

на рис. 4.22, *a* как *A* и *B*, установлены параллельно друг другу. Световой луч от монохроматического источника *S* падает на пластину под углом α , равным 45° . В результате его отражения из пластины выходят два когерентных луча. Пройдя через одинаковые кюветы, лучи после отражения второй пластиной собираются линзой *L* и интерферируют. Если одна из кювет заполнена газом с известным абсолютным показателем преломления, а другая – с измеряемым, оптическую разность хода между интерферирующими лучами можно найти как

$$\Delta = (n_2 - n_1) \cdot l.$$

Следовательно, $n_2 = n_1 + k \cdot \lambda / l$, где k – порядок интерференционного максимума. Изменение оптической разности хода на длину волны λ вызывает смещение интерференционной картины на одну полосу, а изменение на $k \cdot \lambda$ – смещение на k полос. Упрощенная схема *интерферометра Майкельсона* приведена на рис. 4.22, *b*. Вертикальный луч монохроматического света от источника *S* падает под углом 45° на плоскопараллельную полупрозрачную пластинку. Часть света проходит через нее к зеркалу Z_2 , другая часть отражается и идет к зеркалу Z_1 . Отразившиеся от зеркал лучи $1'$ и $2'$ когерентны. Результат их интерференции зависит от оптической разности хода. Смещение одного из зеркал или изменение оптической длины одного из плеч интерферометра на половину длины волны $\lambda/2$ приводит к смещению интерференционной картины на одну полосу, а изменение на $k \cdot (\lambda/2)$ – смещение на k полос.

Интерферометр Майкельсона также используется для точных измерений показателей преломления различных веществ.

Основные расчетные формулы

- Условие максимумов $\Delta = 2k(\lambda/2) = k\lambda$.
- Условие минимумов $\Delta = (2k+1)(\lambda/2)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$
- Оптическая длина пути S связана с геометрической длиной l $S = n \cdot l$.
- Расстояние между интерференционными полосами (светлыми или темными) при интерференции от двух точечных источников, находящихся на расстоянии L от экрана: $\Delta y = \lambda L / d$, если $L \gg d$, где d – расстояние между источниками.
- Условие максимума в плоскопараллельных пластинках:

$$\Delta = (2d \cdot n \cdot \cos\beta) - \lambda/2 = 2k \cdot \lambda/2.$$

- Условие минимума в плоскопараллельных пластинках:

$$\Delta = (2d \cdot n \cdot \cos\beta) - \lambda/2 = (2k + 1) \cdot \lambda/2,$$

где d – толщина пластинки, n – показатель преломления ее материала, β – угол преломления света в пластинке.

Для тонких пленок при нормальном падении:

- в проходящем свете
 - условие максимума – $\Delta = 2d \cdot n - \lambda/2 = 2k \cdot \lambda/2$;
 - условие минимума – $\Delta = 2d \cdot n - \lambda/2 = (2k + 1) \cdot \lambda/2$;
- в отраженном свете
 - условие максимума – $\Delta = 2d \cdot (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2} - \lambda/2 = 2k \cdot \lambda/2$;
 - условие минимума – $\Delta = 2d \cdot (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2} - \lambda/2 = (2k + 1) \cdot \lambda/2$.
- в проходящем свете:
 - радиусы светлых колец Ньютона $r_k = (2d_k R)^{1/2} = (k \cdot n \cdot R \cdot \lambda)^{1/2}$, $k = 1, 2, \dots$;
 - радиусы темных колец $r_k = [(2k - 1) \cdot n \cdot R \cdot \lambda]^{1/2}$.

В отраженном свете условия наблюдения колец Ньютона меняются на обратные.

Примеры решения задач

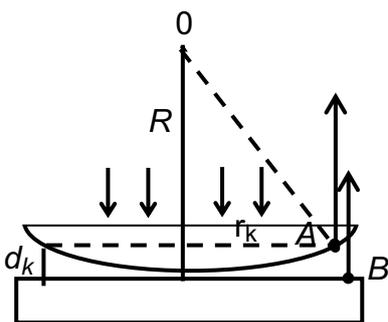
Пример 1. Между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой стеклянной линзой налита жидкость, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла. Радиус восьмого темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете ($\lambda = 700$ нм) $r_8 = 2$ мм. Радиус кривизны линзы $R = 1$ м. Найти показатель преломления жидкости.

Решение. Параллельный пучок лучей падает нормально на плоскую поверхность линзы и частично отражается от верхней и нижней поверхностей промежутка между линзой и пластиной. При наложении отраженных волн, возникают интерференционные кольца равной толщины.

Оптическая разность хода луча 1, отраженного в точке A от выпуклой поверхности линзы и луча 2, отраженного от стеклянной пластинки в точке B , $\delta = 2d_k n_{жс} + \lambda/2$; где d_k – толщина зазора в том месте, где наблюдается k -е кольцо; $n_{жс}$ – показатель преломления жидкости, заполняющий пространство между линзой и стеклянной пластинкой; $\lambda/2$ – добавочная разность хода при отражении луча 2 (в точке B) от оптически более плотной среды. Так как кольцо темное

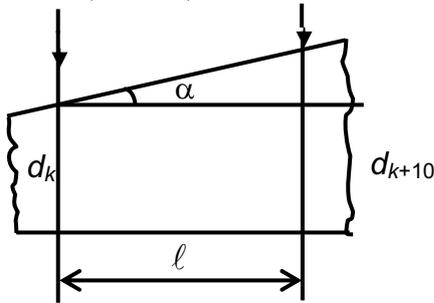
$$\delta = (2k + 1)\lambda/2 \text{ или } 2d_k n_{жс} + \lambda/2 = (2k + 1)\lambda/2; 2d_k n_{жс} = k\lambda,$$

откуда $n_{жс} = k\lambda/2d_k$.



Из геометрии рисунка: $r_k^2 = R^2 - (R - d_k)^2 = 2Rd_k - d_k^2$, так как $d_k \ll R$, то $r_k^2 = 2Rd_k$, тогда $d_k = r_k/2R$; подставив d_k в выражение для $n_{эс}$, получим $n_{эс} = (k\lambda R)/r_k^2$, $n_{эс} = 1,4$.

Пример 2. На стеклянный клин нормально к его грани падает параллельный пучок лучей ($\lambda = 0,6$ мкм). Число темных интерференционных полос, приходящихся на $l = 1$ см равно 10. Найти угол α клина.



Решение. Мы имеем дело с полосами равной толщины. Лучи, падая нормально к грани клина, отражаются как от верхней, так и от нижней грани клина и интерферируют между собой. Так как угол клина очень мал, то отраженные лучи (1 и 2) практически параллельны. Темные полосы видны на

тех участках клина, для которых разность хода лучей равна нечетному числу длин полуволн, то есть

$$\Delta = (2k + 1)\lambda/2, k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Первый луч претерпевает при отражении «потерю» $\lambda/2$, поэтому разность хода будет вычисляться по формуле

$$\Delta = 2d(n^2 - \sin^2 \varphi_{\text{пад}})^{1/2} + \lambda/2. \quad (2)$$

Так как по условию задачи $\varphi_{\text{пад}} = 0$, то выражение для δ примет вид

$$\Delta = 2dn + \lambda/2. \quad (3)$$

Приравнявая правые части (1) и (3) и преобразуя полученное выражение, окончательно получаем

$$2dn = k\lambda. \quad (4)$$

Для толщины пленки, где наблюдается k -ая полоса, запишем $2d_k n = k\lambda$, откуда $d_k = k\lambda/2n$. Для толщины пленки, где наблюдается $(k+10)$ полоса, запишем: $2d_{k+10} \cdot n(k+10)\lambda$, откуда $d_{k+10} = (k+10)\lambda/2n$, $\sin \alpha = (d_{k+10} - d_k)/l$.

Как видно из рисунка, $\sin \alpha \approx \alpha$ (для малых углов). Подставляя полученные выражения в формулу для угла, получим

$$\alpha = [(k+10)\lambda - k\lambda]/2nl = 5\lambda/nl = 41,2''.$$

Пример 3. Пучок белого света падает нормально на стеклянную пластинку толщиной $d = 4$ мкм. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Какие длины волн, лежащие в пределах видимого спектра (от 400 до 700 нм) усилятся в отраженном пучке?

Решение. В отраженном пучке будут усиливаться волны, разность хода которых пропорциональна половине длины волны:

$$2nd = (2k+1)\lambda/2, k = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда длина волны равна: $\lambda = 4nd/(2k+1)$.

Условию задачи удовлетворяет значение $\lambda = 480$ нм при $k = 1$.

Пример 4. Установка для наблюдения колец Ньютона в отраженном свете освещается светом $\lambda = 532$ нм, падающим нормально. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой ($n_1 = 1,5$) заполнено водой ($n = 1,33$). Найти толщину слоя в том месте, где наблюдается 5-е светлое кольцо.

Решение. Кольца Ньютона возникают в результате интерференции лучей, отраженных от нижней поверхности линзы и верхней поверхности пластинки. Оптическая разность хода между этими лучами $\Delta = 2dn + \lambda/2$. Поскольку по условию задачи d необходимо найти в том месте, где наблюдается светлое кольцо, то $\Delta = 2dn + \lambda/2 = k\lambda$; $d = (2k - 1)\lambda/4n = 90$ мкм.

Пример 5. Свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм падает на поверхность стеклянного клина под углом $\alpha = 15^\circ$. Показатель преломления стекла $n = 1,5$, угол при вершине клина $\gamma = 1'$. Определить расстояние между двумя соседними минимумами при наблюдении интерференции в отраженном свете. Как изменится интерференционная картина, если клин освещать рассеянным светом той же длины волны? Найти расстояние от вершины клина, на котором интерференционные полосы начнут исчезать, если степень некогерентности света $\Delta\lambda/\lambda = 0,01$.

Решение. По условию задачи, на стеклянный клин падает плоская световая волна, которую можно считать почти монохроматической. При попадании на любую прозрачную пленку свет частично проходит через нее, а частично отражается, как от верхней, так и от нижней границы. В результате, световые пучки, отраженные от этих поверхностей приобретают разность хода, зависящую от толщины пленки, ее показателя преломления и угла падения света. Толщина пленки d и угол скоса клина γ по условию задачи малы. Мал и угол падения лучей α . Это позволяет считать, что интерференционная картина, при регистрации ее в отраженном свете, локализована на верхней поверхности клина. В данном случае картина представляет собой чередование темных и светлых полос, параллельных ребру клина. Для каждой полосы толщина стеклянного клина одинакова. Так как интерференционная картина образуется в результате отражения света от обеих поверхностей клина, то при освещении его пучком параллельных лучей наблюдение интерференции возможно только при рассматривании верхней поверхности клина под определенным углом, зависящим от угла падения света α . Если падающий свет рассеянный, то отражение будет происходить под разными углами. Глаз как бы выбирает интерференционные полосы, образованные лучами, падающими на клин под определенным углом α .

Изменение угла зрения фактически соответствует изменению угла падения α в уравнении для разности хода лучей, идущих от верхней и нижней граней клина: $\Delta = 2d \cdot (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2} - \lambda/2$.

При относительно большой толщине клина может сказываться немонохроматичность света. Интерференционные картины, соответствующие различным длинам волн, будут накладываться друг на друга. В результате интерференционная картина становится неразличимой. Интерференционная картина начнет исчезать, если расстояние между максимумами одного порядка для длин волн λ и λ' окажется больше половины ширины интерференционной полосы, для света с длиной волны λ .

Чтобы найти расстояния между соседними темными полосами, определим разность соответствующих им толщин клина h . Это позволит нам через угол γ при основании клина найти расстояние x между соседними интерференционными полосами. Условия минимума в отраженном свете для k -го и $(k+1)$ -го порядков запишем в виде

$$2d_k \cdot (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2} - \lambda/2 = (2k + 1) \cdot \lambda/2,$$

$$2d_{k+1} \cdot (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2} - \lambda/2 = (2k + 3) \cdot \lambda/2,$$

где $k = 1, 2, \dots$. При $k = 0$ $d_0 = 0$, т. е. темная полоса идет по ребру клина. Вычитая из одного уравнения другое и разделив полученный результат на $2(n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2}$, найдем, что $d_{k+1} - d_k = h = \lambda/[2(n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2}]$. Поскольку $x = h/\sin \gamma$, то $x = \lambda/[2\sin \gamma (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2}] = 0,64$ мм.

Предельное условие различимости интерференционной картины состоит в том, что максимум k -о порядка для длины волны λ' совпадает с минимумом того же порядка для длины волны λ . Приравнивая $(d_k)_{\max}$ и $(d_k)_{\min}$, получим

$$[k - (1/2)](\lambda + \Delta\lambda) = k\lambda.$$

Откуда $k = [(\lambda/\Delta\lambda) + 1]/2$. Если $\lambda/\Delta\lambda \gg 1$, то $k = \lambda/(2\Delta\lambda)$. Подставив это выражение в уравнение $2d_k \cdot (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2} - \lambda/2 = (2k + 1) \cdot \lambda/2$, найдем наибольшую толщину клина, при которой интерференционная картина еще различима:

$$d_{\max} \approx (\lambda/2\Delta\lambda)[\lambda/(n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2}].$$

Это соответствует расстоянию от вершины клина

$$x_{\max} \approx d_{\max}/\sin \gamma \approx \lambda/[4(\Delta\lambda/\lambda)\sin \gamma (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2}] \approx 32 \text{ мм.}$$

Если падающий свет содержит длины волн, непрерывно меняющиеся от λ до $\lambda + \Delta\lambda$, то такую сплошную полосу можно представить себе как две линии шириной $\Delta\lambda/2$ каждая, смещенные друг относительно друга на $\Delta\lambda/2$. Тогда полученный результат будет вдвое больше, т. е., 64 мм.

Пример 6. Между двумя плоскопараллельными пластинами лежит проволока диаметром $d = 0,01$ мм. В результате образовался воздушный клин длиной $L = 73,3$ мм. При рассмотрении пластин в отраженном свете с длиной волны $\lambda = 546$ нм видны интерференционные полосы. Найти ширину темных полос.

Решение. Запишем выражение для разности хода интерферирующих лучей в месте наибольшей толщины воздушного клина: $2dncos\beta = N\lambda$. Здесь d – диаметр проволоочки, равный наибольшей толщине клина, β – угол преломления, N – число полос интерференции на длине клина L . Поскольку клин воздушный, то показатель преломления $n = 1$. Лучи света падают нормально, поэтому $cos\beta = 1$. Тогда $N = 2d/\lambda$. Ширина одной темной полосы равна расстоянию между двумя максимумами интерференции света: $x = L/N = L\lambda/2d = 2$ мм.

Пример 7. Для измерения показателя преломления аммиака в одно из плеч интерферометра Майкельсона вставили трубку длиной $l = 14$ см. Торцы трубки герметично закрыты плоскопараллельными стеклянными пластинами и из нее откачан воздух. После заполнения трубки аммиаком интерференционная картина сместилась на $k = 180$ полос. Длина волны света $\lambda = 590$ нм. Найти абсолютный показатель преломления n аммиака.

Решение. Луч дважды проходит через трубку с аммиаком. При этом разность хода лучей, проходящих в аммиаке и в вакууме, равна $2(nl - l) = 2l(n - 1) = k\lambda$. Таким образом, $n = (k\lambda/2l) + 1 = 1,00038$.

Пример 8. На пути одного из лучей в интерферометре Жамена поместили откачанную трубку длиной $l = 12$ см. При заполнении трубки хлором интерференционная картина для света с длиной волны $\lambda = 580$ нм сместилась на $k = 160$ полос. Найти показатель преломления хлора.

Решение. В отличие от интерферометра Майкельсона в интерферометре Жамена луч проходит через трубку только один раз. Поэтому разность хода лучей, проходящих в хлоре и в вакууме, равна $nl - l = l(n - 1) = k\lambda$. Отсюда $n = (k\lambda/l) + 1 = 1,000773$.

Пример 9. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается светом с длиной волны $\lambda = 589$ нм. Свет падает вдоль главной оптической оси стеклянной плосковыпуклой линзы, радиус кривизны которой $R = 10$ м. Пространство между стеклянной пластинкой и линзой заполнено жидкостью. Найти показатель преломления жидкости, если радиус третьего светлого кольца в проходящем свете $r_3 = 3,65$ мм.

Решение. Результат интерференции зависит от оптической разности хода, которая равна $\Delta = 2d_k n$. Здесь d_k – это расстояние между выпу-

клой поверхностью стеклянной линзы и пластинкой в месте наблюдения k – го кольца Ньютона. Для наблюдения светлого кольца необходимо, чтобы $\Delta = 2d_k\lambda = 2k\lambda/2$. Радиус k – о светлого кольца $r_k = (2d_k R)^{1/2}$. После подстановок и преобразований получаем $n = k\lambda R/r_k^2 = 1,33$.

Пример 10. Кольца Ньютона образуются между плоским стеклом и линзой с радиусом кривизны $R = 8,6$ м. Монохроматический свет падает нормально. Центральное темное кольцо считаем нулевым. Диаметр четвертого темного кольца 9 мм. Найти длину волны λ падающего света.

Решение. Из условия задачи следует, что центральное пятно темное. Следовательно, наблюдение происходит в отраженном свете. При этих условиях радиусы темных колец можно найти по формуле $r_k = (R \cdot \lambda \cdot k)^{1/2}$. Здесь номер кольца $k = 0, 1, 2, \dots$; отсюда $\lambda = r_k^2 / R \cdot k = 589$ нм.

Интерференция

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти разность фаз двух интерферирующих монохроматических световых волн, если их оптическая разность хода равна $0,3\lambda$, где λ – длина волны.

2. Расстояние между двумя когерентными источниками света в опыте Юнга равно 0,1 мм. Расстояние между интерференционными полосами на экране в средней части интерференционной картины равно 1 см. Длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм. Определить расстояние от источников до экрана.

3. Ширина интерференционных полос на экране в опыте Юнга составляет 1,5 мм, расстояние от щелей до экрана – 3 м. Чему равно расстояние между двумя щелями, являющимися в опыте когерентными источниками, если длина волны света равна 500 нм?

4. В опыте с бизеркалом Френеля расстояние между мнимыми изображениями источника света равно 0,5 мм. Расстояние от них до экрана равно 3 м. Найти расстояния между интерференционными максимумами на экране, в центральной его части, если длина волны источника света равна 0,6 мкм.

5. На мыльную пленку с показателем преломления $n = 1,3$ в воздухе нормально падает свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. При какой наименьшей толщине пленки отраженный свет будет максимально усиленным в результате интерференции?

6. Пучок света с длиной волны $\lambda = 600$ нм падает на находящуюся в воздухе мыльную пленку ($n = 1,3$) под углом 60° к ее поверхности. При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут максимально ослаблены интерференцией?

7. Угол между поверхностями, образующими стеклянный клин, составляет $2'$, абсолютный показатель преломления стекла $n = 1,55$. На клин в воздухе нормально падает монохроматический свет. Найти его длину волны, если расстояние между двумя соседними интерференционными максимумами в отраженном свете равно $0,3$ мм.

8. Поверхности стеклянного клина образуют между собой угол $0,2'$. Пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 550$ нм нормально падает на одну из поверхностей клина. Найти ширину интерференционной полосы. Коэффициент преломления стекла $n = 1,55$.

9. Пучок света с длиной волны $\lambda = 600$ нм падает на стеклянный клин перпендикулярно к одной из его поверхностей. Расстояние между двумя соседними интерференционными минимумами в отраженном свете равно 4 мм. Найти угол между поверхностями клина.

10. Определить оптическую силу плосковыпуклой стеклянной линзы в опыте с кольцами Ньютона, если диаметр второго светлого кольца $1,2$ мм. Наблюдение ведется в отраженном свете, длина волны которого $\lambda = 600$ нм. Абсолютный показатель преломления стекла $n = 1,55$.

11. Диаметры двух светлых колец Ньютона, наблюдаемых в отраженном свете равны 4 и $4,8$ мм. Длина волны света $\lambda = 500$ нм. Найти радиус кривизны плосковыпуклой линзы, если известно, что между этими кольцами расположено три светлых кольца.

12. После заполнения жидкостью пространства между линзой и плоской пластиной на месте третьего кольца Ньютона в отраженном свете оказалось четвертое. Определить показатель преломления жидкости.

13. Наблюдаемая на экране интерференционная картина от двух когерентных источников света с длиной волны $\lambda = 480$ нм после помещения на пути одного из пучков тонкой прозрачной пластинки сместилась на 69 полос. Найти толщину пластинки, если известно, что ее абсолютный показатель преломления $n = 1,46$.

14. В интерферометре Майкельсона после перемещения зеркала на $27,3$ мкм интерференционная картина сместилась на 100 полос. Найти длину волны монохроматического света, с которым проводился опыт.

15. На тонкий стеклянный клин ($n = 1,55$) падает нормально монохроматический свет. Угол при основании клина равен $2'$. Найти длину световой волны, если расстояние между соседними интерференционными максимумами в отраженном свете равно $0,3$ мм.

16. Расстояние между вторым и двадцать вторым светлыми кольцами Ньютона в проходящем свете равно 4,8 мм. Найти расстояния между третьим и шестнадцатым темными кольцами Ньютона, наблюдаемым на той же установке в отраженном свете.

17. Пучок света с длиной волны $\lambda = 582$ нм падает нормально на поверхность стеклянного клина. Угол клина равен $20''$. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Найти число темных интерференционных полос, приходящихся на единицу длины клина.

18. Белый свет падает на мыльную пленку под углом 45° к ее поверхности. При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет ($\lambda = 600$ нм)? Показатель преломления мыльной воды $n = 1,33$.

19. Кольца Ньютона наблюдаются в проходящем свете, падающем по нормали к поверхности пластины. После заполнения пространства между линзой и стеклянной пластиной жидкостью, радиусы светлых колец уменьшились в 1,25 раза. Определить показатель преломления жидкости.

20. В установке для получения колец Ньютона радиус четвертого темного кольца в отраженном монохроматическом свете равен 4,5 мм. Радиус кривизны линзы $R = 8,6$ м. Найти длину волны λ падающего света. Центральное темное кольцо считать за нулевое.

21. Два когерентных источника света, расстояние между которыми 0,24 мм, удалены от экрана на 2,5 м. На экране наблюдаются чередующиеся темные и светлые полосы. Установлено, что 10,5 полос умещается на 5 см. Найти длину волны падающего на экран света.

22. При наблюдении интерференции от двух мнимых источников монохроматического света с длиной волны $\lambda = 520$ нм на экране умещается 8,5 полос на 4 см. Найти расстояние между этими источниками, если от них до экрана 2,75 м.

23. Когерентные источники белого света, расстояние между которыми 0,32 мм, имеют вид узких щелей. Экран, на котором наблюдается интерференционная картина, находится от них на расстоянии 3,2 м. Найти расстояние между красной ($\lambda_k = 760$ нм) и фиолетовой ($\lambda_\phi = 400$ нм) линиями второго интерференционного спектра на экране.

24. Стеклянный клин $n = 1,5$ с очень малым углом α между его гранями освещается пучком света с длиной волны $\lambda = 650$ нм, падающим перпендикулярно к его поверхности. Определить угол α , если известно, что расстояния между двумя соседними темными интерференционными полосами равны 12 мм.

25. Найти диаметр второго светлого кольца Ньютона, наблюдаемого в отраженном свете с длиной волны $\lambda = 640$ нм, если радиус кривизны линзы равен 6,4 м, а лучи параллельны ее главной оптической оси.

26. Для измерения толщины волоса его положили на стеклянную пластинку и сверху прикрыли другой пластинкой. Расстояние от волоса до линии соприкосновения пластинок, которой он параллелен, 20 см. При освещении пластинок красным светом с длиной волны $\lambda = 750$ нм на 1 см уместается 8 интерференционных полос. Определить толщину волоса.

27. Найти длину волны света, падающего на зеркала Френеля, если расстояние между двумя мнимыми изображениями источника света в зеркалах равно 0,7 мм, расстояние от изображений до экрана 2,267 м, а ширина темной полосы интерференции равна 1,9 мм.

28. Мыльная пленка толщиной 0,104 мкм освещается лучами Солнца. Определить окраску пленки при наблюдении ее в отраженном свете, при угле отражения 35° , если показатель преломления $n = 1,33$.

29. Между двух шлифованных пластин попал волос диаметром 0,05 мм, вследствие чего образовался воздушный клин. Определить расстояние от волоса до вершины воздушного клина, если лучи света с длиной волны 589 нм падают на пластинку под углом $\alpha = 60^\circ$ и дают в отраженном свете 8,5 интерференционных полос на 1 см длины пластинки.

30. Расстояние между вторым и двадцатым темными кольцами Ньютона, наблюдаемыми в отраженном свете, равно 4,8 мм. Найти расстояние между третьим и шестнадцатым темными кольцами.

31. В установке для наблюдения колец Ньютона свет от ртутной лампы падает нормально к поверхности пластины. Наблюдение производится в проходящем свете. Какое по порядку светлое кольцо, соответствующее линии 579,1 нм, совпадает со светлым кольцом, соответствующим линии 577 нм?

32. На стеклянную пластинку положена выпуклой стороной плосковыпуклая линза. При нормальном падении на плоскую поверхность линзы красного света с длиной волны 610 нм в отраженном свете на линзе видны чередующиеся темные и светлые кольца (кольца Ньютона), а в центре линзы — темное пятно (минимум нулевого порядка). Определить радиус кривизны выпуклой поверхности линзы, если радиус пятого светлого кольца равен 5 мм.

33. Найти диаметр второго светлого кольца Ньютона, наблюдаемого в отраженном свете с длиной волны 640 нм. Радиус кривизны линзы, лежащей на плоской пластине, равен 6,4 м, а лучи параллельны главной оптической оси линзы.

34. Определить радиус кривизны и оптическую силу линзы, лежащей на плоской пластине, если радиус четвертого светлого кольца Ньютона, наблюдаемого в отраженном свете, равен 4,5 мм. Освещение производится светом с длиной волны 520 нм, падающим параллельно главной оптической оси линзы.

35. При наблюдении колец Ньютона в отраженном свете диаметр четвертого темного кольца казался равным 14,4 мм. Определить длину волны монохроматического света, которым освещается плосковыпуклая линза, лежащая на пластине. Радиус кривизны линзы равен 22 м, лучи падают параллельно ее главной оптической оси.

36. Определить, светлое или темное кольцо Ньютона в отраженном свете будет иметь радиус 5,3 мм, если оно возникло при освещении линзы светом, падающим параллельно главной оптической оси линзы. Радиус кривизны линзы равен 18 м.

37. Оптическое покрытие снижает до нуля отражение света с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определить эффективность этого покрытия для света с длиной волны $\lambda_1' = 450$ нм и $\lambda_2' = 700$ нм. Под эффективностью понимается отношение интенсивности прошедшего «просветляющую» пленку отраженного света к его первоначальной интенсивности.

38. В оба плеча интерферометра Жамена поместили трубки длиной 10 см, герметично закрытые с торцов прозрачными одинаковыми плоскопараллельными пластинками. Воздух из трубок был откачан. Когда одну из трубок заполнили водородом, интерференционная картина сместилась на $k = 23,7$ полосы. Найти показатель преломления n водорода. Длина волны света равна $\lambda = 590$ нм.

39. Для измерения показателя преломления аргона в одно из плеч интерферометра Майкельсона поместили откачанную трубку длиной 12 см, закрытую с обоих торцов плоскопараллельными стеклами. После заполнения трубки аргоном интерференционная картина сместилась на 106 полос. Длина волны используемого света равна 639 нм. Найти показатель преломления n аргона.

40. В интерферометре Майкельсона используется свет с длиной волны $\lambda = 546$ нм. На какое расстояние необходимо переместить одно из зеркал, чтобы интерференционная картина сместилась на 100 полос?

41. В интерферометре Майкельсона используется свет с длиной волны $\lambda = 590$ нм. В одно из плеч интерферометра поместили откачанную трубку длиной 10 см, закрытую с обоих торцов плоскопараллельными стеклами. После заполнения трубки хлористым водородом произошло смещение интерференционной картины. После замены хлори-

стого водорода бромистым водородом интерференционная картина еще сместилась на 42 полосы. Найти разность показателей преломления бромистого и хлористого водорода.

42. В интерферометре Майкельсона перемещение одного из зеркал на 54,6 мкм вызвало смещение интерференционной картины на k полос. Чему равно k , если в интерферометре используется свет с длиной волны $\lambda = 546$ нм?

43. Белый свет нормально падает на находящуюся в воздухе мыльную пленку ($n = 1,3$). При какой наименьшей толщине пленки отраженный свет в результате интерференции окажется максимально усиленным для длины волны $\lambda = 550$ нм?

44. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга равно 1 мм, расстояние от щелей до экрана – 3 м. Определить длину волны монохроматического света, испускаемого источником, если расстояние между светлыми полосами интерференции на экране равно 1,5 мм.

45. В опыте Юнга расстояние между щелями равно 0,8 мм. На каком расстоянии от щелей следует расположить экран, чтобы расстояние между интерференционными полосами оказалось равным 2 мм? Длина волны монохроматического света, используемого в опыте, $\lambda = 640$ нм.

46. На экране наблюдается интерференционная картина от двух когерентных источников света с длиной волны 600 нм. На пути одного из лучей поместили тонкую пластинку из плавленого кварца с показателем преломления $n = 1,5$. После этого интерференционная картина сместилась на 500 полос. Определить толщину этой пластинки.

47. Плосковыпуклая линза выпуклой поверхностью положена на плоскую стеклянную поверхность и освещена нормально падающим на плоскую поверхность линзы светом с длиной волны $\lambda = 680$ нм. Диаметр четвертого темного кольца Ньютона в отраженном свете оказался равным 6,4 мм. Определить радиус кривизны выпуклой поверхности линзы.

48. Пучок белого света падает по нормали к поверхности стеклянной пластинки толщиной 0,4 мкм. Показатель преломления стекла 1,5. Какие длины волн λ , лежащие в пределах видимого спектра (от 400 до 700 нм), усиливаются в отраженном свете?

49. Диаметр четвертого светлого кольца Ньютона, наблюдаемого в отраженном свете, равен 9 мм. Освещение производится светом с длиной волны 520 нм, падающим параллельно главной оптической оси линзы. Найти радиус второго темного кольца.

50. В интерферометре Майкельсона длина волны падающего света равна 644 нм. Определить, на сколько полос сместится интерференционная картина при перемещении одного из зеркал на 0,161 мм.

Ответы

1. $\Delta\varphi = 0,6\pi$.
2. $L = 2$ м.
3. $\Delta x = 1$ мм.
4. $\Delta l = 3,6$ мм.
5. $d_{\min} = 0,1$ мкм.
6. $d_{\min} = 0,25$ мкм.
7. $\lambda = 541$ нм.
8. $\Delta l = 3,15$ нм.
9. $\alpha = 10,3''$.
10. $D = 1,25$ дп.
11. $R = 0,88$ м.
12. $n = 1,33$.
13. $h = 72$ мкм.
14. $\lambda = 546$ нм.
15. $\lambda = 541$ нм.
16. $\Delta l = 3,66$ мм.
17. $N = 5$ см⁻¹.
18. $d_{\min} = 0,13$ мкм.
19. $n = 1,56$.
20. $\lambda = 589$ нм.
21. $\lambda = 457$ нм.
22. $\Delta x = 0,3$ мм.
23. $\Delta l = 72$ мм.
24. $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-5}$ рад (3,7').
25. $2r_2 = 5$ мм.
26. $h = 0,06$ мм.
27. $\lambda = 580$ нм.
28. $\lambda = 500$ нм (зеленый).
29. $l = 10$ см.
30. $\Delta r = 3,6$ мм.
31. $k = 275$.
32. $R = 9,1$ м.
33. $2r_2 = 7$ мм.
34. $R = 11,1$ м; $D = 0,045$ дп.
35. $\lambda = 589$ нм.
36. светлое, $k = 4$.
37. $I_1/I_0 = 0,109$;
 $I_1/I_0 = 0,111$.
38. $n = 1,00014$.
39. $n = 1,000282$.
40. $\Delta l = 27,3$ мкм.
41. $\Delta n = 0,000124$.
42. $k = 200$.
43. $d_{\min} = 0,1$ мкм.
44. $\lambda = 500$ нм.
45. $L = 2,5$ м.
46. $h = 60$ мкм.
47. $R = 3,8$ м.
48. $\lambda = 480$ нм.
49. $r_2 = 3,4$ мм.
50. $N = 500$.

4.3.2. Дифракция света

Дифракцией называют процессы, связанные с отклонением волн от прямолинейного распространения на границах непрозрачных для них препятствий. Эти процессы сопровождаются интерференционным перераспределением энергии. Огибая препятствие, волна заходит в область геометрической тени. Дифракция света сопровождается интерференцией дифрагировавших лучей. Дифракция возникает в том случае, когда фронт волны не является безграничным, а частично экранирован. Например, вблизи границ непрозрачных или прозрачных тел, сквозь малые отверстия. Интенсивность при дифракционных явлениях можно приближенно рассчитать, пользуясь принципом Гюйгенса–Френеля, который все точки волновой поверхности рассматривает как центры воображаемых когерентных источников. Излучаемые ими сферические волны называют элементарными. Огибающая элементарных волн — это волновая поверхность для последующего момента времени. Она перемещается в направлении распространения волны. Принцип Гюйгенса–Френеля позволяет рассмотреть многие случаи дифракции света и дает результаты, удовлетворительно согласующиеся с опытом. Чтобы понять суть метода, разработанного Френелем, определим амплитуду светового колебания, возбуждаемого в точке P сферической волной, приходящей от точечного источника S , рис. 4.23. Разобьем изображенную на рисунке волновую поверхность на кольцевые зоны, построенные так, что расстояния от краев каждой зоны до точки P отличаются на $\lambda/2$. Это зоны Френеля. Колебания, приходящие в точку P от аналогичных точек двух соседних зон, находятся в противо-

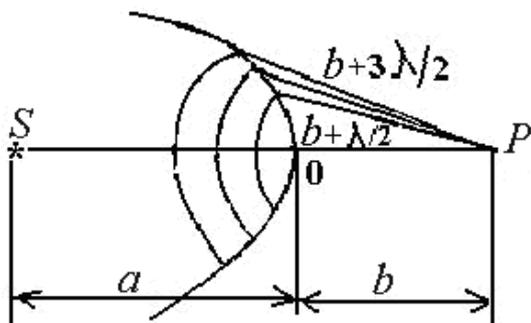


Рис. 4.23. Схема зон Френеля

Расстояние от зоны до точки P с ростом номера зоны k увеличивается медленно, поэтому амплитуда A_k колебания, возбуждаемого k -й зоной в точке P , убывает монотонно. Приближенно можно считать, что $A_k = (A_{k-1} + A_{k+1})/2$ и $A = A_1/2$. То есть амплитуда в точке P равна половине амплитуды центральной зоны. Если на пути волны поставить непрозрачный экран с отверстием, открывающим только центральную зону, тогда амплитуда в точке P будет равна A , а интенсивность света будет в четыре раза больше, чем при отсутствии преград между точками S и P . Если же отверстие таково, что открывает две зоны Френеля, то амплитуды от этих зон (примерно одинаковые) придут в точку P в противофазе, и в ней будет наблюдаться минимум интенсивности света. Из сказанного следует: если в открытый фронт волны входит четное число зон Френеля, то наблюдается минимум интенсивности света; если k — нечетное, то наблюдается в точке P максимум интенсивности света.

Различают два случая дифракции света: дифракцию Френеля, или дифракцию в сходящихся лучах, и дифракцию Фраунгофера, или дифракцию в параллельных лучах. В первом случае на препятствие падает сферическая или плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, находящемся за препятствием на конечном расстоянии от него. Фактически, этот случай мы уже рассмотрели. Во втором случае на

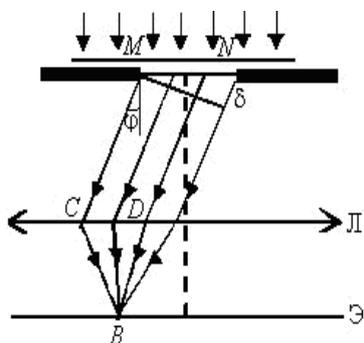


Рис. 4.24. Дифракция света на щели

препятствие падает плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, который находится в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной на пути прошедшего через препятствие света. Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на щели. Схема опыта представлена на рис. 4.24. Пусть параллельный пучок монохроматического света падает нормально на непрозрачный экран, в котором прорезана узкая щель шириной a . В со-

ответствии с принципом Гюйгенса–Френеля все точки щели являются когерентными источниками света, колеблющимися в одной фазе. Оптическая разность хода между крайними лучами MC и ND , идущими от щели в произвольном направлении φ , равна $\delta = a \cdot \sin\varphi$. Разобьем щель MN на зоны Френеля, имеющие вид полос, параллельных ребру M щели. Все зоны в заданном направлении излучают свет совершенно одинаково. При интерференции света от каждой пары соседних зон амплитуда результирующих колебаний равна нулю, так как эти зоны вызывают колебания с одинаковыми амплитудами, но с противоположными фазами.

Результат интерференции в точке B определяется тем, сколько зон Френеля укладывается в щели. Если число зон четное, то $a \cdot \sin\varphi = \pm 2k \cdot (\lambda/2)$, ($k = 1, 2, \dots$) и наблюдается дифракционный минимум. Если число зон нечетное, то $a \cdot \sin\varphi = \pm (2k + 1) \cdot (\lambda/2)$ и наблюдается дифракционный максимум. Величина k называется порядком дифракционного максимума (или минимума).

Совокупность большого числа узких параллельных щелей одинаковой ширины, расположенных в одной плоскости на одинаковом расстоянии друг от друга, называют плоской *дифракционной решеткой*. Сумма ширины одной щели и промежутка между соседними щелями, называется *постоянной* (или периодом) *дифракционной решетки*. Дифракционную картину можно наблюдать либо с помощью зрительной трубы, либо на экране, расположенном за дифракционной решеткой. При нормальном падении лучей на поверхность дифракционной решетки направления, в которых будет наблюдаться максимальная освещенность на экране (*главные максимумы*), определяются из условия:

$$d \cdot \sin\varphi = \pm k \cdot \lambda, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где d – период дифракционной решетки, φ – это угол между нормалью к дифракционной решетке и направлением на соответствующий дифракционный максимум. Для более коротких волн условие максимума выполняется при меньших углах. Если на решетку падает свет разных длин волн, максимумы для различных длин волн располагаются под различными углами φ , поэтому дифракционная решетка разлагает монохроматический свет в дифракционный спектр. Направления, в которых интенсивность освещения будет минимальна (*главные минимумы*), определяются из условия:

$$a \cdot \sin\varphi = \pm k \cdot \lambda, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где a – ширина щели дифракционной решетки. Кроме того, из-за взаимной интерференции световых лучей, посылаемых соседними щелями решетки, возникают *дополнительные минимумы*. Их положение определяется условием:

$$d \cdot \sin \varphi = \pm (2k + 1) \cdot \lambda / 2, (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Разрешающая способность R дифракционной решетки, то есть способность ее представить отдельно две спектральные линии, определяется по формуле

$$R = k \cdot N,$$

где N – общее число штрихов дифракционной решетки, k – порядок дифракционного максимума.

Если на дифракционную решетку падает не монохроматический, а белый свет, дифракционные максимумы, соответствующие разным длинам волн, будут расположены в различных частях экрана. Возникает дифракционный спектр. При $k = 1, 2, \dots$ возникают *нормальные спектры* первого, второго, третьего и так далее порядков. Дифракционный спектр называют *нормальным*, когда протяженность световых зон пропорциональна диапазонам их длин волн. Этого не наблюдается в дисперсионном спектре, образуемом при разложении белого света призмой. Там красная область растянута по сравнению с синей и фиолетовой. Дифракционная решетка сильнее отклоняет более длинные красные волны, чем синие и фиолетовые. При нормальной дисперсии в призме картина противоположная: отклонение красных лучей наименьшее.

На краях оправ и диафрагм *оптических приборов* происходит дифракция света, с этим связана их *разрешающая способность*. Точки предметов отображаются в виде маленьких кружочков, соседние из которых сливаются, и их невозможно различить. Каждый прибор характеризуется *максимальной разрешающей способностью* (предельным разрешением). Предельное разрешение определяется или минимальным углом, под которым различимы две соседние точки предмета, или минимальным расстоянием между точками, при котором они различимы. Для глаза или подзорной трубы предельное разрешение (минимальный угол зрения) δ определяется формулой

$$\delta = 0,61 \cdot \lambda / r.$$

Для микроскопа предельное разрешение (минимальное расстояние между точками) d определяется формулой

$$d = 0,61 \cdot \lambda / A.$$

В этих соотношениях λ – длина волны света, r – радиус диафрагмы объектива, A – численная апертура объектива; $A = n \cdot \sin \alpha$, где n – показатель преломления среды между предметом и объективом микроскопа, α – угловая апертура, то есть угол, под которым виден радиус выходного отверстия объектива из точки предмета.

Основные расчетные формулы

- Радиус k -й зоны Френеля $r_k = [a \cdot b \cdot k \cdot \lambda / (a + b)]^{1/2}$.
- Условие дифракционного минимума для щели $a \cdot \sin \varphi = \pm 2k \cdot (\lambda/2)$ ($k = 1, 2, \dots$).
- Условие дифракционного максимума для щели $a \cdot \sin \varphi = \pm (2k + 1) \cdot (\lambda/2)$.
- Условие дифракционного максимума для решетки $d \cdot \sin \varphi = \pm k \cdot \lambda$ ($k = 0, 1, \dots$).
- Разрешающая сила дифракционной решетки $R = \lambda / \Delta \lambda = kN$.
- Угловая дисперсия дифракционной решетки $D_\varphi = d\varphi / d\lambda = k / d \cos \varphi$.
- Линейная дисперсия дифракционной решетки $D_l = dl / d\lambda$.
- Для малых углов дифракции $D_l \approx f D_\varphi = fk / d$.

Примеры решения задач

Пример 1. Расстояние от точечного источника волны до волновой поверхности и от волновой поверхности до точки наблюдения равно 1 м. Найти радиусы первых пяти зон Френеля, если длина волны равна 500 нм.

Решение. Радиус k -й зоны Френеля равен $r_k = [k \cdot a \cdot d \cdot \lambda / (a + d)]^{1/2}$. Здесь a – расстояние от источника волн до волновой поверхности, d – расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения. Подставив численные значения, найдем $r_1 = 0,50$ мм, $r_2 = 0,71$ мм, $r_3 = 0,86$ мм, $r_4 = 1,0$ мм, $r_5 = 1,12$ мм.

Пример 2. Посередине между точечным источником монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и экраном для наблюдения помещен экран с круглым отверстием. При каком диаметре отверстия центр наблюдаемых дифракционных колец будет наиболее темным? Расстояние между источником света и экраном для наблюдения равно 4 м.

Решение. Наименьшая освещенность центра наблюдаемых дифракционных колец соответствует двум зонам Френеля, помещающимся в отверстии промежуточного экрана. Радиус k -ой зоны Френеля равен $r_k = [k \cdot a \cdot d \cdot \lambda / (a + b)]^{1/2}$. Здесь a – расстояние от источника волн до волновой поверхности, b – расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения. В нашем случае радиус второй зоны будет одновременно и радиусом отверстия. Подставляя численные значения, получим, что диаметр отверстия $d = 2r_2 = 2$ мм.

Пример 3. На щель шириной $d = 2$ мкм падает нормально свет с длиной волны $\lambda = 589$ нм. Найти углы по отношению к нормали к щели, под которыми будут наблюдаться дифракционные минимумы света.

Решение. Положение минимумов освещенности при дифракции от щели, на которую нормально падает пучок параллельных лучей, определяется условием $d \cdot \sin \varphi = \pm k \cdot \lambda$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, φ – угол наблюдения. Первый минимум наблюдается под углом $17^\circ 8'$, второй – под углом $36^\circ 5'$, третий – под углом $62^\circ 4'$. Четвертого минимума для данной щели не существует, поскольку при подстановке в расчетную формулу значения $k = 4$, для синуса угла φ_4 получаем значение, большее единицы.

Пример 4. Пучок света от газоразрядной трубки, наполненной водородом, падает нормально на дифракционную решетку. Найти постоянную дифракционной решетки, если известно, что в направлении $\varphi = 41^\circ$ совпадают две линии: $\lambda_1 = 656,3$ нм и $\lambda_2 = 410,2$ нм.

Решение. В дифракционной решетке максимумы света наблюдаются в направлениях, составляющих с нормалью к решетке угол φ , удовлетворяющий соотношению: $d \cdot \sin \varphi = \pm k \cdot \lambda$, где d – постоянная решетки, φ – угол наблюдения. Записав это соотношение для двух длин волн, и приравняв значения синусов углов, получим: $\sin \varphi = k_1 \cdot \lambda_1 / d = k_2 \cdot \lambda_2 / d$ или $k_1 \cdot \lambda_1 = k_2 \cdot \lambda_2$. Отсюда $k_2 / k_1 = \lambda_1 / \lambda_2 = 656,3 / 410,2 = 1,6$. Поскольку k_1 и k_2 должны быть целыми числами, соотношение $k_2 / k_1 = 8 / 5$ или $k_2 = 8$, а $k_1 = 5$. Таким образом, $d = k_1 \cdot \lambda_1 / \sin \varphi = 5 \cdot 10^{-6}$ м.

Пример 5. Постоянная дифракционной решетки равна $d = 2$ мкм. Найти наибольший порядок спектра для желтой линии натрия $\lambda = 589$ нм.

Решение. В дифракционной решетке максимумы света наблюдаются в направлениях, составляющих с нормалью к решетке угол φ , удовлетворяющий соотношению: $d \cdot \sin \varphi = \pm k \cdot \lambda$, где d – постоянная решетки, φ – угол наблюдения. Наибольший порядок спектра будет при $\sin \varphi = 1$. Тогда $k = d / \lambda = 3,4$; т. е. наибольший порядок спектра, который может быть получен при помощи этой решетки, равен трем.

Пример 6. Определить угловую и линейную дисперсию дифракционной решетки для света с длиной волны $\lambda = 589$ нм в спектре первого порядка. Постоянная дифракционной решетки равна $d = 2,5$ нм. Фокусное расстояние F линзы, проецирующей спектр на экран, равно $0,5$ м.

Решение. Угловой дисперсией дифракционной решетки называется величина, равная $D = d\varphi / d\lambda$. Из условия наблюдения максимума $d \cdot \sin \varphi = k \cdot \lambda$ после дифференцирования получаем $d \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = k \cdot d\lambda$, или $d\varphi / d\lambda = k / (d \cdot \cos \varphi)$. Выражая косинус угла φ через его синус, значение которого находим из условия наблюдения максимумов, после подстановки численных значений, находим $D = 4,1 \cdot 10^5$ м⁻¹. Линейная дисперсия дифракционной решетки для малых углов дифракции равна $D_l = F \cdot D$. После подстановки численных значений находим: $D_l = 2,25 \cdot 10^5$.

Пример 7. Период дифракционной решетки равен $d = 2 \cdot 10^{-5}$ м. На каком расстоянии от дифракционной решетки нужно поставить экран, чтобы для монохроматического света с длиной волны 500 нм расстояние между центральным и максимумом четвертого порядка было равно $5 \cdot 10^{-2}$ м?

Решение. В дифракционной решетке максимумы света наблюдаются в направлениях, составляющих с нормалью к решетке угол φ , удовлетворяющий соотношению: $d \cdot \sin \varphi = \pm k \cdot \lambda$, где d – постоянная решетки, φ – угол наблюдения. Иначе $\sin \varphi$ можно найти из прямоугольного треугольника, в котором противолежащим углу φ катетом l является часть экрана, лежащая между центральным максимумом и максимумом четвертого порядка, а прилежащим катетом x – расстояние от дифракционной решетки до экрана. Тогда $\sin \varphi = l / (l^2 + x^2)^{1/2}$. Сравнив записанные соотношения, окончательно получаем: $k \cdot \lambda / d = l / (l^2 + x^2)^{1/2}$, откуда $x = 0,5$ м.

Пример 8. Дифракционное изображение спектра второго порядка находится на расстоянии 5 см от центрального и на расстоянии 1 м от решетки. Спектр получен с помощью дифракционной решетки, постоянная решетки равна 22 мкм. Найти длину световой волны. Наблюдение ведется без линзы.

Решение. Используем формулу для дифракционной решетки $d \cdot \sin \varphi = k \cdot \lambda$. Поскольку $x \ll L$, а угол φ мал, можно считать, что $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = x / L$. Тогда $d \cdot x / L = k \cdot \lambda$.

Отсюда окончательно получаем: $\lambda = (d \cdot x) / (k \cdot L)$. После подстановки численных значений получим: $\lambda = 550$ нм.

Пример 9. Найти период дифракционной решетки, если при нормальном падении на нее лучей длиной волны $\lambda = 0,75$ мкм на экране, отстоящем от решетки на расстоянии $L = 1$ м, максимумы первого порядка отстоят друг от друга на $l = 30$ мм. Определить число штрихов на 1 мм решетки.

Решение. Условие максимума для дифракционной решетки: $d \cdot \sin \varphi = k \cdot \lambda$, $k = 1$. Так как $l \ll L$, то $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = l / 2L$. Тогда $d = 2\lambda L / l = 50$ мкм. $N = 1/d = 20$ штрихов.

Пример 10. На дифракционную решетку от разрядной трубки, наполненной гелием, нормально падает пучок света. На какую линию λ_1 (в нанометрах) в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия длиной волны $\lambda_2 = 706$ нм в спектре второго порядка?

Решение. Запишем условия главных максимумов для дифракционной решетки: $d \cdot \sin \varphi_1 = k_1 \cdot \lambda_1$; $d \cdot \sin \varphi_2 = k_2 \cdot \lambda_2$. Спектральные линии накладываются одна на другую, поэтому углы дифракции будут равными: $\varphi_1 = \varphi_2$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 k_2 / k_1 = 471$ нм.

Пример 11. Точечный источник света с длиной волны $\lambda = 500$ нм расположен на расстоянии $a = 1$ м перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом $r = 1$ мм. Определить расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения, для которой число зон Френеля в отверстии равно трем.

Решение. Радиус внешней границы k -ой зоны $r_k = [a \cdot b \cdot k \cdot \lambda / (a + b)]^{1/2}$; найдем: $b = ar^2 / (ak\lambda - r^2) = 2$ м.

Пример 12. Для измерения длины волны красного цвета на дифракционную решетку с периодом $1/100$ мм направили пропущенный через красный светофильтр пучок света. Определить длину волны красного цвета, если на экране, стоящем от решетки на расстоянии $L = 1$ м, расстояние между спектрами первого порядка равно $l = 15,2$ см.

Решение. Условие максимума для дифракционной решетки имеет вид: $d \sin \varphi = k\lambda$; $\sin \varphi = l/2L$, но так как угол φ мал, то $\lambda = dl/2Lk = 0,76$ мкм.

Задачи для самостоятельного решения

Зоны Френеля

1. Круглое отверстие радиусом R в непрозрачном экране содержит для точки наблюдения три зоны Френеля. К отверстию вплотную прижимают собирающую линзу. Найти фокусное расстояние F , при котором интенсивность света с длиной волны λ в точке наблюдения остается прежней.

2. На отверстие $R = 1$ мм падает плоская световая волна. Когда расстояние от преграды до экрана $l_1 = 0,572$ м, в центре дифракционной картины наблюдается максимум интенсивности. При увеличении расстояния до $l_2 = 0,862$ м максимум сменяется минимумом. Найти длину волны λ .

3. Источник и экран расположены симметрично на расстоянии $2L$ от круглого отверстия. Отверстие оставляет открытой одну зону Френеля. Во сколько раз изменится интенсивность на экране, если к отверстию приложить линзу с фокусом $F = L$?

4. В стеклянной пластинке с $n = 1,5$, на которую нормально падает плоская волна, вырезано круглое отверстие размером в одну зону Френеля некоторой точки на оси системы. Определить, при какой толщине пластинки h интенсивность I колебаний в данной точке будет максимальной, если в отсутствии пластинки интенсивность равна I_0 . Длина волны света равна λ .

5. Вдали от точечного источника S стоит идеально отражающий экран. Из экрана удален диск диаметром $d_1 = 2r_1\sqrt{2/3}$, где r_1 — радиус первой зоны Френеля, и поставлен другой диаметром $d_2 = d_1/\sqrt{2}$. Найти

интенсивность I отраженной волны в точке S , если диск диаметром d_2 стоит в плоскости экрана.

6. Отверстие диаметром $d = 1$ мм освещается светом $\lambda = 0,5$ мкм от удаленного точечного источника. Найти расстояние L_{\max} от отверстия, на котором будет наблюдаться наибольшая освещенность.

7. Источник с $\lambda = 0,5$ мкм расположен на расстоянии $a = 1$ м от отверстия $R = 1$ мм. Найти расстояние от отверстия до точки наблюдения, для которой число зон Френеля равно 3.

8. Между источником и экраном поместили отверстие, радиус которого R можно менять. Расстояние от источника $a = 1$ м, а до экрана $b = 1,25$ м. Найти длину волны λ , если максимум освещенности в центре дифракционной картины наблюдается при $R_1 = 1$ мм и следующий максимум при $R_2 = 1,29$ мм.

9. Плоская волна интенсивностью I_0 нормально на непрозрачный диск, закрывающий для точки наблюдения первую зону Френеля. Какова стала интенсивность в точке наблюдения после того, как у диска удалили: 1) половину по диаметру; 2) половину внешней половины первой зоны Френеля по диаметру?

10. Свет с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм падает нормально на отверстие диаметром $d = 6$ мм. Экран расположен на расстоянии $l = 3$ м. Какое число зон Френеля укладывается в отверстие? Каким будет центр картины на экране: темным или светлым?

11. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии l от точечного источника с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. На расстоянии $a = 0,5l$ от источника помещен круг диаметром $d = 1$ см. Найти расстояние l , если круг закрывает только центральную зону Френеля.

12. На отверстие диаметром $d = 1,96$ мм падает нормально параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. При каком наибольшем расстоянии l между отверстием и экраном в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно?

13. Свет с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм падает на отверстие диаметром $d = 1$ мм. От источника это отверстие видно под углом $2'$. На каком расстоянии от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы в отверстии помещалась одна зона Френеля?

14. Диаметр четвертой зоны Френеля для плоского волнового фронта равен $r_4 = 6$ мм. Определить радиус двадцать пятой зоны Френеля.

15. Отверстие диаметром $d = 2$ мм находится на расстоянии 1 м от точечного источника света. Найти, при каких разных длинах волн λ_1 и λ_2 в точке наблюдения на расстоянии 1 м будет наблюдаться темное пятно.

16. Плоская волна интенсивностью I_0 падает нормально на круглое отверстие. Какова интенсивность света I за экраном в точке, для которой отверстие сделали равным первой зоне Френеля и затем перекрыли его половину по диаметру?

17. Плоская волна $\lambda = 0,57$ мкм падает нормально на поверхность стеклянного ($n = 1,5$) диска, который закрывает полторы зоны Френеля для точки наблюдения. При какой минимальной толщине диска интенсивность света в точке наблюдения будет максимальной? Учесть интерференцию света при прохождении диска.

18. На пути плоской волны $\lambda = 0,54$ мкм поставили собирающую линзу с $F = 0,5$ м, сразу за ней диафрагму с круглым отверстием и на расстоянии $l = 0,75$ м от диафрагмы экран. При каких радиусах отверстия центр дифракционной картины на экране имеет максимальную освещенность?

19. Дифракция Френеля происходит на препятствии диаметром 2 мм при освещении плоской световой волной. В центре дифракционной картины максимум заменяется минимумом при передвижении экрана от 1 до 2 м. Найти длину волны λ .

20. На щель ширины d в непрозрачной ширме падает плоская волна длины $\lambda = 0,5$ мкм. На расстоянии $l = 1$ м за щелью расположен экран. Определить ширину щели, при которой ее изображение на экране имеет минимальный размер.

21. Источник света с длиной волны $\lambda = 0,75$ мкм расположен на расстоянии $a = 1$ м от отверстия радиуса r , экран на расстоянии $b = 1$ м. Каким должен быть минимальный радиус r , чтобы интенсивность света в точке наблюдения была равна интенсивности падающей волны.

22. Источник света с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм находится на расстоянии $a = 1$ м от отверстия $r = 2$ мм. а) Какое минимальное число открытых зон Френеля может наблюдаться в этих условиях? б) При каком расстоянии от экрана получается минимально возможное число открытых зон? в) При каком радиусе отверстия может быть открыта только одна центральная зона?

23. Построить график зависимости размера отверстия от числа зон Френеля, если точечный источник света и экран находятся на расстоянии 2 м, а отверстие посередине между ними, при увеличении максимума дифракционной картины.

24. На диафрагму диаметром $d = 2$ мм падает нормально параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. При каком наибольшем расстоянии между диафрагмой и экраном в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно?

25. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном некотором расстоянии l от монохроматического точечного источника света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Посередине между источником и экраном помещена непрозрачная диафрагма с круглым отверстием. При каком диаметре отверстия центр наблюдаемых на экране дифракционных колец будет наиболее темным?

Ответы

1. $F = R^2/(2m\lambda)$, $m = 1, 2, 3, \dots$ 2. $\lambda = 0,57$ мкм. 3. Интен. увел. в 2 раза. 4. $h = \lambda(2m + 1)/2(n - 1)$; $I_{\max} = 9I_0$, $m = 0, 1, 2, \dots$ 5. $I = 0$. 6. $L = d^2/4\lambda(2m + 1)$, $m = 0, 1, 2, \dots$; при $m = 0$, $L_{\max} = 0,5$ м. 7. $b = aR^2/(k\lambda a - R^2) = 2$ м. 8. $\Lambda = (R_2^2 - R_1^2)(a + b)/2ab = 0,6$ мкм. 9. 1) $I = 0$; 2) $I = I_0/2$. 10. $m = 5$; светлым. 11. $l = 167$ м. 12. $l = 0,8$ м. 13. $B = a / (ma\lambda/r^2 - 1) = 0,7$ м; $a = d/\alpha$. 14. $r = 7,5$ мм. 15. $\lambda_1 = 1$ мм, $\lambda_2 = 2$ мм. 16. $I = I_0$. 17. $h_{\min} = \lambda(k + 5/8)/(n - 1) = 2,5$ мкм, где $k = 2$. 18. $r = \sqrt{k\lambda Fb/(b - F)} = 0,9\sqrt{k}$ мм, где $k = 1, 3, 5, \dots$ 19. $\lambda = r^2(b_2 - b_1)/b_1b_2 = 2$ мкм. 20. $d_{\min} = \sqrt{2b\lambda} = 1$ мм. 21. $r = \sqrt{(b\lambda/3)} = 0,5$ мм (1/3 1-й зоны). 22. 1) m_{\min} равно наим. целому числу, превыш. $r^2/a\lambda = 8$; $b = ar^2/(am\lambda - r^2) = 10$ м; 3) $r \leq \sqrt{a\lambda} = 0,74$ мм. 24. 0,83 м. 25. $d = 2$ мм.

Дифракционная решетка

1. Свет с длиной волны $\lambda = 0,535$ мкм падает нормально на решетку. Найти ее период, если одному из максимумов соответствует угол дифракции 35° и наибольший порядок спектра равен пяти.

2. Найти длину волны λ света, падающего нормально на решетку с периодом $d = 2,2$ мкм, если угол между направлениями на максимумы первого и второго порядков равен $\Delta\varphi = 15^\circ$.

3. Свет, падающий нормально на решетку, состоит из двух линий с длинами волн $\lambda_1 = 0,49$ мкм и $\lambda_2 = 0,6$ мкм. Первый дифракционный максимум для λ_1 наблюдается под углом $\varphi_1 = 10^\circ$. Найти угловое расстояние $\Delta\varphi$ между линиями в спектре второго порядка.

4. Какое число N штрихов должна иметь решетка для того, чтобы разрешить в спектре первого порядка линии желтого дублета натрия, длины волн которого равны 0,589 и 0,5896 мкм?

5. Какой должна быть минимальная длина решетки L_{\min} с периодом $d = 2$ мкм, чтобы с ее помощью можно было во втором порядке разрешить две спектральные линии $\lambda_1 = 500$ нм и $\lambda_2 = 500,5$ нм?

6. Определить полное число главных максимумов, которые реализуются при дифракции плоской волны с длиной волны λ на дифракционной решетке с периодом $d = 4,5\lambda$.

7. На решетку, имеющую 50 штрихов на миллиметр падает нормально параллельный пучок белого света. Какова разность углов отклонения конца первого и начала второго спектров? Длины крайних волн принять равными 0,76 и 0,4 мкм.

8. Дифракционная решетка, освещенная нормально монохроматическим светом, отклоняет спектр второго порядка на угол 14° . На какой угол отклоняет она спектр третьего порядка?

9. Длина решетки $l = 15$ мм, период $d = 5$ мкм. В спектре какого наименьшего порядка получатся отдельные изображения двух спектральных линий с разностью длин волн $\Delta\lambda = 10^{-10}$ м, если линии лежат в области спектра от 0,78 до 0,7 мкм?

10. Период решетки $d = 0,01$ мм. Какое наименьшее число штрихов N должна содержать решетка, чтобы линии дублета натрия $\lambda_1 = 0,589$ мкм и $\lambda_2 = 0,5896$ мкм можно было видеть отдельно в спектре первого порядка?

11. На дифракционную решетку с периодом $d = 0,005$ мм под углом $\alpha = 30^\circ$ падает свет длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. Определить углы, под которыми наблюдаются максимумы второго порядка.

12. На решетку, имеющую $N = 500$ штрихов на миллиметр, падает белый свет с $\lambda_{\text{кр}} = 0,78$ мкм, $\lambda_{\text{ф}} = 0,4$ мкм. Спектр проецируется линзой на экран. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана $l = 3$ м.

13. Угловая дисперсия решетки для длины волны $\lambda = 0,668$ мкм в спектре первого порядка $d\varphi/d\lambda = 2,02 \cdot 10^5$ рад/м. Найти период дифракционной решетки.

14. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию λ_2 в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия $\lambda_1 = 0,67$ мкм спектра второго порядка?

15. На решетку падает нормально пучок белого света. Какова должна быть постоянная решетки d , чтобы в направлении $\varphi = 41^\circ$ совпадали максимумы линий $\lambda_1 = 653,3$ нм и $\lambda_2 = 410,2$ нм?

16. Определить полное число главных максимумов, которые реализуются при дифракции плоской монохроматической волны λ на решетке с периодом $d = 10\lambda$.

17. На дифракционную решетку нормально падает белый свет. Красная линия $\lambda_1 = 630$ нм видна в спектре 3 – го порядка под углом $\varphi = 60^\circ$. Какая спектральная линия λ_2 видна под этим же углом в спектре 4-го порядка?

18. Найти угловую дисперсию $d\varphi/d\lambda$ дифракционной решетки для длины волны $\lambda = 0,63$ мкм, если эта линия видна в спектре третьего порядка под углом $\varphi = 60^\circ$.

19. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков отчасти перекрывают друг друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница $\lambda = 0,4$ мкм спектра третьего порядка?

20. Постоянная дифракционной решетки $d = 2$ мкм. Какую разность длин волн $\Delta\lambda$ может разрешить эта решетка в области желтых лучей $\lambda = 0,6$ мкм в спектре второго порядка? Ширина решетки $l = 2,5$ см.

21. На решетку, имеющую $N = 500$ штрихов на миллиметр падает нормально белый свет. Спектр проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран. Определить длину спектра второго порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана $l = 31$ м. Границы видимого спектра $\lambda_\phi = 0,4$ мкм; $\lambda_k = 0,75$ мкм.

22. Для какой длины волны λ дифракционная решетка имеет угловую дисперсию $d\varphi/d\lambda = 6,3 \cdot 10^5$ рад/м в спектре третьего порядка? Постоянная решетки $d = 5$ мкм.

23. Указать порядки главных максимумов, которые не могут наблюдаться при дифракции света на дифракционной решетке с периодом $d = 9$ мкм и шириной одной щели $a = 3$ мкм.

24. Свет длиной волны $\lambda = 0,53$ мкм падает на решетку с периодом $d = 1,5$ мкм. Найти угол, под которым наблюдается максимум наибольшего порядка, если свет падает на решетку под углом 60° к нормали.

25. Половина дифракционной решетки перекрывается с одного края экраном, в результате чего число штрихов уменьшается вдвое. Как изменятся при этом: 1) положение максимумов, 2) высота центрального максимума, 3) суммарная площадь максимумов.

26. Найти, при каком отношении $x = b/d$ ($d = a + b$) дифракционный максимум k -го порядка будет иметь: 1) максимальную интенсивность, 2) интенсивность, равную нулю. Интенсивность падающего на решетку света и период решетки d считаются заданными.

27. Свет с длиной волны $\lambda = 0,589$ мкм падает на решетку с периодом $d = 2,5$ мкм, содержащую $N = 10000$ штрихов. Найти угловую ширину дифракционного максимума второго порядка.

28. На дифракционной решетке под углом $\varphi = 30^\circ$ и $\lambda = 0,7$ мкм наблюдается спектр второго порядка. Найти постоянную решетки и число штрихов на единицу длины.

29. Дифракционная решетка состоит из непрозрачных штрихов шириной $b = 2,5 \cdot 10^{-3}$ мм, разделенных прозрачными участками шириной $a = 2,5 \cdot 10^{-3}$ мм. Какую толщину h должна иметь стеклянная пластинка $n = 1,5$, чтобы в ней максимум третьего порядка для $\lambda = 0,6$ мкм наблюдался под тем же углом, что и у дифракционной решетки?

30. Период дифракционной решетки $d = 0,1$ мм, а ширина прозрачной части $a = 0,0025$ мм. Сколько максимумов не будет наблюдаться в спектре по одну сторону от нулевого максимума до угла 30° из-за влияния главных минимумов при $\lambda = 0,5$ мкм?

31. Дифракционная решетка шириной 12 мм содержит 4800 штрихов. Найти: 1) число максимумов, наблюдаемых в спектре решетки при $\lambda = 0,5$ мкм; 2) угол, соответствующий последнему максимуму.

32. У дифракционной решетки ширина прозрачных участков равна $a = 4\lambda$, ширина штрихов $b = 8\lambda$. Определить углы, соответствующие первым трем наблюдаемым максимумам.

33. Дифракционная решетка содержит $N = 1000$ щелей. Какова ее ширина, если под углом 90° наблюдается 5000-й добавочный минимум дифракционной картины для длины волны $\lambda = 0,59$ мкм?

34. Период дифракционной решетки равен $d = 5 \cdot 10^{-6}$ м. Какой элемент дифракционной картины будет наблюдаться под углом $\varphi = 30^\circ$, если длина волны $\lambda = 0,6$ мкм, а ширина решетки $l = 0,25$ см?

35. Период дифракционной решетки $d = 6$ мкм. Для спектральной линии водорода $\lambda = 0,486$ мкм подобрать такое наибольшее $\Delta\lambda$, чтобы нигде не было перекрытия спектров при освещении светом в интервале $\lambda \pm \Delta\lambda$.

36. Две дифракционные решетки имеют одинаковую ширину $l = 3$ мм, но разные периоды: $d_1 = 3$ мкм и $d_2 = 6$ мкм. Определить их наибольшую разрешающую способность для $\lambda = 589,6$ нм.

37. На щель шириной $2 \cdot 10^{-5}$ м падает нормально свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. На расстоянии одного метра от щели находится экран. Найти ширину изображения щели на экране. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

38. Найти постоянную дифракционной решетки, если известно, что для наблюдения красной линии ($\lambda = 700$ нм) в спектре второго порядка зрительную трубу пришлось установить под углом 30° к оси коллиматора. Какое число штрихов нанесено на 1 см длины этой решетки?

39. На дифракционную решетку нормально падает параллельный пучок света. Угол отклонения для линии натрия ($\lambda = 589$ нм) в спектре

первого порядка равен $17^{\circ}8'$. Найти длину волны неизвестной линии, если в спектре второго порядка угол ее отклонения равен $24^{\circ}12'$. Найти число штрихов, на 1 см длины этой решетки.

40. Пучок света от газоразрядной трубки, наполненной гелием, падает нормально на дифракционную решетку. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия ($\lambda = 670$ нм) в спектре второго порядка.

41. Постоянная дифракционной решетки равна $d = 2$ мкм. Какую наибольшую длину волны можно наблюдать в спектре этой решетки?

42. Какое наибольшее число штрихов, приходящееся на 1 см длины, может быть у дифракционной решетки, если известно, что с ее помощью можно наблюдать спектральную линию с длиной волны 1000 нм?

43. Дифракционная решетка может разрешить в первом порядке линии спектра калия $\lambda_1 = 404,4$ нм и $\lambda_2 = 404,7$ нм. Ширина решетки 3 см. Найти постоянную дифракционной решетки.

44. Найти угловую дисперсию дифракционной решетки для света с длиной волны $\lambda = 668$ нм в спектре первого порядка. Постоянная дифракционной решетки равна 5 нм.

45. Найти линейную дисперсию дифракционной решетки и расстояние между линиями ($\lambda_1 = 557$ нм и $\lambda_2 = 579,1$ нм) на экране в спектре первого порядка. Период дифракционной решетки $d = 2$ мкм. Фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран, равно 0,6 м.

46. Параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 589$ нм падает нормально на щель шириной 2 мкм. Под какими углами φ будут наблюдаться дифракционные максимумы света?

47. Параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на щель шириной 20 мкм. Найти ширину изображения (расстояние между первыми дифракционными минимумами) на экране, удаленном от щели на расстояние 1 м.

48. Параллельный пучок света с длиной волны λ падает нормально на щель шириной, равной 6λ . Под каким углом φ будет наблюдаться третий дифракционный максимум света?

49. Найти число штрихов на единицу длины имеет дифракционная решетка, если зеленая линия ртути ($\lambda = 546,1$ нм) в спектре первого порядка наблюдается под углом $19^{\circ}8'$.

50. От газоразрядной трубки на дифракционную решетку нормально падает пучок света. Найти постоянную решетки, если известно, что в направлении $\varphi = 41^{\circ}$ совпали максимумы линий 656,3 и 410,2 нм.

51. Постоянная дифракционной решетки равна $d = 2$ мкм. Найти наибольший порядок спектра для желтой линии натрия с длиной волны $\lambda = 589$ нм.

52. Дифракционная решетка шириной 2,5 см позволяет в первом порядке разрешить дуплет натрия: $\lambda_1 = 589$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм. Найти постоянную решетки.

53. Какую разность длин волн $\Delta\lambda$ в области желтых лучей ($\lambda = 600$ нм) может разрешить в спектре второго порядка дифракционная решетка, если ее постоянная равна 2,5 см?

54. Найти длину волны падающего на дифракционную решетку света, если для него решетка имеет угловую дисперсию $d\varphi/d\lambda = 6,3 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$ в спектре третьего порядка. Постоянная решетки равна 5 мкм.

55. Найти фокусное расстояние линзы, проецирующей на экран спектр, полученный с помощью дифракционной решетки. Известно, что расстояние между двумя линиями калия 404,4 и 404,7 нм в спектре первого порядка равно 0,1 мм. Постоянная решетки равна 2 мкм.

56. На решетку с постоянной 0,006 мм нормально падает монохроматический свет. Угол между спектрами первого и второго порядков равен $4^\circ 36'$. Определить длину световой волны.

57. Найти наибольший порядок спектра, который может образовать дифракционная решетка, имеющая 500 штрихов на 1 мм, если длина волны света, падающего нормально на решетку, равна 590 нм.

58. Длина волны красного света, испускаемого раскаленными парами лития, определяется при помощи дифракционной решетки, имеющей 40 штрихов на 1 мм. При измерении оказывается, что дифракционный максимум в спектре четвертого порядка наблюдается под углом $6^\circ 10'$. Найти длину волны λ .

59. Спектр получен с помощью дифракционной решетки с постоянной, равной 22 мкм. Дифракционное изображение первого порядка находится на расстоянии 5 см от центрального максимума и 2 м от решетки. Найти длину световой волны.

60. Дифракционная решетка содержит 500 штрихов на 1 мм. На решетку падает свет с длиной волны 500 нм. Найти, под каким углом виден первый максимум.

Ответы

1. $d = 2,8$ мкм. 2. $\lambda = (d \sin \Delta\varphi) / \sqrt{5} - 4 \cos \Delta\varphi = 0,54$. 3. $\Delta\varphi = 4,8^\circ$. 4. $N \approx 1000$. 5. $L_{\min} = \langle \varphi \rangle d / (\varphi_2 - \varphi_1) m = 10$ мм. 6. $2m + 1 = 9$ ($m = 4$). 7. $\Delta\varphi = 7'$. 8. $\varphi = 21^\circ 17'$. 9. $k = 3$. 10. $N = 982$. 11. $d(\sin\varphi - \sin\alpha) = k\lambda$;

$\varphi_1 = 47^\circ 44'$; $\varphi_2 = 15^\circ 04'$. 12. $x = 66$ см. 13. $d = 0,6$ мкм. 14. $\lambda_2 = 409,9$ нм.
 15. $d = 5$ мкм. 16. $n = 21$. 17. $\lambda_2 = 475$ нм. 18. $d\varphi/d\lambda = 4,1 \cdot 10^5$ рад/м.
 19. $\lambda_2 = 0,6$ мкм. 20. $\Delta\lambda = 24$ пм. 21. $x = 9$ см. 22. $\lambda = 0,51$ мкм. 23. $k_{\max} = d/a = 3$.
 24. $\varphi = 64^\circ$. 25. 1) не измен.; 2) высота центрального максимума в 2 ра-
 за меньше; 3) ширина прежняя. 26. 1) $x = (2k + 1)/2m$, где $k = 0, 1, \dots$
 2) $x = k/m$, где $k = 1, \dots, m-1$. 27. $\Delta\varphi = 2\lambda/Nd\sqrt{1-(k\lambda/d)^2} = 11''$. 28. $d = 2,8$ мкм;
 $N = 357143$. 29. $(k - 1/2)\lambda = 2h(n^2 - \sin^2\alpha)^{1/2}$; $\alpha = \varphi$; $h = 0,51$ мкм.
 30. $k' = md/a = 4m$; пропадают 4 и 8 максимумы. 31. 1) $k_{\max} = 4$; 2) $\varphi_{\max} = 68^\circ$.
 32. $d/a = 3$; не будут наблюдаться максимумы, кратные 3; $\varphi_1 = 4^\circ 47'$;
 $\varphi_2 = 9^\circ 36'$; $\varphi_3 = 19^\circ 28'$. 33. $l = Nd = m\lambda/\sin\varphi = m\lambda = 0,295$ см. 34. минимум.
 35. $k_{\max}(\lambda + \Delta\lambda) = (k_{\max} + 1)(\lambda - \Delta\lambda)$; $\Delta\lambda = 19,4$ нм. 36. $r_1 = r_2 = Nk_{\max} = 5000$.
 37. $l = 5$ см. 38. $d = 2,8$ мкм; $N = 3570$ см $^{-1}$. 39. $\lambda = 409,9$ нм, $N = 5000$ см $^{-1}$.
 40. $\lambda = 447$ нм. 41. $\lambda = 2000$ нм. 42. не более 1000 см $^{-1}$. 43. $d = 2,2 \cdot 10^{-5}$ м.
 44. $D_\varphi = 2,02 \cdot 10^5$ м $^{-1}$. 45. $D_l = 0,31$ мм/нм; $l = 0,65$ мм. 46. $\varphi_1 = 17^\circ 8'$; $\varphi_2 = 36^\circ 5'$;
 $\varphi_3 = 62^\circ$. 47. $l = 0,05$ м. 48. $\varphi = 30^\circ$. 49. $N = 600$ мм $^{-1}$. 50. $d = 5$ мкм. 51. $k = 3$.
 52. $d = 25,4$ мкм. 53. $\Delta\lambda = 24$ пм. 54. $\lambda = 510$ нм. 55. $F = 0,65$ м. 56. $\lambda = 478$ нм.
 57. $k = 3$. 58. $\lambda = 671$ нм. 59. $\lambda = 550$ нм. 60. $\varphi \approx 0,45^\circ$.

4.3.3. Поляризация света

Волновая теория света активно развивалась в начале XIX века, но природа световых волн еще не была неизвестна. Предполагалось, что свет, подобно акустическим волнам в воздухе, представляет собой продольные волны, распространяющиеся в гипотетической среде, названной эфиром. Для явлений интерференции и дифракции вопрос о том, являются ли световые волны продольными или поперечными, имеет второстепенное значение. В то же время казалось невероятным, что свет — это поперечные волны, так как по аналогии с механическими волнами пришлось бы предполагать, что эфир — это твердое тело (поперечные механические волны не могут распространяться в газообразной или жидкой среде). Но постепенно накапливались экспериментальные факты, свидетельствующие в пользу поперечности световых волн. В 1809 году французский инженер

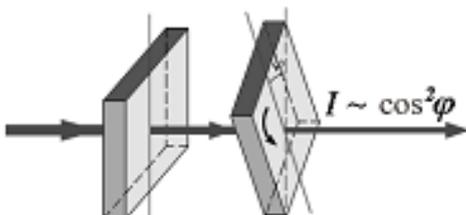


Рис. 4.25 Опыт Малюса

французский инженер *Малюс* провел опыты, в которых свет последовательно пропускался через две одинаковые пластинки из турмалина, прозрачного кристаллического вещества зеленоватого цвета. Пластинки могли поворачиваться друг относительно друга (рис. 4.25).

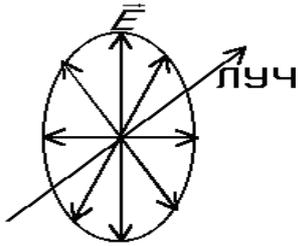


Рис. 4.26. Поперечная волна, бегущая по шнуру

Интенсивность прошедшего света менялась в зависимости от расположения пластин: при определенном положении свет вообще не проходил сквозь пластины. Это явление невозможно объяснить в рамках теории продольных волн. В продольной волне направление распространения луча является осью симметрии. В ней все направления в плоскости, перпендикулярной лучу, равноправны. В поперечной волне (например, в волне, бегущей по шнуру) направление колебаний и перпендикулярное ему направление не равноправны (рис. 4.26). Частицы колеблются вдоль оси Y . Поворот щели S вызовет затухание волны. Таким образом, асимметрия относительно луча является решающим признаком, который отличает поперечную волну от продольной.

В середине 60-х годов XIX века Максвелл пришел к выводу об электромагнитной природе световых волн. Вывод был сделан на основе совпадения известного значения скорости света со скоростью распространения предсказанных Максвеллом электромагнитных волн. К тому времени, когда Максвелл указал на возможность существования электромагнитных волн, поперечность световых волн уже была доказана экспериментально. Поэтому он полагал, что поперечность электромагнитных волн является одним из важнейших доказательств электромагнитной природы света. В световых волнах, излучаемых различными источниками, векторы E (а следовательно, и H) имеют всевозможные направления (при этом векторы E остаются взаимно перпендикулярными соответствующим им векторам H и плоскость, в которой они лежат, перпендикулярна направлению распространения света). Такой свет называют *естественным*. *Поляризованной называется волна, в которой существует предпочтительное направление колебаний*. В оптике вектор электрической напряженности принято называть световым. Из естественного света, пропуская его через поляроид, можно выделить такие волны, в которых световой вектор будет совершать колебания в одной и той же плоскости на всем пути распространения волны. Такие волны называются *линейно (или плоско) поляризованными*. Плоскость, в которой лежат векторы H в линейно поляризованной волне, называется *плоскостью поляризации*, плоскость, в которой лежат векторы E , называется *плоскостью колебаний*. Конец светового вектора E может описывать эллипс (эллиптически поляризованный свет) или окружность (поляризация по кругу), при этом направление луча является осью, вокруг которой век-

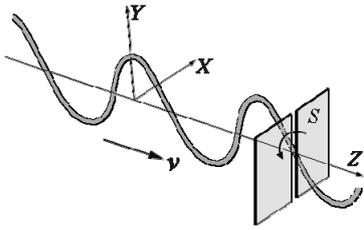


Рис. 4.27. Эллиптически поляризованный свет

тор E вращается с угловой скоростью, равной круговой частоте ω световой волны. Рис. 4.27 схематически иллюстрирует этот случай.

Интенсивностью I электромагнитной волны называется величина, численно равная энергии, переносимой волной за единицу времени сквозь единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению рас-

пространения волны. Интенсивность I линейно поляризованной плоской монохроматической волны пропорциональна квадрату амплитуды светового вектора.

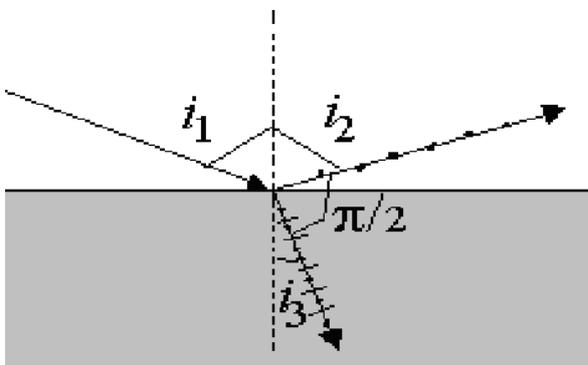


Рис. 4.28. Поляризация света при отражении от поверхности диэлектрика

Естественный свет не поляризован, так как излучается атомами, произвольно ориентированными в пространстве. На границе раздела двух диэлектрических сред часть световых лучей испытывает отражение, а остальные лучи преломляются (рис. 4.28).

Отраженный и преломленный лучи оказываются частично линейно поляризованными. На рис. 4.28 обозначены: i_1 — угол

падения, i_2 — угол отражения, i_3 — угол преломления. Падающий, отраженный, преломленный лучи и нормаль к поверхности диэлектрика в точке падения луча лежат в одной плоскости, ее называют *плоскостью падения*. В отраженном луче преобладают колебания вектора E , перпендикулярные плоскости падения (на рисунке они обозначены точками). В преломленном луче преобладают колебания, параллельные плоскости падения (они изображены штрихами). Обозначения могут быть и прямо противоположными, если точками и штрихами обозначать направления не светового вектора E , а вектора магнитной напряженности H , с которым связано определение *плоскости поляризации*. Степень поляризации отраженного и преломленного света зависит от угла падения i_1 естественного света. В отраженном свете интенсивности колебаний светового вектора, совершающихся перпендикулярно плоскости падения I_{\perp} и параллельно ей I_{\parallel} , определяются *формулами Френеля*:

$$I_{\perp} = 0,5 \cdot I_0 \cdot \left\{ \frac{\sin(i_1 - i_3)}{\sin(i_1 + i_3)} \right\}^2,$$

$$I_{\parallel} = 0,5 \cdot I_0 \cdot \left\{ \frac{\operatorname{tg}(i_1 - i_3)}{\operatorname{tg}(i_1 + i_3)} \right\}^2.$$

Здесь I_0 – интенсивность естественного падающего света. Отраженный свет поляризован полностью при угле падения $i_1 = i_B$, называемом углом Брюстера, который определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21} = n_2/n_1,$$

где n_{21} – относительный показатель преломления сред. При этом угол между отраженным и преломленным лучами равен 90° . Отраженный луч полностью линейно поляризован, колебания его светового вектора совершаются в направлении, перпендикулярном плоскости падения. Преломленный луч поляризован лишь частично, колебания его светового вектора совершаются преимущественно в плоскости падения.

Действия различного типа поляризаторов основаны либо на законе Брюстера, либо на явлении двойного лучепреломления. В *оптически анизотропных кристаллах* луч света, падая на поверхность кристалла, разделяется на два преломленных луча, распространяющихся с различными фазовыми скоростями. Лучи поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях, а диэлектрическая проницаемость и показатель преломления *анизотропных кристаллов* зависят от направления светового вектора E . Раздвоение происходит и в том случае, когда луч на поверхность кристалла падает нормально. Один из лучей является продолжением падающего, а второй немного отклоняется. Первый из лучей называют обыкновенным (o), а второй – необыкновенным (e). Обыкновенный луч лежит в плоскости падения и подчиняется законам преломления света, его показатель преломления одинаков для всех направлений. Необыкновенный луч этим условиям не удовлетворяет, его показатель преломления зависит от направления. Названия «обыкновенный» и «необыкновенный» применимы к лучам только внутри кристалла. После выхода из него это просто два линейно поляризованных световых луча. Двойное лучепреломление в оптически анизотропном кристалле схематически представлено на рис. 4.29. Если на пути любого из лучей, вышедших из кристалла,

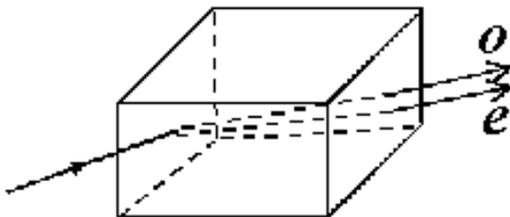


Рис. 4.29. Двойное лучепреломление в оптически анизотропном кристалле: o – обыкновенная волна, e – необыкновенная

поместить другой анизотропный кристалл, опять возникнет два луча, поляризованных, как и раньше, во взаимно перпендикулярных плоскостях. Следовательно, направление поляризации зависит только от ориентации кристалла и не зависит от того, поляризован или нет падающий на него свет.

В любом анизотропном кристалле имеется, по крайней мере, одно направление, в котором падающий луч не раздваивается, и состояние его поляризации не меняется. Можно сказать, что оба преломленных луча распространяются, как в обычной изотропной среде, не раздваиваясь и с одной скоростью. Это направление называется *оптической осью кристалла*. Любая прямая, проходящая параллельно данному направлению, является *оптической осью кристалла*. Распространяясь вдоль нее световой луч не испытывает двойного лучепреломления. Существуют *одноосные* и *двуосные* кристаллы, имеющие соответственно одно и два направления, вдоль которых отсутствует двойное лучепреломление. *Плоскость, проходящую через направление луча в кристалле и пересекаемую им оптическую ось, называют главным сечением или главной плоскостью кристалла, соответствующей этому лучу*. Хотя главные сечения обыкновенного и необыкновенного лучей не совпадают, но угол между ними предельно мал. Поэтому угол между плоскостями поляризации обыкновенного и необыкновенного лучей практически равен 90° . *Колебания светового вектора E происходят у необыкновенного луча в плоскости главного сечения, а у обыкновенного — перпендикулярно ей*.

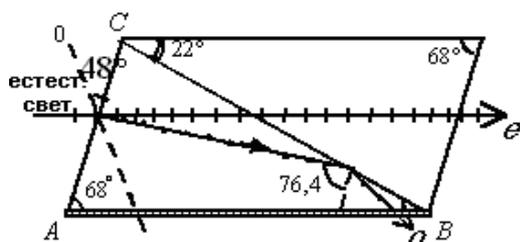


Рис. 4.30. Схематическое изображение призмы Николя

Поляризатора может быть призма Николя (рис. 4.30). Призму Николя (или просто николю) изготавливают из кристалла исландского шпата. В поперечном сечении николю имеет форму ромба. По плоскости CB кристалл разрезан и склеен канадским бальзамом. Падая на грань николя, естественный свет из-за двойного лучепреломления расщепляется на два луча: обыкновенный и необыкновенный.

Внутри кристалла обыкновенный луч o отражается от склейки и поглощается зачерненной поверхностью AB . Из призмы выходит только необыкновенный луч e , поляризованный в плоскости, параллельной главной плоскости призмы. Это означает, что в этом луче вектор H параллелен главной плоскости, а световой вектор E перпендикулярен ей.

Николи используются в качестве поляризаторов и анализаторов света (рис. 4.31).

Николю N_1 является поляризатором. Интенсивность естественного света делится пополам между обыкновенным и необыкновенным лучами. Обыкновенный луч o поглощается зачерненной поверхностью призмы N_1 . Необыкновенный луч e проходит через призму. Если не

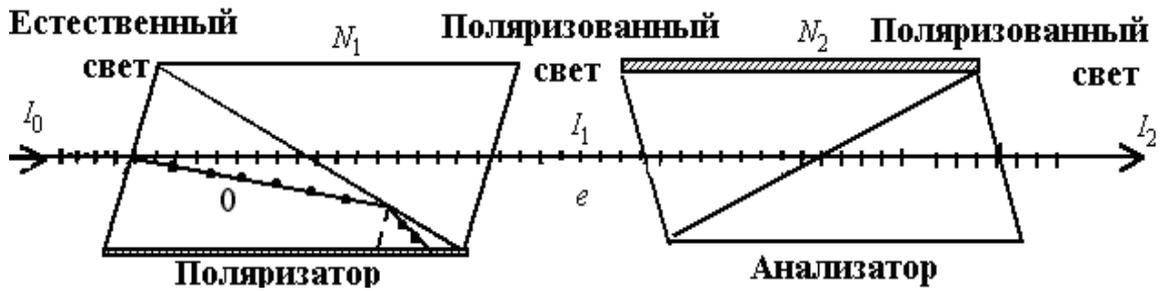


Рис. 4.31. Использование николей в качестве поляризатора и анализатора

учитывать потерь в необыкновенном луче на поглощение и отражение, можно считать, что интенсивность поляризованного света на выходе из николя N_1 вдвое меньше, чем естественного на входе. Устройства, служащие для анализа степени поляризации света, называются анализаторами. В приведенной схеме анализатором является николю N_2 . Пусть два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между их плоскостями поляризации равен φ . Найдем уменьшение интенсивности I_0 естественного света при прохождении через оба николя. Когда на анализатор падает естественный луч, интенсивность проходящего поляризованного света, как минимум вдвое меньше естественного, но не меняется при повороте анализатора. Это происходит потому, что в естественном свете ни одно из направлений плоскости колебаний не является преобладающим. Если на анализатор падает полученный с помощью поляризатора линейно поляризованный свет, интенсивность света, прошедшего через анализатор, будет зависеть от угла φ между главными плоскостями поляризации анализатора и поляризатора. Обозначим через E_1 амплитуду вектора колебаний света, прошедшего через поляризатор. На входе в анализатор луч разложится на два луча, поляризованные в главной плоскости анализатора и перпендикулярно к ней $E_{\parallel} = E_1 \sin \varphi$; $E_{\perp} = E_1 \cos \varphi$. Первый луч поглотится в анализаторе, второй пройдет через него $E_{\perp} = E_1 \cos \varphi$, потому что его колебания совершаются в плоскости колебаний, которая перпендикулярна главной плоскости анализатора. Интенсивность света пропорциональна квадрату модуля светового вектора. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через анализатор и поляризатор, меняется в зависимости от угла φ по закону Малюса $I_2 = I_1 \cos^2 \varphi$.

Если I_0 — интенсивность естественного света, то из поляризатора выходит плоско поляризованный свет с интенсивностью $I_1 = I_0/2$. Тогда интенсивность света, прошедшего через два поляризатора, будет равна $I_2 = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cos^2 \varphi$.

Таким образом, $I_{\max} = \frac{1}{2} \cdot I_0$ (поляризаторы параллельны) и $I_{\min} = 0$ (поляризаторы скрещены). Формулы приведены без учета потерь интенсивности за счет отражения и поглощения.

Если вращать анализатор вокруг луча частично поляризованного света, интенсивность света за анализатором будет меняться. Переход от максимального до минимального значения совершается при повороте на угол 90° . Степень поляризации света можно определить из соотношения $P = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$, где I_{\max} и I_{\min} – максимальная и минимальная интенсивности поляризованного света, пропускаемого анализатором.

Некоторые вещества (например, кварц, раствор сахара в воде) при прохождении через них линейно поляризованного света поворачивают его плоскость поляризации. Это явление называется *вращением плоскости поляризации* или *оптической активностью*. Вращение плоскости поляризации характеризуется *постоянной вращения* (для чистых веществ) и *удельной постоянной вращения* (для растворов).

Основные расчетные формулы

- Формулы Френеля

$$I_{\perp} = 0,5 \cdot I_0 \cdot \{[\sin(i_1 - i_3)] / [\sin(i_1 + i_3)]\}^2; I_{\parallel} = 0,5 \cdot I_0 \cdot \{[\operatorname{tg}(i_1 - i_3)] / [\operatorname{tg}(i_1 + i_3)]\}^2.$$

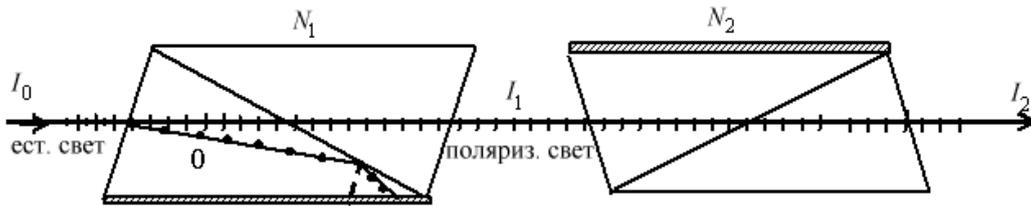
- Угол Брюстера $\operatorname{tg} i_B = n_{21} = n_2 / n_1$.
- Закон Малюса $I_2 = I_1 \cos^2 \varphi$.
- Степень поляризации $P = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$, где I_{\max} и I_{\min} – максимальная и минимальная интенсивности поляризованного света.

Примеры решения задач

Пример 1. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между плоскостями поляризации составляет $\alpha = 60^\circ$. Определите, во сколько уменьшаются интенсивности $I_{\text{ест}}$ естественного света: 1) при прохождении через один николю N_1 ; 2) при прохождении через оба николя. Коэффициент поглощения света в николе $\mu = 0.05$. Потери на отражение света не учитывать.

Решение. Естественный свет с интенсивностью I_0 , падая на грань николя (см. рисунок), расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два луча: обыкновенный и необыкновенный (оба луча линейно поляризованы). Обыкновенный луч поглощается зачерненной поверхностью призмы N_1 . Необыкновенный e проходит через призму, при этом его интенсивность уменьшается вследствие поглощения. Интенсивность естественного света делится пополам между обыкновенным и необыкновенным лучами при входе в николю N_1

$$I_1 = \frac{I_{\text{ест}}}{2}(1 - \mu).$$



Относительное уменьшение интенсивности после прохождения света через N_1 можно записать

$$I_0/I_1 = \frac{I_0}{(I_0/2)(1 - \mu)} = \frac{2}{1 - \mu}.$$

Подставляя численное значение μ , получаем $I_0/I_1 = 2,1$, то есть интенсивность уменьшается в 2,1 раза после прохождения через N_1 . Интенсивность необыкновенного луча, прошедшего через 2-й николю, определяется законом Малюса (без учета поглощения света во втором николе) $I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$. Учитывая потери интенсивности во втором николе, получаем $I_2 = I_1 \cos^2 \alpha (1 - \mu)$. Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя N_1 и N_2 , найдем, разделив I_0 естественного света на интенсивность I_2 , то есть

$$I_0/I_2 = \frac{I_0}{I_1 \cos^2 \alpha (1 - \mu)} = \frac{I_0}{(I_{\text{ест}}/2)(1 - \mu) \cos^2 \alpha (1 - \mu)} = \frac{2}{(1 - \mu)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Подставляя μ , получим:

$$I_0/I_2 = \frac{2}{0,95^2 \cdot 0,25} = 8,86.$$

Таким образом, после прохождения света через оба николя интенсивность уменьшается в 8,86 раз.

Пример 2. Частично поляризованный свет проходит через николю. При повороте николя на угол $\varphi = \pi/3$ от положения, соответствующего максимуму пропускания света, интенсивность прошедшего пучка уменьшилась вдвое. Не учитывая поглощение в николе найти отношение интенсивностей плоскополяризованного и естественного света, а также степень поляризации падающего света.

Решение. Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь естественного и плоскополяризованного. Николю пропускает половину падающего на него естественного света, превращая его в плоскополяризованный. Степень пропускания поляризованного света определяет-

ся законом Малюса. При первом положении николя, соответствующем максимальному пропусканию, интенсивность прошедшего света была

$$I_1 = 0,5I_{\text{ест}} + I_{\text{п}},$$

где $I_{\text{п}}$ – интенсивность поляризованной составляющей падающего на николю света. При втором положении николя интенсивность прошедшего света будет

$$I_2 = 0,5I_{\text{ест}} + I_{\text{п}} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{3} = 0,5I_{\text{ест}} + 0,25I_{\text{п}}.$$

Поскольку по условию задачи $I_1 = 2I_2$, то из записанных соотношений следует: $0,5I_{\text{ест}} + I_{\text{п}} = 2(0,5I_{\text{ест}} + 0,25I_{\text{п}})$. Откуда $I_{\text{ест}} = I_{\text{п}}$, т. е. $I_{\text{п}}/I_{\text{ест}} = 1$. Степень поляризации $P = (I_{\text{max}} - I_{\text{min}})/(I_{\text{max}} + I_{\text{min}})$, где I_{max} и I_{min} – максимальная и минимальная интенсивности поляризованного света, пропускаемого поляризатором. Максимальная интенсивность света, пропускаемого николем $I_{\text{max}} = I_1 = 0,5I_{\text{ест}} + I_{\text{п}} = 1,5I_{\text{п}}$. При повороте николя на угол $\varphi = \pi/2$ свет, ранее поляризованный, не проходит. Поэтому минимальная интенсивность будет $I_{\text{min}} = 0,5I_{\text{ест}} - 0,5I_{\text{п}}$. После подстановки окончательно находим искомую степень поляризации:

$$P = \frac{1,5I_{\text{п}} - 0,5I_{\text{п}}}{1,5I_{\text{п}} + 0,5I_{\text{п}}} = 0,5.$$

Пример 3. Предельный угол полного отражения света на границе кристалла каменной соли с воздухом равен $40,5^\circ$. Определите угол Брюстера при падении света из воздуха на поверхность этого кристалла.

Решение. Когда луч света переходит из оптически более плотной среды (n_1) в оптически менее плотную (n_2), при некотором предельном угле падения i_{np} , угол преломления становится равным 90° , то есть падающий луч испытывает полное внутреннее отражение. В этом случае закон преломления можно представить в виде:

$$\frac{\sin i_{\text{np}}}{\sin \pi/2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

где: n_1 – абсолютный показатель преломления каменной соли; n_2 – показатель преломления воздуха; $n_1 > n_2$; $n_2 = 1$. Согласно закону Брюстера $\text{tg} i_{\text{Бр}} = n_{12} = 1/n_{21}$, где $i_{\text{Бр}}$ – угол Брюстера, то есть угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч максимально поляризован. Угол Брюстера определяется при падении света из воздуха на поверхность каменной соли: Тогда

$$\text{tg} i_{\text{Бр}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\sin i_{\text{np}}}, \quad i_{\text{Бр}} = 57^\circ.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пучок естественного света падает на систему из 6 николей, плоскость пропускания каждого из которых повернута на угол на угол $\varphi = 30^\circ$ относительно плоскости пропускания предыдущего николя. Какая часть светового потока проходит через эту систему?

2. Естественный свет падает на систему из трех последовательно расположенных одинаковых поляроидов, причем плоскость пропускания среднего поляроида составляет угол $\varphi = 60^\circ$ с плоскостями пропускания двух других поляроидов. Коэффициент пропускания каждого поляроида равен 0,81. Во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения этой системы?

3. При падении естественного света на поляризатор проходит 30 % светового потока, а через два таких поляризатора 13,5 %. Найти угол между плоскостями пропускания этих поляризаторов.

4. Естественный свет освещает систему из 3 поляроидов, причем плоскость пропускания среднего поляроида составляет угол 30° с плоскостями двух других. Пропускание каждого поляроида равно 0,5 в максимуме. Во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения системы?

5. Какова будет степень поляризации света, прошедшего через два поляризатора, если каждый в отдельности обеспечивает степень поляризации $P_1 = 0,8$. Плоскости пропускания поляризаторов параллельны.

6. Степень поляризации частично поляризованного света $P = 0,25$. Найти отношение интенсивности поляризованной составляющей этого света к интенсивности естественной составляющей.

7. Естественный свет пропускают через два одинаковых поляризатора. Интенсивность прошедшего через систему света в 9,53 раза больше при параллельных плоскостях, чем при скрещенных. Определить степень поляризации света P_1 , прошедшего только через один поляризатор.

8. На пути естественного пучка света поместили 2 несовершенных поляризатора. Оказалось, что при параллельных плоскостях пропускания эта система пропускает в 10 раз больше света, чем при скрещенных. Найти степень поляризации света, которую создает вся система при параллельных плоскостях пропускания поляризаторов.

9. Один поляроид пропускает 30 % света, если на него падает естественный свет. После прохождения света через два таких поляроида интенсивность падает до 9 %. Найти угол между осями поляроидов.

10. Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный ($n = 1,5$) сосуд, и отражается от дна. Отраженный луч полностью поля-

ризован при падении его на дно сосуда под углом $42^{\circ}37'$. Найти показатель преломления жидкости.

11. Естественный свет проходит через два поляризатора с коэффициентом пропускания 0,92 каждый. Оказалось, что интенсивность луча, прошедшего систему, равна 9 % интенсивности падающего естественного света. Найти угол между главными плоскостями поляризаторов.

12. Найти коэффициент отражения и степень поляризации отраженных лучей при падении естественного света на стекло ($n = 1,5$) под углом 45° .

13. Пластинку кварца толщиной $d = 2$ мм, вырезанную перпендикулярно оптической оси, поместили между параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации света повернулась на угол 53° . Какова должна быть толщина пластинки, чтобы свет не прошел через анализатор?

14. Естественный свет падает на стеклянную плоскопараллельную пластинку под углом Брюстера, при этом интенсивность отраженного света равна 0,1 интенсивности падающего. Найти интенсивность естественного и поляризованного света в отраженном, преломленном и прошедшем лучах.

15. Николь поглощает 10 % поляризованного света, падающего на него. Во сколько раз уменьшается сила естественного света при прохождении через два николя, плоскости поляризации которых составляют угол 63° ?

16. На пути естественного пучка света поместили два поляризатора. Оказалось, что при параллельных плоскостях пропускания эта система пропускает в 7 раз больше света, чем при скрещенных. Найти степень поляризации света, которую создает вся система при параллельных плоскостях пропускания поляризаторов.

17. Линейно поляризованный световой пучок падает на поляризатор, вращающийся вокруг оси пучка с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с. Найти световую энергию, проходящую через поляризатор за два оборота, если поток энергии в падающем пучке $\Phi = 10$ Вт.

18. Найти коэффициент отражения и степень поляризации отраженных лучей при падении естественного света на стекло ($n = 1,5$) под углом 45° . Какова степень поляризации преломленных лучей?

19. На пути пучка естественного света поместили два несовершенных одинаковых поляризатора. Оказалось, что при скрещенных плоскостях поляризаторов эта система пропускает в 3 раза меньше света, чем при параллельных. Найти степень поляризации, которую создает каждый поляризатор в отдельности.

20. Естественный свет проходит через два поляризатора, каждый из которых имеет коэффициент пропускания 0,95 и обеспечивает степень поляризации $P = 0,9$. Какую долю первоначальной интенсивности света составляет интенсивность прошедшего света, если поляризаторы скрещены?

21. Естественный свет проходит через два поляризатора, причем интенсивность света при параллельных плоскостях поляризаторов в 9,53 раза больше, чем при скрещенных. Найти степень поляризации, обусловливаемую системой при параллельных плоскостях поляризаторов.

22. Система из двух поляризаторов, каждый из которых обеспечивает степень поляризации $P_1 = 0,8$, освещается естественным светом. Определить степень поляризации света, прошедшего через систему, если плоскости поляризаторов параллельны.

23. Система из n одинаковых несовершенных поляризаторов освещается естественным светом. Найти степень поляризации P_n естественного света, прошедшего систему, если плоскости двух любых соседних поляризаторов скрещены. Построить график $P_n = f(n)$.

24. Имеется система из n одинаковых поляризаторов. При падении естественного света на один поляризатор получается свет со степенью поляризации P_1 . Найти степень поляризации P_n естественного света, если плоскости двух любых соседних поляризаторов параллельны. Построить график $P_n = f(n)$.

25. Лучи естественного света проходят через плоскопараллельную пластинку $n = 1,55$, падая на нее под углом Брюстера (полной поляризации). Найти степень поляризации лучей, прошедших сквозь пластинку.

26. В фотометре одновременно рассматривают две половины поля зрения: в одной видна эталонная светящаяся поверхность с яркостью 5 ккд/м^2 , в другой – измеряемая поверхность, свет от которой проходит через два николя. Граница между обеими половинами поля зрения исчезает, если второй николь повернуть относительно первого на угол 45° . Найти яркость измеряемой поверхности, если в каждом николе теряется 8 % падающего на него света.

27. Несовершенный поляризатор пропускает $\eta_1 = 0,9$ интенсивности, в перпендикулярной плоскости $\eta_2 = 0,1$ интенсивности. Найти степень поляризации света, прошедшего через поляризатор, если свет был естественным.

28. Угол φ между плоскостями пропускания поляроидов равен 50° . Естественный свет, проходя через такую систему, ослабляется в 8 раз. Найти коэффициент поглощения света в поляроидах.

29. Естественный свет проходит через два николя, повернутые на 45° относительно друг друга. Коэффициенты поглощения николей 0,1 и 0,2. Найти степень ослабления света.

30. Каков должен быть преломляющий угол у стеклянной (показатель преломления $n = 1,5$) призмы, чтобы углы входа и выхода луча из призмы были углами полной поляризации?

31. Во сколько раз уменьшается сила естественного света при прохождении сквозь три николя, повернутых на 60° относительно друг друга, если коэффициент поглощения каждого николя равен 0,1.

32. Луч естественного света падает на систему из $N = 10$ николей, плоскость пропускания каждого из которых повернута на угол 84° относительно плоскости пропускания предыдущего николя. Какая часть светового потока проходит через эту систему?

33. Естественный свет проходит чрез систему 3 николей, каждый из которых повернут на 45° относительно предыдущего. Каждый николь пропускает 8 % света. Во сколько раз уменьшится сила света после прохождения системы?

34. Частично поляризованный свет проходит через николь. При повороте николя на 60° из положения, соответствующего максимуму пропускания, интенсивность прошедшего света уменьшилась в 3 раза. Найти степень поляризации падающего света.

35. Естественный свет падает на систему из 3 николей, повернутых на 60° относительно друг друга. Каждый николь имеет следующие коэффициенты поглощения: $\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = 0,2$, $\alpha_3 = 0,3$. Во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения этой системы?

Ответы

1. $\eta = 1/2(\cos\varphi)^{2(n-1)} = 0,12$. 2. $I_0/I = 2/\tau^2\cos^4\varphi = 60$. 3. $\varphi = 62^\circ$.
4. $P = (1-1/\eta^2)^{1/2} = 0,995$. 4. 300. 5. $P = 2P_1/(1+P_1^2) = 0,976$. 6. $I_{\text{пол}}/I_{\text{ест}} = 1/3$.
7. $P_1 = [(\eta-1)/(\eta+1)]^{1/2} = 0,9$. 8. $P_0 = [(\eta-1)/(\eta+1)]^{1/2} = 0,995$. 9. $\varphi = 45^\circ$.
10. $n = 1,63$. 11. $\varphi = 62^\circ 32'$. 12. $\rho = 5,06\%$; $P_1 = 83\%$. 13. 3,4 мм.
14. отраж.-полн. поляр. $I = 0,1$; прел. – 0,8 ест. и 0,1 поляр.; прош. – 0,63 ест. и 0,18 поляр. 15. 12 раз. 16. $P = 0,89$. 17. $W = \pi\Phi/\omega = 0,314$ Дж.
18. $\rho = 5\%$; $P_2 = 17\%$. 19. $P = 0,905$. 20. $\eta = 0,048$. 21. $P = 0,994$.
22. $P = 0,976$. 25. $P = 18,9\%$. 26. $2,36 \cdot 10^4$ кд/м²; 27. $P = 0,8$. 28. $\alpha = 0,225$.
29. $I_0/I_2 = 5,55$. 30. $66^\circ 40'$. 31. $I_0/I_2 = 43,83$. 32. $\eta = 1/2(\cos\varphi)^{2(n-1)} = 0,5 \cdot 10^{-18}$.
33. $I_0/I = 2/\tau^2\cos^4\varphi = 1,5625 \cdot 10^4$. 34. $P = (\eta - 1) / (1 - \eta\cos^2\varphi) = 0,8$.
35. $I_0/I_3 = 63,5$.

5. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Экологические проблемы являются весьма актуальными в связи с антропогенным воздействием на природу. Величина такого воздействия сильно изменяется в зависимости от степени промышленного развития государства и самосознания общества. Обе эти причины являются производными от интеллектуального и морального состояния общества, которое в значительной мере определяется учреждениями образования вообще, и высшего образования, в частности. Таким образом, именно высшая школа несет ответственность за негативные последствия воздействия цивилизации на природу. Осознание такой ответственности, а также требования времени, обусловили введение в большинстве университетов мира курсов лекций по охране природы. Эффект от такой деятельности, несомненно, есть, и, как всегда, имеет положительные и отрицательные стороны. Вместе с тем, продолжающееся ухудшение экологической обстановки на планете показывает, что таких усилий со стороны высшей школы явно недостаточно. Введение дополнительных курсов по экологии, при сильно перегруженной программе обучения в университетах, нецелесообразно, а часто и неэффективно. В связи с этим, предлагается другой путь пропаганды экологических знаний. Наиболее полно и естественно экологические знания усваиваются студентами в курсе физики. Это обусловлено тем, что проблемы экологии – это, в своей основе, физические проблемы, поэтому их изучение и разъяснение на занятиях по физике является вполне естественным и не требует специальных объяснений. Поэтому для экологического образования не требуется специального курса по экологии, т. к. преподавание практически любого раздела физики можно сопровождать экологическими иллюстрациями. В ряде университетов страны такая работа проводится, что отражается в методическом обеспечении курсов. Например, в сборнике задач по физике Московского физико-технического университета имеются задачи экологической направленности. Другой фундаментальной проблемой, стоящей перед человеческой цивилизацией, является проблема глобального потепле-

ния. Эта проблема интегральная, включающая в себя задачи из всех разделов физики, и, соответственно, позволяет подготовить методический материал по широкому кругу вопросов. Одним из основных в проблеме катастрофического изменения климата является вопрос о правильном расчете радиационного баланса атмосферы. Радиационный баланс, в свою очередь, сильно зависит от наличия облачности и степени загрязненности атмосферы (природной и антропогенной). Кроме того, поглощение солнечной радиации в атмосфере имеет ярко выраженную спектральную зависимость. В то же время результаты расчетов показывают, что для построения адекватной динамической модели климата ошибка в определении составляющих радиационного баланса не должна превышать 1 %. Это говорит о том, что нынешнее состояние климата настолько неустойчиво, что даже такое небольшое изменение входных параметров климатической модели может привести к противоположным результатам. Учитывая вышеизложенное, становится очевидным, что ответственность учреждений образования за экологическое воспитание общества весьма велика.

Особое значение имеет вопрос о возможности воздействия на глобальный климат. В настоящее время имеются технические возможности для такого воздействия, что усиливает актуальность экологического образования.

Разработка методов предсказания климатических последствий воздействия на окружающую среду, открывает перспективы создания моделей хозяйственного развития, включающих учет влияния производственной деятельности человека на глобальный климат. Расчеты при помощи таких моделей позволяют оптимизировать хозяйственное планирование и избежать неблагоприятных изменений условий окружающей среды при дальнейшем техническом прогрессе.

Главной причиной изменения средней температуры в прошлом были колебания количества углекислого газа в атмосфере, что приводило к изменениям парникового эффекта. Установлено, что зависимость температуры нижнего слоя атмосферы от концентрации углекислого газа в ней имеет логарифмический характер, причем при удвоении концентрации CO_2 температура возрастает приблизительно на 3°C . Наряду с этим влияние на температуру оказывает увеличение солнечного излучения и колебания альбедо земной поверхности, которое зависит от относительной площади континентов и океанов, площадей различных растительных зон на континентах и от наличия на земной поверхности снежного и ледяного покровов.

Изменение притока солнечной радиации на 1 % повышает или понижает температуру нижнего слоя атмосферы примерно на 1,5 °С; изменение альbedo системы Земля-атмосфера на 0,01, приводит к изменению температуры на 2 °С.

Краткие теоретические сведения

Распределение энергии теплового излучения по длинам волн или по частотам определяется *спектральной плотностью* излучения U_λ или U_ω , так что величина $U_\lambda d\lambda$ — это энергия единицы объема излучения с длинами волн от λ до $\lambda + d\lambda$, а $U_\omega d\omega$ — с частотами от ω до $\omega + d\omega$. В одинаковом спектральном интервале выполняется равенство $U_\lambda d\lambda = U_\omega d\omega$. Учитывая, что $\lambda = 2\pi c/\omega$, U_ω и U_λ однозначно связаны. Для количественной характеристики спектрального распределения теплового излучения с открытой поверхности тела используют понятие *испускательной способности* тела E_ω (или E_λ), т. е. спектральной плотности потока энергии излучения, испускаемого единичной площадкой поверхности по всем направлениям, поэтому $E_\omega d\omega$ (или $E_\lambda d\lambda$) является потоком излучения в данном спектральном интервале. Полный поток излучения всех длин волн представляет собой энергетическую светимость R поверхности, т. е. $E = \int E_\omega d\omega = \int E_\lambda d\lambda$.

Падающее на поверхность тела излучение частично проходит сквозь поверхность (коэффициент пропускания t), частично отражается (коэффициент отражения r), или поглощается (коэффициент поглощения a), причем, поглощение может быть полным (абсолютно черное тело — АЧТ), частичным (серое тело), только при определенных длинах волн (селективное тело). Условие баланса: $t + r + a = 1$.

Поток лучистой энергии с частотами от ω до $\omega + d\omega$, излучаемый за время dt площадкой dS поверхности тела внутрь телесного угла $d\Omega$ представляется формулой $d\Phi = E_\omega dS \cos\varphi d\Omega d\omega dt$, где φ — угол между направлением распространения излучения и нормалью к площадке dS . Поглощательной способностью поверхности называется безразмерная величина A_ω , показывающая, какая доля энергии падающего излучения поглощается.

Закон Кирхгофа

Отношение лучеиспускательной способности тела к его поглощательной способности одинаково для всех тел и является универсальной функцией только частоты и температуры. $\Phi_\omega = E_\omega/A_\omega = cU_\omega/4$.

Закон Стефана–Больцмана

Интегральная излучательная способность абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры. $E = \sigma T^4$, где постоянная Стефана–Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$.

Законы Вина

Закон смещения Вина: $\lambda_{\text{max}} = b/T$, где постоянная Вина $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.
Второй закон Вина: максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости E_λ абсолютно черного тела пропорционально пятой степени абсолютной температуры $E_\lambda = CT^5$, где $C = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \text{К}^5)$.

Формула Релея-Джинса

$E_\lambda = 2\pi ckT/\lambda^4$, где c – скорость света, постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$

Формула Планка

$E_\lambda = 2\pi c^2 h/\lambda^5 [\exp(hc/\lambda kT) - 1]$, где постоянная Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$. Для упрощения числовых расчетов эту формулу удобно представить в виде: $E_\lambda = C_1/\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T) - 1]$, где $C_1 = 3,74 \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2$; $C_2 = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Основные расчетные формулы

- Закон Кирхгофа $\Phi_\omega = E_\omega/A_\omega = cU_\omega/4$.
- Закон Стефана–Больцмана $E = \sigma T^4$, где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$.
- Законы Вина: 1. $\lambda_{\text{max}} = b/T$, где $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$. 2. $E_\lambda = C T^5$, где $C = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \text{К}^5)$.
- Формула Релея-Джинса $E_\lambda = 2\pi ckT/\lambda^4$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$.
- Формула Планка $E_\lambda = 2\pi c^2 h/\lambda^5 [\exp(hc/\lambda kT) - 1]$, где $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.
- Для числовых расчетов $E_\lambda = C_1/\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T) - 1]$, где $C_1 = 3,74 \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2$; $C_2 = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Мощность всех промышленных источников энергии на Земле равна $P \sim 10^{13}$ Вт, в то время как мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, равна $P_c \sim 10^{17}$ Вт. К какому перегреву ΔT поверхности Земли приводят промышленные источники? Оценить максимальное значение P_{\max} , если максимальный перегрев, допустимый из экологических соображений, составляет 0,1 К.

Решение. $\Delta T = T_3 P / (4P_c) = 7 \cdot 10^{-3}$ К, где $T_3 = 288$ К – средняя температура поверхности Земли, множитель $\frac{1}{4}$ обусловлен тем, что Земля излучает с площади в 4 раза большей, чем площадь, на которую падает солнечный свет. $P_{\max} = 1,5 \cdot 10^{14}$ Вт = $15P$. Результаты решения этой задачи показывают, что тепловое загрязнение окружающей среды в настоящее время не является критическим.

Пример 2. Определить среднюю температуру Земли, считая планету серым телом с коэффициентом серости $a = 0,95$, планетарным альбедо $r = 0,33$, солнечная постоянная равна $E = 1,37$ кВт/м².

Решение. При отсутствии атмосферы средняя температура земной поверхности будет определяться условиями радиационного равновесия, т. е. энергия длинноволнового излучения поверхности Земли должна быть равна энергии поглощенной радиации. По закону Стефана–Больцмана получаем соотношение $a\sigma T^4 = E(1 - r)/4$, где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана–Больцмана. Из соотношения баланса энергий получаем, что средняя температура Земли равна 255 К, или -18 °С. По данным наблюдений известно, что средняя температура воздуха у земной поверхности приближенно равна 15 °С. Таким образом, при том же значении альбедо атмосфера повышает среднюю температуру воздуха у земной поверхности приблизительно на 33°. Это повышение температуры связано с парниковым эффектом, т. е. с большей прозрачностью атмосферы для коротковолновой радиации по сравнению с длинноволновой. Следует отметить, что такая оценка имеет условный характер, т. к. при отсутствии атмосферы планетарное альбедо не может быть равно существующему сейчас значению, которое принято равным 0,33.

Пример 3. В современных условиях среднее альбедо земной поверхности равно 0,14; до возникновения атмосферы альбедо Земли было меньше этой величины и мало отличалось от альбедо Луны, которое равно 0,07. Определить среднюю температуру земной поверхности при таком значении альбедо, если коэффициент серости Земли равен 0,95.

Решение. Так как планета находится в термическом равновесии с окружающей средой, т. е. ее температура не меняется с течением време-

ни, то должно выполняться уравнение баланса: количество энергии, получаемое Землей от Солнца (солнечная постоянная), должно быть равно количеству энергии, излучаемой Землей в окружающее пространство (определяемое законом Стефана–Больцмана). При этом надо учитывать, что Земля получает энергию, пропорциональную площади диска планеты, а излучает в окружающее пространство со всей площади поверхности планеты, т. е. в 4 раза больше. Считая Солнце абсолютно черным, а Землю серым телом, из уравнения баланса получаем формулу

$$T = [E(1 - r)/4a\sigma]^{1/4} = 276 \text{ К.}$$

Пример 4. Металлический шар радиусом $R = 1$ см и теплоемкостью $C = 14$ Дж/К с температурой $T_0 = 1200$ К находится в вакууме. Найти закон убывания температуры со временем, если коэффициент поглощения $a = 0,5$.

Решение. Количество тепла dQ , теряемого шаром в единицу времени, равно $dQ = -CdT = a\sigma T^4 S dt$, t – время. Знак (–) появляется, т. к. температура убывает. Это дифференциальное уравнение. Произведем разделение переменных и интегрирование $-dT/T^4 = a\sigma S dt/C$; $1/3T^3 = a\sigma S t/C + A$, где A – постоянная интегрирования. Найти ее можно из начальных условий: $A = 1/3T_0^3$. Тогда закон убывания температуры со временем выглядит следующим образом: $T = T_0(1 + 12\pi a\sigma R^2 T_0^3 t/C)^{-1/3}$.

Пример 5. Вычислить константу b в законе смещения Вина, основываясь на формуле Планка.

Решение. Формула Планка, записанная для длин волн, выглядит следующим образом:

$$E_\lambda = (8\pi hc/\lambda^5) / \{\exp[hc/(\lambda kT)] - 1\}.$$

Для нахождения максимума функции E_λ заменим λ безразмерной величиной $x = hc/(\lambda kT)$. В этом случае задача сводится к нахождению минимума функции $f_\lambda = x^{-5}(e^x - 1)$. Приравняв к нулю ее первую производную, получим трансцендентное уравнение $x = 5(1 - e^{-x})$, корень которого можно найти методом последовательных приближений: $x_0 = 5$; $x_1 = 5(1 - e^{-5}) = 4,966$; $x_2 = 5(1 - e^{-4,966}) = 4,965$. Отсюда получается $b = \lambda_m T = hc/(kx_m) = 0,201hc/k = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м/К.

Пример 6. Серое тело с площадью поверхности излучения S , поглощательной способностью a , теплоемкостью C находится при равновесной температуре T_1 . Выделяемая в теле мощность увеличивается на P . 1. Определить новую равновесную температуру T_2 . 2. Установить связь между температурой тела и временем нагревания.

Решение. 1. При равновесии поступающая мощность $a\sigma ST_1^4 + P$ должна равняться интенсивности излучения $a\sigma ST_2^4$: $a\sigma ST_1^4 + P = a\sigma ST_2^4$. Тогда $T_2 = [(T_1^4 + P) / a\sigma S]^{1/4}$.

2. Количество теплоты, получаемое телом за время dt при температуре T , равно произведению разности получаемой и излучаемой мощностей за время dt . С другой стороны, оно равно Cdt . Тогда $Cdt = a\sigma S(T_2^4 - T_1^4)dt$, откуда

$$t = C/4a\sigma ST_2^3 \{ \ln[(T_2 + T)(T_2 - T_1)/(T_2 - T)(T_2 + T_1)] + 2[\operatorname{arctg}(T/T_2) - \operatorname{arctg}(T_1/T_2)] \}.$$

Пример 7. Внутри солнечной системы на таком же расстоянии R от Солнца, как и Земля, находится частица сферической формы. Принимая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело с температурой $T = 6000$ К, определить температуру частицы: 1) как серого тела; 2) как селективного тела при $\lambda = 0,5$ мкм.

Решение.

1. Мощность излучения Солнца, поглощаемая частицей, равна $P_1 = a\pi d^2 \sigma T_c^4 R_c^2 / 4R^2$, где a – коэффициент серости, d – диаметр частицы, R_c – радиус Солнца. Мощность излучения частицы по всем направлениям равна $P_2 = a\pi d^2 \sigma T^4$. При равновесии $P_1 = P_2$. Тогда $T = T_c \sqrt{R_c / 2R} = 290$ К, т. е. мало отличается от средней температуры поверхности Земли.

2. Мощность излучения Солнца, поглощаемая частицей, равна

$$P_1 = \pi d^2 \cdot 2\pi h c^2 \Delta\lambda R_c^2 / 4\lambda^5 R^2 [\exp(hc/\lambda k T_c) - 1].$$

Мощность, излучаемая частицей, равна

$$P_2 = \pi d^2 \cdot 2\pi h c^2 \Delta\lambda / \lambda^5 [\exp(hc/\lambda k T) - 1].$$

При равновесии $P_1 = P_2$.

Вычислим экспоненту: $\exp(hc/\lambda k T_c) = \exp(4,8) \gg 1$.

Так как $T < T_c$, то $T = [1/T_c + 2\lambda k \ln(2R/R_c) / hc]^{-1} = 1700$ К. Эта температура значительно выше температуры серого тела, т. к. длина волны $\lambda = 0,5$ мкм соответствует максимуму спектрального распределения излучения абсолютно черного тела при температуре 6000 К.

Пример 8. Максимум спектрального распределения в спектре абсолютно черного тела приходится на длину волны $\lambda_{\max} = 0,58$ мкм. Найти спектральную плотность E_λ энергетической светимости, рассчитанную на интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ нм с центром λ_{\max} .

Решение. Максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела пропорционален пятой степени абсолютной температуры и рассчитывается по закону Вина

$$E_\lambda = C_2 T^5, \text{ где } C_2 = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}^3 \text{К}^5.$$

Температуру определяем из закона смещения Вина

$$T = b/\lambda_{\max}, \text{ где } b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}.$$

Значение постоянной C_2 приведено в единицах СИ, в которых единичный интервал длин волн равен 1 м. По условию задачи требуется вычислить спектральную плотность энергетической светимости на интервал длин волн 1 нм, поэтому пересчитаем C_2 на заданный интервал длин волн:

$$C_2 = 1,3 \cdot 10^{-14} \text{ Вт/м}^3 \text{К}^5.$$

Подставляя полученное значение C_2 в формулу, получим

$$E_\lambda = C_2(b/\lambda_{\max})^5 = 4,06 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{нм}.$$

Пример 9. Длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости АЧТ $\lambda_{\max} = 0,6$ мкм. Определить: 1) энергетическую светимость этого тела R_T ; 2) спектральную плотность энергетической светимости $r_{\nu,T}$ или $r_{\lambda,T}$, рассчитанную на 1 мм вблизи λ_{\max} в спектре излучения АЧТ.

Решение. Согласно закону смещения Вина, длина волны, на которую приходится максимум энергетической светимости, обратно пропорциональна температуре $\lambda_{\max} = b/T$, отсюда $T = b/\lambda_{\max}$, а энергетическая светимость R_T определяется законом Стефана–Больцмана, то есть, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры

$$R_T = \sigma T^4 = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^4.$$

Размерность R_T получаем

$$[R_T] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4} \left(\frac{\text{м} \cdot \text{К}^4}{\text{м}} \right) = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};$$

$$R_T = 5,67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7}} \right)^4 \approx 31 \text{ МВт/м}^2.$$

Максимум спектральной плотности энергетической светимости, согласно закону Вина, пропорционален пятой степени температуры

$$r_{\lambda,T} = C_2 \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^5,$$

$$[r_{\lambda,T}] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \text{К}^5} \left(\frac{\text{мК}}{\text{м}} \right)^5 = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

Но мы получили $r_{\lambda,T}$ в интервале длин волн $\Delta\lambda' = 1$ м (единичный интервал в СИ). Так как 1 нм в 10^9 раз меньше, то и $(r_{\lambda,T})_{\max}$, приходящаяся на $\Delta\lambda = 1$ нм вблизи λ_{\max} , во столько же раз будет меньше. Таким образом, искомое значение

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = \frac{C_2 \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^5}{10^9},$$

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = 1,3 \cdot 10^{-5} \left(\frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7}} \right)^5 \cdot 10^{-9} = 31 \text{ мВт/м}^2 \cdot \text{нм}.$$

Итак, спектральная плотность энергетической светимости, приходящаяся на интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ нм вблизи λ_{\max} , равна $31 \text{ мВт/м}^2 \cdot \text{нм}$.

Пример 10. Раскаленная металлическая поверхность $S = 10 \text{ см}^2$ излучает энергию $W = 4 \cdot 10^4$ Дж за 1 мин. Температура поверхности $T = 2500$ К. Определить отношение энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре.

Решение. Искомая величина $n = R_3/R_{ч.м.}$, где R_3 и $R_{ч.м.}$ — энергетическая светимость металлической поверхности и черного тела, соответственно. По закону Стефана—Больцмана $R_{ч.м.} = \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 2500^4 = 2,21 \cdot 10^6$ Дж. Энергия, излучаемая металлической поверхностью, равна $W = R_3 \cdot t \cdot S$. Отсюда

$$R_3 = \frac{W}{t \cdot S} = \frac{4 \cdot 10^4}{60 \cdot 10^{-3}} = 0,67 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Найдем отношение $n = \frac{0,67 \cdot 10^6}{2,21 \cdot 10^6} = 0,3$.

Пример 11. Определить силу светового давления F солнечных лучей, падающих нормально на поверхность площадью 100 м^2 , если коэффициент отражения лучей равен $\rho = 0,2$ и солнечная постоянная $E = 1,4 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$. Солнечной постоянной называется величина, равная поверхностной плотности потока энергии излучения Солнца вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца.

Решение. Сила светового давления F на поверхность равна произведению светового давления P на площадь S поверхности: $F = P \cdot S$. Световое давление может быть найдено по формуле $P = \frac{E(1+\rho)}{c}$. Тогда искомая сила равна

$$F = \frac{E \cdot S(1+\rho)}{c} = \frac{1,4 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 1,2}{3 \cdot 10^8} = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ Н}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Медный шарик диаметром $d = 1,2$ см поместили в сосуд, стенки которого находятся при температуре $T = 0$ К. Начальная температура шарика $T_0 = 300$ К. Считая поверхность шарика абсолютно черной, найти, через сколько времени его температура уменьшится в два раза. Удельная теплоемкость меди равна 395 Дж/кг·К. Плотность меди $\rho = 8600$ кг/м³.

2. При нагревании АЧТ λ_{\max} изменилась от $0,69$ до $0,5$ мкм. Во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость тела?

3. Имеется два АЧТ. Температура одного из них $T_1 = 2500$ К. Найти температуру другого, если максимальная длина волны λ_{\max} его на $\Delta\lambda = 0,5$ мкм больше λ_{\max} первого АЧТ.

4. АЧТ имеет температуру $T_1 = 2900$ К. В результате остывания тела длина волны λ_{\max} изменилась на $\Delta\lambda = 9$ мкм. До какой температуры T_2 охладилось тело?

5. Поверхность тела нагрета до температуры $T = 1000$ К. Затем одна половина этой поверхности нагревается на $\Delta T = 100$ К, другая охлаждается на $\Delta T = 100$ К. Во сколько раз изменится энергетическая светимость поверхности этого тела?

6. Какую мощность надо подводить к АЧТ в форме шара радиусом $r = 2$ см, чтобы поддерживать его температуру на $\Delta T = 27$ К выше температуры окружающей среды $T = 293$ К?

7. АЧТ остывает от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 293$ К. На сколько изменится длина волны λ_{\max} , соответствующее максимуму спектральной плотности его энергетической светимости?

8. Как и во сколько раз изменится поток излучения АЧТ, если максимум энергии излучения переместится с красной границы видимого спектра $\lambda = 0,7$ мкм на фиолетовую $\lambda = 0,4$ мкм?

9. Максимум излучения Солнца приходится на длину волны $\lambda_{\max} = 0,5$ мкм. Найти энергию, излучаемую Солнцем, в виде электромагнитных волн. Радиус Солнца $6,96 \cdot 10^8$ м.

10. Определить время t , за которое масса Солнца уменьшилась бы за счет излучения на 1% , если бы температура Солнца оставалась постоянной. Длина волны максимума энергии в спектре излучения равна $0,5$ мкм, радиус Солнца $6,96 \cdot 10^8$ м, масса Солнца $1,98 \cdot 10^{30}$ кг.

11. Оценить температуру, до которой нагрелась бы поверхность Земли, если бы она поглощала солнечное излучение как АЧТ. Считать, что в результате суточного вращения Земли температура ее поверхно-

сти одинакова. Найти коэффициент отражения планеты (альбедо), если ее температура 15°C .

12. Определить диаметр космической частицы, если действующие на нее силы светового давления и притяжения к Солнцу взаимно уравновешиваются. Температура Солнца 6000 K , радиус $6,96 \cdot 10^8\text{ м}$, масса $1,97 \cdot 10^{30}\text{ кг}$, плотность частицы $7,8 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$, гравитационная постоянная $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$.

13. Максимум спектральной плотности энергетической светимости серого тела с коэффициентом серости $0,5$ сместился с $2,4$ на $0,8\text{ мкм}$. Как и во сколько раз изменилась энергетическая светимость тела?

14. Считая, что атмосфера поглощает 10% лучистой энергии, найти мощность излучения N , получаемую горизонтальным участком Земли площадью $S = 0,5\text{ га}$. Высота Солнца над горизонтом $\varphi = 30^\circ$. Считать Солнце абсолютно черным телом.

15. Один люмен есть световой поток, излучаемый АЧТ с площади $0,5305\text{ мм}^2$ при температуре затвердевания платины (2042 K). Каков КПД такого излучателя?

16. Плавильная печь потребляет мощность $0,5\text{ кВт}$. Температура ее внутренней поверхности при открытом отверстии диаметром 5 см равна 973 K . Какая часть потребляемой мощности рассеивается стенками?

17. Слой вещества поглощает все фотоны солнечного спектра с энергией $W \geq 0,2\text{ эВ}$ и полностью прозрачен для фотонов с меньшей энергией. Оценить, какую долю солнечной энергии пропускает вещество. Считать спектр Солнца планковским с температурой 6500 K .

18. Солнечная постоянная E_c равна мощности излучения, падающего на 1 м^2 на расстоянии $L = 1,5 \cdot 10^8\text{ км}$. Принимая $E_c = 1400\text{ Вт/м}^2$ и радиус Солнца $R_c = 6,9 \cdot 10^5\text{ км}$, найти радиационную температуру T_c поверхности Солнца.

19. Мощность всех промышленных источников энергии на Земле равна $P \sim 10^{13}\text{ Вт}$, в то время как мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, равна $P_c \sim 10^{17}\text{ Вт}$. К какому перегреву ΔT поверхности Земли приводят промышленные источники? Оценить максимальное значение P_{max} , если максимальный перегрев, допустимый из экологических соображений, составляет $0,1\text{ K}$.

20. Найти солнечную постоянную, т. е. количество лучистой энергии Солнца, проходящей через площадку $S = 1\text{ м}^2$, расположенную на орбите Земли перпендикулярно лучам. Температура поверхности Солнца $T = 5800\text{ K}$, расстояние до Земли $1,5 \cdot 10^{11}\text{ м}$.

21. На орбите Земли находится сферическая частица. Найти ее температуру, если температура Солнца $T_c = 6000$ К, радиус $R_c = 6,96 \cdot 10^8$ м, радиус орбиты Земли $R_z = 1,5 \cdot 10^{11}$ м.

22. Поверхность $S = 10$ см² при температуре $T = 2500$ К излучает мощность $P' = 0,67$ кВт. Какую мощность излучения P имела бы эта поверхность, если бы она была абсолютно черным телом? Найти коэффициент серости поверхности.

23. Диаметр вольфрамовой спирали в лампочке равен $d = 0,3$ мм, длина $l = 5$ см. При включении сеть $U = 127$ В через лампочку течет ток $I = 0,31$ А. Найти температуру спирали, если коэффициент серости вольфрама равен 0,31.

24. Напряжение в сети возросло на 5 %. На сколько увеличится освещенность, создаваемая лампой накаливания с температурой нити, равной 1500 К, на длине волны 500 нм? Нить считать АЧТ.

25. Шар радиусом $R = 1$ м и теплоемкостью $C = 14$ Дж/К при температуре $T = 400$ К с коэффициентом серости $a = 0,5$ находится на орбите Земли и освещается солнечными лучами. Найти закон изменения температуры шара.

26. Какую энергетическую светимость R_λ имеет абсолютно черное тело, если максимум спектральной плотности излучения приходится на длину волны $\lambda_{\max} = 0,484$ мкм?

27. Поток излучения АЧТ равен $\Phi = 10$ кВт. Максимум энергии излучения приходится на длину волны $\lambda_{\max} = 0,8$ мкм. Определить площадь излучаемой поверхности.

28. Температура спирали в 25-ваттной лампочке накаливания $T = 2450$ К, коэффициент серости спирали равен $a = 0,3$. Найти площадь излучающей поверхности спирали.

29. Температура абсолютно черного тела изменилась от 1000 К до 3000 К. Во сколько раз увеличилась его энергетическая светимость R_λ ? На сколько изменилась длина волны λ_{\max} ?

30. Плафон лампы с коэффициентом серости 0,5 имеет мощность излучения 1 кВт. Найти диаметр плафона, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_{\max} = 0,6$ мкм.

31. Определить среднюю температуру поверхности Земли в случае, если бы у планеты не было атмосферы. Солнечная постоянная для Земли равна 1360 Вт/м².

32. Определить альбедо Земли, если известно, что средняя температура поверхности планеты составляет 15 °С.

33. Определить среднюю температуру поверхности Луны, если известно, что фотометрическое альbedo спутника составляет 0,07.

34. Определить, на сколько может измениться радиус орбиты Земли, если изменение температуры атмосферы Земли из экологических соображений возможно не более чем на $1\text{ }^{\circ}\text{C}$.

35. На сколько понизится средняя эффективная температура Земли, если ее поверхность покроется снежным покровом с альbedo 0,8? Существующее альbedo Земли равно 0,33.

36. Определить среднюю температуру Земли при прозрачной атмосфере. Солнечная постоянная $E = 1370\text{ Вт/м}^2$.

37. При какой температуре ширина участка спектра, на котором монохроматическая интенсивность излучения не ниже половины максимальной, составляет 1 мкм ?

38. Определить температуру абсолютно черной теплопроводящей пластинки, расположенной за пределами земной атмосферы перпендикулярно потоку солнечного излучения, если при этом на каждый 1 см^2 ежеминутно падает $8,2\text{ Дж}$ энергии. Излучение считать равновесным.

39. Определить температуру абсолютно черной нетеплопроводящей пластинки, расположенной за пределами земной атмосферы перпендикулярно потоку солнечного излучения, если при этом на каждый 1 см^2 ежеминутно падает $8,2\text{ Дж}$ энергии. Излучение считать равновесным.

40. Определить температуру теплопроводящей сферы, помещенной за пределами атмосферы Земли, считая ее абсолютно черной, а излучение равновесным.

41. В формуле Планка для излучательной способности абсолютно черного тела перейти от длины световой волны λ к частоте ν .

42. Какую температуру должно иметь тело, чтобы оно при температуре окружающей среды $t_0 = 17\text{ }^{\circ}\text{C}$ излучало в 100 раз больше энергии, чем поглощало?

43. По пластинке длиной $l = 3\text{ см}$ и шириной $b = 1\text{ см}$ проходит электрический ток напряжением $U = 2\text{ В}$. После установления теплового равновесия температура пластинки составила $T = 1050\text{ К}$. Определить силу тока I , если коэффициент поглощения вещества пластинки $\alpha = 0,8$. Температуру пластинки считать одинаковой по всей площади.

44. Теплопроводящий шар по размеру равен Земле (радиус 6400 км , удельная теплоемкость $c = 200\text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$, плотность $\rho = 5500\text{ кг/м}^3$). Начальная температура $T_0 = 300\text{ К}$. Определить время, за которое шар остынет на $\Delta T = 0,001\text{ К}$. Шар считать абсолютно черным.

45. Металлический шар радиусом $r = 1$ см с теплоемкостью $C = 14$ Дж/К при температуре $T_0 = 1200$ К помещен в печь с температурой $T_1 = 300$ К и коэффициентом серости $a = 0,4$. Найти время τ остывания шара до температуры T . Через какое время температура шара уменьшится вдвое?

46. Во сколько раз скорость остывания шара радиусом 1 см и теплоемкостью $C = 14$ Дж/К и с коэффициентом серости $a = 0,4$ меньше скорости остывания пластинки той же массы и из того же материала? Толщина пластинки $h = 0,5$ мм.

47. Во сколько раз скорость остывания абсолютно черного шара радиусом 1 см и теплоемкостью $C = 14$ Дж/К меньше скорости остывания пластинки той же массы и из того же материала? Толщина пластинки $h = 0,5$ мм.

48. По пластинке проходит электрический ток, в результате чего она достигает равновесной температуры $T_0 = 1400$ К. После этого мощность электрического тока уменьшается в два раза. Определить новую равновесную температуру T_1 .

49. По пластинке проходит электрический ток, в результате чего она достигает равновесной температуры $T_0 = 1400$ К. После этого мощность электрического тока уменьшается в два раза. Определить, через сколько времени температура снизится до $T_2 = (T_0 + T_1)/2$, если на 50 К она снижается за 1 минуту.

50. Равновесная температура шара радиусом 1 см, и коэффициентом серости 0,5 равна $T_1 = 1000$ К. Выделяемая в шаре мощность увеличивается на $P = 100$ Вт. Определить новую равновесную температуру T_2 .

51. Равновесная температура шара радиусом 1 см, теплоемкостью $C = 10$ Дж/К и коэффициентом серости 0,5 равна $T_1 = 1000$ К. Выделяемая в шаре мощность увеличивается на $P = 1$ Вт. Установить связь между температурой шара и временем нагревания.

52. Определить время нагревания от 300 до 600 К металлического шара, коэффициентом серости $a = 0,5$ массой 3 кг и средней удельной теплоемкостью $c = 836$ Дж/кг·К.

53. Определить время нагревания от 300 до 600 К металлического шара массой 3 кг и удельной теплоемкостью $c = 836$ Дж/кг·К, если шар считать абсолютно черным телом.

54. Найти предельную температуру нагревания электроплитки мощностью 600 Вт, если площадь излучающей поверхности $S = 300$ см² и коэффициент серости $a = 0,2$. Температура окружающей среды $T_1 = 300$ К.

55. Найти предельную температуру нагревания электроплитки мощностью 600 Вт, если площадь излучающей поверхности $S = 300 \text{ см}^2$, а плитка считается абсолютно черным телом. Температура окружающей среды $T_1 = 300 \text{ К}$.

56. Для какой длины волны интенсивность излучения абсолютно черного тела такая же, как для длины волны 760 нм. Температура тела равна 2000 К.

57. Два абсолютно черных тела имеют температуры 2000 и 3000 К. Сравнить отношения монохроматических интенсивностей красного и синего света у этих тел.

58. Максимум монохроматической интенсивности излучения приходится на середину видимого участка спектра. Какая доля излучаемой энергии приходится на видимую область спектра?

59. Световым коэффициентом полезного действия (КПД) называется отношение излучаемого светового потока ко всей излучаемой телом энергии. Определить световой КПД абсолютно черного тела при температуре 2000 К.

60. Определить световой КПД абсолютно черного тела, максимум монохроматической интенсивности которого приходится на середину видимой области спектра.

61. Какая доля энергии излучения абсолютно черного тела приходится на длины волн от 0 до λ_{max} ? До какой обобщенной длины волны излучается половина всей энергии?

62. Какая доля энергии абсолютно черного тела приходится на участок спектра, на котором монохроматическая интенсивность излучения не меньше половины максимальной?

63. При какой температуре ширина участка спектра, на котором монохроматическая интенсивность излучения не ниже половины максимальной, составляет 1 мкм?

64. Идеальный светофильтр пропускает электромагнитное излучение с длинами волн от 0 до 6 мкм. При каких температурах абсолютно черных тел он пропустит 90 и 95 % всей излучаемой энергии?

65. Какая доля всей излучаемой абсолютно черным телом энергии приходится на видимую часть спектра при температурах 2000 и 3000 К?

66. Во сколько раз число квантов красного света с $\lambda_2 = 0,72 \text{ мкм}$ больше числа квантов синего света с длиной волны $\lambda_1 = 0,44 \text{ мкм}$ излучаемых абсолютно черным телом при температуре 3200 К?

67. Внутри солнечной системы на таком же расстоянии R от Солнца, как и Земля, находится частица сферической формы. Прини-

мая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело с температурой $T = 6000 \text{ К}$, определить температуру частицы как селективного тела при $\lambda = 5 \text{ мкм}$.

68. Тепловой баланс Земли определяется состоянием облачности. Считая облако абсолютно черным шаром радиусом 1 км , определить количество энергии, излучаемой облаком в верхнюю и нижнюю полушеры, если нижняя часть облака имеет температуру $0 \text{ }^\circ\text{С}$, а верхняя — $(-50 \text{ }^\circ\text{С})$.

Ответы

1. $t = (\eta^3 - 1)cpd/18\sigma T_0^3 = 3 \text{ часа}$. 2. в 3,6 раза. 3. $T_2 = (b + T_1\Delta\lambda) = 1,75 \text{ кК}$.
 4. $T_2 = bT_1/(C_1 + T_1\Delta\lambda) = 290 \text{ К}$. 5. увел. в 1,06 раза. 6. $P = 0,84 \text{ Вт}$.
 7. $\Delta\lambda = 0,24 \text{ мкм}$. 8. в 16 раз. 9. $W = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Дж}$. 10. $t \approx 1,46 \cdot 10^{11} \text{ лет}$.
 11. $T = 780 \text{ К}$; $a = 0,88$. 12. $d = 1,74 \cdot 10^{-7} \text{ лет}$. 13. увел. в 243 раза. 14. $P = 3,1 \text{ МВт}$.
 15. 0,3 %. 16. 80 %. 17. 0,2 %. 18. $T_{\text{рад}} = 5900 \text{ К}$. 19. $\Delta T = 7 \cdot 10^{-3} \text{ К}$;
 $P_{\text{max}} = 1,5 \cdot 10^{14} \text{ Вт} = 15 P$. 20. $E_c = 1,38 \text{ кВт/м}^2$. 21. 280 К. 22. $P = 2,21 \text{ кВт}$;
 $a = 0,3$. 23. $T = 2500 \text{ К}$. 24. на 38 %. 25. $d\tau = -cdT/Sa\sigma(T^4 - T_0^4)$.
 26. $R_3 = 73,5 \text{ МВт/м}^2$. 27. $S = 10,2 \text{ см}^2$. 28. $S = 0,4 \text{ см}^2$. 29. в 81 раз; от 2,9
 до 0,97 мкм. 30. $r = 7,2 \text{ см}$. 31. $T = 278 \text{ К}$. 32. $a = 0,73$. 33. $T = 143 \text{ К}$.
 34. $-8,1 \cdot 10^8$; $+20,6 \cdot 10^8 \text{ м}$. 35. $T = 273 \text{ К}$. 36. $T = 290 \text{ К}$. 37. $T = 2886 \text{ К}$.
 38. $T = 332 \text{ К}$. 39. $T = 395 \text{ К}$. 40. $T = 280 \text{ К}$. 41. $E_v = 2\pi h\nu^3 / c^2 [\exp(h\nu/kT) - 1]$.
 42. $T = 916 \text{ К}$. 43. $I = 16/6 \text{ А}$. 44. $t = 1,6 \text{ года}$. 45. $t = 11 \text{ мин}$. 46. $t_{\text{ни}}/t_{\text{у}} = 3/40$.
 47. $t_{\text{ни}}/t_{\text{у}} = 3/40$. 48. $T_1 = 1176 \text{ К}$. 49. $t_2 = 172 \text{ с}$. 50. $T_2 = 1397 \text{ К}$.
 51. $t = C[(T_0/T)^3 - 1]/12\pi a\sigma R^2 T_0^3$. 52. $t = 12 \text{ мин}$. 53. $t = 24 \text{ мин}$.
 54. $T_2 = 1150 \text{ К}$. 55. $T_2 = 770 \text{ К}$. 56. $\lambda_2 = 3,36 \text{ мкм}$. 57. 18 и 4,1. 58. 0,43.
 59. 0,0023. 60. 0,12. 61. 0,25; 1,42. 62. 0,63. 63. $T = 2886 \text{ К}$. 64. $T_1 = 1550 \text{ К}$;
 $T_2 = 2070 \text{ К}$. 65. 0,015; 0,12. 66. 7,6. 67. $T = 230 \text{ К}$. 68. $E_1 = 2000 \text{ МВт}$;
 $E_2 = 880 \text{ МВт}$.

6. ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

Внешний фотоэффект – это явление вырывания электронов с поверхности металлов потоком излучения. В 1905 г. Эйнштейн объяснил закономерности фотоэффекта. Энергия $h\nu$ падающего кванта излучения может оказаться достаточной для высвобождения электрона. Если эта энергия превышает работу выхода A , то ее избыток превращается в кинетическую энергию электрона. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта выражает закон сохранения энергии:

$$h\nu = A + W_{\max}.$$

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона W_{\max} при $h\nu < 5$ кэВ определяется соотношением $W_{\max} = mv^2/2$, где v – скорость вылетевшего электрона; при $h\nu > 5$ кэВ для кинетической энергии необходимо использовать релятивистской формулу

$$W_{\max} = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right),$$

где m – масса покоя электрона, c – скорость света в вакууме. Из уравнения Эйнштейна следует, что фотоэмиссия электронов возможна только в том случае, когда частота излучения превышает некоторое граничное значение $\nu_0 = A/h$. Это и есть «красная граница» фотоэффекта для данного металла. Поскольку $c = \lambda\nu$, можно найти максимальное значение длины волны, соответствующее этой граничной частоте ν_0 : $\lambda_0 = ch/A$. После подстановки численных значений можно получить формулу для длины волны излучения, способного вызвать фотоэмиссию: $\lambda \leq 1240/A$ нм, где работа выхода A выражена в электрон-вольтах.

Основные расчетные формулы

- Уравнение Эйнштейна $h\nu = A + W_{\max}$, здесь $W_{\max} = mv^2/2$, если $h\nu < 5$ кэВ;
 $W_{\max} = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right)$, если $h\nu > 5$ кэВ.
- «Красная граница» фотоэффекта: $\nu_0 = A/h$, $\lambda_0 = ch/A$.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности цинковой пластинки: 1) ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda_1 = 150$ нм; 2) γ – лучами с длиной волны $\lambda_2 = 0,25$ нм. Работа выхода для цинка $A = 4$ эВ.

Решение. Максимальная скорость фотоэлектронов при фотоэффекте определяется из уравнения Эйнштейна

$$W = A + W_{\max},$$

где W – энергия фотонов, падающих на поверхность металла, A – работа выхода, W_{\max} – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов. Энергия фотона определяется по формуле

$$W = h\nu = hc/\lambda,$$

где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, c – скорость света в вакууме, λ – длина волны.

Кинетическая энергия электрона может быть определена: 1) по классической формуле $W_{\max} = mv^2/2$; 2) по релятивистской формуле $W = (m - m_0)c^2$, где m_0 – масса покоя электрона.

Выбор формулы зависит от скорости фотоэлектрона и, соответственно, от энергии фотона, вызывающего фотоэффект: если энергия фотона много меньше энергии покоя электрона $W_0 = m_0c^2 = 0,51$ МэВ, то применяется классическая формула, если же энергия фотона сравнима по величине с энергией покоя электрона, то применяется релятивистская формула.

1. Вычислим энергию фотона ультрафиолетовых лучей по формуле

$$W_1 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 10^{-7}} = 1,32 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 8,3 \text{ эВ.}$$

Полученное значение энергии фотона значительно меньше энергии покоя электрона, т. е. максимальную энергию фотоэлектрона можно определять по классической формуле $W_{\max} = mv^2/2$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{2(W_1 - A)}{m_0}} = \sqrt{\frac{2(1,32 \cdot 10^{-18} - 0,64 \cdot 10^{-18})}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

2. Вычислим энергию фотона γ -лучей:

$$W_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,5 \cdot 10^{-12}} = 7,9 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} \approx 0,5 \text{ МэВ.}$$

Работа выхода электрона из металла ($A = 4$ эВ) много меньше энергии падающего на металл фотона, поэтому в формуле Эйнштейна можно считать, что максимальная кинетическая энергия электрона равна

энергии фотона W_2 . Так как кинетическая энергия фотона сравнима с его энергией покоя, то для вычисления скорости электрона необходимо использовать релятивистскую формулу кинетической энергии:

$$W_2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 \right) c^2 = W_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Выполнив преобразования, найдем

$$\beta = \frac{\sqrt{(2W_0 + W_2)W_2}}{W_0 + W_2} = \frac{\sqrt{(2 \cdot 0,51 + 0,5) \cdot 0,5}}{0,51 + 0,5} = 0,86.$$

Так как $\beta = v/c$, то $v = 0,86 \cdot (3 \cdot 10^8) = 2,6 \cdot 10^8$ (м/с).

Пример 2. При поочередном освещении поверхности некоторого металла светом с длинами волны $\lambda_1 = 0,35$ мкм и $\lambda_2 = 0,54$ мкм обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в $k = 2$ раза. Найти работу выхода электрона с поверхности этого металла.

Решение. Воспользуемся уравнением Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = h \frac{c}{\lambda} = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

При освещении металла светом с длинами волн λ_1 и λ_2 уравнение примет вид

$$h \frac{c}{\lambda_1} = A + \frac{mv_{1\max}^2}{2}; \quad h \frac{c}{\lambda_2} = A + \frac{mv_{2\max}^2}{2}.$$

Если v_1 в 2 раза больше v_2 , то W_1 в 4 раза больше W_2 . Тогда уравнения можно записать так:

$$h \frac{c}{\lambda_1} = A + 4W_2; \quad h \frac{c}{\lambda_2} = A + W_2.$$

Найдем из этих уравнений A :

$$A = \frac{hc}{3\lambda_1\lambda_2} (4\lambda_1 - \lambda_2).$$

Подставляя числовые значения величин, получим

$$A = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^{-7} \cdot 5,4 \cdot 10^{-7}} (4 \cdot 3,5 - 5,4) 10^{-7} = 3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,88 \text{ эВ}.$$

Пример 3. На платиновую пластинку падает ультрафиолетовое излучение. Для прекращения фотоэффекта нужно приложить удержи-

вающее напряжение $U_1 = 3,7$ В. Если платиновую пластинку заменить пластинкой из другого металла, то задерживающее напряжение нужно увеличить до $U_2 = 6$ В. Определить работу выхода (в электронвольтах) из второго металла. Работа выхода для платины $A_1 = 6,3$ эВ = $1,01 \cdot 10^{-18}$ Дж.

Решение. Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта, имеем

$$h\nu = A_1 + \frac{m\nu_1^2}{2}.$$

Чтобы задержать вылетающие электроны, необходимо приложить задерживающее напряжение U_1

$$eU_1 = \frac{m\nu_1^2}{2},$$

где e и m – заряд (по модулю) и масса электрона.

Таким образом,

$$h\nu = A_1 + eU_1. \quad (1)$$

Аналогичное выражение запишем для пластинки из второго металла

$$h\nu = A_2 + eU_2. \quad (2)$$

Приравняем (1) и (2)

$$A_1 + eU_1 = A_2 + eU_2,$$

$$A_2 = A_1 + eU_1 - eU_2 = A_1 - e(U_2 - U_1),$$

$$A_2 = 10,1 \cdot 10^{-19} - 1,6 \cdot 10^{-19}(6 - 3,7) = 6,42 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4 \text{ эВ}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. При освещении поверхности металла светом с длиной волны $\lambda_1 = 0,1$ мкм максимальная скорость фотоэлектронов в три раза больше, чем при освещении $\lambda_2 = 0,2$ мкм. Определить работу выхода с поверхности этого металла.

2. Определить максимальный потенциал медного шарика, облучаемого излучением с длиной волны $\lambda = 0,14$ мкм.

3. Определить максимальную кинетическую энергию электронов, вырываемых с поверхности лития излучением, напряженность электрического поля которого меняется по закону $E = a(1 + \cos \omega t) \cos \omega_0 t$, где $a = \text{const}$, $\omega = 6 \cdot 10^{14}$ рад/с, $\omega_0 = 3,6 \cdot 10^{15}$ рад/с.

4. Фототок, возникающий при фотоэффекте с длиной волны $\lambda = 0,262$ мкм прекращается, если подключить внешнее задерживающее напряжение 1,5 В. Найти величину внешней контактной разности потенциалов фотоэлемента.

5. Определить частоту света, вырывающего с поверхности металла электроны, полностью задерживающиеся разностью потенциалов $U = 5$ В. Красная граница фотоэффекта $\nu = 10^{15}$ с⁻¹. Найти работу выхода электрона из металла.

6. Вакуумный фотоэлемент имеет в режиме насыщения чувствительность к свету $K = 0,12$ А/Вт. Какова относительная флуктуация α числа электронов, выбиваемых при падении на фотоэлемент светового потока мощностью $P = 1,3 \cdot 10^{-11}$ Вт? Время регистрации равно $T = 10^{-3}$ С.

7. Ток насыщения, протекающий через вакуумный фотоэлемент при его освещении светом, $I = 0,5$ нА. Определить число N фотоэлектронов, покидающих поверхность катода в единицу времени.

8. При освещении катода фотоэлемента световой волной в его цепи течет ток насыщения I . Изобразить зависимость этого тока от концентрации n фотонов в волне и указать, от какого параметра зависит угловой коэффициент графика.

9. Определить, как изменится вид вольтамперной характеристики фотоэлемента, если: 1) при неизменном спектральном составе излучения увеличится в два раза полный световой поток; 2) при неизменном потоке фотонов увеличится в два раза частота монохроматического света; 3) при неизменном потоке фотонов уменьшится в два раза частота монохроматического света. Нарисовать графики. Квантовый выход фотоэффекта равен 0,1.

10. Наибольшая длина волны света, при которой происходит фотоэффект для вольфрама, равна 0,275 мкм. Найти работу выхода электронов из вольфрама; наибольшую скорость электронов, вырываемых светом с длиной волны, равной 0,18 мкм; наибольшую энергию этих электронов.

11. Энергия фотона равна кинетической энергии электрона, имевшего начальную скорость 1000 км/с и ускоренного разностью потенциалов 4 В. Найти длину волны фотона.

12. При фотоэффекте электроны, вырывающиеся с поверхности металла излучением частотой $2 \cdot 10^{15}$ Гц, полностью задерживаются тормозящим полем при разности потенциалов 7 В, а при частоте $4 \cdot 10^{15}$ Гц — при разности потенциалов 15 В. По этим данным вычислить постоянную Планка.

13. При увеличении напряжения на рентгеновской трубке в 1,5 раза длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра изменилась на $\Delta\lambda = 26$ пм. Найти первоначальное напряжение на трубке.

14. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоде трубки, $v = 0,85c$, где c – скорость света.

15. Определить красную границу фотоэффекта для цинка и максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с его поверхности излучением с длиной волны $\lambda = 250$ нм.

16. Имеется вакуумный фотоэлемент, один из электродов которого цезиевый, другой медный. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, подлетающих к медному электроду, при освещении цезиевого электрода излучением с длиной волны $0,22$ мкм, если электроды замкнуть снаружи накоротко.

17. Показать с помощью законов сохранения энергии и импульса, что свободный электрон не может полностью поглотить фотон.

18. Излучение с длиной волны $0,3$ мкм падает на фотоэлемент, находящийся в режиме насыщения. Спектральная чувствительность фотоэлемента $J = 4,8$ мА/Вт. Найти квантовый выход фотоэлектронов, т.е. число фотоэлектронов на каждый падающий фотон.

19. Определить красную границу фотоэффекта для цезия, если при освещении его излучением с длиной волны $0,36$ мкм задерживающий потенциал равен $1,47$ В.

20. Какая часть энергии фотона, вызывающего фотоэффект, расходуется на работу выхода, если наибольшая скорость электронов, вырываемых с поверхности цинка, составляет 10 Мм/с. Красная граница фотоэффекта для цинка равна $\lambda_{\text{гр}} = 0,29$ мкм.

21. На поверхность металла падает поток излучения с длиной волны $0,36$ мкм, мощностью 5 мкВт. Определить силу фототока насыщения, если 5% всех падающих фотонов выбивают из металла электроны.

22. Определить красную границу фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 400$ нм максимальная скорость фотоэлектронов равна $v = 6,5 \cdot 10^5$ м/с.

Ответы

1. $a = 15$ эВ. 2. $\varphi_{\text{max}} = 4,4$ в. 3. $W_{\text{max}} = h(\omega_0 + \omega) - A_{\text{вых}} = 0,38$ эВ. 4. $u = 0,5$ в. 5. $v = 2,2 \cdot 10^{15}$ с⁻¹; $A = 6,6 \cdot 10^{-19}$ Дж. 6. $\alpha = (PKt/q_e)^{-1/2} = 0,01$. 7. $N = 10^9$ с⁻¹. 8. от квантового выхода. 10. $a = 4,5$ эВ; $v = 910$ км/с; $w = 2,375$ эВ. 11. $\lambda = 180$ нм. 12. $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. 13. $U = hc(1 - 1/\eta)e\Delta\lambda = 16$ кВ. 14. $\lambda_{\text{min}} = h/mc(\gamma - 1) = 2,8$ пм, $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$. 15. 332 нм, $6,6 \cdot 10^5$ м/с. 16. $v_{\text{max}} = 6,4 \cdot 10^5$ м/с. 17. нет. 18. $w = hcJ/e\lambda = 0,02$. 19. $v = 4,76 \cdot 10^{14}$ Гц. 20. $k = 60\%$. 21. $I_{\text{нас}} = 7,27 \cdot 10^{-18}$ А. 22. $\lambda_0 = 640$ нм.

7. ЭФФЕКТ КОМПТОНА

Проявление квантовых свойства света экспериментально наблюдается в эффекте Комптона. Это упругое рассеяние коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и γ -излучения) на свободных или слабо связанных электронах вещества. Оно сопровождается увеличением длины волны $\Delta\lambda$. Величину $\Delta\lambda$ можно оценить из формулы Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где λ — длина волны падающего излучения, λ' — длина волны рассеянного излучения, θ — угол рассеяния рентгеновского кванта, m_e — масса покоя электрона, c — скорость света в вакууме. Реально эффект наблюдается по смещению линий спектра излучения.

Объяснение эффекта Комптона возможно только на основе квантовых представлений о природе света: это результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными электронами вещества. В процессе столкновения фотон передает электрону часть своей энергии и импульса в соответствии с законами их сохранения. Если электроны сильно связаны с атомами, фотоны обмениваются импульсами и энергией с атомами в целом. Масса атома много больше массы электрона, поэтому атому может быть передана лишь ничтожная часть энергии фотона. В таком случае длина волны рассеянного излучения практически не отличается от длины волны падающего излучения.

Эффект Комптона невозможно наблюдать в видимой области спектра, поскольку в этом диапазоне волн комптоновский сдвиг $\Delta\lambda$ составляет величину порядка $10^{-6} \cdot \lambda$. Такой сдвиг практически не заметен, так как изменение длины волны по порядку величины равно ширине линии излучения атомов. Для рентгеновских фотонов комптоновский сдвиг вполне ощутим, он составляет приблизительно $0,1 \cdot \lambda$. Кроме того, поскольку энергия фотона видимого света сравнима с энергией связи электрона с атомом, то для него даже внешний электрон нельзя считать свободным.

Эффект Комптона и фотоэффект обусловлены взаимодействием фотонов с электронами. В эффекте Комптона фотон рассеивается, а при фотоэффекте – поглощается. Рассеяние является результатом взаимодействия фотонов со свободными электронами, а фотоэффект – взаимодействием со связанными. Поглощение фотона свободным электроном невозможно, так как этот процесс находится в противоречии с законами сохранения импульса и энергии. Поэтому при взаимодействии фотонов со свободными электронами наблюдается только их рассеяние, то есть эффект Комптона.

Основные расчетные формулы

- Формула Комптона $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$.
- Комптоновская длина волны $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$.
- При рассеянии на электроне $\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2,425 \text{ пм}$.

Примеры решения задач

Пример 1. В явлении Комптона энергия падающего фотона W распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\theta = \pi/2$. Найдите энергию и количество движения рассеянного фотона.

Решение. Энергия падающего фотона определяется формулой $W = hc/\lambda$, где λ – длина волны падающего фотона. Энергия рассеянного фотона $W' = hc/\lambda'$, где λ' – длина волны рассеянного на электроне фотона. По условию задачи $W/2 = W'$, тогда $\lambda'/\lambda = 2$, $\lambda = \lambda'/2$. По формуле Комптона изменение длины волны фотона при рассеянии определяется как

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

Окончательно имеем:

$$\lambda' - \frac{\lambda'}{2} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta), \text{ откуда } \lambda' = \frac{2h}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

Подставляя последнее соотношение в формулу для энергии рассеянного фотона, получаем:

$$W' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hcm_e c}{2h(1 - \cos\theta)} = \frac{m_e c^2}{2(1 - \cos\theta)} = 4,1 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,256 \text{ МэВ.}$$

Поскольку импульс фотона $P' = W'/c$, то $P' = 1,37 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Фотон с длиной волны $\lambda = 0,4 \text{ мкм}$ рассеивается на электроне, движущемся навстречу ему, а после рассеяния движется в обратном направлении (рассеяние на 180°). С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы частота фотона при рассеянии не изменилась?

2. Фотон с длиной волны $\lambda = 0,7 \text{ мкм}$ испытывает лобовое соударение с электроном, имеющим кинетическую энергию $W_k = 500 \text{ МэВ}$. Найти энергию W фотона, испускаемого в результате обратного комптон-эффекта и движущегося вдоль траектории электрона.

3. В результате комптоновского рассеяния фотона на покоящемся электроне последний получил импульс отдачи P . Определить, под какими углами по отношению к направлению падающего фотона мог вылететь электрон с таким импульсом.

4. Излучение с длиной волны $\lambda = 20 \text{ пм}$ испытывает комптоновское рассеяние под углом $\varphi = 90^\circ$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины волны при рассеянии, а также энергию и импульс электрона отдачи.

5. При комптоновском рассеянии энергия фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\varphi = 90^\circ$. Найти энергию W и импульс P рассеянного фотона.

6. Длины волн рентгеновского излучения, рассеянного под углами 60 и 120° , отличаются в 2 раза. Считая, что рассеяние происходит на свободных электронах, найти длину волны λ падающего излучения.

7. Фотон с энергией $W = 0,15 \text{ МэВ}$ рассеялся на покоившемся электроне, в результате чего его длина волны изменилась на $\Delta\lambda = 3 \text{ пм}$. Найти угол, под которым вылетел комптоновский электрон.

8. Фотон с длиной волны $\lambda = 6 \text{ пм}$ рассеялся под прямым углом на покоившемся электроне. Найти частоту рассеянного фотона и кинетическую электрона отдачи.

9. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если рассеяние фотона происходит на угол 180° ? Энергия фотона до рассеяния равна $0,255 \text{ МэВ}$.

10. Фотон с энергией $0,25 \text{ МэВ}$ испытывает комптоновское рассеяние на свободном электроне. Энергия рассеянного фотона равна $0,2 \text{ МэВ}$. Найти угол рассеяния.

11. При эффекте Комптона фотон был рассеян на угол 90° . Энергия рассеянного на покоящемся электроне фотона $W_2 = 0,4$ МэВ. Найти энергию W_1 фотона до рассеяния.

12. Фотон с энергией $W = 0,75$ МэВ при эффекте Комптона рассеялся на свободном электроне под углом 90° . Какую долю своей энергии фотон передал электрону?

13. Длина волны λ фотона равна комптоновской длине волны λ_k электрона. Определить энергию W и импульс P фотона, рассеянного при эффекте Комптона.

14. Энергия W падающего фотона равна энергии покоя электрона. Сколько процентов энергии падающего фотона остается у рассеянного фотона и сколько процентов получает электрон отдачи, если угол рассеяния равен $60, 90, 180^\circ$?

15. Определить длину волны λ рентгеновского излучения, для которого комптоновское рассеяние фотона на свободном электроне на угол 90° удваивает длину волны.

16. Фотон с энергией $h\nu = 0,15$ МэВ рассеялся при эффекте Комптона на свободном электроне, в результате чего его длина волны изменилась на $\Delta\lambda = 3$ пм. Найти угол, под которым вылетел комптоновский электрон.

17. Найти максимальный угол рассеяния γ -квантов при комптон-эффекте на неподвижных электронах, вне которого рассеянный квант не может породить электрон-позитронную пару при последующем взаимодействии с веществом. Рождение электрон-позитронной пары возможно, если энергия γ -кванта превышает $2m_e c^2$ (m_e – масса покоя электрона).

18. Фотон с энергией $W = 2m_e c^2$ при рассеянии в комптон-эффекте на свободном электроне теряет половину своей энергии (m_e – масса покоя электрона). Найти угол разлета между рассеянным фотоном и электроном отдачи.

19. Фотон при эффекте Комптона рассеивается на покоящемся протоне. Энергия рассеянного фотона равна кинетической энергии протона отдачи, а угол разлета между ними равен 90° . Оценить энергию W_γ падающего фотона.

20. Определить энергию γ -квантов, рассеянных при эффекте Комптона под углом 180° , если известно, что вылетающий электрон ультрарелятивистский ($W_e \gg m_e c^2$).

21. При прохождении γ -квантов $W_\gamma = 5$ МэВ через вещество образуются две группы быстрых электронов: одна в результате фотоэффек-

та, а другая — комптоновского рассеяния. Каково должно быть энергетическое разрешение аппаратуры регистрации, чтобы отличать фотоэлектроны от комптоновских электронов с максимальной энергией?

22. Фотон с энергией $h\nu = 1$ МэВ при эффекте Комптона рассеялся на свободном электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на 25 %.

23. Фотон с энергией, в 2 раза превышающей энергию покоя электрона, испытал лобовое столкновение с покоившимся электроном. Найти радиус кривизны траектории электрона отдачи в магнитном поле с индукцией $B = 0,12$ Тл. Предполагается, что электрон отдачи движется перпендикулярно к направлению поля.

24. Гамма-квант с энергией $W = 1$ МэВ при эффекте Комптона рассеивается под углом 90° на покоящемся протоне. Определить, с какой скоростью будет двигаться протон после соударения.

25. Фотон, испытав столкновение с релятивистским электроном, рассеялся под углом 60° , а электрон остановился. Найти комптоновское смещение волны рассеянного фотона.

26. Гамма-квант с энергией $W = 1$ МэВ рассеивается под углом 90° на свободном покоящемся протоне. Определить, какую кинетическую энергию сообщает гамма-квант протону.

Ответы

1. $v = c[1 + (m\lambda c/h)^2]^{-1/2} = 154$ Мм/с.
2. $W_\gamma = 4hW_k^2/(m^2\lambda c^4) = 7,2$ МэВ.
3. $\cos\varphi > W_k/Pc = [1 + m^2c^4/(P^2c^2)]^{1/2} - mc^2/Pc$.
4. $\Delta\lambda = 2,42$ пм; $W = 6,6$ кэВ; $P = 4,4 \cdot 10^{-23}$ кгм/с.
5. $W = 0,26$ МэВ; $P = 9,3 \cdot 10^{-12}$ кгм/с.
6. $\lambda = 4\pi\lambda_c[\sin(\theta_2/2) - \eta\sin(\theta_1/2)]/(\eta - 1) = 1/2$ пм.
7. $T = h\nu\eta/(1 + \eta) = 0,2$ МэВ.
8. $\omega' = 2\pi/(\lambda + 2\pi\hbar/mc) = 2,2 \cdot 10^{20}$ рад/с; $T = (2\pi c\hbar/\lambda)/(1 + m\lambda c\pi\hbar) = 60$ кэВ.
9. 0,5. 10. $60^\circ 40'$; $299^\circ 20'$.
11. 1,85 МэВ.
12. 60 %.
13. 0,511 МэВ; $2,7 \cdot 10^{-22}$ кгм/с.
14. 67 %; 50 %; 33 %.
15. $\lambda = 2,4$ пм.
16. $\operatorname{tg}\varphi = [4\pi\hbar/(mc\Delta\lambda) - 1]^{1/2}/[1 + \hbar\omega/(mc^2)]$; $\varphi = 49^\circ$.
17. $\theta_{\max} = 60^\circ$.
18. $\alpha = 90^\circ$.
19. $W_\gamma = 2mc^2 \approx 1,9$ ГэВ.
20. $W_\gamma = mc^2/2 \approx 0,25$ МэВ.
21. $W_\gamma'/W_\gamma = 1/[1 + 2W_\gamma/(mc^2)] = 0,05$.
22. $W_\gamma = 0,25h\nu/(1 + 0,25) = 0,2$ МэВ.
23. $r = 2\eta(1 + \eta)mc/[(1 + 2\eta)eB] = 3,4$ см.
24. $v = c(2W_k/(mc^2)) = 4,5 \cdot 10^{-5}$ м/с.
25. $\Delta\lambda = [4\eta\sin^2(\theta/2)]/(mc) = 1,2$ пм.
26. $W_k = W_1^2(1 - \cos\theta)/(mc^2) = 1,07$ кэВ.

8. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Существование волновых и корпускулярных свойств у физических объектов первоначально было обнаружено в световых явлениях. Интерференция и дифракция, связанные с распространением света и взаимодействием световой волны с *макроскопическими телами*, такими как линзы, призмы, дифракционные решетки и другие оптические приборы, удачно объяснялись волновой теорией. Явления, обусловленные взаимодействием с *микроскопическими объектами*, отдельными заряженными частицами, атомами или молекулами, такие, как эффект Комптона и фотоэффект, в волновую теорию не укладывались. В них свет вел себя подобно потоку микрочастиц – корпускул. Одновременное проявление корпускулярных и волновых свойств называли двойственностью, или корпускулярно-волновым дуализмом.

В 1924 г. французский физик Луи де Бройль высказал гипотезу, что корпускулярно-волновой дуализм может быть распространен не только на световые частицы – фотоны, но и на частицы вещества (электроны, протоны, атомы). Он обобщил соотношение $\lambda_{\phi} = h/P_{\phi}$ между длиной волны фотона λ_{ϕ} и импульсом P_{ϕ} . Де Бройль полагал, что соотношение имеет универсальный характер для любых волновых процессов, связанных с частицами, обладающими импульсом P :

$$\lambda = h/P,$$

где λ – длина волны де Бройля для частицы, h – постоянная Планка. Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия E_k . Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя E_0) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия больше E_0). В нерелятивистском случае импульс равен $P = (2m_0E_k)^{1/2}$, тогда длина волны $\lambda = h/(2m_0E_k)^{1/2}$, где m_0 – масса покоя частицы. В релятивистском случае импульс равен $P = (1/c)[E_k(2E_0 + E_k)]^{1/2}$. Тогда длина волны $\lambda = hc/[E_k(2E_0 + E_k)]^{1/2}$, где $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя частицы, c – скорость света.

Время подтвердило правоту де Бройля. Эксперименты показали, что двойственность присуща не только полевой форме материи (например, электромагнитная волна – фотон), но и вещественной форме, т. е. частицы наряду с корпускулярными обладают и волновыми свойствами. Поэтому теперь принято говорить о корпускулярно-волновом дуализме материи.

Уравнение Шредингера

В квантовой механике, которая занимается рассмотрением микрочастиц вещества (например: электронов, протонов, нейтронов), существует проблема отыскания такого уравнения движения, которое было бы неким аналогом законам Ньютона в классической физике. Для объяснения новых явлений (фотоэффект, дифракция электронов и других частиц) потребовались новые представления, которые не укладывались в рамки прежних и даже явно противоречили им. Важнейшими свойствами объектов, которыми занимается квантовая механика, являются:

- 1) наличие у частиц корпускулярных и волновых свойств, неотделимых друг от друга и несводимых друг к другу;
- 2) наличие у физических систем дискретного спектра устойчивых состояний, что следует, например, из дискретного спектра излучения атомов.

Корпускулярные свойства заключаются в том, что каждая частица имеет некоторую сосредоточенную в малом объеме энергию и импульс. При взаимодействии частиц между собой соблюдаются законы сохранения энергии и импульса. Волновые свойства заключаются в том, что движение частицы определяется некоторой связанной с ней волной, распространение которой подчинено принципу Гюйгенса и для которой соблюдается принцип суперпозиции. Важной задачей оказалась необходимость установления: а) природы этих волн; б) характеризующей эти волны физической величины, которая изменяется в соответствии с волновым уравнением; в) каким образом поведение частицы связано со значениями этой величины в различных точках пространства.

Заметим, что для одной из частиц – фотона – частота колебаний связана с энергией, а длина волны – с импульсом частицы. Фотону соответствует электромагнитная волна. Но для электронов, протонов, нейтронов и других частиц не удастся обнаружить волны, которые были бы ответственны за дифракцию и в то же время доступны непосредственному наблюдению. Отсюда следует, что волны де Бройля (волны частиц) имеют специфическую квантовую природу. Для них нет аналогии в классической физике.

Для описания волновых свойств квантовых частиц вводится некоторая функция $\Psi(x, y, z, t)$, называемая волновой (или пси-функцией). Волны де Бройля получили своеобразное вероятностное истолкование. Физический смысл имеет не сама функция Ψ , а квадрат ее модуля. Величина $|\Psi|^2$ имеет смысл плотности вероятности: $d\omega/dV = |\Psi|^2$.

Из последнего соотношения следует, что вероятность $d\omega$ нахождения частицы в элементе объема dV пропорциональна $|\Psi|^2$ и самому элементу объема dV . Сказанное означает, что в квантовой физике возникает проблема отыскания уравнения движения квантовых частиц, которое явилось бы тем же, чем является уравнение движения Ньютона в классической механике. Искомое уравнение должно быть уравнением относительно функции $\Psi(x, y, z, t)$. Это уравнение было найдено в 1926 г. Шредингером и имеет следующий вид: $-(\hbar^2/2m_0)\cdot\Delta\Psi + U(x, y, z, t)\cdot\Psi = i\hbar\cdot\partial\Psi/\partial t$. Здесь $\hbar = h/2\pi$, $h = 6,625\cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка; $U(x, y, z, t)$ – потенциальная энергия частицы с массой покоя m_0 , движущейся в силовом поле; i – мнимая единица; $\Delta = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2)$ – оператор Лапласа. Уравнение справедливо для любой частицы, движущейся со скоростью, много меньшей скорости света в вакууме.

Уравнение Шредингера дополняется важными условиями: волновая функция должна быть конечной, непрерывной и однозначной; ее частные производные по координатам и времени также должны быть непрерывными; функция $|\Psi|^2$ должна быть интегрируема. Из-за присутствия в уравнении мнимой единицы волновые функции Ψ , удовлетворяющие этому уравнению, всегда комплексны, поэтому сами функции не наблюдаемы. Реально можно оценить только квантово-механические вероятности. Они представляют собой функции Ψ , умноженные на комплексно сопряженные им величины. При скоростях движения, близких скорости света, уравнение Шредингера заменяется более сложным уравнением Дирака. Записанное уравнение называют нестационарным уравнением Шредингера, поскольку оно содержит производную от функции Ψ по времени. Для многих физических задач, например для описания поведения электронов в атоме, более важны решения, не содержащие времени. В этом случае из уравнения Шредингера должна быть исключена зависимость Ψ от времени. Стационарное уравнение Шредингера обычно записывают в форме $\Delta\psi + (2m_0/\hbar^2)\cdot(E - U)\cdot\psi = 0$.

В этом соотношении E – полная энергия частицы, U – потенциальная энергия, $\psi = \psi(x, y, z)$ – амплитуда волновой функции Ψ . Решения этого уравнения, их называют *собственными функциями*, существуют только при определенных значениях E . Их называют *собственными зна-*

чениями. Совокупность этих значений образует энергетический спектр частицы. Собственные значения E могут образовывать как непрерывный, так и дискретный ряд, или другими словами, непрерывный или дискретный спектр. Нахождение собственных значений и собственных функций частиц относится к числу основных задач квантовой механики. *Стационарное уравнение Шредингера является важнейшим соотношением квантовой механики, играющим основную роль в атомной физике.*

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Физические величины не могут быть измерены абсолютно точно. Всегда существует некоторая ошибка измерений, которую принято называть неточностью или *неопределенностью*. Последний термин используется преимущественно в квантовой физике. В классической физике нет принципиальных ограничений на точность измерений. При доста-

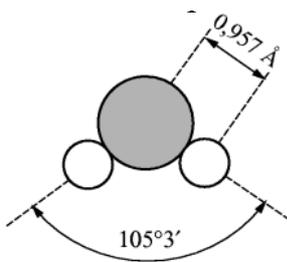


Рис. 8.1. Молекула воды, H_2O ; 1 \AA (ангстрем) = 10^{-10} м

точно совершенной аппаратуре все величины, характеризующие физическую систему, могут быть измерены со сколь угодно точностью. Такой взгляд подтверждался всеми опытными фактами макроскопической физики. Объектами исследования квантовой физики являются микроскопические системы, непосредственное наблюдение которых уже не представляется возможным. На рис. 8.1 схематически изображена молекула воды. Размеры и массы таких объектов говорят за себя сами.

Для микроскопических систем неограниченное повышение точности измерений не всегда возможно. В ряде случаев существуют принципиальные ограничения на точность измерения физических величин. Эти ограничения не вызваны несовершенством измерительной техники, а являются фундаментальным свойством материи и реально проявляются только в микромире.

Принципиальные ограничения на точность измерения физических величин называются *соотношениями неопределенностей*. Наиболее важными являются два соотношения неопределенностей. Первое ограничивает точность *одновременного измерения координат частицы и соответствующих компонент ее импульса*. Эти соотношения выглядят так: $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$; $\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar$; $\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar$.

Второе соотношение устанавливает *предел точности измерения энергии за данный промежуток времени*. Оно имеет вид $\Delta W \cdot \Delta t \geq \hbar$, где Δt — длительность измерения энергии, а ΔW — ее неопределенность.

Для одномерной задачи первое соотношение означает: если положение частицы на координатной оси x известно с точностью до Δx , то в тот же момент времени x – компоненту импульса частицы можно измерить только с точностью $\Delta P_x \approx \hbar/\Delta x$. Из второго соотношения следует, что для измерения энергии с точностью до ΔW необходимо время, не меньше $\Delta t \approx \hbar/\Delta W$. Отличие \hbar от нуля исключает обращение в нуль неопределенностей в импульсе и энергии при заданных Δx и Δt . Только переход к классической физике, при котором $\hbar \rightarrow 0$, снимает ограничения на точность измерений.

Соотношения неопределенностей являются следствием объективно существующей двойственности микрочастиц, обусловленной наличием у них корпускулярных и волновых свойств. Неопределенность ограничивает возможности описания поведения микрообъектов с помощью классических понятий координат и импульсов. В частности, соотношения неопределенностей исключают движение квантовых частиц по траекториям, поскольку для существования траектории требуется, чтобы *одновременно* можно было точно задать координату x и скорость v_x (при известной массе и импульсе P_x). Но именно это и запрещается соотношением неопределенностей.

Физика атомов и молекул

На основании опытов по рассеянию альфа-частиц тонкими металлическими фольгами Резерфордом была предложена ядерная модель атома. Согласно этой модели в ядре атома сосредоточен весь положительный заряд и практически вся масса атома. Линейные размеры ядра – $10^{-15} \dots 10^{-14}$ м. Вокруг ядра в области с линейными размерами порядка 10^{-10} м движутся электроны, масса которых составляет лишь весьма малую долю массы ядра. Ядерная модель атома Резерфорда внешне

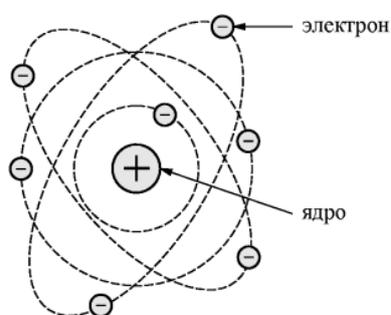


Рис. 8.2. Планетарная модель атома

напоминает солнечную систему: в центре системы находится «Солнце» – ядро, и вокруг него по орбитам движутся «планеты» – электроны. Поэтому данную модель часто называют планетарной, рис. 8.2.

Опыты показывают, что атому свойственна исключительная устойчивость, но устойчивость атома не может быть согласована с классическим истолкованием ядерной модели. На основании классических пред-

ставлений движущийся ускоренно по орбите вокруг ядра электрон должен излучать электромагнитные волны. Излучение и связанные с ним потери энергии не должны позволять электрону удерживаться на орбите. Электрон по спирали будет приближаться к ядру, и за очень короткое время атом прекратит свое существование. Кроме того, излучение атома должно иметь непрерывный спектр. Реально этого не наблюдается. Жизненный опыт и обширный экспериментальный материал указывают на стабильность атомов и дискретный (линейчатый) характер их излучения, что находится в прямом противоречии с классическим истолкованием модели атома Резерфорда.

Первая попытка построения неклассической теории атома была предпринята Бором. В основе этой теории лежала идея связать в единое целое эмпирические закономерности линейчатых спектров, ядерную модель атома Резерфорда и квантовый характер поглощения и излучения света. В теории Бора сохранилось описание поведения электронов в атоме при помощи законов классической физики. Классические законы были дополнены ограничениями, которые сформулированы в виде постулатов. Физического смысла этих постулатов теория не объясняет. Она применима к атому водорода и так называемым водородоподобным атомам. Такие атомы содержат ядро с зарядом Ze , где Z — это порядковый номер химического элемента в таблице Менделеева, а e — элементарный заряд. Подобно тому, как у атома водорода имеется только один электрон, водородоподобный атом содержит один электрон на внешней орбите.

Первый постулат Бора — постулат стационарных состояний (орбит) — заключается в следующем: *существуют некоторые состояния электрона в атоме, находясь в которых он не излучает энергии.*

Второй постулат Бора (правило квантования орбит) утверждает, что *в стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантованные значения момента импульса, удовлетворяющие условию $L_n = m v_n r_n = n \hbar$, где n — ряд натуральных чисел ($n = 1, 2, 3, \dots$), m — масса электрона, v — его скорость, r — радиус его орбиты.*

Третий постулат Бора (правило частот) устанавливает, что *при переходе электрона в атоме из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается квант энергии в виде фотона.* Атом излучает электромагнитную энергию, если электрон переходит с удаленной от ядра стационарной орбиты на ближнюю. При переходе электрона с ближней орбиты на дальнюю атом поглощает энергию. Величина излученного или поглощенного при этом кванта энергии (фотона) $h\nu$ опре-

деляется условием $h\nu = E_2 - E_1$, где E_1 и E_2 – дискретные уровни энергии в атоме до и после перехода электрона; ν – частота фотона.

По современным представлениям стационарные орбиты не отражают действительного движения электронов. Строение атома трактуется с учетом волновых свойств частиц. Но понятие об уровнях энергии в атоме остается в силе.

Движение электрона в водородоподобной системе происходит по круговой орбите с радиусом r под действием кулоновской силы притяжения, играющей роль центростремительной силы:

$$mv^2/r = Ze^2/4\pi\epsilon_0 r^2.$$

Радиусы стационарных орбит находят из второго постулата Бора

$$r_n = (4\pi\epsilon_0\hbar^2/mZe^2) \cdot (1/n^2).$$

Полная энергия электрона на стационарной орбите равна

$$E_n = - (mZ^2e^4/8h^2\epsilon_0^2c) \cdot (1/n^2).$$

Из записанных соотношений следует *формула Бальмера–Ридберга* для спектров излучения водородоподобных атомов

$$\nu = Z^2 \cdot R \cdot [(1/n_1^2) - (1/n_2^2)],$$

где $R = me^4/8h^2\epsilon_0^2c = 3,289842 \cdot 10^{15}$ Гц – *постоянная Ридберга* для частоты; Z – порядковый номер химического элемента в таблице Менделеева; n_1 и n_2 – порядковые номера стационарных орбит.

Целое число n , определяющее энергетические уровни атома, называется главным квантовым числом. Энергетическое состояние, соответствующее значению $n = 1$, называется основным, или нормальным (невозбужденным), состоянием. Все состояния с $n > 1$ называются возбужденными.

Квантовые числа. Заполнение электронных оболочек атомов

В 1869 г. Менделеев открыл периодический закон изменения химических и физических свойств элементов в зависимости от их атомных масс. Он ввел понятие порядкового номера элемента и, расположив химические элементы в порядке их возрастания, получил полную периодичность в изменении физических и химических свойств элементов. Физический смысл порядкового номера Z элемента был установлен в ядерной модели атома Резерфорда, где Z совпадает с числом положительных элементарных зарядов в ядре, закономерно возрастающих на единицу при переходе от предыдущего элемента к последующему. Химические свойства элементов обусловлены поведением в основном внешних, так называемых *валентных*, электронов в атомах. По-

этому периодичность свойств вызвана определенной периодичностью в расположении электронов в атомах различных элементов.

Основы теории периодической системы элементов разработаны в квантовой физике. Положения этой теории кратко можно изложить в виде следующих тезисов:

1. Порядковый номер химического элемента равен общему числу электронов в атоме данного элемента.
2. Состояние электронов в атоме определяется набором четырех квантовых чисел: n , l , m и s .
3. Заполнение электронами энергетических состояний в атоме должно происходить в соответствии с *принципом Паули*, который гласит: в любом атоме не может быть двух электронов, находящихся в двух одинаковых стационарных состояниях, определяемых набором четырех квантовых чисел. Электроны должны отличаться друг от друга по крайней мере одним из квантовых чисел.
4. Распределение электронов в атоме должно удовлетворять принципу минимума потенциальной энергии, т. е. с возрастанием числа электронов каждый следующий электрон должен занять возможное энергетическое состояние с наименьшей энергией.

Определим совокупность четырех квантовых чисел:

- 1) *главное* квантовое число n , как и в атоме водорода, определяет энергетический уровень E_n , который состоит из некоторого набора близко расположенных друг к другу энергетических подуровней. Главное квантовое число имеет значения $n = 1, 2, 3, \dots$;
- 2) *орбитальное* квантовое число l для заданного n принимает значения $l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$; оно учитывает, что момент импульса электрона квантуется, т.е. принимает дискретные значения, определяемые соотношением $L = h\sqrt{l(l+1)}$.
- 3) *магнитное* квантовое число m учитывает, что вектор L момента импульса электрона может иметь лишь такие ориентации в пространстве, при которых его проекция L_z на направление z внешнего магнитного поля принимает квантованные значения, кратные h ; m при заданном l может принимать $2l + 1$ значений: $m = \pm l; \pm(l - 1); \pm(l - 2); \dots; 0$;
- 4) *спиновое* квантовое число s выражает ориентацию собственного момента импульса электрона (спина) относительно орбитального момента \vec{L} электрона. Это четвертое квантовое число имеет только два значения: $s = \pm 1/2$.

По *принципу Паули* для характеристики электрона в атоме должна использоваться четверка квантовых чисел: n , l , m и s . В атоме не может быть электронов с одинаковой четверкой квантовых чисел. Вся совокупность, расположенных вокруг ядра электронов, называется *электронным облаком*. Облако делится на «слои», соответствующие энергетическим уровням E_n ; число n обозначает номер слоя, начиная от ближайшего к ядру. Приняты условные названия: $n = 1$ – *K-слой*; $n = 2$ – *L-слой*; $n = 3$ – *M-слой*; $n = 4$ – *N-слой* и т. д. Слои разделяются и пространственно. В каждом слое электроны распределяются по оболочкам, которые соответствуют орбитальному квантовому числу l . Состояние электрона принято обозначать и называть следующим образом: $l = 0$ – *s-состояние*, $l = 1$ – *p-состояние*, $l = 2$ – *d-состояние* и т. д. в порядке следования букв латинского алфавита. *Электронная конфигурация* считается заданной, если для электронов указаны определяющие их состояния значения квантовых чисел n и l . Например, основное (невозбужденное) состояние атома кислорода можно выразить символической формулой $1s^2 2s^2 2p^4$.

Приведенная запись означает, что имеется 2 электрона в состоянии $1s$, 2 электрона в состоянии $2s$ и 4 электрона в состоянии $2p$.

Основные расчетные формулы

Обобщенная формула Бальмера $\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, где ν – частота спектральных линий в спектре атома водорода. Постоянная Ридберга $R \approx 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, число m определяет серию ($m = 1, 2, 3, \dots$), число n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m + 1, m + 2, \dots$): $m = 1$ (серия Лаймана), $m = 2$ (серия Бальмера), $m = 3$ (серия Пашена), $m = 4$ (серия Брэкета), $m = 5$ (серия Пфунда), $m = 6$ (серия Хэмфри).

$\Delta P_x \cdot \Delta x \geq \hbar$; $\Delta W \cdot \Delta t \geq \hbar$ – соотношения неопределенностей Гейзенберга.

$\int_{x_1}^{x_2} |\Psi|^2 dx = L$ – вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2 .

$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$ – волновая функция частицы в потенциальном ящике.

$W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$ – собственные значения энергии частицы в ящике шириной l .

$D = \exp - \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{2}{\hbar} [2m(W_b - W_{kin})]^{1/2} dx \right\}$ – прозрачность потенциального барьера.

Примеры решения задач

Пример 1. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода равна ~ 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей Гейзенберга, оценить линейные размеры атома.

Решение. Запишем соотношение неопределенностей: $\Delta P_x \cdot \Delta x \geq \hbar$. Если l – линейные размеры атома, то $\Delta x \sim l/2$, тогда $(l/2)\Delta P \geq \hbar$; $l \geq 2\hbar/\Delta P$. Физически разумная неопределенность импульса должна быть не больше, чем сама величина импульса: $\Delta P \leq P$. Импульс связан с кинетической энергией формулой: $P = (2mW_{kin})^{1/2}$, тогда $l_{min} = 2\hbar/(2mW_{kin})^{1/2} = 124$ пм.

Пример 2. Электрон находится в ящике шириной l . Вычислить вероятность того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии с $n = 2$, будет обнаружен в средней трети ящика.

Решение. Запишем формулу для вероятности и подставим волновую функцию с граничными условиями $x_1 = l/3$; $x_2 = 2l/3$:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi_n(x)|^2 dx = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \left(\sin \frac{8\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 0,195.$$

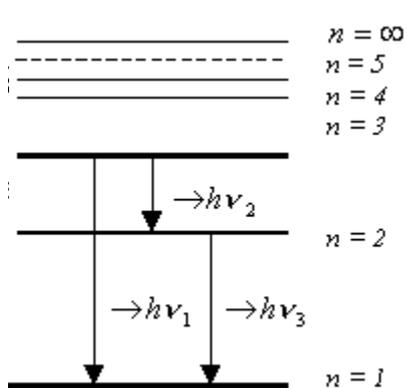
Пример 3. Электрон с энергией $W_{kin} = 4,9$ эВ движется к прямоугольному барьеру $W_b = 5$ эВ. Определить ширину барьера d , при которой его прозрачность будет равна 0,2.

Решение. Вероятность прохождения барьера определяется формулой:

$$D = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} [2m(W_b - W_{kin})]^{1/2} d \right\}; \quad \ln D = -\frac{2}{\hbar} [2m(W_b - W_{kin})]^{1/2} d;$$

$$d = \frac{\hbar \ln(1/D)}{2[2m(W_b - W_{kin})]^{1/2}} = 0,495 \text{ нм.}$$

Пример 4. Электрон в атоме водорода перешел с третьего энергетического уровня на первый. Сколько линий появится в спектре атомов водорода и какова их длина волны?



Решение. Для определения λ воспользуемся формулой Бальмера

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right). \quad (1)$$

Изобразим графически энергетический спектр атома водорода. Он представляет собой систему горизонтальных линий, расстояние между которыми уменьшается с увеличением номера уровня. Электрон из состояния

$n_i = 3$ может перейти либо сразу в состояние $n_f = 1$, либо сначала в состояние с $n_f = 2$, а затем в состояние $n_f = 1$; поэтому в спектре будут наблюдаться три линии.

$$\frac{1}{\lambda_1} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{8}{9} R; \quad (2)$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} R; \quad (3)$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} R. \quad (4)$$

Подставляя в (2), (3) и (4) значения $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$, получим:

$$\lambda_1 = 9/8R = 0,102 \text{ мкм}; \lambda_2 = 36/5R = 0,656 \text{ мкм}; \lambda_3 = 4/3R = 0,122 \text{ мкм}.$$

Пример 5. Найти энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего на второй энергетический уровень. Постоянная Ридберга $R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

Решение. Воспользуемся положениями теории Бора.

$$W_{32} = h \cdot \nu_{32}, \quad \nu_{32} = R[(1/m^2) - (1/n^2)],$$

$$W_{32} = hR[(1/m^2) - (1/n^2)] = 1,89 \text{ эВ}.$$

Пример 6. Определите энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на второй.

Решение:

$$W_{32} = h\nu_{32}, \quad \nu_{32} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$W_{32} = hR \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad W_{32} = hR \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1,89 \text{ эВ}.$$

Пример 6. Определите максимальную и минимальную энергию фотона в видимой области спектра излучения атома водорода.

Решение. Видимая область – это серия Бальмера.

$$\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

$$W_{\min} = hR \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} hR = 3,41 \text{ эВ},$$

$$W_{\max} = hR \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = \frac{1}{4} hR = 1,89 \text{ эВ}.$$

Пример 7. Используя теорию Бора для атома водорода, определите радиус ближайшей к ядру орбиты электрона (первый Боровский радиус) и скорость электрона на этой орбите.

Решение.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad mvr = n\hbar,$$

$$Z = 1, \quad n = 1, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon\hbar^2}{me^2}, \quad v_1 = \frac{\hbar}{mr_1}, \quad r_1 = 52,8 \text{ пм}, \quad v_1 = 2,19 \text{ Мм/с}.$$

Пример 8. Используя теорию Бора, определите орбитальный магнитный момент электрона на третьей орбите атома водорода.

Решение.

Магнитный момент $p_m = I \cdot S$, где I – ток в контуре, S – площадь контура. Ток создается электроном $I = e/T$, где T – период обращения электрона на орбите.

$$E = \frac{2\pi r}{v}, \quad S = \pi r^2, \quad p_m = \frac{evr}{2}, \quad mvr = n\hbar, \quad vr = \frac{n\hbar}{m}, \quad p_m = \frac{en\hbar}{2m} = 2,8 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}.$$

Пример 9. Определите отношение неопределенностей скорости электрона, если его координата установлена с точностью до 10^{-5} м, и пылинки массой $m = 10^{-12}$ м, если ее координата установлена с такой же точностью.

Решение.

$$\Delta x \cdot \Delta P \geq h, \quad \Delta x_e m_e \Delta v_e = h, \quad m_{\text{п}} \Delta v_{\text{п}} \Delta x_{\text{п}} = h, \quad \frac{\Delta v_e}{\Delta v_{\text{п}}} = \frac{hm_{\text{п}} \Delta x_{\text{п}}}{hm_e \Delta x_e} = \frac{m_{\text{п}}}{m_e} = 1,1 \cdot 10^{18}.$$

Пример 10. Электрон в атоме водорода движется по первой боровской орбите. Полагая неопределенность скорости составляющей 0,1 от ее числового значения, оцените неопределенность координаты электрона.

Решение:

$$mvr = n\hbar, \quad n = 1, \quad mvr_1 = \hbar, \quad v = \frac{\hbar}{mr_1}, \quad \Delta v_x = 0,1 \cdot \frac{\hbar}{mr_1}. \quad r_1 = 52,8 \text{ пм}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq h, \quad \Delta x \cdot m \cdot \Delta v_x \approx h, \quad \Delta x \approx \frac{h}{m \cdot \Delta v_x}, \quad \Delta x \approx 3,34 \text{ пм} \gg r_1.$$

Понятие траектории неприменимо.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить неточность в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью 1,5 Мм/с, если допускаемая неточность Δv в определении скорости составляет 10 % от ее величины. Сравнить полученную неточность с диаметром d атома водорода, вычисленным по теории Бора для основного состояния, и указать, применимо ли здесь понятие траектории.

2. Электрон с кинетической энергией $W = 15$ эВ находится в металлической пылинке диаметром $d = 1$ мкм. Оценить (в процентах) относительную неточность, с которой может быть определена скорость электрона.

3. Во сколько раз дебройлевская длина волны частицы меньше неопределенности Δx ее координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1 % ?

4. Если допустить, что неопределенность координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волны, то какова будет относительная неточность $\Delta P/P$ импульса этой частицы?

5. Используя соотношение неопределенностей $\Delta x \cdot \Delta P_x > h$, найти выражение, позволяющее оценить минимальную энергию W_{\min} электрона, находящегося в одномерном потенциальном ящике шириной l .

6. Используя соотношение неопределенностей $\Delta x \cdot \Delta P_x > h$, оценить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома $l \sim 10^{-10}$ м.

7. Показать, используя соотношение неопределенностей, что в ядре не могут находиться электроны. Линейные размеры ядра принять равными $5 \cdot 10^{-15}$ м.

8. При движении частицы вдоль оси x скорость оказывается определенной с точностью $\Delta v_x = 1$ см/с. Во сколько раз неопределенность координаты для электрона больше, чем для дробишки массой $m = 0,1$ г?

9. Пучок электронов с энергией $W = 10$ эВ падает на щель шириной $a = 10$ нм. Если электрон прошел через щель, то его координата известна с неточностью $\Delta x = a$. Оценить получаемую при этом относительную неточность в определении импульса $\Delta P/P$ электрона.

10. Электрон с кинетической энергией $W = 4$ эВ локализован в области размером $l = 1$ мкм. Оценить с помощью соотношения неопределенностей относительную неопределенность его скорости.

11. Частица массы $m = 10^{-30}$ кг находится в состоянии с минимальной энергией в прямоугольной, бесконечно глубокой потенциальной яме шириной $l = 1$ м. Оценить энергию частицы W_{\min} .

12. Приняв, что минимальная энергия нуклона в ядре $W_{\min} = 10 \text{ МэВ}$, оценить, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

13. Прозрачность потенциального барьера высотой W_0 определяется выражением $D = \exp\{-2[2m(W_0 - W)]^{1/2} d/h\}$. Оценить величину D для электрона при $W_0 = 2 \text{ эВ}$, $W = 1 \text{ эВ}$, $d = 10^{-10} \text{ м}$.

14. Какая доля электронов с энергией 1 эВ пройдет через потенциальный барьер высотой 8 эВ и геометрической шириной $0,5 \text{ нм}$?

15. Поток электронов с энергией 1 эВ падает на потенциальный прямоугольный барьер высотой 10 эВ . Какова должна быть ширина барьера, чтобы плотность потока числа электронов уменьшилась в $e = 2,7$ раз?

16. Найти прозрачность потенциального энергетического треугольного барьера шириной $l = 1 \text{ мкм}$ и высотой W_0 для электрона с кинетической энергией W .

17. Частица массой $m = 10^{-30} \text{ кг}$ находится в состоянии с минимальной энергией в прямоугольной, бесконечно глубокой потенциальной яме шириной $l = 1 \text{ м}$. Оценить силу давления F частицы на стенки ямы.

18. Используя соотношение неопределенностей $\Delta x \cdot \Delta P_x > h$, найти выражение, позволяющее оценить минимальную энергию W_{\min} протона, находящегося в одномерном потенциальном ящике шириной l .

19. Найти неточность в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $1,5 \text{ Мм/с}$, если допускаемая неточность Δv в определении скорости составляет 10% от ее величины.

20. Протон с кинетической энергией $W = 4 \text{ эВ}$ локализован в области размером $l = 1 \text{ мкм}$. Оценить с помощью соотношения неопределенностей относительную неопределенность его скорости.

21. Пучок протонов с энергией $W = 10 \text{ эВ}$ падает на щель шириной $a = 10 \text{ нм}$. Если протон прошел через щель, то его координата известна с неточностью $\Delta x = a$. Оценить получаемую при этом относительную неточность в определении импульса $\Delta P/P$ протона.

22. Сравнить неопределенности в определении скорости α — частицы, если ее координаты установлены с точностью до 10^{-5} м , и шарика массой в $0,1 \text{ мг}$, если координаты его центра тяжести могут быть установлены с такой же точностью.

23. Диаметр пузырька в пузырьковой камере составляет величину порядка 10^{-7} м . Оценить неопределенность в определении скорости электрона, если неопределенность в определении координаты принять равной диаметру пузырька.

24. Пользуясь соотношением неопределенностей Гейзенберга, оценить неопределенность Δv в определении скорости электрона в атоме водорода.

25. Диаметр пузырька в пузырьковой камере составляет величину порядка 10^{-7} м. Оценить неопределенность в определении скорости α -частицы, если неопределенность в определении координаты принять равной диаметру пузырька.

26. Сравнить неопределенность при определении скорости электрона в атоме водорода, с величиной его скорости на первой боровской орбите.

Ответы

1. $\Delta x = 77$ нм; $r = 5,3$ нм. 2. $\Delta v/v = 0,01$ %. 3. 160 раз. 4. 16 %.
 5. $W_{\min} = h/\pi^2 ml^2$. 6. $W_{\min} = 15$ эВ. 7. $\Delta P = h/\pi l$; $P \sim \Delta P$; $P = [(2W_0 + W_{\text{kin}}) W_{\text{kin}}]^{1/2}/c^2$;
 $W_{\min} = 2\hbar c/l = 80$ МэВ. 8. $5 \cdot 10^{28}$ раз. 9. 0,62 %. 10. $\Delta v/v \sim \hbar c/(2m_e c^2 W_{\text{kin}} l)^{1/2} = 10^{-4}$.
 11. $W_{\min} = \hbar^2/(2ml^2) = 5 \cdot 10^{-5}$ Дж. 12. $l = 2\hbar/(2mW)^{1/2} = 2,9$ фм.
 13. $D = \exp(-1) = 0,4$. 14. $2,2 \cdot 10^{-6}$. 15. 0,325 нм.
 16. $D = \exp\{-8l[2m(W_0 - W)^3]^{1/2}/3\hbar W_0\}$. 17. $F = \hbar^2/(ml^3) \sim 10^{-4}$ Н.
 18. $W_{\min} = h/\pi^2 ml^2$. 19. $\Delta x = 77$ нм. 20. $\Delta v/v \sim 2,3 \cdot 10^{-6}$. 21. 0,62 %.
 22. $\Delta v/v = 1,6 \cdot 10^{23}$. 23. $\Delta v = 1,16 \cdot 10^3$ м/с. 24. $\Delta v > 1,1 \cdot 10^6$ м/с.
 25. $\Delta v = 0,16$ м/с. 26. $\Delta v/v = 50$ %.

9. ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ

Существование волновых и корпускулярных свойств у физических объектов первоначально было обнаружено в световых явлениях. Интерференция и дифракция, связанные с распространением света и взаимодействием световой волны с *макроскопическими телами*, такими как линзы, призмы, дифракционные решетки и другие оптические приборы, удачно объяснялись волновой теорией. Явления, обусловленные взаимодействием с *микроскопическими объектами*, отдельными заряженными частицами, атомами или молекулами, такие как эффект Комптона и фотоэффект, в волновую теорию не укладывались. В них свет вел себя подобно потоку микрочастиц – корпускул. Одновременное проявление корпускулярных и волновых свойств называли двойственностью или корпускулярно-волновым дуализмом.

В 1924 г. французский физик Луи де Бройль высказал гипотезу, что корпускулярно-волновой дуализм может быть распространен не только на световые частицы – фотоны, но и на частицы вещества (электроны, протоны, атомы). Он обобщил соотношение $\lambda_{\phi} = h/P_{\phi}$ между длиной волны фотона λ_{ϕ} и импульсом P_{ϕ} . Де Бройль полагая, что соотношение имеет универсальный характер для любых волновых процессов, связанных с частицами, обладающими импульсом P : $\lambda = h/P$, где λ – длина волны де Бройля для частицы, h – постоянная Планка. Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия W_k . Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя W_0) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия больше W_0). В нерелятивистском случае импульс равен $P = (2m_0W_k)^{1/2}$, тогда длина волны $\lambda = h/(2m_0W_k)^{1/2}$, где m_0 – масса покоя частицы. В релятивистском случае импульс равен

$$P = (1/c)[W_k(2W_0 + W_k)]^{1/2}.$$

Тогда длина волны

$$\lambda = hc/[W_k(2W_0 + W_k)]^{1/2},$$

где $W_0 = m_0c^2$ – энергия покоя частицы, c – скорость света.

Согласно идее де Бройля, со свободно движущейся частицей, обладающей энергией W и импульсом P , связана плоская волна. Полагая, что волна распространяется вдоль направления Ox , можно записать

$$\Psi(x, t) = Ae^{-(i/\hbar)(Wt - Px)}.$$

Зафиксировав определенное значение фазы, т. е. $Wt - Px = \text{const}$, и продифференцировав это выражение, найдем фазовую скорость волны:

$$v_{\phi} = \frac{dx}{dt} = \frac{W}{P}.$$

С другой стороны, известно, что $v_{\phi} = \omega/k$, где $\omega = W/\hbar$ – круговая частота, k – волновое число. Поскольку $k = P/\hbar$, можно записать

$$v_{\phi} = \omega/k = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{W}{P} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}.$$

Так как всегда скорость частицы $v \ll c$, то фазовая скорость волн де Бройля больше скорости света в вакууме (на величину фазовой скорости релятивистские ограничения не накладываются). Согласно волновой теории, частице ставится в соответствие волновой пакет, образуемый непрерывной совокупностью монохроматических плоских волн де Бройля с импульсами, заключенными в интервале $2\Delta P$ ($\Delta P \ll P$). Поскольку скорость движения центра волнового пакета равна *групповой скорости*, то для нее мы можем записать:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dW}{dP}.$$

Групповая скорость для нерелятивистских частиц:

$$u = \frac{dW}{dP} = \frac{d[P^2/(2m)]}{dP} = \frac{P}{m} = \frac{mv}{m} = v.$$

Групповая скорость для релятивистских частиц:

$$u = \frac{dW}{dP} = \frac{d(\sqrt{m_0^2 c^4 + P^2 c^2})}{dP} = \frac{Pc^2}{\sqrt{m_0^2 c^4 + P^2 c^2}} = \frac{Pc^2}{W} = \frac{mvc^2}{mc^2} = v.$$

Таким образом, групповая скорость u волны де Бройля равна скорости v частицы, иначе говоря, волны де Бройля перемещаются вместе с частицами. Заменяв в формуле для фазовой скорости волны v на u , получим

$$uv_{\phi} = c^2.$$

Волны де Бройля испытывают дисперсию, т. е. их фазовая скорость зависит от длины волны. Подставив в формулу $v_{\phi} = W/P$ выражение для энергии (в нерелятивистском приближении $W = P^2/(2m)$), в ре-

лятивистском — $W = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$, видим, что в обоих случаях фазовая скорость зависит от импульса (поскольку $p = \hbar k$, а $k = 2\pi/\lambda$).

Время подтвердило правоту де Бройля. Эксперименты показали, что двойственность присуща не только полевой форме материи (например, электромагнитная волна — фотон), но и вещественной форме. То есть частицы наряду с корпускулярными обладают и волновыми свойствами. Поэтому теперь принято говорить о корпускулярно-волновом дуализме материи.

Основные расчетные формулы:

$$\lambda = h/P; \lambda = hc/[W_k(2W_0 + W_k)]^{1/2}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Определить массу частицы, кинетическая энергия которой 100 эВ, а длина волны де Бройля $1 \cdot 10^{-10}$ см.

Решение. Длина волны де Бройля для частицы зависит от ее импульса p и определяется формулой $\lambda = h/P$, и, если известна ее кинетическая энергия, то: $W_{\text{kin}} = mv^2/2$; $p = mv$; $P = (2mW_{\text{kin}})^{1/2}$; $m = h^2/2\lambda^2 W_{\text{kin}}$. Подставляя численные значения величин, получим: $m = 6,85 \cdot 10^{-27}$ кг.

Пример 2. Определите связь между групповой и фазовой скоростями волны де Бройля.

Решение. Фазовая скорость волны де Бройля $v_\phi = \omega/k$. Тогда, $\omega = v_\phi k$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Групповая скорость $u = d\omega/dk$. Учитываем, что фазовая скорость зависит от длины волны (волнового числа k), поэтому

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_\phi k)}{dk} = v_\phi + \frac{dv_\phi}{dk}.$$

Преобразуем второе слагаемое

$$\frac{dv_\phi}{dk} = \frac{dv_\phi}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk} = \frac{dv_\phi}{d\lambda} \cdot \frac{d(2\pi/\lambda)}{d\lambda} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \cdot \frac{dv_\phi}{d\lambda}.$$

После подстановки, учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$, находим связь между групповой и фазовой скоростями волны де Бройля:

$$u = v_\phi - \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda}.$$

Пример 3. Исходя из общей формулы для фазовой скорости ($v_\phi = \omega/k$), получите выражение для фазовой скорости волны де Бройля свободно движущейся с постоянной скоростью v частицы в нерелятивистском и релятивистском случаях.

Решение.

$$\omega = 2\pi\nu, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad v_\phi = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{W}{P}.$$

В нерелятивистском случае

$$v \ll c, \quad W = \frac{P^2}{2m}, \quad v_\phi = \frac{P^2}{2mP} = \frac{P}{2m} = \frac{mv}{2} = \frac{v}{2}.$$

В релятивистском случае

$$v \approx c, \quad W = mc^2, \quad v_\phi = \frac{W}{P} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}.$$

Пример 4. Определите длину волны де Бройля для электрона на третьей боровской орбите в атоме водорода.

Решение.

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mv}, \quad mvr = n\hbar, \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad v = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^2}{2\epsilon_0 h}, \quad \lambda = \frac{2h^2 n \epsilon_0}{me^2} = 1 \text{ нм}.$$

Пример 5. Получите зависимость между длиной волны де Бройля λ релятивистской частицы и ее кинетической энергией.

Решение:

$$\lambda = \frac{h}{P}, \quad Pc = \sqrt{T(T + 2mc^2)}, \quad P = \frac{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}{c}, \quad \lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти зависимость дебройлевской длины волны частицы массы m от безразмерного соотношения mc^2/W_{kin} . Построить примерный график, отметить на графике предельные области ультрарелятивистской и нерелятивистской частицы.

2. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 200$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 2,02$ пм. Найти массу m частицы, если ее заряд численно равен заряду электрона.

3. Альфа-частица (ядро атома гелия) движется по окружности радиуса $R = 8,3$ мм в однородном магнитном поле, напряженность кото-

рого $H = 18,9$ кА/м. Найти длину волны де Бройля для α -частицы. ($\mu_0 = 12,57 \cdot 10^{-7}$ Гн/м).

4. Найти длину волны де Бройля для атома водорода, движущегося при температуре $T = 293$ К с наиболее вероятной скоростью. $v = (2RT/M)^{1/2}$; $R = 8,31$ Дж/моль·К.

5. С какой скоростью движется электрон, если дебройлевская длина волны численно равна его комптоновской длине волны?

6. Определить длину волны де Бройля электрона, если он движется по окружности $R = 0,5$ см в магнитном поле с величиной индукции $B = 8$ мТл.

7. При дифракции электронов на щели шириной 1 мкм расстояние между двумя максимумами первого порядка в дифракционной картине на экране, отстоящем от щели на 0,1 м, равно 0,03 мм. Найти скорость электронов.

8. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 100 до 50 пм? (1 пм = 10^{-12} м)

9. При фиксированной скорости релятивистской частицы изобразить график зависимости ее дебройлевской длины волны от массы частицы. Изменится ли вид кривой в случае нерелятивистской частицы?

10. Найти дебройлевскую длину волны тепловых нейтронов, соответствующую их наиболее вероятной скорости при комнатной температуре $T = 300$ К. $v = (2kT/m_n)^{1/2}$; $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

11. Определить длину волны де Бройля протона, если он движется по окружности $R = 0,5$ см в однородном магнитном поле с величиной индукции $B = 8$ мТл.

12. С какой скоростью движется протон, если дебройлевская длина волны численно равна его комптоновской длине волны?

13. При дифракции протонов на щели шириной $a = 1$ мкм расстояние между двумя максимумами первого порядка в дифракционной картине на экране, отстоящем от щели на $L = 0,1$ м, равно 0,03 мм. Найти скорость протонов.

14. При дифракции электронов на щели шириной $a = 1$ мкм расстояние между двумя максимумами второго порядка в дифракционной картине на экране, отстоящем от щели на $L = 0,1$ м, равно 0,03 мм. Найти скорость электронов.

15. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить протону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 100 пм (1 пм = 10^{-12} м) до 50 пм?

16. Найти дебройлевскую длину волны электронов, соответствующую их наиболее вероятной скорости при комнатной температуре $T = 300$ К. $v = (2kT/m_n)^{1/2}$; $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

17. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 200$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 2,02$ пм. Найти массу m частицы, если ее заряд численно равен заряду α -частицы (ядро атома гелия).

18. Электрон движется по окружности радиуса $R = 8,3$ мм в однородном магнитном поле, напряженность которого $H = 18,9$ кА/м. Найти длину волны де Бройля для электрона. ($\mu_0 = 12,57 \cdot 10^{-7}$ Гн/м)

19. При каком значении кинетической энергии частицы дебройлевская длина волны электрона равна его комптоновской длине волны?

20. Найти связь между длиной волны де Бройля и длиной круговой электронной орбиты.

21. Нейтрон с кинетической энергией $W = 25$ эВ налетает на покоящийся дейтрон (ядро тяжелого водорода). Найти дебройлевские длины волн обеих частиц в системе их центра инерции.

22. Найти дебройлевскую длину волны релятивистских электронов, подлетающих к антикатоде рентгеновской трубки, если длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра равна 10 пм.

23. Найти среднюю длину дебройлевской волны узкого пучка электронов, скорости которых равномерно распределены в интервале скоростей от $v_1 = 1$ Мм/с до $v_2 = 2$ Мм/с.

24. Найти среднюю длину дебройлевской волны узкого пучка протонов, скорости которых равномерно распределены в интервале скоростей от $v_1 = 2$ Мм/с до $v_2 = 4$ Мм/с.

25. Определить длину дебройлевской волны электрона, находящегося на второй орбите в атоме водорода.

26. Возбужденный атом водорода при переходе в основное состояние испустил последовательно два кванта с длинами волн 4,051 мкм и 0,09725 мкм. Определить энергию первоначального состояния атома и соответствующее ему квантовое число.

27. Квант света выбивает фотоэлектрон из атома водорода, находящегося в нормальном состоянии. С какой скоростью будет двигаться электрон вдали от ядра?

28. Первый потенциал возбуждения водородного атома $\varphi_1 = 10,2$ В. Определить энергию в электронвольтах фотона, соответствующего первой линии серии Бальмера.

29. Энергия ионизации водородного атома $W_i = 13,6$ эВ. Исходя из этого, определить энергию W (в эВ) фотона, соответствующего второй линии серии Бальмера.

30. Потенциал ионизации водородного атома равен 13,6 В. Определить длину волны λ_1 первой линии и длину волны λ_∞ границы серии Лаймана.

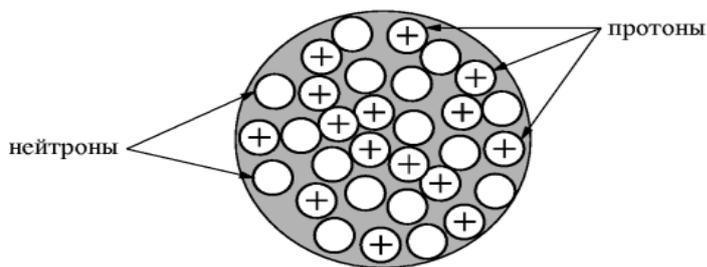
Ответы

1. $\lambda = (mc^2/W_{\text{kin}})^{1/2}$. 2. $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг. 3. $\lambda = h/\mu_0 Hqr = 10$ пм.
 4. $\lambda = 180$ пм. 5. $v = 212$ ММ/с. 6. $\lambda = h/qrB = 10^{-10}$ м. 7. $v = 3Lh/amx = 7,3$ ММ/с.
 8. $W = 450$ эВ. 9. $\lambda \sim 1/m$; не изменится. 10. $\lambda = h/(2mkT)^{1/2} = 1,3$ пм.
 11. $\lambda = 10^{-10}$ м. 12. $v = 212$ ММ/с. 13. $v = 3976$ м/с. 14. $v = 5Lh/amx = 12,17$ ММ/с.
 15. $W = 0,826$ МэВ. 16. $\lambda = 5,57 \cdot 10^{-9}$ м. 17. $m = 0,835 \cdot 10^{-27}$ кг. 18. $\lambda = 10^{-11}$ м.
 19. $W_{\text{kin}} = 0,4m_0c^2 = 0,21$ МэВ. 20. $n = \lambda/2\pi r$. 21. $\lambda_1 = \lambda_2 =$
 $= h(1+m_n/m_d)/(2m_nT)^{1/2} = 8,6$ пм. 22. $\lambda = \lambda_k/(1+2mc\lambda_k/h)^{1/2} = 3,3$ пм.
 23. $\langle \lambda \rangle = h \ln(v_2/v_1)/m(v_2 - v_1) = 5,1$ пм. 24. $\langle \lambda \rangle = 1,36$ пм. 25. $\lambda = 6,7 \cdot 10^{-10}$ м.
 26. $W = -0,545$ эВ; $n = 5$. 27. $v = [2h(v-cR)/m]^{1/2}$. 28. $W = 5q_e\varphi_1/27 = 1,9$ эВ.
 29. $W = 3W_i/16 = 2,6$ эВ. 30. $\lambda_1 = 122$ нм; $\lambda_\infty = 91$ нм.

10. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

10.1. Атомное ядро. Ядерные силы

Атомное ядро любого элемента состоит из протонов и нейтронов. Протон и нейтрон имеют близкие массы. Протон несет на себе элементарный положительный заряд. Нейтрон – частица, не имеющая заряда. Спин у нейтрона, как и у протона равен $\frac{1}{2}\cdot\hbar$. Ядра, имеющие одинаковый заряд (т. е. и одинаковое число протонов), но отличающиеся друг



от друга числом нейтронов, называются *изотопами*. Сумма нейтронов и протонов в ядре называется *массовым числом (A)*. Схематически структура атомного ядра изображена на рис. 10.1.

Рис. 10.1. Структура атомного ядра

Число нейтронов в ядре $N = A - Z$, где Z – атомный номер ядра, равный порядковому номеру элемента в периодической системе. Фактически, Z выражает кратность заряда ядра элементарному электрическому заряду, обычно обозначаемому латинской буквой e . Заряд ядра равен Ze . Обе частицы – протон и нейтрон – называются *нуклонами (ядерными частицами)*. Они связаны внутри ядра особыми силами, которые называются *ядерными*. Нуклоны в ядре находятся на дискретных уровнях энергии. Ядра, у которых число нейтронов или протонов равно одному из следующих чисел: 2, 8, 20, 28, 50, 82 и 120 называются *магическими ядрами*, а сами числа – *магическими числами*. Такие ядра наиболее стабильны.

Плотность вещества в ядре очень велика, порядка 10^{17} кг/м³. Размеры атомных ядер имеют порядок 10^{-15} м – 1 ферми (Фм). Радиус ядра определяется приближительной эмпирической формулой:

$$r = r_0 A^{1/3} \text{ Фм, где } A \text{ – массовое число, } r_0 = (1,3 \div 1,7).$$

Спин ядра J складывается из спинов нуклонов и их моментов импульса. При нечетном числе нуклонов спин ядра имеет полуцелое значение. При четном числе нуклонов в ядре спин равен нулю или целому числу. Спины ядер не превышают нескольких единиц \hbar (постоянная $\hbar = h/2\pi$).

Ядро обозначают символом химического элемента с указанием атомного номера и массового числа в качестве нижнего и верхнего индексов соответственно (например, ${}^4_2\text{He}$ – гелий с атомным номером 2 и массовым числом 4).

Ядерные силы сильно зависят от расстояния. Между протонами на расстоянии 1 Фм они в 35 раз больше сил электростатического отталкивания и в 10^{38} раз больше сил гравитационного притяжения. На расстояниях меньше 0,7 Фм ядерные силы действуют как силы отталкивания, на расстояниях больше 0,7 Фм – как силы притяжения; на расстоянии 2 Фм их действие равно нулю. Ядерные силы не зависят от электрического заряда и обладают свойством насыщения. Они имеют три составляющих: центральная сила, зависящая от расстояния; спин – спиновая сила и спин – орбитальная сила, которая возникает в результате искривления траектории одного нуклона при прохождении вблизи другого.

О величине и форме ядра судят по рассеянию электронов высоких энергий. Электрический заряд распределен по ядру неравномерно. В сердцевине ядра плотность постоянна. Сердцевина окружена оболочкой, в которой плотность уменьшается. *Радиусом ядра* принято считать расстояние от центра до слоя, в котором плотность заряда равна половине его максимального значения. В зависимости от числа протонов и нейтронов ядра могут иметь форму сферы, сигары или груши.

10.2. Дефект массы. Энергия связи ядра

Известно, что ядра атомов представляют собой устойчивые образования. Поскольку ядра атомов состоят из протонов и нейтронов, устойчивость ядер указывает на существование между ядерными частицами сил притяжения. На расстояниях меньше 10^{-15} м ядерные силы значительно превосходят силы кулоновского отталкивания между протонами. Ядерные силы не зависят от сорта частиц, они в одинаковой мере действуют между нуклонами любого типа. Необходимо отметить, что внутри ядра из-за постоянных взаимных превращений протоны и нейтроны неразличимы. Ядро окружено потенциальным барьером, который обусловлен ядерными и кулоновскими силами. Выход нуклона

из ядра или системы нуклонов (например, из α -частицы) возможен или путем «туннельного эффекта», или при получении энергии извне. В первом случае происходит спонтанный радиоактивный распад ядра, во втором — вынужденная ядерная реакция. Чтобы разделить ядро на составляющие его нуклоны и развести нуклоны на расстояния, при которых прекращаются взаимодействия между ними, необходимо затратить энергию. Эта энергия называется *энергией связи ядра*.

Эксперименты показали, что при образовании ядер атомов массы ядер всегда меньше суммы масс, составляющих их нуклонов. Уменьшение суммарной массы нуклонов при образовании из них ядра объясняется выделением энергии связи ядра. Из известного соотношения Эйнштейна вытекает, что $E = mc^2$. Если обозначить через ΔE величину энергии, выделяющейся при образовании ядра, то соответствующая ей масса $\Delta m = \Delta E/c^2$ характеризует уменьшение суммарной массы при образовании ядра из составных частиц. Если ядро с массой $M_{\text{я}}$ образовано из Z протонов с массой m_p и из N нейтронов с массой m_n , причем $N = A - Z$, то величина $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}}$ и называется *дефектом массы ядра*. Дефект массы Δm в свою очередь служит мерой энергии связи. Очевидно, что $\Delta E = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}}]c^2$.

В ядерной физике «прочность» ядра принято характеризовать удельной энергией связи, приходящейся на один нуклон, т. е. $\Delta E/A$. Среднее значение энергии связи, приходящейся на один нуклон, у тяжелых ядер составляет 8 МэВ (мегаэлектрон — вольт); $1 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$.

10.3. Ядерные превращения

Некоторые тяжелые ядра (уран, торий, радий) самопроизвольно распадаются с образованием новых ядер и выделением α -частиц (ядра атомов гелия), β -частиц (электронов или позитронов) и фотонов большой энергии (γ -излучение). Это свойство называется *естественной радиоактивностью*. Для радиоактивности установлены следующие закономерности:

1. Радиоактивный распад не зависит от внешних условий (температуры, давления, химических взаимодействий).
2. α -частицы и γ -кванты имеют дискретные значения энергии; для β -частиц характерно произвольное значение энергии; β -распад сопровождается излучением нейтрино и антинейтрино.
3. Изменение числа радиоактивных ядер в процессе распада определяется соотношением $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, где N_0 — начальное число ядер в

момент времени $t = 0$; N – число ядер, не распавшихся по прошествии времени t ; λ – *постоянная распада* (эта величина зависит от *среднего времени жизни* ядра $\tau = 1/\lambda$). Обычно в справочниках приводятся не значения λ , а *периода полураспада* $T_{1/2}$ (время, за которое распадается половина ядер). Эти величины связаны между собой

соотношением $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx \frac{0,693}{T_{1/2}}$. Число распадов в единицу време-

ни (секунду) называется *активностью*. Она находится, как $a = \frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$. Единица активности – *беккерель (Бк)*: $[a] = 1/\text{с} = \text{Бк}$.

4. Новые ядра, возникающие в результате радиоактивного распада, занимают в периодической системе элементов другие места: при α -распаде порядковый номер уменьшается на 2, при электронном распаде (β^-) – увеличивается на 1, при позитронном распаде (β^+) – уменьшается на единицу. Это свойство называется *законом смещения*.

Искусственные ядерные превращения можно вызвать путем облучения элементов протонами, нейтронами, ядрами дейтерия (тяжелого водорода), ядрами гелия (α -частицами) или ядрами более тяжелых элементов, а также γ -лучами. Такое явление называют *искусственной радиоактивностью*, а происходящие при этом превращения ядер – *ядерными реакциями*. При ядерных реакциях могут образовываться новые радиоактивные изотопы, которых нет на Земле. При искусственной радиоактивности ядра атомов испускают в основном γ -лучи и β -частицы.

При бомбардировке вещества потоком частиц P за 1 с в нем возникает K ядерных реакций: $K = \sigma \cdot n_0 \cdot P$, где n_0 – число атомов в веществе, коэффициент пропорциональности σ называют *эффективным сечением ядерной реакции*. Эффективное сечение имеет размерность площади и численно равно вероятности ядерной реакции за одну секунду при бомбардировке одного ядра потоком с плотностью 1 частица на 1 см² за 1 с. Эффективные сечения ядерных реакций измеряются в барнах: 1 барн = 10⁻²⁴ см². Эффективное сечение быстрых частиц приблизительно равно площади поперечного сечения ядра: $\sigma = \pi \cdot r_0^2$, r_0 – радиус ядра.

Ядерные превращения используются для освобождения ядерной энергии путем деления тяжелых ядер (например, урана ²³⁵U) или путем синтеза (соединения) легких ядер (например, ядер водорода). Синтез легких ядер может быть осуществлен при очень высоких температурах (порядка десятков и сотен миллионов градусов). Такие реакции называются *термоядерными*.

10.4. Взаимодействие излучений с веществом

Электроны и позитроны. Основными видами взаимодействия являются упругие и неупругие рассеяния, радиационное торможение. При неупругом рассеянии происходит ионизация и возбуждение атомов. Такие затраты энергии называют *ионизационными потерями*. При взаимодействии быстрых электронов с ядрами происходит их торможение, сопровождающееся тормозным излучением в виде рентгеновских лучей. Такие потери называют *радиационными*. Ионизационные и радиационные потери определяют длину пробега электронов в веществе. Поглощение электронов описывается соотношением $N_d = N_0 \cdot e^{-\mu d}$, где N_0 – начальная интенсивность пучка электронов, N_d – интенсивность пучка после прохождения слоя толщиной d , μ – линейный коэффициент поглощения.

Атомные ядра. Радиационные потери атомных ядер невелики. Основную роль играют ионизационные потери, которые определяются зарядом и скоростью частиц. Например, у электрона и протона при одинаковых скоростях ионизационные потери одинаковы. Но длина пробега частицы, при одинаковых энергиях, зависит от массы. У тяжелых частиц она меньше, чем у легких.

Нейтроны. Взаимодействие нейтронов с атомными ядрами осуществляется посредством ядерных сил. Различаются, в основном, два вида взаимодействия: рассеяние и захват. Рассеяние может быть упругим и неупругим. При неупругом рассеянии изменяется кинетическая энергия. После нескольких столкновений происходит захват нейтронов ядрами.

Гамма-излучение. Ослабление интенсивности γ -излучения определяется соотношением $I_d = I_0 \cdot e^{-\mu d}$, где I_0 – интенсивность пучка излучения при входе в слой вещества, I_d – интенсивность пучка после прохождения слоя толщиной d , μ – линейный коэффициент ослабления. Основными видами взаимодействия являются рассеяние на электронах, фотоэлектрическое поглощение и образование пар.

Различают два типа рассеяния – когерентное (для фотонов с энергией до 10 кэВ) и некогерентное, иначе называемое комптоновским; $1 \text{ кэВ} = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}$. При высоких энергиях преобладает некогерентное рассеяние, в результате изменяется длина волны выходящего из вещества излучения.

Фотоэлектрическое поглощение вызвано взаимодействием фотона с электроном атома. Оно имеет наибольшую вероятность, если фотон обладает энергией, незначительно превышающей энергию связи электрона.

трона. Фотон, имеющий энергию больше $2mc^2$ (m – масса электрона, c – скорость света), вблизи ядра может превратиться в пару частиц – электрон и позитрон, которые производят ионизацию атомов вещества.

10.5. Классификация элементарных частиц

По величине спина частицы делятся на два типа: с целым спином (0 и 1) и полуцелым ($\frac{1}{2}$). Частицы с полуцелым спином подчиняются принципу Паули; частицы с целым спином этому принципу не подчиняются.

По массе частицы делятся на три группы: *барионы*, *мезоны* и *лептоны*. *Барионы* – это тяжелые частицы, *мезоны* и *лептоны* – легкие. Каждой элементарной *частице* соответствует своя *античастица*. Любая пара таких частиц характеризуется тремя основными свойствами:

1. Частица и соответствующая ей античастица имеют одинаковые массы, спин и время жизни.
2. Частица и ее античастица имеют равные по величине, но противоположные по знаку электрические заряды; барионные (лептонные) числа и странности.
3. Продукты распада частицы и соответствующей античастицы по отношению друг к другу также являются частицами и античастицами.

Барионное число – квантовое число, для нуклонов и гиперонов равное +1, для их античастиц равно –1, для мезонов и лептонов равно 0.

Подобным образом вводится и *лептонное число*; для лептонов оно равно +1, для их античастиц равно –1.

Среди разнообразных элементарных частиц можно выделить определенные группы, имеющие близкие характеристики (спин, массу), но отличающиеся зарядом. Такие группы называются *зарядовыми мультиплетами*. Например, протон и нейтрон, π -мезоны. Частицы, входящие в такие группы, рассматриваются как различные состояния одной частицы. Средняя величина зарядов частиц, входящих в мультиплет, называется центром зарядового мультиплета. Для нуклонов эта величина равна $+\frac{1}{2}$, для π -мезонов равна 0. Центры зарядовых мультиплетов гиперонов смещены по отношению к соответствующим центрам нуклонов. *Странность* – это тоже квантовое число. Оно определяется как удвоенная величина смещения центра зарядового мультиплета. Для π -мезонов и нуклонов странность равна нулю.

Основные расчетные формулы

- $N = A - Z; E = mc^2; \Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_n;$
- $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}; \tau = 1/\lambda; \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx \frac{0,693}{T_{1/2}}; a = \frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N;$
- $I_d = I_0 \cdot e^{-\mu d}; N = (m/M)N_A;$
- $N_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} [\exp(-\lambda_A t) - \exp(-\lambda_B t)] N_A.$

Примеры решения задач

Пример 1. Определить начальную активность радиоактивного препарата магния $^{27}_{12}\text{Mg}$ массой $m = 0,27$ мкг, а также активность a через время $t = 6$ ч. Период полураспада T магния считать известным ($T = 600$ с).

Решение. Активность a препарата определяет скорость радиоактивного распада и равна числу ядер, распадающихся в единицу времени: $a = -dN/dt$. Согласно закону радиоактивного распада $a = \lambda N$, где λ – постоянная распада. В начальный момент времени $a_0 = \lambda N_0$, поэтому активность препарата в момент времени t равна: $a = a_0 \exp(-\lambda t)$. Учтем период полураспада T : $\lambda = \ln 2 / T$. Число радиоактивных атомов N_0 равно: $N_0 = \nu N_A$, где $\nu = m/M$ – число молей данного изотопа, N_A – число Авогадро. Тогда

$$A_0 = 7 \cdot 10^{12} \exp\left(-\frac{0,093 \cdot 2,16 \cdot 10^4}{600}\right) = 100 \text{ Бк.}$$

Подставляя численные значения, получим

$$A_0 = \frac{0,693}{600} \frac{0,27 \cdot 10^{-9} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{27 \cdot 10^{-3}} = 7 \cdot 10^{12} \text{ Бк;}$$

$$A_0 = 7 \cdot 10^{12} \exp\left(-\frac{0,093 \cdot 2,16 \cdot 10^4}{600}\right) = 100 \text{ Бк.}$$

Пример 2. Определить дефект массы ядра лития ^7_3Li и энергию связи нуклонов в этом ядре.

Решение. Дефект массы ядра определяется соотношением $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_n$. В справочниках чаще приводятся массы не ядер, а нейтральных атомов. Поэтому формулу целесообразно преобразовать к виду, когда в нее входит масса нейтрального атома M_A . Масса нейтрального атома равна сумме масс ядра и электронов, составляющих электронную оболочку атома: $M_A = M_n + Zm_e$, откуда $M_n = M_A - Zm_e$.

Следовательно, $\Delta m = Z \cdot (m_p + m_e) + (A - Z) \cdot m_n - M_A$. Замечая, что $m_p + m_e = M_H$, где M_H – масса атома водорода, окончательно найдем $\Delta m = Z \cdot M_H + (A - Z) \cdot m_n - M_A$. После подстановки численных данных получим, что $\Delta m = 3 \cdot 1,00783 + (7 - 3) \cdot 1,00867 - 7,01601 = 0,04216$ а.е.м. Энергию связи найдем из соотношения $\Delta W = \Delta m \cdot c^2$. Коэффициент пропорциональности c^2 может быть выражен двояко: $c^2 = 9 \cdot 10^{16}$ м²/с² или $c^2 = \Delta W / \Delta m = 9 \cdot 10^{16}$ Дж/кг. В последней формуле, перейдя к внесистемным единицам, получим $c^2 = 931$ МэВ/а.е.м. С учетом этого, искомая формула для энергии связи примет вид $\Delta W = 931 \cdot \Delta m$ (МэВ). Подставив, ранее найденное значение дефекта массы, получим $\Delta W = 931 \cdot 0,04216 = 39,2$ МэВ.

Пример 3. Определить: 1) плотность ядерной материи; 2) радиус Земли, если бы она со своей реальной массой $5,98 \cdot 10^{24}$ кг имела плотность ядерной материи. Считать массу нуклона равной $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Решение. В первом приближении форму атомного ядра можно считать сферической. Поэтому плотность ядерной материи может быть найдена из соотношения $\rho = m_n \cdot A / [(4/3) \cdot \pi r^3]$, где m_n – масса нуклона, A – массовое число. Существует эмпирическая формула для радиуса ядра: $r = r_0 \cdot A^{1/3}$. Для расчетов принимают $r_0 = (1,3 \div 1,7) \text{ ФМ} = (1,3 \div 1,7) \cdot 10^{-15}$ м. Используем значение $1,3 \cdot 10^{-15}$ м. После подстановки получим окончательное выражение для плотности ядерной материи $\rho = 3m_n / (4 \cdot \pi r_0^3)$. Масса Земли $M = \rho \cdot (4/3) \cdot \pi R^3$, где ρ – ее плотность, которая по условию должна быть принята равной плотности ядерной материи, R – радиус Земли, искомый при заданных условиях. Таким образом, получаем: $R = [3M / (4\pi\rho)]^{1/3}$.

После подстановки численных значений находим плотность ядерного вещества и радиус Земли в случае, если бы ее плотность была равна ядерной: $\rho = 1,82 \cdot 10^{17}$ кг/м³; $R = 199$ м.

Пример 4. Начальная активность 1 грамма изотопа радия $^{226}_{88}\text{Ra}$ равна $3,7 \cdot 10^{10}$ Бк. Определить период полураспада $T_{1/2}$ этого изотопа.

Решение. Начальная активность может быть найдена как $a_0 = \lambda \cdot N_0$. Здесь λ – постоянная распада, N_0 – начальное количество атомов, способных к радиоактивному распаду. Зная исходную массу вещества m , молярную массу M и число Авогадро N_A , найдем $N_0 = (m/\mu) \cdot N_A$. Постоянная распада и период полураспада связаны соотношением $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$. Тогда

$$a_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m N_A}{M}.$$

Окончательно получаем

$$T_{1/2} = \frac{m \cdot N_A}{M \cdot a_0} \cdot \ln 2.$$

После подстановки численных значений находим, что $T_{1/2} = 1582$ года.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какая доля радиоактивных ядер кобальта $^{59}_{27}\text{Co}$, период полураспада которых равен 71,3 суток, распадется за один месяц?
2. Активность некоторого радиоизотопа уменьшается в 2,5 раза за 7 суток. Найти его период полураспада.
3. В начальный момент активность некоторого радиоизотопа составляла 10,8 Бк. Какова будет его активность по истечении половины периода полураспада?
4. Найти постоянную распада и среднее время жизни радиоактивного $^{55}_{27}\text{Co}$, если его активность уменьшается на 4 % в час.
5. Определить возраст древних деревянных предметов, если удельная активность изотопа $^{14}_6\text{C}$ у них составляет $3/5$ удельной активности этого же изотопа в только что срубленных деревьях. Период полураспада углерода равен 5570 лет.
6. Удельная активность препарата, состоящего из активного кобальта ^{58}Co и неактивного ^{59}Co , составляет $2,2 \cdot 10^{12}$ Бк/г. Период полураспада ^{58}Co равен 71,3 суток. Найти отношение массы активного кобальта в этом препарате к массе препарата.
7. Период полураспада радиоактивного изотопа $^{37}_{18}\text{Ar}$ $T = 32$ дня. Найти активность препарата через 1 день после его изготовления, если начальная активность $a_0 = 100$ мКи.
8. Найти постоянную распада λ радона $^{222}_{86}\text{Rn}$, если известно, что число атомов радона уменьшается за время $t = 1$ сутки на 18,2 %.
9. Некоторый радиоактивный изотоп имеет постоянную распада $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$. Через какое время распадется 75 % первоначальной массы атомов?
10. Найти активность радона, образовавшегося из массы $m = 1$ г радия $^{226}_{88}\text{Ra}$ за время $t = 1$ час.
11. В результате распада массы $m_0 = 1$ г радия $^{226}_{88}\text{Ra}$ за время $t = 1$ год образовалась некоторая масса гелия, занимающего при нормальных условиях объем $V = 43$ мм³. Найти из этих данных постоянную Авогадро N_A .
12. Определить массу m радона $^{222}_{86}\text{Rn}$ образующуюся из массы $m_0 = 1,5$ г радия по истечении времени $t = T_{1/2} / 2$, где $T_{1/2}$ – период полураспада радона.
13. Определить, через какое время t после наполнения ампулы активность радона будет $a = 2,22 \cdot 10^9$ Бк, если начальная активность радона $^{222}_{86}\text{Rn}$ равна $a_0 = 14,8 \cdot 10^9$ Бк.
14. Какое количество урана ^{238}U имеет такую же активность, как 2 мг стронция ^{90}Sr ?

15. Вычислить массу радона ^{222}Rn , находящегося в радиоактивном равновесии с 1 г радия ^{226}Ra .

16. Вычислить количество атомов, распавшихся за 10 ч в 1 мг радиоактивного натрия ^{24}Na с периодом полураспада 14,8 ч.

17. Активность некоторого радиоизотопа уменьшается в 5 раз за 10 суток. Найти его период полураспада.

18. В начальный момент активность некоторого радиоизотопа составляла 21,6 Бк. Какова будет его активность по истечении четверти периода полураспада?

19. Период полураспада радиоактивного изотопа ^{37}Ar $T = 32$ дня. Найти активность препарата через 4 дня после его изготовления, если начальная активность $a_0 = 200$ мКи.

20. Некоторый радиоактивный изотоп имеет постоянную распада $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$. Через какое время распадется 25 % первоначальной массы атомов?

21. Найти активность радона, образовавшегося из массы $m = 5$ г радия ^{226}Ra за время $t = 2$ ч.

22. Масса $m_0 = 3$ г радия превращается в радон. Какая масса m радона ^{222}Rn получится по истечении времени $t = T_{1/2}/2$, где $T_{1/2}$ – период полураспада радона?

23. Найти время, через которое, активность радона ^{222}Rn будет $a = 1,11 \cdot 10^9$ Бк, если начальная активность радона $a_0 = 22,2 \cdot 10^9$ Бк.

24. Какое количество урана ^{235}U имеет такую же активность, как 10 мг полония ^{210}Po ?

25. Радиоактивный натрий ^{24}Na имеет β -распад, период полураспада натрия 14,8 ч. Вычислить количество атомов, распавшихся в 10 мг данного радиоактивного вещества за сутки.

Ответы

1. 1/4. 2. $T = 5,3$ сут. 3. $a = 7,7$ Бк. 4. $\lambda = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$; $\tau = 1$ год.
5. $T = 4 \cdot 10^3$ лет. 6. 0,19 %. 7. $a = 98$ мКи. 8. $\lambda = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$. 9. $t = 40$ сут.
10. $a = 2,8 \cdot 10^8$ Бк. 11. $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$. 12. $m = 2,86 \cdot 10^{-5}$ кг. 13. $t = 10,4$ сут.
14. $m_2 = 850$ кг. 15. $m = 6,33$ мкг. 16. $N = 9,3 \cdot 10^{18}$. 17. $T = 4,3$ сут. 18. $a = 18,1$ Бк.
19. $a = 183,2$ мКи. 20. $t = 7 \cdot 10^5$ с. 21. $a = 27,6$ Бк. 22. $m = 5,72 \cdot 10^{-5}$ кг.
23. $t = 3,82$ сут. 24. $m_2 = 21015$ кг. 25. $0,77 \cdot 10^{20}$.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Таблица 1

Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обознач.	Значение
Число Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Постоянная Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Скорость света в вакууме	c	$3,00 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Планка	h	$6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Дирака $\hbar = h/2\pi$	\hbar	$1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Масса электрона	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Постоянная Ридберга	R	$1,097 \cdot 10^7$ м ⁻¹
Радиус первой боровской орбиты	A_0	$0,529 \cdot 10^{-10}$ м
Элементарный электрический заряд	e	$1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Постоянная Стефана–Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² ·К ⁴)
Постоянная закона смещения Вина	v	$2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К
Вторая постоянная Вина	C_2	$1,29 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м ³ ·К ⁵)
Комптоновская длина волны электрона	λ_c	$2,43 \cdot 10^{-12}$ м
Атомная единица массы	а.е.м.	$1,67 \cdot 10^{-27}$ кг

Таблица 2

Абсолютные показатели преломления некоторых веществ

Кислород	1,00	Глицерин	1,47
Воздух	1,00	Кварц	1,46
Вода	1,33	Стекло	1,50
Спирт	1,36	Алмаз	2,42

Таблица 3

Работа выхода электронов из металла

Металл	$A_{\text{вых}}$		Металл	$A_{\text{вых}}$	
	эВ	10^{-19} Дж		эВ	10^{-19} Дж
Алюминий	3,74	5,98	Натрий	2,50	4,00
Железо	4,36	6,98	Серебро	4,70	7,50
Золото	4,58	7,42	Цинк	4,00	6,40

Таблица 4

Периоды полураспада радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ	Период полураспада
Магний	^{27}Mg	10 мин.
Фосфор	^{32}P	14,3 сут.
Кобальт	^{60}Co	5,3 года
Стронций	^{90}Sr	27 лет

Таблица 5

Массы и энергии покоя некоторых частиц

Частица	m_0		W_0	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1,672 \cdot 10^{-27}$	1,0072	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон (^2H)	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
α -частица (^4He)	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Обязательная литература

1. Тюрин Ю.И., Чернов И.П., Крючков Ю.Ю. Физика. Ч. 1. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие для технических университетов. – Томск: Изд-во ТГУ, 2002. – 502 с.
2. Тюрин Ю.И., Чернов И.П., Крючков Ю.Ю. Физика. Ч. 2. Электричество и магнетизм: учебное пособие для технических университетов. – Томск: Изд-во ТГУ, 2003. – 738 с.
3. Тюрин Ю.И., Чернов И.П., Крючков Ю.Ю. Физика. Ч. 3. Оптика. Квантовая физика: учебное пособие для технических университетов. – Томск: Изд-во ТГУ, 2005. – 740 с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
5. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
6. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – М.: Наука, 1989. – 304 с.
7. Ботаки А.А., Ульянов В.Л., Ларионов В.В., Поздеева Э.В. Введение в физику: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2006. – 139 с.
8. Ерофеева Г.В. Интерактивная обучающая система по физике: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТГУ, 2003. – 470 с.
9. Дмитриева В.Ф., Прокофьев В.Л., Самойленко П.И. Основы физики. – М.: Высш. шк., 1997. – 447 с.
10. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высш. шк., 1994. – 542 с.
11. Трофимова Т.И., Павлова З.Г. Сборник задач по курсу физики с решениями. – М.: Высш. шк., 2003. – 592 с.
12. Ремезов А.Н., Потапенко А.Я. Курс физики: учебник для вузов. – М.: Дрофа, 2002. – 720 с.
13. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: Интеграл-Пресс, 1997. – 544 с.
14. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.

Дополнительная литература

1. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Высш. шк., 1989. – 608 с.
2. Яворский Б.М., Селезнев Ю.А. Справочное руководство по физике. – М.: Наука, 1989. – 576 с.
3. Новодворская Е.М., Дмитриев Э.М. Сборник задач по физике с решениями для втузов. – М.: Изд-во «Мир и образование», 2003. – 368 с.
4. Иванов Б.М. Законы физики. – М.: Высш. шк., 1986. – 335 с.
5. Айзензон А.Е. Курс физики. – М.: Высш. шк., 1996. – 327 с.
6. Акоста В., Кован К., Грэм Б. Основы современной физики. – М.: Просвещение, 1981. – 495 с.
7. Мэрион Дж.Б. Физика и физический мир. – М.: Изд-во «Мир», 1975. – 623 с.
8. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики. – М.: Высшая школа, 1991. – 303 с.
9. Чернов И.П., Ларионов В.В., Тюрин Ю.И. Физика. Сборник задач. Ч. 1. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика. – Томск: Изд-во ТГУ, 2004. – 390 с.
10. Чернов И.П., Ларионов В.В., Тюрин Ю.И. Физика. Сборник задач. Ч. 2. Электричество и магнетизм. – Томск: Изд-во ТГУ, 2004. – 490 с.
11. Тюрин Ю.И., Ларионов В.В., Чернов И.П. Физика. Сборник задач. Ч. 3. Оптика. Атомная и ядерная физика. – Томск: Изд-во ТГУ, 2004. – 256 с.
12. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. – М.: Наука. Физматлит, 1996. – 624 с.
13. Кухлинг Х. Справочник по физике / Пер. с немецк. – М.: Мир, 1982. – 520 с.
14. Чертов А.Г. Физические величины. – М.: Высшая школа, 1990. – 335 с.
15. Трофимова Т.И. Оптика и атомная физика: законы, проблемы, задачи. – М. Высшая школа, 1999. – 288 с.
16. Трофимова Т.И. Справочник по физике для студентов и абитуриентов. – М.: Профиздат, 2005. – 399 с.
17. Бабаджан Е.И., Гервидс В.И., Дубовик В.М. и др. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1990. – 398 с.
18. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
19. Иродов И.Е. Задачи по физике. – М.: Наука, 1988. – 416 с.
20. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. – М.: Наука, 1988. – 432 с.

Учебное издание

МОГИЛЬНИЦКИЙ Сергей Борисович
ГОРЯЧЕВ Борис Валентинович
БОТАКИ Александр Анджелович

ПРАКТИКА ПО ФИЗИКЕ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор
доктор физико-математических наук,
профессор

Ю.И. Тюрин

Компьютерный набор
Компьютерная верстка
Дизайн обложки

М.В. Воробьева

О.Ю. Аршинова

О.Ю. Аршинова

О.А. Дмитриев

Подписано к печати 24.08.2009. Формат 60х84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать XEROX. Усл. печ. л. 18,03. Уч.-изд. л. 16,31.

Заказ 932-09. Тираж 200 экз.



Томский политехнический университет
Система менеджмента качества

Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

