

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Ю.В. Данейкин, Г.Н. Колпаков, А.В. Хадкевич

ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА И ЗАЩИТА ОТ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2009

УДК 539.125.52+614.876(075.8)

ББК 22.383+31.4ня73

Д17

Данейкин Ю.В.

Д17 Теория переноса и защита от ионизирующего излучения: учебное пособие / Ю.В. Данейкин, Г.Н. Колпаков, А.В. Хадкевич; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 139 с.

В пособии изложены основы теории переноса ионизирующих излучений. Рассмотрены элементарные процессы взаимодействия излучения с веществом. Даны принципы построения и приближения, используемые при решении кинетического уравнения переноса. Описаны инженерные методы расчета защиты от излучений ядерного реактора.

Пособие разработано в рамках реализации Инновационной образовательной программы ТПУ по направлению «Атомная энергетика, ядерный топливный цикл, безопасное обращение с радиоактивными отходами и обработанным ядерным топливом, обеспечение безопасности и противодействия терроризму» и предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 010700 «Физика», 140300 «Ядерная физика и технологии».

УДК 539.125.52+614.876(075.8)

ББК 22.383+31.4ня73

Рецензенты

Кандидат физико-математических наук
начальник технологической лаборатории РЗ ОАО «СХК»

И.Н. Сеелев

Кандидат физико-математических наук
начальник БПК (УПЦ) ОАО «СХК»

Ю.А. Артельный

© Томский политехнический университет, 2009

© Данейкин Ю.В., Колпаков Г.Н., Хадкевич А.В., 2009

© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ И УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА	6
2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА	52
3. ЗАЩИТА ОТ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ	99
ПРИЛОЖЕНИЕ	131
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	138

ВВЕДЕНИЕ

Самоподдерживающаяся управляемая цепная реакция деления ядер (кратко – цепная реакция) была впервые осуществлена в декабре 1942 г. Группа физиков Чикагского университета, возглавляемая Э. Ферми, построила первый в мире ядерный реактор, названный CP-1. Он состоял из графитовых блоков, между которыми были расположены шары из природного урана и его двуокиси. Быстрые нейтроны, появляющиеся после деления ядер ^{235}U , замедлялись графитом до тепловых энергий, а затем вызывали новые деления ядер. Реакторы, подобные CP-1, в которых основная доля делений происходит под действием тепловых нейтронов, называют реакторами на тепловых нейтронах. В их состав входит очень много замедлителя по сравнению с ураном.

В СССР теоретические и экспериментальные исследования особенностей пуска, работы и контроля реакторов были проведены группой физиков и инженеров под руководством академика И.В. Курчатова. Первый советский реактор Ф-1 выведен в критическое состояние 25 декабря 1946 г. Реактор Ф-1 набран из графитовых блоков и имеет форму шара диаметром примерно 7,5 м. В центральной части шара диаметром 6 м по отверстиям в графитовых блоках размещены урановые стержни. Результаты исследований на реакторе Ф-1 стали основой проектов более сложных по конструкции промышленных реакторов. В 1949 г. введен в действие реактор по производству плутония, а 27 июня 1954 г. вступила в строй первая в мире атомная электростанция электрической мощностью 5 МВт в г. Обнинске.

Современное проектирование и строительство ядерных реакторов невозможно себе представить без предварительного применения математических моделей для моделирования процессов происходящих в будущем реакторе. Технические системы, существующие в настоящее время уже невозможно исследовать обычными теоретическими методами. Прямой натурный эксперимент занимает достаточно много времени, может быть сложен в организации и дорог в проведении. Зачастую проведение натурального эксперимента является опасным или вообще невозможным, когда же дело касается ядерного реактора, то проведение такого эксперимента тем более опасно.

Сущность моделирования состоит в замене исходного объекта его «образом» – математической моделью, которая построена на основе физических законов, которому подчиняется интересующий нас процесс или явление.

Нельзя рассматривать моделирование как подмену научных исследовательских методологий. Напротив, само моделирование является методологией, но методологией уникальной, которая синтезирует в себе не только научные подходы свойственные, например, физике, к изучению интересующих нас объектов, но и различных математических подходов и методов, реализуемых при моделировании, а также подходов присущих программированию, поскольку исследование математические модели трудно представить без применения ЭВМ.

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ И УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Ионизирующее излучение – излучение, состоящее из заряженных или нейтральных частиц, взаимодействие которых с атомами среды приводит к образованию ионов разных знаков.

Радиоактивный распад ядер сопровождается эмиссией (испусканием) α -частиц, электронов, нейтрино, γ -квантов и других частиц. Потоки испускаемых при радиоактивном распаде частиц называют *радиоактивным излучением*. Но радиоактивный распад – не единственный источник ионизирующего излучения. Установлено, что всё космическое пространство пронизывают потоки различных частиц – протонов, α -частиц, ядер некоторых элементов, электронов и фотонов, энергии которых достигают очень высоких значений (до 10^{20} эВ). Это – космическое излучение. Мощные потоки быстрых заряженных частиц получают с помощью ускорителей различного типа. Ядерные реакторы также являются источниками различных частиц, в том числе нейтронов. При взаимодействии быстрых частиц с веществом возникают новые нестабильные частицы – мезоны, гипероны и другие. Потоки всех перечисленных частиц, возникающих при естественных процессах и получаемых искусственно, объединяют общим названием *ядерного излучения*.

Ядерное излучение является одним из разновидностей *ионизирующего излучения*, к которому также относится *ультрафиолетовое излучение*, *лучи Рентгена* и некоторые другие виды излучения.

Проходя через вещество, все виды ядерного излучения, так или иначе, взаимодействуют с ним. Характер взаимодействия зависит от типа излучения и его энергии. Заряженные частицы – электроны, мезоны, протоны, ядра гелия и более тяжелых элементов – взаимодействуют с электронами атомных оболочек и ядрами встречных атомов главным образом в результате действия электростатических (кулоновских) сил. При близких столкновениях тяжелых частиц, в том числе и нейтронов, с ядрами в действие вступают ядерные силы. Гамма-кванты воздействуют на атомные электроны и ядра своим электромагнитным полем. Все эти виды взаимодействия имеют разную природу и по-разному проявляются для внешнего наблюдателя. Однако общим для всех видов взаимодействия ядерного излучения с веществом является то, что энергия падающих частиц передаётся атомам вещества. Эта энергия затрачивается на возбуждение и ионизацию атомов среды. По мере проникновения вглубь вещества энергия и интенсивность излучения

уменьшаются. Это обстоятельство позволяет использовать слои вещества в качестве защитных экранов от ядерного излучения.

Взаимодействия частиц ионизирующего излучения с веществом. Общие закономерности

Заряженные частицы взаимодействуют с атомами среды главным образом в результате действия кулоновских сил. При этом в большинстве случаев взаимодействие происходит с электронами атомных оболочек и реже с атомными ядрами.

При взаимодействии с атомными электронами пролетающая заряженная частица передает им часть своей энергии, благодаря чему происходит возбуждение или ионизация атома. В процессе ионизации всегда рождаются два иона – положительный и отрицательный.

В атоме – типичной квантово–механической системе, имеется последовательность энергетических уровней, на которых находятся электроны. Таких уровней в любом атоме очень много, даже в атоме водорода. Но поскольку число электронов в атоме ограничено, заполненными оказываются лишь низшие уровни, а все остальные уровни остаются свободными.

Если одному из электронов передать каким-либо образом достаточную энергию, он сможет перейти со своего уровня на одно из свободных мест на верхних уровнях. Получившееся при этом состояние атома называется *возбужденным*. Если переданная электрону энергия больше его энергии связи в атоме, то электрон может полностью оторваться от атома. Процесс потери атомами своих электронов называется ионизацией, а атом, лишенный одного или нескольких электронов, называется ионом. В возбужденном или ионизованном состоянии атом обычно долго не остается, и электрон быстро возвращается на прежний уровень. При этом вся первоначально затраченная энергия выделяется в виде электромагнитного излучения. Если в атоме (A, Z) электрон с K -го уровня переходит на n -ый уровень ($k > n$), то испускается фотон с энергией, равной разности энергетических параметров этих уровней.

Энергия, которую нужно затратить, чтобы оторвать от атома один внешний электрон и удалить его на (условно) бесконечно большое расстояние, называется *ионизационным потенциалом*. Аналогично определяются ионизационные потенциалы молекул. Ионизационные потенциалы различны для разных атомов и молекул. Например, ионизационный потенциал атома водорода имеет величину 13,54 эВ, лития – 5,36 эВ, аргона – 15,7 эВ, цезия – 3,87 эВ и т. д. Если увеличить вводимую в атом энергию, можно возбудить не только внешние электроны, но и электроны из более глубоких оболочек.

Через некоторое время после ионизации атома ион присоединит к себе какой-нибудь блуждающий свободный электрон и снова станет обычным нейтральным атомом. Этот процесс, обратный процессу ионизации, называется *рекомбинацией*. При рекомбинации, также как при возвращении возбужденного атома в основное состояние, затраченная энергия выделяется в виде фотона.

Заряженная частица, имеющая большую энергию (например, энергию в несколько МэВ), способна создать на своём пути тысячи или даже сотни тысяч пар ионов. Энергия, затрачиваемая на отрыв определенного электрона, зависит от энергии связи электрона в атоме и параметров соударения. Однако оказалось, что при большом числе столкновений средняя энергия, теряемая на образование одной пары ионов, почти не зависит от типа частицы и её скорости и определяется только свойствами тормозящего вещества. Так, в воздухе на образование одной пары ионов в среднем затрачивается энергии 34 эВ, причем около половины этой энергии тратится непосредственно на ионизацию, а другая половина идет на возбуждение атомов и расщепление молекул на атомы без ионизации.

Таким образом, процессы взаимодействия заряженных частиц, фотонов и нейтронов с веществом подчиняются законам атомной и ядерной физики. При этом заряженные частицы и фотоны могут взаимодействовать и с атомными ядрами. Однако основные потери энергии и основные эффекты рассеяния определяются взаимодействием с атомными электронами. Поэтому в рамках данного раздела пособия мы не будем останавливаться на теоретических обоснованиях используемых закономерностей. Задачей является представление основных понятий и важнейших соотношений.

Поскольку средняя энергия, теряемая частицей при одном столкновении с атомным электроном, всегда много меньше энергии самой частицы, заряженная частица при прохождении через вещество теряет свою энергию постепенно. Поэтому важными характеристиками этого процесса являются средняя потеря энергии на единицу пути dE/dx , которую также называют *тормозной способностью* вещества, и *длина пробега* частицы до полной остановки R .

Наибольший практический интерес представляют вопросы взаимодействия с веществом потоков ионизирующего излучения. Частицы ионизирующего излучения, объединенные в различные ансамбли, принято называть пучками или потоками. Пучки, состоящие из одного сорта частиц, принято называть электронными, протонными, нейтронными и т. п. (классификация по составу). Пучки или потоки, состоящие из тождественных частиц, имеющих одинаковую энергию, называют моноэнергетическими: если частицы имеют непрерывный набор энергий

до какого-то максимального значения, их называют пучками со сплошным спектром; если частицы пучка имеют ограниченный набор значений энергий, их называют энергетически распределенными пучками (классификация по энергии). Пучки частиц, летящих в одном направлении, имеющие поперечные размеры (например, диаметр), значительно меньшие глубины проникновения частиц в вещество, называют узкими или коллимированными (классификация по геометрии).

Рассмотрим хорошо коллимированный моноэнергетический пучок частиц, проходящий через слой вещества. Свойства пучка после прохождения через вещество определяются физической природой частиц и толщиной слоя вещества.

Начнем с того, что рассмотрим два предельных случая; каждый из них весьма интересен. В первом случае, который проиллюстрирован на рис. 1, а, частица испытывает много взаимодействий; при каждом взаимодействии она теряет незначительное количество первоначальной энергии и рассеивается на очень малый угол. Во втором случае, представленном на рис. 1, б, частица либо проходит через слой без взаимодействия с ним, либо поглощается в веществе слоя, испытав «смертельное» столкновение. Первый случай имеет место, например, при прохождении тяжелых заряженных частиц через вещество, а второй соответствует поведению фотонов. (Электроны относятся к промежуточному случаю). Рассмотрим оба случая более детально.

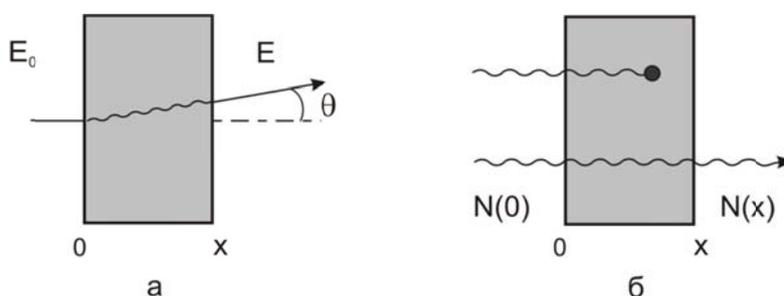


Рис. 1. Прохождение хорошо коллимированного пучка через слой вещества,
 а – каждая частица испытывает много столкновений;
 б – частица проходит через слой, не взаимодействуя с ним,
 или же поглощается данным слоем вещества

Много слабо отклоняющих взаимодействий. Каждое взаимодействие приводит к потере энергии и небольшому отклонению траектории частицы. Потери и отклонения складываются как случайные величины. После прохождения пучка через слой поглощающего вещества его энергия уменьшается, он перестает быть моноэнергетическим и становится расходящимся. Характеристики пучка до и после прохождения через слой вещества показаны на рис. 2. Число частиц, еще входящих в состав

пучка, можно регистрировать как функцию толщины x поглощающего слоя. Вплоть до некоторой определенной толщины поглощающего слоя вещества через него проникают практически все частицы пучка. При большей толщине поглощающего слоя вещества отдельные частицы застревают; на толщине R_0 , называемой *средней длиной пробега*, останавливается ровно половина частиц пучка; наконец, при достаточно большой толщине из слоя не выходит ни одна частица.

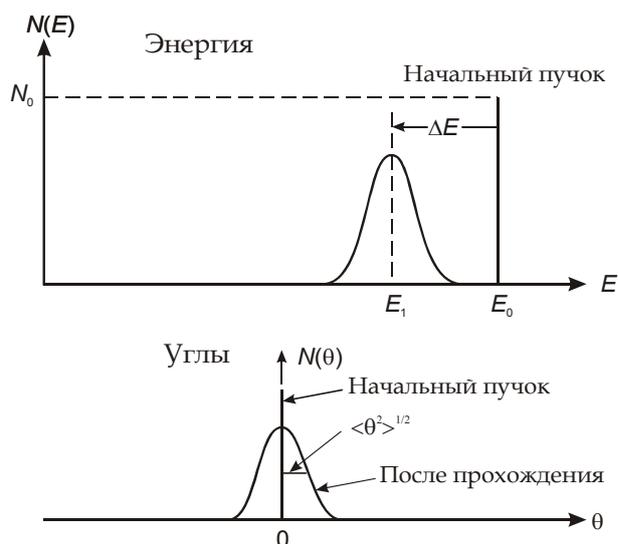


Рис. 2. Распределения по энергиям и углам частиц в пучке тяжелых заряженных частиц до и после прохождения ими поглощающего слоя

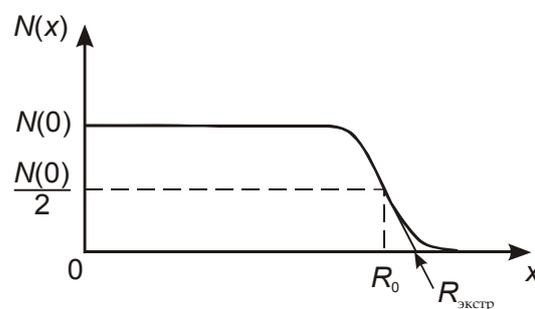


Рис. 3. Длина пробега тяжелых заряженных частиц. $N(x)$ – число частиц пучка, прошедших через слой поглощающего вещества толщиной x ; R_0 – средняя длина пробега; $R_{экстр}$ – экстраполированная длина пробега

Зависимость числа прошедших через слой частиц от толщины его иллюстрируется на рис. 3. Флуктуации в средней длине пробега называются *разбросом*.

Взаимодействия типа «все или ничего». Если взаимодействие приводит только к поглощению частицы слоем вещества, то характеристики пучка, прошедшего через слой вещества, получаются иными, нежели в только что рассмотренном случае.

Если прошедшие частицы не испытали никакого взаимодействия с веществом, прошедший пучок имеет ту же энергию и то же угловое расхождение, как и падающий. Для каждого элементарного слоя толщиной dx число частиц, испытавших взаимодействие, пропорционально числу падающих частиц; при этом постоянная пропорциональности μ , носит название *коэффициента поглощения*.

$$dN = -\mu N(x)dx.$$

Интегрируя это уравнение, приходим к формуле

$$N(x) = N(0)e^{-\mu x}. \quad (1)$$

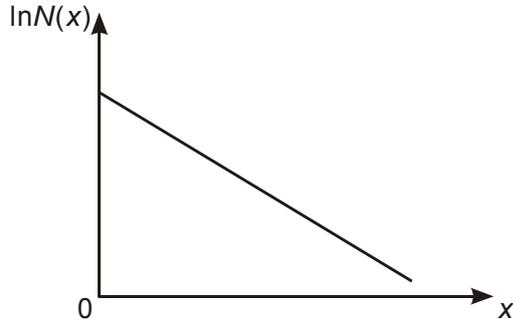


Рис. 4. Число прошедших частиц $N(x)$ убывает экспоненциально с увеличением толщины поглощающего слоя x , когда происходит взаимодействие типа «все или ничего»

Число частиц, прошедших через данный слой вещества, убывает экспоненциально с увеличением толщины слоя, как это показано на рис. 4. Здесь нельзя указать какую-то определенную длину пробега для частицы в веществе, но можно определить среднее расстояние, проходимое частицей в веществе до взаимодействия с ним. Это среднее расстояние называется *средней длиной свободного пробега* и равняется $1/\mu$. Средняя длина свободного пробега равна толщине слоя, по прохождении которой интенсивность γ -излучения уменьшается в e раз.

В силу статистической природы взаимодействия излучения с веществом для количественного описания этого процесса удобно пользоваться понятиями, имеющими вероятностный характер. Основопологающим при этом является понятие сечения взаимодействия.

Пусть на поверхность вещества падает мононаправленный пучок частиц. Если S – площадь поперечного сечения пучка, а Φ – плотность его потока (количество частиц пересекающих единичную площадку в единицу времени), то на такую же площадь мишени ежесекундно падает $N = \Phi \cdot S$ частиц. Из них в объеме $\Delta V = S\Delta l$ (Δl – основание цилиндра на по направлению частиц пучка) в единицу времени в среднем испытывают взаимодействие $\Delta N = \sigma\Phi n\Delta V$ частиц, где n – концентрация рассеивающих или поглощающих центров (атомов, ядер) в мишени. Коэффициент σ – называется *микроскопическим сечением взаимодействия* частиц пучка с атомами (ядрами) вещества. Тогда вероятность взаимодействия для одной частицы на пути Δl в данном веществе

$$\Delta P = \frac{\Delta N}{N} = \frac{\sigma\Phi n\Delta V}{\Phi S} = \sigma n\Delta l,$$

тогда

$$\sigma = \frac{1}{n} \frac{\Delta P}{\Delta l} = \frac{\sigma\Phi n\Delta V}{\Phi S} = \sigma n\Delta l. \quad (2)$$

Таким образом, *микроскопическое сечение взаимодействия* численно равно вероятности взаимодействия частицы на единичном пути в веществе, в единичном объеме которого находится одна частица вещества. Микроскопическое сечение имеет размерность квадрата длины и в геометрической интерпретации характеризует площадь некоторой области, где происходит взаимодействие. В практике расчетов широкое распространение получила внесистемная единица измерения сечения взаимодействия – *барн* (б): $1\text{б} = 10^{-28} \text{ м}^2 = 10^{-24} \text{ см}^2$.

Полное сечение взаимодействия является суммой парциальных сечений, соответствующих различным процессам. Эти парциальные процессы обычно объединяют в две группы: *рассеяние* и *поглощение*. Соответственно полное сечение есть сумма $\sigma = \sigma_s + \sigma_a$, в которой σ_a – сечение процессов поглощения, а σ_s – рассеяния.

Микроскопическое сечение описывает вероятность отдельных процессов взаимодействия, не характеризуя при этом энергетические и угловые распределения частиц после взаимодействия. Такая информация описывается *дифференциальным энергетическо-угловым сечением*. $\sigma_s(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$. Зависимость дифференциального сечения от азимутального и полярного углов рассеяния называется угловым распределением частиц в реакции. Зависимость дифференциального эффективного сечения от кинетической энергии продуктов реакции (в основном легкой частицы) называется энергетическим распределением (или спектром).

В реальных физических опытах далеко не всегда удается непосредственно измерить само дифференциальное или интегральное сечение. Непосредственно измеряемой величиной является *выход реакции*. Выходом называется доля частиц пучка, испытавших на единице пути в данном веществе взаимодействие с частицами

$$Y = \sigma n. \quad (3)$$

В теории переноса эту величину называют *макроскопическим сечением взаимодействия* и обозначают $\Sigma = \sigma n$. Макроскопические сечения взаимодействия, также как и микроскопические подразделяют на дифференциальные и интегральные.

Взаимодействие тяжелых заряженных частиц с веществом

Механизм взаимодействия тяжелых заряженных частиц с веществом можно представить следующим образом. Частица, пролетая сквозь вещество, «расталкивает» атомные электроны своим кулоновским полем. За счет этого частица постепенно теряет энергию, а атомы либо ионизируются, либо возбуждаются. Растеряв свою энергию, ча-

стица останавливается. Из-за дальнедействующего характера кулоновских сил пролетающая частица успевает «растолкать» очень большое количество электронов. Сама пролетающая частица при столкновении с отдельным электроном мало отклоняется от своего пути из-за её большой массы. К тому же и эти малые отклонения почти целиком компенсируют друг друга при огромном числе статистически ориентированных столкновений. Поэтому траектория тяжелой заряженной частицы в веществе практически прямолинейна.

Таким образом, тяжелые заряженные частицы теряют свою энергию в основном в результате кулоновского взаимодействия при столкновениях со связанными атомными электронами. При этом электроны могут перескакивать на более высокие дискретные уровни (при возбуждении), а могут и отрываться от атома (при ионизации). Если пролетающая через вещество частица обладает энергией, большей энергии связи электрона в атоме, то преобладают процессы ионизации. Скорость, с которой энергия тяжелой частицы теряется при столкновениях с электронами вещества, была вычислена в классической теории Бором и в квантовой теории – Бете и Блохом. Окончательную формулу, так и называют формулой Бете–Блоха:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi nZ^2 e^4}{m_e v^2} \left\{ \ln \frac{2m_e v^2}{\bar{I} [1 - (v/c)^2]} - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right\}, \quad (4)$$

где dE – энергия, теряемая частицей на длине dx ; n – число электронов в 1 см^3 тормозящего вещества; m_e – масса электрона; Ze и v – соответственно заряд и скорость тяжелой заряженной частицы; \bar{I} – средний потенциал ионизации и возбуждения атомов тормозящего вещества. Формула (4) приближенная, однако здесь это приближение вполне достаточно.

При анализе реальных экспериментов толщину поглотителя не измеряют в единицах длины, а характеризуют величиной ρx , где ρ – плотность вещества поглотителя; величина ρx обычно выражается в г/см^2 , и ее можно получить непосредственно на эксперименте – путем определения массы поглотителя и площади поперечного сечения мишени и деления одной величины на другую. В таблицах и графиках обычно приводят значения так называемых *удельных потерь энергии*:

$$\frac{dE}{d(\rho x)} = \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}.$$

Удельные потери энергии пропорциональны числу электронов поглотителя и квадрату заряда частицы, испытывающей торможение. При

некоторой энергии, которая для протонов составляет примерно 1 ГэВ, наблюдается *ионизационный минимум*. Ниже этого минимума удельные потери энергии $dE/d(\rho x)$ пропорциональны $1/v^2$. Следовательно, по мере торможения нерелятивистской частицы в веществе она теряет все больше и больше энергии. Надо иметь в виду, однако, что зависимость (4) нарушается, как только скорость тяжелой частицы становится сравнимой или меньшей скорости электронов в атомах. При столь малых скоростях энергетические потери, оказывается, уменьшаются снова и около значения 1 МэВ кривые, изображенные на рис. 5, загибаются книзу. За ионизационным минимумом потери $dE/d(\rho x)$ медленно возрастают. Полезно помнить, что энергетические потери при указанном минимуме и при энергиях еще по меньшей мере двумя десятками МэВ выше остаются примерно одинаковыми для любого вещества и составляют

$$-\frac{dE}{d(\rho x)}(\text{минимум}) \approx 2 \text{ МэВ}/(\text{г} \cdot \text{см}^{-2}). \quad (5)$$

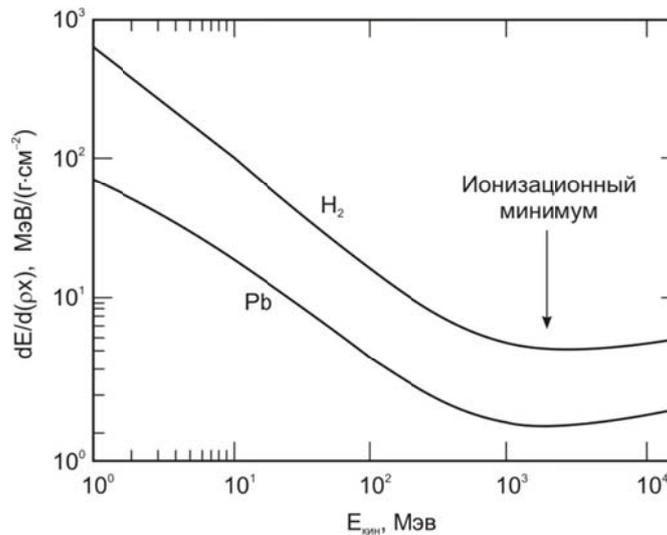


Рис. 5. Зависимость удельных потерь энергии протонов в свинце и водороде от их энергии

Формула (4) говорит также о том, что удельные потери энергии не зависят от массы проходящей через вещество частицы (при условии, что эта частица значительно тяжелее электрона), но существенно зависят от заряда и скорости частицы. Кривые на рис. 4.5, таким образом, справедливы не только для протонов, но и для других тяжелых заряженных частиц при соответствующем изменении масштаба энергии.

Выражение для *длины пробега* частицы в данном веществе можно получить, проинтегрировав формулу (4):

$$R = \int_{E_0}^0 \frac{dE}{(dE/dx)}. \quad (6)$$

здесь E – кинетическая энергия тяжелой заряженной частицы, а E_0 – ее начальное значение.

Взаимодействие легких заряженных частиц с веществом

Взаимодействие электронов и позитронов с веществом качественно отличается от прохождения остальных заряженных частиц. Главной причиной этого является малая масса электрона и позитрона. Напомним, что среди остальных заряженных частиц легчайшей является мюон, масса которого в 200 раз больше электронной. Из-за малости массы для налетающего электрона (позитрона) относительно велико изменение импульса при каждом столкновении в веществе. А это в свою очередь приводит к тому, что электрон, во-первых, может значительно отклоняться от первоначального направления движения, и, во-вторых, может порождать при столкновениях кванты электромагнитного излучения. Первый из только что упомянутых эффектов проявляется в том, что электрон движется в веществе не по прямой; за счет же второго эффекта для электронов становятся существенными радиационные потери, т. е. потери энергии на электромагнитное излучение.

Кроме того, при столкновении налетающего электрона с электронами вещества проявляются так называемые *обменные эффекты*, возникающие из-за неразличимости сталкивающихся электронов. Обменные эффекты имеют существенно квантовое происхождение. Поэтому их влияние на процесс прохождения не очень велико. При прохождении позитронов обменные эффекты не возникают, но зато становится возможным процесс аннигиляции налетающего позитрона с электроном вещества. Относительная роль *аннигиляционных эффектов* также невелика. Поэтому процесс торможения примерно одинаков для электронов и позитронов.

В дальнейшем в этом параграфе мы для определенности будем говорить об электронах, поскольку с позитронными пучками на практике работают несравненно реже, чем с электронными.

Ионизационные потери. Механизм ионизационных потерь для электронов, в общем, такой же, как и у других заряженных частиц. Поэтому эти потери и в случае электронов описываются формулой (4). С учетом малости массы электрона, из-за действия эффектов квантово-механического обмена и некоторых других поправочных эффектов для ионизационных потерь электронов получается выражение

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi e^4 n}{m_e v^2} \left\{ \ln \frac{m_e v^2 E}{2I^2(1-\beta^2)} - (2\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2) \ln 2 + 1 - \beta^2 + \frac{1}{8}(1 - \sqrt{1-\beta^2})^2 \right\}, \quad (7)$$

где под E подразумевается релятивистская кинетическая энергия электрона, а $\beta = v/c$.

При нерелятивистских энергиях $\beta \ll 1$, и формула (4.5) сведется к виду

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e^4 n}{m_e v^2} \ln \frac{m_e v^2}{2\bar{I}}. \quad (\text{нерел.}) \quad (8)$$

В ультрарелятивистском случае $E \gg m_e c^2$, формула (4.5) примет вид

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi e^4 n}{m_e c^2} \left\{ \ln \frac{E^2}{2\bar{I}^2 \sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{8} \right\} \quad (\text{ультрарел.}) \quad (9)$$

В отличие от тяжелых частиц для электронов на практике важны оба эти предельных случая, так как граничная энергия равна 0,511 МэВ. Поэтому электрон становится ультрарелятивистским уже при энергии в несколько МэВ.

При сравнении ионизационных потерь тяжелой и легкой частиц главное внимание следует обратить на то, что в формулах, описывающих потери энергии заряженных частиц, определяющим является множитель перед логарифмом, так как логарифм медленно меняется с изменением параметров, характеризующих движение частиц. А этот множитель в случае движения однократно заряженных частиц фактически одинаков во всех формулах. Поэтому при одинаковых скоростях движения ионизационные потери тяжелой и легкой частиц примерно одинаковы. Это и понятно. Ионизационные потери возникают из-за воздействия электрического поля движущейся частицы на электроны среды. А эти поля совершенно одинаковы и случае тяжелой и легкой частиц, если только одинаковы их заряды и скорости движения (случай **a** – $Z_1 v_1 = Z_e v_e$).

Не так обстоит дело, когда сравниваются ионизационные потери легкой и тяжелой однозарядных частиц одинаковой энергии (случай **b** – $E_1 = E_e$). В том случае, когда движение обеих частиц нерелятивистское, скорости частиц находятся в обратном отношении квадратных корней из их масс $v = \sqrt{2E/m}$. Благодаря этому тяжелая частица более длительно эффективно воздействует на каждый электрон среды и поэтому быстрее теряет энергию. В этом случае ионизационные потери энергии пропорциональны массе частицы. Например, ионизационные потери протона примерно в 2000 раз превосходят ионизационные потери электрона той же энергии.

Более интересен случай, когда электрон ультрарелятивистский, но протон той же энергии еще может считаться нерелятивистским (случай **в**). В этом случае электрическое поле движущегося протона сферически – симметрично, тогда как у электрона оно сильно сплющено в направлении движения и растянуто в поперечном направлении. За счет этого ионизационные потери энергии электрона сильно возрастают. Сравним, например, электрон и протон с кинетической энергией $E = 5$ МэВ. При такой энергии электрон уже может считаться ультрарелятивистским, тогда как протон остается нерелятивистским. Так как энергия покоя электрона $E_0 = 0,511$ МэВ, а кинетическая энергия практически совпадает с полной, то $E \approx E_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$, так что $1 / \sqrt{1 - \beta^2} \approx 10$. В этом случае ионизационные потери протона превышают ионизационные потери электрона приблизительно в 40 раз.

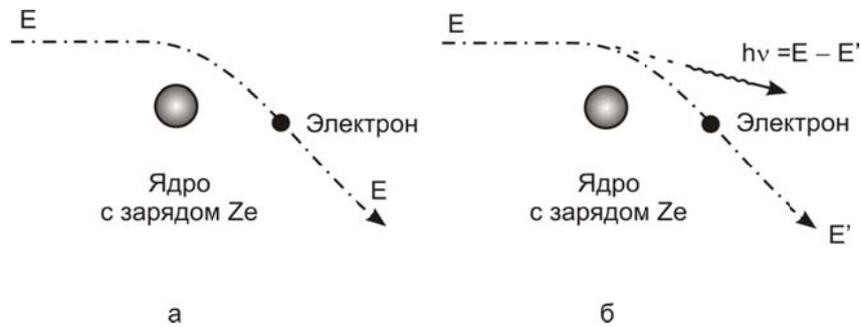


Рис. 6. Кулоновское рассеяние:

а – упругое; б – ускоренно движущийся электрон излучает и передает энергию испускаемым фотонам (тормозное излучение)

Наконец, рассмотрим случай, когда обе частицы, тяжелая и легкая – ультрарелятивистские и обладают одной и той же кинетической энергией, которую можно считать равной полной энергии. В этом случае при кинетической энергии 10 ГэВ ионизационные потери ультрарелятивистского электрона даже больше (примерно в 2 раза), чем ультрарелятивистского протона той же энергии. Причина этого в том, что по сравнению с электрическим полем неподвижной частицы электрическое поле ультрарелятивистского электрона изменяется более значительно (сплющивается сильнее в направлении движения и расширяется в поперечном направлении), чем электрическое поле ультрарелятивистского протона той же энергии ($\beta_e > \beta_p$).

Отличие в поведении заряженных частиц различных энергий проявляется, например, при их регистрации. Так, протон с энергией 5 МэВ составляет в ядерной фотоэмульсии отчетливый след, а электрон с той же энергией практически незаметен. Ультрарелятивистские же частицы

(например, в пузырьковой камере) трудно отличить друг от друга по оставляемым ими трекам, так как треки всех заряженных ультрарелятивистских частиц имеют практически одинаковую толщину.

Радиационные потери. Ускоренно движущаяся заряженная частица, как известно, испускает электромагнитные волны. В частности, это происходит при ее столкновениях с частицами вещества, через которые она проходит. Возникающее электромагнитное излучение называется тормозным, а потери энергии частицы на тормозное излучение – радиационными.

Примером тормозного излучения может служить непрерывный рентгеновский спектр, возникающий при торможении электронов на антикатоде рентгеновской трубки. Торможение электронов высоких энергий используется в электронных ускорителях для получения пучков γ -лучей. Интенсивность тормозного излучения (т. е. электромагнитная энергия, испускаемая частицей в единицу времени) в нерелятивистском не квантовом приближении определяется выражением

$$I = \text{const} \frac{Z_{\text{я}}^2}{m_{\text{ч}}^2},$$

где $Z_{\text{я}}$ – заряд ядра среды, а $m_{\text{ч}}$ – масса частицы.

Отсюда следует, что практически все радиационное торможение приходится на излучение электронов, так как излучение протона при равных действующих силах в $(m_p/m_e)^2 = 1836^2 \approx 3,4 \cdot 10^6$ раз слабее, чем у электрона. Ионизационные потери энергии движущегося электрона обусловлены столкновениями его с электронами атомных оболочек. Они в основном пропорциональны числу электронов Z в атоме среды. Радиационные потери, напротив, в основном обусловлены столкновениями движущегося электрона с атомными ядрами среды. Они пропорциональны квадрату кулоновской силы притяжения между движущимся электроном и ядром. Эта сила в свою очередь пропорциональна Ze , а потому радиационные потери должны возрастать пропорционально второй, а не первой степени Z . Этот вывод остается справедливым и в последовательной релятивистской квантовой теории радиационного торможения, развитой Бете и Гайтлером.

Тормозное излучение, возникающее в каждом индивидуальном акте столкновения электрона с атомом, существенно зависит от степени экранирования электрического поля ядра атомными электронами. С классической точки зрения эта зависимость определяется соотношением между прицельным расстоянием налетающего электрона b и «ра-

диусом ядра» R . Если $(b/R) \ll 1$, то экранирование несущественно, а при $(b/R) \gg 1$ экранирование полное. Все же основное значение имеет торможение электрона электрическим полем ядра. В пренебрежении экранированием энергия, теряемая электроном на радиационное торможение при прохождении одного и того же пути в веществе, пропорциональна числу ядер, мимо которых пролетает электрон. Иными словами, эта энергия пропорциональна плотности вещества ρ и пройденному электроном пути dx . Поэтому радиационные потери энергии электрона определяются выражением

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{рад}} \approx \frac{E}{x_0}, \quad (10)$$

где постоянная x_0 называется радиационной длиной. Радиационная длина зависит от рода вещества. Так, для воздуха $x_0 \approx 300$ м, для свинца $x_0 \approx 0,5$ см.

Согласно формуле (10) радиационные потери линейно растут с энергией, тогда как ионизационные потери при высоких энергиях меняются с энергией логарифмически, т. е. от энергии зависят слабо. Для сравнения можно пользоваться приближенным соотношением

$$\frac{(dE/dx)_{\text{рад}}}{(dE/dx)_{\text{иониз}}} \approx \frac{ZE}{800}. \quad (11)$$

Из этой формулы следует, что радиационные потери превышают ионизационные при $E > 800/Z$ МэВ. В области энергий, в которой радиационные потери являются основными, соотношение (10) можно проинтегрировать и получить следующее соотношение

$$E = E_0 e^{-x/x_0}, \quad (12)$$

из которого видно, что энергия электронов высокой энергии экспоненциально убывает при прохождении через вещество.

Полные потери энергии электронов в поглотителе складываются из ионизационных и радиационных потерь:

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{полн}} = -\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион}} + \left[-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{рад}}\right]. \quad (13)$$

На рис. 7 показано изменение ионизационных и радиационных потерь энергии для свинца в зависимости от энергии электронов.

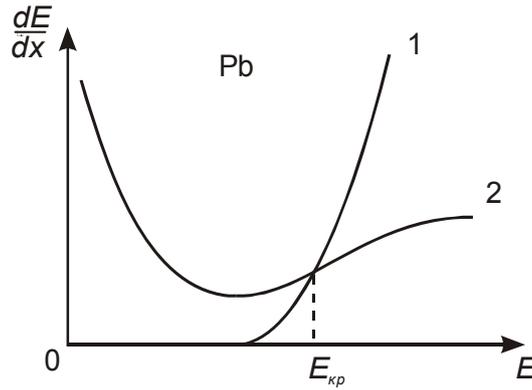


Рис. 7. Зависимость потерь энергии на излучение (1 – кривая) и ионизацию (2 – кривая) от энергии частицы

Тормозное излучение, испускаемое моноэнергетическими электронами или β -частицами, обладает непрерывным спектром, содержащим энергии от нулевой до максимальной энергии E_0 тормозящихся электронов. Если полученный экспериментально спектр тормозного излучения проинтегрировать по всем энергиям, можно определить полную энергию испускаемого тормозного излучения.

Взаимодействие γ -квантов с веществом

К γ -излучению относят электромагнитные волны, длина которых значительно меньше межатомных расстояний: $\lambda \ll a$, где a имеет порядок 10^{-8} см. В корпускулярной картине это излучение представляет собой поток частиц, называемых γ -квантами. Нижний предел энергии γ -квантов имеет порядок десятков кэВ. Естественного верхнего предела энергии нет. В современных ускорителях получают кванты с энергией вплоть до 20 ГэВ. Для практических приложений наибольший интерес представляет область от десятков кэВ до 10...20 МэВ.

Подобно заряженным частицам (и в отличие от нейтронов), пучок γ -квантов поглощается веществом в основном за счет электромагнитных взаимодействий. Однако механизм этого поглощения существенно иной. На это есть две причины. Во-первых, γ -кванты не имеют электрического заряда и тем самым не подвержены влиянию дальнодействующих кулоновских сил. Взаимодействие γ -лучей с электронами происходит в областях с радиусом порядка 10^{-11} см, что на три порядка меньше межатомных расстояний. Поэтому γ -кванты при прохождении через вещество сравнительно редко сталкиваются с электронами и ядрами. Вторая отличительная особенность γ -квантов состоит в том, что они обладают нулевой массой покоя и, следовательно, не могут иметь скорости, отличной от скорости света. А это значит, что γ -кванты в среде не могут замедляться. Они либо не взаимодействуют с частицами вещества

(не меняют скорости и направления), либо если взаимодействие произошло, поглощаются. При этом немедленно или с некоторым запаздыванием может излучиться новый γ -квант большей частью с другой (меньшей) энергией и в другом направлении, а поглотившая γ -квант частица (или система частиц) приобретает энергию кванта (или только ее часть если излучился новый квант).

Для γ -квантов не существует понятий пробега, максимального пробега, потерь энергии на единицу длины. При прохождении пучка γ -квантов через вещество число квантов в пучке в результате столкновений постепенно уменьшается. Соответственно происходит ослабление интенсивности пучка (энергии, проносимой γ -квантами в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную направлению пучка). Нетрудно получить закон, по которому происходит это ослабление. Обозначим через I интенсивность монохроматического потока падающих частиц, т. е. энергию проносимую частицами потока, через 1 см^2 в 1 сек . Пройдя слой вещества dx , пучок ослабнет на величину dI . Очевидно, что dI пропорционально потоку и толщине слоя:

$$dI = -\mu I dx. \quad (14)$$

Если среда однородна, то коэффициент μ , постоянен. В этом случае уравнение (14) легко интегрируется:

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (15)$$

где I_0 – начальная интенсивность. Величина μ , называется *коэффициентом поглощения*. Часто пользуются понятием *массового коэффициента поглощения*, равного μ/ρ , где ρ – плотность вещества. В этом случае толщину удобно измерять в единицах $\text{г}/\text{см}^2$. С этой единицей длины мы уже встречались при рассмотрении ионизационных потерь. Коэффициент поглощения полностью характеризует процесс прохождения γ -излучения через вещество. Он зависит от свойств среды и от энергии квантов.

Если поглощение идет за счет нескольких различных процессов, то каждому процессу будет соответствовать свой коэффициент поглощения μ_i , а полный (т. е. входящий в формулу (15)) коэффициент поглощения μ , будет суммой всех μ_i :

$$\mu = \sum_i \mu_i. \quad (16)$$

Величины μ и μ_i имеют размерность см^{-1} . Если коэффициент поглощения μ_i , соответствующий определенному процессу, разделить

на число n_i поглощающих центров в 1 см^3 , то мы получим полное сечение σ_i данного процесса:

$$\mu_i = n_i \sigma_i. \quad (17)$$

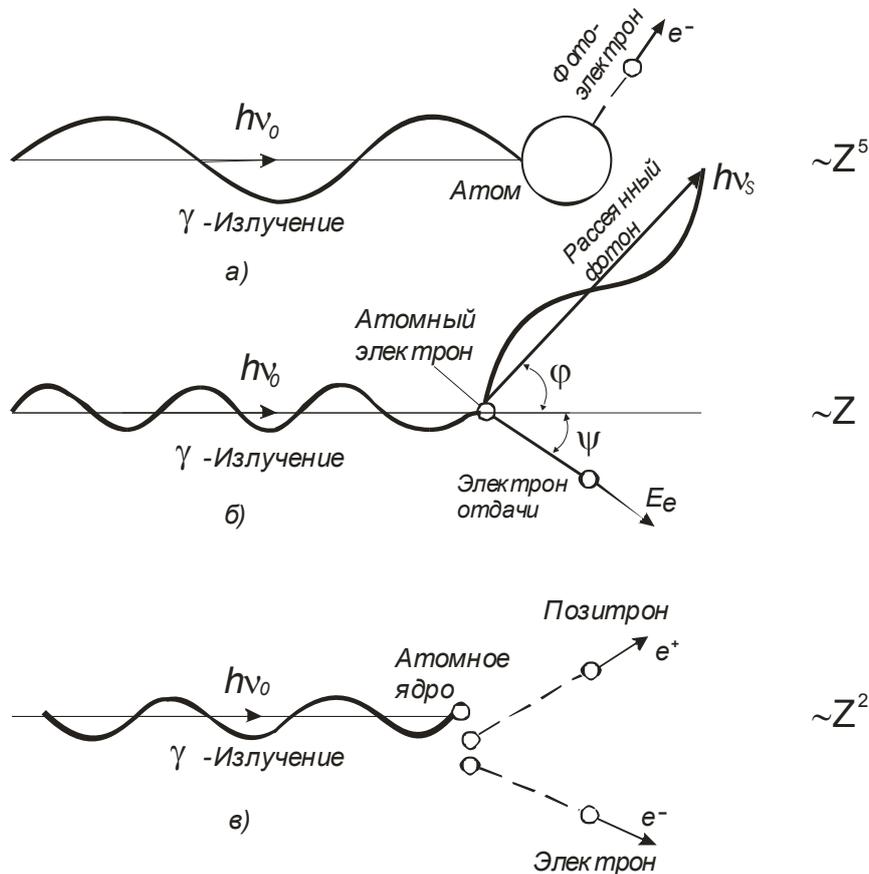


Рис. 8. Процессы взаимодействия γ -квантов с веществом

Таким образом, для определения μ надо понять, какие процессы дают существенный вклад в общее поглощение, и определить зависимость сечений этих процессов от энергии квантов и от рода вещества.

При рассмотрении механизма прохождения γ -излучения через вещество нельзя ограничиться классическими волновыми представлениями об излучении, а приходится учитывать квантовую, корпускулярную природу света. Квантовые свойства становятся важными потому, что длина волны γ -кванта, по определению, значительно меньше расстояний между атомами и между электронами.

Последовательный квантовомеханический расчет взаимодействия γ -квантов с атомами может быть проведен лишь на основе квантовой электродинамики. Поскольку ее знание у читателя не предполагается, мы приведем результаты расчетов без выводов, а лишь с качественными пояснениями.

Поглощение γ -излучения веществом в основном происходит за счет трех процессов:

- а) фотоэффекта;
- б) комптон-эффекта;
- в) рождения электронно-позитронных пар в кулоновском поле ядра.

В первых двух процессах кванты взаимодействуют с электронами, в третьем – с ядрами. Взаимодействие с электронами преобладает при низких и средних энергиях, а с ядрами – при высоких. Подчеркнем, что в процесс (в) входят далеко не все виды столкновений γ -квантов с ядрами.

Фотоэффект. Фотоэффектом называется процесс, при котором атом поглощает γ -квант и испускает электрон. С достаточной для практических приложений точностью можно считать, что каждый квант поглощается одним атомным электроном.

Основные особенности фотоэффекта связаны с тем, что свободный электрон не может поглотить фотон из-за совместного действия законов сохранения энергии и импульса. Отсюда следует, что фотоэффект наиболее интенсивно будет идти для γ -квантов с энергиями E , сравнимыми с энергиями связи электронов в атомах. При повышении энергии сечение должно резко падать, поскольку электроны становятся все более и более похожими на свободные. Энергия связи электрона в атоме тем больше, чем глубже электронная оболочка и чем больше атомный номер z . Поэтому фотоэффект идет, во-первых, в основном (примерно на 80 %) с низшей, т. е. с K -оболочки, а во-вторых, тем интенсивней, чем больше средний атомный номер z вещества.

Общая формула для сечения σ_f фотоэффекта очень громоздка. Она приводит к следующей зависимости сечения от энергии кванта и от атомного номера вещества. Сечение пропорционально Z^5 , т. е. очень сильно растет при переходе к тяжелым элементам. При энергиях, ненамного больших энергии связи атомных электронов, сечение $\sigma_f(E)$ пропорционально примерно $E^{-3,5}$, т. е. очень быстро падает с ростом энергии. При энергиях, намного превышающих энергию связи, это сечение падает медленнее, примерно как E^{-1} . Наконец, в области атомных энергий связи сечение изменяется скачкообразно. Например, сечение имеет резкий максимум чуть выше энергии связи K -электронов, поскольку ниже этой энергии K -электроны перестают участвовать в фотоэффекте из-за запрета по энергии. В области атомных энергий связи сечение фотоэффекта очень велико по сравнению с сечениями других процессов. Например, для алюминия $\sigma_f \approx 6 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$ при $E = 1 \text{ кэВ}$; $\sigma_f = 6 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$ при $E = 0,1 \text{ МэВ}$.

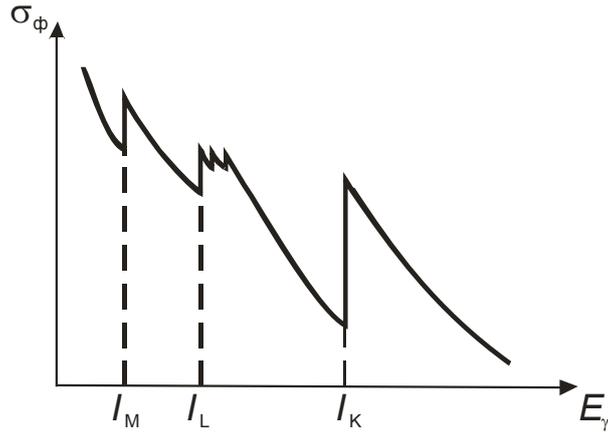


Рис. 9. Зависимость эффективного сечения фотоэффекта от энергии γ -квантов

Поэтому фотоэффект является преобладающим механизмом поглощения при низких энергиях, а при высоких энергиях его роль становится ничтожной. График зависимости сечения фотоэффекта от энергии приведен на рис. 4.11.

Эффект Комптона. С увеличением энергии квантов фотоэлектрическое поглощение отходит на задний план, уступая место комптон-эффекту. Хотя свободный электрон не может поглотить γ -квант, однако возможен процесс, когда поглощение γ -кванта сопровождается немедленным излучением нового γ -кванта. Так как распространение нового γ -кванта не совпадает с направлением распространения поглощенного γ -кванта, то количество γ -квантов, распространяющихся в направлении первоначального пучка, пучка уменьшается, т. е. этот процесс вносит свой вклад в коэффициент поглощения.

Для того чтобы в процессе Комpton-эффекта одновременно удовлетворялись законы сохранения количества движения (импульса) и энергии, необходимо выполнение определенного соотношения между энергией (частотой ν или длиной волны $\lambda = c/\nu$) поглощенного кванта, энергией (частотой ν' или длиной волны $\lambda' = c/\nu'$) испущенного (рассеянного) кванта и углом вылета последнего ϑ по отношению к направлению падающего пучка γ -квантов. Особенно просто это соотношение выглядит для длин волн

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \vartheta). \quad (18)$$

здесь h – постоянная Планка, m – масса электрона, c – скорость света. Величина $\Lambda = h/mc = 2,4 \cdot 10^{-10}$ см, которая показывает изменение длины волны при рассеянии под углом 90° , называется комptonовской

длинной волны электрона. Следует отметить, что поскольку энергия рассеянного γ -кванта меньше энергии поглощенного, то часть энергии передается электрону

$$h\nu = h\nu' + E_e,$$

ясно, что при этом электрон вылетает из атома, в противном случае электрон нельзя было бы считать свободным.

Комптон-эффект как механизм поглощения становится существенным в области энергий, значительно превышающих среднюю энергию связи электрона с атомом, когда энергией связи электрона в атоме можно пренебречь и электрон можно считать свободным. Однако при еще больших энергиях (свыше 10 МэВ) он спадает практически до нуля. Что же касается зависимости от свойств вещества, то в той области энергий, где поглощение за счет эффекта Комптона существенно, оно просто пропорционально числу электронов в единице объема.

Комптоновское рассеяние на ядрах пренебрежимо мало из-за того, что у ядер очень мал их «классический электромагнитный радиус».

Процесс образования пар. Процесс рождения электронно-позитронных пар в поле ядра состоит в том, что квант поглощается, а рождаются и вылетают электрон и позитрон. При этом ядро получает некоторый импульс отдачи. Согласно с опытом квантовоэлектродинамический расчет показывает, что как поглощение фотона, так и рождение пары происходит не внутри ядра, а около него в области, имеющей размер порядка комптоновской длины волны. Передача импульса отдачи ядру происходит через посредство его кулоновского поля. Без передачи импульса постороннему телу превращение фотона в электронно-позитронную пару запрещено законами сохранения энергии-импульса.

Так как масса фотона равна нулю, то превратиться в пару он может, только имея энергию больше суммы энергий покоя электрона и позитрона $2mc^2 = 1,02$ МэВ. Поэтому сечение σ_π рождения пар равно нулю при $E < 2mc^2$. Выше пороговой энергии сечение постепенно возрастает, а при очень больших (порядка $10^3 mc^2$) энергиях практически стремится к константе.

Поскольку сечения фотоэффекта и комптон-эффекта в области высоких энергий спадают практически до нуля, то рождение пар становится здесь основным механизмом поглощения γ -излучения. Пропорциональность сечения величине Z^2 имеет место практически при всех энергиях.

Электронно-позитронные пары могут рождаться фотонами в кулоновском поле не только ядра, но и электрона. Однако последний процесс приводит к гораздо более слабому поглощению γ -излучения из-за

малости соответствующего сечения (для электрона $Z = 1$), несмотря на то, что электронов в веществе больше, чем ядер.

Полный коэффициент поглощения. Основные механизмы взаимодействия γ -квантов с веществом по-разному зависят от энергии, рис. 10.

Полный коэффициент поглощения γ -излучения в веществе представляет собой сумму коэффициентов поглощения за счет всех возможных механизмов. Поэтому если учесть рассмотренные нами три основных механизма, то

$$\mu = \mu_f + \mu_c + \mu_\pi. \quad (19)$$

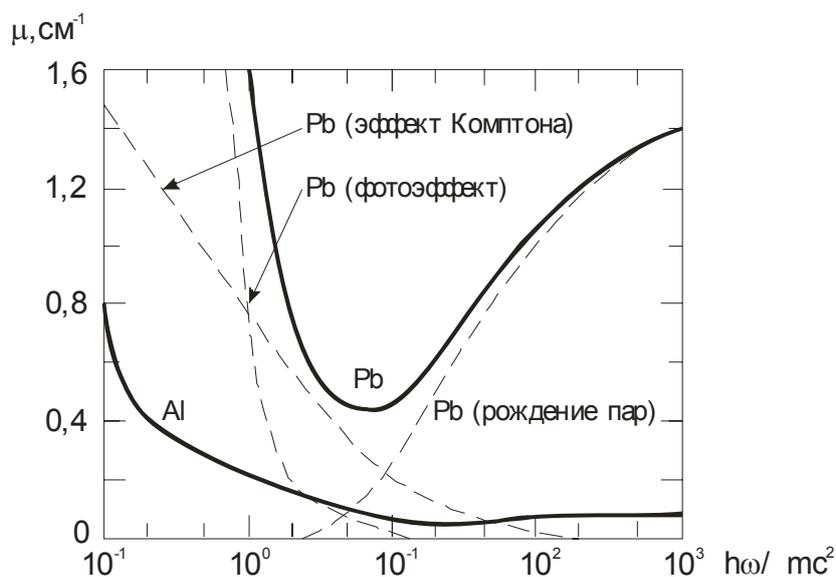


Рис. 10. Зависимость полного коэффициента поглощения γ -квантов в свинце и алюминии от энергии

При переходе к сечениям надо учесть, что для фотоэффекта и рождения пар рассеивающими центрами являются атомы, а для комптон-эффекта – электроны. Поэтому

$$\mu = N\sigma_f + NZ\sigma_c + N\sigma_\pi, \quad (20)$$

где N – число атомов в единице объема вещества.

Как следует из нашего рассмотрения, первое слагаемое в (19) преобладает при низких энергиях, второе – при средних (несколько МэВ), а третье – при высоких. Поэтому суммарный коэффициент поглощения имеет минимум в области, где вклад комптоновского рассеяния наибольший. Этот минимум особенно резко выражен для тяжелых элементов, так как величины μ_f, μ_π пропорциональны соответственно Z^5 и Z^2 , а μ_c пропорционально Z .

Полный коэффициент поглощения γ -квантов нетрудно измерять, пользуясь формулой (15). А зная коэффициент поглощения, по кривым на рис. 10 можно определить энергию монохроматического пучка γ -квантов. Так как одному и тому же значению коэффициента поглощения могут соответствовать две различные энергии, то измерение обычно приходится проводить на двух различных материалах. Следует также учитывать, что для применимости формулы (15) необходимо, чтобы размеры поглотителя были малы по сравнению с расстояниями от поглотителя до источника и до детектора. Кроме того, даже в условиях хорошей геометрии эксперимента формула (15) может нарушаться за счет различных вторичных процессов, которые рассмотрены в ниже.

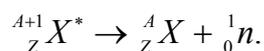
Взаимодействие нейтронов с веществом

Взаимодействие нейтронов с ядрами составляют наиболее обширный класс ядерных взаимодействий. Объясняется это тем, что нейтроны входят в состав атомного ядра, а значит должны с ним эффективно взаимодействовать, испытывая действие ядерных сил. Причем, в отличие от заряженных частиц, которые из-за кулоновского барьера не могут эффективно взаимодействовать с ядром при малых энергиях, нейтроны, не имеющие заряда, взаимодействуют с ядром и при малых энергиях.

Классификация нейтронных реакций. В ядерных реакторах образуются нейтроны, энергия которых лежит в широком диапазоне энергий: от тепловых до десятка МэВ. В этом случае большинство ядерных реакций с участием реакторных нейтронов протекает через образование составного ядра. Однако может возникнуть ситуация, когда на образование составного ядра наложен запрет по энергии нейтрона. В этом случае ядерная реакция происходит без образования составного ядра и имеет место рассеяние нейтрона в поле ядерных сил. При этом происходит обмен только кинетической энергией нейтрона с ядром (процесс, аналогичный соударению двух абсолютно упругих тел). Этот процесс носит название *упругого потенциального рассеяния*.

Все другие реакции нейтрона с ядром идут через образование составного ядра. Итак, пусть нейтрон провзаимодействовал с ядром A_ZX и образовалось составное ядро ${}^{A+1}_ZX^*$: ${}_0^1n + {}^A_ZX \rightarrow {}^{A+1}_ZX^*$. Рассмотрим возможные каналы распада составного ядра.

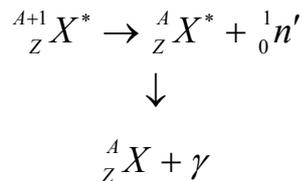
Упругое резонансное рассеяние: (n, n) – реакция.



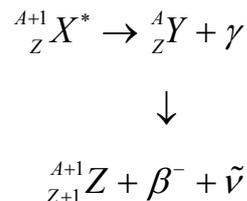
Эта реакция по своим результатам практически ничем не отличается от реакции потенциального рассеяния: в обоих случаях до и после взаимо-

действия сохраняются типы взаимодействующих частиц, а так же их энергетическое состояние. Отличие заключается только в продолжительности протекания реакции.

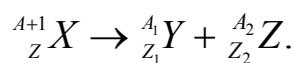
Неупругое рассеяние: (n, n') – реакция. В этом случае, хотя типы частиц сохраняются, образовавшееся ядро находится в возбужденном состоянии, снятие которого происходит через испускание гамма-кванта. Эта реакция приводит к резкому уменьшению энергии нейтрона.



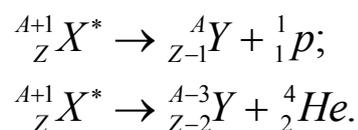
Радиационный захват: (n, γ) – реакция. Одна из основных реакций, влияющих на работу ядерного реактора. Во многих случаях образовавшееся ядро находится в неустойчивом состоянии и претерпевает β^- -распад:



Деление ядер: (n, f) – реакция. Протекает на тяжелых ядрах, для которых напряжение энергетически выгодно снимать путем деления на два осколка. Использование этой реакции лежит в основе работы ядерного реактора, поэтому реакция деления будет рассмотрена подробнее в последующих главах. Схема реакции деления имеет вид:



Образование заряженных частиц: (n, p) , (n, α) – реакции. Особенностью этих реакций является то, что нейтроны должны обладать достаточно высокой энергией $T_n \geq 0,5 \div 1$ МэВ, чтобы образующиеся заряженные частицы могли преодолеть кулоновский барьер при вылете из ядра. Схемы реакций имеют вид:



Однако существует ряд ядер, для которых эти реакции осуществимы и тепловыми нейтронами.

Образование двух и большего числа нуклидов: $(n, 2n)$, (n, np) , $(n, 3n)$ – реакции. Эти реакции являются пороговыми. Причем энергия налетающего нейтрона должна быть очень велика ($T_n \geq 8 \div 10$ МэВ), так как для освобождения нескольких нуклонов из ядра необходима энергия, превышающая сумму энергий связи вылетающих нуклонов в ядре. Так, например, порог реакции ${}^{12}_6\text{C}(n, 2n){}^{11}_6\text{C}$ составляет примерно 20 МэВ. Исключением является реакция на изотопе бериллия ${}^9_4\text{Be}(n, 2n){}^8_4\text{Be}$ с порогом около 2 МэВ.

Таблица 1

Тип реакции	Обозначение
Образование составного ядра	σ_{comp}
Потенциальное упругое рассеяние	σ_p
Резонансное упругое рассеяние	σ_s
Упругое рассеяние	σ_{el}
Неупругое рассеяние	σ_{in}
Реакция рассеяния	$\sigma_s = \sigma_{el} + \sigma_{in}$
Реакция (n, γ)	σ_γ
Реакция (n, f)	σ_f
Реакция (n, p)	σ_p
Реакция (n, α)	σ_α
Реакция $(n, 2n)$	σ_{2n}
Реакция поглощения	$\sigma_a = \sigma_\gamma + \sigma_f + \sigma_p + \sigma_\alpha + \sigma_{2n}$
Полное сечение взаимодействия	$\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$

Нейтронные сечения и скорость реакции. Пусть на тонкую мишень, содержащую в 1 см^3 N ядер (см^{-3}) падает моноэнергетический поток нейтронов плотностью $\Phi = n\nu$ [нейтр./($\text{см}^2 \cdot \text{с}$)]. Определим количество взаимодействий нейтронов в 1 см^3 мишени за 1 секунду – R [реакций/($\text{см}^2 \cdot \text{с}$)]. Очевидно, что R пропорционально числу ядер N и количеству нейтронов Φ . Тогда скорость реакции

$$R = \sigma N \Phi = \Sigma \Phi, \quad (20)$$

Каждый тип реакции характеризуется своей вероятностью. Поэтому различают сечения для каждой реакции и обозначают соответствующим образом. В табл. 1 приведены обозначения микроскопических сечений реакций взаимодействия нейтронов с ядрами.

Как видно из таблицы, основными видами взаимодействия нейтронов с веществом являются рассеяние и поглощение: $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$. Основными видами реакций поглощения являются радиационный захват и для делящихся материалов – реакция деления: $\sigma_a \approx \sigma_\gamma + \sigma_f$.

Рассмотрим мишень толщиной d и площадью поверхности S см², помещенную на пути параллельного пучка моноэнергетических нейтронов (рис. 5.1). Предположим, что нейтронный пучок с плотностью потока Φ , проходя через слой вещества толщиной dx испытывает уменьшение плотности потока на величину $d\Phi$.

Ослабление пучка нейтронов вызвано ядерными реакциями между нейтронами и ядрами вещества, расположенными в слое dx . Причем любое взаимодействие приводит к уменьшению плотности потока нейтронов рассматриваемого пучка, т. е. вероятность выбывания нейтронов из пучка характеризуется полным сечением взаимодействия $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$. Очевидно, что уменьшение плотности потока нейтронов пучка будет пропорционально величине самой плотности потока Φ , числу ядер мишени n , сечению взаимодействия σ_t и толщине слоя dx :

$$d\Phi = -\sigma_t n \cdot \Phi \cdot dx \quad \text{или} \quad \frac{d\Phi}{\Phi} = -\sigma_t \cdot n \cdot dx. \quad (5.5)$$

Знак « \rightarrow » показывает, что имеет место уменьшение числа нейтронов. Проинтегрировав выражение (5.5) имеем:

$$\Phi(x) = \Phi_0 \exp(-\sigma n d) = \Phi_0 \exp(-\Sigma_t d), \quad (5.6)$$

где Φ_0 – плотность потока нейтронов в точке $x=0$.

Выражение (5.6) носит название экспоненциального закона ослабления плотности нерассеянного потока моноэнергетических нейтронов в веществе.

Иногда под ослаблением нейтронного потока понимают уменьшение величины Φ только за счет поглощения нейтронов. В этом случае выражение (5.6) преобразуется к следующему виду:

$$\Phi(x) = \Phi_0 \exp(-\sigma_a n d) = \Phi_0 \exp(-\Sigma_a d). \quad (5.7)$$

Дополнительные механизмы взаимодействия ядерных частиц с веществом

В предшествующих трех параграфах были изложены основные механизмы взаимодействия заряженных частиц, γ -квантов и нейтронов с веществом. На практике в подавляющем большинстве случаев именно этими механизмами определяется процесс прохождения частиц. Однако в отдельных случаях важное значение приобретают некоторые другие механизмы. Кроме того, часто оказываются существенными разного рода вторичные процессы, сопровождающие прохождение. Этот круг вопросов и будет рассмотрен в настоящем параграфе.

Кулоновские столкновения с ядрами. Заряженные частицы, проходя через вещество, испытывают кулоновские столкновения не только с электронами, но и с ядрами. Потери энергии $(-dE/dx)_{яд.кул.}$ за счет таких столкновений описываются формулой (4.21) с учетом отличия массы и заряда ядра от соответствующих величин для электрона:

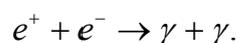
$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{яд.кул.} = \frac{4\pi z^2 Z^2 e^4 N}{v^2 M_{ядро}} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} = \frac{mz}{AM_p} \frac{4\pi z^2 e^4 n}{v^2 m} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}, \quad (21)$$

где $N = n/Z$ – число ядер в единице объема, M_p – масса протона. Множитель mZ/AM_p имеет порядок $1/4000$, так что ядерные кулоновские потери в несколько тысяч раз меньше ионизационных. Однако иногда этот малый эффект может оказаться существенным из-за его качественного своеобразия. Именно, из-за большой массы ядра кулоновское рассеяние на нем может идти на большие углы (даже назад). Напомним, что Резерфорд в своих классических опытах именно по кулоновскому рассеянию α -частиц назад сделал вывод о существовании атомных ядер.

Сильное взаимодействие с ядрами. Протоны, пионы и большинство других заряженных частиц, кроме электронов и мюонов, начиная с энергий $20 \div 30$ МэВ способны вступать в сильное взаимодействие с ядрами. Из-за короткодействия ядерных сил столкновения с их участием происходят в $Z(R_{ат.}/R_{яд.})^2$, т. е. примерно в 10^{12} раз реже кулоновских столкновений с электронами. С другой стороны, если при единичном кулоновском столкновении с электроном частица лишь теряет очень малую энергию, то при ядерном столкновении частица почти всегда выбывает из пучка (либо рассеивается на большой угол, либо поглощается, либо превращается в другую частицу). Поэтому при прохождении пучка адронов высокой (более 20 МэВ) энергии через вещество уменьшается не только энергия первичных частиц, но и плотность их числа. Соответ-

ствующее уменьшение потока описывается коэффициентом поглощения $\mu_{\text{яд}}$. Величина $\mu_{\text{яд}}^{-1}$ в твердых телах и жидкостях имеет порядок десятков сантиметров. Это значит, что в среднем частица проходит в веществе десятки сантиметров, подвергаясь только ионизационному торможению. Это обстоятельство делает возможным рассмотрение действия приборов для регистрации частиц без учета ядерных взаимодействий регистрируемых заряженных частиц. С другой стороны, при расчете радиационной защиты для релятивистских ускорителей и космических кораблей учет ядерных взаимодействий необходим.

Аннигиляционные потери. При прохождении позитронов через вещество в дополнение к ионизационным и радиационным потерям возникают аннигиляционные потери за счет двухфотонной аннигиляции позитронов с электронами вещества



Аннигиляционные потери сравнительно невелики. Они характерны тем, что приводят к возникновению аннигиляционных квантов даже в той области энергий налетающих частиц, где тормозное излучение практически отсутствует.

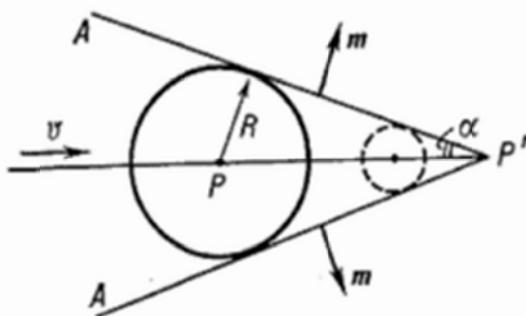


Рис. 11. Геометрия черенковского излучения

Черенковское излучение. Скорость света c' в среде определяется формулой $c' = c/n$, где n – показатель преломления. Так как $n > 1$, то частица высокой энергии в среде может двигаться быстрее света. Такая сверхсветовая частица, если она заряжена, будет излучать свет даже при неускоренном движении. Это излучение было открыто П.А. Черенковым в лаборатории С.И. Вавилова. Теория этого явления создана И.Е. Таммом и И.М. Франком. Причина возникновения черенковского излучения та же, что и причина возникновения волн на воде от парохода или ударной волны в воздухе от пули.

Фронт волны черенковского излучения (рис. 11) является огибающей сферических волн, испущенных частицей. Эту огибающую, можно

провести только в том случае, если частица движется со скоростью v , большей скорости $c' = c/n$ света в среде. Отсюда следует, что при $v < c/n$ черенковское излучение отсутствует. Угол ϑ , под которым испускается черенковское излучение, легко найти из соотношения $\cos \vartheta = c/vn$. Потери энергии частицы на черенковское излучение (разумеется, эти потери должны содержаться в найденных нами ранее ионизационных потерях, имеют тот же порядок, что и радиационные. По углу ϑ распространения излучения можно определять скорость частицы. Это обстоятельство используется в черенковских счетчиках.

Ядерный фотоэффект. γ -кванты с энергией примерно от десяти МэВ и выше могут вступать в неупругое взаимодействие с ядрами, выбивая из них протоны, нейтроны и другие частицы. Этот процесс (ядерный фотоэффект) вносит малый вклад в суммарный коэффициент поглощения, но характерен возникновением вторичных нуклонов.

Вторичные эффекты. Перейдем теперь к вторичным эффектам, сопровождающим действие основных механизмов взаимодействия заряженных частиц с веществом.

Вторичные потоки γ -квантов. При тормозном излучении электронов возникает мощный вторичный поток γ -квантов, летящих преимущественно вперед. Так как проникающая способность γ -излучения значительно выше проникающей способности электронов, то это излучение необходимо учитывать, например, при расчете защиты.

Электронные ливни. При очень высоких энергиях (1 ГэВ и выше) первичных электронов или γ -квантов возникает новое явление – электронно-позитронные (или мягкие) ливни (рис. 12).

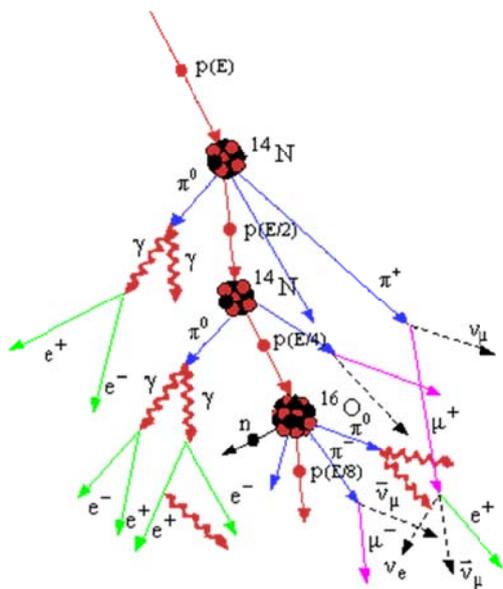


Рис. 12. Электрон-позитронный ливень

Ливень развивается следующим образом. Первичная частица, например, электрон, тормозясь в поле ядра, испускает γ -квант высокой энергии. Этот квант рождает электронно-позитронную пару на другом ядре. Электрон и позитрон этой пары в свою очередь порождает по одному тормозному кванту и т. д. В результате энергия первичного электрона распределяется между большим количеством вторичных электронов, позитронов и квантов. Наконец, энергии отдельных электронов и позитронов уменьшаются настолько, что ионизационные потери начинают преобладать над радиационными, после чего ливень прекращается. Заметим, что все компоненты ливня летят практически в том же направлении, что и первичная частица, из-за ультррелятивистского характера процесса. При наличии ливней поток частиц, попадая в вещество, сначала резко усиливается и, только пройдя некоторое расстояние, начинает падать.

Торможение вторичных заряженных частиц. При ядерном взаимодействии тяжелых заряженных частиц с ядрами возникает большое количество вторичных частиц. При энергии падающей частицы от 20 МэВ примерно до десятков-сотен ГэВ вторичными частицами в основном являются нуклоны. При более высоких энергиях вторичный пучок в основном состоит из пионов. Все эти вторичные частицы (в особенности нейтроны) сильно осложняют расчет эффективной радиационной защиты для ускорителей и космических кораблей.

Радиоактивация ядер. Налетающие частицы достаточно высоких энергии при неупругих столкновениях с атомными ядрами могут частично разрушать их, например, выбивать протоны, нейтроны или вызывать другие ядерные превращения. В результате образуются новые атомные ядра и новые изотопы химических элементов. Они, как правило, радиоактивны, так что в веществе возникает *наведенная радиоактивность*. Реакции выбивания протонов или нейтронов из ядра и прочие ядерные реакции, производимые электронами и γ -квантами, сильно эндотермичны и имеют порог около 10 МэВ. Но даже выше этого порога из-за слабости электромагнитных взаимодействий сечения этих процессов очень малы – на несколько порядков меньше площади эффективного сечения самого атомного ядра. Проникновению протонов и α -частиц в ядро препятствует *кулоновский потенциальный барьер*, особенно высокий в случае тяжелых ядер. Поэтому протоны и α -частицы могут создать заметную наведенную активность лишь при сравнительно высоких энергиях (во всяком случае, больше примерно 10 МэВ). Заметим также, что α - и β -частицы, а также γ -кванты, возникающие в результате радиоактивных распадов ядер, обладают энергией всего в несколько МэВ. Такие радиоактивные излучения, как правило, создать дополнительную наведенную радиоактивность не могут.

Дифференциальные и интегральные характеристики поля излучения

Быстрые частицы, испускаемые тем или иным источником, взаимодействуют с окружающей средой, поглощаясь и рассеиваясь в ней. Эти процессы приводят к тому, что угловое и энергетическое распределение частиц в разных точках пространства будет разным. Одной из основных задач теории переноса является задача об определении характеристик поля излучения, создаваемого заданными источниками.

Остановимся на основных понятиях, используемых при описании поля излучения. Распределение частиц в пространстве безотносительно к другим величинам, характеризующим частицы, определяется *объёмной плотностью частиц*: $n(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta V} = \frac{dN}{dV}$, $dV = dxdydz$, где ΔN – среднее число частиц в объёме ΔV около точки \vec{r} .

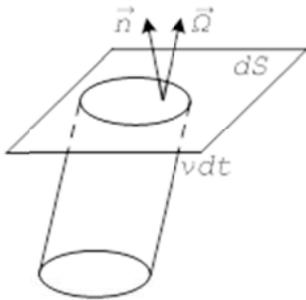


Рис. 13. Элементарный
объем $dV = v dt dS$

Это понятие можно обобщить, если к характеристикам положения $\vec{r} = \{x, y, z\}$ присоединить характеристики движения частиц: направление $\vec{\Omega}$ и кинетическую энергию E . Вектор направления $\vec{\Omega}$ мы будем характеризовать двумя угловыми – ϑ (угол между $\vec{\Omega}$ и осью OZ) и φ (угол между осью OX и проекцией $\vec{\Omega}$ на плоскость XY). Полученную таким образом совокупность переменных $(x, y, z, \cos \vartheta, \varphi, E)$ принято называть *фазовыми координатами* и обозначать одной буквой x . По аналогии с $dV = dxdydz$ произведение $dx = dV d \cos \vartheta d \varphi dE$ будем называть *элементарным фазовым объёмом*. Обобщённая плотность частиц, называемая также *дифференциальной по углам и энергиям плотностью* (или просто *дифференциальной плотностью*), определяется соотношением

$$n(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta x} = \frac{dN}{dx} = \frac{dN(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)}{dV d \vec{\Omega} dE}, \quad (22)$$

$$d \vec{\Omega} = d \cos \vartheta d \varphi,$$

где $dN(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$ – среднее число частиц в элементарном фазовом объёме $dx = dV d \vec{\Omega} dE$, т. е. число частиц, находящихся в объёме dV , движущихся в пределах телесного угла $d \vec{\Omega}$ около направления $\vec{\Omega}$ и имеющих энергию в интервале $(E, E + dE)$. Заметим, что размерность дифферен-

циальной плотности, так же, как и обычной, обратна размерности объёма (в данном случае – фазового). Обычно длину измеряют в сантиметрах, телесный угол – в стерадианах, энергию быстрых частиц – в мегаэлектронвольтах. Тогда $[n(x)] = \text{см}^{-3} \text{стерад}^{-1} \text{МэВ}^{-1}$.

В общем случае дифференциальная плотность частиц может зависеть и от времени, однако пока мы ограничимся рассмотрением стационарном случае.

За промежутки времени dt элементарную площадку dS пересекают те частицы с энергией E и направлением движения $\vec{\Omega}$, которые накопятся в элементарном объёме $dV = \mathcal{G} dt dS$. Количество таких частиц равно

$$n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = (\vec{\Omega} \vec{n}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dS dt, \quad (23)$$

где \mathcal{G} – скорость частиц, соответствующая энергии E , \vec{n} – единичная нормаль к dS . Через Φ обозначена величина

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = \mathcal{G} n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E), \quad (24)$$

называемая *дифференциальным по углам и энергиям потоком частиц*. Из (23) видно, что он представляет собой количество частиц с параметрами $\vec{\Omega}$, E пересекающих в единицу времени единичную площадку, перпендикулярную $\vec{\Omega}$. Это определение является естественным обобщением широко используемого понятия «плотность потока частиц», которая определяется как число частиц, пересекающих в единицу времени единичную площадку, ориентированную перпендикулярно потоку. Размерность дифференциального потока – $\text{см}^{-2} \text{сек}^{-1} \text{стерад}^{-1} \text{МэВ}^{-1}$.

Суммарное количество частиц, проходящих через произвольную поверхность S за конечное время T , может быть получено соответствующим интегрированием (23). При этом, однако, необходимо помнить, что выражение (23) и интегралы от него могут быть как положительными, так и отрицательными, поскольку знак скалярного произведения $(\vec{\Omega} \vec{n})$ зависит от взаимной ориентации векторов $\vec{\Omega}$ и \vec{n} .

Если обе части равенства (24) умножить на $dx = dV d\vec{\Omega} dE$ и учесть, что $n(x) dx$ – это число частиц в элементарном объёме dx фазового пространства, а \mathcal{G} – скорость этих частиц, то величину $\Phi(x) dx$ можно интерпретировать как путь, проходимый в единицу времени частицами, принадлежащими к элементарному объёму dx , а сам поток $\Phi(x)$ – как путь, который проходят частицы, принадлежащие единичному объёму фазового пространства, в единицу времени.

Для характеристики потока энергии, переносимой частицами, вводится величина

$$I(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = E\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E), \quad (25)$$

которая называется *дифференциальным потоком энергии*, физический смысл которого аналогичен физическому смыслу величины $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$: величина $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)dSdt$ есть количество энергии, переносимой за время dt через площадку dS , перпендикулярную вектору $\vec{\Omega}$, частицами с параметрами $\vec{\Omega}, E$.

Все используемые на практике характеристики поля излучения могут быть выражены через дифференциальный поток частиц $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$, отыскание которого является важной задачей теории переноса излучения.

Одной из количественных характеристик поля излучения является число частиц, падающих на поверхность сферы малого радиуса (детектора) с центром в точке \vec{r} . Внутри сферы в единицу времени входит

$$\int_{(\vec{\Omega}\vec{n})>0} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)(\vec{\Omega}, \vec{n})dS \quad (26)$$

частиц с параметрами $\vec{\Omega}, E$. Здесь $\vec{\Omega}$ – внутренняя нормаль к поверхности сферы, а интегрирование проводится лишь по той части поверхности, где $(\vec{\Omega}\vec{n}) > 0$. Если объём достаточно мал, то используя теорему о среднем, величину (26) можно записать в виде

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) \int_{(\vec{\Omega}\vec{n})>0} (\vec{\Omega}, \vec{n})dS = \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)\Delta S, \quad (27)$$

где ΔS – площадь поперечного сечения сферы. Интегрируя (27) по всем ориентациям $\vec{\Omega}$, найдём число частиц с энергией E (точнее, с энергией принадлежащей единичному энергетическому интервалу около E), попадающих внутрь сферы. Оно равно $\Phi(\vec{r}, E)\Delta S$, где

$$\Phi(\vec{r}, E) = \int \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)d\vec{\Omega}. \quad (28)$$

Функция $\Phi(\vec{r}, E)$ называется энергетическим распределением (спектром) частиц в точке \vec{r} . Аналогичным образом, интегрируя (27) по всем энергиям, приходим к угловому распределению частиц

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)dE. \quad (29)$$

Полное число частиц, входящих внутрь малой сферы, отнесённое к величине её поперечного сечения ΔS , называется *потоком частиц* в точке \vec{r} и обозначается $\Phi(\vec{r})$. Очевидны соотношения

$$\Phi(\vec{r}) = \int \Phi(\vec{r}, E) dE = \int \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \int d\vec{\Omega} \int dE \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E). \quad (30)$$

Величины, аналогичные (28) – (30) можно ввести и для характеристики потока энергий, вносимой в объём ΔV через его поверхность:

$$I(\vec{r}, E) = \int I(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) d\vec{\Omega}, \text{ – энергетический спектр излучения, а}$$

$$I(\vec{r}) = \int I(\vec{r}, E) dE. \text{ – интенсивность излучения.}$$

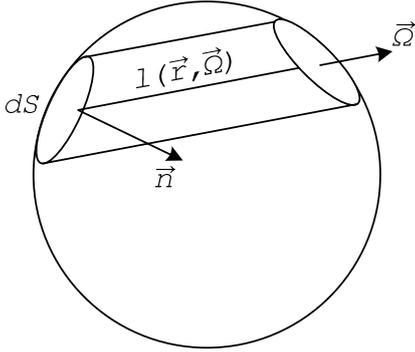


Рис. 14. Элементарный объем ΔV

Учитывая, что вероятность столкновения, отнесённая к единице пути, равна коэффициенту ослабления $\Sigma(E)$, найдём число столкновений, которые испытывает выделенная выше группа частиц в объёме ΔV :

$$\int_{(\vec{\Omega}\vec{n}) > 0} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) (\vec{\Omega}, \vec{n}) \Sigma(E) l(\vec{r}, \vec{\Omega}) dS. \quad (31)$$

Условие $(\vec{\Omega}\vec{n}) > 0$ по-прежнему выделяет из потока частиц, пересекающих S , только те, которые входят внутрь объёма. Если объём мал, дифференциальный поток можно вынести из-под интеграла. Интеграл $\int_{(\vec{\Omega}\vec{n}) > 0} (\vec{\Omega}, \vec{n}) l(\vec{r}, \vec{\Omega}) dS = \Delta V$, поэтому число столкновений ΔN в объёме

$$\Delta V \text{ можно записать в виде } \Delta N = \Sigma(E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) \Delta V.$$

Величина $F(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = \Sigma(E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$ называется *дифференциальной плотностью столкновений*. Этот результат становится очевидным, если учесть, что $\Sigma(E)$ представляет собой отнесённую к единице пути вероятность столкновения, а $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$ есть путь, проходимый в единицу времени частицами из единичного объёма в фазовом пространстве. Интегрируя $F(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$ по углам и энергиям, получаем *плотность столкновений*

$$F(\vec{r}) = \int d\vec{\Omega} \int dE \Sigma(E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = \int \Sigma(E) \Phi(\vec{r}, E) dE. \quad (32)$$

При каждом столкновении с атомами среды частица теряет энергию, среднее значение которой зависит от энергии частицы E , $\bar{Q} = \bar{Q}(E)$.

Умножая эту величину на дифференциальную плотность столкновений, и интегрируя по углам и энергиям, найдём пространственное распределение энергии, теряемой при столкновениях:

$$\bar{Q}(\vec{r}) = \int \bar{Q}(E) \Sigma(E) \Phi(\vec{r}, E) dE. \quad (33)$$

Эту величину ещё называют *диссипированной энергией*.

Диссипированная энергия передаётся молекулам и атомам среды. В процессе взаимодействия атомы могут ионизироваться, ядра – делиться или испускать ядерные частицы и т. д. Общим для всех этих процессов является появление вторичных быстрых частиц (электронов, нейтронов и т. д.) которые уносят из рассматриваемого объёма часть диссипированной энергии. Оставшаяся в объёме энергия, переходящая в тепловую, химическую и др. виды называется *поглощённой энергией*. Очевидно, что среднее значение поглощённой при столкновении энергии $\bar{D}(E) < \bar{Q}(E)$. Распределение поглощённой энергии имеет вид

$$D(\vec{r}) = \int E \mu_a(E) \Phi(\vec{r}, E) dE, \quad (34)$$

где $\mu_a(E) = \bar{D}(E) \Sigma(E) / E$ – *линейный коэффициент поглощения энергии*. Суммарная энергия, поглощённая в объёме V вещества за время T равна интегралу

$$D \int dV \int dt D(\vec{r}, t). \quad (35)$$

Поток частиц в любой точке среды можно разделить на две части: *поток нерассеянных частиц* (т. е. частиц, не испытавших ни одного рассеяния на пути от источника в данную точку) $\Phi_0(x)$ и *поток рассеянных частиц* $\Phi_s(x)$. В соответствии с этим любая интегральная величина может быть представлена в виде суммы двух слагаемых. В большинстве случаев вычислить первое из них не представляет никаких трудностей, поэтому искомая величина, например интенсивность, представляется в виде

$$I(\vec{r}) = B_E(\vec{r}) I_0(\vec{r}), \quad (36)$$

где B_E – *энергетический фактор накопления* $B_E(\vec{r}) = \frac{I(\vec{r})}{I_0(\vec{r})} = 1 + \frac{I_s(\vec{r})}{I_0(\vec{r})}$.

Аналогичным образом вводится *фактор накопления поглощённой энергии* $B_D(\vec{r}) = \frac{D(\vec{r})}{D_0(\vec{r})}$ и другие.

Кинетическое уравнение переноса

Поле излучения, существующее в среде, однозначно определяется свойствами среды, которые описываются сечениями взаимодействия $\Sigma(\vec{r}, E)$ и $\Sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E)$, и распределением источников, которое даётся функцией $S(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$. Уравнение, связывающее эти величины с дифференциальным потоком частиц, называется *кинетическим уравнением* (или *уравнением переноса*).

Для вывода кинетического уравнения рассмотрим в единичном объёме dV частицы с энергией E и направлением движения $\vec{\Omega}$ (точнее, с параметрами E и $\vec{\Omega}$, принадлежащими соответствующим единичным интервалам).

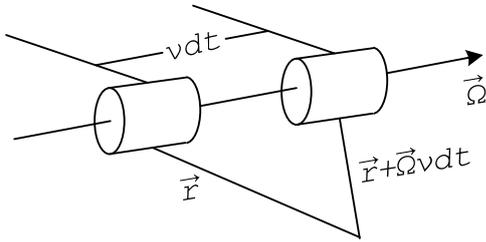


Рис. 15. К выводу кинетического уравнения переноса

Пусть в момент времени t плотность этих частиц равна $n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$. За время dt «пакет» этих частиц, двигаясь со скоростью $\mathcal{G}(E)$, пройдёт путь $\mathcal{G}dt$ и переместится в точку $\vec{r} + \vec{\Omega}\mathcal{G}dt$. Плотность частиц «пакета» станет равна $n(\vec{r} + \vec{\Omega}\mathcal{G}dt, \vec{\Omega}, E, t + dt)$.

Изменение плотности $dn(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = n(\vec{r} + \vec{\Omega}\mathcal{G}dt, \vec{\Omega}, E, t + dt) - n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$ произойдёт вследствие взаимодействия этих частиц с веществом и испускания их источником. Частицы, испытавшие хотя бы одно столкновение, либо поглотятся, либо изменят в процессе рассеяния направление движения и энергию, выбыв таким образом из пакета. Число таких частиц в единице объёма

$$dn_{cm} = n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \Sigma(\vec{r}, E) \mathcal{G}dt = \Sigma(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) dt. \quad (37)$$

Кроме того, плотность частиц пакета может увеличиться за счёт источников, расположенных в данной точке,

$$dn_{ucm} = S(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) dt, \quad (38)$$

а также за счёт рассеяния частиц в объёме пакета, при котором направление и энергия частиц, имевшие до рассеяния произвольные значения $\vec{\Omega}'$ и E' , принимают после рассеяния рассматриваемые значения $\vec{\Omega}$ и E . Плотность таких столкновений определяется формулой, подобной (32):

$$dn_{pacc} = \int d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) dt. \quad (39)$$

В последнем выражении считается, что рассеяние происходит мгновенно (не учитываются: например, запаздывающие нейтроны). В большинстве задач теории переноса это приближение вполне допустимо.

Поскольку выше перечислены все возможные причины изменения плотности частиц пакета, полное изменение dn должно быть равно сумме всех составляющих:

$$n(\vec{r} + \vec{\Omega} \mathcal{G} dt, \vec{\Omega}, E, t + dt) = n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = -dn_{cm} + dn_{ucm} + dn_{pacc}. \quad (40)$$

Левая часть этого равенства разложением в ряд приводится к виду

$$\frac{\partial n}{\partial t} dt + \frac{\partial n}{\partial x} \Omega_x \mathcal{G} dt + \frac{\partial n}{\partial y} \Omega_y \mathcal{G} dt + \frac{\partial n}{\partial z} \Omega_z \mathcal{G} dt = \frac{\partial n}{\partial t} dt + \Omega \nabla \Phi dt. \quad (41)$$

Подставляя (37) – (39) и (40) в (41) и сокращая на dt , получаем кинетическое уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathcal{G}} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} + \vec{\Omega} \nabla \Phi(x, t) + \Sigma(\vec{r}, E) \Phi(x, t) - \\ & - \int d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) = S(x, t), \end{aligned} \quad (42)$$

называемое *уравнением Больцмана*. Это интегродифференциальное уравнение в общем случае должно быть дополнено начальными и граничными условиями, зависящими от конкретной задачи.

В большинстве случаев источники и граничные условия не зависят от времени, при этом дифференциальный поток так же не зависит от времени, а кинетическое уравнение становится стационарными

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \nabla \Phi(x) + \Sigma(\vec{r}, E) \Phi(x) - \\ & - \int d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E') = S(x). \end{aligned} \quad (43)$$

Уравнение (42) в отличие от (43) называется нестационарным. В однородной среде Σ и Σ_s не зависят от координат.

В зависимости от симметрии рассматриваемой задачи уравнение переноса (43) бывает необходимо записывать и решать в декартовой, цилиндрической или сферической системах координат. Используя известные выражения для оператора ∇ в криволинейных координатах можно записать градиентный член кинетического уравнения в виде

$$\vec{\Omega} \nabla \Phi = \sin \mathcal{G} \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sin \mathcal{G} \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \cos \mathcal{G} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (\text{декартовы координаты})$$

$$\vec{\Omega}\nabla\Phi = \sin\vartheta\cos(\varphi - \beta)\frac{\partial\Phi}{\partial r} +$$

$$+ \sin\vartheta\sin(\varphi - \beta)\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} + \cos\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad (\text{цилиндрические координаты})$$

$$\vec{\Omega}\nabla\Phi = [\sin\vartheta\sin\alpha\cos(\varphi - \beta) + \cos\vartheta\cos\alpha]\frac{\partial\Phi}{\partial r} +$$

$$+ [\sin\vartheta\cos\alpha\cos(\varphi - \beta) - \cos\vartheta\sin\alpha]\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \quad (\text{сферические координаты})$$

$$+ \sin\vartheta\sin(\varphi - \beta)\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}.$$

Остальные члены кинетического уравнения не содержат операторов, действующих на пространственные переменные, поэтому их вид не меняется при переходе к криволинейным координатам.

Кинетическое уравнение упрощается, если рассматриваемая система обладает трансляционной или вращательной симметрией, т. е. совмещается сама с собой при параллельном переносе или повороте относительно какой-либо оси.

Параллельный перенос означает, что все точки системы смещаются на одну и ту же величину $\vec{\delta r}$. Если при этом система совмещается сама с собой, то

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = \Phi(\vec{r} + \vec{\delta r}, \vec{\Omega}, E). \quad (44)$$

Раскладывая правую часть этого равенства в ряд по степеням $\vec{\delta r}$ и пренебрегая членами второго порядка малости, получим дополнительное условие, которому должен удовлетворять поток:

$$(\vec{\delta r}, \nabla)\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = 0. \quad (45)$$

Если (44) выполняется при любых $\vec{\delta r}$, то из (45) следует, что Φ не зависит от координат, градиентный член в кинетическом уравнении исчезает; и оно принимает вид:

$$\Sigma(E)\Phi(\vec{\Omega}, E) - \int d\vec{\Omega}' \int dE\Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E)\Phi(\vec{\Omega}', E') = S(\vec{\Omega}, E). \quad (46)$$

Указанной симметрией обладает бесконечный поглотитель с равномерно распределённым в нём источником. Если (44) выполняется лишь для таких смещений, когда $\vec{\delta r} = \{\delta x, \delta y, 0\}$, то из (45) следует что Φ не зависит от координат x и y и удовлетворяет кинетическому уравнению:

$$\cos \nu \frac{\partial \Phi(x, \vec{\Omega}, E)}{\partial z} + \Sigma(E) \Phi(z, \vec{\Omega}, E) -$$

$$- \int d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \Phi(z, \vec{\Omega}', E') = S(z, \vec{\Omega}, E)$$

Такую задачу называют *плоской*.

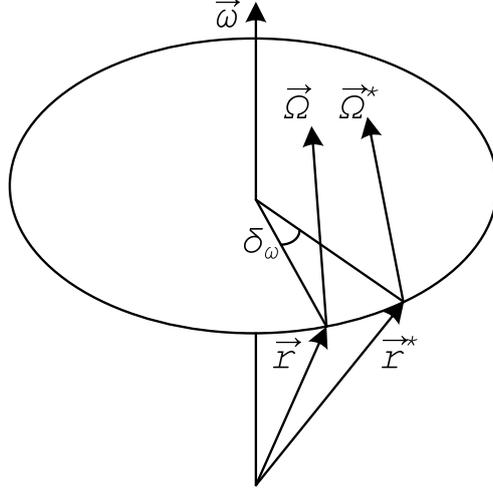


Рис. 16. Совмещение системы при повороте

Рассмотрим случай, когда система совмещается сама с собой при повороте на угол $\delta\omega$ относительно оси $\vec{\omega}$. Из рис. 16 видно, что при таком повороте вектор \vec{r} переходит в \vec{r}^* :

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \delta\omega[\vec{\omega}, \vec{r}], \quad (1.36a) \quad (47.1)$$

а $\vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}^*$:

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega} + \delta\omega[\vec{\omega}, \vec{\Omega}]. \quad (1.36b) \quad (47.2)$$

Симметрия по отношению к таким вращениям означает, что

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = \Phi(\vec{r} + \delta\omega[\vec{\omega}, \vec{r}], \vec{\Omega} + \delta\omega[\vec{\omega}, \vec{\Omega}], E). \quad (48)$$

Отсюда можно сделать вывод, что поток Φ должен быть функцией от инвариантных комбинаций из проекций векторов \vec{r} и $\vec{\omega}$.

Если равенство (48) имеет место при любой ориентации вектора $\vec{\omega}$ (задача со сферической симметрией), то такими инвариантными комбинациями являются r^2 , $(\vec{\Omega}, \vec{r} / r)$ и тривиальная $\vec{\Omega}^2 = 1$.

Равенства $r^{*2} = r^2$, $(\vec{\Omega}^*, \vec{r}^* / r^*) = (\vec{\Omega}, \vec{r} / r)$, $\Omega^{*2} = \Omega^2$ очевидны из геометрических соображений и легко могут быть доказаны с помощью (47).

Таким образом, в задачах со сферической симметрией поток Φ должен зависеть от радиальной координаты r и угла ψ между \vec{r} и $\vec{\omega}$:
 $\cos\psi = (\vec{\Omega}, \vec{r}/r) = \sin\vartheta \sin\alpha \cos(\varphi - \beta) + \cos\vartheta \cos\alpha$.

Поэтому

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \frac{\partial\Phi}{\partial\cos\psi} \frac{\partial\cos\psi}{\partial\alpha} = [\sin\vartheta \sin\alpha \cos(\varphi - \beta) - \cos\vartheta \sin\alpha] \frac{\partial\Phi}{\partial\cos\psi}, \quad (49)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = \frac{\partial\Phi}{\partial\cos\psi} \frac{\partial\cos\psi}{\partial\beta} = \sin\vartheta \sin\alpha \sin(\varphi - \beta) \frac{\partial\Phi}{\partial\cos\psi}$$

С учётом (43) и (49) кинетическое уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \cos\psi \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1 - \cos^2\psi}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\cos\psi} + \Sigma(E)\Phi \\ - \int d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma(E)(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E') = S. \end{aligned} \quad (50)$$

Если (48) выполняется при $\vec{\omega} = \vec{e}_z$ (задача с цилиндрической симметрией), то количество инвариантов увеличивается. Кроме $(\vec{\Omega}, \vec{r}/r)$ инвариантными будут параллельные и перпендикулярные к оси OZ составляющие векторов \vec{r} и $\vec{\Omega}$.

В цилиндрических координатах эти инварианты имеют вид:

$$\begin{aligned} (\vec{\Omega}, \vec{r}/r) &= r \sin\vartheta \cos(\alpha - \beta) + z \cos\vartheta, \\ r_n &= z, r_1 = r, \Omega_n = \cos\vartheta, \Omega_1 = \sin\vartheta. \end{aligned}$$

В качестве линейно независимых инвариантов выберем r, z, ϑ и $x = \varphi - \beta$. Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial\beta} = \frac{\partial x}{\partial\beta} \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}$, кинетическое уравнение для задачи с цилиндрической симметрией запишем в виде:

$$\begin{aligned} \sin\vartheta \cos x \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \sin\vartheta \cos x \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \cos\vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \Sigma(E)\Phi - \\ - \int d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E') = S. \end{aligned} \quad (51)$$

В задачах с симметричной геометрией общее число независимых переменных уменьшается; это приводит к упрощению кинетического уравнения. Дальнейшие упрощения уравнения возможны при учёте конкретных особенностей сечений взаимодействия частиц с веществом.

В ряде задач, связанных с расчётом переноса электронов и нейтронов изменение энергии частицы в процессе рассеяния весьма мало. Это значит, что сечение рассеяния может быть записано в виде

$$\Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) = \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})\delta(E - E'). \quad (52)$$

Пусть источник испускает частицы только одной энергии $E = E_0$:

$$S(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = S(\vec{r}, \vec{\Omega})\delta(E - E_0), \quad (53)$$

тогда все частицы будут иметь одну и ту же энергию

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})\delta(E - E_0).$$

Подставляя (52) и (53) в (43) и интегрируя уравнение по E , получаем

$$\vec{\Omega}\nabla\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \int \Sigma(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})d\vec{\Omega}' = S(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (54)$$

Это – *односкоростное (однорупповое) кинетическое уравнение*, называемое так потому, что все частицы в этой модели имеют одну и ту же скорость, соответствующую начальной энергии E_0 (сечения Σ и Σ_s в уравнении (53) также взяты при начальной энергии). Поскольку неизменность энергии влечёт за собой неизменность сечений, рассматриваемое приближение называется ещё *приближением постоянных сечений*.

Дифференциальное сечение рассеяния частиц зависит не от каждого из направлений $\vec{\Omega}'$ и $\vec{\Omega}$ в отдельности, а от угла между ними. Чаще всего, эта зависимость даётся через косинус угла рассеяния $\cos\theta = (\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega})$: $\Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \Sigma_s(\cos\theta)$.

Если рассеяние изотропно в лабораторной системе координат, $\Sigma_s(\cos\theta) = const = \frac{\Sigma_s}{4\pi}$, и уравнение (53) принимает вид

$$\vec{\Omega}\nabla\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \frac{\Sigma_s}{4\pi}\Phi(\vec{r}) = S(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad (55)$$

где $\Phi(\vec{r})$ – полный поток. Односкоростное кинетическое уравнение с изотропным рассеянием часто используется при анализе нейтронных задач.

При рассеянии γ -квантов высокой энергии и неупругом рассеянии электронов наблюдается обратная ситуация: частица теряет заметную долю своей энергии почти не испытывая отклонения. Дифференциаль-

ное сечение рассеяния в этом случае будет содержать δ -функцию по направлениям: $\Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E - E') = \Sigma_s(E' - E)\delta(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$.

Уравнение (43) (в плоской геометрии) принимает вид

$$\cos \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Sigma(E)\Phi - \int \Sigma_s(E' \rightarrow E)\Phi(z, \vec{\Omega}', E')dE' = S(z, \vec{\Omega}, E). \quad (56)$$

Если при этом источник испускает частицы в одном направлении, (например, вдоль оси OZ), то

$$S(\vec{z}, \vec{\Omega}, E) = S(z, E)\delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}'_0) \quad (57)$$

и, следовательно,

$$\Phi(\vec{z}, \vec{\Omega}, E) = \Phi(z, E)\delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}'_0). \quad (58)$$

Подставляя (57) и (58) в (56), интегрируя по $\vec{\Omega}$ и учитывая что $\delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}'_0) = \frac{\delta(1 - \vec{\Omega}\vec{\Omega}'_0)}{2\pi} = \frac{\delta(1 - \cos \vartheta)}{2\pi}$, получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Sigma(E)\Phi - \int \Sigma_s(E' \rightarrow E)\Phi(z, E')dE' = S(z, E). \quad (59)$$

Рассмотренное приближение называется приближением «*прямо-вперед*».

В ряде случаев вместо фазовых координат $\vec{\Omega}$, E оказывается более удобным использовать другие переменные, например импульс частицы. Можно привести ряд других примеров: при исследовании переноса γ -излучения вместо энергии E часто используется длина волны λ :

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{E} = \frac{mc^2}{E}\lambda_k,$$

где $\lambda_k = \frac{2\pi\hbar}{mc}$ – *комptonовская длина волны*.

В нейтронных задачах вместо E вводится переменная u : $u = \ln \frac{E_0}{E}$, называемая *летаргией*. (Энергия E_0 в этом определении произвольна, но обычно она выбирается так, чтобы u всегда было положительным).

Делая указанные преобразования, необходимо иметь в виду, что дифференциальные плотности частиц до и после замены переменных должны быть связаны между собой следующим очевидным соотношением:

$$n(y) = n(x(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (60)$$

Для совокупности переменных $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ величина $\left| \frac{dx}{dy} \right|$ есть якобиан преобразования.

Аналогичным образом преобразуются дифференциальные потоки Φ , плотности источников S и дифференциальные сечения рассеяния. Рассмотрим в качестве примера переход от энергии γ -кванта к его длине волны в уравнении (1.50). В качестве единицы измерения новой переменной примем комптоновскую длину волны, так, что $\lambda = mc^2/E$. Согласно (60)

$$\begin{aligned} \Phi(r, \lambda) &= \Phi(r, E(\lambda)) \frac{mc^2}{\lambda^2}, \\ S(r, \lambda) &= S(r, E(\lambda)) \frac{mc^2}{\lambda^2}, \\ \Sigma_s(\lambda' \rightarrow \lambda) &= \Sigma_s(E'(\lambda') - E(\lambda)) \frac{mc^2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Выражая в уравнении (59) энергию через длину волны умножая обе части уравнения на mc^2/λ^2 и учитывая сделанные преобразования, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Sigma(\lambda)\Phi(z, \lambda) - \int \Sigma_s(\lambda' \rightarrow \lambda)\Phi(z, \lambda')d\lambda' = S(z, \lambda). \quad (61)$$

В этом уравнении $\Phi(z, \lambda)$ означает число квантов, длина волны которых принадлежит единичному интервалу около значения λ . Умножим (61) на $E = mc^2/\lambda$, получаем кинетическое уравнение для энергетического спектра излучения:

$$\frac{\partial I(z, \lambda)}{\partial z} + \Sigma(\lambda)I(z, \lambda) - \int k(\lambda' \rightarrow \lambda)I(z, \lambda')d\lambda' = S_E(z, \lambda). \quad (62)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k(\lambda' \rightarrow \lambda) &= \frac{\lambda'}{\lambda} \Sigma_s(\lambda' \rightarrow \lambda), \\ S_E(z, \lambda) &= \frac{mc^2}{\lambda} S(z, \lambda), \end{aligned}$$

$$I(z, \lambda) = \frac{mc^2}{\lambda} \phi(z, \lambda).$$

Таким образом, выбор подходящих переменных в кинетическом уравнении имеет большое значение. Часто удачный выбор приводит к более слабой зависимости коэффициентов уравнения и его решения от рассматриваемой переменной, что значительно облегчает численные расчёты.

Учет анизотропии рассеяния

Имеется немало задач, в которых сечение рассеяния частиц сильно вытянуто вперёд. Примерами может служить рассеяние γ -квантов высокой энергии или рассеяние электронов.

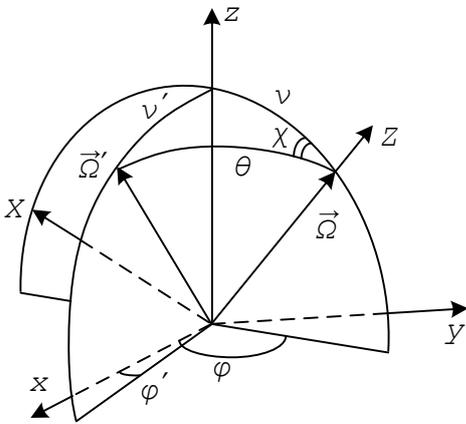


Рис. 17. Преобразование системы координат

В этих случаях интегральный оператор рассеяния в кинетическом уравнении может быть заменён оператором дифференцирования, что значительно упрощает уравнение переноса. Для простоты проведём соответствующие выкладки без учёта потерь энергии при рассеянии. Будем также предполагать, что поток симметричен по азимуту, что имеет место, например, для плоского перпендикулярного источника.

Запишем интеграл столкновений в виде:

$$\widehat{K}\Phi = \int \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \Phi(\vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \quad (63)$$

(переменные \vec{r} и E для краткости опущены). Преобразование интеграла (63) проведём в системе координат, у которой ось OZ направлена по вектору $\vec{\Omega}$, а ось OX лежит в плоскости, проходящей через старую и новую ось OZ . Из рис. 6 видно, что в новой системе координат вектора $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}'$ и \vec{e}_z (ортстарой системы координат) имеют следующие проекции:

$$\vec{\Omega} = \{0, 0, 1\},$$

$$\vec{\Omega}' = \{\sin \theta \cos \chi, \sin \theta \sin \chi, \cos \theta\},$$

$$\vec{e}_z = \{\sin \vartheta, 0, \cos \vartheta\},$$

где через θ и χ обозначены углы, определяющие ориентацию вектора $\vec{\Omega}'$, в новой системе координат. Отсюда следует, что

$$(\vec{\Omega}\vec{\Omega}') = \cos \theta,$$

$$(\vec{e}_z\vec{\Omega}') = \cos \mathcal{G}' = \sin \mathcal{G} \sin \theta \cos x + \cos \mathcal{G} \cos \theta$$

и интеграл столкновений принимает вид:

$$\widehat{K}\Phi = \int_0^{2\pi} dx \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \Sigma_s(\cos \theta) \Phi(\mu'), \quad (64)$$

где для краткости введено обозначение $\mu' = \sin \mathcal{G} \cos x \sin \theta + \cos \mathcal{G} \cos \theta$.

В силу указанной выше особенности сечения $\Sigma_s(\cos \theta)$, поток в интеграле столкновений можно разложить в ряд, ограничиваясь членами второго порядка малости:

$$\Phi(\mu') = \Phi(\mu')_{\theta=0} + \frac{d\Phi(\mu')}{d\theta} \Big|_{\theta=0} + \frac{d^2\Phi(\mu')}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} \frac{\theta^2}{2}. \quad (65)$$

Вычисляя производные

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{d\Phi}{d\mu'} \frac{d\mu'}{d\theta} = \frac{d\Phi}{d\mu'} (-\cos \mathcal{G} \sin \theta + \sin \mathcal{G} \cos x \cos \theta),$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2} = \frac{d^2\Phi}{d\mu'^2} (-\cos \mathcal{G} \sin \theta + \sin \mathcal{G} \cos x \cos \theta)^2 - \frac{d\Phi}{d\mu'} (\cos \mathcal{G} \cos \theta + \sin \mathcal{G} \cos x \sin \theta)$$

и учитывая, что $\mu'_{\theta=0} = \cos \mathcal{G}$, получим

$$\begin{aligned} \Phi(\mu') &= \Phi(\cos \mathcal{G}) + \frac{d\Phi}{d \cos \mathcal{G}} \sin \mathcal{G} \cos x \theta + \\ &+ \left(\frac{d^2\Phi}{d \cos^2 \mathcal{G}} \sin^2 \mathcal{G} \cos^2 x - \frac{d\Phi}{d \cos \mathcal{G}} \cos \mathcal{G} \right) \frac{\theta^2}{2} = \\ &= \Phi(\cos \mathcal{G}) + \theta \frac{d\Phi}{d \cos \mathcal{G}} \sin \mathcal{G} \cos x + \frac{\theta^2}{4} \nabla_{\mathcal{G}}^2 \Phi(\cos \mathcal{G}), \end{aligned} \quad (66)$$

где $\nabla_{\mathcal{G}}^2 = \frac{1}{\sin \mathcal{G}} \frac{d}{d\mathcal{G}} \left(\sin \mathcal{G} \frac{d}{d\mathcal{G}} \right)$ – угловая (по \mathcal{G}) часть оператора Лапласа.

Подставляя разложение (66) в (64) и интегрируя, получим

$$\widehat{K}\Phi = \Sigma_s \left(1 + \frac{\langle \theta^2 \rangle}{4} \nabla_g^2 \right) \Phi(\cos \vartheta),$$

где $\Sigma_s = \int d \cos \theta \int dx \Sigma_s(\cos \theta)$ – сечение рассеяния,

а $\langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{\Sigma_s} \int d \cos \theta \int dx \theta^2 \Sigma_s(\cos \theta)$ – средний квадрат угла рассеяния.

С учётом (65) кинетическое уравнение принимает вид

$$\vec{\Omega} \nabla \Phi + \Sigma_c \Phi - \Sigma_s \frac{\langle \theta^2 \rangle}{4} \nabla_g^2 \Phi = S,$$

где $\Sigma_c = \Sigma - \Sigma_s$ – сечение поглощения частиц.

Транспортное приближение

В случае слабой анизотропии важной величиной характеризующей отклонение закона рассеяния от изотропного является средний косинус рассеяния:

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{\Sigma_s} \int \cos \theta \Sigma_s(\cos \theta) d\vec{\Omega} \quad (67)$$

(для изотропного рассеяния он равен нулю). В этом случае реальное сечение рассеяния $\Sigma_s(\cos \theta)$ может быть заменено приближённой функцией

$$\tilde{\Sigma}_s(\cos \theta) = \Sigma_s \left[\frac{1 - \langle \cos \theta \rangle}{4\pi} + \langle \cos \theta \rangle \frac{\delta(1 - \cos \theta)}{2\pi} \right]. \quad (68)$$

Нетрудно видеть, что интеграл от неё и средний косинус совпадают с точными значениями: $\int \tilde{\Sigma}_s(\cos \theta) d\vec{\Omega} = \Sigma_s$, $\frac{1}{\Sigma_s} \int \cos \theta \tilde{\Sigma}_s(\cos \theta) d\vec{\Omega} = \langle \cos \theta \rangle$.

Физический смысл приближения (68) можно пояснить следующим образом. Реальный закон рассеяния заменяется суперпозицией двух типов рассеяния: с вероятностью $1 - \langle \cos \theta \rangle$ происходит изотропное рассеяние и с вероятностью $\langle \cos \theta \rangle$ – « δ -образное» рассеяние (рассеяние без изменения направления). Подставляя (68) в уравнение (53), получаем

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \sum \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \sum_s \left[\frac{1 - \langle \cos \theta \rangle}{4\pi} \Phi(\vec{r}) - \right. \\ \left. - \langle \cos \theta \rangle \sum_s \int \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}') \frac{\delta(1 - \cos \vartheta)}{2\pi} d\vec{\Omega}' \right] = S(\vec{r}, \vec{\Omega}). \end{aligned} \quad (69)$$

Если угловое распределение мало отличается от изотропного, в разложении (65) подинтегральной функции можно ограничиться лишь первым членом. Учитывая, что $\int \frac{\delta(1 - \cos \vartheta)}{2\pi} d\vec{\Omega} = 1$, получим:

$$\vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + [\sum -\langle \cos \theta \rangle \sum_s] \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \sum_s \frac{1 - \langle \cos \theta \rangle}{4\pi} \Phi(\vec{r}) = S(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (70)$$

Полученное уравнение называется *транспортным приближением*. По форме оно совпадает с уравнением в случае изотропного рассеяния, только роль сечений играют величины $\Sigma_{tr} = \Sigma - \langle \cos \theta \rangle \Sigma_s$ и $\Sigma_{str} = \Sigma_s (1 - \langle \cos \theta \rangle)$, называемые *транспортными сечениями*.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА

Однородная бесконечная среда

Функция грина уравнения переноса

Запишем уравнение переноса в операторной форме

$$\hat{L}\Phi(x) = S(x), \quad (2.1)$$

где $\hat{L} = \vec{\Omega}\nabla - \Sigma(E) + \hat{K}$ – оператор переноса,

$\hat{K}\dots = \int d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E)\dots$ – оператор рассеяния.

Уравнение (2.1) является линейным, поэтому для потока $\Phi(x)$ справедлив принцип суперпозиции, утверждающий, что поле излучения от источника $S = S_1 + S_2 + \dots$ равно сумме полей, создаваемых в данном поглотителе источниками S_i . В связи с этим особый интерес приобретает вычисление дифференциального потока от точечного мононаправленного моноэнергетического источника:

$$S(x) = \delta(x - x') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}')\delta(E - E'). \quad (2.2)$$

Любой другой источник всегда может быть представлен в виде суперпозиции источников (2.2), распределённых в пространстве.

Решение уравнения (2.1) с источником (2.2), т. е. дифференциальный поток в точке x фазового пространства от единичного точечного источника, расположенного в точке x' фазового пространства, обозначают через $G(x, x')$ и называют функцией Грина уравнения (2.1):

$$\hat{L}G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (2.3)$$

Поток от произвольного источника легко может быть выражен через плотность источников $S(x')$ и функцию Грина $G(x, x')$. Действительно, умножим обе части уравнения (2.3) на $S(x')$ и проинтегрируем по x' . Тогда получим

$$\hat{L} \int G(x, x') S(x') dx' = S(x).$$

Сравнивая эту формулу с (2.1), приходим к равенству

$$\Phi(x) = \int G(x, x') S(x') dx', \quad (2.4)$$

которое имеет очевидный физический смысл, если учесть определение функции Грина и плотности источников S .

Для однозначного определения вида функции $G(x, x')$ интегродифференциальное уравнение (2.3) должно быть дополнено граничными условиями. В однородной бесконечной среде это условие имеет вид

$$G(x, x') \rightarrow 0 \text{ при } |\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

В общем случае функция Грина зависит от 12 переменных $(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, \vec{r}', \vec{\Omega}', E')$. В случае однородной бесконечной среды число независимых переменных уменьшается. Перепишем уравнение (2.3) и условие на бесконечности (2.5) в развернутом виде

$$\begin{aligned} (\vec{\Omega}\nabla + \Sigma(E) - \hat{K})G(x, x') &= \delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}')\delta(E - E') \\ G(x, x') &\rightarrow 0 \text{ при } |\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.6)$$

и вместо переменной \vec{r} введём новую переменную $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Замечая, что

$$\nabla = \frac{d}{d\vec{r}} = \frac{d}{d\vec{R}} = \nabla_R, \text{ вместо (2.6) получим}$$

$$\begin{aligned} (\vec{\Omega}\nabla_R + \Sigma(R) - \hat{K})G(\vec{r}' + \vec{R}, \vec{\Omega}, E, \vec{r}', \vec{\Omega}', E') &= \delta(\vec{R})\delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}')\delta(E - E') \\ G(\vec{r}' + \vec{R}, \vec{\Omega}, E, \vec{r}', \vec{\Omega}', E') &\rightarrow 0 \text{ при } |\vec{R}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Полагая в (2.6) $\vec{r}' = 0$ и сравнивая с (2.7), приходим к равенству

$$G(\vec{r}' + \vec{R}, \vec{\Omega}, E, \vec{r}', \vec{\Omega}', E') = G(\vec{R}, \vec{\Omega}, E, 0, \vec{\Omega}', E')$$

справедливому при любом значении \vec{r}' . Отсюда следует, что функция Грина в однородной среде не зависит от \vec{r} или \vec{r}' в отдельности, а зависит лишь от вектора расстояния $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$:

$$G(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, \vec{r}', \vec{\Omega}', E') = G(\vec{r} - \vec{r}', \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}', E'). \quad (2.8)$$

Теперь функция Грина зависит от 9 переменных. Свойство (2.8) отражает инвариантность функции Грина относительно преобразования смещений в однородной среде. Из этого следует возможность перехода от интегрирования функции Грина по координатам источника \vec{r}' к интегрированию по координатам детектора \vec{r}

$$\int_{V'} G dV' = \int_V G dV, \quad (2.9)$$

если объёмы V и V' определены соответствующим образом. С учётом (2.4) это равенство означает, что дифференциальный поток частиц, создаваемый в точке \vec{r} моноэнергетическим мононаправленным источником, распределённым в объёме V' с единичной плотностью, равен интегралу по V от потока, создаваемого точечным источником.

Аналогичным образом можно ввести функции Грина и для всех рассмотренных частных типов кинетического уравнения. При этом остаются в силе общие соотношения (2.1) – (2.4), если под x понимать соответствующий набор переменных.

Диффузионное приближение

Односкоростное кинетическое уравнение при некоторых дополнительных предположениях относительно характера взаимодействия частиц с веществом может быть преобразовано из интегро-дифференциального в дифференциальное уравнение 2-го порядка в частных производных. Интегрируем односкоростное уравнение (1.53) по направлениям. Учитывая, что

$$\int d\vec{\Omega} \int d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}') = \int d\vec{\Omega}' \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}') \int d\vec{\Omega} \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \Sigma_s \Phi(\vec{r})$$

получим

$$\text{div} \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_s \Phi(\vec{r}) = S(\vec{r}), \quad (2.10)$$

где

$$\vec{J}(\vec{r}) = \int \vec{\Omega} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (2.11)$$

– *вектор полного тока частиц*. Физический смысл последней величины легко установить, записав скалярное произведение вектора тока на вектор элементарной площадки:

$$\vec{J} d\vec{s} = ds \int_{(\vec{\Omega}\vec{n}) > 0} (\vec{\Omega}\vec{n}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} - ds \int_{(\vec{\Omega}\vec{n}) < 0} |\vec{\Omega}\vec{n}| \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}.$$

Сравнивая это выражение с (1.2), видим, что проекция \vec{J} на направление \vec{n} даёт результирующее число частиц, пересекающих единичную площадку с нормалью \vec{n} в единицу времени в положительном направлении, причём частицы, движущиеся в отрицательном направлении ($(\vec{\Omega}\vec{n}) < 0$), берутся в этой сумме с отрицательным знаком. В отличие от потока, который характеризует концентрацию частиц, вектор то-

ка характеризует направленность их общего движения. Отметим, что если угловое распределение частиц изотропно, вектор тока равен нулю, в то время как поток может принимать любые значения.

В теории диффузии газов имеет место соотношение между вектором тока \vec{J} и градиентом плотности n газовых молекул:

$$\vec{J}(\vec{r}) = -c\nabla n(\vec{r}), \quad (2.12)$$

называемое *законом Фика*, который утверждает, что ток частиц в некоторой точке \vec{r} направлен в сторону наибольшего убывания плотности частиц и пропорционален скорости этого убывания. В теории диффузии газов закон Фика является точным, он отражает результат хаотического движения молекул и их взаимодействия друг с другом. В теории переноса взаимодействием быстрых частиц между собой обычно пренебрегается, главную роль играет взаимодействие частиц с относительно неподвижными атомами среды. Использование закона Фика в теории переноса является, поэтому приближением, более или менее пригодным в тех случаях, когда поглощение частиц средой относительно мало, а угловое распределение их близко к изотропному. Диффузионное приближение применяется, в основном, в нейтронных задачах.

Выражая в (2.12) плотность частиц через поток $\vec{J}(\vec{r}) = -D\nabla\Phi(\vec{r})$ и подставляя это выражение в (2.10), получаем *стационарное диффузионное уравнение*:

$$-\nabla(D\nabla\Phi(\vec{r})) + \Sigma_c\Phi(\vec{r}) = S(\vec{r}). \quad (2.13)$$

Здесь D – *коэффициент диффузии*, который в случае однородной среды не зависит от координат. Тогда диффузионное уравнение принимает вид

$$-D\nabla^2\Phi(\vec{r}) + \Sigma_c\Phi(\vec{r}) = S(\vec{r}). \quad (2.14)$$

Аналогичным образом записывается *нестационарное уравнение диффузии*

$$\frac{1}{v} \frac{\partial\Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} - D\nabla^2\Phi(\vec{r}, t) + \Sigma_c\Phi(\vec{r}, t) = S(\vec{r}, t). \quad (2.15)$$

Решение диффузионного уравнения (2.14) записывается в виде

$$\Phi(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}') S(\vec{r}') dV', \quad (2.16)$$

где функция Грина $G(\vec{r}, \vec{r}')$ удовлетворяет уравнению

$$-D\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') + \Sigma_c G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.17)$$

и условию на бесконечности

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \rightarrow 0 \text{ при } |\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Можно показать, что функция Грина зависит лишь от вектора расстояния $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, точнее, от модуля этого вектора. При $R \neq 0$ уравнение (2.17) имеет вид

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dG}{dR} \right) - \frac{\Sigma_c}{D} G = 0. \quad (2.19)$$

Введём новую функцию $\chi(R) = RG(R)$ и вместо (2.19) получим уравнение

$$\frac{d^2 \chi}{dR^2} - \frac{\Sigma_c}{D} \chi = 0$$

решения которого имеют вид $\chi(R) = e^{\pm R/L}$, где $L = \sqrt{D/\Sigma_c}$ называется *длиной диффузии*. Следовательно, общее решение уравнения (2.19) запишется в виде

$$G(R) = \frac{1}{R} (Ae^{R/L} + Be^{-R/L}). \quad (2.20)$$

Из условия на бесконечности следует $A = 0$. Для определения B подставим (2.20) в (2.17), проинтегрируем последнее по шару радиуса $R_0 \rightarrow 0$ с центром в точке \vec{r}' и используем теорему Остроградского-Гаусса. В итоге получим $B = 1/4\pi D$

Таким образом, функция Грина диффузионного уравнения имеет вид

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi D |\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-|\vec{r} - \vec{r}'|/L}, \quad (2.21)$$

а поток частиц (2.18) определяется интегралом

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi D} \int \frac{e^{-|\vec{r} - \vec{r}'|/L} S(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (2.22)$$

Метод последовательных столкновений

Вследствие сильной неоднородности и анизотропии потока диффузионное приближение становится неприменимым на малых расстояниях от точечного источника. Важным методом решения кинетического уравнения, в этом случае, является *метод последовательных столкновений*. Рассмотрим его на примере односкоростного уравнения, которое более точно, чем диффузионное, описывает угловое и пространственное распределение рассеянных частиц.

$$\vec{\Omega}\nabla\Phi(\vec{r},\vec{\Omega}) + \Sigma\Phi(\vec{r},\vec{\Omega}) - \int_{\Sigma_s}(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})\Phi(\vec{r},\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}' = S(\vec{r},\vec{\Omega}). \quad (2.23)$$

Умножим Σ_s в этом уравнении на некоторый параметр $\lambda \leq 1$ и представим его решение в виде разложения по степеням λ :

$$\Phi(\vec{r},\vec{\Omega}) = \Phi_0(\vec{r},\vec{\Omega}) + \lambda\Phi_1(\vec{r},\vec{\Omega}) + \lambda^2\Phi_2(\vec{r},\vec{\Omega}) + \dots \quad (2.24)$$

Подставляя (2.24) в уравнение

$$\vec{\Omega}\nabla\Phi + \Sigma\Phi - \lambda \int_{\Sigma_s}(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})\Phi(\vec{r},\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}' = S. \quad (2.25)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получаем последовательность дифференциальных уравнений для отыскания Φ_0 , Φ_1 и других членов разложения:

$$\vec{\Omega}\nabla\Phi_0 + \Sigma\Phi_0 = S \quad (2.26)$$

$$\vec{\Omega}\nabla\Phi_1 + \Sigma\Phi_1 = \int_{\Sigma_s}(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})\Phi_0(\vec{r},\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}' \quad (2.27)$$

$$\vec{\Omega}\nabla\Phi_2 + \Sigma\Phi_2 = \int_{\Sigma_s}(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})\Phi_1(\vec{r},\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}' \quad (2.28)$$

и т. д. Полагая теперь $\lambda = 1$, мы приводим уравнение (2.25) к (2.23), получая вместо (2.24) ряд

$$\Phi(\vec{r},\vec{\Omega}) = \Phi_0(\vec{r},\vec{\Omega}) + \Phi_1(\vec{r},\vec{\Omega}) + \dots \quad (2.29)$$

Таким образом, для определения Φ мы получили последовательность уравнений (2.26) – (2.28), каждое из которых может быть решено лишь в том случае, если решено предыдущее. Первое уравнение, совпадающее с исходным, если в том положить $\Sigma_s = 0$, описывает перенос в среде частиц без рассеяния. В соответствии с этим $\Phi_0(\vec{r},\vec{\Omega})$ представляет поток *нерассеянного излучения*. Второе уравнение описывает толь-

ко перенос частиц в среде без рассеяния, но источником в нём является член $\int \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \Phi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}'$ который, в соответствии с (1.39), описывает однократное рассеяние частиц. Следовательно, $\Phi_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$ есть угловое рассеяние *однократно рассеянных частиц*, $\Phi_2(\vec{r}, \vec{\Omega})$ – распределение *двукратно рассеянных частиц*, и т. д. Ряд (2.29) называется *разложением по порядкам рассеяния*.

Уравнение (2.26) можно преобразовать в обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Заменяя \vec{r} на $\vec{r}' = \vec{r} - \xi \vec{\Omega}$ и учитывая, что

$$\vec{\Omega} \nabla' \Phi_0(\vec{r}', \vec{\Omega}) = -\frac{d}{d\xi} \Phi_0(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \quad (2.30)$$

получаем

$$-\frac{d}{d\xi} \Phi_0(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) + \Sigma \Phi_0(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = S(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}). \quad (2.31)$$

Решение последнего уравнения ищем в виде

$$\Phi_0(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = \Psi(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) e^{\Sigma \xi}.$$

Подставляя это выражение в (2.31), находим уравнение для Ψ :

$$-\frac{d\Psi}{d\xi} = S(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) e^{-\Sigma \xi} \text{ непосредственное интегрирование которого даёт:}$$

$$\Psi(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = \int_{\xi}^{\infty} S(\vec{r} - \xi' \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) e^{-\Sigma \xi'} d\xi' + f(\vec{\Omega}). \quad (2.32)$$

Подставляя (2.32) в (2.31), получим:

$$\Phi_0(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = \int_{\xi}^{\infty} S(\vec{r} - \xi' \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) e^{-\Sigma(\xi' - \xi)} d\xi' + f(\vec{\Omega}) e^{\Sigma \xi}.$$

Из условия конечности истока при $\xi \rightarrow \infty$ следует $f = 0$. Полагая затем $\xi = 0$, находим решение уравнения (2.26):

$$\Phi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_0^{\infty} e^{-\Sigma \xi} S(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) d\xi. \quad (2.33)$$

Экспонента под интегралом описывает ослабление потока частиц на пути из $\vec{r} - \xi \vec{\Omega}$ в \vec{r} . Решения следующих уравнений (2.27), (2.28) и др. можно получить, заменяя S в (2.33) их правыми частями:

$$\Phi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_0^\infty d\xi e^{-\Sigma\xi} \int d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \Phi_0(\vec{r} - \xi\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \quad (2.34)$$

$$\Phi_2(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_0^\infty d\xi e^{-\Sigma\xi} \int d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \Phi_1(\vec{r} - \xi\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \quad (2.35)$$

и т. д. Производя последующее суммирование этих-членов, мы получим, в соответствии с (2.29), решение уравнения (2.23). Суммируя (2.33) – (2.35) и учитывая (2.29), приходим к *интегральному уравнению переноса*, которое наряду с интегро-дифференциальным используется для решения различных задач:

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_0^\infty d\xi e^{-\Sigma\xi} \left[\Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \Phi(\vec{r} - \xi\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' + S(\vec{r} - \xi\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \right]. \quad (2.36)$$

Это уравнение называется *уравнением Пайерлса*.

Разложение потока по сферическим гармоникам

Для решения кинетического уравнения, как и других уравнений математической физики, можно использовать разложение по системе ортогональных функций. Применительно к угловому распределению в качестве такой системы обычно используют сферические функции $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ (названные *сферическими гармониками*). В случае азимутальной симметрии (рассмотрением которой мы и ограничимся) сферические гармоники переходят в *полиномы Лежандра* удовлетворяющие уравнению

$$\nabla_{\vartheta}^2 P_l(\cos \vartheta) \equiv \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\sin \vartheta \frac{dP_l}{d\vartheta}) = -l(l+1)P_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

С помощью полиномов Лежандра любую (достаточно «хорошую») функцию $f(\cos \vartheta)$ можно представить в виде ряда

$$f(\cos \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_l P_l(\cos \vartheta), \quad (2.38)$$

где коэффициенты разложения f_l определяется интегралами

$$f_l = \int f(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta) d\vec{\Omega}, \quad (2.39)$$

которые легко получить, умножая (2.38) на P_l и интегрируя по направлениям с учётом свойства ортогональности.

Проведём разложение по полиномам Лежандра решения односкоростного кинетического уравнения с произвольным законом рассеяния:

$$\begin{aligned} & \cos \vartheta \frac{\partial \Phi(z, \cos \vartheta)}{\partial z} + \Sigma \Phi(z, \cos \vartheta) - \\ & - \int \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \Phi(z, \cos \vartheta') d\vec{\Omega}' = S(z, \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Умножим (2.39) на $P_l(\cos \vartheta)$ и проинтегрируем по углами. Первый член, имеющий вид $\frac{\partial}{\partial z} \int \Phi(z, \cos \vartheta) \cos \vartheta P_l(\cos \vartheta) d\vec{\Omega}$, преобразуем с помощью известных соотношений. Обозначая в дальнейшем производные от коэффициентов $\Phi_l(z)$ штрихом, получим

$$\frac{l+1}{2l+1} \Phi'_{l-1} + \frac{l}{2l+1} \Phi'_{l+1}. \quad (2.40)$$

Второй член записывается в виде

$$\Sigma \Phi_l(z). \quad (2.41)$$

При разложении интеграла столкновений, получаем третий член уравнения в виде

$$-\Sigma_{sl} \Phi_l(z) \quad (2.42)$$

где через Σ_{sl} обозначена трансформанта Лежандра сечения рассеяния:

$$\Sigma_{sl} = \int \Sigma_s(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta) d\vec{\Omega}. \quad (2.43)$$

Вводя аналогичное обозначение для трансформанты источника

$$S_l(z) = \int S(z, \cos \theta) P_l(\cos \theta) d\vec{\Omega} \quad (2.44)$$

и суммируя выражения (2.40), (2.41) и (2.42), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трансформанты потока $\Phi_l(z)$:

$$(l+1)\Phi'_{l-1} + (2l+1)\Sigma_l \Phi_l = (2l+1)S_l, \quad l=0,1,2,\dots \quad (2.45)$$

Здесь $\Sigma_l = \Sigma - \Sigma_{sl}$.

Система этих уравнений теперь может рассматриваться в качестве исходной для определения трансформант потока, вычислив которые, можно восстановить поток по формуле (2.61). Сведение интегро-

дифференциального кинетического уравнения к системе дифференциальных уравнений значительно облегчает решение задачи и является весьма распространённым приёмом в теории переноса различных частиц: нейтронов, электронов, γ -квантов.

P_N -приближения

Уравнения (2.45) образуют бесконечную систему дифференциальных уравнений с бесконечным числом неизвестных. Точное решение этой системы невозможно, однако её можно решить приближённо, ограничившись в разложении (2.38) N первыми членами. Система уравнений в этом случае становится конечной и для её решения могут быть использованы стандартные методы, один из которых мы опишем ниже. Приближение, в котором пренебрегается Φ_{N+1} , называется P_N – приближением.

Низшим из рассматриваемых приближений является P_1 . В этом приближении система уравнений имеет вид

$$\Phi'_0 + \Sigma_0 \Phi_0 = S_0, \quad \Phi'_0 + 3\Sigma_1 \Phi_1 = 3S_1 \quad (2.46)$$

отметим, что в соответствии с (2.43) $\Sigma_0 = \Sigma_c$, $\Sigma_1 = \Sigma_{tr}$.

Источники, в большинстве задач являются изотропными, поэтому

$$S_l = \frac{S(z)}{4\pi} \int P_l(\cos \vartheta) d\bar{\Omega} = S(z) \delta_{l0}. \quad (2.47)$$

В справедливости последнего равенства легко убедиться, положив $l^0 = 0$ и используя условие ортогональности.

Находя из второго уравнения системы (2.46) Φ'_1 и подставляя в первое уравнение, с учётом (2.47) получим:

$$-\frac{1}{3\Sigma_{tr}} \Phi''_0 + \Sigma_l \Phi_0 = S \quad (2.48)$$

$$\Phi_1 = -\frac{1}{3\Sigma_{tr}} \Phi'_0.$$

Сравнивая (2.48) с (2.14) видим, что первое уравнение является диффузионным (в плоской задаче), причём коэффициент диффузии связан с сечениями взаимодействия соотношением

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} = \frac{1}{3(\Sigma - \langle \cos \theta \rangle \Sigma_s)}. \quad (2.49)$$

Решение имеет вид

$$\Phi_0(z) = \frac{L}{2D} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z-z'|/L} S(z') dz', \quad (2.50)$$

где D определено формулой (2.49), а длина диффузии $L = \sqrt{D/\Sigma_S}$

Подставляя (2.50) во второе уравнение системы (2.48), находим выражение для Φ_1 :

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z-z'|/L} \text{sign}(z-z') S(z') dz', \quad (2.51)$$

где $\text{sign}(z-z') = \begin{cases} 1, z > z' \\ -1, z < z' \end{cases}$

Вычислив нулевую и первую трансформанту потока, можно восстановить угловое распределение по формуле (2.38), которая в P_1 приближении имеет вид

$$\Phi(z, \cos \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \Phi_0(z) + \frac{3}{4\pi} \Phi_1(z) \cos \vartheta. \quad (2.52)$$

Отметим, что согласно формулам (1.30) и (2.11), Φ_0 и Φ_1 представляют собой полный поток и проекцию вектора тока на ось OZ соответственно.

Рассмотрим теперь общий случай P_N -приближения. Предположим, для простоты, что рассматриваемая область среды не содержит источников. Система (2.45) в таком случае является однородной:

$$\begin{aligned} (l+1)\Phi'_{l-1} + l\Phi'_{l-1} + (2l+1)\Sigma_l \Phi_l &= 0, \quad l=0,1,2,\dots,N-1 \\ N\Phi'_{N-1} + (2N+1)\Sigma_N \Phi_N &= 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение этой системы записывается в виде

$$\Phi_l(z) = \sum_i c_i A_l(n_i) e^{k_i z}. \quad (2.54)$$

Здесь k_i – корни характеристического уравнения системы (2.53), коэффициенты A_l удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} (l+1)kA_{l+1} + lkA_{l-1} + (2l+1)\Sigma_l A_l &= 0, \quad l=0,1,2,\dots,N-1 \\ NkA_{k-1} + (2N+1)\Sigma_N A_N &= 0 \end{aligned}$$

постоянные c_i определяются граничными условиями. Предположим для определённости, что источник находится «слева» от рассматриваемой области, Тогда $\Phi(z \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, поэтому для всех положительных k_i коэффициенты c_i будут равны нулю. Остальные коэффициенты будут определяться свойствами источников.

Подставляя найденные таким образом трансформанты (2.54) в формулу (2.38), можно восстановить угловое распределение частиц.

Важно отметить, что сходимость P_N -приближения определяется характером решаемой задачи. Если искомое угловое распределение близко к изотропному, часто оказывается достаточным P_1 -приближение. С увеличением N точность метода повышается, но при этом растёт объём вычислений. В случае сильной анизотропии потока, которая имеет место, например, когда источник является направленным, а дифференциальное сечение рассеяния сильно вытянуто «вперёд», P_N – приближение сходится плохо.

Деградация энергии

Ранее рассматривалось угловое рассеяние частиц в различных точках пространства. Обратимся теперь к вопросу энергетического распределения частиц в однородной среде. Простейшей задачей такого типа является *деградация энергии* – расчёт энергетического распределения (спектра) частиц в однородной среде с равномерно распределёнными источниками. Интегрируя (1.46) по направлениям, получаем исходное уравнение

$$\Sigma(E)\Phi(E) - \int_E^{E_0} \Sigma_s(E' \rightarrow E)\Phi(E')dE' \approx S(E). \quad (2.55)$$

Рассмотрим численный метод решения интегрального уравнения (2.55), применимый к задачам с различной зависимостью Σ и Σ_s от энергии.

Расчёт спектра начинается с самой «верхней» энергии $E = E_0$, соответствующей максимальной энергии частиц, испускаемой источником. При $E = E_0$ интегральный член исчезает, и мы получаем

$$\Phi(E_0) = \frac{S(E_0)}{\Sigma(E_0)}. \quad (2.56)$$

Для продолжения расчёта разобьём область изменения энергетической переменной $(0, E_0)$ на N интервалов (в общем случае неравных)

и обозначим нижние границы соответствующими индексами:
 $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots, E_N = 0$.

Выражение (2.55) для этих точек имеет вид

$$\Sigma(E_n)\Phi(E_n) - \int_{E_n}^{E_0} \Sigma_s(E' \rightarrow E_n)\Phi(E')dE' \approx S(E_n). \quad (2.57)$$

Идея метода состоит в замене интеграла в (2.57) суммой конечного числа членов в соответствии с формулами численного интегрирования. Такая замена превращает исходное интегральное уравнение в систему алгебраических уравнений, решаемых элементарно.

Для вычисления спектра в точке E_1 мы используем простейший способ численного интегрирования – формулу трапеций:

$$\begin{aligned} & \int_{E_1}^{E_0} \Sigma_s(E' \rightarrow E_1)\Phi(E')dE' = \\ & = \frac{E_0 - E_1}{2} [\Sigma_s(E_1 \rightarrow E_1)\Phi(E_1) + \Sigma_s(E_0 \rightarrow E_1)\Phi(E_0)]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Полагая в (2.57) $n=1$, подставляя туда (2.58) и разрешая полученное алгебраическое уравнение относительно $\Phi(E_1)$, находим

$$\Phi(E_1) = \frac{(E_0 - E_1)\Sigma_s(E_0 \rightarrow E_1)\Phi(E_0) + 2S(E_1)}{2\Sigma(E_1) - (E_0 - E_1)\Sigma_s(E_1 \rightarrow E_1)}. \quad (2.59)$$

Формула трапеций может быть использована, в принципе, и на следующих этапах расчёта, однако там появляется возможность использования более точных квадратурных формул типа Симпсона, Уэддла и др. Любой из этих методов превращает интеграл столкновений в сумму:

$$\begin{aligned} & \int_{E_n}^{E_0} \Sigma_s(E' \rightarrow E_n)\Phi(E')dE' = \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} \Sigma_s(E_k \rightarrow E_n)\Phi(E_k)M_{kn} + \Sigma_s(E_n \rightarrow E_n)\Phi(E_n)M_{nn}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

где M_{kn} – коэффициенты, соответствующие применяемой формуле. Подставляя (2.60) в общую формулу (2.57) для произвольного n получим:

$$\Phi(E_n) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \Sigma_s(E_k \rightarrow E_n)\Phi(E_k)M_{kn} + S(E_n)}{\Sigma(E_n) - \Sigma_s(E_n \rightarrow E_n)\Phi(E_n)M_{nn}}, \quad n > 2. \quad (2.61)$$

Для вычисления спектра в точке n по этой формуле требуется знать значения $\Phi(E)$ в n предыдущих точках: E_0, E_1, \dots, E_n . Переходя последовательно от n к $n+1$ точке, можно найти спектр во всех точках и, тем самым, решить поставленную задачу.

Как и в других численных методах, с увеличением N точность расчёта повышается, но в то же время возрастает объём вычислений. Выбор числа энергетических интервалов в каждом конкретном случае определяется поведением сечений Σ и Σ_s , и предполагаемым видом спектра. Наличие каких-либо особенности и разрывов в спектре ухудшает точность расчётов, и их необходимо учитывать в процессе разработки алгоритма и выбора точек движения.

Приближение непрерывного замедления

При каждом столкновении с атомами среды частица теряет энергия скачком, поэтому её «траектория» в координатах пробег-энергия имеет вид ступенчатой функции (рис. 5), горизонтальные участки которой соответствуют пробегам между двумя столкновениями.

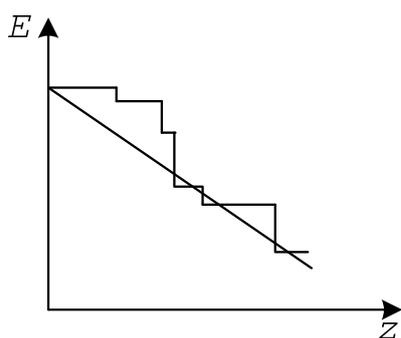


Рис. 18. «Траектория» частицы в координатах пробег-энергия

Траектории различных частиц, вообще говоря, будут отличаться друг от друга вследствие статистического характера процесса блужданий. Но если потери энергии в каждом столкновении невелики, то эти траектории будут довольно близкими друг к другу и мало отличаться от некоторой средней линии, которая соответствует непрерывному изменению E . Именно такая ситуация имеет место при замедлении нейтронов в среде, состоящей из тяжёлых ядер и при торможении электронов не слишком высоких энергий.

Кинетическое уравнение для этих случаев может быть существенно упрощено. Проведём соответствующее преобразование для плоской геометрии, используя приближение «прямо-вперёд».

В этом случае кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \Phi(z, E)}{\partial z} + \Sigma(E)\Phi(z, E) - \int \Sigma_s(E' \rightarrow E)\Phi(z, E')dE' = S(z, E). \quad (2.62)$$

Представим коэффициент ослабления в виде $\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_c$ и рассмотрим отдельно два члена уравнения:

$$\Sigma(E)\Phi(z, E) - \int \Sigma_s(E' \rightarrow E)\Phi(z, E')dE'. \quad (2.63)$$

Сечение рассеяния $\Sigma_s(E)$ представим в виде $\Sigma_s(E) = \int \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE'$ и перепишем (2.63):

$$\int_{E-Q_{MAX}}^E \Sigma_s(E \rightarrow E') \Phi(z, E) dE' - \int_E^{E'-Q_{MAX}} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \Phi(z, E') dE'.$$

В первом члене сделаем замену переменных $E - E' = Q$ и он перейдёт в

$$\int_0^{Q_{MAX}} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \Phi(z, E') dE' (E \rightarrow E - Q) \Phi(z, E) dQ. \quad (2.64)$$

Второй интеграл после замены переменных $E' - E = Q$ преобразуется к виду

$$- \int_0^{E'_{MAX}} \Sigma_s(E + Q \rightarrow E) \Phi(z, E + Q) dQ. \quad (2.65)$$

Обозначим через $\Sigma_Q(Q, E)$ дифференциальное по переданной энергии Q сечение рассеяния частиц с энергией E и учтём, что $\Sigma_s(E_1 \rightarrow E_2) = \Sigma_Q(E_1 - E_2; E_1)$.

Тогда сумма выражений (2.64) и (2.65) запишется в виде

$$\int_0^{Q_{MAX}} \Sigma_Q(Q, E) \Phi(z, E) dQ - \int_0^{E'_{MAX}-E} \Sigma_Q(Q, E + Q) \Phi(z, E + Q) dQ.$$

Если Σ_Q быстро убывает с ростом Q и столкновениями с передачей энергии $Q > \eta$ можно пренебречь, то оба интеграла можно объединить в один:

$$- \int_0^{\eta} [\Sigma_Q(Q, E + Q) \Phi(z, E + Q) - \Sigma_Q(Q, E) \Phi(z, E)] dQ.$$

Раскладывая первый член подинтегрального выражения в ряд по степеням, получим

$$- \int_0^{\eta} \frac{\partial}{\partial E} [\Sigma_Q(Q, E) \Phi(z, E)] Q dQ = - \frac{\partial}{\partial E} \left[\Phi(z, E) \int_0^{\eta} Q \Sigma_Q(Q, E) dQ \right].$$

Величина $\int_0^{\eta} Q \Sigma_Q(Q, E) dQ$ представляет собой *среднюю потерю энергии на единице длины пути (тормозная способность)*, которую мы будем обозначать $\beta(E)$. Тогда кинетическое уравнение (2.62) примет вид

$$\frac{\partial \Phi(z, E)}{\partial z} + \Sigma_c(E) \Phi(z, E) - \frac{\partial}{\partial E} [\beta(E) \Phi(z, E)] = S(z, E), \quad (2.66)$$

в котором интеграл столкновений выражен через производную по энергии от произведения $\beta\Phi$.

Такое приближение называется *приближением непрерывного замедления (непрерывных потерь энергии)*.

Рассмотри теперь энергетическое распределение частиц в данном приближении. В уравнении (2.66) вместо энергии введём новую переменную

$$t = \int_E^{E_0} \frac{dE}{\beta(E)} \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, t) + \Sigma_c(t) \Phi(z, t) + \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) = S(z, t) \quad (2.103) \quad (2.68)$$

Где

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \beta(E(t)) \Phi(z, E(t)) \\ S(z, t) &= \beta(E(t)) S(z, E(t)) \\ \Sigma_c(t) &= \Sigma_c(t)(E(t)). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Дальнейшее упрощение уравнения (2.68) достигается подстановкой

$$\Phi(z, t) = \Psi(z, t) e^{-\int_0^t \Sigma_c(t') dt'} \quad (2.70)$$

где

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = q(z, t) \quad (2.71)$$

$$q(z, t) = S(z, t) e^{\int_0^t \Sigma_c(t') dt'}. \quad (2.72)$$

Найдём решение уравнения (2.71) для плоского моноэнергетического источника $S(z, E) = \delta(z) \delta(E - E_0)$. Для такого источника согласно (2.69) и (2.72)

$$q(z, t) = \delta(z) \beta(\varepsilon(t)) e^{\int_0^t \Sigma_c(t') dt'} \delta(E(t) - E_0),$$

где $E(t)$ определяется соотношением (2.67).

$$\text{Используя известное свойство } \delta - \text{ функции } \delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}}$$

где x_i – корни уравнения $f(x) = 0$, получим $\delta(E(t) - E_0) = \frac{1}{\beta(E_0)} \delta(t)$ т. к.

$E(t) = E_0$ лишь при $t = 0$. Учтём, далее, что $f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \delta(x - x_0)$ и найдём

$$q(z, t) = \delta(z) \delta(t), \quad (2.108)$$

т. е. уравнение для функции Ψ имеет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \delta(z) \delta(t). \quad (2.74)$$

Это уравнение можно свести к однородному:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \quad (2.75)$$

с граничным условием

$$\Psi(0, t) = \delta(t). \quad (2.76)$$

Переходя в (2.75) к новым переменным $\xi = t - z$, $\eta = t$ легко показать, что t и z могут входить в Ψ только в виде разности $t - z$ – $\Psi(z, t) = \Psi(t - z)$.

Устремим в этом равенстве z к нулю, учтём (2.76) и получим $\delta(t) = \Psi(t)$, поэтому

$$\Psi(z, t) = \delta(t - z). \quad (2.77)$$

Из (2.69), (2.70) и (2.77), найдём

$$\Phi(z, E(t)) = \frac{1}{\beta(E(t))} e^{-\int_0^t \Sigma_c(t') dt'} \delta(t - z).$$

Возвращаясь к переменной E с помощью (2.67), получим

$$\Phi(z, E) = \frac{1}{\beta(E)} e^{-\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_c(E)}{\beta(E)} dE} \delta\left(\int_E^{E_0} \frac{dE}{\beta(E)} - z\right) \quad (2.78)$$

δ -функция в этой формуле говорит о том, что энергия частиц однозначно связана с пройденным путём соотношением $z = \int_E^{E_0} \frac{dE}{\beta(E)}$ т. е. они непрерывно тормозятся в среде, и потери энергии на единице пути равны $\beta(E)$. Экспоненциальный множитель определяет вероятность избежать поглощения на пути z , т. е. при торможении от энергии E_0 до E .

Метод групп

Для расчёта прохождения частиц через вещество с учётом энергетической зависимости сечений широко применяется *метод групп* (*многогрупповая теория*). Энергетическая переменная в этом методе разбивается на N , вообще говоря, неравных интервалов. Соответствующим образом все частицы разбиваются на N групп; частица принадлежит i -й группе, если её энергия E удовлетворяет условию

$$E_{i-1} < E < E_i. \quad (2.79)$$

Основным допущением многогруппового приближения является предположение о том, что все частицы одной группы взаимодействуют со средой одинаково, иными словами, сечения взаимодействий внутри каждого энергетического интервала считаются постоянными:

$$\begin{aligned} \Sigma(E) &= \Sigma_i \text{ для } E_{i-1} < E < E_i \\ \Sigma_s(E) &= \Sigma_{si}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Разумеется, замена реальных сечений кусочно-постоянными функциями (2.80) приводит к некоторой ошибке, величина которой быстро убывает с увеличением числа групп. В ряде случаев удачным выбором *групповых констант* Σ_i и Σ_{si} можно обеспечить хорошую точность и при малом числе групп – двух, или даже одной. Соответствующие приближения называются двухгрупповым и одногрупповым методами.

Рассмотрим кинетическое уравнение в случае, когда угловое распределение рассеиваемых при одном столкновении частиц не зависит энергии рассеянных частиц и является изотропным, Дифференциальное сечение рассеяния в этом случае имеет вид

$$\Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) = \frac{1}{4\pi} \Sigma_s(E' \rightarrow E). \quad (2.81)$$

Будем далее считать, что переменные E и E' могут пробегать все значения от 0 до $E_{\max} = E_N$, причём

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E) = 0 \quad \text{для } E' < E \quad (2.82)$$

Учитывая (2.81) и (2.82), запишем кинетическое уравнение в плоскопараллельной геометрии:

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Sigma \Phi - \frac{1}{2} \int_0^{E_N} dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \int_{-1}^{+1} d\mu' \Phi(z, \mu', E') = S(z, \mu, E), \quad (2.83)$$

$$\mu = \cos \vartheta$$

и проинтегрируем его по энергии в пределах i -й группы. Вводя обозначения $\int_{E_{i-1}}^{E_i} \Phi(z, \mu, E) dE = \Phi_i(z, \mu)$ и $\int_{E_{i-1}}^{E_i} S(z, \mu, E) dE = S_i(z, \mu)$ и учитывая

(2.80), вместо (2.83) получим

$$\mu \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} + \Sigma_i \Phi_i - \frac{1}{2} \int_0^{E_N} dE' \left[\int_{E_{i-1}}^{E_i} \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE \right] \int_{-1}^{+1} d\mu' \Phi(z, \mu', E') = S_i(z, \mu). \quad (2.84)$$

Для приведения многогрупповой системы уравнений к окончательному виду, необходимо сделать ещё одно допущение: по аналогии с (2.80) будем считать, что зависимость множителя в квадратный скобках от энергии носит так же ступенчатый характер:

$$\int_{E_{i-1}}^{E_i} \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE = \Sigma_s(j \rightarrow i) \quad \text{для } E_{j-1} < E' < E_j. \quad (2.85)$$

Подставляя (2.85) в (2.83) и интегрируя в этом члене по E' , приходим к следующей системе уравнений относительно Φ_i :

$$\mu \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} + \Sigma_i \Phi_i - \frac{1}{2} \sum_j \Sigma_s(j \rightarrow i) \int_{-1}^{+1} \Phi_i(z, \mu') d\mu' = S_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2.86)$$

Уравнения (2.86) образуют основную систему уравнений многогрупповой теории, для решения которой могут быть использованы различные численные методы. Для этого систему уравнений (2.86) удобно переписать в матричной форме:

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Sigma \Phi - \frac{1}{2} \Sigma_s \int_{-1}^{+1} \Phi(z, \mu') d\mu' = S(z, \mu), \quad (2.87)$$

где $\Phi(z, \mu) = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix}$ и $S(z, \mu) = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix}$ – N -мерные векторы, а

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_N \end{pmatrix}, \quad \Sigma_s = \begin{pmatrix} \Sigma_s(1 \rightarrow 1) & \Sigma_s(2 \rightarrow 1) & \Sigma_s(N \rightarrow 1) \\ 0 & \Sigma_s(2 \rightarrow 2) & \Sigma_s(N \rightarrow 2) \\ 0 & \dots & \Sigma_s(N \rightarrow N) \end{pmatrix}$$

– квадратные матрицы N -го порядка. Диагональность матрицы Σ следует из второго члена уравнений (2.86), матрица Σ_s является треугольной вследствие условия (2.82).

Формально уравнение (2.87) совпадает с соответствующим односкоростным уравнением. Единственное отличие состоит в том, что коэффициенты теперь представляются не обычными числами, а матрицами, а дифференциальный поток представлен вектор-функцией Φ аргументов z и μ . Такая же аналогия наблюдается и в решении этого уравнения. Рассмотрим асимптотическое поведение потока в среде без источников:

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Sigma \Phi(z, \mu) - \frac{1}{2} \Sigma_s \int_{-1}^{+1} \Phi(z, \mu') d\mu' = 0. \quad (2.88)$$

Решение этого уравнения удобно искать в виде

$$\Phi(z, \mu) = e^{-\kappa z} f(\mu). \quad (2.89)$$

Подставив (2.89) в (2.88), получим уравнение:

$$(\Sigma - \kappa \mu) f(\mu) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} f(\mu') d\mu' \quad \text{или}$$

$$f(\mu) = \frac{1}{\Sigma - \kappa \mu} \frac{\Sigma_s}{2} B, \quad (2.90)$$

где B определяется интегралом $B = \int_{-1}^{+1} f(\mu') d\mu'$.

Интегрируя (2.90) по μ , получаем уравнение для вектора B , которое можно записать в виде

$$\left(1 - \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{\Sigma + \kappa}{\Sigma - \kappa} \Sigma_s\right) B = 0. \quad (2.91)$$

Поскольку Σ является не числом, а матрицей; логарифмический член здесь следует понимать, как разложение:

$$\ln \frac{\Sigma + \kappa}{\Sigma - \kappa} = 2 \left[\kappa \Sigma^{-1} + \frac{1}{3} (\kappa \Sigma^{-1})^3 + \dots \right],$$

где Σ^{-1} – матрица, обратная Σ .

Уравнение (2.91) имеет нетривиальное решение, если

$$\left| 1 - \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{\Sigma + \kappa}{\Sigma - \kappa} \right| = 0.$$

Из этого уравнения можно найти допустимые значения κ_n . Подставляя их в (2.91), можно найти B_n и получить f_n по формуле (2.90). Таким образом, общее решение уравнения (2.88) имеет вид

$$\Phi(z, \mu) = \sum_{n=1}^N e^{-\kappa_n z} \frac{1}{\Sigma - \kappa_n \mu} \frac{\Sigma_s}{2} B_n. \quad (2.92)$$

Легко видеть, что в частном случае $N = 1$ (2.92) переходит в найденный ранее результат асимптотического решения уравнения переноса

$$\Phi(z, \mu) = C \frac{\Sigma_s}{\Sigma - \kappa \mu} e^{-\kappa z}. \quad (2.93)$$

Ограниченные и неоднородные среды

Граничные условия

В предыдущей главе были описаны методы решения уравнения переноса в однородной бесконечной среде. Но бесконечная и однородная среда является лишь приближённой моделью реального поглотителя, который всегда ограничен и почти всегда неоднороден. Именно такой случай ограниченной и неоднородной среды представляет практический интерес в теории реакторов, в физике защиты, дозиметрии, и в других проблемах, связанных с применением ядерных излучений.

Наличие границ и других неоднородностей: значительно усложняет решение кинетического уравнения. В неоднородной среде сечения взаимодействия Σ и Σ_s зависят от пространственной переменной \vec{r} , и стационарное кинетическое уравнение принимает вид

$$\vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) + \Sigma(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) - \int d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E') = S(\vec{r}, \vec{\Omega}, E). \quad (2.94)$$

Часто бывает удобным решить уравнение (2.94) не во всём пространстве, а в некоторой его области, границы которой совпадают, например, с естественными границами рассматриваемой системы или её части. Особенно это удобно тогда, когда весь поглотитель состоит из нескольких однородных частей, отличающихся друг от друга химическим составом. В этом случае уравнение (2.94) можно решить в каждой из областей, используя для этого описанные ранее методы решения задачи в однородной среде. Поскольку (2.94) уравнение интегро-дифференциальное, каждое из найденных решений будет содержать постоянные интегрирования (зависящие от $\vec{\Omega}$ и E). Для определения этих постоянных необходимо задать *граничные условия*.

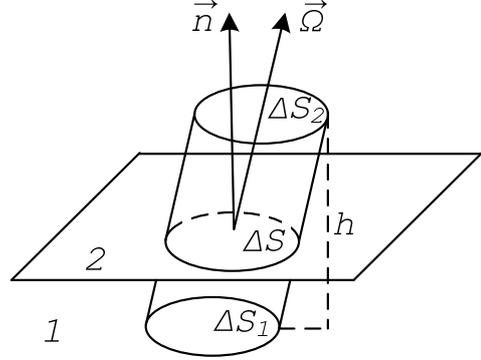


Рис. 19. Граничные условия

Рассмотрим поток частиц с направлением $\vec{\Omega}$ и энергией E вблизи границы между областями 1 и 2. Выделим на граничной поверхности элементарную площадку ΔS и построим около неё элементарный цилиндр с высотой h и образующей, параллельной $\vec{\Omega}$ (рис. 18). Проинтегрируем уравнение (2.94) по объёму этого цилиндра и преобразуем первый член по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\Phi(\vec{\Omega} \vec{n}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dS + \int_{\Delta V} \Sigma(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dS - \int_{\Delta V} dV \int d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E') = \int_{\Delta V} S(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dV. \quad (2.95)$$

На боковой поверхности цилиндра $(\vec{\Omega} \vec{n}) = 0$, и интеграл по замкнутой поверхности сведётся к $\int_{\Delta S_1} (\vec{\Omega} \vec{n}_1) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dS + \int_{\Delta S_2} (\vec{\Omega} \vec{n}_2) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dS$, где dS_1 и dS_2 – первое и второе основания цилиндра, \vec{n}_1 и \vec{n}_2 – нормали к этим площадкам. Будем считать, что dS и h настолько малы, что в левой части (2.95) при интегрировании по пространственным переменным можно применить теорему о среднем:

$$(\vec{\Omega}\vec{n}_1)\Phi_1(\vec{r},\vec{\Omega},E)\Delta S_1 - (\vec{\Omega}\vec{n}_2)\Phi_2(\vec{r},\vec{\Omega},E)\Delta S_2 + \Delta S \cdot h \cdot \Sigma(\vec{r},E)\Phi(\vec{r},\vec{\Omega},E) - \Delta S \cdot h \cdot \int d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(\vec{r},\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E)\Phi(\vec{r},\vec{\Omega}',E') = \int_{\Delta V} S(\vec{r},\vec{\Omega},E)dV.$$

Здесь Φ_1 и Φ_2 – значения потока на первом и втором основаниях цилиндра. Устремляя $h \rightarrow \infty$ и учитывая, что Σ , Σ_s и Φ – конечные величины, а $n_2 = -n_1 = n$ (нормаль к границе раздела), получаем

$$(\vec{\Omega}\vec{n}) \left[\Phi_2(\vec{r},\vec{\Omega},E) - \Phi_1(\vec{r},\vec{\Omega},E) \right] \Delta S = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\Delta V} S(\vec{r},\vec{\Omega},E)dV. \quad (2.96)$$

Если распределение источников $S(\vec{r},\vec{\Omega},E)$ не имеет особенностей в ΔV , то правая часть этого равенства равна нулю, и

$$(\vec{\Omega}\vec{n}) \left[\Phi_2(\vec{r},\vec{\Omega},E) - \Phi_1(\vec{r},\vec{\Omega},E) \right] = 0. \quad (2.97)$$

Граничное условие (2.97) имеет очевидный физический смысл неизменности числа частиц с параметрами $\vec{\Omega}$, E по обе стороны от границы раздела, если две среды находятся в непосредственном соприкосновении.

Если на границе двух сред имеется поверхностный источник с поверхностной плотностью $\sigma(\vec{r},\vec{\Omega},E)$ $S(\vec{r},\vec{\Omega},E) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_s)\sigma(\vec{r},\vec{\Omega},E)$ то $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Delta V} S(\vec{r},\vec{\Omega},E)dV = \Delta S \sigma(\vec{r},\vec{\Omega},E)$ и условие на границе примет вид

$$(\vec{\Omega}\vec{n}) \left[\Phi_2(\vec{r},\vec{\Omega},E) - \Phi_1(\vec{r},\vec{\Omega},E) \right] = \sigma(\vec{r},\vec{\Omega},E). \quad (2.98)$$

Важную роль в расчётах играет *внешняя граница системы* – неогннутая замкнутая поверхность, содержащая в себе область пространства, в которой ищется поле излучения. Если извне на эту поверхность частицы не попадают, то она называется *свободной*. Из (2.97) и (2.98) следует, что дифференциальный поток на такой поверхности удовлетворяет условиям:

$$\Phi(\vec{r}_s,\vec{\Omega},E) = 0, \quad (\vec{\Omega}\vec{n}) < 0 \quad (2.99)$$

если поверхностные источники отсутствуют, и

$$\Phi(\vec{r}_s,\vec{\Omega},E) = \frac{\sigma(\vec{r}_s,\vec{\Omega},E)}{(\vec{\Omega}\vec{n})}, \quad (\vec{\Omega}\vec{n}) < 0 \quad (2.100)$$

если на границе имеется поверхностный источник с плотностью $\sigma(\vec{r},\vec{\Omega},E)$.

Интегральное уравнение переноса в неоднородной среде

Для изложения методов расчёта прохождения частиц через неоднородную среду уравнение (2.94) удобно преобразовать в интегральное. Обозначая для простоты записи,

$$\int d\bar{\Omega}' \int dE' \int \Sigma_s(\vec{r}, \bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r}, \bar{\Omega}', E') + S(\vec{r}, \bar{\Omega}, E) = \tilde{S}(\vec{r}, \bar{\Omega}, E), \quad (2.101)$$

заменяя \vec{r} из $\vec{r} - \xi \bar{\Omega}$ и представляя градиентный член в виде (2.30), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{d\Phi(\vec{r} - \xi \bar{\Omega}, \bar{\Omega}, E)}{d\xi} + \Sigma(\vec{r} - \xi \bar{\Omega}, E) \Phi(\vec{r} - \xi \bar{\Omega}, \bar{\Omega}, E) = \tilde{S}(\vec{r} - \xi \bar{\Omega}, \bar{\Omega}, E). \quad (2.102)$$

Мы будем рассматривать лишь область, занятую неоднородной средой, полагая, что на внешней границе заданы условия

$$\Phi(\vec{r}_0, \bar{\Omega}, E) = f(\vec{r}_0, \bar{\Omega}, E), \quad (\bar{\Omega} \bar{n}) < 0. \quad (2.103)$$

В соответствии с этим переменная ξ будет изменяться от 0 до ξ_0 определяемого уравнением $\vec{r} - \xi \bar{\Omega} = \vec{r}_0$. ξ_0 есть расстояние от точки \vec{r} до внешней границы в направлении, обратном $\bar{\Omega}$, поэтому $\xi_0 = \xi(\vec{r}, \bar{\Omega})$. Поскольку $\vec{r}, \bar{\Omega}$ и E входят в уравнение (2.102) как параметры, мы их временно опустим. Обозначая производную по ξ штрихом, перепишем уравнение (2.102)

$$-\Phi'(\xi) + \Sigma(\xi) \Phi(\xi) = \tilde{S}(\xi) \quad (2.104)$$

$$\text{с граничным условием } \Phi(\xi_0) = f \quad (2.105)$$

Предположим теперь, что правая часть уравнения (2.104) нам известна и приступим к его решению. Решение (2.104) следует искать в виде

$$\Phi(\xi) = \Psi(\xi) e^{\int_{\xi_0}^{\xi} \Sigma(\xi') d\xi'}. \quad (2.106)$$

Подставляя (2.106) в (3.104) и интегрируя по ξ от произвольного значения до ξ_0 , получаем

$$\Psi(\xi) = \Psi(\xi_0) + \int_{\xi}^{\xi_0} e^{\int_{\xi}^{\xi'} \Sigma(\xi') d\xi'} \tilde{S}(\xi') d\xi'. \quad (2.107)$$

Из (2.105) – (2.107) следует выражение для потока

$$\Phi(\xi) = f * e^{-\int_0^{\xi} \Sigma(\xi') d\xi'} + \int_{\xi}^{\xi_0} e^{-\int_0^{\xi'} \Sigma(\xi') d\xi'} \tilde{S}(\xi') d\xi'.$$

Возвращаясь к прежним переменным $\vec{r}, \vec{\Omega}, E$ и полагая, $\xi = 0$ получим

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) &= f(\vec{r} - \xi_0 \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E) e^{-\tau(E, \vec{r}, \vec{r} - \xi_0 \vec{\Omega})} + \\ &+ \int_0^{\xi_0} e^{-\tau(E, \vec{r}, \vec{r} - \xi \vec{\Omega})} \tilde{S}(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E) d\xi, \end{aligned} \quad (2.108)$$

где $\tau(E, \vec{r}, \vec{r} - \xi_0 \vec{\Omega}) = \int_0^{\xi_0} \Sigma(\vec{r} - \xi' \vec{\Omega}, E) d\xi'$ – величина, называемая *оптическим расстоянием* между точками \vec{r} и $\vec{r}' = \vec{r} - \xi \vec{\Omega}$ для частиц с энергией E .

Учитывая, что $e^{-\tau}$ описывает ослабление пучка частиц за счёт процессов поглощения и рассеяния, нетрудно дать физическую интерпретацию выражению (2.108): дифференциальный поток в точке \vec{r} равен сумме потоков частиц, пришедших непосредственно с внешней границы и из точек, находящихся внутри рассматриваемого объёма. Из выражения (2.101) видно, что внутри объёма частицы появляются вследствие внутренних источников, плотность которых даётся функцией S , и в результате тех актов рассеяния, после которых частицы имеют направление $\vec{\Omega}$ и энергию E .

Подставляя (2.101) в (2.108), получаем общее интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) &= \Phi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) + \\ &+ \int_0^{\xi_0} d\xi e^{-\tau(E, \vec{r}, \vec{r} - \xi \vec{\Omega})} \int d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}', E'), \end{aligned} \quad (2.109)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) &= f(\vec{r} - \xi_0 \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E) e^{-\tau(E, \vec{r}, \vec{r} - \xi_0 \vec{\Omega})} + \\ &+ \int_0^{\xi_0} e^{-\tau(E, \vec{r}, \vec{r} - \xi \vec{\Omega})} \tilde{S}(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E) d\xi \end{aligned} \quad (2.110)$$

– поток нерассеянных частиц от внешних и внутренних источников. Если внешних источников нет, первый член в (2.110) равен нулю, если же внутренних источников нет, или они расположены на границе, и согласно (2.100), могут быть заменены граничными условиями, второй член (2.110) обращается в нуль.

Уравнение (2.109) иногда записывают в другой форме, переходя от интегрирований по лучу $\vec{r}' = \vec{r} - \xi \vec{\Omega}$ к интегрированию по объёму.

Из уравнения луча следует, что $\xi = |\vec{r} - \vec{r}'|$ и $\vec{\Omega} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$. Записывая эле-

мент объёма dV' в сферической системе координат с центром в точке \vec{r} и используя свойства δ -функции, можно убедиться, что для произвольной функции $f(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$ имеет место соотношение

$$\int_0^{\xi_0} F(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E) d\xi = \int_V F(\vec{r}', \vec{\Omega}, E) \delta\left(\vec{\Omega} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}.$$

Применяя это преобразование к (2.109), получим интегральное уравнение в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \Phi_0(x) + \\ & + \int dx' \frac{e^{-\tau(E, \vec{r}, \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \delta\left(\vec{\Omega} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \Sigma_s(\vec{r}', \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \Phi(x'), \end{aligned} \quad (2.111)$$

где через x обозначена совокупность переменных $\vec{r}, \vec{\Omega}, E$, $dx' = dV' d\vec{\Omega}' dE'$ и интегрирование ведется по всей области изменения этих переменных.

Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло есть метод статистического моделирования случайных процессов с целью оценки их параметров, численное значение которых равно искомому решению задачи. Часто этот метод называют также методом случайных испытаний, так как расчет по методу Монте-Карло заключается в случайной выборке из некоторой генеральной совокупности в соответствии с определенными вероятностными законами.

Метод Монте-Карло является вероятностным по своей природе, поэтому напомним специфическую терминологию и основные понятия теории вероятностей.

Основное понятие теории вероятностей – *событие*, под которым понимается тот или иной исход эксперимента. События комбинируются с помощью элементарных операций теории множеств. Полученные таким способом события также относятся к возможным исходам данного эксперимента. Событие, включающее все возможные исходы эксперимента называется *достоверным*.

Вероятность события определяется как вещественная функция на множестве событий, удовлетворяющая условиям:

1. $p(\emptyset) = 0, p(\Omega) = 1.$
2. $0 \leq p(\omega) \leq 1.$
3. $p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\omega_i),$ если $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset, i \neq j.$

Функция распределения случайной величины $F(t) = P(x < t)$ показывает вероятность того, что случайная величина будет меньше чем t .

В качестве примера моделирования рассмотрим следующую задачу. В точке \vec{r}_0 расположено орудие, ствол которого имеет направление $\vec{\Omega}_0$. Исход выстрела, т. е. точка падения снаряда, является случайным, так как в момент выстрела и в течение полёта снаряда на него действуют различные силы, учесть и рассчитать которые не представляется возможным. Именно поэтому поразить цель с первого раза не всегда удаётся, и можно говорить лишь о вероятности попадания снаряда в цель.

Как найти эту вероятность? Это можно сделать экспериментально: установить орудие, цель, произвести серию выстрелов и найти величину

$$p_n = \frac{\text{число попаданий}}{\text{число выстрелов}} = \frac{m}{n}.$$

Чем больше выстрелов будет произведено, тем ближе будет эта величина к искомой вероятности попадания p , поэтому при достаточном числе выстрелов можно считать, что $p_n \approx p$.

В этом же эксперименте можно убедиться, несмотря на случайный исход каждого выстрела, распределение точек падения снарядов при большом числе выстрелов будет подчиняться определённому закону: плотность попаданий $N(\vec{r})$ велика в небольшой пространственной области и спадает к её краям.

Отношение $N(\vec{r})$ к полному числу выстрелов, т. е. плотность вероятности, часто бывает известной из теоретических соображений или из предыдущего опыта, и это позволяет моделировать процесс стрельбы с помощью вычислительных машин.

Существует достаточно простые способы получения случайных точек (точнее, их координат), с любой плотностью распределения. Если теперь изобразить поражаемую цель на плоскости и наносить на неё случайные точки, генерируемые датчиком, то этот процесс будет полностью аналогичен реальному эксперименту и поэтому может быть использован для определения вероятности поражения цели.

Вернёмся к задачам переноса частиц в веществе, которое может поглощать и рассеивать частицы. Пусть в точке \vec{r}_0 находится источник, испускающий частицы с энергией E_0 в определенном направлении $\vec{\Omega}_0$. Опыт и расчёт показывают, что если проанализировать теперь частицы, пролетающие около некоторой точки \vec{r} , то окажется, что среди них имеются частицы с различными энергиями и летят они в разных направлениях. Это значит, что траектории частиц, так же как и траектории снарядов в предыдущем примере, случайны. Эта случайность обусловлена самим характером взаимодействия частиц с веществом.

Рассмотрим одну из всевозможных траекторий частицы, которая выходит из точки \vec{r}_0 и проходит через точку \vec{r} . Между этими точками частица может испытывать одно, два, три и т. д. рассеяний, и, соответственно, траектория её будет состоять из двух, трёх, четырех и т. д. отрезков, образующих ломаную. Координаты узлов этой ломаной $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i$ однозначно определяют данную траекторию. Они связаны с пробегом l и направлением $\vec{\Omega}$ между столкновениями соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_0 + \vec{\Omega}_0 l_1 \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + \vec{\Omega}_1 l_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{r}_i &= \vec{r}_{i-1} + \vec{\Omega}_{i-1} l_i \end{aligned} \tag{2.112}$$

В большинстве случаев потеря энергии при рассеянии однозначно связана с угловым отклонением частицы, поэтому случайная последовательность (2.112) эквивалентная ей

$$\begin{aligned} l_1, \vec{\Omega}_1 \\ l_2, \vec{\Omega}_2 \\ \dots\dots\dots \\ l_i, \vec{\Omega}_i \end{aligned} \tag{2.113}$$

определяет и энергию частицы в точке \vec{r}_i . Для простоты мы рассмотрим задачу, в которой потерями энергии при рассеянии можно пренебречь.

Существенным отличием рассматриваемой задачи от примера со стрельбой является тот факт, что распределения случайных величин (3.45), образующих траекторию частиц, могут быть вычислены теоретически, в то время как распределение точек падения снарядов может быть получено лишь экспериментальным путем. Чтобы найти плотность распределения пробегов $f_i(l)$, надо вероятность попадания пробега в интервал $(l, l + dl)$ разделить на длину этого интервала. Заметим, что попадание пробега в этот интервал означает, что частица испытала столкновение на отрезке dl , а вероятность этого события равна $dP = e^{-\Sigma l} \Sigma dl$. Отсюда плотность распределения

$$f_i(l) = \frac{dP}{dl} = \begin{cases} \Sigma e^{-\Sigma l}, & l > 0 \\ 0, & l < 0 \end{cases} \quad (2.114)$$

Аналогичным образом находим плотность распределения направлений частицы после i -го рассеяния:

$$f_{\bar{\Omega}_i}(\bar{\Omega}) = \frac{dP}{d\bar{\Omega}} = \frac{\Sigma_s(\bar{\Omega}_{i-1} \rightarrow \bar{\Omega})}{\Sigma_s}. \quad (2.115)$$

Таким образом, если бы мы знали рецепт получения случайных чисел по заданной плотности распределения, мы смогли бы находить координаты столкновений (2.112) и, следовательно, моделировать случайные траектории частиц. Например, поток частиц в точке \vec{r} равен отношению числа частиц, падающих на поверхность сферы, к площади ее поперечного сечения. Поэтому, наблюдая за большим числом траекторий, мы могли бы вычислять поток так же, как раньше вычислялась вероятность поражения цели.

В практике расчетов наиболее удобно использовать случайные числа, равномерно распределенные на интервале от $(0 \div 1)$. Обозначим их через ξ . Очевидно, чтобы получить из них равномерно распределенные числа в интервале (a, b) надо умножить каждое число ξ на $(b - a)$ и сложить с a , $\eta = a + (b - a)\xi$

Свойства последовательности независимых случайных чисел определяются их плотностью распределения. Напомним, что плотность распределения есть отношение вероятности попадания случайного числа η в интервал $(x, x + dx)$ к величине этого интервала dx

$$f_\eta(x) = \frac{dP(x < \eta < x + dx)}{dx},$$

а интеграл от нее по всей области определения равен 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\eta}(x) dx = 1. \quad (2.116)$$

Для чисел, равномерно распределенных в интервале (a, b) ,

$$f_{\eta}(x) = \begin{cases} \text{const}, & a < x < b \\ 0, & x < a \text{ или } x > b \end{cases} \quad (2.117)$$

Подставляя (2.117) в (2.116) находим, что $\text{const} = (b - a)^{-1}$. Найдем вероятность попадания такого числа в некоторый интервал (c, d) , находящийся внутри (a, b) :

$$P(c < \eta < d) = \int_c^d f_{\eta}(x) dx = \frac{d - c}{b - a}. \quad (2.118)$$

Таким образом, для равномерно распределенных случайных чисел вероятность попадания в любой интервал пропорциональна длине этого интервала. Для чисел ξ $(b - a) = 1$ и

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1 \end{cases} \quad (2.119)$$

Преобразование случайных чисел.

При решении ряда задач методом Монте-Карло могут потребоваться случайные числа с распределением, отличным от равномерного. Поэтому необходимо найти метод получения случайных чисел с произвольной плотностью распределения.

Рассмотрим произвольную монотонно возрастающую функцию $F(x)$, которая всюду положительна, причём $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ (рис. 19).

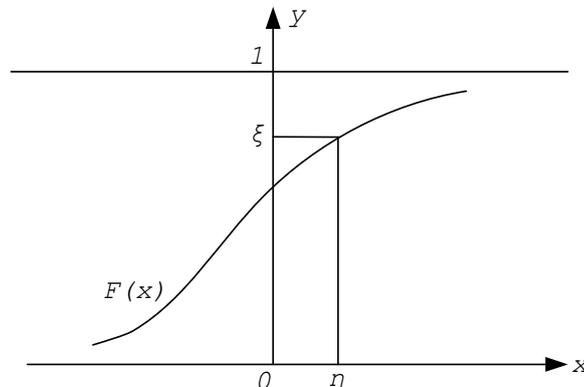


Рис. 20. Метод обратных функций

Каждой точке x эта функция ставит в соответствие точку $y = F(x)$. Можно найти и обратную функцию $g(x) = 0$, которая бы каждой точке y ставила в соответствие точку $x = F^{-1}(y)$. Будем выбирать случайные числа ξ и вычислять значения $\eta = F^{-1}(\xi)$. На графике это соответствует случайному выбору координаты y в интервале $(0,1)$ и определению по данной кривой координаты x . Полученные таким образом числа η будут также случайными. Найдём плотность распределения этих чисел. Для этого выделим интервал dy на оси OY и соответствующий ему интервал dx на оси OX . Очевидно, что $dP(x < \eta < x + dx) = dP(y < \xi < y + dy) = f_{\xi}(y)dy = dy$ откуда

$$f_{\eta}(x) = \frac{dP(x < \eta < x + dx)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dx}. \quad (2.120)$$

Следовательно, выбирая разные функции $F(x)$ и проделывая указанную процедуру, можно получать случайные числа η с разным распределением.

Пусть необходимо получить случайные числа η' с плотностью распределения $f_{\eta'}(x)$. Из уравнения (3.53) имеем $f_{\eta'}(x) = \frac{dF}{dx}$ тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f_{\eta'}(x')dx'. \quad (2.121)$$

Теперь нужно найти функцию F^{-1} , обратную F , и получить требуемые числа по формуле

$$\eta'_i = F^{-1}(\xi_i). \quad (2.122)$$

Этот метод называется *методом функции распределения*. Основным недостатком этого метода состоит в том, что далеко не всегда удаётся вычислить в элементарных функциях интеграл (2.121) и найти обратную функцию (2.122).

Легко показать, что при моделировании простейшего дискретного распределения:

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } P \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - P \end{cases} \quad \text{числа } \eta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_i < P \\ 0, & \text{если } \xi_i > P \end{cases} \quad (2.123)$$

удовлетворяют этому распределению.

Моделирование траекторий частиц

Рассмотрим решение методом Монте-Карло задачи о переносе частиц через плоский барьер толщиной h от точечного коллимированного источника (рис. 14). Для простоты предположим, что рассеяние изотропно, а поглощение частиц отсутствует:

$$\Sigma = \Sigma_s, \quad f_{\vec{\Omega}_i}(\vec{\Omega}_{i-1} \rightarrow \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \quad (2.124)$$

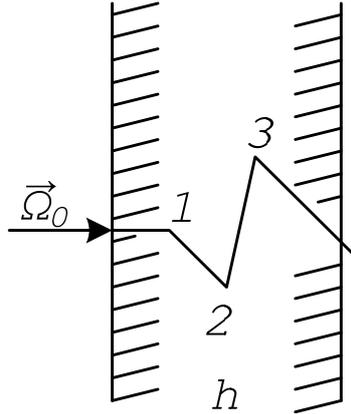


Рис. 21. Траектория частицы в плоском в барьере толщиной h

Моделирование траекторий частиц в этой задаче сводится к последовательному получению случайных величин l и $\vec{\Omega}$ с плотностью распределения (2.114) и (2.124) соответственно, и вычислению координат столкновений по формулам (2.112). Все траектории будут начинаться в точке $\vec{r}_0 = 0$ с начальным направлением $\vec{\Omega}_0$ и заканчиваться вылетом из барьера. Схема расчёта выглядит следующим образом:

1. Получаем l_1 из распределения (2.114).
2. Вычисляем $\vec{r}_1 = \{0, 0, l_1\}$.
3. Проверяем, не вылетела ли частица из барьера: если $z_1 > h$, – частица вылетела и траектория заканчивается, если нет – расчёт продолжается.
4. Получаем $\vec{\Omega}_1 = \{\cos \vartheta_1, \varphi_1\}$, из распределения (2.124).
5. Получаем l_2 , из распределения (2.114).
6. Вычисляем $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\Omega}_1 l_2 = \{l_2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, l_2 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1, l_1 + l_2 \cos \vartheta_1\}$.
7. Сравнение: если $z_2 = 0$ или $z_2 > h$, частица вылетела из барьера, траектория заканчивается, если нет – расчёт продолжается.
8. И т. д.

Алгоритм получения или как принято говорить, *выборки случайных величин* l и $\bar{\Omega}$ можно найти методами, изложенными ранее. Так, для выборки l можно использовать метод функции распределения. Для этого необходимо функцию $F(x)$

$$F(x) = \int_0^x e^{-\Sigma x'} \Sigma dx' = 1 - e^{-\Sigma x}.$$

Обратная функция есть $F^{-1}(y) = -\frac{\ln(1-y)}{\Sigma}$, откуда алгоритм для выборки пробега имеет вид $l_i = -\frac{\ln(1-\xi_i)}{\Sigma}$. Легко показать, что случайные числа $(1-\xi_i)$ имеют так же равномерное распределение в интервале $(0,1)$, поэтому

$$l_i = -\frac{\ln \xi_i}{\Sigma}. \quad (2.125)$$

Вероятность рассеяния частицы в телесный угол $d\bar{\Omega}$ можно представить в виде произведения $f_{\bar{\Omega}_i}(\bar{\Omega}_{i-1} \rightarrow \bar{\Omega})d\bar{\Omega} = \frac{1}{4\pi} \bar{\Omega} = \frac{1}{2} d \cos \mathcal{G} \frac{1}{2\pi} d\varphi$.

Первый из множителей есть вероятность попадания $\cos \mathcal{G}_i$, рассеянной частицы в интервал $d \cos \mathcal{G}$: $f_{\cos \mathcal{G}_i}(\cos \mathcal{G})d \cos \mathcal{G} = d \cos \mathcal{G}/2$, второй – вероятность попадания φ_i , в интервал φ : $f_{\varphi_2}(\varphi)d\varphi = d\varphi/2\pi$.

Плотности распределения этих величин $1/2$ и $1/2\pi$ постоянны, следовательно $\cos \mathcal{G}$ и φ распределены равномерно в интервалах $(-1,1)$ и $(0,2\pi)$ соответственно. Случайные величины с таким распределением легко получить:

$$\begin{aligned} \cos \mathcal{G}_i &= 2\xi_i - 1 \\ \varphi_i &= 2\pi\xi_i \end{aligned} \quad (2.126)$$

Описанный алгоритм легко обобщается на среду с поглощением. Поскольку при столкновении частица с вероятностью Σ_c/Σ поглощается и с вероятностью Σ_s/Σ рассеивается, после определения координат столкновения и сравнения (п.п. 3,7) необходимо провести выборку из дискретного распределения (2.123):

$$\eta_i = \begin{cases} 1, \text{если } \xi_i < \Sigma_s / \Sigma \\ 0, \text{если } \xi_i \geq \Sigma_s / \Sigma \end{cases} \quad (2.127)$$

Случай $\eta = 1$ означает рассеяние, и траектория должна продолжаться, случай $\eta = 0$ – поглощение, траектория при этом заканчивается.

Если рассеяние частиц не является изотропным, то дифференциальное сечение $\Sigma_s(\vec{\Omega}_{i-1} \rightarrow \vec{\Omega})$ даёт угловое распределение частиц по отношению к предыдущему направлению движения. Поэтому при розыгрыше из распределения $f_{\vec{\Omega}_i}(\vec{\Omega}_{i-1} \rightarrow \vec{\Omega}) = \Sigma_s(\vec{\Omega}_{i-1} \rightarrow \vec{\Omega}) / \Sigma_s$ мы находим полярный угол рассеяния $\theta_i = \arccos \vec{\Omega}_{i-1} \vec{\Omega}_i$ и азимутальный угол рассеяния χ_i , между плоскостями, проведёнными через ось OZ и вектора $\vec{\Omega}_{i-1}$ и $\vec{\Omega}_i$ (рис. 20). Отметим, что в большинстве случаев f симметрично по азимуту, $f_{\vec{\Omega}_i}(\vec{\Omega}_{i-1} \rightarrow \vec{\Omega}) = f(\cos \theta)$ поэтому χ разыгрывается из равномерного распределения $f_{\chi_i} = 1/2\pi$. Углы \mathcal{G}_i и φ_i , определяющие новое направление $\vec{\Omega}_i$, можно вычислить по известным формулам сферической тригонометрии:

$$\cos \mathcal{G}_i = \cos \mathcal{G}_{i-1} \cos \theta_i + \sin \mathcal{G}_{i-1} \sin \theta_i \cos \chi_i$$

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \Delta \varphi_i,$$

$$\sin \Delta \varphi_i = \frac{\sin \chi_i \sin \theta_i}{\sin \mathcal{G}_i},$$

$$\cos \Delta \varphi_i = \frac{\cos \theta_i - \cos \mathcal{G}_{i-1} \cos \mathcal{G}_i}{\sin \mathcal{G}_{i-1} \sin \mathcal{G}_i}.$$

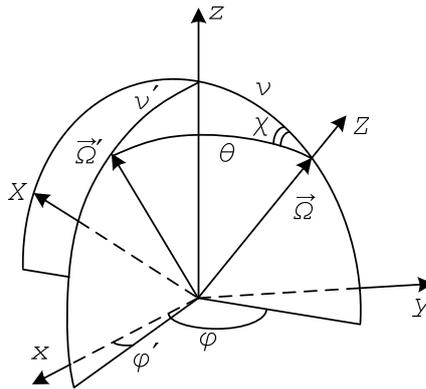


Рис. 22. К определению углов рассеяния

Не представляет труда и учёт изменения энергии при рассеянии. В случае упругих столкновений энергия рассеянной частицы может быть легко определена по углу рассеяния, последующий пробег частицы надо определять уже с учетом сечений, соответствующих новому

значении энергии. Если энергия рассеянной частицы не зависит от угла рассеяния (например, неупругое рассеяние нейтронов), она может быть получена, подобно другим случайным элементам. Для этого необходимо знать соответствующее дифференциальное сечение.

Если источник частиц не является точечным, а имеет непрерывное распределение $S(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$, причём $\iiint S(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dV d\vec{\Omega} dE = 1$ расчёт траектории начинается с выборки фазовых координат точки рождения $\vec{r}_0, \vec{\Omega}_0, E_0$ из распределения S , после чего определяется пробег частицы l_1 с данной энергией E_0 до первого столкновения и координаты этого столкновения $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + l_1 \vec{\Omega}_0$. Определение координат $i+1$ -го столкновения по известным координатам i -го производится в следующем порядке:

1. Координаты \vec{r}_i -го сравниваются с границами системы. Если эта точка находится вне системы, это означает вылет частицы из системы и траектория заканчивается.
2. Если точка i -го столкновения находится внутри системы, случайным образом устанавливается («разыгрывается») тип процесса: с вероятностью Σ_s / Σ происходит рассеяние частицы в данном столкновении («выживание»), с вероятностью Σ_c / Σ – поглощение частицы («гибель»).
3. В случае выживания разыгрываются направление движения и энергия рассеянной частицы из распределения

$$f_{\vec{\Omega}_i}(\vec{\Omega}_{i-1} \rightarrow \vec{\Omega}, E_{i-1} \rightarrow E) = \frac{1}{\Sigma_s(E_{i-1})} \Sigma_s(\vec{\Omega}_{i-1} \rightarrow \vec{\Omega}, E_{i-1} \rightarrow E).$$

4. Из распределения $f_{E_{i+1}}(l) = \Sigma(E_i) e^{-\Sigma(E_i)l}$.
Разыгрывается пробег частицы l_{i+1} между $i-1$ и $i+1$ столкновениями.
5. По формуле $\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \vec{r}_i l_{i+1}$ находятся координаты $i+1$ -го столкновения и т. д.

Отметим, что пункт 1 необходим только в случае ограниченной среды, при рассмотрении неоднородной бесконечной среды вылета частицы из системы не происходит, и каждая траектория заканчивается только поглощением.

Траектории частиц в неоднородной среде

При выводе формул (2.114), (2.125), позволяющих разыгрывать длину пробега частицы, использовалось выражение $e^{-\Sigma(E)l}$, описывающее поток нерассеянного излучения в однородной среде. Соответству-

ющие формулы для неоднородной среды могут быть получены аналогичным образом, исходя из более общего выражения для нерассеянного

потока $e^{-\int_0^l \Sigma(l', E) dl'}$, где l – расстояние вдоль направления движения частицы. Из этой формулы следует, что вероятность иметь пробег в интервале dl равна

$$dP(l < l_i < l + dl) = \Sigma(l, E) e^{-\int_0^l \Sigma(l', E) dl'} dl. \quad (2.128)$$

Алгоритм выборки из распределения dP / dl можно получить с помощью метода функции распределения, который приводит к формуле для вычисления длины свободного пробега l :

$$-\ln \xi = \int_0^l \Sigma(l', E) dl'. \quad (2.129)$$

Если поглотитель состоит из нескольких областей, в каждой из которых он однороден, то функция $\Sigma(l, E)$ будет кусочно-постоянной и интеграл в (2.129) превращается в сумму

$$-\ln \xi = \sum_{k=1}^m l^{(k)} \Sigma^{(k)}(E) + l' \Sigma^{(m+1)}(E). \quad (2.130)$$

Здесь $l^{(k)}$ – отрезки, на которые границы различных областей рассекают луч, проведённый из последней точки столкновения в направлении движения частицы, $\Sigma^{(k)}$ – соответствующие им коэффициенты ослабления, m – число областей, которые частица полностью пересекла между двумя столкновениями (оно определяется как максимальное значение индекса

k , для которого $\sum_{k=1}^m \Sigma^{(k)}(E) l^{(k)} < -\ln \xi$, l' – пробег частицы в области с номером $(m + 1)$, где произошло взаимодействие. Из (2.130) следует:

$$l = \sum_{k=1}^m l^{(k)} + \frac{1}{\Sigma^{(m+1)}(E)} \left[\sum_{k=1}^m l^{(k)} \Sigma^{(k)}(E) - \ln \xi \right]. \quad (2.131)$$

При розыгрыше длины пробега находится в номер области $m + 1$, в которой произошло столкновение. Сечения взаимодействий в каждой области предполагаются известными, поэтому определение типа взаимодействия, направления движения и энергии частицы после столкновения проводятся уже описанными методами.

Существует ещё один метод построения траекторий в неоднородной среде. Запишем кинетическое уравнение в виде:

$$\vec{\Omega}\nabla\Phi(x) + \Sigma(\vec{r}, E)\Phi(x) - \widehat{K}(\vec{r})\Phi(x) = S(x)$$

и в левой части сделаем следующее преобразование:

$$\begin{aligned} \Sigma(\vec{r}, E) &= \Sigma(E) - \left[\Sigma(E) - \Sigma(\vec{r}, E) \right] = \\ &= \Sigma(E) - \left[\Sigma(E) - \Sigma(\vec{r}, E) \right] \int d\vec{\Omega}' \int dE' \delta(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \delta(E' - E), \end{aligned}$$

где $\Sigma(E)$ – положительная функция, удовлетворяющая условию

$$\Sigma(E) \geq \Sigma(\vec{r}, E). \quad (2.132)$$

Величина

$$\Sigma_{\delta}(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' - E) = \left[\Sigma(E) - \Sigma(\vec{r}, E) \right] \delta(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \delta(E' - E) \quad (3.74) \quad (2.133)$$

представляет собой дифференциальное сечение δ -рассеяния, поэтому исходное кинетическое уравнение можно переписать в виде

$$\vec{\Omega}\nabla\Phi(x) + \Sigma(E)\Phi(x) - \left[\widehat{K}(\vec{r}) + \widehat{K}_{\delta}(\vec{r}) \right] \Phi(x) = S(x), \quad (3.75) \quad (2.134)$$

где \widehat{K}_{δ} – интегральный оператор δ -рассеяния.

Нерассеянный поток, определяемый уравнение (2.134) убывает по экспоненциальному закону с коэффициентом $\Sigma(E)$, не зависящим от координат, поэтому для розыгрыша длины пробега теперь можно использовать обычную формулу (2.125). Однако при каждом столкновении кроме обычного процесса рассеяния, описываемого оператором \widehat{K} , оказывается возможным и дельта-рассеяние, которому соответствует оператор \widehat{K}_{δ} . В уравнении (2.134) сечение $\Sigma(E)$ запишем в виде суммы сечений реальных взаимодействий и дельта-рассеяния: $\Sigma(E) = \Sigma(\vec{r}, E) + \left[\Sigma(E) - \Sigma(\vec{r}, E) \right]$, и преобразуем эту формулу к виду

$$1 = \frac{\Sigma(\vec{r}, E)}{\Sigma(E)} + \frac{\Sigma(E) - \Sigma(\vec{r}, E)}{\Sigma(E)},$$

который определяет относительные вероятности этих процессов. Тогда последовательность вычислений при построении случайных траекторий будет следующей:

1. Розыгрываем длину пробега l_{i+1} в однородной среде с коэффициентом ослабления $\Sigma(E)$.

2. Вычисляем координаты точки столкновения: $\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \vec{\Omega}_i l_{i+1}$.
3. По координатам \vec{r}_{i+1} определяем, где произошло взаимодействие.
4. Вычисляем для этой области вероятность δ -рассеяния

$$P_\delta = \frac{\Sigma(E) - \Sigma(\vec{r}, E)}{\Sigma(E)}.$$

5. Определяем тип взаимодействия: если $\xi < P_\delta$, то произошло δ -рассеяния, в противном случае – одно из обычных взаимодействий.

Дельта-рассеяние не изменяет энергии и направления движения частицы, а вычисления для обычных взаимодействий описаны выше. В качестве функции $\Sigma(E)$ удобно выбрать $\Sigma_{\max}(E)$ – максимальный из коэффициентов ослабления в неоднородном поглотителе. В этом случае условие (2.134) выполнится автоматически. Использовать функции $\Sigma(E) > \Sigma_{\max}(E)$, очевидно, нецелесообразно, т. к. это приведёт к уменьшению длин пробега и увеличению числа столкновений в истории.

Особенности моделирования траекторий заряженных частиц

По сравнению с γ -квантами и нейтронами распространение заряженных частиц в веществе обладает рядом характерных особенностей, которые не позволяют непосредственно моделировать их траектории с помощью метода Монте-Карло. Сечения захвата заряженных частиц обычно очень малы по сравнению с сечениями рассеяния, поэтому они движутся в веществе, теряя энергию в упругих и неупругих столкновениях до тех пор, пока их скорость не снизится до тепловой, когда частицу можно считать остановившейся. Определяющую роль, в торможении заряженных частиц играет кулоновское взаимодействие с атомами, поэтому пробеги между столкновениями малы, а сами столкновения сопровождаются, в основном, малыми потерями энергии. Вследствие этого частица испытывает на своём пути такое большое количество столкновений, что их прямое моделирование находится за пределами возможностей современных вычислительных машин.

Указанные трудности обычно обходятся благодаря использованию *метода группировки столкновений*. Путь частицы в веществе разбивается на отрезки определённой длины l_i . В пределах одного отрезка истинная траектория заменяется прямолинейной, а энергия и направление движения в конце отрезка определяется не прямым моделированием всех столкновений, а однократным розыгрышем из углового и энергетического распределения многократного рассеяния. Эти распределения

находятся путём решения соответствующих кинетических уравнений. Например, для розыгрыша угла многократного рассеяния можно использовать распределение (2.92). Направление движения и энергия в конце каждого отрезка используются в расчёте как начальные координаты для построения следующего отрезка траектории.

В упрощённых вариантах расчёта угол и энергия в конце отрезка не разыгрываются, а полагаются равными их средним значениям.

Длины отрезков l_i обычно выбираются таким образом, чтобы энергия частицы на пути l_i изменялась незначительно. Это упрощает решение кинетических уравнений, которые используются для получения распределений многократно рассеянных частиц, необходимых для построения траекторий.

Существует ещё один способ построения траекторий заряженных частиц, основанный на использовании *модели катастрофических столкновений*. Особенности этого метода мы рассмотрим на примере переноса электронов.

При энергиях порядка нескольких мегаэлектронвольт основными процессами взаимодействия электронов с веществом являются упругое и неупругое рассеяние на атомах. Масса электрона много меньше массы атома, поэтому упругое рассеяние происходит практически без потери энергии. Потери энергии происходят, в основном, при неупругих столкновениях, дифференциальное сечение которых сильно вытянуто вперёд.

В модели катастрофических столкновений все столкновения делятся на две группы – *близкие (катастрофические)*, в которых угол рассеяния или переданная энергия превышают некоторые пороговые значения θ_n и Q_n , и *далёкие (некатастрофические)*, которые мало изменяют энергию и направление движения частицы. В первую группу входят упругие столкновения с рассеянием на большие углы и неупругие столкновения с большими передачами энергии. Некатастрофическими являются упругие столкновения с рассеянием на малые углы и без потери энергии и неупругие столкновения с малой передачей энергии.

После такого разбиения траекторию электрона можно представить в виде последовательности относительно редких катастрофических столкновений, между которыми он испытывает большое количество далёких столкновений. Последние можно учесть с помощью описанного выше метода группировки столкновений.

Многократное рассеяние частиц на малые углы и с малыми передачами энергии можно рассматривать так же, как в модели непрерывного замедления, т. е. потерю энергии между двумя катастрофическими столкновениями вычислять в модели непрерывного замедления, а угол

рассеяния на этом же пути разыгрывать в соответствии с распределением в случае сильной анизотропии.

Длина пробега между двумя катастрофическими столкновениями является случайной величиной и должна определяться путём выборки из распределения (3.46) с сечением Σ_k , равным сечению катастрофических столкновений.

Общая схема построения $i+1$ -го отрезка траектории будет иметь следующий вид:

1. Вычисление сечения катастрофического столкновения:

$$\begin{aligned}\Sigma_k(E_i) &= \Sigma_{el}(E_i) + \Sigma_{in}(E_i) = \\ &= 2\pi \int_{\theta_n}^{\pi} \Sigma_{el}(\cos\theta, E_i) \sin\theta d\theta + \int_{Q_n}^{E_i} \Sigma_{in}(Q, E_i) dQ.\end{aligned}\quad (2.135)$$

Здесь E_i и $\vec{\Omega}_i$ – энергия и направление движения электрона в начале $i+1$ -го отрезка, $\Sigma_{el}(\cos\theta, E_i)$ и $\Sigma_{in}(Q, E_i)$ – дифференциальные сечения упругого и неупругого рассеяния. Пределы интегрирования в (2.135) выбраны таким образом, чтобы исключить далёкие столкновения.

2. Розыгрыш длины пробега $l_{i+1} = -\frac{\ln \xi}{\Sigma_k(E_i)}$ где ξ – равномерно распределённое случайное число из интервала $(0,1)$.

3. Вычисление координат $i+1$ -го столкновения: $\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \vec{\Omega}_i l_{i+1}$.

4. Вычисление энергии перед $i+1$ -м катастрофическим столкновением: потеря энергии на пути l_{i+1} за счёт непрерывного замедления

равна $\Delta E_{i+1} = \beta(E_i) l_{i+1}$ где $\beta(E_i) = \int_0^{Q_n} Q \Sigma_{in}(Q, E_i) dQ$. Поэтому перед

$i+1$ -м столкновением энергии электрона будет равна $E'_{i+1} = E_i - \Delta E_{i+1}$.

5. Моделирование многократного рассеяния на пути l_{i+1} : распределение частиц по направлениям $\vec{\Omega}$ имеет вид

$$\begin{aligned}f_{\vec{\Omega}_{i+1}}(\cos\theta, x) &= \frac{1}{\pi \langle \theta^2 \rangle_{i+1}} e^{-\frac{\theta^2}{\langle \theta^2 \rangle_{i+1}}} \\ \langle \theta^2 \rangle_{i+1} &= l_{i+1} 2\pi \int_0^{Q_n} \theta^2 \Sigma_{el}(\cos\theta, E_i) \sin\theta d\theta.\end{aligned}$$

Это распределение позволяет разыграть полярный и азимутальный углы рассеяния θ_{i+1} и χ_{i+1} , по которым вычисляются углы \mathcal{G}'_{i+1} , ϕ'_{i+1} , определяющие новое направление движения $\bar{\Omega}'_{i+1}$.

6. Определение типа катастрофического столкновения: относительные вероятности упругого и неупругого катастрофического столкновений определяются равенством (2.135). Если $\xi < \frac{\Sigma_{el}(E'_{i+1})}{\Sigma_k(E'_{i+1})}$, то электрон испытывает упругое рассеяние. В противном случае имеет место неупругое катастрофическое столкновение.
7. Моделирование упругого катастрофического столкновения: углы рассеяния θ_{i+1} и χ_{i+1} и новое направление движения электрона можно найти, используя распределение

$$f_{\bar{\Omega}'_{i+1}}(\cos \theta, x) = \begin{cases} \frac{\Sigma_{el}(\cos \theta, E'_{i+1})}{\Sigma_{el}(E'_{i+1})}, & \theta > \theta_n \\ 0, & \theta < \theta_n \end{cases}$$

и формулы сферической тригонометрии. Энергия электрона в таких столкновениях не меняется, поэтому $E_{i+1} = E'_{i+1}$.

8. Моделирование неупругого катастрофического столкновения: энергию Q_{i+1} , теряемую в столкновении, можно найти из распределения

$$f_{Q_{i+1}}(Q) = \begin{cases} \frac{\Sigma_{in}(Q, E'_{i+1})}{\Sigma_{in}(E'_{i+1})}, & Q > Q_n \\ 0, & Q < Q_n \end{cases}, \text{ а } E_{i+1} \text{ вычислить по формуле:}$$

$$E_{i+1} = E'_{i+1} + Q_{i+1}.$$

Поскольку неупругое катастрофическое столкновение рассматривается как упругое рассеяние на свободных электронах, полярный угол рассеяния θ_{i+1} однозначно связан с переданной энергией Q_{i+1} . Угол χ_{i+1} разыгрывается из равномерного распределения, после чего легко найти новое направление движения $\bar{\Omega}'_{i+1}$.

Определение характеристик поля излучения по случайным траекториям

Построение траекторий частиц всегда проводится для того, чтобы из анализа достаточно большого количества траекторий определить различные характеристики поля излучения. Оценки простейших инте-

гральных характеристик можно произвести, исходя непосредственно из определения или физического смысла характеристик и статистической эквивалентности реальных и моделируемых траекторий.

Так, число частиц, вылетающих через элементарную площадку ΔS внешней границы поглотителя в единицу времени,

$$\int (\vec{\Omega} \vec{n}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \Delta S \quad (2.135)$$

в случае единичного источника может быть определено следующим образом:

$$(\vec{\Omega} \vec{n}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \Delta S \approx \frac{\Delta N_n}{N}, \quad (2.136)$$

где ΔN_n – число траекторий, которые в процессе расчёта пересекли указанную площадку, N – полное число построенных траекторий. Знак \approx указывает на то, что точное равенство достигается при $N \rightarrow \infty$. Аналогичным образом, число столкновений в малом объёме ΔV определится отношением

$$\int \Sigma \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \Delta V \approx \frac{\Delta N_{cm}}{N}, \quad (2.137)$$

где ΔN_{cm} – число столкновений в этом объёме, вычисленное по построенным траекториям.

Для вычисления дифференциальных характеристик необходимо разбить соответствующую переменную на интервалы и подсчитать число частиц, принадлежащих каждому интервалу, разделив потом на его величину. Результат такого расчёта, представленный в виде ступенчатой функции, называется *гистограммой*. Так, угловое распределение частиц, проходящих через ΔS , даётся формулой, вытекающей из (2.135), (2.136):

$$\cos \mathcal{G}_k \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}_k) \Delta S \approx \frac{\Delta N_{cm}(\Delta \Omega_k)}{N \Delta \Omega_k}, \quad (2.138)$$

где \mathcal{G}_k – угол между направлением вылетающей частицы, принадлежащей k -му интервалу $\Delta \Omega_k$, и внешней нормалью площадки \vec{n} , $\Delta N_{cm}(\Delta \Omega_k)$ – число траекторий, пересекающих площадку ΔS с направлением, принадлежащим интервалу $\Delta \Omega_k$. Из (2.138) получаем оценку дифференциального по углам потока в виде

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}_k) \approx \frac{\Delta N_{cm}(\Delta \Omega_k)}{N \cos \mathcal{G}_k \Delta \Omega_k \Delta S}. \quad (2.139)$$

Аналогичным образом из (2.137) следует оценка

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}_k) \approx \frac{\Delta N_{cm}(\Delta\Omega_k)}{N\Sigma\Delta\Omega_k\Delta V}. \quad (2.140)$$

Из (2.139) и (2.140) могут быть получены формулы для оценки полного потока:

$$\Phi(\vec{r}) = \int \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \sum_k \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}_k) \Delta\Omega_k \approx \frac{1}{N\Delta S} \sum_k \frac{\Delta N_{\square}(\Delta\Omega_k)}{\cos \mathcal{G}_k} \quad (2.141)$$

и

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{N\Sigma\Delta V} \sum_k \Delta N_{cm}(\Delta\Omega_k). \quad (2.142)$$

Каждый член суммы (3.84) можно в свою очередь представить в виде суммы по всем траекториям, пересекающим ΔS и принадлежащим $\Delta\Omega_k$:

$$\frac{\Delta N_{\square}(\Delta\Omega_k)}{\cos \mathcal{G}_k} = \sum_i^{\Delta\Omega_k} \frac{1}{\cos \mathcal{G}_i} \quad (\text{вследствие малости } \Delta\Omega_k \text{ } \cos \mathcal{G}_i \approx \cos \mathcal{G}_k). \text{ Легко}$$

видеть, что полученную теперь двойную сумму можно переписать в виде одной суммы по пересечениям $\sum_k \sum_i^{\Delta\Omega_k} \frac{1}{\cos \mathcal{G}_i} = \sum_i \frac{1}{\cos \mathcal{G}_i}$. От суммы по

пересечениям можно перейти к простому суммированию по траекториям, если ввести величину

$$g_n = \begin{cases} \frac{1}{\Delta S \cos \mathcal{G}_n} & \text{если } n\text{-я траектория пересекла } \Delta S \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (2.143)$$

Тогда (2.141) переписется в виде

$$\Phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_n. \quad (2.144)$$

Вычисление потока по формулам (2.143) и (2.144) называется *оценкой по пересечениям*.

Из формулы (2.142) следует *оценка потока по столкновениям*:

$$g_n = \begin{cases} \frac{(\Delta N_{cm})_n}{\Sigma\Delta V}, & \text{если траектория испытывала столкновения в объеме } \Delta V \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (2.145)$$

здесь $(\Delta N_{cm})_n$ – число столкновений n -й траектории в объеме ΔV , Если выделенный объем достаточно мал, чтобы можно было пренебречь двумя и более столкновениям в нем одной траектории, оценка (2.145) примет вид

$$g_n = \begin{cases} \frac{1}{\Sigma \Delta V}, & \text{если траектория испытывала столкновение в объеме } \Delta V \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (2.146)$$

Исходя из интерпретации потока, как суммарной длины пути, проходимогo частицами единичного объема, получаем *оценку по длине пробега*:

$$g_n = \begin{cases} \frac{L_n}{\Delta V}, & \text{если траектория пересекла } \Delta V \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (2.147)$$

Здесь L_n – длина пути, пройденного n -й траекторией в объеме ΔV .

Нетрудно заметить, что разные способы вычисления потока определяют различным образом величины g_n , формула же (2.144) остаётся неизменной. В действительности эта формула имеет общий характер и справедлива для любой вычисляемой характеристики поля J . Она означает, что искомая величина в методе Монте-Карло вычисляется, как среднее арифметическое

$$J \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_n \quad (2.148)$$

случайной величины g_n , называемой *вкладом n -й траектории*. Если траектория не попадает в наблюдаемую область, вклад её равен нулю:

$$g_n = \begin{cases} g_n^*, & \text{если траектория попала} \\ & \text{в выделенную область фазового объема} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (2.149)$$

Величина g_n^* , очевидно, представляет собой вклад траектории в результат при условии её попадания в наблюдаемый объем. В общем случае это также случайная величина, но в отдельных случаях она может быть постоянной. Так, оценку по формуле (2.136) можно переписать в виде (2.148), где

$$g_n = \begin{cases} 1, & \text{если траектория пересекла } \Delta S \\ 0 & \text{– в противном случае} \end{cases}$$

Сравнивая это с (3.92) получаем $g_n^* = 1$. В формулах (2.143), (2.146) и (2.147) величина g_n^* равна $\frac{1}{\Delta S \cos \vartheta_n}$, $\frac{1}{\Sigma \Delta V}$ и $\frac{L_n}{\Delta V}$ соответственно.

Проводя повторные расчёты с одинаковым числом построенных траекторий (но, разумеется, с разными наборами случайных чисел), мы будем получать отличные друг от друга значения величины

$$J_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_n. \quad (2.150)$$

Величина J_N , представляет собой сумму случайных величин g_n , и поэтому сама является величиной случайной. По мере увеличения N флуктуации величины J_N будут уменьшаться, и в пределе мы получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_n = \langle g \rangle = J. \quad (2.151)$$

Мерой отклонения реального результата J_N от «идеального» является дисперсия, определяемая соотношением

$$D\eta = \langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2 \quad (2.152)$$

$$D(c\eta) = c^2 D\eta, \quad D(\sum_i \eta_i) = \sum_i D\eta_{i-1}, \quad (2.153)$$

где c – постоянная, η_i – независимые случайные числа. С дисперсией связана среднеквадратичная ошибка $\sigma = \sqrt{D}$ и относительная ошибка $\delta = \frac{\sigma}{\langle \eta \rangle}$.

Пользуясь выражениями (2.151) – (2.153), найдём относительную ошибку в определении величины J по N траекториям:

$$\delta_N = \frac{\sqrt{DJ_N}}{\langle J_N \rangle} = \frac{\sqrt{\sum_i Dg_n}}{N \langle g \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \delta, \quad (2.154)$$

где

$$\delta = \frac{\sqrt{Dg}}{\langle g \rangle} \quad (2.155)$$

– относительная ошибка вклада одной траектории. Из формулы (3.99) видно, что относительная статистическая погрешность метода Монте-Карло убывает пропорционально $N^{-1/2}$. Множитель δ определяется условиями задачи и выбранным способом оценки и не зависит от числа построенных траекторий.

Пусть вероятность попадания траектории в наблюдаемый объём равна p :

$$g = \begin{cases} g^* - c \text{ с вероятностью } p, \\ 0 - c \text{ с вероятностью } 1 - p. \end{cases}$$

Обозначим через $f_g(x)$ и $f_{g^*}(x)$ соответствующие плотности распределения, удовлетворяющие условию нормировки. Легко видеть, что

$$f_g(x) = Pf_{g^*}(x) + (1 - P)\delta(x). \quad (2.156)$$

Среднее значение и средний квадрат вклада, входящие в определение дисперсии (2.156) выражаются через плотность распределения следующим образом: $\langle g \rangle = \int_0^\infty xf_g(x)dx$ и $\langle g^2 \rangle = \int_0^\infty x^2 f_g(x)dx$

Подставляя (3.166) и учитывая, что последние соотношения справедливы и для g^* , получим:

$$\langle g \rangle = P\langle g^* \rangle, \quad \langle g^2 \rangle = P\langle g^{*2} \rangle. \quad (2.157)$$

Из формул (2.152), (2.167) следует относительная ошибка для одной траектории

$$\delta = \sqrt{\frac{1 - P}{P} + \frac{\langle g^{*2} \rangle - \langle g^* \rangle^2}{P\langle g^* \rangle^2}}. \quad (2.158)$$

Оба члена под корнем не отрицательны. Для выяснения роли каждого из них рассмотрим вычисление методом Монте-Карло числа частиц, вылетающих из поглотителя через некоторую поверхность.

В этом случае $g^* = 1$, $\delta = \sqrt{\frac{1 - P}{P}}$ и общая формула погрешности (2.154) принимает вид

$$\delta_N = \sqrt{\frac{1 - P}{NP}}. \quad (2.159)$$

Следовательно, первый член подкоренного выражения описывает флуктуации числа частиц, попадающих в выделенную область. Второй член даёт флуктуации характеристик частиц, входящих в выражение для g^* .

Из вышеизложенного следует важный вывод: уменьшения погрешности вычислений методом Монте-Карло можно добиться не только увеличением числа траекторий N , но и изменяя схему расчёта таким образом, чтобы увеличить вероятность P .

3. ЗАЩИТА ОТ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Разработка биологической защиты как комплекса конструктивно-технических решений, обеспечивающих радиационную безопасность персонала, приемлемые условия работы узлов и оборудования установки с точки зрения радиационных повреждений, а также защиту окружающей среды от радиоактивных загрязнений является одной из основных задач проектирования ядерных энергетических установок. Технический уровень разработки защиты во многом определяет технико-экономические показатели установки в целом.

Проектирование биологической защиты в узком смысле водится к расчету толщин и состава защитных экранов, обеспечивающих ослабление потоков ионизирующих излучений от заданного источника до безопасных согласно действующим нормам уровней.

Задачей проектирования защиты в широком смысле называют разработку конструктивно-компоновочных решений, обеспечивающих весь комплекс требований по радиационной безопасности, который включает в себя:

1. Обеспечение защиты обслуживающего персонала от воздействия ионизирующих излучений в процессе эксплуатации.
2. Защиту материалов, оборудования и, конструкций от недопустимых воздействий (охрупчивание и распухание сталей, радиолиз воды, радиационный разогрев, активация и т. д.).
3. Защиту окружающей среды от радиоактивных загрязнений (радиоактивные выбросы при работе реактора, радиоактивность отливных вод и т. д.).

Эффективность биологической защиты характеризуется кратностью ослабления основных функционалов (мощность дозы излучения, поглощенная доза, тепловыделение, число смещений, интеграл активации), описывающих взаимодействие полей ионизирующих излучений с веществом.

Расчет ослабления излучений в биологической защите заключается в определении величин функционалов полей излучения путем решения кинетического уравнения в соответствующем приближении. Эта задача имеет единственное решение, а точность полученного решения для заданных источников излучения зависит от точности физических констант, описывающих взаимодействие излучения с веществом, и, корректности используемого приближения кинетического уравнения.

Проектирование биологической защиты можно рассматривать как задачу, обратную расчету ослабления излучений в защите. Решение

этой задачи в принципе неоднозначно, так как ослабление излучения до предельно допустимых уровней может быть обеспечено различными вариантами размещения биологической защиты, отличающимися составом, толщинами и компоновкой используемых защитных материалов. Задача разработчика биологической защиты сводится к определению некоторого множества возможных вариантов компоновки защиты, обладающих требуемой эффективностью, и выбору наилучшего из них в смысле заданного критерия оптимальности.

Строгое решение задачи возможно лишь с помощью последовательного решения уравнений переноса нейтронов и γ -квантов. Однако эти уравнения достаточно точно удается решить лишь для достаточно простых геометрических конфигурации активной зоны и защиты, в основном одномерных. Поэтому в практических расчетах защиты реакторов наряду с решением уравнений переноса излучения применяют и различные приближенные методы, которые можно разбить на две группы: полуэмпирические, основанные на использовании экспериментальных или теоретических данных, и методы, использующие низкие приближения уравнения переноса. На основе этих приближенных методов в ряде случаев удается проводить практические расчеты даже вручную, и, кроме того, их можно довольно просто реализовать на ЭВМ. Достаточно строгое решение уравнения переноса в основном используется для определения погрешности приближенных методов и при проведении расчетов для самых ответственных направлений, где это позволяют геометрические условия задачи.

В математической трактовке задача расчета прохождения нейтронов и γ -квантов через защиту сводится к решению кинетического уравнения переноса излучения. Условно можно разделить все методы, с помощью которых решается данная задача на три группы.

1. Методы сравнительно точного решения уравнения переноса излучения. Отличительным признаком методов этой группы можно считать отыскание дифференциального, энергетического и углового распределения плотности потока частиц в защите и определение с её помощью искомых функционалов поля излучения. В эту группу входят такие уже рассмотренные методы, как метод полиномиальных разложений, метод Монте-Карло. Известны и другие точные методы решения кинетического уравнения: метод Карлсона, альбедный метод и др. Алгоритм решения задач данными методами, как правило, разработан лишь для геометрически правильных источников и защит, а также для фиксированного набора характеристик источника. Переход от идеализированного представления к реальному, как правило, сопряжен с существенным усложнением расчетных алгоритмов.

2. Инженерные методы расчета, отличительной особенностью которых можно считать то, что с их помощью рассчитывается лишь дифференциальный энергетический спектр плотности потока частиц, т. е. нулевой момент разложения по полиномам Лежандра, либо дополнительно несколько первых моментов или функционалы. Эти методы не позволяют получить дифференциальное угловое распределение либо оценивают его приближенно. В эту группу входят методы расчета в P1 и P2 приближениях, методы выведения-диффузии, метод лучевого анализа и др. Количество вычислений для методов этой группы вполне пригодны для вариантных расчетов защиты.

3. Эмпирические методы расчета, которые выполняются, как правило, вручную. К ним относятся такие методы, как метод сечения выведения, методы использующие факторы накопления для учета рассеянного компонента поля излучения. Простота эмпирических методов в любом случае требует глубокого понимания сущности протекающих физических процессов и четкого знания пределов их применимости. Экспоненциальный характер функционалов от толщины защиты приводит при неправильном использовании эмпирических методов к существенному расхождению с точным решением.

Активная зона реактора как источник излучения

Первым этапом анализа радиационной защиты реактора является расчет интенсивности источников излучения в активной зоне реактора. Взаимодействие делящихся ядер, содержащихся в активной зоне, с нейтронами приводит к их делению, при котором образуется следующее поколение нейтронов, вновь вызывающих деление, и т. д. так происходит цепная реакция.

Кроме участия в процессе деления нейтроны претерпевают также упругое и неупругое рассеяние на ядрах, содержащихся в активной зоне, и радиационный захват. Нейтроны замедляются и диффундируют, часть из них утекает в отражатель, часть переходит обратно в активную зону. В результате конкуренции различных процессов устанавливается определенное пространственно-энергетическое распределение нейтронов в активной зоне, которое необходимо знать при проведении детального анализа защиты.

Спектр нейтронов деления

Нейтроны, образующиеся в активной зоне ядерного реактора, могут быть подразделены на четыре группы:

- 1) мгновенные нейтроны деления (испускаются в течение нескольких микросекунд после акта деления);

- 2) запаздывающие нейтроны деления (испускаются из сильно возбужденных ядер, образующихся в процессе деления, с периодами, характерными для радиоактивного распада соответствующего ядра. Продолжительность образования этих запаздывающих нейтронов может достигать нескольких минут);
- 3) нейтроны активации (испускаются при радиоактивном распаде продуктов некоторых ядерных реакций);
- 4) фотонейтроны (образуются в результате ядерного поглощения γ -квантов, т. е. в результате реакции (γ, n)).

Не все эти источники нейтронов в равной степени важны и поэтому не все из них необходимо учитывать при расчете защиты данного конкретного реактора.

Мгновенные нейтроны деления составляют основную часть всех нейтронов спектра деления (более 99 %). Они распределяются по энергиям в широком интервале: от нескольких десятков килоэлектронвольт до энергий свыше 20 Мэв. Чаще всего в качестве делящегося материала в реакторах используют U^{235} и U^{238} . Средняя кинетическая энергия нейтронов, образующихся при делении одного ядра U^{235} , составляет 5 Мэв. Максимум спектра нейтронов деления U^{235} (при делении тепловыми нейтронами) приходится на интервал энергий 0,6...0,8 Мэв. При энергии свыше 2...3 Мэв спектр имеет вид экспоненты. В целом он достаточно хорошо описывается формулой Уатта

$$\chi(E) = 0.48 \operatorname{sh} \sqrt{2E} \exp(-E), \quad (3.1)$$

где $\chi(E)$ – доля нейтронов спектра деления на единичный интервал энергии; энергия нейтронов E выражена в мегаэлектронвольтах. Формула для спектра нейтронов (9.1), как и приведенные ниже, нормирована следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \chi(E) dE = 1. \quad (3.2)$$

Более точной является формула Кранберга:

$$\chi(E) = 0.453 \operatorname{sh} \sqrt{2/29E} \exp(-E/0.965). \quad (3.3)$$

Хотя различие результатов расчета по формулам (3.1) и (3.3) для энергий $E < 10$ Мэв составляет менее 10 %, необходимо учитывать, что статистическая погрешность в измерениях спектра, описанных этими формулами, изменяется от 6 % в области энергий 1...6 Мэв до 15 % при $E \approx 0,25$ и 8 Мэв и возрастает до 30 % при $E > 12$ Мэв.

При расчетах защиты реакторов часто требуется знать долю нейтронов в спектре деления с энергией выше E , т. е. $\int_0^{\infty} \chi(E) dE$. Эта величина с помощью формулы (3.3) аппроксимируется следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \chi(E) dE = 1 - 0,37953 \left[\exp(-y_1^2) - \exp(-y_2^2) - 0,70711 [\operatorname{erf}(y_1) + \operatorname{erf}(y_2)] \right].$$

Здесь $y_{1,2} = 1,01797\sqrt{E} \pm 0,74328$; $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-y^2) dy$

Табличные значения этого интеграла удобно использовать при вычислении интенсивности спектра деления по отдельным энергетическим группам

$$\Delta\chi^n = \int_{\Delta E_n} \chi(E) dE = \int_{E_n}^{\infty} \chi(E) dE - \int_{E_{n-1}}^{\infty} \chi(E) dE, \quad (3.4)$$

где E_n и E_{n-1} , – нижняя и верхняя границы группы соответственно.

Необходимо отметить, что формулы (3.1) и (3.3) не описывают тонкую структуру спектра нейтронов деления. Согласно измерениям с хорошим разрешением, в этом спектре имеются явно выраженные максимумы при 0,75; 1,25; 1,6 и 2,6 Мэв, где сосредоточено –5 % полного числа нейтронов деления.

В практических расчетах используются также более простые, чем формулы (3.1) и (3.3), аппроксимации спектра деления. Например, в области энергий 4...14 Мэв спектр нейтронов деления может быть приближенно аппроксимирован простой экспонентой

$$\chi(E) = 1,75 \exp(-0,766E). \quad (3.5)$$

В этой области погрешность формулы (3.5) меньше 15 % и не превышает 7 % в интервале энергий 5...13 Мэв.

Для различных делящихся изотопов спектр нейтронов деления можно описать максвелловским распределением

$$\chi(E) = A\sqrt{E} \exp\left(-\frac{3}{2} \frac{E}{\bar{E}}\right), \quad (3.6)$$

где \bar{E} – средняя энергия спектра; A – нормировочный множитель.

Отметим, что при энергиях нейтронов ниже 9 Мэв погрешность формулы (9.6) не превышает 12 %, но при $E > 9$ Мэв она довольно значи-

тельна; погрешность возрастает с увеличением энергии и при $E=14$ Мэв составляет более 70 %.

Теоретические рассуждения, основанные на статистической теории ядра, позволили получить (для четно-четных изотопов) приближенное соотношение между средней энергией нейтронов деления \bar{E} и средним числом нейтронов ν , образующихся при одном акте деления:

$$\bar{E} \approx 0,74 + 0,653(\nu + 1)^{1/2}. \quad (3.7)$$

Среднее число нейтронов на деление ν зависит от энергии первичных нейтронов E' , вызывающих деление. Зависимость $\nu(E')$ примерно линейная:

$$\nu(E') \approx \nu_T + \frac{d\nu}{dE'} E'. \quad (3.8)$$

Однако в этой зависимости при $E' \approx 0,2 \div 1$ Мэв обнаружены нерегулярности, обусловленные дискретной структурой квантовых состояний составного ядра, которое образуется при поглощении первичного нейтрона.

Увеличение ν с повышением энергии первичных нейтронов E' , а также соотношение (3.7), выражающее связь между E и ν , указывают на то, что средняя энергия нейтронов деления \bar{E} для U^{235} возрастает примерно на 0,03 Мэв при увеличении энергии первичных нейтронов E' на 1 Мэв.

Средняя энергия запаздывающих нейтронов не превышает 0,5 Мэв, что значительно ниже энергии мгновенных нейтронов. Почти все запаздывающие нейтроны испускаются в течение 1...2 мин после деления. Учитывая низкий выход их по отношению к выходу всех нейтронов деления (менее 1 %), с точки зрения расчета защиты ядерного реактора запаздывающими нейтронами можно пренебречь почти во всех случаях, кроме интенсивного разноса продуктов деления по контуру теплоносителя, а также реакторов с циркулирующим топливом.

Что касается нейтронов активации, то наиболее важным для защиты реактора является распад ядер N^{17} , образующихся при облучении воды быстрыми нейтронами.

Образование нейтронов при поглощении γ -квантов может иметь некоторое значение для расчета защиты лишь при наличии следующих изотопов: D^2 , Be^9 , C^{13} и Li^6 . Пороги образования фотонейтронов на этих изотопах равны 2,23; 1,67; 4,90 и 5,30 Мэв соответственно. Фотонейтронные сечения для дейтерия и Be^9 очень малы (всего несколько миллибарн), но после остановки реактора эти реакции – почти единственный источник нейтронов. Кроме того, если в качестве защиты

используется вода, которая ослабляет нейтроны гораздо сильнее, чем γ -излучение, то поток фотонейтронов, вызванный наличием в воде небольшой доли дейтерия (0,016 %), на большой толщине (более 150...200 см) может превысить поток нейтронов, пришедших из реактора.

Спектр нейтронов в реакторе

Энергетический спектр нейтронов в активной зоне реактора отличается от энергетического спектра нейтронов деления, определяемого формулами (3.1) – (3.6). Быстрые нейтроны, образующиеся при делении ядер, замедляются (или частично поглощаются) при взаимодействии с ядрами замедлителя и конструкционных материалов, а также вылетают за пределы активной зоны. Замедлившиеся нейтроны поглощаются и вновь вызывают деление ядер, и далее процесс продолжается как цепная реакция.

Энергетический спектр нейтронов в реакторе зависит от пространственной координаты, т. е. он неодинаков в разных компонентах активной зоны и, в частности, зависит от расстояния до центра активной зоны, близости к отражателю, регулирующим органам и т. д. Пространственно-энергетическое распределение нейтронов в реакторе определяется уравнением переноса, решение которого в общем случае – очень сложная задача.

Для практических расчетов защиты реактора часто достаточно знать усредненный по пространству спектр плотности скалярного потока нейтронов в активной зоне или связанный с ним интегральный спектр потока нейтронов: $\Phi_0(E) = \int \Phi_0(r, E) dr$. В первом приближении этот спектр можно считать близким к гипотетическому спектру соответствующей бесконечной однородной среды того же состава, что и усредненный состав активной зоны. Таким образом, при этом пренебрегают конечностью размеров активной зоны и влиянием отражателя. Уравнение для спектра в бесконечной среде $F_0(E)$ получается при интегрировании уравнения переноса по всем пространственным и угловым переменным:

$$\sum(E)F_0(E) = \int \sum_{s,0}(E' \rightarrow E)F_0(E')dE' + q_0(E). \quad (3.9)$$

Здесь и далее обозначения идентичны ранее принятым.

Для активной зоны $q_0(E) = q_0 \chi(E)$. Это уравнение удается решить лишь для некоторых частных случаев зависимости дифференциальных сечений рассеяния $\sum_{s,0}(E' \rightarrow E)$. Так, для моноэнергетического источника $q_0(E) = \delta(E - E')$ в непоглощающей упруго замедляющей среде

[с дифференциальным сечением $\sum_{s,0}(E' \rightarrow E) = \frac{\sum_s(E')}{(1-\alpha)}$ при $\alpha E' \leq E \leq E'$ и $\sum_{s,0}(E' \rightarrow E) = 0$ вне этого интервала] с изотропным рассеянием асимптотическую часть спектра нейтронов можно записать следующим образом:

$$F_0(E) = \frac{1}{\xi \sum(E)E}.$$

Тогда для источника $q_0(E') = q_0 \chi(E')$ при отсутствии поглощения

$$F_0(E) = \frac{1}{\xi \sum(E)E} \int_E^\infty \chi(E') dE'.$$

Чтобы учесть поглощение, надо χ заменить выражением $\frac{\sum_s}{\sum} \chi - \sum_a F_0$ где множитель $\frac{\sum_s}{\sum}$ характеризует вероятность рассеяния, а второе слагаемое описывает убыль нейтронов в результате поглощения (неупругое рассеяние здесь считается поглощения нейтронов). В результате

$$\xi \sum(E)E F_0(E) = \int_E^\infty \frac{\sum_s(E')}{\sum(E')} \chi(E') dE' - \int_E^\infty \sum_a(E') F_0(E') dE'.$$

Дифференцируя это уравнение, получаем

$$\frac{\partial}{\partial E} (\xi \sum E F_0) - \sum_a F_0 + \frac{\sum_s}{\sum} \chi = 0. \quad (3.10)$$

Решение уравнения (3.10) имеет вид

$$F_0(E) = \frac{1}{\sum(E)} \left[\chi(E) + \frac{1}{\xi E} \int_E^\infty dE' \frac{\sum_s(E')}{\sum(E')} \times \chi(E') \exp\left(-\frac{1}{\xi} \int_E^{E'} \frac{\sum_a(E'')}{\sum(E'')} \frac{dE''}{E''}\right) \right].$$

При слабом поглощении можно воспользоваться более простой формулой

$$F_0(E) = \frac{1}{\sum(E)} \left[\chi(E) + \frac{1}{\xi E} \int_E^\infty \chi(E') dE' \right].$$

Для смеси элементов значение ξ должно определяться усреднением

$$\xi = \sum_K (\xi_K \sum_{S,K}) / \sum_K (\sum_{S,K}),$$

где индекс «к» относится к величинам для к-го элемента.

Спектр утечки нейтронов из активной зоны можно приближенно записать в следующем виде:

$$J(E) \approx \frac{AF_0(E)}{\sum(E)},$$

где А – нормировочный коэффициент, который определяется из условия баланса числа нейтронов в реакторе:

$$\int_0^{\infty} J(E)dE = \overline{N_D} V \frac{V_{a.z.}}{S_{a.z.}} \frac{k_{\infty} - 1}{k_{\infty}}. \quad (3.11)$$

Здесь $\overline{N_D}$ – средняя плотность делений в активной зоне; k_{∞} – коэффициент размножения нейтронов в бесконечной среде с составом, аналогичным составу активной зоны; $V_{a.z.}$ и $S_{a.z.}$ – объем и поверхность активной зоны соответственно. Физический смысл последнего множителя в формуле (3.11) очевиден: одним нейтроном, вызвавшим деление, в бесконечной размножающей среде формируется k_{∞} нейтронов, один из которых продолжает цепную реакцию, а остальные формируют утечку из реальной активной зоны.

Более просто можно получить решение уравнения (3.9) в многогрупповом представлении, удобном для проведения практических расчетов. При этом удастся учесть и неупругое рассеяние. Интегрируя уравнение (3.9) в пределах n-й энергетической группы ΔE_n , получаем

$$\sum^n F_0^n = \sum_{j=1}^n \sum_{S,0}^{j \rightarrow n} F_0^j + q_0 \chi^n$$

отсюда $F_0^n = \frac{1}{\sum_{y \neq n}^n} \left(q_0 \chi^n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{S,0}^{j \rightarrow n} F_0^j \right)$, где $\sum_{y \neq n}^n = \sum^n - \sum_{S,0}^{n \rightarrow n}$

Разработаны способы учета влияния ограниченности активной зоны, т. е. утечки из нее, и наличия отражателя на спектр нейтронов в активной зоне. В частности, можно получить выражение интегрального спектра нейтронов в активной зоне в P_1 -приближении метода сферических гармоник.

Запишем уравнения для пространственно-энергетического распределения потока $\Phi_0(r, E)$ и тока нейтронов $\Phi_1(r, E)$ для активной зоны, ограниченной поверхностью G_S :

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_1(r, E) + \sum(E) \Phi_0(r, E) = \\ = \int_0^\infty dE' \sum_{s,0} (E' \rightarrow E) \Phi_0(r, E') + q_0(r, E) + n \Phi_1^+(r_s, E) \delta(r - r_s) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \nabla \Phi_0(r, E) + \sum(E) \Phi_1(r, E) = \\ = \int_0^\infty dE' \sum_{s,1} (E' \rightarrow E) \Phi_1(r, E') + n \Phi_0^+(r_s, E) \delta(r - r_s). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $q_0(r, E) = q_0(r) \chi(E)$ – распределение источников нейтронов деления. Последние члены в этих уравнениях учитывают влияние на поле нейтронов областей, окружающих активную зону (отражателя и защиты):

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0^+(r_s, E) &= \int d\Omega H(\Omega n) q_s(r_s, E, \Omega); \\ \Phi_1^+(r_s, E) &= \int d\Omega \Omega H(\Omega n) q_s(r_s, E, \Omega) \end{aligned} \right\}$$

моменты углового распределения поверхностных источников $q_s(r_s, E, \Omega)$, обусловленных этим влиянием, которые предполагаются известными. Здесь $H(\Omega n)$ – функция Хэвисайда, n – внутренняя нормаль к рассматриваемой области.

Проинтегрируем уравнение (3.12) по активной зоне, включая ее поверхность. В результате получим

$$\tilde{J}(E) + \sum(E) \Phi_0(E) = \int_E^\infty dE' \sum_{s,0} (E' \rightarrow E) + q_0(E) + q_s(E). \quad (3.14)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{J}(E) &= \int \nabla \Phi_1(r, E) dr \\ \Phi_0 &= \int \Phi_0(r, E) dr \\ q_0(E) &= \int q_0(r, E) dr \\ q_s(E) &= \int n \Phi_1^+(r_s, E) dr_s \end{aligned} \right\} \quad (3.14.1)$$

Уравнение (3.14) представляет собой выражение баланса нейтронов в интервале энергий от E до $E + dE$. Его левая часть характеризует «увод» нейтронов из этого интервала в результате утечки (первое слагаемое) и столкновений с ядрами среды (второе слагаемое). Правая часть описывает «приход» нейтронов вследствие замедления из лежащей выше энергетической области (первое слагаемое), деления (второе слагаемое), поверхностного источника (последнее слагаемое).

Интегрируя дивергенцию (объемную производную) уравнения (3.13) по активной зоне, получаем

$$\frac{1}{3}\alpha(E)\Phi_0(E) + \sum(E)\tilde{J}(E) = \int_E^{\infty} dE' \sum_{s,1}(E' \rightarrow E)\tilde{J}(E'). \quad (3.15)$$

Здесь α – параметр утечки:
$$\alpha(E) = \frac{\int \nabla[\nabla\Phi_0(r, E)]dr}{\int \Phi_0(r, E)dr}$$

Учитывая разрыв значений градиента скалярного потока на границе активной зоны и отражателя и используя теорему Гаусса – Остроградского, получаем

$$\alpha(E) = \frac{\int \nabla^2\Phi_0(r, E)dr}{\int \Phi_0(r, E)dr} + \frac{\int n\nabla\Phi_0^+(r, E)dr}{\int \Phi_0(r, E)dr}.$$

При вычислении второго слагаемого можно использовать известный закон Фика, выражающий связь тока и потока нейтронов в диффузионном приближении:

$$\Phi_1^+(r, E) = -D(E)\nabla\Phi_0^+(r, E).$$

Здесь $D(E) = \frac{1}{3\sum_{tr}(E)}$ – коэффициент диффузии;

$$\sum_{tr}(E) = \sum(E) - \int_0^E \sum_{s,1}(E \rightarrow E')dE' - \text{транспортное сечение.}$$

Тогда, учитывая соотношения (3.14.1), запишем

$$\alpha(E) = \frac{\int \nabla^2\Phi_0(r, E)dr}{\int \Phi_0(r, E)dr} - \frac{D(E)q_s(E)}{\int \Phi_0(r, E)dr}.$$

В односкоростном приближении при рассмотрении спектра активной зоны первое слагаемое в выражениях для $\alpha(E)$ можно принять рав-

ным $-B^2$, где B^2 – материальный параметр. При рассмотрении спектра нейтронов в отражателе, если, например, поток в нем спадает по экспоненте $\Phi_0(x) \sim \exp\left(-\frac{x}{L_{omp}}\right)$, первое слагаемое в выражениях для $\alpha(E)$

можно принять равным $\frac{1}{L_{omp}^2}$

Систему уравнений (3.14), (3.15) используют для определения спектра потока нейтронов $\Phi_0(E)$. Для этого можно рассмотреть значения потока и тока в отдельных узлах энергетической переменной и перейти от интегралов в этих уравнениях к соответствующим суммам. Систему уравнений (3.14), (3.15) при этом обычно решают с помощью ЭВМ.

К более удобному для решения виду позволяет перейти групповое представление этой системы:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{J}^n + \sum_0^n \Phi_0^n &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{S,0}^{j \rightarrow n} \Phi_0^j + q_0(\chi)^n + q_S^n \\ \frac{1}{3} \alpha^n \Phi_0^n + \sum_1^n \tilde{J}^n &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{S,0}^{j \rightarrow n} \tilde{J}^j \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Здесь $\sum_l^n = \sum n - \sum_{s,l}^{n \rightarrow n}$ при $l=0,1$ – таким образом, $\sum_0^n \equiv \sum_{y^e}^n$.

Определив выражение \tilde{J}^n из первого уравнения системы (3.16) и подставив его во второе уравнение, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \alpha^n \Phi_0^n + \sum_1^n \left[\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{S,0}^{j \rightarrow n} \Phi_0^j - \sum_0^n \Phi_0^n + q_0 \chi^n + q_S^n \right] &= \\ = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{S,1}^{j \rightarrow n} \left[\sum_{m=1}^{j-1} \sum_{S,0}^{m \rightarrow j} \Phi_0^m - \sum_0^j \Phi_0^j + q_0^j \chi^n + q_S^j \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Последнее уравнение можно записать следующим образом

$$\frac{1}{3} \frac{\alpha^n}{\sum_1^n} \Phi_0^n - \sum_{y^e}^n \Phi_0^n + \sum_{j=1}^{n-1} \widehat{\sum}_{S,0}^{j \rightarrow n} \Phi_0^j + q_0 \chi^n + q_S^n - \frac{1}{\sum_1^n} \sum_{j=1}^{n-1} (q_0 \chi^j + q_S^j) = 0,$$

$$\text{где } \widehat{\sum}_{S,0}^{j \rightarrow n} = \sum_{S,0}^{j \rightarrow n} + \frac{1}{\sum_1^n} \left(\sum_0^j \sum_{S,1}^{j \rightarrow n} - \sum_{m=j+1}^{n-1} \sum_{S,0}^{j \rightarrow n} \sum_{S,1}^{m \rightarrow n} \right)$$

Нетрудно убедиться в том, что для любого n уравнения (3.16) и (3.17) полностью эквивалентны. Окончательное выражение для Φ_0^n имеет вид

$$\Phi_0^n = \frac{q_0 \chi^n + \sum_{j=1}^{n-1} \widehat{\sum}_{S,0}^{j \rightarrow n} \Phi_0^j - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sum_{S,1}^{j \rightarrow n}}{\sum_1^n} (q_0 \chi^j + q_S^j)}{\sum_{y^e}^n - D^n \alpha^n}. \quad (3.18)$$

Легко заметить, что это выражение по виду весьма близко к соотношению $F_0^n = \frac{1}{\sum_{y^e}^n} \left(q_0 \chi^n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{S,0}^{j \rightarrow n} F_0^j \right)$ и отличается от него лишь дополнительными членами, исчезающими при $q_S^n \rightarrow 0, \sum_1^n \rightarrow \infty$. Остается неосвещенным вопрос о выборе значений поверхностного источника q_S^n .

Остается неосвещенным вопрос о выборе значений поверхностного источника q_S^n . При проведении приближенного расчета спектра нейтронов в активной зоне часто принимают $q_S^n = 0$ т. е. пренебрегают влиянием отражателя, и знаменатель в формуле (3.18) становится равным $\sum_{y^e}^n + B^2 \alpha^n$, а при расчете спектра нейтронов в отражателе в качестве поверхностного источника принимают вычисленный перед этим спектр нейтронов утечки из активной зоны $(q_S^n)_{отр} = (\tilde{J}^n)_{а.з.}$.

Спектр первичных γ -квантов

Излучение, возникающее в результате деления ядерного горючего, принято называть первичным. К первичному γ -излучению относятся мгновенное γ -излучение деления и запаздывающее γ -излучение продуктов деления.

При делении одного ядра U^{235} в энергетическом интервале 8 кэВ – 10,5 МэВ мгновенно испускается 10,3+1,1 γ -кванта с суммарной энергией 7,9±0,9 МэВ/деление. Энергетический спектр $\chi_\gamma^{мгн}(E_\gamma)$ мгновенных γ -квантов, возникающих при делении слабо зависит от энергии нейтрона и примерно одинаков для изотопов U^{233} , U^{235} и Pu^{239} . В диапазоне энергий 1...4,5 МэВ спектр γ -квантов деления с погрешностью до 15 %, а в интервале 1...7 МэВ с погрешностью до 40 % описывается простой экспоненциальной зависимостью

$$\chi_\gamma^{мгн}(E_\gamma) = 8,0 \exp(-1,1 E_\gamma) \left[\frac{\gamma - \text{квант}}{(\text{МэВ} \cdot \text{деление})} \right], \quad (3.19)$$

где E_γ – энергия γ -кванта.

Примерно такую же энергию, что и мгновенные γ -кванты (6,8±1,0 МэВ/деление), уносят γ -кванты, испускаемые при распаде продук-

тов деления ядерного горючего. Однако их средняя энергия несколько ниже энергии мгновенного излучения, поэтому и проникающая способность относительно меньше. Следовательно, запаздывающее γ -излучение в основном поглощается в активной зоне и прилегающих к ней слоях защиты. Спектр запаздывающего γ -излучения может быть приближенно аппроксимирован экспонентой такого же вида, как и формула (3.19):

$$\chi_{\gamma}^{zan}(E_{\gamma}) = 7,0 \exp(-1,1E_{\gamma}) \left[\frac{\gamma - \text{квант}}{(\text{Мэв} \cdot \text{деление})} \right]. \quad (3.20)$$

Таким образом, суммарный спектр первичных γ -квантов можно представить следующим образом:

$$\chi_{\gamma}(E_{\gamma}) = \chi_{\gamma}^{mzn} + \chi_{\gamma}^{zan}(E_{\gamma}) \approx 15,0 \exp(-1,1E_{\gamma}) \left[\frac{\gamma - \text{квант}}{(\text{Мэв} \cdot \text{деление})} \right]. \quad (3.21)$$

Для интервала времени 10 мин – 30 суток после момента деления ядра скорость испускания энергии γ -квантов может быть представлена с погрешностью, не превышающей 20 %, следующим соотношением:

$$\chi_{\gamma}^{zan}(\tau) = \int E_{\gamma} \chi_{\gamma}^{zan}(E_{\gamma}, \tau) dE_{\gamma} = 1,5\tau^{-1,2} \left[\frac{\text{Мэв}}{(\text{деление} \cdot \text{сек})} \right], \quad (3.22)$$

где τ – время, сек.

Интенсивность источников запаздывающего γ -излучения в реакторе зависит от режима работы реактора, его мощности, времени работы T и времени после его остановки t :

$$q_{\gamma}^{zan}(E_{\gamma}, T, t) = \int_t^{T+t} \bar{N}_D \chi_{\gamma}^{zan}(E_{\gamma}, \tau) d\tau, \quad (3.23)$$

q_{γ} – мощность источников γ -квантов, γ -квант/(МэВ-см³-с); \bar{N}_D – среднее число делений в 1 см³ в 1 с. Это число связано с мощностью реактора соотношением (15.66).

Угловое распределение γ -квантов, образующих при делении ядра в основном близко к изотропному. Лишь для γ -квантов с энергией 0,5...1 МэВ характерна некоторая анизотропия.

Спектр вторичных γ -квантов

К источникам вторичных γ -квантов в материалах активной зоны и защиты относятся: захватное γ -излучение, образующееся в результате реакции (n, γ) ; γ -излучение, возникающее при упругом рассеянии быст-

рых нейтронов; γ -излучение, сопровождающее нейтронные реакции образованием заряженных частиц; активационное излучение; тормозное γ -излучение; γ -кванты, возникающие при аннигиляции позитронов.

Относительная роль этих источников в различные периоды примени неодинакова. При работе реактора в поле излучения в защите основную роль наряду с первичным γ -излучением играют захватные γ -кванты. Кроме того, некоторое значение имеет γ -излучение, сопровождающее неупругое рассеяние нейтронов. Остальными источниками в первом приближении можно пренебречь. После остановки реактора наряду с запаздывающим γ -излучением продуктов деления важную роль начинает играть активационное и γ -излучение.

Захватное γ -излучение. Основным источником вторичного γ -излучения в активной зоне реактора является реакция (n, γ) . Захватное γ -излучение из материалов активной зоны и биологической защиты обычно определяет радиационную обстановку за защитой. Ядро i -го элемента, поглощая нейтрон, переходит в возбуждённое состояние и из возбуждённого состояния оно переходит практически мгновенно в стабильное практически мгновенно путём испускания γ -квантов различной энергии.

Для определения удельной мощности источников захватного γ -излучения необходимо рассчитать число захватов нейтронов I_a , происходящих на ядрах i -го элемента в 1 см^3 активной зоны. Интеграл радиационного захвата

$$I_a^i(r) = \int_0^{\infty} \Sigma_a^i(r, E) \Phi(r, E) dE, \quad (3.24)$$

где $\Sigma_a^i(r, E)$ – макроскопическое сечение радиационного захвата нейтронов ядрами i -го элемента. При использовании многогруппового метода расчёта пространственного и энергетического распределения плотности потока нейтронов выражение (3.24) трансформируется

$$I_a^i(r) = \sum_{n=1}^N \Sigma_a^{i,n}(r) \Phi^n(r), \quad (3.25)$$

где $\Sigma_a^{i,n}(r)$ – усреднённые в пределах группы сечения радиационного захвата, а $\Phi^n(r)$ – групповая плотность потока нейтронов. Суммирование проводится по всем группам нейтронов.

В реакторах на тепловых нейтронах или в материалах биологической защиты, обладающих хорошей замедляющей способностью, можно учитывать поглощение лишь тепловых нейтронов, и тогда выражение (3.25) упрощается

$$I_a^i(r) = \Sigma_a^{i,n}(r)\Phi^n(r). \quad (3.26)$$

Спектр γ -излучения целесообразно разбить на энергетические группы $j=1,2,\dots,J$. Если известен выход γ -квантов j -й группы на один поглощённый i -м ядром нейтрон Y_{ij} то удельную мощность источников захватного γ -излучения в точке r можно рассчитать по формуле

$$S_{захв}^{j,i} = Y_{ij}(r)I_a^i(r). \quad (3.27)$$

γ – излучение возникающие при неупругом рассеянии нейтронов. При поглощении нейтрона образуется составное ядро в возбужденном состоянии. Оно с некоторой вероятностью может испустить нейтрон, а энергию возбуждения потерять путём высвечивания γ -кванта. Этот процесс имеет пороговый характер.

Энергия γ -кванта соответствует разности между энергиями уровней, в которых прибывает ядро в процессе перехода и не может превышать кинетической энергии падающего нейтрона. Удельную мощность источников γ -излучения, сопровождающего неупругое рассеяние на i -м нуклиде $S_{неупр}^{j,i}$,

$$S_{неупр}^{j,i} = Y_{неупр}^{j,i} \int_{E_{пор}}^{\infty} \Phi(r,E) \Sigma_{неупр}^i(r,E) dE, \quad (3.28)$$

где $\Sigma_{неупр}^i(r,E)$ – макроскопическое сечение неупругого рассеяния нейтрона с энергией E в точке r на ядре i -го нуклида, см^{-1} ; $Y_{неупр}^{j,i}$ – выход энергии γ -квантов j -й энергетической группы при неупругом рассеянии нейтрона на ядре i -го нуклида, МэВ/рассеяние.

Инженерные методы расчета ослабления γ -нейтронного излучения в сплошной защите

Общая характеристика приближения сплошной защиты. Из общего комплекса инженерных методов расчета эффективности защиты в отдельную группу выделяют так называемые методы расчета сплошной защиты. К этой группе методов относят расчетные методы решения задач защиты, в которых можно пренебречь влиянием прострела или натечки рассеянного излучения через неоднородности на характер ослабления и величины основных функционалов γ -нейтронного излучения. Типичным случаем сплошной защиты является одномерная (плоская, цилиндрическая или сферическая) защита.

Приближение сплошной защиты; может быть использовано также для трехмерной защиты, если в ее составе не используются материалы с резко

отличающимися рассеивающими и поглощающими свойствами, а также отсутствуют пустоты, зазоры и другие воздушные полости. Однако эти условия в реальной защите, как правило, невыполняются, поэтому приближение сплошной защиты может быть справедливым лишь для отдельных расчетных направлений. Расчеты реальной защиты, имеющей неоднородности, выполняются, поэтому в два этапа. На первом этапе находится распределение основных функционалов в защите без учета прострелов и натечки рассеянного излучения, т. е. используется приближение сплошной защиты. На втором этапе по вычисленным распределениям функционалов с помощью методов расчета неоднородной защиты оценивается вклад прострелов и натечки излучения в искомые функционалы.

Основными целями инженерного расчета сплошной защиты являются:

1. Расчет пространственно-энергетического распределения нейтронов в реакторе и защите и, определение основных функционалов нейтронов (мощность, дозы нейтронного излучения за защитой, интегральный энергетический флюенс нейтронов на основные конструкции, распределение интегралов радиационного захвата и активации и т. д.).
2. Расчет пространственно-энергетического распределения удельной мощности источников захватного γ -излучения.
3. Расчет ослабления γ -излучения в защите и вычисление основных функционалов поля γ -излучения (мощность дозы γ -излучения за защитой, радиационное тепловыделение при поглощении γ -излучения).

Для расчета перечисленных функционалов нейтронного излучения достаточно ограничиться нахождением лишь дифференциального энергетического спектра плотности потока нейтронов (или пространственно-энергетическим распределением). Это обстоятельство дает возможность отказаться от точного интегрирования кинетического уравнения в высоком приближении, а использовать более простые методы, основанные на P_1 или P_2 приближениях, «выведении-диффузии», использовании факторов накопления. Относительно небольшое количество вычислений требуемое для этих методов имеет существенное значение с точки зрения практического использования в процессе проектирования, когда необходимо выполнять расчеты защиты целого ряда разрабатываемых вариантов установки для выбора наилучшего решения.

Расчет ослабления нейтронов в одномерной защите

Задача расчета нейтронной защиты является одной из основных при проектировании защиты, поскольку в силу высокой проникающей способности толщина необходимой защиты от нейтронов определяет

габариты защиты и всей установки. Одномерные методы расчета прохождения нейтронов получили широкое распространение в практических расчетах защиты. Они основаны на описании ослабления быстрых нейтронов (нейтронов выведения) с помощью экспериментальных сечений выведения или длин релаксации, а замедляющихся нейтронов – диффузионным многогрупповым способом и объединены общим названием «выведение-диффузия».

Одна группа выведения. Наибольшее развитие получили одномерные программы с одной группой выведения нейтронов – группой быстрых нейтронов. Использование приближения выведения для быстрых нейтронов заключается в замене полного сечения в кинетическом уравнении экспериментальным сечением выведения из группы, исключая переходы внутри группы при рассеянии на малые углы. В этом случае распределение потока быстрых нейтронов может быть записано в виде интеграла

$$\Phi_1(r) = \int_{V_{ист}} \frac{S(r') e^{-\int_{r'}^r \sum_{БВВ}(r'') d\|r-r''\|} \chi_1 dr'}{4\pi|r-r'|^2}, \quad (3.29)$$

где $S(r')$ – распределение плотности источника нейтронов в активной зоне; $\sum_{БВВ}(r')$ – сечение выведения; χ_1 – доля нейтронов первой группы в энергетическом спектре источника.

Потоки замедляющихся нейтронов рассчитываются по схеме решения диффузионных уравнений с источниками, определенными по следующей формуле:

$$S_j(r) = S(r)\chi_j + \sum_{i=1}^{j-1} \Sigma^{i \rightarrow j} \Phi_i(r), \quad (3.30)$$

где χ_j – доля нейтронов j -й группы в спектре источника; $\Sigma^{i \rightarrow j}$ – групповое сечение перехода нейтронов из i -й группы в группу j ; $\Phi_i(r)$ – распределение плотности потока нейтронов i -й группы.

В процессе реализации изложенного алгоритма, возможны отличия по числу энергетических групп в зависимости от системы используемых многогрупповых констант, по методам численного расчета потока быстрых нейтронов в выражении (3.29), а также по общему числу расчетных узлов и зон.

Стремление упростить и облегчить расчеты методом «выведение-диффузия» повлекло за собой создание малогрупповых подходов. Например, с использованием пяти групп нейтронов. Распределение нейтронов по энергетическим группам представлено в табл. 1.

Групповые константы для замедляющихся нейтронов определяются усреднением по энергетическим спектрам нейтронов, формирующимся в соответствующих средах с учетом толщины. Для конструкционных материалов (сталь, железо) в области нейтронов промежуточных и тепловых энергий производится усреднение констант как по спектрам, устанавливаемым в бесконечных средах из этих материалов, так и по спектрам, характерным для воды. Сравнение расчета и эксперимента показывает, что константы, усредненные по спектрам нейтронов в воде, дают более точное описание пространственно-энергетического распределения нейтронов в слоях конструкционных материалов, находящихся в воде или других водородосодержащих средах.

Величины длин релаксации нейтронов первой группы ($E \geq 2,0$ МэВ), используемые в программе, для основных материалов защиты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Распределение нейтронов по группам

Группа	Энергетический интервал, МэВ
1	≥ 2
2	$0,236 \div 2$
3	$0,06 \div 0,236$
4	$0,32 \cdot 10^{-6} \div 0,06 \cdot 10^{-6}$
5	ТЕПЛОВАЯ

Таблица 3

Длины релаксации быстрых нейтронов с $E \geq 2,0$ МэВ,

Номер	Материал	Плотность, г/см ³	Толщина, см	Длина релаксации, см
1	Вода		0...30; 30...60; 60...90	7,7; 9,3; 11;
2	Серпентиновый бетон	2,25	–	10,9
3	Графит	1,66	0...40	11
			40...80	14,5
			80...120	15,5
4	Железо	7,85	–	6,5

Вычисление распределения быстрых нейтронов, задаваемых интегралом (2.1), осуществляется с помощью приближенного выражения

$$\Phi_1(r) = \Phi_1(r_0) e^{-\lambda(r-r_0)} \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha, \quad (3.31)$$

где $\Phi_1(r_0)$ – плотность потока быстрых нейтронов, падающих на защиту; r_0 – радиус источника; λ – длина релаксации быстрых нейтронов в защите; r – координата расчетной точки; α – геометрический фактор ($\alpha = 0$ для одномерной плоской, $\alpha = 1$ для одномерной цилиндрической, $\alpha = 2$ для одномерной сферической геометрий). При расчете реальной защиты источник нейтронов (активная зона) сферизуется, т. е. коэффициента принимается равным 2. Потоки замедляющихся и тепловых нейтронов (2–5 группы) находятся путем численного решения диффузионных уравнений методом разностной факторизации.

В другом случае в группу выведения выделены нейтроны с энергией $>1,5$ МэВ, распределение нейтронов содержит восемь групп (табл. 4).

Таблица 4

Распределение нейтронов по группам

Группа	Энергетический интервал, МэВ	Группа	Энергетический интервал, МэВ
1	$>1,5$	5	$0,001 \div 0,04$
2	$0,7 \div 1,5$	6	$6,7 \cdot 10^{-6} \div 10^{-6}$
3	$0,3 \div 0,7$	7	$0,137 \cdot 10^{-6} \div 6,7 \cdot 10^{-6}$
4	$0,04 \div 0,3$	8	$< 0,137 \cdot 10^{-6}$

Распределения быстрых нейтронов определяются численным алгоритмом приближенного вычисления интеграла (3.29), основанным на использовании решения диффузионного уравнения для первой группы с коэффициентом диффузии

$D = \frac{1}{\Sigma_{ВЫВ}}$, где $\Sigma_{ВЫВ}$ – сечение выведения быстрых нейтронов. Верхней оценкой плотности потока быстрых нейтронов, которая задается интегралом (3.29) в защите, является величина

$$D = \frac{1}{1 + \Sigma_{ВЫВ}^3 (r - r_0)} \Phi_D(r), \quad (3.32)$$

где $\Sigma_{ВЫВ}^3$ – сечение выведения быстрых нейтронов в защите; $\Phi_D(r)$ – пространственное распределение быстрых нейтронов, рассчитанное в диффузионном приближении с коэффициентом диффузии $D = \frac{1}{\Sigma_{ВЫВ}}$.

Алгоритм оценки распределения быстрых нейтронов сводится к численному решению диффузионного уравнения, позволяющему из-

бежать трудоемких вычислений объемного интеграла (3.29) для каждого расчетного узла. Допуская некоторую ошибку (~30 %) в расчете на малых расстояниях от источника, данный подход обеспечивает необходимую для проектирования точность расчета плотности потока быстрых нейтронов для полной защиты. Потоки промежуточных и тепловых нейтронов определяются численным решением групповых диффузионных уравнений. Полученное пространственно-энергетическое распределение нейтронов используется для расчета мощности дозы нейтронов и плотности источников захватного γ -излучения.

Рассмотренные 8-групповой и 5 групповые алгоритмы содержат одну группу нейтронов выведения – группу быстрых нейтронов. Недостаток методов с одной группой нейтронов выведения связан с тем, что эффективная длина релаксации или сечение выведения не являются постоянными для данного материала. Эти физические параметры зависят от энергетического спектра нейтронов, который формируется в защите. В практике расчетов обычно используются асимптотические величины длин релаксаций, характерные для достаточно больших толщин защиты, что в отдельных случаях может привести к заметному завышению искомых величин.

Из-за сильной деформации спектра быстрых нейтронов в водородосодержащих защитах (ужесточение спектра) имеет место монотонное увеличение длины релаксации с ростом толщины защиты. Этот эффект может быть учтен приближенно кусочно-постоянной аппроксимацией зависимости длины релаксации от толщины путем разбиения слоя водородосодержащего материала на несколько слоев с постоянной величиной длины релаксации. Таким образом, основная погрешность в описании распределения быстрых нейтронов одной группой выведения связана с выбором величины длины релаксации в конкретном слое защиты, которая зависит от энергетического спектра быстрых нейтронов; сформированного в предыдущих слоях. С целью устранения этой погрешности вводятся несколько групп выведения нейтронов с меньшей величиной группового энергетического интервала. Расчет распределения нейтронов выведения в каждой из групп выполняется с использованием полуэмпирических значений сечений выведения нейтронов данной группы.

Несколько групп выведения. Методы расчета, реализующие многогрупповую схему метода «выведение-диффузия», различаются определением групповых сечений выведения и матрицами переходов. В некоторых случаях сечение выведения вычисляется по формуле

$$\Sigma_{ВЫВ}^j = \Sigma_t^j - \bar{\mu}^j \Sigma_{el}^j, \quad (3.33)$$

где Σ_t^j – полное макроскопическое сечение взаимодействия нейтронов j -й группы; Σ_{el}^j – макроскопическое сечение упругого рассеяния; $\bar{\mu}^j$ – средний косинус угла рассеяния нейтронов j -й группы.

В других случаях используются экспериментальные величины сечений выведения для защитных материалов. Рассмотрим модификацию метода «выведение-диффузия», с 16-групповой разбивкой энергий нейтронов. В области энергий нейтронов деления групповые потоки $\Phi_j(r)$ представлены в виде суммы потока выведения $\Phi_{ВЫВ}^j(r)$ и диффузионного потока $\Phi_{диф}^j(r)$, т. е. $\Phi^j(r) = \Phi_{ВЫВ}^j(r) + \Phi_{диф}^j(r)$. Потоки выведения вычисляются интегрированием нерассеянного ядра

$$\kappa(r, r') = \frac{\exp(-|\vec{r} - \vec{r}'| \Sigma_{ВЫВ}^j)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

по объему активной зоны, и плотность их столкновения используется в качестве источников для диффузионных потоков.

Величины сечений выведения, используемые в расчетах потоков выведения, определяются из следующего соотношения

$$\Sigma_{ВЫВ}^j = \Sigma_t^j - 2\pi \int_{-1}^1 \omega(\mu) \Sigma_{el}^j(\mu) d\mu, \quad (3.34)$$

где $\omega(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu < \mu_0; \\ 1 & \text{при } \mu > \mu_0; \end{cases}$, μ_0 – регулируемый параметр.

Параметр μ_0 есть косинус угла рассеяния в лабораторной системе координат, определяющий интервал телесного угла, внутри которого нейтроны источника рассматриваются как не рассеянные. Предполагается, что при рассеянии на угол, меньший, чем $\arccos \mu_0$, нейтрон сохраняет энергию и остается в группе выведения. При рассеянии на больший угол нейтрон выбывает из пучка и его дальнейшее поведение описывается диффузионным уравнением. Величина регулируемого параметра μ_0 определяется из условия совпадения результатов расчета с соответствующими экспериментальными данными по прохождению нейтронов. Путем проведения расчетов ослабления нейтронов в основных материалах защиты (вода, полиэтилен, графит, железо и др.) с различными величинами параметра μ_0 наилучшее согласие с имеющимися экспериментальными результатами получено при $\mu_0 = 0,85$ для водорода, 0,5 для кислорода и 0,6 для остальных элементов. Эти значения μ_0 использованы для расчета сечений выведения.

Потоки выведения вычисляются для первых 12 групп, где имеются нейтроны деления. Диффузионные потоки находятся решением уравнений вида

$$D^j \Delta \Phi_{\text{диф}}^j(r) - \Sigma_j \Phi_{\text{диф}}^j(r) + \sum_{i=1}^{j-1} \Sigma_{\text{диф}}^{ij} \Phi_{\text{диф}}^i + \sum_{i=1}^j \Sigma_{\text{ВЫВ}}^{ij} \Phi_{\text{ВЫВ}}^i = 0, \quad (3.35)$$

где $\Phi_{\text{диф}}^j(r)$ – диффузионный поток нейтронов j -й группы; Σ_j – сечение увода из j -й диффузионной группы; $\Sigma_{\text{диф}}^{ij}$ – сечение перехода из i -й диффузионной группы в j -ю группу; $\Sigma_{\text{ВЫВ}}^{ij}$ – сечение перехода из i -й группы выведения в j -ю диффузионную группу.

Диффузионные потоки и потоки выведения рассчитываются с использованием одной и той же матрицы переходов. Расчет диффузионных потоков проводится последовательно, начиная с первой группы, по следующей схеме:

1. Находится источник для первой диффузионной группы $S_1(r) = \Phi_{\text{ВЫВ}}^1(r) \Sigma_{\text{ВЫВ}}^{1,1}$
2. Из решения диффузионного уравнения первой группы с источником $S_1(r)$ находится диффузионный поток и вычисляется полный поток нейтронов для первой группы $\Phi^1(r) = \Phi_{\text{диф}}^1(r) + \Phi_{\text{ВЫВ}}^1(r)$
3. Для последующих групп $j \geq 2$ источники нейтронов вычисляются аналогичным образом с учетом диффузионных потоков и потоков выведения.

Многогрупповые константы: сечение увода Σ_j , транспортное сечение Σ_{tr} и элементы матриц перехода Σ_{ij} – получены усреднением в пределах энергетических групп. Константы тепловой группы усреднены по спектру нейтронов в бесконечной среде с составом и температурой, соответствующими данной расчетной зоне. Спектр тепловых нейтронов определялся в модели тяжелого газового замедлителя (спектр Уилкинса).

Анализ результатов расчета по рассмотренному алгоритму показывает, что расчеты по методу «выведение-диффузия» с вычисленными значениями сечений выведения позволяют учесть деформацию спектра быстрых нейтронов с толщиной защиты и получить характер ослабления, близкий к экспериментальному. Пространственно-энергетическое распределение нейтронов, полученное по рассмотренным инженерным алгоритмам, используется для вычисления основных функционалов нейтронного потока, необходимых для расчета защиты: мощности дозы нейтронов, распределения интегралов захвата, активации и др.

Расчет ослабления γ -излучения

Задачей инженерного расчета ослабления γ -излучения является определение основных функционалов, определяющих эффективность защиты: плотности потока энергии (интенсивности); мощности дозы и радиационного тепловыделения. Практические задачи расчета защиты от γ -излучения можно разбить на две группы. В задачах первой группы рассчитываются, функционалы от источников, распределенных по слоям защиты (расчет ослабления захватного или активационного γ -излучения). Интенсивность источников захватного γ -излучения в защите определяется по результатам расчета пространственно-энергетического распределения нейтронов в, соответствующих направлениях. В задачах, второй группы определяются функционалы от отдельных, объемных источников γ -излучения (шар, цилиндр и т. д.). Такая геометрия характерна для расчета ослабления активационного γ -излучения из теплоносителя I контура (парогенераторы, трубопроводы, насосы и другое оборудование).

В существующих инженерных программах расчета прохождения γ -излучения для обоих рассмотренных типов задач, используется алгоритм, основанный на вычислении искомым функционалов, создаваемых нерассеянным излучением, и учете вклада рассеянного излучения с помощью факторов накопления. Расчет потока нерассеянных γ -квантов аналогичен расчету потоков нейтронов выведения и осуществляется интегрированием функции влияния точечного источника по объему реального источника. Функция влияния моноэнергетического точечного изотропного источника в бесконечной одномерной среде имеет вид

$$K(r_u, r_s, E) = \frac{e^{-b}}{4\pi(\bar{r}_u - \bar{r}_s)^2}, \quad b = \mu(E)(\bar{r}_u - \bar{r}_s), \quad (3.36)$$

где $\mu(E)$ – линейный коэффициент ослабления γ -излучения энергии источника.

В случае гетерогенной защиты из различных материалов в показателе экспоненты в выражении (3.36) используется общая оптическая толщина защиты в длинах свободного пробега γ -квантов источника $b = \sum_i \mu_i(E)x_i$, где x_i – толщина i -го слоя защиты по лучу $\bar{r}_u - \bar{r}_s$.

Распределение источников захватного γ -излучения по толщине защиты определяется по формуле

$$S_i(r) = \sum_{ij} \Phi_j(r) \rho_i(r) \sigma_{ij}^{ny} \alpha_i^j, \quad (3.37)$$

где $\Phi_j(r)$ – плотность потока нейтронов j -й группы; $\rho_i(r)$ – ядерная концентрация i -го элемента; σ_{ij}^{ny} – сечение радиационного захвата нейтронов j -й группы ядром i -го элемента; α_i^l – выход гамма квантов l -й группы на захват нейтрона ядром i -го элемента. Число энергетических групп γ -излучения (5, 7, 10 и т. д.) выбирается исходя из используемой библиотеки характеристик ослабления.

Для расчета функционалов γ -излучения в программе используется кусочно-постоянная аппроксимация распределения плотности источников каждой группы. Плотность потока нерассеянного γ -излучения в расчетной точке, создаваемая k -м слоем источника, определяется интегрированием выражения (3.38) по объему этого слоя

$$d\Phi_k^l(r_s) = \frac{S_{k-1}^l + S_k^l}{2} \cdot \frac{e^{-b_l(\mu_k^l, \mu_1^l, \dots, \mu_n^l, x)}}{4\pi x^2} dV_k, \quad (3.38)$$

здесь $b_l(\mu_k^l, \mu_1^l, \dots, \mu_n^l, x)$ – оптическая толщина защиты до расчетной точки r_s для гамма – квантов l -й группы; μ_k^l – линейный коэффициент ослабления гамма – излучения l -й группы в материале слоя источника; μ_1^l, \dots, μ_n^l – линейные коэффициенты ослабления γ -излучения в материале защиты; x – расстояние от элемента источника dV_k до расчетной точки r_s ; $\frac{S_{k-1}^l + S_k^l}{2}$ – средняя величина плотности источников l -й группы в k -м слое источника.

При интегрировании выражения (3.38) по объему k -го слоя учитывается конечность источника в поперечном направлении. С этой целью предусмотрено задание радиуса R_k для каждого слоя защиты, ограничивающего область интегрирования в поперечном направлении. Величина R_k выбирается для каждого слоя в зависимости от расстояния до активной зоны и ее размеров.

Вклад рассеянных γ -квантов учитывается введением факторов накопления (дозовых, энергетических, поглощенной энергии). Фактор накопления в гетерогенной защите определяется усреднением факторов накопления для каждого материала с весом, равным его оптической толщине

$$B = \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i t_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i t_i} B_i(\sum_{i=1}^m \mu_i t_i), \quad (3.39)$$

где t_i – толщина i -го материала между источником и расчетной точкой;

$B_i(\sum_{i=1}^m \mu_i t_i)$ – фактор накопления в i -м материале при толщине, равной общей оптической толщине защиты между источником и расчетной точкой. Используется экспоненциальное представление факторов накопления γ -излучения для точечного изотропного источника

$$B(\mu t, E_l) = A_1(E_l) e^{-\alpha_1(E_l) \mu t} + (1 - A_1(E_l)) e^{-\alpha_2(E_l) \mu t}. \quad (3.40)$$

Интегрирование уравнения (3.38) с учетом (3.39) и (3.40) дает следующее соотношение

$$\Phi_k^l(r) = \frac{S_{k-1}^l + S_k^l}{2} \cdot \sum_{i=1}^m \frac{b_i^l}{b^l} \sum_{j=1}^2 \frac{A_j^{il}}{1 + \alpha_j^{il}} \left\{ \frac{\left[E_2 \left\langle (1 + \alpha_j^{il}) b_3^l \right\rangle - E_2 \left\langle (1 + \alpha_j^{il}) b^l \right\rangle \right] - \left[E_2 \left\langle (1 + \alpha_j^{il}) b_3^l \sqrt{\left(\frac{R_k}{r_s - r_k} \right)^2 + 1} \right\rangle - \left[-E_2 \left\langle (1 + \alpha_j^{il}) b^l \sqrt{\left(\frac{R_k}{r_s - r_k} \right)^2 + 1} \right\rangle \right]}{\sqrt{\left(\frac{R_k}{r_s - r_k} \right)^2 + 1}} \right\}$$

где $b^l = \sum_{i=1}^m b_i^l$ – оптическая толщина защиты до расчетной точки;

$b_i^l = \int_{r_k - \Delta r_k}^{r_s} \mu_i^l dr$ – оптическая толщина i -го материала; $b_3^l = b^l - \mu_k \Delta r_k$;

A_j^{il}, α_j^{il} – коэффициенты экспоненциального представления фактора накопления γ -излучения l -й группы в i -м материале.

Такое представление позволяет получить такие функционалы как мощность дозы, плотности потока энергии, удельной мощности радиационного тепловыделения. В целом алгоритмы расчета функционалов γ -излучения, отличаются методами учета рассеянного излучения. Кроме формулы (3.39) для фактора накопления в гетерогенной защите используется формула Бродера

$$B = \sum_{n=1}^m B_n \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) - \sum_{n=2}^m B_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i \right), \quad (3.41)$$

где B_n – фактор накопления в материале n -го слоя при оптической толщине материала, равной оптической толщине защиты по n -й слой включительно.

Кроме мощности дозы, интенсивности и тепловыделения, можно рассчитывать угловые распределения плотности потока $\Phi(\Omega)$ и плотности тока $I(\Omega)$ нерассеянных γ -квантов. Вычисление угловой плотности тока и потока нерассеянных γ -квантов производится для каждого элементарного, плоского слоя Δr_k , который рассматривается как объемный источник с постоянной удельной мощностью, равной $\frac{S_{k-1}^l + S_k^l}{2}$. Вычисление угловых распределений производится для каждой энергетической группы γ -квантов, полученные результаты суммируются по элементарным источникам Δr_k .

Широко используемый в практических расчетах способ учета рассеянного излучения заключается в использовании факторов накопления для точечных изотропных источников в бесконечной, среде, представленных в виде суммы экспонент

$$B(E_0, \mu t) = \sum_{i=1}^2 A_i(E_0) e^{-\alpha_i(E_0)\mu(E_0)t}. \quad (3.42)$$

В случае однородной бесконечной среды учет рассеянного излучения с помощью экспоненциального представления факторов накопления приводит к замене истинных значений линейных коэффициентов ослабления величинами вида $(1 + \alpha_i)\mu$, где α_i – i -й коэффициент экспоненциального представления, а величина искомого функционала, учитывающего рассеянное излучение, представляется суммой двух слагаемых с коэффициентами A_1 и A_2 соответственно. Величина каждого из слагаемых находится по формуле для нерассеянного излучения с линейными коэффициентами ослабления, равными $(1 + \alpha_1)\mu$ и $(1 + \alpha_2)\mu$.

Использование факторов накопления точечных изотропных источников в однородной бесконечной среде в расчетах реальной конечной защиты приводит к некоторому завышению искомого функционалов. Величина завышения для γ -квантов с энергией больше 4 МэВ и при толщинах защиты $\mu t > 1$ для основных материалов составляет менее 10 %, что вполне приемлемо в инженерных расчетах. В случае гетерогенной защиты рекомендуется использовать формулы (3.38) и (3.42).

Методы расчета неоднородной защиты

Лучевой метод. Трудности расчета ослабления излучений в реальной защите реакторов обусловлены наличием двумерных и трехмерных неоднородностей и различного рода полостей, что ограничивает использование методов расчета, разработанных применительно к одно-

мерной геометрии. Одним из основных методов инженерного расчета реальной защиты, широко используемым в практике проектирования ядерных реакторов, является лучевой метод

При оценке ослабления излучений лучевым методом учитываются характеристики защиты (состав и толщины отдельных слоев) только по направлению луча между элементарным источником и расчетной точкой. Учет фактической геометрии источника и защиты производится интегрированием точечного ядра ослабления вида $\exp(-\Sigma r)/4\pi r^2$ по объему реального источника, где Σr – оптическая толщина защиты по лучу, соединяющему элементарный источник с детектором. В общем случае лучевой метод является строгим и может быть использован без всяких ограничений для расчета функционалов нерассеянного излучения.

Лучевой метод распространяется так же на такие задачи расчета защиты, в которых закономерности ослабления излучений определяются нерассеянными или рассеянными на малые углы нейтронами или γ -квантами, что обычно выполняется для быстрых нейтронов и жестких γ -квантов.

Другое ограничение применимости лучевого метода связано с геометрией защиты, поскольку вклад рассеянного излучения зависит не только от состава защиты по направлению расчетного луча, но и от состава защиты в некоторой области вокруг этого луча. В реальной защите состав и толщина слоев в окрестности расчетного луча могут существенно отличаться от состава защиты, по расчетному лучу. Применение лучевого метода в этом случае будет оправданным, если состав и толщина слоев защиты будут сохраняться в окрестности расчетного луча. Другими словами, геометрические ограничения применимости лучевого метода связаны с возможностью аппроксимации реальной геометрии защиты соответствующей одномерной с составом и толщинами слоев, определенными по расчетному лучу:

В определенном смысле лучевой метод может рассматриваться как аналог приближению геометрической оптики, поскольку позволяет рассчитать величины функционалов, формируемые прямым излучением источника, для реальной неоднородной защиты, в предположении прямолинейного распространения излучения.

Область применения лучевого метода для расчета реальной неоднородной защиты ограничена классом задач, в которых основные функционалы излучения формируются прямым излучением источника в предположении его прямолинейного распространения. При этом параметры защиты, учитываемые в расчете, (толщина и состав слоев защитных материалов), определяются по расчетному лучу, соединяющему

элементарный источник с расчетной точкой, а геометрия защиты предполагается одномерной (плоской, цилиндрической или сферической в зависимости от геометрии источника) и расчет искомым функционалов проводится с помощью одномерных алгоритмов.

Расчет защиты в двумерном и трехмерном случаях. Необходимость корректного учета фактической геометрии источников излучения и защиты и имеющиеся ограничения применимости лучевого метода подчеркивают важность разработки методов решения уравнения переноса в двумерной и трехмерной геометрии. В силу сложности и громоздкости численных алгоритмов решения уравнения переноса в многомерном случае большинство разработанных алгоритмов основано на диффузионном приближении и ограничено случаем двумерной геометрии. Однако диффузионное приближение не обеспечивает возможность расчета защиты с большой кратностью ослабления излучения, поскольку уравнение диффузии справедливо лишь на умеренных расстояниях от активной зоны. Поэтому в сопоставимых условиях погрешность расчета по двумерным диффузионным программам обычно больше, погрешности одномерных программ, в которых ослабление быстрых нейтронов рассчитывается с помощью полуэмпирических методов длин релаксации или сечения выведения.

Эффективным средством повышения точности двумерных расчетов для больших толщин является сочетание полуэмпирических методов для нерассеянных быстрых нейтронов и диффузионного приближения для замедляющихся нейтронов. При этом расчет распределения плотности потока нейтронов выведения, может быть выполнен лучевым методом путем интегрирования точечного ядра ослабления $\exp(-\Sigma r)/4\pi r^2$ по объему источника. Плотность столкновений, нейтронов выведения используется в качестве источника для двумерного уравнения диффузии.

Существенное снижение трудоемкости двумерного расчета может быть достигнуто в приближении «выведение-диффузия», если, расчет плотности потоков нейтронов выведения производить в двумерной геометрии, а плотность потока замедляющихся нейтронов в соответствующей одномерной. Такой подход может быть реализован для цилиндрической активной зоны, в осевом и радиальном (в центральной плоскости активной зоны) направлениях и позволяет более корректно учитывать фактическую геометрию задачи и влияние радиального и высотного полей источника на распределение нейтронов в защите.

Практически единственным методом решения трехмерных задач расчета защиты со сложной геометрией является метод Монте-Карло, основные идеи которого изложены ранее. В последние годы этот метод существенно усовершенствован благодаря разработке различных спосо-

бов уменьшения дисперсии выборки. До недавнего времени основным недостатком метода Монте-Карло являлись большие затраты машинного времени на решение задачи, что практически не позволяло проводить расчеты защит с кратностью ослабления излучения $>10^5$. Однако развитие параллельных алгоритмов и появление суперкомпьютеров сделали метод Монте-Карло наиболее привлекательным.

Метод эффективных поверхностных источников. Ограниченность лучевого метода и отмеченные недостатки двумерных и трехмерных программ (большая трудоемкость расчетов, малые толщины рассчитываемой защиты) стимулировали разработку и использование в практике проектирования защиты инженерных методов, использующих поэтапный расчет прохождения излучения через неоднородную защиту. Сущность этого подхода заключается в введении системы эффективных поверхностных источников, эквивалентных с точки зрения формирования радиационной обстановки за защитой рассматриваемым в задаче объемным источником излучения. Эффективные поверхностные источники вводятся таким образом, чтобы их характеристики (распределение поверхностной плотности) и ослабление излучения этих источников могли быть рассчитаны лучевым методом, т. е. должно быть обеспечено выполнение условий применимости лучевого метода.

Метод эффективных поверхностных источников можно рассматривать, как дальнейшее развитие метода преобразования объемных источников в эквивалентные поверхностные. Замена объемных источников эквивалентными поверхностными в отдельных задачах защиты может привести к заметному упрощению нахождения решения, так как позволяет избежать расчета рассеянного излучения в источнике. В качестве эквивалентного поверхностного источника при этом рассматривается поверхность, ограничивающая реальный объемный источник.

Основное отличие метода эффективных поверхностных источников заключается в том, что геометрия эффективных источников однозначно не связывается с поверхностью объемного источника, а выбирается с учетом геометрии защиты из обеспечения условий применимости лучевого метода.

Расчет плотности потока излучения в точке D методом эффективных поверхностных источников сводится к вычислению интегралов вида

$$\Phi_1(r_D) = \int_s \frac{\Phi(r_s) f(\Theta, \varphi) \cos \Theta}{(r_s - r_D)^2} ds, \quad (3.43)$$

где $\Phi(r_s)$ – плотность потока излучения на поверхности эффективного источника в точке r_s ; $f(\Theta, \varphi)$ – нормированное угловое распределение плотности потока излучения на поверхности источника; $(r_s - r_D)$ – рас-

стояние от элемента ds до расчетной точки. Если между эффективным поверхностным источником и расчетной точкой расположена защита, то в интеграл (3.43) вводится экспоненциальная функция, учитывающая ослабление излучения в защите $- e^{-b(r_s, r_D)}$, где $b(r_s, r_D)$ – оптическая толщина защиты по лучу между элементом ds и расчетной точкой D .

Учет вклада рассеянных γ -квантов при расчетах функционалов γ -излучения производится с помощью соответствующих факторов накопления, которые представляются в экспоненциальной форме (формула Тейлора) или задаются в табличной форме и учитываются при численном интегрировании.

Интеграл (3.1) в некоторых частных, случаях (геометрически правильная форма поверхности, изотропное или косинусоидальное угловое распределение, постоянная по поверхности источника плотность потока) может быть выражен через элементарные или табулированные функции. В общем случае вычисление интеграла (3.1) требует использования численных методов.

Одним из основных условий успешного использования метода эффективных поверхностных источников является достоверное определение угловой направленности плотности потока излучения, формируемой в защите. К настоящему времени выполнен большой объем расчетно-экспериментальных исследований по изучению угловых энергетических распределений нейтронов и γ -квантов в различных защитных материалах, и полученная информация может быть использована для предсказания угловых распределений излучения в конкретных композициях защиты. Для практического использования имеющейся информации в проектных расчетах, важное значение компактное аналитическое представление угловых распределений излучения для основных материалов защиты.

С этой точки зрения представляют интерес результаты, в которых показана возможность аналитической аппроксимации плотности потока нейтронов в единичном телесном угле экспоненциальной зависимостью вида $\exp(-\Theta/\Theta_0)$, где Θ – угол, отсчитываемый от нормали к поверхности защитного экрана, Θ_0 – характеристический угол. Такая аппроксимация справедлива в интервале $15^\circ \leq \Theta \leq 80^\circ$. Если предположить справедливость подобной аппроксимации в интервале $0 \leq \Theta \leq 90^\circ$, то можно получить нормированное угловое распределение плотности потока нейтронов в виде

$$\Phi(\Theta) = \frac{(1 + \Theta_0^2)}{2\pi\Theta_0 \left(\Theta_0 - \exp\left(-\frac{\pi}{2\Theta_0}\right) \right)} \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{\Theta_0}\right) \quad (3.44)$$

удобном для использования в расчетах ослабления излучения эффективных поверхностных источников.

Для описания углового распределения эффективных поверхностных источников, обусловленных рассеянным γ -излучением в защите, может быть рекомендовано экспоненциальное приближение

$$\frac{dI(\Theta)}{d\Omega} = \frac{I_0 (B^{\text{ЭН}} - 1)(1 + \Theta_0^2)}{2\pi\Theta_0 \left(\Theta_0 - \exp\left(-\frac{\Theta}{2\Theta_0}\right) \right)} \cdot \exp\left(-\frac{\Theta}{\Theta_0}\right), \quad (3.45)$$

I_0 – интенсивность нерассеянного γ -излучения, $B^{\text{ЭН}}$ – энергетический фактор накопления.

При этом энергия γ -излучения в зависимости от угла рассеяния должна определяться по формуле $E = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{m_0 c^2} (1 - \cos \Theta)}$, где $m_0 c^2$ –

энергия покоя электрона.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Расчет потоков быстрых и тепловых нейтронов на поверхности АЗ

Быстрые нейтроны: Средняя удельная мощность источников нейтронов деления равна

$$S_v = \frac{3,2 \cdot 10^{10}}{V_{a.z.}} N \cdot \nu, \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (1)$$

где $\nu=2,5$; $V_{a.z.}$ – объем активной зоны, см^3 ; N – мощность активной зоны, Вт.

Для нейтронов с энергией больше некоторого определенного значения E средняя удельная мощность источников в активной зоне равна

$$S_v(E) = \frac{3,2 \cdot 10^{10}}{V_{a.z.}} N \cdot \nu \int_E^{\infty} S(E) dE, \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (2)$$

Ниже приведены значения $S(E)$ и интеграла $\int_E^{\infty} S(E) dE$ для спектра деления ^{235}U тепловыми нейтронами (табл. 5).

Таблица 5

Спектр деления ^{235}U тепловыми нейтронами

$E, \text{ МэВ}$	$S(E)$	$\int_E^{\infty} S(E) dE$
0	0	1
0,05	0,1482	0,9950
0,5	0,3470	0,8670
1,0	0,3270	0,6901
1,5	0,2977	0,5280
2,0	0,2388	0,3938
5,0	$3,746 \cdot 10^{-2}$	$5,124 \cdot 10^{-2}$
10,0	$8,562 \cdot 10^{-4}$	$1,058 \cdot 10^{-3}$
11,0	$3,840 \cdot 10^{-4}$	$4,686 \cdot 10^{-4}$

Плотность потока быстрых нейтронов на поверхности активной зоны для $E=1,5$ МэВ и $\nu=2,5$ удовлетворительно определяется соотношением

$$\Phi_{\sigma}(E > 1,5) = 2,02 \cdot 10^{10} \frac{N}{\Sigma_{a.z.} V_{a.z.}}, \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (3)$$

где $\Sigma_{a.з.}$ – сечение выведения быстрых нейтронов с энергией выше 1,5 МэВ в активной зоне, см^{-1} .

Макроскопическое сечение выведения в объеме активной зоны определяется соотношением

$$\Sigma_{a.з.} = \sum_j N_j \sigma_{\text{выв}j}, \text{см}^{-1}, \quad (4)$$

где N_j – ядерная концентрация j -го элемента в активной зоне, см^{-3} ; $\sigma_{\text{выв}j}$ – микроскопическое сечение выведения для j -го элемента, см^2 .

Тепловые нейтроны: Поток утечки тепловых нейтронов из активной зоны равен:

$$\bar{\Phi}_t = \frac{\Phi_t \Sigma_a V_{a.з.}}{S_{a.з.}} B^2 L^2, \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (5)$$

где $\bar{\Phi}_t$ – средний поток тепловых нейтронов в активной зоне, который при мощности N (Вт) и макросечении деления горючего Σ_f равен

$$\Phi_t = \frac{3,1 \cdot 10^{10} N}{\Sigma_f V_{a.з.}}, \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Σ_a – макросечение поглощения тепловых нейтронов в активной зоне, см^{-1} ; B, L – геометрический параметр активной зоны (см^{-1}) и длина диффузии (см), которые определяются нейтронно-физическим расчетом.

Ослабление нейтронного излучения в первичной защите

Быстрые нейтроны: Если рассматривать активную зону как источник мононаправленного излучения, это позволяет рассчитать защиту «с запасом» и упростить вычисления. В этом случае закон ослабления группы быстрых нейтронов имеет вид

$$\Phi_\sigma(x) = \Phi_\sigma(0) e^{-\frac{x}{\lambda} \left(\frac{R_0}{R_0 + x} \right)^\alpha}, \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (6)$$

где $\Phi_\sigma(x)$ – плотность потока быстрых нейтронов на глубине x в защите; $\Phi_\sigma(0)$ – плотность потока быстрых нейтронов при входе в защитный слой; λ – длина релаксации нейтронов, см; $\left(\frac{R_0}{R_0 + x} \right)^\alpha$ – геометрический фактор ослабления, учет которого имеет смысл, когда размеры защиты

(толщина) соизмеримы с размерами активной зоны (например, ВВЭР); R_0 – внутренний радиус кривизны защитного слоя; a – показатель геометрии источника (геометрический фактор), равный: $a = 0$ – в случае плоского источника бесконечных размеров, $a = 1$ – «бесконечного» цилиндра, $a = 2$ – сферы.

Тепловые нейтроны: Так как пробеги тепловых нейтронов относительно невелики, то геометрическим фактором можно пренебречь. Тогда поток тепловых нейтронов в защите можно определить по формуле

$$\Phi_t(x) = \Phi_t(0)e^{-\frac{x}{L}} + \Phi_o(0) \left[\lambda \Sigma_a \left(1 - \frac{L^2}{\lambda^2} \right) \right]^{-1} \left(e^{-\frac{x}{\lambda}} - e^{-\frac{x}{L}} \right). \quad (7)$$

В целом, упрощенная картина ослабления нейтронов в защите такова, что быстрые нейтроны, замедляясь, переходят в тепловую группу. Нейтроны же тепловой группы, «подпитываемые» замедляющимися быстрыми, поглощаются.

Расчет мощности первичного гамма-излучения активной зоны

В проектных расчетах непрерывный энергетический спектр аппроксимируют суперпозицией моноэнергетических источников. Весь диапазон энергий гамма-излучения разбивается на отдельные группы с интервалом ΔE_i и средней энергией \bar{E}_i , например табл. 6.

Таблица 6
Спектр мгновенного гамма-излучения и осколков деления для ^{235}U

Энергия гамма-излучения	Интервал энергий, МэВ				
	0÷1	1÷3	3÷5	5÷7	>7
Выход мгновенного гамма-излучения, МэВ/дел	2,5	3,81	1,0	0,28	0,025
Выход гамма-излучения осколков, МэВ/дел	4,7	2,56	–	–	–
Суммарный выход, МэВ/дел	7,2	6,37	1,0	0,28	0,025

Средняя удельная мощность источников гамма-излучения (МэВ/см²с) деления осколков деления с энергией от E_1 до E_2 в активной зоне работающего реактора вычисляется по формуле

$$q_{\text{дел}}(E_1 \geq E \geq E_2) = \frac{3,2 \cdot 10^{10} N}{V_{a.z.}} \int_{E_1}^{E_2} S_{\text{дел}}(E) dE, \quad \text{МэВ}/(\text{см}^2 \cdot \text{с}), \quad (8)$$

где $\int_{E_1}^{E_2} S_{\text{дел}}(E)dE$ – выход энергии гамма-излучения на одно деление

в интервале от E_1 до E_2 .

Мощность источников гамма-излучения деления (мгновенного и осколков деления) резко падает с увеличением энергии. Поэтому определяющий вклад в гамма-излучение из активной зоны в области энергий более 3 МэВ вносит третий вид гамма-излучения – захватное (табл. 7). Для приближенной оценки источников захватного гамма-излучения из активной зоны реактора на тепловых нейтронах можно использовать выражение

$$\begin{aligned} \bar{q}_{\text{зах}}(E_1 \leq E \leq E_2) = \\ = \frac{3,2 \cdot 10^{10} N}{V_{\text{аз}}} \sum_j \frac{\Sigma_j(n, \gamma)}{\Sigma_f^5} \int_{E_1}^{E_2} S_{\text{зах}}^j(E)dE, \text{ МэВ}/(\text{см}^2 \cdot \text{с}), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Sigma_1(n\gamma)$ – макроскопическое сечение радиационного захвата теплового нейтрона на ядрах j -го элемента, см^{-1} ; Σ_f^5 – макросечение деления

^{235}U , см^{-1} ; $\int_{E_1}^{E_2} S_{\text{зах}}^j(E)dE$ – выход энергии захватного гамма-излучения

в интервале $E_1 \leq E \leq E_2$ при захвате j -го элемента, $\text{МэВ}/(\text{см}^3 \cdot \text{с})$.

Таблица 7

Спектр гамма-излучения при радиационном захвате тепловых нейтронов в некоторых материалах

Ядро	$\sigma(n\gamma)$, барн	Интервалы энергий, МэВ					E_{max} , МэВ
		0÷1	1÷3	3÷5	5÷7	>7	
H	0,335	0	1	0	0	0	2,23
C	0,00375	0	0	1	0	0	4,95
Na	0,47	0,96	3,14	0,7	0,31	0	6,41
Cr	3,1	0,85	0,62	0,12	0,23	0,45	9,72
Fe	2,62	0,75	0,87	0,23	0,25	0,40	10,16
Ni	4,6	0,84	0,63	0,23	0,34	0,63	9,0
Pb	0,17	0	0	0	0,07	0,93	7,38
U^{238}	2,71	2,54	2,69	0,34	0	0	4,06

Интенсивность гамма-излучения энергии E_i , на поверхности активной зоны в приближении полубесконечного однородного источника определяется по формуле

$$I(E_i) = \frac{\bar{q}(E_i)}{2\mu(E_i)} \left[\frac{A(E_i)}{1 + \alpha_1(E_i)} + \frac{1 - A(E_i)}{1 + \alpha_2(E_i)} \right], \text{ МэВ}, \quad (10)$$

где $\bar{q}(E_i)$ – средняя по объёму активной зоны мощность источников гамма-излучения энергии E_i , рассчитанная по формулам (8) и (9):

$$\bar{q}(E_i) = \bar{q}_{\text{дел}}(E_i) + \bar{q}_{\text{зах}}(E_i),$$

где i – число интервалов разбиения спектра гамма-излучения. В нашем случае $i = 5$. Значение $\mu(E_i)$ – расчетный линейный коэффициент ослабления гамма-излучения энергии E_i в активной зоне; $A(E_i)$, $\alpha_1(E_i)$, $\alpha_2(E_i)$ – расчетные коэффициенты экспоненциального представления энергетического фактора накопления гамма-излучения в активной зоне.

Расчет захватного (вторичного) гамма-излучения в защите

Плотность генерации захватного гамма-излучения, рождающегося в защитных слоях, определяется пространственным распределением плотности потоков тепловых нейтронов в этих слоях. При этом удельная активность потока захватного излучения с энергией E_i на поверхности слоя защиты, генерирующего захватное гамма-излучение, вычисляется по формуле

$$I_{\text{зах}}(E) = \Phi_t(0)K \sum (n\gamma) \int_{E_1}^{E_2} S_{\text{зах}}(E) dE, \text{ МэВ}/(\text{см}^2 \cdot \text{с}). \quad (11)$$

Если материал защитного слоя состоит из нескольких веществ (например, бетон), то результаты расчетов удельных интенсивностей захватных квантов энергии E_i приходится суммировать по числу компонентов j :

$$I_{\text{зах}}(E_i) = \sum_j \Phi_t(0) \Sigma_j(n\gamma) K \int_{E_1}^{E_2} S_{\text{зах}}^j(E) dE, \text{ МэВ}/(\text{см}^2 \cdot \text{с}). \quad (12)$$

В формулах (11), (12) использованы следующие обозначения: $\Phi_t(0)$ – плотность потока тепловых нейтронов при входе в слой, $(\text{см}^{-2} \cdot \text{с})$; $\Sigma(n\gamma)$ или $\Sigma_j(n\gamma)$ – макроскопическое сечение радиационного захвата

нейтронов в чистом веществе j ; $\int_{E_1}^{E_2} S_{\text{зах}}^j(E) dE$ – выход захватного излучения энергии E_i при захвате ядром j -го элемента в соответствующем энер-

гетическом интервале; K – функция, учитывающая форму распределения плотности потока тепловых нейтронов по толщине слоя защиты.

Случай 1. Если плотность потока нейтронов в слое изменяется по закону

$\Phi(x) = \Phi(0) \cdot e^{+\Sigma_a \cdot x}$, то функция K имеет вид

$$K = \frac{1}{2\Sigma_a} \left\{ \ln \left| \frac{\mu - \Sigma_a}{\mu} \right| - e^{\Sigma_a d} E_1(\mu \cdot d) + E_1[(\mu - \Sigma_a)d] \right\} - \frac{1}{2} \frac{\Sigma_a}{(\mu - \Sigma_a)} \left[1 - e^{-(\mu - \Sigma_a)d} \right]. \quad (13)$$

Случай 2. Если плотность потока нейтронов в слое изменяется по закону:

$\Phi(x) = \Phi(0) \cdot e^{-\Sigma_a \cdot x}$, то функция K имеет иной вид

$$K = \frac{1}{2\Sigma_a} \left\{ \ln \left| \frac{\mu - \Sigma_a}{\mu} \right| - e^{\Sigma_a d} E_1(\mu \cdot d) + E_1[(\mu + \Sigma_a)d] \right\} - \frac{1}{2} \frac{\Sigma_a}{(\mu + \Sigma_a)} \left[1 - e^{-(\mu - \Sigma_a)d} \right]. \quad (14)$$

В последних формулах приняты следующие обозначения: d – толщина защитного слоя; Σ_a – макросечение поглощения нейтрона; E_1 – интегральная экспонента; μ – линейный коэффициент ослабления квантов.

Случай 3. Когда распределение плотности потока нейтронов по толщине слоя может рассматриваться как равномерное (например, тонкий слой, толщиной не более трех длин свободного пробега излучения), функция K упрощается:

$$K = \frac{1}{2\mu} \left[1 - E_2(\mu \cdot d) \right], \quad (15)$$

где E_2 – функция Кинга.

Расчет ослабления гамма-излучения в защите

Чтобы определить ослабление интенсивности гамма-излучения от-дельно взятой энергии E_i в многослойной защите, можно использовать формулу

$$I(d, E_i) = I(0, E_i) \cdot E_1 \left(\sum \mu \cdot d_i \right) \overline{B_{cl}}, \quad (16)$$

где d – общая толщина защиты; $I(0, E_i)$ – интенсивность гамма-излучения энергии E_i при входе в защиту; $\mu \cdot d$ – число пробегов гамма-излучения энергии E_i в защите; E_1 – интегральная экспонента; $\overline{B_{cl}}$ – средний фактор наполнения квантов энергии E_i с учетом всех слоев защиты, который определяется по формуле

$$\overline{B_{cl}} = \frac{1}{\mu \cdot d} \sum_j [B_i(\mu \cdot d) \mu \cdot d_i], \quad (17)$$

B_i – фактор накопления рассеянных квантов отдельного слоя как функция суммарного числа пробегов квантов во всей защите; d_i – толщина отдельного слоя.

В конце расчётов определяют мощность дозы по гамма-излучению и сравнивают с допустимой. В случае превышения расчетной мощности дозы допустимых пределов или её значимой малости требуется провести оптимизацию, изменяя толщину слоев защиты, добавляя новые слои, заменяя дорогостоящие вещества на более дешевые и т. д. При этом следует учитывать температурные условия работы защитных материалов и недопустимость в них радиационных повреждений (особенно в корпусе ВВЭР).

В правильно сконструированной защите вклад в суммарную мощность дозы за защитой от нейтронов и гамма-излучения примерно одинаков, температура бетона не превышает допустимую, а корпус реактора надежно защищен от недопустимых тепловыделений и радиационных повреждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы теории и методы расчета ядерных реакторов: учеб. пособие для вузов / Г.Г. Бартоломей, Г.А. Бать, В.Д. Байбаков, М.С. Алтухов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 512 с.: ил.
2. Кошелев Ф.П. Нейтронно-физический и теплогидравлический расчет реактора на тепловых нейтронах: учебное пособие / Ф.П. Кошелев, И.В. Шаманин; под ред. В.И. Бойко. – Томск: Изд-во ТПУ, 1996. – 80 с.
3. Алтухов Д.Е. Расчет нестационарных и переходных нейтронно-физических процессов в реакторе на тепловых нейтронах: учебное пособие / Д.Е. Алтухов, Ф.П. Кошелев, И.В. Шаманин; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во ТПУ, 1998. – 126 с.
4. Доллежалъ Н.А. Канальный ядерный энергетический реактор / Н.А. Доллежалъ, И.Я. Емельянов. – М.: Атомиздат, 1980. – 208 с.: ил.
5. Крамеров А.Я. Инженерные расчеты ядерных реакторов / А.Я. Крамеров, Я.В. Шевелев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 736 с.
6. Белл, Джоржд. Теория ядерных реакторов: пер. с англ. / Д. Белл, С. Глесстон. – М.: Атомиздат, 1974. – 494 с.
7. Климов А.Н. Ядерная физика и ядерные реакторы: учебник / А.Н. Климов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 2002. – 464 с.
8. Групповые константы для расчета реакторов и защиты: справочник / Л.П. Абагян, Н.О. Базазянц, М.Н. Николаев, А.М. Цибуля; под ред. М.Н. Николаева. – М.: Энергоиздат, 1981. – 231 с.
9. Галанин А.Д. Теория гетерогенного реактора / А.Д. Галанин. – М.: Атомиздат, 1971. – 246 с.
10. Потабенко Н.А. Численные методы. Решение задач линейной алгебры и уравнения в частных производных: Тексты лекций / Н.А. Потабенко. – М.: Изд-во МАИ, 1997. – 88 с.
11. Бояршинов М.Г. Численные методы; Прикладная математика и информатика: учебное пособие / М.Г. Бояршинов. – Пермь: Изд-во Пермского ГТУ, 1998.
12. Самарский А.А. Численные методы математической физики: учебное пособие / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Научный мир, 2000. – 316 с.
13. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 320 с.

Учебное издание

ДАНЕЙКИН Юрий Викторович
КОЛПАКОВ Геннадий Николаевич
ХАДКЕВИЧ Антон Валерьевич

ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА И ЗАЩИТА ОТ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Компьютерная верстка *К.С. Чечельницкая*
Дизайн обложки *О.Ю. Аршинова*

Подписано к печати 23.06.2011. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 8,07. Уч.-изд. л. 7,32.
Заказ 931-11. Тираж 35 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru