МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИДО
_______________ С.И. Качин

«____»_____________ 2013 г.

СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Методические указания и индивидуальные задания для студентов ИДО,
обучающихся по направлению 150700 «Машиностроение»

Составитель **Е.А. Молдованова**

Семестр	**4**
Кредиты	4
Лекции, часов	8
Практические занятия, часов	4
Индивидуальные задания	№ 1
Самостоятельная работа, часов	60
Формы контроля	зачет

Издательство
Томского политехнического университета
2013

Спецглавы математики: метод. указ. и индивид. задания для студентов ИДО, обучающихся по направлению 150700 «Машиностроение» / сост. Е.А. Молдованова; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – 74 с.

Методические указания и индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики ФТИ «____» ________ 2013 г., протокол № _____.

Зав. кафедрой ВМ ФТИ
профессор, доктор физико-математических наук ________К.П.Арефьев

Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Спецглавы математики» предназначены для студентов ИДО, обучающихся по направлению 150700 «Машиностроение». Данная дисциплина изучается в одном семестре.

Приводится содержание основных тем дисциплины, темы практических занятий, варианты индивидуальных домашних заданий и список рекомендуемой литературы. Даны методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Модуль «Спецглавы математики» входит в вариативную часть математического и естественнонаучного цикла объединенного блока образовательных программ. Этот модуль является необходимым для освоения остальных дисциплин математического и естественнонаучного цикла и дисциплин профессионального цикла ООП.

Пререквизиты – Линейная алгебра и аналитическая геометрия, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление и дифференциальные уравнения.

Кореквизиты – Гуманитарный, социальный и экономический цикл дисциплин, физика, химия, экология, инженерная и компьютерная графика, информационные технологии, физическая культура, дисциплины профессионального цикла.

2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Функции комплексного переменного

Комплексные числа и действия над ними. Модуль, аргумент комплексного числа. Понятие функции комплексного переменного. Реальная и мнимая части функции. Основные элементарные функции комплексного переменного и их свойства. Однозначные и многозначные функции. Точки ветвления и их классификация. Производная функции комплексного переменного. Дифференцируемость. Теорема о необходимом и достаточном условиях дифференцируемости функции в точке. Условия Коши - Римана. Геометрический смысл производной. Понятие аналитичности функции комплексного переменного. Интеграл от функции комплексного переменного вдоль кривой и его свойства. Теорема о независимости интеграла от пути интегрирования. Интегральная формула Коши.

Числовые ряды с комплексными членами. Абсолютная сходимость. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Ряд Тейлора. Теорема о разложении аналитической функции в ряд Тейлора. Ряды Лорана, определение. Главная и правильная части ряда Лорана. Кольцо сходимости ряда Лорана. Теорема Лорана о разложении аналитической функции в кольце в ряд. Нули аналитической функции. Порядок нуля. Теорема о нулях функции. Понятие аналитического продолжения. Особые точки и их классификация. Поведение функции в окрестности особой точки. Вычет функции в изолированной особой точке. Формулы для вычисления вычетов. Основная теорема о вычетах. Применение вычетов к вычислению интегралов.

Рекомендуемая литература: [1, гл. 3].

Методические указания

Комплексные числа дают единственно возможное расширение множества действительных чисел с сохранением их алгебраических свойств. Обстоятельный анализ свойств функций немыслим без выхода в комплексную область. Переход к комплексному аргументу дает возможность глубже изучить элементарные функции и установить интересные связи между ними. Комплексный анализ находит многочисленные применения в самых разных областях.

Одной из отличительных черт комплексного анализа является то, что в нем сочетаются аналитические и геометрические, вполне классические и самые новые методы. В комплексном анализе соединяются разные разделы математики, разные прикладные науки. Этот факт может доставить трудности при изучении функций комплексного переменного, но в тоже время, сделает изучение данного курса увлекательным.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое комплексное число?
2. Что такое мнимая единица?
3. Что называется модулем комплексного числа?
4. Что называется вещественной частью комплексного числа?
5. Что называется мнимой частью комплексного числа?
6. Что называется аргументом комплексного числа?
7. Как сложить два комплексных числа?
8. Как перемножить два комплексных числа?
9. Какие числа называются комплексно сопряженными?
10. Какие комплексные числа называются равными?
11. Как перейти от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической?
12. Как перейти от алгебраической формы комплексного числа к показательной?
13. Как перейти от показательной формы комплексного числа к алгебраической?
14. Как сложить два комплексных числа в показательной форме?
15. Как извлечь корень n-ой степени из комплексного числа?
16. Сколько существует различных значений корня 4-ой степени из комплексного числа?
17. Как найти производную функции комплексного переменного?
18. Какую роль в теории ФКП играют условия Коши-Римана?
19. Какие функции называются аналитическими?
20. Какие функции называются гармоническими?
21. Следует ли из аналитичности функции ее гармоничность и наоборот?
22. Что характеризует модуль производной функции комплексного переменного в точке z_0?
23. Что характеризует аргумент производной функции комплексного переменного в точке z_0?
24. В каком случае для вычисления интеграла от ФКП можно применять формулу Ньютона – Лейбница?
25. Чему равен интеграл от аналитической функции по замкнутому контуру?
26. Какой интеграл называется «интегралом Коши»?

27. Чем отличается ряд на множестве вещественных чисел от ряда на множестве комплексных чисел?

28. Каково достаточное условие сходимости ряда комплексных чисел?

29. Чем отличается ряд Лорана от ряда Тейлора?

30. Какой геометрической фигурой на плоскости является область сходимости ряда Лорана?

31. Что такое вычет?

32. Чему равен коэффициент при первой отрицательной степени ряда Лорана?

33. Как связан вычет в бесконечно удаленной точке с вычетами в конечных точках?

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Тематика практических занятий

1. Дифференцирование функции комплексного переменного (2 часа).
2. Интегрирование функции комплексного переменного (2 часа).

Рекомендуемая литература: [1, гл. 3].

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

4.1. Общие методические указания

В соответствии с учебным графиком предусмотрено выполнение одного индивидуального домашнего задания (ИДЗ). Выполнение задания необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач.

Номер варианта индивидуального задания определяется по последним двум цифрам номера зачетной книжки. Если образуемое ими число больше 20, то следует взять сумму этих цифр. Например, если номер зачетной книжки Д-11А11/14, то номер варианта задания равен 14. Если номер зачетной книжки З-11А11/31, то номер варианта задания равен 4.

Для студентов классической заочной формы обучения (КЗФ)

При оформлении необходимо соблюдать следующие требования:

1. Индивидуальное задание оформляется в отдельной тетради.
2. Обязательно должен быть титульный лист. На титульном листе указываются номер индивидуального задания, номер варианта, название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы, шифр.
3. Каждая задача должна начинаться с условия задачи (с условными обозначениями, которые в дальнейшем будут использованы при решении задач). При необходимости выполняется рисунок.
4. Решения задач должны быть подробными, со всеми промежуточными расчётами, с указанием использованных формул и т.п.
5. Решения задач следует располагать в той же последовательности, что и задания.
6. Все страницы работы должны иметь сквозную нумерацию.
7. Обязательно прилагается список использованной литературы.
8. Вы должны быть готовы защитить свое индивидуальное задание у преподавателя во время сессии.
9. При несоответствии работы требованиям выставляется оценка «незачтено». В этом случае работа должна быть исправлена и повторно предоставлена преподавателю.
10. Вы не будете допущены к сдаче экзамена при отсутствии положительной аттестации по индивидуальному заданию.

Работы, оформленные не в соответствии с требованиями, не рецензируются.

Для студентов, обучающихся с использованием дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Студенты, обучающиеся с использованием ДОТ, выполняют и отправляют ИДЗ на проверку преподавателю в соответствии с календарным планом-графиком изучения дисциплины. Преподаватель в течение трёх-пяти дней предоставляет рецензию на выполненное ИДЗ.

При оформлении ИДЗ необходимо соблюдать следующие требования:

1. Каждое индивидуальное задание оформляется в отдельном файле. Если условия и решения задач набраны с использованием программы Microsoft Word, то формулы набираются в MathType (кегль не менее 12).
2. Обязательно должен быть титульный лист. На титульном листе указываются номер индивидуального задания, номер варианта, название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы, шифр.
3. Каждая задача должна начинаться с условия задачи, ниже краткая запись задачи, если необходимо – рисунок с условными обозначениями, которые в дальнейшем будут использованы при решении задач.
4. Решения задач должны быть подробными, со всеми промежуточными расчётами, с указанием использованных формул и т.п.
5. Решения задач следует располагать в той же последовательности, что и задания.
6. Все страницы работы должны иметь сквозную нумерацию.
7. Обязательно прилагается список использованной литературы.
8. В случае несоответствия работы требованиям к оформлению студент получает отрицательную рецензию. В этом случае работа должна быть исправлена и повторно отправлена на проверку преподавателю в минимально короткий срок.
9. Вы не будете допущены к сдаче экзамена при отсутствии положительной аттестации по индивидуальному заданию.

Работы, оформленные не в соответствии с требованиями, не рецензируются.

4.2. Варианты индивидуального задания и методические указания

Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1

Задача 1. Представить в тригонометрической и в показательной форме число

$$z=\left(-1-\frac{1}{i}\right)^{50}.$$

Решение. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа $z=a+ib$ имеют, соответственно, вид:

$$a+ib=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \text{ и } a+ib=re^{i\varphi}.$$

Сначала найдём модуль и аргумент числа $\left(-1-\frac{1}{i}\right)$. Для этого запишем его в алгебраической форме $\left(-1-\frac{1}{i}\right)=-1+i$. Тогда

$$|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}, \quad \arg(-1+i)=\operatorname{arctg}(-1)+\pi=\frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно, можно записать в показательной форме $-1+i=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$. Тогда $z=\left(-1-\frac{1}{i}\right)^{50}=\left(\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)^{50}=2^{25}e^{\frac{75i\pi}{4}}$. Вычтем целое число оборотов у аргумента $\frac{75\pi}{2}$: $e^{\frac{75i\pi}{2}}=e^{\left(36+\frac{3}{2}\right)i\pi}=e^{\frac{3i\pi}{2}}$.

Таким образом,

$z=\left(-1-\frac{1}{i}\right)^{50}=2^{25}e^{\frac{3i\pi}{2}}=2^{25}e^{\frac{-i\pi}{2}}$ – показательная форма;

$z=\left(-1-\frac{1}{i}\right)^{50}=2^{25}\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ – тригонометрическая форма.

Задача 2. Вычислить и построить на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[5]{\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^6}.$$

Решение. Формула извлечения корня n-ой степени из числа z имеет вид:

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \text{ где } k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Найдём модуль r и аргумент φ подкоренного выражения

$$z=\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^6.$$

Так как $1-i=\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$ и $1-i\sqrt{3}=2e^{\frac{-i\pi}{3}}$, то

$$\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{12}}.$$

Тогда $\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^6=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{12}}\right)^6=\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^6}e^{\frac{i\pi}{12}\cdot 6}\right)=\frac{1}{8}e^{\frac{i\pi}{2}}$.

Отсюда следует, что $\left|\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^6\right|=\frac{1}{8}$, $\arg\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^6=\frac{\pi}{2}$.

Применим формулу извлечения корня:

$$w_k=\sqrt[5]{\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^6}=\sqrt[5]{\frac{1}{8}e^{\frac{i\pi}{2}}}=\sqrt[5]{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}}, \qquad k=0,1,2,3,4.$$

Получаем пять различных значений корня 5-ой степени. Чтобы построить на комплексной плоскости все числа w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, достаточно знать аргумент одного числа, например, при k = 0, $\varphi=\frac{\pi}{10}$. Затем в круг радиуса $R=\sqrt[5]{\frac{1}{8}}$ с центром в начале координат впишем правильный пятиугольник так, чтобы одна вершина совпала с точкой $w_0=\sqrt[5]{\frac{1}{8}}e^{\frac{i\pi}{10}}$. Остальные вершины пятиугольника будут соответствовать последовательно точкам w_1, w_2, w_3, w_4 (рис. 1).

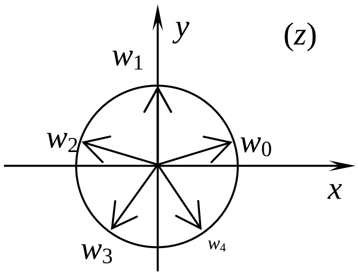

Рис. 1

Задача 3. Найти множество D точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\overline{z}} > 1.$$

Решение. Найдём действительную часть переменной $\frac{1}{\overline{z}}$:

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} \Rightarrow \mathrm{Re}\frac{1}{\overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Множество D есть множество точек плоскости с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими условию $\frac{x}{x^2 + y^2} > 1$. После преобразования получим:

$$x^2 + y^2 - x < 0, \text{ или } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4}.$$

Таким образом, множество D есть внутренность круга радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ (рис. 2).

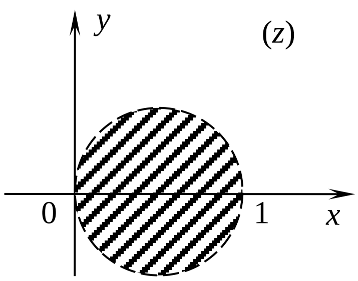

Рис. 2

Задача 4. Выделить действительную и мнимую части функции комплексного переменного $w=\sin 2iz$.

Решение. Воспользуемся формулой $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

Для заданной функции получим:

$$\sin 2iz=\frac{e^{-2z}-e^{2z}}{2i}=\frac{-i}{2}\left(e^{-2z}-e^{2z}\right).$$

Теперь подставим $z=x+iy$ воспользуемся формулой Эйлера:

$$\sin 2iz=\frac{-i}{2}\left(e^{-2z}-e^{2z}\right)=-\frac{i}{2}\left[e^{-2(x+iy)}-e^{2(x+iy)}\right]=$$

$$=-\frac{i}{2}\left[e^{-2x}(\cos 2y-i\sin 2y)-e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)\right]=$$

$$=-\frac{i}{2}\left(\cos 2y\left(e^{-2x}-e^{2x}\right)-i\sin 2y\left(e^{-2x}+e^{2x}\right)\right)=$$

$$=\frac{i}{2}\cos 2y\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)-\frac{1}{2}\sin 2y\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)=$$

$$=i\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\cos 2y-\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\sin 2y=-\sin 2y\,\mathrm{ch}\,2x+i\cos 2y\,\mathrm{sh}\,2x.$$

Следовательно, $\mathrm{Re}\,w=-\sin 2y\,\mathrm{ch}\,2x$, $\mathrm{Im}\,w=\cos 2y\,\mathrm{sh}\,2x$.

Задача 5. Найти все решения уравнения $\sin z-\cos z=1$.

Решение. Известно, что $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

Уравнение принимает вид: $\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}-\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=1$. После приведения к общему знаменателю имеем $e^{2iz}(1-i)-2ie^{iz}-(1+i)=0$. Получили квадратное уравнение относительно e^{iz}. Решениями этого уравнения являются числа: $e^{iz}=i$, $e^{iz}=-1$. Логарифмируя полученные равенства и применяя формулу $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z$, найдём бесконечное множество решений данного уравнения:

$$iz = \mathrm{Ln}\, i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z;$$
$$iz = \mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) \Rightarrow z = \pi + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Проверка: Подставим найденные решения в уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1,$$
$$\sin(\pi + 2k\pi) - \cos(\pi + 2k\pi) = 1.$$

Задача 6. Найти угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1 + \frac{i}{2}$ при отображении $w = \ln(2z + i)$.

Решение. Из геометрического смысла производной функции комплексного переменного известно, что $k = |w'(z_0)|$, $\alpha = \arg w'(z_0)$. В нашей задаче $w' = \frac{2}{2z + i}$. Отсюда $w'(z_0) = w'\left(1 + \frac{i}{2}\right) = \frac{2}{2 + 2i} = \frac{1 - i}{2}$. Следовательно, коэффициент растяжения равен:

$$k = \left|\frac{1-i}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а угол поворота равен:

$$\alpha = \arg\left(\frac{1-i}{2}\right) = \mathrm{arctg}\frac{1/2}{-1/2} = \mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Задача 7. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, если $v(x,y) = \sin x \,\mathrm{ch} y + x^2 - y^2$, $f(0) = 0$.

Решение. Для нахождения функции $u(x,y)$ воспользуемся условиями Коши − Римана, достаточными условиями аналитичности функции комплексного переменного:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Найдем частные производные функции $v(x,y)$. Имеем $\frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \,\mathrm{ch}\, y + 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \sin x \,\mathrm{sh}\, y - 2y$.

Подставляя эти производные в условия Коши – Римана, получим систему уравнений для нахождения функции $u(x, y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \sin x \operatorname{sh} y - 2y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\left(\cos x \operatorname{ch} y + 2x\right). \end{cases},$$

Проинтегрируем первое из равенств системы по переменной x:

$$u\left(x, y\right) = \int\left(\sin x \operatorname{sh} y - 2y\right)dx = -\cos x \operatorname{sh} y - 2xy + C\left(y\right).$$

Здесь мы учли, что при интегрировании частной производной $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ по переменной x постоянная интегрирования может зависеть от второй переменной y. Неизвестную функцию $C(y)$ найдём, используя второе равенство из (1):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos x \operatorname{ch} y - 2x + C'(y) = -\left(\cos x \operatorname{ch} y + 2x\right) \Rightarrow C'(y) = 0,\ C(y) = C.$$

Таким образом, $u(x, y) = -\cos x \operatorname{sh} y - 2xy + C$. Тогда

$$f(z) = u + iv = -\cos x \operatorname{sh} y - 2xy + C + i\left(\sin x \operatorname{ch} y + x^2 - y^2\right) =$$

$$= i(\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y) + i\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) + C = i\sin z + iz^2 + C.$$

Полагая $z=0$ и учитывая, что $f\left(0\right)=0$ по условию, получаем значение $C=0$. Окончательно $f(z) = i\sin z + iz^2$.

Задача 8. Вычислить $\int\limits_l\left(z - |z|\right)dz$, $l = \left\{z : |z| \le 1, \operatorname{Re} z \ge 0\right\}$.

Решение. Контур интегрирования состоит из полуокружности C_R и отрезка $\left[-i; i\right]$ (рис. 3).

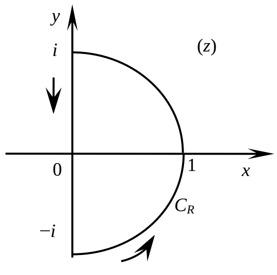

Рис. 3

Выбираем положительный обход контура (при обходе контура область остаётся слева). Схематично $\int\limits_{l} = \int\limits_{C_R} + \int\limits_{[-i,i]}$. Рассмотрим оба интеграла отдельно:

$$a)\ \int\limits_{C_R} \left(z-|z|\right)dz = \left| \begin{matrix} z=e^{iz}, & -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ dz=ie^{i\varphi}d\varphi, & |z|=1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(e^{i\varphi}-1\right)ie^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2i\varphi}d\varphi - i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\varphi}d\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\pi}-e^{-i\pi}\right) - \left(e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{\frac{-i\pi}{2}}\right) = -2i\,.$$

$$b)\ \int\limits_{[-i,i]} \left(z-|z|\right)dz = \left| \begin{matrix} x=0, \quad z=iy \\ |z|=|y|,\, dz=idy,\, y\in[-1,1] \end{matrix} \right| = \int\limits_{1}^{-1} \left(iy-|y|\right)idy =$$

$$= -\int\limits_{1}^{-1} y\,dy - i\int\limits_{1}^{0} y\,dy - i\int\limits_{0}^{-1} (-y)\,dy = i\,.$$

Следовательно, $\int\limits_{l}\left(z-|z|\right)dz = -2i+i=-i$.

Задача 9. Вычислить $\int\limits_{C} \frac{e^{z\pi}dz}{z^2\left(z^2+1\right)}$, где C:

а) $|z|=\frac{1}{2}$; б) $|z-i|=\frac{1}{2}$; в) $|z|=\frac{3}{2}$.

Решение. Здесь удобно воспользоваться интегральной формулой Коши и её следствием:

$$\int\limits_{C} \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2i\pi\, f(z_0), \qquad \int\limits_{C} \frac{f(z)dz}{\left(z-z_0\right)^{n+1}} = \frac{2i\pi}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

где функция $f(z)$ является аналитической в области D, ограниченной кусочно-гладким контуром C и на самом контуре, а точка z_0 лежит внутри области, ограниченной контуром C.

$$\text{а)} \int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\pi z}dz}{z^2\left(z^2+1\right)} = \int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^{\pi z}}{z^2+1}}{z^2}dz = \frac{2i\pi}{1!}\left(\frac{e^{z\pi}}{z^2+1}\right)'_{z_0=0} = 2i\pi^2.$$

$$\text{б)} \int\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{e^{z\pi}}{z^2\left(z^2+1\right)}dz = \int\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^{z\pi}}{z^2(z+i)}}{z-i}dz = 2i\pi\left(\frac{e^{z\pi}}{z^2(z+i)}\right)_{z_0=i} = \pi.$$

$$\text{в)} \int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^{z\pi}}{z^2\left(z^2+1\right)}dz.$$

Внутри области $|z|<\frac{3}{2}$, ограниченной контуром C, лежат три точки, в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль: $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$. Около точек опишем окружности γ_1, γ_2, γ_3 достаточно малых радиусов так, чтобы они не пересекались и целиком лежали внутри контура C: $|z|=\frac{3}{2}$ (рис. 4).

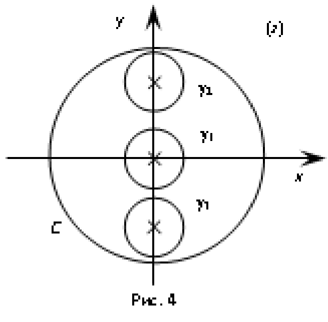

Рис. 4

В четырёхсвязной области, граница которой состоит их окружностей C, γ_1, γ_2, γ_3 подынтегральная функция аналитична. Применим теорему Коши для многосвязной области:

$$\int\limits_{C} = \int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2} + \int\limits_{\gamma_3} .$$

К каждому из интегралов по контурам γ_1, γ_2, γ_3 применим интегральную формулу Коши. Получим:

$$\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\pi z}dz}{z^2\left(z^2+1\right)} = \frac{2i\pi}{1!}\left(\frac{e^{z\pi}}{z^2+1}\right)'\Bigg|_{z_0=0} + 2i\pi\left(\frac{e^{z\pi}}{z^2(z+i)}\right)\Bigg|_{z_0=i} +$$

$$+2i\pi\left(\frac{e^{z\pi}}{z^2(z-i)}\right)\Bigg|_{z_0=-i} = 2i\pi^2 + \pi - \pi = 2i\pi^2 .$$

Задача 10. Найти по формулам Тейлора первые три члена разложения функции $f(z) = \ln\left(1+e^z\right)$ по степеням *z*. Указать область сходимости ряда.

Решение. По теореме Тейлора функция *f*(*z*), аналитическая в точке *a*, может быть представлена в окрестности этой точки сходящимся степенным рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где коэффициенты c_n вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\oint\limits_{l}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{f^n(a)}{n!}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Причём этот ряд определён однозначно.

В данном примере $a=0$. Функция $f(z) = \ln\left(1+e^z\right)$ аналитична в точке $z_0 = 0$ и в её окрестности. Найдём значения функции и её производных в точке $a=0$. Имеем:

$$f(z) = \ln\left(1+e^z\right), \qquad f(0) = \ln 2,$$

$$f'(z) = \frac{e^z}{1+e^z}, \qquad f'(0) = \frac{1}{2},$$

$$f''(z) = \frac{e^z}{\left(1+e^z\right)^2}, \qquad f''(0) = \frac{1}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Разложение функции $f(z)=\ln\left(1+e^{z}\right)$ по степеням *z* примет вид:

$$\ln\left(1+z^{2}\right)=\ln 2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{4\cdot 2!}z^{2}+\ldots$$

Теперь найдём область сходимости полученного ряда. Известно, что радиус сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ равен кратчайшему расстоянию от центра ряда a до ближайшей особой точки функции $f(z)$.

Найдём особые точки функции $f(z)=\ln\left(1+e^{z}\right)$. Очевидно, это будут те точки, в которых $e^{z}+1=0$. Отсюда

$$e^{z}=-1,\quad z=\mathrm{Ln}(-1)=\ln 1+i(\pi+2\pi k),\ k\in Z.$$

Получили бесконечное множество точек, из которых ближайшими к центру ряда $a=0$ являются точки $z=\pm i\pi$. Значит, радиус сходимости ряда равен $R=\left|0\pm i\pi\right|=\pi$ и ряд сходится в круге $|z|<\pi$.

Задача 11. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1-i)^{n}}{3^{n}(1+in)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n}(n+1)}{(z+1-i)^{n}}.$$

Решение. Ряд Лорана состоит из двух частей. Правильная часть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{n}(z-a)^{n}$ сходится в круге $|z-a|<R$, где $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n}}{c_{n+1}}\right|$.

В данном примере центр ряда $a=-1+i$, коэффициенты $c_{n}=\dfrac{1}{3^{n}(1+in)}$, $c_{n+1}=\dfrac{1}{3^{n+1}(1+in+i)}$. Получаем

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}\left[1+i(n+1)\right]}{3^{n}(1+in)}\right|=3\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+(n+1)^{2}}{1+n^{2}}}=3.$$

Главная часть $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ сходится вне круга $|z-a|>r$, где $r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{-n-1}}{c_{-n}}\right|$. А так как $c_{-n}=2^n(n+1)$, $c_{-n-1}=2^{n+1}(n+2)$, то $r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)}\right|=2$.

Таким образом, заданный ряд сходится в кольце $2<|z+1-i|<3$ (рис. 5).

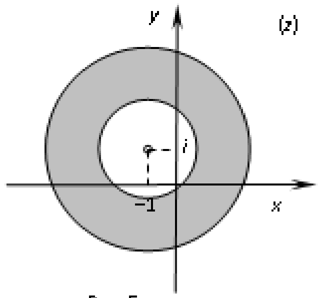

Рис. 5

Задача 12. Разложить функцию $f(x)=z^2\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)$ по степеням $(z-1)$. Найти область сходимости полученного ряда.

Решение. Преобразуем заданную функцию следующим образом:

$$z^2\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)=(z-1+1)^2\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)=$$

$$=\left((z-1)^2+2(z-1)+1\right)\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)=$$

$$=(z-1)^2\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)+2(z-1)\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)+\exp\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

Далее воспользуемся известным разложением функции e^t по степеням t:

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots$$

Заменяя $t=\dfrac{1}{z-1}$, получим разложение по степеням $(z-1)$:

$$\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\ldots$$

Подставляя это разложение в каждое из слагаемых, находим

$$z^2e^{\frac{1}{z-1}}=(z-1)^2\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots\right]+$$

$$+2(z-1)\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots\right]+\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots\right]=$$

$$=(z-1)^2+(z+1)+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!(z-1)}+\cdots+2(z-1)+2+\frac{1}{z-1}+\cdots+$$

$$+1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots$$

Полученный ряд сходится в проколотой области $0<|z-1|<\infty$, так как кроме $z_0=1$ других особых точек функция $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z-1}}$ не имеет.

Задача 13. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2-z}$ в окрестности $z=\infty$ в ряд Лорана. Указать область сходимости ряда.

Решение. Введём новую переменную $\xi=\dfrac{1}{z}$. Очевидно, если $z\to\infty$, то $\xi\to 0$. Рассмотрим функцию

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{1}{\frac{1}{\xi^2}-\frac{1}{\xi}}=\frac{\xi^2}{1-\xi}.$$

Если эту функцию разложить в окрестности $\xi=0$ в ряд Лорана, то исходная функция будет разложена в окрестности $z=\infty$. Функция

$f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{\xi^2}{1-\xi}$ имеет особую точку $\xi=1$, следовательно, в кольце $0<|\xi|<1$ функцию $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ можно разложить в ряд Лорана.

Известно, что бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$$b_1+b_1q+b_1q^2+\cdots+b_1q^n+\cdots$$

сходится к сумме $\frac{b_1}{1-q}$, где $|q|<1$. В нашем примере $|\xi|<1$, поэтому, принимая ξ в качестве знаменателя прогрессии, получим разложение

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{\xi^2}{1-\xi}=\xi^2\left(1+\xi+\xi^2+\cdots\right)=\xi^2+\xi^3+\xi^4+\cdots$$

Этот ряд сходится в кольце $0<|\xi|<1$. Возвращаясь к переменной *z*, найдём разложение для функции *f*(*z*):

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots$$

Полученный ряд сходится в области $0<\left|\frac{1}{z}\right|<1$ или $1<|z|<\infty$.

Замечание. Так как $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z^2-z}=0$, то $z=\infty$ является устранимой особой точкой функции *f*(*z*). Доопределим *f*(*z*) равенством $f(\infty)=0$, тогда точка $z=\infty$ не является особой точкой функции *f*(*z*) и так как точка $\xi = 0$ есть нуль второго порядка функции $f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{\xi^2}{1-\xi}$, то и $z=\infty$ является нулём второго порядка функции $f(z)=\frac{1}{z^2-z}$.

Задача 14. Найти возможные разложения в ряд функции

$f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$, приняв центр ряда в точке $a=3$.

Решение. Особыми точками функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$ являются точки $z_1=2$, $z_2=3$. Так как по условию задачи центр ряда лежит в точке $a=3$, то имеются две области аналитичности заданной функции.

Отметив на плоскости особые точки, проведём круг с центром в точке $a=3$ и с радиусом $R=|3-2|=1$, равным расстоянию от центра до особой точки $z=2$. Так как центр ряда совпал с особой точкой $z=3$, то получаем проколотую область $0<|z-3|<1$. Второй областью является внешность круга $|z-3|>1$ (рис. 6).

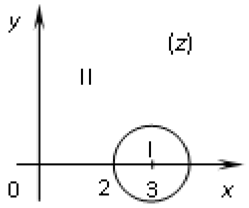

Рис. 6

Найдём разложения в ряд функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$ в каждой из заданных областей.

I. $0<|z-3|<1$ (ряд Лорана).

Представим дробь в виде разности двух простейших дробей:

$$\frac{1}{z^2-5z+6}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}.$$

Нам достаточно разложить только одну дробь $\dfrac{1}{z-2}$ по степеням разности $(z-3)$. Выделим эту разность $\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{(z-3)+1}$ и воспользуемся представлением суммы геометрической прогрессии. В данном случае знаменатель прогрессии $q=-(z-3)$. Получаем

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-3)+1}=1-(z-3)+(z-3)^2-(z-3)^3+\ldots$$

Таким образом, ряд Лорана в области $0<|z-3|<1$ для функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$ имеет вид:

$$\frac{1}{z^2-5z+6}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-3}-1+(z-3)-(z-3)^2+(z-3)^3-\ldots$$

II. $|z-3|>1$ (ряд Лорана). Для всех точек $z\in\{|z-3|>1\}$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{z-3}\right|<1$. Учитывая это, представим заданную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{z^2-5z+6}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=$$

$$=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{(z-3)+1}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{(z-3)\left(1+\frac{1}{z-3}\right)}.$$

Теперь в качестве знаменателя геометрической прогрессии надо брать $q=\frac{-1}{z-3}$. Разложение Лорана примет вид

$$\frac{1}{z^2-5z+6}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-3}\left(1-\frac{1}{z-3}+\frac{1}{(z-3)^2}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{(z-3)^2}-\frac{1}{(z-3)^3}+\frac{1}{(z-3)^4}-\ldots$$

Этот ряд сходится в области $|z-3|>1$.

Задача 15. Найти вычеты функций в указанных особых точках:

а) $f(z)=\frac{\sin z-z}{z^3}$, $z=0$; *б*) $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^5}$, $z=1$;

в) $f(z)=\exp\left(\frac{z}{z+2}\right)$, $z=-2$.

Решение. *а*) Определим тип особой точки $z=0$ функции $f(z)=\frac{\sin z-z}{z^3}$. Так как $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z-z}{z^3}=-\frac{1}{6}$, то точка $z=0$ является устранимой особой точкой функции. Поэтому $\operatorname*{res}\limits_{z=0}\frac{\sin z-z}{z^3}=0$.

б) Определим тип особой точки $z=1$ функции $f\left(z\right)=\dfrac{e^{2z}}{\left(z-1\right)^5}$. Точка $z=1$ является нулем пятого порядка функции $\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{\left(z-1\right)^5}{e^{2z}}$, значит $z=1$ есть полюс пятого порядка функции $f\left(z\right)=\dfrac{e^{2z}}{\left(z-1\right)^5}$. Воспользуемся формулой вычета функции относительно полюса порядка m:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{\left(m-1\right)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big(f(z)\left(z-z_0\right)^m\Big).$$

В нашем примере $m=5$, следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=1}\frac{e^{2z}}{\left(z-1\right)^5}=\frac{1}{4!}\lim_{z\to 1}\frac{d^4}{dz^4}\left(\frac{e^{2z}}{\left(z-1\right)^5}\left(z-1\right)^5\right)=\frac{2}{3}e^2.$$

в) Точка $z=-2$ является существенно особой точкой функции $f(z)=\exp\left(\dfrac{z}{z+1}\right)$, так как $\lim\limits_{z\to -2}\exp\left(\dfrac{z}{z+2}\right)$ не существует. Разложим заданную функцию в ряд Лорана по степеням $(z+2)$. В проколотой окрестности точки $z=-2$, т.е. в области $0<|z+2|<\infty$ имеем:

$$e^{\frac{z}{z+2}}=e^{\frac{z+2-2}{z+2}}=ee^{-\frac{2}{z+2}}=e\left(1-\frac{2}{z+2}+\frac{2^2}{2!\left(z+2\right)^2}-\frac{2^3}{3!\left(z+2\right)^3}+\ldots\right).$$

Из этого разложения найдем коэффициент при $\left(z+2\right)^{-1}$.

Так как $c_{-1}=-2e$, значит, $\operatorname*{res}\limits_{z=-2}\exp\left(\dfrac{z}{z+2}\right)=-2e$.

Задача 16. Вычислить интегралы, применяя теорему о вычетах:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1,1}\frac{z^5+z^3}{z^4+1}dz$; *б*) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z\cos^2\frac{2}{z}\,dz$.

Решение. *а*) По основной теореме о вычетах

$$\oint\limits_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_k\operatorname*{res}_{z_k} f(z),$$

где z_k – изолированные особые точки функции $f(z)$, лежащие в области, ограниченной контуром *C*. В нашем примере внутри области $|z|<1{,}1$ лежат четыре особые точки функции $f(z)=\dfrac{z^5+z^3}{z^4+1}$, обращающие знаменатель дроби в нуль. Можно воспользоваться $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$. Известно, что сумма вычетов относительно всех особых точек расширенной комплексной плоскости равна нулю. А так как вне области $|z|<1{,}1$ других особых точек подынтегральная функция не имеет, то

$$\int\limits_{|z|=1.1}\frac{z^5+z^3}{z^4+1}dz=-2\pi i\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$$

Итак, достаточно найти $\operatorname*{res}_{z=\infty}\dfrac{z^5+z^3}{z^4+1}$. Разложение подынтегральной функции в ряд Лорана в окрестности $z=\infty$, т.е. в области $1<|z|<\infty$ имеет вид

$$\frac{z^5+z^3}{z^4+1}=z+\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z^4}+\ldots\right)-\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{1}{z^4}+\ldots\right).$$

Из полученного разложения имеем $b_{-1}=1$. А так как $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-b_{-1}$, то подставляя в формулу, найдем значение интеграла

$$\int\limits_{|z|=1.1}\frac{z^5+z^3}{z^4+1}dz=-2\pi i(-1)=2\pi i.$$

б) Вычислим интеграл $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z\cos^2\frac{2}{z}\,dz$. Внутри области $|z|<\dfrac{1}{2}$ лежит одна особая точка $z=0$ подынтегральной функции $f(z)=z\cos^2\dfrac{2}{z}$. Так как $z=0$ является существенно особой точкой функции $f(z)=z\cos^2\dfrac{2}{z}$, то для отыскания вычета разложим эту функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$, т.е. в области $0<|z|<\infty$. Получаем

$$z\cos^2\frac{2}{z}=z\frac{1+\cos\dfrac{4}{z}}{2}=\frac{z}{2}\left(1+1-\frac{4^2}{2!z^2}+\frac{4^4}{4!z^4}-\dots\right),$$

откуда $c_{-1}=-4$ и, следовательно, $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z\cos^2\frac{2}{z}\,dz=-8\pi i$.

Задача 17. Вычислить интегралы с помощью вычетов:

а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$; *б*) $\displaystyle\int\limits_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\frac{e^{zt}dz}{z^2\left(z^2+1\right)}$, $t>0$.

Решение. *а*) Если $f(x)$ − функция действительного переменного непрерывна на всей действительной оси и степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=2\pi i\sum_k \operatorname*{res}_{z_k} f(z)$, где z_k − особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости. Введем функцию $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^2+4z+13\right)^2}$, которая на действительной оси, т.е. при $z=x$, совпадает с подынтегральной функцией $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости один полюс второго порядка $z_0=-2+3i$ (второй полюс $z_0=-2-3i$ лежит в нижней полуплоскости). Применяя формулу вычета относительно кратного полюса и подставляя в значение интеграла, найдём:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-2+3i}\frac{z}{\left(z^2+4z+13\right)}=$$

$$=2\pi i\lim_{z\to-2+3i}\left(\frac{z}{\left(z+2+3i\right)^2}\right)'=-\frac{\pi}{27}.$$

б) $\displaystyle\int\limits_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty}\frac{e^{zt}dz}{z^2\left(z^2+1\right)}$, $t>0$. Здесь интеграл берется вдоль вертикальной прямой $\operatorname{Re}z=1$. Так как по условию $t>0$, то необходимо найти вычеты относительно всех особых точек подынтегральной функции, лежащих левее заданной прямой. Функция $f(x)=\dfrac{e^{zt}}{z^2\left(z^2+1\right)}$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z<1$три особые точки: $z=0$ – полюс второго порядка, $z=i$ – полюс первого порядка, $z=-i$ – полюс первого порядка. Имеем

$$\int\limits_{1-i\cdot\infty}^{1+i\cdot\infty} \frac{e^{zt}dz}{z^2(z^2+1)}=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{res}_{z=-i} f(z)\right)=2\pi i\left(t-\sin t\right).$$

5. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ (ЗАЧЕТ)

5.1. Требования для сдачи экзамена

К экзамену допускаются только те студенты, у которых зачтены все индивидуальные задания и лабораторные работы.

Студенты, обучающиеся по КЗФ, сдают экзамен во время экзаменационной сессии по билетам (в устной или письменной форме). Каждый билет содержит два теоретических вопроса, четыре задания на выбор варианта ответа и четыре задачи. Экзамен считается сданным, если выполнено более 55% заданий.

Студенты, обучающиеся с использованием ДОТ, сдают экзамен в тестовой форме (онлайн режим). Экзаменационный тест содержит 20 тестовых заданий различного уровня сложности. Структура экзаменационного теста представлена в таблице:

Таблица 1

Структура экзаменационного теста

Тип задания	**Количество в тесте**	**Уровень сложности**
Задание на выбор единственного ответа	8	1
Задание на выбор множественных ответов	4	2
Задание на установление последовательности	4	2
Задание на установление соответствия	2	3
Задание для краткого ответа	2	3

Оценка за экзамен выставляется по сумме набранных баллов за задания теста.

Итоговая оценка по дисциплине формируется по результатам сдачи индивидуальных домашних заданий и экзамена.

5.2. Вопросы для подготовки к зачету

1. Комплексное число, три формы записи комплексного числа.
2. Арифметические операции с комплексными числами.
3. Последовательность комплексных чисел, определение предела, необходимость и достаточность существования предела последовательности комплексных чисел.

4. Понятие функции комплексного переменного (фкп). Предел и непрерывность фкп.

5. Нахождение вещественной и мнимой частей фкп.

6. Производная фкп, определение дифференцируемости, необходимые и достаточные условия дифференцируемости.

7. Понятие аналитичности функции в точке и в области; свойства аналитических функций.

8. Гармонические функции; доказательство того, что действительная и мнимая части аналитической функции в области являются гармоническими в этой области.

9. Геометрический смысл модуля и аргумента производной фкп.

10. Понятие интеграла от фкп.

10. Свойство независимости интеграла от пути интегрирования.

11. Условие существования интеграла фкп.

11. Теорема Коши для односвязной, многосвязной области.

12. Интегральная формула Коши и интеграл типа Коши.

13. Понятия ряда комплексных чисел.

14. Необходимые и достаточные условия сходимости ряда комплексных чисел.

15. Область сходимости функционального ряда фкп.

12. Ряд Лорана, его область сходимости.

16. Понятие вычета фкп, формулы для вычисления вычетов функции относительно изолированной особой точки.

17. Основная теорема о вычетах и теорема о сумме вычетов по всем изолированным особым точкам, включая бесконечность.

5.3. Образец билета к зачету для студентов классической заочной формы обучения

1. Теория.
2. Теория.
3. Найдите коэффициент растяжения k и угол поворота α при отображении $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ в точке $z_0=i$.

4. Вычислите интеграл $\int\limits_C \frac{\operatorname{ch} z^2 dz}{z(z-i\pi)^2}$, если $C:|z|=4$.

5. Найдите все лорановские разложения функции $f(z)=\frac{4z-8}{(z+1)(z-3)}$ по степеням $(z-3)$.

5.4. Образец билета к зачету для студентов, обучающихся с использованием дистанционных образовательных технологий

1. Задания на выбор единственного ответа

Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = 4 - 3i$.

1. $|z| = 7$, $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$
2. $|z| = 5$, $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$
3. $|z| = 5$, $\arg z = -\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$
4. $|z| = 7$, $\arg z = -\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$

2. Задания на выбор множественных ответов

Укажите действительную и мнимую части функции комплексного аргумента $w = iz$.

1. x
2. $-x$
3. y
4. $-y$

3. Задания на установление последовательности

Расположите числа по возрастанию их модулей.

1. $z = 4 - 3i$
2. $z = 2 - 5i$
3. $z = 12 + i$
4. $z = 5 + 3i$

4. Задания на установление соответствия

Установите соответствие между нулями функции $z = \dfrac{z^4 (z - 3i)^2 (z + i)}{(z^2 + 9)(z - i)^3}$ **и их порядками.**

НУЛЬ ФУНКЦИИ	ПОРЯДОК
1. $3i$ 2. $-i$ 3. i 4. 0	1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

5. Задания для краткого ответа

Найдите $\operatorname*{res}\limits_{z=1} \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Литература обязательная

1. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика 4: учебное пособие. – Томск, 2009. – 192 с.

6.2. Литература дополнительная

2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. – М: Наука, 1974.
3. Араманович И.Г., Лунц Л.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М: Наука, 1965.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Т.Н. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М: Наука, 1971.
5. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н, Трифонов А.Ю. Методы математической физики: Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций. – Томск: Изд-во НТЛ, 2002.
6. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика: учебное пособие., Ч.1–6. – Томск, Изд. ТПУ, 2004 – 2009 г.

6.3. Internet-ресурсы

7. Сайт ТПУ. – Режим доступа: http://www.tpu.ru, вход свободный, персональный сайт преподавателя дисциплины http://portal.tpu.ru.
8. Библиотека по естественным наукам Российской Академии Наук [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://benran.ru, свободный.
9. Общероссийский математический портал [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mathnet.ru, свободный.
10. Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://lib.mexmat.ru, свободный.

Учебное издание

СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Методические указания и индивидуальные задания

Составитель

МОЛДОВАНОВА Евгения Александровна

Рецензент
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры ВМ ФТИ

К.П. Арефьев

Компьютерная верстка *Н.В. Шабалдина*

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать Xerox. Усл.печ.л. 5,29. Уч.-изд.л. 4,79.
Заказ . Тираж экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru