МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИДО
_______________ С.И. Качин

«____»_____________ 2012 г.

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов ИДО, обучающихся по направлению
150700 «Машиностроение»

*Составители*
**Е.А. Молдованова, А.Н. Харлова**

| | |
|---|---|
| **Семестр** | **3** |
| Кредиты | 6 |
| Лекции, часов | 10 |
| Практические занятия, часов | 14 |
| Индивидуальные задания | 4 |
| Самостоятельная работа, часов | 192 |
| Формы контроля | Экзамен |

Издательство
Томского политехнического университета
2012

УДК 517

Интегральное исчисление: метод. указ. и индивид. задания для студентов ИДО, обучающихся по направлению 150700 «Машиностроение» / сост. Е.А. Молдованова, А.Н. Харлова; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 172 с.

Методические указания и индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры Высшей математики ФТИ «____» _______ 2012 г., протокол № ___.

Зав. кафедрой ВМ
профессор, доктор физико-математических наук ________К.П. Арефьев

## Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Интегральное исчисление» предназначены для студентов ИДО, обучающихся по направлению 150700 «Машиностроение». Данная дисциплина изучается в одном семестре.

Приводится содержание основных тем дисциплины, темы практических занятий, варианты заданий для индивидуальных домашних заданий, образцы экзаменационных билетов и список рекомендуемой литературы. Даны методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий и образцы решения типовых вариантов.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# 1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Интегральное исчисление» входит в базовую часть математического и естественнонаучного циклов объединенного блока образовательных программ. Эта дисциплина является необходимой для освоения остальных дисциплин математического и естественнонаучного цикла и дисциплин профессионального цикла ООП.

Пререквизитами данной дисциплины являются:

- курс «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»;
- курс «Дифференциальное исчисление».

# 2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

## Тема 1. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной функции и неопределённого интеграла. Свойства неопределённого интеграла. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Метод замены переменной и метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных функций. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование. Теорема о представлении правильной рациональной дроби в виде суммы конечного числа простейших дробей. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Подстановки Чебышева, Эйлера, тригонометрические.

**Рекомендуемая литература:** [1, гл. 1].

### Методические указания

При изучении этой темы необходимо выучить наизусть таблицу интегралов и основные формулы интегрирования. Внимательно разберите основные методы интегрирования: метод подведения под знак дифференциала, метод подстановки и метод интегрирования по частям. Особую трудность в изучении представляет метод подведения под знак дифференциала. Для успешного овладения этим методом вместе с таблицей интегралов используйте и таблицу производных (или таблицу дифференциалов). Следует учесть, что в интегральном исчислении нет общих правил. Интегрирование может быть выполнено не единственным способом. Но даже и тогда, когда имеется теоретическое правило вычисления интеграла, оно может оказаться далеко не лучшим.

Ниже сформулированы теоретические вопросы, которые помогут подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. Приступать к решению задач можно только в том случае, если ответы на вопросы не вызвали затруднений. В противном случае необходимо снова обратиться к рекомендованной литературе.

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое первообразная для функции?
2. Для каких функций существуют первообразные?
3. Как связаны между собой две первообразные для одной и той же функции?
4. Что такое неопределённый интеграл от функции?
5. Какими свойствами обладает неопределённый интеграл?

6. Какая операция является обратной операции интегрирования?

7. Какие интегралы называются «неберущимися»? Приведите пример.

8. В чём состоит свойство инвариантности формул интегрирования?

9. Запишите формулу интегрирования по частям в неопределённом интеграле.

10. Для нахождения каких интегралов используется формула интегрирования по частям?

11. Как сделать замену переменной в неопределённом интеграле?

12. Назовите основные методы интегрирования.

13. Какие дроби называются простейшими?

14. Какая рациональная дробь называется правильной?

15. Какая рациональная дробь называется неправильной?

16. Какие рациональные дроби можно представить в виде суммы простейших дробей?

17. Каков алгоритм разложение рациональной дроби на простейшие дроби?

18. Как найти коэффициенты разложения правильной рациональной дроби на простейшие?

19. Каков алгоритм интегрирования рациональной дроби?

20. В результате какой подстановки интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции?

21. Какие существуют методы нахождения интегралов вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx \text{, где } m, n \in Z \text{ ?}$$

22. Какие существуют методы нахождения интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx \text{?}$$

23. Какие существуют методы нахождения интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx \text{?}$$

24. Какие существуют методы нахождения интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx \text{?}$$

25. Что такое «дифференциальный бином»?

26. В каких случаях интеграл от дифференциального бинома выражается через элементарные функции?

## Тема 2. Определённый интеграл

Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла. Определение интегральной суммы Римана. Понятие определённого интеграла, его геометрический и физический смыслы. Классы интегрируемых функций. Свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определённого интеграла. Геометрические приложения определённого интеграла: вычисление площадей плоских фигур в декартовой и полярной системах координат. Определение и вычисление длины дуги плоской кривой. Вычисление объёмов тел. Общая схема применения определённого интеграла к решению прикладных задач. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Определение, свойства. Признаки сходимости интегралов от неотрицательных функций. Абсолютная и условная сходимость. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Теорема сравнения. Интеграл, зависящий от параметра.

**Рекомендуемая литература:** [1, гл. 2].

### Методические указания

При изучении определённых интегралов обратите внимание на их связь с неопределёнными интегралами. Для вычисления определённых интегралов используйте формулу Ньютона-Лейбница, применяя при этом все изученные правила и методы нахождения первообразных. Решение задач о нахождении площади плоских фигур следует начинать с построения соответствующей области в декартовой системе координат. При построении кривых в полярной системе координат и параметрической форме полезно вспомнить методы построения этих кривых, изученные в курсе «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». При изучении несобственных интегралов обратите внимание на то, что несобственные интегралы являются обобщением определённых интегралов в случаях бесконечных промежутков интегрирования и неограниченных функций. Следует разобрать не только определение несобственных интегралов (1-го, 2-го родов), но и признаки сходимости, так как во многих случаях проще применить соответствующую теорему, чем вычислить требуемый предел.

Ниже сформулированы теоретические вопросы, которые помогут подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. Приступать к решению задач можно только в том случае, если ответы на вопросы не вызвали затруднений. В противном случае необходимо снова обратиться к рекомендованной литературе.

**Вопросы и задания для самоконтроля**

1. Что такое определённый интеграл от функции?
2. В чём заключается сходство и различие между определённым и неопределённым интегралами?
3. Сформулируйте условия существования определённого интеграла.
4. Запишите формулу интегрирования по частям в определённом интеграле.
5. Как изменится определённый интеграл, если пределы интегрирования поменять местами?
6. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
7. Как сделать замену переменной в определённом интеграле?
8. Чему равен определённый интеграл по симметричному интервалу от нечётной функции?
9. Чему равен определённый интеграл по симметричному интервалу от чётной функции?
10. Как с помощью определённого интеграла найти среднее значение функции на отрезке?
11. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью интеграла?
12. Какой геометрический смысл определённого интеграла?
13. Какой физический смысл определённого интеграла?
14. Что такое несобственный интеграл?
15. Какой несобственный интеграл называется сходящимся?
16. Какой несобственный интеграл называется расходящимся?
17. Что такое определённый интеграл с переменным верхним пределом?
18. Как определить знак определённого интеграла, не вычисляя его?
19. В каком случае несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования имеет геометрический смысл?
20. Чему равна производная определённого интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу?
21. В чём заключается свойство аддитивности определённого интеграла?

## Тема 3. Кратные интегралы

Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение двойного интеграла, геометрический и физический смыслы. Теорема существования, свойства. Сведение двойного интеграла от непрерывной функции к повторному интегралу. Теорема о замене переменных в двойном интеграле. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.

Тройной интеграл, определение, свойства, вычисление в декартовой системе координат. Формулировка теоремы о замене переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты. Приложение кратных интегралов: вычисление объемов тел и площадей фигур, решение задач механики и физики.

**Рекомендуемая литература:** [2, гл. 1], [3, гл. 1].

### Методические указания

Интегралы от функций, зависящих от нескольких переменных, являются различными обобщениями определённого интеграла. Существование нескольких видов таких интегралов (кратные, криволинейные, поверхностные) связано с необходимостью решения различных механических и геометрических задач. При изучении темы «Кратные интегралы» необходимо обратить внимание на то, что конструкции определённого интеграла для функции одной переменной и кратных интегралов для функций нескольких переменных аналогичны. Вследствие этого свойства кратных интегралов практически совпадают с соответствующими свойствами определённого интеграла.

Успешное овладение темой невозможно без знания определённого интеграла, без умения строить кривые и поверхности второго порядка.

Ниже сформулированы теоретические вопросы, которые помогут подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. Приступать к решению задач можно только в том случае, если ответы на вопросы не вызвали затруднений. В противном случае необходимо снова обратиться к рекомендованной литературе.

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называется двойным интегралом от данной функции по данной области?
2. Какие задачи приводят к понятию двойного интеграла?
3. Как формулируются условия существования двойного интеграла?
4. Какими свойствами обладает двойной интеграл?
5. Какой геометрический смысл имеет двойной интеграл?
6. Какой физический смысл имеет двойной интеграл?
7. Каков алгоритм вычисления двойного интеграла в декартовой системе координат?
8. Зависит ли значение двойного интеграла от порядка интегрирования?
9. Как выполнить замену переменных в двойном интеграле?
10. Как выражается элемент площади в полярных координатах?

11. Что называется определителем Якоби (или якобианом) отображения?

12. Каков алгоритм вычисления двойного интеграла в полярной системе координат?

13. Какие задачи механики можно решить с помощью двойного интеграла?

14. Какие задачи геометрии можно решить с помощью двойного интеграла?

15. Что называется тройным интегралом от данной функции по данной области?

16. Какие задачи приводят к понятию тройного интеграла?

17. Как формулируются условия существования тройного интеграла?

18. Какими свойствами обладает тройной интеграл?

19. Какой геометрический смысл имеет тройной интеграл?

20. Какой физический смысл имеет тройной интеграл?

21. Каков алгоритм вычисления тройного интеграла в декартовой системе координат?

22. Зависит ли значение тройного интеграла от порядка интегрирования?

23. Как выполнить замену переменных в тройном интеграле?

24. Какая система координат в пространстве называется цилиндрической?

25. Какая система координат в пространстве называется сферической?

26. Какие формулы устанавливают связь между цилиндрическими и декартовыми координатами?

27. Какие формулы устанавливают связь между сферическими и декартовыми координатами?

28. Как выражается элемент объёма в цилиндрических координатах?

29. Как выражается элемент объёма в сферических координатах?

30. Каков алгоритм вычисления тройного интеграла в цилиндрической системе координат?

31. Каков алгоритм вычисления тройного интеграла в сферической системе координат?

32. Какие задачи механики можно решить с помощью тройного интеграла?

33. Какие задачи геометрии можно решить с помощью тройного интеграла?

## Тема 4. Элементы векторного анализа

Криволинейные интегралы по длине дуги. Определение, свойства, физический смысл, вычисление. Задача о вычислении работы силового поля. Определение, свойства и вычисление криволинейного интеграла по координатам. Теорема Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Отыскание функции по её полному дифференциалу. Поверхностный интеграл по площади поверхности. Определение, формула для вычисления. Геометрический и физический смысл. Задача о вычислении потока векторного поля через поверхность. Определение, физический смысл, свойства и вычисление поверхностного интеграла по координатам. Теорема и формула Остроградского-Гаусса. Ориентация поверхности и направление обхода замкнутого контура. Теорема и формула Стокса. Векторное поле. Векторные линии. Оператор Гамильтона. Дифференциальные операции первого порядка в скалярном и векторных полях. Потенциальные и безвихревые поля. Теорема Гельмгольца. Дифференциальные операции второго порядка. Дивергенция векторного поля, её физический смысл. Теорема о существовании и вычислении дивергенции. Свойства дивергенции, векторная запись формулы Остроградского-Гаусса. Соленоидальное поле. Векторная трубка. Основное свойство соленоидального векторного поля. Циркуляция и ротор векторного поля. Механический смысл ротора, его свойства. Векторная запись формулы Стокса. Интегро-дифференциальная форма уравнений электромагнитного поля.

**Рекомендуемая литература:** [3, гл. 2–4], [2, гл. 2].

### Методические указания

Математический аппарат теории поля лежит в основе большого круга прикладных задач. Примерами векторных полей являются поле тяготения, электромагнитное поле, поле скоростей текущей жидкости и др. Рассмотрение этих полей придаёт вводимым математическим понятиям ясный физический смысл.

Базовыми понятиями математического аппарата теории поля являются криволинейные и поверхностные интегралы. При изучении этих интегралов следует обратить внимание на принципиальное различие свойств криволинейных (поверхностных) интегралов 1-го рода и свойств криволинейных (поверхностных) интегралов 2-го рода, а также на теоремы, устанавливающие связи между различными типами интегралов.

Ниже сформулированы теоретические вопросы, которые помогут подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. Приступать к решению задач можно только в том случае, если ответы на вопросы не вызвали затруднений. В противном случае необходимо снова обратиться к рекомендованной литературе.

**Вопросы и задания для самоконтроля**

1. Что называется криволинейным интегралом первого рода?
2. Какие задачи приводят к понятию криволинейного интеграла первого рода?
3. Как формулируются условия существования криволинейного интеграла первого рода?
4. Какими свойствами обладает криволинейный интеграл первого рода?
5. Как вычисляется криволинейный интеграл первого рода с помощью определённого интеграла, если уравнение линии интегрирования задано в виде $y = y(x)$ или $x = x(y)$?
6. Как вычисляется криволинейный интеграл первого рода с помощью определённого интеграла, если уравнение линии интегрирования задано в параметрической форме?
7. Как влияет направление интегрирования на величину криволинейного интеграла первого рода?
8. Какие задачи механики можно решить с помощью криволинейного интеграла первого рода?
9. Какие задачи геометрии можно решить с помощью криволинейного интеграла первого рода?
10. Что называется криволинейным интегралом второго рода?
11. Какие задачи приводят к понятию криволинейного интеграла второго рода?
12. Как формулируются условия существования криволинейного интеграла второго рода?
13. Какими свойствами обладает криволинейный интеграл второго рода?
14. Как вычисляется криволинейный интеграл второго рода с помощью определённого интеграла, если уравнение линии интегрирования задано в виде $y = y(x)$ или $x = x(y)$?
15. Как вычисляется криволинейный интеграл второго рода с помощью определённого интеграла, если уравнение линии интегрирования задано в параметрической форме?
16. Как влияет направление интегрирования на величину криволинейного интеграла второго рода?

17. Какие задачи механики можно решить с помощью криволинейного интеграла второго рода?

18. Какие задачи геометрии можно решить с помощью криволинейного интеграла второго рода?

19. Какие интегралы связывает между собой формула Грина?

20. При каких условиях значение криволинейного интеграла второго рода не зависит от линии интегрирования?

21. В каком случае криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру равен нулю?

22. В чём заключаются особенности вычисления криволинейного интеграла второго рода от полного дифференциала?

23. Что называется поверхностным интегралом первого рода?

24. Какие задачи приводят к понятию поверхностного интеграла первого рода?

25. Как формулируются условия существования поверхностного интеграла первого рода?

26. Какими свойствами обладает поверхностный интеграл первого рода?

27. Как поверхностный интеграл первого рода сводится к двойному интегралу, если уравнение поверхности интегрирования задано в виде $z = f(x;y)$?

28. Как поверхностный интеграл первого рода сводится к двойному интегралу, если уравнение поверхности интегрирования задано в виде $x = f(y;z)$?

29. Как поверхностный интеграл первого рода сводится к двойному интегралу, если уравнение поверхности интегрирования задано в виде $y = f(x;z)$?

30. Как влияет ориентация поверхности интегрирования на величину поверхностного интеграла первого рода?

31. Какие задачи механики можно решить с помощью поверхностного интеграла первого рода?

32. Какие задачи геометрии можно решить с помощью поверхностного интеграла первого рода?

33. Что называется поверхностным интегралом второго рода?

34. Какие задачи приводят к понятию поверхностного интеграла второго рода?

35. Как формулируются условия существования поверхностного интеграла второго рода?

36. Какими свойствами обладает поверхностный интеграл второго рода?

37. Какими методами вычисляется поверхностный интеграл второго рода?

38. Как влияет ориентация поверхности интегрирования на величину поверхностного интеграла второго рода?

39. Какие задачи механики можно решить с помощью поверхностного интеграла второго рода?

40. Что называется векторным полем?

41. Что называется векторной линией векторного поля?

42. Что называется дивергенцией векторного поля?

43. Что называется ротором векторного поля?

44. Что характеризует дивергенция векторного поля?

45. Что характеризует ротор векторного поля?

46. Что называется циркуляцией векторного поля?

47. Как формулируется теорема Остроградского-Гаусса?

48. Как формулируется теорема Стокса?

49. Как вычисляется дивергенция векторного поля?

50. Где находится ротор векторного поля?

# 3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

В данном разделе приведены темы практических занятий по дисциплине «Интегральное исчисление».

1. Неопределённый интеграл (4 часа).
2. Определённый интеграл (2 часа).
3. Двойной интеграл (2часа).
4. Тройной интеграл (2 часа).
5. Криволинейные интегралы (2 часа).
6. Поверхностные интегралы (2 часа).

# 4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

## 4.1. Общие методические указания

В соответствии с учебным графиком предусмотрено выполнение четырёх индивидуальных домашних заданий (ИДЗ). Студент, не получивший положительной аттестации по всем индивидуальным заданиям, не допускается к сдаче экзамена по данной дисциплине.

Индивидуальное задание № 1 соответствует теме «Неопределенный интеграл», индивидуальное задание № 2 соответствует теме «Определенный интеграл», индивидуальное задание № 3 соответствует теме «Кратные интегралы», индивидуальное задание № 4 соответствует теме «Элементы векторного анализа».

**Номер варианта индивидуального задания определяется по последним двум цифрам номера зачетной книжки**. Например, если номер зачетной книжки З-8Л11/12, то номер варианта задания равен 12. Если две последние цифры составляют число большее 20, то из этого числа вычитается число 20 столько раз, чтобы остаток стал меньше или равен 20. Например, две последние цифры составляют число 57, тогда 57–20–20=17, и студент выполняет вариант № 17 индивидуального задания.

### 4.1.1. Требования к оформлению индивидуального задания

**Для студентов классической заочной формы обучения (КЗФ)**

При оформлении необходимо соблюдать следующие требования:

1. Индивидуальное задание должно иметь титульный лист, оформленный в соответствии со стандартами ТПУ [10]. На титульном листе указываются номер индивидуального задания, номер варианта, название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы, шифр. Образец оформления и шаблон титульного листа размещен на сайте ИДО (http://portal.tpu.ru/ido-tpu) в разделе СТУДЕНТУ → ДОКУМЕНТЫ.
2. Каждое индивидуальное задание оформляется в отдельной тетради.
3. Текст индивидуального задания набирается в текстовом процессоре Microsoft Word. Шрифт Times New Roman, размер 12–14 pt, для набора формул рекомендуется использовать редактор формул Microsoft Equation или MathType.

4. Каждая задача должна начинаться с условия задачи (с условными обозначениями, которые в дальнейшем будут использованы при решении задач). Если необходимо выполняется рисунок.

5. Решения задач должны быть подробными, со всеми промежуточными расчётами, с указанием использованных формул и т.п.

6. Решения задач следует располагать в той же последовательности, что и задания.

7. Все страницы работы должны иметь сквозную нумерацию.

8. Обязательно прилагается список использованной литературы.

Вы должны быть готовы защитить свои индивидуальные задания у преподавателя во время сессии.

При несоответствии работы требованиям выставляется оценка «незачтено». В этом случае работа должна быть исправлена и повторно предоставлена преподавателю.

Работы, оформленные не в соответствии с требованиями, не рецензируются.

### Для студентов, обучающихся с использованием дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

При оформлении индивидуального домашнего задания необходимо соблюдать следующие требования.

1. Индивидуальное задание должно иметь титульный лист, оформленный в соответствии со стандартами ТПУ [6]. На титульном листе указываются номер индивидуального задания, номер варианта, название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы, шифр. **Образец оформления и шаблон титульного листа** размещен на сайте ИДО в разделе СТУДЕНТУ → ДОКУМЕНТЫ (http://portal.tpu.ru/ido-tpu).

2. Каждое индивидуальное задание оформляется отдельно. Студенты, изучающие дисциплину **по классической заочной форме**, оформляют индивидуальные задания в отдельных тетрадях. Студенты, изучающие дисциплину **с применением дистанционных технологий**, оформляют индивидуальные задания в отдельных файлах.

3. Текст индивидуального задания набирается в текстовом процессоре Microsoft Word. Шрифт Times New Roman, размер 12–14 pt, для набора формул рекомендуется использовать редактор формул Microsoft Equation или MathType.

4. Решения задач следует располагать в той же последовательности, что и задания.

5. Каждая задача должна начинаться с условия задачи, ниже краткая запись задачи, если необходимо – рисунок, с условными обозначениями, которые в дальнейшем будут использованы при решении задач.

6. Решение должно быть подробным, с включением промежуточных расчётов и указанием использованных формул.

7. Страницы задания должны иметь сквозную нумерацию.

8. В задание включается список использованной литературы.

Если работа не соответствует требованиям, студент получает оценку «не зачтено». В этом случае работа должна быть исправлена и повторно предоставлена преподавателю. При доработке в текст необходимо включить дополнительные вопросы, полученные после проверки работы преподавателем, и ответы на эти вопросы.

Студент, не получивший положительной аттестации по индивидуальному заданию, не допускается к сдаче экзамена по данной дисциплине.

## 4.2. Варианты индивидуального задания №1 «Неопределенный интеграл»

## 4.3. Методические указания к решению индивидуального задания № 1

Индивидуальное задание № 1 соответствует теме «Неопределённый интеграл» теоретического раздела дисциплины. Каждый вариант содержит 30 интегралов, нахождение которых позволит освоить основные приёмы и методы интегрирования.

Основными методами интегрирования являются:

- непосредственное интегрирование;
- интегрирование по частям;
- замена переменной.

Кроме того, напомним важное правило интегрирования, позволяющее значительно расширить таблицу интегралов. Это правило основано на следующей теореме.

***Теорема***. Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от неё, т.е. если:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то и } \int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция от $x$.

Эта теорема позволяет приводить интеграл к табличному виду, используя свойство инвариантности формул интегрирования. Основная таблица интегралов в силу этого правила оказывается справедливой независимо от того, является переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функцией её.

Приведём таблицу неопределённых интегралов для случая, когда переменной интегрирования является функция $u(x)$:

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$;
4. $\int e^u du = e^u + C$;
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$;
6. $\int \cos u du = \sin u + C$;
7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$;
8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;
9. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$;
10. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C$;
11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+k}\right| + C$;
12. $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C$.

Метод непосредственного интегрирования основан на знании таблицы интегралов и основных свойств неопределенного интеграла:

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $k \in R$;
2. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$$

Схема интегрирования по частям предполагает предварительное разбиение подынтегрального выражения на произведение двух множителей $u$ и $du$. При этом основным критерием правильности разбиения служит то, что интеграл в правой части формулы интегрирования по частям должен быть проще или, по крайней мере, не сложнее исходного интеграла $\int vdu$. При интегрировании по частям следует придерживаться следующих рекомендаций:

1. если в подынтегральное выражение входит произведение многочлена на показательную или тригонометрическую функцию, то в качестве $u$ берётся многочлен;

2. если в подынтегральное выражение входит логарифмическая или обратная тригонометрические функции, то именно эти функции и берутся за $u$.

Метод замены переменной применяется при нахождении интегралов от тригонометрических, иррациональных и т.п. функций. Этот метод основан на следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$, и функция $x=u(t)$ определена и дифференцируема на интервале $(\alpha;\beta)$ и имеет область значений $(a;b)$. Тогда если на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ имеет первообразную, то на интервале $(\alpha;\beta)$ имеет место равенство:

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))\cdot u'(t)dt.$$

Отметим, что нельзя дать общее правило выбора замены переменной для интегрирования любой функции. Это можно сделать только для интегрирования отдельных классов функций.

Все интегралы от тригонометрических функций можно разбить условно на две группы.

К первой группе относятся интегралы, для нахождения которых применяется непосредственное интегрирование в сочетании с методом подведения под знак дифференциала, при этом необходимо предварительно преобразовать тригонометрическую функцию, используя различные формулы тригонометрии:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \qquad \cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha, \qquad \sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Ко второй группе относятся интегралы, для нахождения которых используются подходящие подстановки, что позволяет свести интегрирование рациональных тригонометрических функций к интегрированию рациональных дробей.

Основным методом интегрирования иррациональных функций является метод подстановки. При интегрировании таких функций, выбранная подстановка должна рационализировать подынтегральную функцию. При этом используются как алгебраические, так и тригонометрические подстановки.

Особое место среди интегрируемых функций занимают дробно-рациональные функции, интеграл от которых всегда может быть выражен через элементарные функции. Приведём схему интегрирования дробно-рациональных функций:

1) Проверить, является ли рациональная дробь правильной. Если степень многочлена в числителе не меньше степени многочлена знаменателя (дробь неправильная), то делением числителя на знаменатель выделить целую часть. В результате от исходной неправильной рациональной дроби переходим к сумме многочлена (целая часть) и правильной рациональной дроби.

2) Представить правильную рациональную дробь в виде суммы простых дробей. Для этого:

2.1. Разложить знаменатель на линейные и квадратичные множители, не имеющие вещественных корней.

2.2. Представить дробь в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами.

| Множитель знаменателя | Кол-во дробей | Простые дроби, соответствующие этому множителю |
|---|---|---|
| $(x-a)^k$ | $k$ | $\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\dots+\frac{A_k}{(x-a)}$ |
| $(x^2+px+q)^k$, $p^2-4q<0$ | $k$ | $\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\dots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)}$ |

2.3. Найти неопределённые коэффициенты разложения.

3) Интеграл от рациональной дроби найти, используя свойство линейности неопределённого интеграла.

## 4.4. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1

### Вариант № 0

**Задание 1.** Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{4^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 1.2. $\int \cos(3x-4)dx$;

1.3. $\int \frac{x^3 dx}{4+x^8}$;

1.4. $\int \frac{\cos x \sin x dx}{1+\sin^2 x}$;

1.5. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+4)}$;

1.6. $\int \mathrm{tg}^2 31x dx$;

1.7. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{4-x^5}}$;

1.8. $\int \frac{4-3x}{x^2+9} dx$.

***Решение***

**1.1.** $\int \frac{4^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{4^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{d(\arcsin x)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \int 4^{\arcsin x} d(\arcsin x) = \frac{4^{\arcsin x}}{\ln 4} + C.$

Ответ: $\int \frac{4^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4^{\arcsin x}}{\ln 4} + C.$

**1.2.** $\int \cos(3x-4) dx = \int \cos(3x-4) \cdot \frac{d(3x-4)}{3} = \frac{1}{3} \int \cos(3x-4) d(3x-4) =$

$= \frac{1}{3} \sin(3x-4) + C.$

Ответ: $\int \cos(3x-4) dx = \frac{1}{3} \sin(3x-4) + C.$

**1.3.** $\int \frac{x^3 dx}{4+x^8} = \int \frac{x^3}{(2)^2 + (x^4)^2} \cdot \frac{d(x^4)}{4x^3} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{2^2 + (x^4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \mathrm{arctg} \frac{x^4}{2} + C =$

$= \frac{1}{8} \mathrm{arctg} \frac{x^4}{2} + C.$

Ответ: $\int \frac{x^3 dx}{4+x^8} = \frac{1}{8} \mathrm{arctg} \frac{x^4}{2} + C.$

**1.4.** $\int \frac{\sin x \cos x dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} \cdot \frac{d(1+\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)'} = \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} \cdot \frac{d(1+\sin^2)}{2 \sin x \cos x} =$

$= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+\sin^2 x)}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln|1+\sin^2 x| + C.$

Ответ: $\int \frac{\sin x \cos x dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|1+\sin^2 x\right| + C.$

**1.5**. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+4)} = \int \frac{1}{\sin^2(3x+4)} \cdot \frac{d(3x+4)}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+4)}{\sin^2(3x+4)} + C =$

$= -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x+4) + C.$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+4)} = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x+4) + C.$

**1.6.** $\int \operatorname{tg}^2 31x dx = \int \frac{\sin^2 31x}{\cos^2 31x} dx = \int \frac{1-\cos^2 31x}{\cos^2 31x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 31x} - \int \frac{\cos^2 31x}{\cos^2 31x} dx =$

$= \int \frac{1}{\cos^2 31x} \cdot \frac{d(31x)}{31} - \int dx = \frac{1}{31}\int \frac{d(31x)}{\cos^2 31x} - x + C = \frac{1}{31}\operatorname{tg} 31x - x + C.$

Ответ: $\int \operatorname{tg}^2 31x dx = \frac{1}{31}\operatorname{tg} 31x - x + C$.

**1.7.** $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{4-x^5}} = \int \left(4-x^5\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot x^4 \cdot \frac{d\left(4-x^5\right)}{-5x^4} = -\frac{1}{5}\int \left(4-x^5\right)^{\frac{-1}{3}} d\left(4-x^5\right) =$

$= -\frac{1}{5} \cdot \frac{\left(4-x^5\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{10}\left(4-x^5\right)^{\frac{2}{3}} + C.$

Ответ: $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{4-x^5}} = -\frac{3}{10}\left(4-x^5\right)^{\frac{2}{3}} + C$.

**1.8.** $\int \frac{4-3x}{x^2+9} dx = \int \frac{4dx}{x^2+9} - \int \frac{3xdx}{x^2+9} = 4\int \frac{dx}{x^2+3^2} - \int \frac{3x}{x^2+9} \cdot \frac{d\left(x^2+9\right)}{2x} =$

$= \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2+9\right)}{x^2+9} + C = \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\ln\left|x^2+9\right| + C.$

Ответ: $\int \frac{4-3x}{x^2+9} dx = \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\ln\left|x^2+9\right| + C.$

**Задание 2.** Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int(2-3x)\sin 2x dx$;

2.2. $\int\sqrt{x}\ln x dx$;

2.3. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$;

2.4. $\int(4-x)e^{\frac{x}{3}}dx$.

***Решение***

**2.1.** $\int(2-3x)\sin 2x dx=\left|\begin{array}{l} u=2-3x \Rightarrow du=-3dx \\ dv=\sin 2x dx \Rightarrow v=\int\sin 2x dx=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right|=$

$$=(2-3x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\cdot(-3)dx=(2-3x)\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\frac{3}{2}\int\cos 2x dx=\frac{3x-2}{2}\cdot\cos 2x-\frac{3}{4}\sin 2x+C.$$

Ответ: $\int(2-3x)\sin 2x dx=\frac{3x-2}{2}\cdot\cos 2x-\frac{3}{4}\sin 2x+C.$

**2.2.** $\int\sqrt{x}\ln x dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=\sqrt{x}dx \Rightarrow v=\int\sqrt{x}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \end{array}\right|=\ln x\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dx}{x}=$

$$=\ln x\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\ln x\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\ln x\cdot x^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

Ответ: $\int\sqrt{x}\ln x dx=\frac{2}{3}\ln x\cdot x^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+C.$

**2.3.** $\int x \operatorname{arctg} 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 2x \Rightarrow du = \dfrac{2dx}{1+4x^2} \\ dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \operatorname{arctg} 2x \cdot \dfrac{x^2}{2} -$

$$-\int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2dx}{1+4x^2} = \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2 dx}{1+4x^2} = \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} -$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{4x^2+1-1}{1+4x^2} dx = \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1}{1+4x^2}\right) dx =$$

$$= \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x +$$

$$+\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{1+(2x)^2} = \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} 2x + C.$$

Ответ: $\int x \operatorname{arctg} 2x dx = \operatorname{arctg} 2x \cdot \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{8}\operatorname{arctg} 2x + C.$

**2.4.** $\int (4-x) e^{\frac{x}{3}} dx = \left| \begin{array}{l} u = 4 - x \Rightarrow du = -dx \\ dv = e^{\frac{x}{3}} dx \Rightarrow v = \int e^{\frac{x}{3}} dx = 3e^{\frac{x}{3}} \end{array} \right| = 3(4-x)e^{\frac{x}{3}} -$

$$-\int 3e^{\frac{x}{3}}(-dx) = = 3(4-x)e^{\frac{x}{3}} + 3\int e^{\frac{x}{3}} dx = 3(4-x)e^{\frac{x}{3}} + 9e^{\frac{x}{3}} + C.$$

Ответ: $\int (4-x)e^{\frac{x}{3}} dx = 3(4-x)e^{\frac{x}{3}} + 9e^{\frac{x}{3}} + C.$

**Задание 3.** Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \dfrac{(2x-1)dx}{x^2-3x+4}$;

3.2. $\int \dfrac{(x+3)dx}{x(x+4)^2}$;

3.3. $\int \dfrac{(2x^2+3)dx}{(x+4)(x^2+5)}$;

3.4. $\int \dfrac{4x^2+2x-1}{x^2+2x-1} dx.$

***Решение***

**3.1.** Подынтегральная функция $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+4}$ содержит в знаменателе квадратный трёхчлен $\left(x^2-3x+4\right)$. Поэтому интегрирование проводится по следующей схеме:

*а*) в квадратном трёхчлене выделим полный квадрат:

$$x^2-3x+4=x^2-2\cdot x\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4};$$

*б*) введём новую переменная $u=x-1{,}5$, откуда $x=u+1{,}5$ и $dx=du$;

*в*) в исходном интеграле переходим к новой переменной:

$$\int\frac{\left(2x-1\right)dx}{x^2-3x+4}=\int\frac{2\left(u+1{,}5\right)-1}{u^2+1{,}75}du=\int\frac{2u+3-1}{u^2+1{,}75}du=\int\frac{2u+2}{u^2+1{,}75}du;$$

*г*) разбиваем последний интеграл на два интеграла, один из которых табличный, а второй приводится к табличному подведением под знак дифференциала:

$$\int\frac{2u+2}{u^2+1{,}75}du=\int\frac{2udu}{u^2+1{,}75}+\int\frac{2du}{u^2+1{,}75}=\int\frac{2u}{u^2+1{,}75}\cdot\frac{d\left(u^2+1{,}75\right)}{2u}+$$

$$+2\int\frac{du}{u^2+\left(\sqrt{1{,}75}\right)^2}=\int\frac{d(u^2+1{,}75)}{u^2+1{,}75}+\frac{2}{\sqrt{1{,}75}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1{,}75}}+C=$$

$$=2\ln\left|u^2+1{,}75\right|+\frac{2}{\sqrt{1{,}75}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1{,}75}}+C;$$

*д*) возвращаемся к старой переменной:

$$2\ln\left|u^2+1{,}75\right|+\frac{2}{\sqrt{1{,}75}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1{,}75}}+C=$$

$$=2\ln\left|\left(x-1{,}5\right)^2+1{,}75\right|+\frac{2}{\sqrt{1{,}75}}\operatorname{arctg}\frac{x-1{,}5}{\sqrt{1{,}75}}+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{\left(2x-1\right)dx}{x^2-3x+4}=2\ln\left|\left(x-1{,}5\right)^2+1{,}75\right|+\frac{2}{\sqrt{1{,}75}}\operatorname{arctg}\frac{x-1{,}5}{\sqrt{1{,}75}}+C.$

**3.2.** Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{x+3}{x(x+4)^2}$ является правильной рациональной дробью. Для интегрирования такой дроби её необходимо разложить на сумму простых дробей:

$$\frac{x+3}{x(x+4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{(x+4)^2}. \qquad (*)$$

Найдем теперь неопределённые коэффициенты $A$, $B$ и $C$. Для этого приводим дроби, стоящие в правой части равенства (*) к общему знаменателю:

$$\frac{x+3}{x(x+4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{(x+4)^2}=\frac{A(x+4)^2+Bx(x+4)+Cx}{x(x+4)^2}.$$

Из равенства двух дробей с одинаковыми знаменателями следует и равенство их числителей

$$x+3=A(x+4)^2+Bx(x+4)+Cx.$$

Это равенство справедливо для любых значений $x$ Для нахождения трёх неопределённых коэффициентов можно в полученное равенство подставить любые три значения $x$ и получить систему из трёх уравнений с тремя неизвестными $A$, $B$ и $C$. Возьмём $x=0$, $x=-4$ и $x=-3$. Получим:

$$x=0: \quad 3=16A \Rightarrow A=\frac{3}{16};$$

$$x=-4: \; -1=-4C \Rightarrow C=\frac{1}{4};$$

$$x=-3: \; 0=A-3B-3C \Rightarrow \frac{3}{16}-3B-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow B=-\frac{3}{16}.$$

Найденные коэффициенты подставим в разложение дроби и находим интегралы:

$$\int\frac{(x+3)dx}{x(x+4)^2}=\frac{3}{16}\int\frac{dx}{x}-\frac{3}{16}\int\frac{dx}{x+4}+\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x+4)^2}dx=$$

$$=\frac{3}{16}\ln|x|-\frac{3}{16}\ln|x+4|-\frac{1}{4(x+4)}+C.$$

Ответ: $\int \frac{(x+3)dx}{x(x+4)^2} = \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{3}{16}\ln|x+4| - \frac{1}{4(x+4)} + C.$

**3.3.** Подынтегральная функция $f(x) = \frac{2x^2+3}{(x+4)(x^2+5)}$ является правильной рациональной дробью, поэтому находим интеграл по той же схеме, что и в п. 3.2.

$$\frac{2x^2+3}{(x+4)(x^2+5)} = \frac{A}{x+4} + \frac{Bx+C}{x^2+5} = \frac{A(x^2+5)+(Bx+C)(x+4)}{(x+4)(x^2+5)} \Rightarrow$$

$$2x^2+3 = A(x^2+5)+(Bx+C)(x+4) \Rightarrow$$

$$x=-4: \quad 35 = 20A \Rightarrow A = \frac{7}{4};$$

$$x=0: \quad 3 = 5A+4C \Rightarrow 3 = 5\cdot\frac{7}{4}+4C \Rightarrow C = -\frac{13}{16};$$

$$x=-3: \quad 21 = 14A-3B+C \Rightarrow 14\cdot\frac{7}{4}-3B-\frac{13}{16} = 21 \Rightarrow B = \frac{43}{48}.$$

В результате получаем:

$$\int \frac{(2x^2+3)dx}{(x+4)(x^2+5)} = \int \frac{\frac{7}{4}}{x+4}dx + \int \frac{\frac{43x}{48}-\frac{13}{16}}{x^2+5}dx = \frac{7}{4}\int\frac{dx}{x} + \frac{43}{48}\int\frac{xdx}{x^2+5} -$$

$$-\frac{13}{16}\int\frac{dx}{x^2+5} = \frac{7}{4}\ln|x| + \frac{43}{48}\int\frac{x}{x^2+5}\cdot\frac{d(x^2+5)}{2x} - \frac{13}{16}\int\frac{dx}{x^2+(\sqrt{5})^2} + C =$$

$$= \frac{7}{4}\ln|x| + \frac{43}{98}\ln|x^2+5| - \frac{13}{16\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Ответ: $\int \frac{(2x^2+3)dx}{(x+4)(x^2+5)} = \frac{7}{4}\ln|x| + \frac{43}{98}\ln|x^2+5| - \frac{13}{16\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

**3.4.** Подынтегральная функция $f(x) = \frac{4x^2+2x-1}{x^2+2x-1}$ является неправильной рациональной дробью, поэтому сначала выделим целую часть (путём деления числителя на знаменатель) и представим дробь в виде суммы целой части и правильной дроби:

$$\begin{array}{r|l} -\,4x^2+2x-1 & x^2+2x-1 \\ \cline{2-2} \underline{4x^2+8x-4} & \quad 4 \\ -6x+3 & \end{array}$$

В итоге получаем:

$$\frac{4x^2+2x-1}{x^2+2x-1}=4+\frac{-6x+3}{x^2+2x-1}.$$

Тогда исходный интеграл будет равен сумме интегралов:

$$\int\frac{4x^2+2x-1}{x^2+2x-1}dx=\int\left(4+\frac{-6x+3}{x^2+2x-1}\right)dx=\int 4dx-3\int\frac{2x-1}{x^2+2x-1}dx=$$

$$=4x-3\int\frac{2x-1}{x^2+2x-1}dx+C.$$

Для вычисления интеграла $\int\frac{2x-1}{x^2+2x-1}dx$ разложим знаменатель подынтегральной дроби на множители:

$$x^2+2x-1=\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right).$$

Тогда дробь можно представить в виде суммы двух простых дробей:

$$\frac{2x-1}{x^2+2x-1}=\frac{2x-1}{\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)}=\frac{A}{x+1-\sqrt{2}}+\frac{B}{x+1+\sqrt{2}}.$$

Найдём коэффициенты $A$ и $B$.

$$\frac{2x-1}{\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)}=\frac{A}{x+1-\sqrt{2}}+\frac{B}{x+1+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{A\left(x+1+\sqrt{2}\right)+B\left(x+1-\sqrt{2}\right)}{\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)}\Rightarrow$$

$$2x-1=A\left(x+1+\sqrt{2}\right)+B\left(x+1-\sqrt{2}\right);$$

$$x=-1-\sqrt{2}:\quad -2-2\sqrt{2}-1=-2\sqrt{2}B\Rightarrow B=\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}};$$

$$x=-1+\sqrt{2}:\quad -2+2\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}A\Rightarrow A=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$\int\frac{2x-1}{x^2+2x-1}dx=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x+1-\sqrt{2}}+\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x+1+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+1-\sqrt{2}\right|+\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+1+\sqrt{2}\right|+C.$$

Суммируя полученные результаты, окончательно получаем:

$$\int\frac{4x^2+2x-1}{x^2+2x-1}dx=4x+\frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+1-\sqrt{2}\right|+\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+1+\sqrt{2}\right|+C.$$

Ответ:

$$\int\frac{4x^2+2x-1}{x^2+2x-1}dx=4x+\frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+1-\sqrt{2}\right|+\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+1+\sqrt{2}\right|+C.$$

**Задание 4.** Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int\cos^4 x\cdot\sin^3 xdx$;

4.2. $\int\sin 5x\cdot\cos 8xdx$;

4.3. $\int\mathrm{ctg}^5\, xdx$;

4.4. $\int\frac{dx}{3-2\cos x}$;

4.5. $\int\sin^4 2x\cdot\cos^2 2xdx$.

***Решение***

**4.1.** $\int\cos^4 x\cdot\sin^3 xdx.$

Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$f(x)=\cos^4 x\cdot\sin^3 x=\cos^4 x\cdot\sin^2 x\cdot\sin x=\cos^4 x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)\cdot\sin x.$$

При этом было использовано основное тригонометрическое тождество:

$$\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx = \int \cos^4 x \cdot \left(1-\cos^2 x\right) \cdot \sin x dx =$$

$$= \int \cos^4 x \cdot \left(1-\cos^2 x\right) \cdot \sin x \cdot \frac{d\left(\cos x\right)}{-\sin x} = -\int \cos^4 x \cdot \left(1-\cos^2 x\right) \cdot d\left(\cos x\right) =$$

$$= -\int \cos^4 x \cdot d\left(\cos x\right) + \int \cos^6 x \cdot d\left(\cos x\right) = -\frac{\left(\cos x\right)^5}{5} + \frac{\left(\cos x\right)^7}{7} + C.$$

Ответ: $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx = -\frac{\left(\cos x\right)^5}{5} + \frac{\left(\cos x\right)^7}{7} + C.$

**4.2.** $\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx = \left| \sin 5x \cdot \cos 8x = \frac{1}{2}\left[\sin 13x - \sin 3x\right] \right| =$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 13x dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int \sin 13x \cdot \frac{d\left(13x\right)}{13} - \frac{1}{2}\int \sin 3x \cdot \frac{d\left(3x\right)}{3} =$$

$$= -\frac{1}{26}\cos 13x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

Ответ: $\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx = -\frac{1}{26}\cos 13x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$

**4.3.** $\int \operatorname{ctg}^5 x dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = t, \\ dt = -\frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right| = -\int \frac{t^5}{t^2+1} dt.$

После указанной подстановки интегрирование тригонометрической функции свелось к интегрированию рациональной функции. Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Путём деления числителя дроби на знаменатель представим эту дробь в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби:

$$\frac{t^5}{t^2+1} = t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}.$$

В итоге получаем:

$$\int \mathrm{ctg}^5 x dx = -\int\left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+2}\right)dt =$$

$$= -\int t^3 dt + \int t dt - \int \frac{t dt}{t^2+1} = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \int \frac{t}{t^2+1}\cdot\frac{d\left(t^2+1\right)}{2t} =$$

$$= -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно получаем:

$$\int \mathrm{ctg}^5 x dx = -\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4} + \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|1+\mathrm{ctg}^2 x\right| + C.$$

Ответ: $\int \mathrm{ctg}^5 x dx = -\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4} + \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|1+\mathrm{ctg}^2 x\right| + C.$

**4.4.** $\int \frac{dx}{3-2\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}, dt = \frac{2dt}{t^2+1}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{3 - \frac{1-t^2}{t^2+1}} = 2\int \frac{dt}{4t^2+2} =$

$$= \frac{2}{4}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{0,5}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{0,5}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{0,5}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{0,5}}\right) + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{3-2\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{0,5}}\right) + C.$

**4.5.** $\int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x dx.$

Для вычисления этого интеграла используем формулы понижения степени:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Получим:

$$\int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x dx = \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos^2 4x\right)\left(1-\cos 4x\right) dx = \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 4x-\cos^2 4x+\cos^3 4x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 4x dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 4x dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\int \cos 4x \frac{d\left(4x\right)}{4} - \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 8x}{2} dx + \frac{1}{8}\int \cos^2 4x \cdot \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{16}\left(x+\sin 8x\right) + \frac{1}{8}\int \frac{\left(1-\sin^2 4x\right)\cdot \cos 4x d\left(\sin 4x\right)}{4\cos 4x} =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{16}\left(x+\sin 8x\right) + \frac{1}{32}\left(\sin 4x - \frac{\sin^3 4x}{3}\right) + C.$$

Ответ: $\int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x -$

$$-\frac{1}{16}\left(x+\sin 8x\right) + \frac{1}{32}\left(\sin 4x - \frac{\sin^3 4x}{3}\right) + C.$$

**Задание 5.** Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}} dx;$

5.2. $\int \frac{\left(2-x\right)dx}{x\cdot\sqrt{x+1}};$

5.3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}};$

5.4. $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}.$

***Решение***

**5.1.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}} dx.$

В подобных интегралах избавиться от иррациональности можно, введя вместо переменной $x$ новую переменную $t$. Эти переменные связаны равенством $x = t^p$, причём степень $p$ должна быть такой, чтобы извлекались корни всех степеней, входящих в подынтегральную функцию.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}}dx = \left| \begin{array}{l} x = t^{12} \Rightarrow t = \sqrt[12]{x}, \\ dx = 12t^{11}dt \end{array} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}}{t^8+t^3}dt = 12\int \frac{t^{17}dt}{t^3(t^5+1)} =$$

$$= 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5+1} = 12\int \left( t^9 - t^4 + \frac{t^4}{t^5+1} \right) dt = 12\int t^9 dt - 12\int t^4 dt +$$

$$+12\int \frac{t^4}{t^5+1} \cdot \frac{d\left(t^5+1\right)}{5t^4} = 12 \cdot \frac{t^{10}}{10} - 12 \cdot \frac{t^5}{5} + \frac{12}{5}\int \frac{d\left(t^5+1\right)}{t^5+1} + C =$$

$$= 1,2t^{10} - 2,4t^5 + 2,4\ln\left|t^5+1\right| + C =$$

$$= 1,2x\sqrt[12]{x^{10}} - 2,4\sqrt[12]{x^5} + 2,4\ln\left|\sqrt[12]{x^5}+1\right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}}dx = 1,2x\sqrt[12]{x^{10}} - 2,4\sqrt[12]{x^5} + 2,4\ln\left|\sqrt[12]{x^5}+1\right| + C.$

**5.2.** $$\int \frac{(2-x)dx}{x \cdot \sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow \\ dx = 2tdt, \quad t = \sqrt{x+1} \end{array} \right| = \int \frac{\left(2 - t^2 + 1\right) \cdot 2tdt}{\left(t^2-1\right) \cdot t} =$$

$$= -2\int \frac{t^2-3}{t^2-1}dt = -2\int \frac{\left(t^2-1\right)-2}{t^2-1}dt = -2\int \frac{t^2-1}{t^2-1}dt + 4\int \frac{dt}{t^2-1}dt =$$

$$= -2\int dt + 4 \cdot \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -2t + 2\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= -2\sqrt{x+1} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{(2-x)dx}{x \cdot \sqrt{x+1}} = -2\sqrt{x+1} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$

**5.3.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

Интегралы, содержащие радикалы вида $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ можно найти, используя следующие тригонометрические подстановки $x = a\sin t, \quad x = a\,\mathrm{tg}\,t$ и $x = \frac{a}{\cos t}$, соответственно.

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=\left|\begin{aligned}&x=2\sin t\Rightarrow\\&dx=2\cos t dt,\\&t=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}\right|=\int\frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos t dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}=\frac{8}{2}\int\frac{\sin^2 t\cdot\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=$$

$$=4\int\frac{\sin^2 t\cdot\cos t dt}{\cos t}=4\int\sin^2 t dt=4\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=2\int(1-\cos 2t)dt=$$

$$=2\int dt-2\int\cos 2t\cdot\frac{d(2t)}{2}=2t-\int\cos 2t d(2t)+C=2t-\sin 2t+C=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}--\sin 2\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

Ответ: $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=2\arcsin\frac{x}{2}-\sin 2\left(\frac{x}{2}\right)+C.$

**5.4.** $\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}=\int x^{-3}\left(2-x^3\right)^{\frac{-1}{3}}dx.$

Интегрирование дифференциальных биномов, т.е. интегралов вида

$$\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx$$

возможно только в трёх случаях с помощью подстановок Чебышева:

1. $p$ –целое число (подстановка $x=t^s$, где $s$ – общий знаменатель дробей $n$ и $m$);

2. $\frac{m+1}{n}$ – целое число (подстановка $ax^n+b=t^s$, где $s$ –знаменатель дроби $p$);

3. $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число (подстановка $\frac{ax^n+b}{x^n}=t^s$, где $s$ – знаменатель дроби $p$).

Если числа $m$, $n$, $p$ и их указанные комбинации не удовлетворяют ни одному из случаев, то интеграл от данного дифференциального бинома является «неберущимся», т.е. не выражается в элементарных функциях.

В нашем случае $m=-3,\ n=3,\ p=-\frac{1}{3}$ и $\frac{m+1}{n}+p=-1$ целое число. Поэтому для вычисления интеграла используем подстановку 3).

$$\int x^{-3}\left(2-x\right)^{\frac{-1}{3}}dx=\left|\begin{array}{l}\dfrac{2-x^3}{x^3}=t^3\Rightarrow\\[2mm] x^3=2\left(t^3+1\right)^{-1}\Rightarrow x=\sqrt[3]{2}\left(t^3+1\right)^{\frac{-4}{3}}\Rightarrow\\[2mm] dx=-\sqrt[3]{2}\cdot t^2\left(t^3+1\right)^{\frac{-4}{3}}dt\Rightarrow\\[2mm] \left(2-x^3\right)^{\frac{-1}{3}}=t^{-1}\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-1}\left(t^3+1\right)^{\frac{1}{3}}\end{array}\right|=$$

$$=-\int\sqrt[3]{2}\cdot t^2\cdot\left(t^3+1\right)^{\frac{-4}{3}}\cdot 2^{-1}\cdot\left(t^3+1\right)\cdot t^{-1}\cdot 2^{\frac{-1}{3}}\cdot\left(t^3+1\right)^{\frac{1}{3}}\cdot dt=$$

$$=-\int\frac{t}{2}dt=-\frac{t^2}{4}+C=-\frac{\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}}{4x^2}+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}=-\frac{\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}}{4x^2}+C.$

**Задание 6.** Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\displaystyle\int\frac{\left(2x-1\right)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$;

6.2. $\displaystyle\int\frac{e^x+3}{e^{2x}-1}dx$;

6.3. $\displaystyle\int\frac{2x^4+x^3-3x^2+\sqrt[3]{x}}{2x^3}dx$;

6.4. $\displaystyle\int\cos\sqrt{x}dx$;

6.5. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+4}$.

***Решение***

**6.1.** $\displaystyle\int\frac{\left(2x-1\right)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$.

В интеграле $\displaystyle\int\frac{\left(2x-1\right)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$ подынтегральная функция содержит квадратный трёхчлен. Поэтому для его нахождения необходимо сначала выделит в квадратном трёхчлене полный квадрат, а затем ввести новую переменную (см. задание 3 п. 3.1).

$$\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}=\left|\begin{matrix}x^2-6x+10=(x-3)^2+1\\ x-3=t\Rightarrow x=t+3\Rightarrow dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{2(t+3)-1}{\sqrt{t^2+1}}dt=$$

$$=\int\frac{2t+5}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int\frac{2tdt}{\sqrt{t^2+1}}+5\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\int\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{d\left(t^2+1\right)}{2t}+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{\sqrt{t^2+1}}+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=2\sqrt{t^2+1}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=$$

$$=2\sqrt{(x-3)^2+1}+\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2+1}\right|+C.$$

Ответ: $\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}=2\sqrt{(x-3)^2+1}+\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2+1}\right|+C.$

**6.2.** $\int\frac{e^x+3}{e^{2x}-1}dx.$

Интеграл $\int\frac{e^x+3}{e^{2x}-1}dx$ сводится к интегралу от рациональной функции в результате замены переменной:

$$\int\frac{e^x+3}{e^{2x}-1}dx=\left|\begin{matrix}e^x=t\Rightarrow x=\ln t\Rightarrow\\ dx=\dfrac{dt}{t}\end{matrix}\right|=\int\frac{t+3}{t^2-1}\cdot\frac{dt}{t}=\int\frac{t+3}{t^2-1}\cdot\frac{dt}{t}=$$

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{t+3}{t(t-1)(t+1)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t-1}+\dfrac{C}{t+1}=\\ =\dfrac{A(t-1)(t+1)+Bt(t+1)+Ct(t-1)}{t(t-1)(t+1)};\\ t+3=A(t-1)(t+1)+Bt(t+1)+Ct(t-1)\\ \quad t=0:\quad A=-3\\ \quad t=1:\quad B=2\\ \quad t=-1:\ C=1\end{array}\right|$$

$$-3\int\frac{dt}{t}+2\int\frac{dt}{t-1}+\int\frac{dt}{t+1}=-3\ln|t|+2\ln|t-1|+\ln|t+1|+C=$$

$$=-3\ln\left|e^x\right|+2\ln\left|e^x-1\right|+\ln\left|e^x+1\right|+C.$$

Ответ: $\int \frac{e^x+3}{e^{2x}-1}dx = -3\ln\left|e^x\right| + 2\ln\left|e^x-1\right| + \ln\left|e^x+1\right| + C.$

**6.3.** $$\int \frac{2x^4+x^3-3x^2+\sqrt[3]{x}}{2x^3}dx = \int \frac{2x^4}{2x^3}dx + \int \frac{x^3}{2x^3dx} - \int \frac{3x^2}{x^3}dx + \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^3}dx =$$

$$= \int xdx + \frac{1}{2}\int dx - 3\int \frac{dx}{x} + \int x^{\frac{-8}{3}}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 3\ln|x| + \frac{x^{\frac{-5}{3}}}{\frac{-5}{3}} + C.$$

Ответ: $\int \frac{2x^4+x^3-3x^2+\sqrt[3]{x}}{2x^3}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 3\ln|x| - \frac{3x^{\frac{-5}{3}}}{5} + C.$

**6.4.** $\int \cos\sqrt{x}dx.$

Интеграл $\int \cos\sqrt{x}dx$ в результате заменой переменной сводится к интегралу, для нахождения которого необходимо применить формулу интегрирования по частям.

$$\int \cos\sqrt{x}dx = \begin{vmatrix} x = t^2 \Rightarrow \\ dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} \end{vmatrix} = 2\int t\cos tdt = \begin{vmatrix} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \cos tdt \Rightarrow v = \sin t \end{vmatrix} =$$

$$= 2t\sin t - 2\int \sin tdt = 2t\sin t + 2\cos t + C = 2\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C.$$

Ответ: $\int \cos\sqrt{x}dx = 2\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C.$

**6.5.** $\int \frac{dx}{e^x+4}.$

Интеграл $\int \frac{dx}{e^x+4}$ также как и п. 6.2 сводится к интегралу от рациональной функции после замены переменной.

$$\int \frac{dx}{e^x+4} = \begin{vmatrix} e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow \\ dx = \frac{dt}{t} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t(t+4)} = \int \frac{dt}{t^2+4t} = \int \frac{dt}{(t+2)^2-4} =$$

$$= \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2-2}{t+2+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t}{t+4}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x}{e^x+4}\right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{e^x+4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x}{e^x+4}\right|+C.$

## 4.5. Индивидуальное задание № 2 «Определенный интеграл»

## 4.3. Методические указания к решению индивидуального задания № 2

Индивидуальное задание № 2 соответствует теме «Определённый интеграл» теоретического раздела дисциплины. Каждый вариант содержит 15 заданий, решение которых позволит освоить понятие определенного интеграла и его приложения для вычисления различных геометрических величин.

Внешняя общность записи определённого и неопределённого интегралов подчёркивает тесную связь между ними. Однако у них есть принципиальное различие, а именно, *определенный интеграл* – это число, *неопределенный интеграл* – это множество функций.

Формула Ньютона-Лейбница даёт основной способ вычисления определённых интегралов и позволяет находить определённый интеграл, обходя суммирование, при помощи первообразных функций. Она имеет смысл только, когда отрезок интегрирования конечный, а подынтегральная функция ограничена на этом отрезке. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, формулу Ньютона-Лейбница использовать нельзя.

В связи с необходимостью распространения понятия определённого интеграла на случаи бесконечного промежутка интегрирования и разрывной подынтегральной функции вводятся несобственные интегралы (1-го и 2-го родов).

## 4.6. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 2

### Вариант 0

**Задание 1.** Вычислите определённые интегралы:

1.1. $\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2-x\right)\cos 5x dx$;

1.2. $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^3+1\right)dx}{\left(x^4+4x+1\right)^2}$;

1.3. $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$;

1.4. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}3} \frac{\operatorname{tg}x-5}{2-\sin 2x+4\cos^2 x}dx$;

1.5. $\int\limits_{-3}^{4} f(x)dx$, $f\left(x\right)=\begin{cases}-3, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 1,\\ 3x-4, & x>1.\end{cases}$

***Решение***

**1.1.** $\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2-x\right)\cos 5x dx$.

Подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена второй степени на тригонометрическую функцию, следовательно, для вычисления данного интеграла необходимо применить формулу интегрирования по частям два раза:

$$\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2-x\right)\cos 5x dx=\left|\begin{array}{l}u=x^2-x\ \Rightarrow\ du=\left(2x-1\right)dx\\ dv=\cos 5x dx\ \Rightarrow\ v=\int\cos 5x dx=\frac{1}{5}\sin 5x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{x^2-x}{5}\sin 5x\Big|_{-2}^{0}-\frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{0}\left(2x-1\right)\sin 5x dx=\left|\begin{array}{l}u=2x-1\ \Rightarrow\ du=2dx\\ dv=\sin 5x dx\ \Rightarrow\ v=-\frac{1}{5}\cos 5x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{x^2-x}{5}\sin 5x\Big|_{-2}^{0}-\frac{1}{5}\left(-\frac{2x-1}{5}\cos 5x\Big|_{-2}^{0}+\frac{2}{5}\int\limits_{-2}^{0}\cos 5x dx\right)=$$

$$=0-\frac{\left(-2\right)^2+2}{5}\sin\left(-10\right)+\frac{2x-1}{25}\cos 5x\Big|_{-2}^{0}-\frac{2}{125}\sin 5x\Big|_{-2}^{0}=$$

$$=\frac{6}{5}\sin 10+\frac{-1}{25}-\frac{-4-1}{25}\cos\left(-10\right)-\frac{2}{125}\left(\sin 0-\sin\left(-10\right)\right)=$$

$$=\frac{6}{5}\sin 10-\frac{1}{25}+\frac{5}{25}\cos 10-\frac{2}{125}\sin 10=\frac{148}{125}\sin 10+\frac{1}{5}\cos 10-\frac{1}{25}.$$

**1.2.** $\int\limits_0^1 \frac{(x^3+1)dx}{(x^4+4x+1)^2}$.

Для вычисления этого интеграла используем метод подведения под знак дифференциала:

$$\int\limits_0^1 \frac{(x^3+1)dx}{(x^4+4x+1)^2} = \int\limits_0^1 \frac{(x^3+1)d(x^4+4x+1)}{(x^4+4x+1)^2(x^4+4x+1)'} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{(x^3+1)d(x^4+4x+1)}{(x^4+4x+1)^2(4x^3+4)} = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{d(x^4+4x+1)}{(x^4+4x+1)^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4+4x+1}\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+4+1}-1\right) = \frac{5}{24}.$$

**1.3.** $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx$

Подынтегральная функция содержит выражение вида $f\left(x,\sqrt{1\pm x^2}\right)$, которое интегрируется с помощью соответствующих замен:

$$\int f\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)dx \Rightarrow x=\sin t,$$
$$\int f\left(x,\sqrt{1+x^2}\right)dx \Rightarrow x=\operatorname{tg} t, \quad .$$
$$\int f\left(x,\sqrt{x^2-1}\right)dx \Rightarrow x=\frac{1}{\cos t}.$$

Поэтому, используем замену переменных, исключающую иррациональность: $x=\operatorname{tg} t$. Тогда:

$$x=\operatorname{tg} t \Rightarrow \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t}; \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

Находим новые пределы интегрирования:

$$0=\operatorname{tg} t \ \Rightarrow \ t_{\text{нижн.}}=0; \ \ 1=\operatorname{tg} t \ \Rightarrow \ t_{\text{верхн.}}=\pi/4.$$

Тогда:

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}^3 t}{\cos t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 t}{\cos^6 t}\cdot\frac{d\cos t}{(-\sin t)}=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos^6 t}d\cos t=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 t}{\cos^6 t}d\cos t=-\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^6 t}-\frac{\cos^2 t}{\cos^6 t}\right)d\cos t=$$

$$=\frac{1}{5\cos^5 t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{3\cos^3 t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{5(\sqrt{2}/2)^5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{3(\sqrt{2}/2)^3}+\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}+2}{15}.$$

**1.4.** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}3}\frac{\operatorname{tg}x-5}{2-\sin 2x+4\cos^2 x}dx$.

Вычислим интеграл, используя подстановку:

$$\operatorname{tg}x=t\Rightarrow\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}};\ x=\operatorname{arctg}t\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Находим новые пределы:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=t\Rightarrow t_{\text{нижн.}}=1;\quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)=t\Rightarrow t_{\text{верхн.}}=3.$$

Тогда:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}3}\frac{\operatorname{tg}x-5}{2-2\sin x\cos x+4\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}3}\frac{\operatorname{tg}x-5}{1-\sin x\cos x+2\cos^2 x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{t-5}{1-\frac{t}{1+t^2}+\frac{2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{t-5}{\frac{1+t^2-t+2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{t-5}{t^2-t+3}dt=$$

Выделим в знаменателе полный квадрат и сделаем ещё одну замену переменных:

$$\left|\begin{array}{l} t^2-t+3=t^2-2\cdot\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+3=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4} \\ t-\frac{1}{2}=z\ \Rightarrow t=z+\frac{1}{2}\Rightarrow dt=dz. \end{array}\right|$$

новые пределы интегрирования будут равны: $z_{\text{нижн.}} = 1/2,\ z_{\text{верхн.}} = 5/2.$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{z - 9/2}{z^2 + 11/4} dz = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{z}{z^2 + 11/4} dz - \frac{9}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{z^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} dz =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(z^2 + \frac{11}{4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} - \frac{9}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2z}{\sqrt{11}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{25}{4} + \frac{11}{4}\right) - \ln\left(\frac{1}{4} + \frac{11}{4}\right)\right) - \frac{9}{2\sqrt{11}}\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{11}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{11}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln 9 - \ln 3\right) - \frac{9}{2\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{\frac{5}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{11}}}{1 + \frac{5}{\sqrt{11}}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}} = \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{9}{2\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{11}}{4}.$$

**1.5.** $\int_{-3}^{4} f(x)dx$, $f(x) = \begin{cases} -3, & x \le 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 1, \\ 3x - 4, & x > 1. \end{cases}$

Воспользуемся свойством аддитивности определённого интеграла:

$$\int_{-3}^{4} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx.$$

Тогда:

$$\int_{-3}^{4} f(x)dx = \int_{-3}^{0} (-3)dx + \int_{0}^{1} \sqrt{x}dx + \int_{1}^{4} (3x - 4)dx =$$

$$= -3\int_{-3}^{0} dx + \int_{0}^{1} x^{\frac{1}{2}}dx + \int_{1}^{4} (3x - 4)dx = -3x\Big|_{-3}^{0} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{1} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\Bigg|_{1}^{4} =$$

$$= -3(0 + 3) + \frac{2}{3}(1 - 0) + \left(\frac{3}{2}\cdot 4^2 - 4\cdot 4\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot 1^2 - 4\cdot 1\right) =$$

$$= -9 + \frac{2}{3} + 8 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{13}{6}.$$

**Задание 2.** Вычислите площади фигур, ограниченных графиками функций.

2.1. $y=\dfrac{1}{1+\cos x}$, $y=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=-\dfrac{\pi}{2}$;

2.2. $\rho=\sin\varphi$, $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi$;

2.3. $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=2\sin t, \end{cases}$ $y=1$ $(y\ge 1)$.

***Решение***

2.1. $y=\dfrac{1}{1+\cos x}$, $y=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=-\dfrac{\pi}{2}$.

Построим фигуру, ограниченную линиями $y=\dfrac{1}{1+\cos x}$, $y=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$ и $x=-\dfrac{\pi}{2}$. Это можно сделать по точкам, методами исследования поведения функций или с использованием любого графического приложения (см. рис. 1).

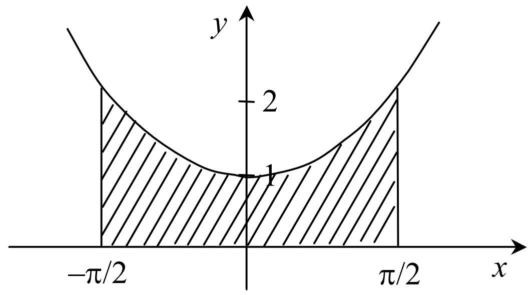


Рис. 1

Найдём площадь фигуры по формуле:

$$S=\int_a^b f(x)dx\text{, где } f(x)=\frac{1}{1+\cos x},\ a=-\frac{\pi}{2} \text{ и } b=\frac{\pi}{2}.$$

Тогда:

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{-\pi}{4}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=2\ (\text{кв.ед.}).$$

**2.2.** $\rho = \sin\varphi$, $\rho = \sqrt{3}\cos\varphi$.

Данные уравнения определяют в полярной системе координат две окружности. Первое уравнение $\rho = \sin\varphi$ задаёт окружность с центром в точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и радиусом $r_1 = \frac{1}{2}$. Второе уравнение $\rho = \sqrt{3}\cos\varphi$ задаёт окружность с центром в точке $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ и радиусом $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

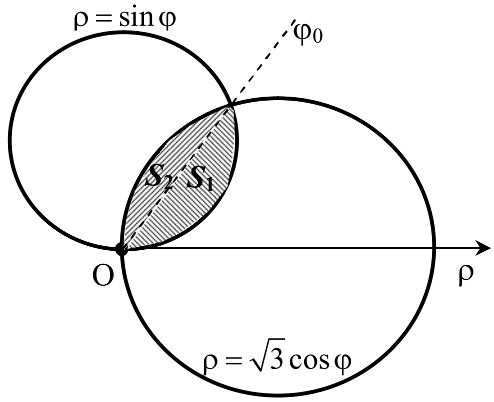


Рис. 2

Построим окружности $\rho = \sin\varphi$ и $\rho = \sqrt{3}\cos\varphi$. Выделим их общую часть, площадь которой необходимо вычислить (рис. 2). Найдём площадь фигуры по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Заметим, что искомая площадь состоит из двух криволинейных секторов $S_1$ и $S_2$. Найдём $\varphi_0$ – угол, при котором пересекаются две окружности. Из равенства:

$$\sin\varphi = \sqrt{3}\cos\varphi \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Тогда пределы интегрирования при вычислении площади первого сектора равны 0 и $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$; а второго сектора – $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, получаем:

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\varphi d\varphi+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{3}\cos\varphi\right)^2 d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi+\frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{3}{4}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sin 2\frac{\pi}{3}}{2}-0\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{\pi}{3}-\frac{\sin 2\frac{\pi}{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\right)(\text{кв.ед.}).$$

**2.3.** $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=2\sin t,\end{cases}\quad y=1\quad (y\ge 1).$

Заданные параметрические уравнения определяют кривую второго порядка эллипс с полуосями $a=1,\ b=2$. Построить данную кривую можно либо по точкам, либо с использованием любого графического приложения. Прямая $y=1$ отсекает верхнюю часть эллипса $S_1$, площадь которой мы будем искать (см. рис. 3). Найдём точки пересечения прямой и эллипса:

$$2\sin t=1\Rightarrow \sin t=\frac{1}{2}\Rightarrow t_1=\frac{\pi}{6},\quad t_2=\frac{5\pi}{6}.$$

Здесь $t_1$ соответствует точке $x_1$, $t_2$ соответствует точке $x_2$. Найдём площадь фигуры по формуле:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)dt\,.$$

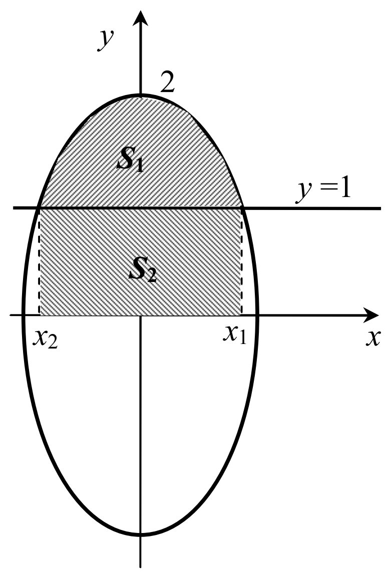

Рис. 3

Однако в этом случае мы получим площадь между кривой – эллипсом и осью *OX*, т.е. $S_1 + S_2$. Поэтому искомая площадь $S_1$ будет представлять собой разность $S - S_2$:

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} y_1(t)x'(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} y_2(t)x'(t)\,dt,$$

где $y_1(t) = 2\sin t,\ x(t) = \cos t,\ y^2(t) = 1,\ t_1 = \dfrac{\pi}{6},\ t_2 = \dfrac{5\pi}{6}.$

Кроме того, заметим, что фигура $S_1 + S_2$ симметрична относительно оси *OY*. Поэтому вычислим площадь как удвоенный интеграл по половинному промежутку от $x_0 = 0$ до $x1 = \cos(\pi/6)$. Из первого уравнения параметрической системы эллипса $x = \cos t$ найдем $t_0$, соответствующий $x_0$:

$$0 = \cos t \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда:

$$S_1 = S - S_2 = 2\left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 2\sin t(\cos t)'dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 1\cdot(\cos t)'dt \right) =$$

$$= 2\left( -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 2\sin^2 t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin t dt \right) = 2\left( \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 t dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \right) =$$

$$= 2\left( \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt + \cos t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2\left( \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \cos t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= 2\left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi - \left( \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{6} \right) + \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6} \right) = 2\left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)(\text{кв.ед.}).$$

В заключение отметим, что $S_2$ можно вычислить как площадь прямоугольника, но при этом не забывать, что вычисления будут проводиться в декартовой системе координат.

**Задание 3.** Вычислите длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}+3}{2}$, $\quad 0\le x\le 2$;

3.2. $\rho=2\sin\varphi$, $\quad 0\le\varphi\le\pi/6$;

3.3. $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases} \quad \pi/6\le t\le\pi/4$.

***Решение***

**3.1.** $y=\dfrac{e^x+e^{-x}+3}{2}$, $\quad 0\le x\le 2$.

Так как линия задана в декартовой системе координат в явном виде, длину дуги кривой найдем по формуле:

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Производная функции $y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{4}$, тогда:

$$L=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{2^2+e^{2x}-2+e^{-2x}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{e^{2x}+2+e^{-2x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(e^x+e^{-x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(e^2-e^{-2}\right)-\frac{1}{2}\left(e^0-e^0\right)=\frac{e^2-e^{-2}}{2}=sh2.$$

**3.2.** $\rho=2\sin\varphi$, $\quad 0\le\varphi\le\pi/6$.

Так как линия задана в полярной системе координат, длину дуги кривой найдём по формуле:

$$L=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi.$$

Производная функции $\rho'=2\cos\varphi$, тогда:

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{(2\sin\varphi)^2+(2\cos\varphi)^2}\,d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}\,d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

**3.3.** $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \pi/6 \le t \le \pi/4.$

Так как линия задана в декартовой системе координат параметрически, длину дуги кривой найдём по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(y'_t)^2 + (x'_t)^2}\, dt.$$

Производные функций:

$x' = e^t(\cos t + \sin t) + e^t(-\sin t + \cos t) = 2e^t \cos t,$

$y' = e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t.$

Тогда:

$$L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(2e^t \cos t\right)^2 + \left(-2e^t \sin t\right)^2}\, dt =$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} e^t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = 2e^t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(e^{\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{\pi}{6}}\right).$$

**Задание 4.** Вычислите объёмы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$:

4.1. вокруг $Ox$;

4.2. вокруг $Oy$.

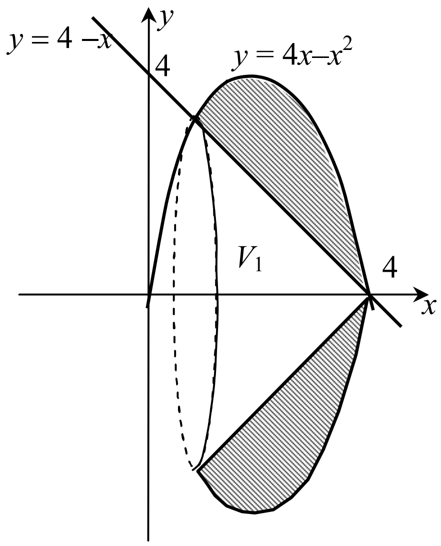


Рис. 4

***Решение***

**4.1.** $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$ вокруг $Ox$.

Построим фигуру вращения – пересечение функций $y=4x-x^2$ и $y=4-x$ вращаем вокруг $Ox$ (рис. 4). Найдём абсциссы точек пересечения двух линий:

$4x - x^2 = 4 - x \Rightarrow (4-x)x - (4-x) = 0 \Rightarrow$

$(4-x)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=4;\ x_2=1.$

Объём фигуры вращения, ограниченной линией $y=(x)$ находим по формуле:

$$V_{Ox}=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2(x)dx.$$

В нашем случае, фигура полая, т.е. из объёма фигуры, образованной кривой $y=4x-x^2$ надо удалить объём $V_1$ фигуры, образованной линией $y=4-x$. Тогда:

$$V=\pi\int_1^4\left(4x-x^2\right)^2dx-\pi\int_1^4(4-x)^2dx=\pi\int_1^4\left[\left(4x-x^2\right)^2-(4-x)^2\right]dx=$$

$$=\pi\int_1^4\left[16x^2-8x^3+x^4-16+8x-x^2\right]dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}-2x^4+5x^3+4x^2-16x\right]_1^4=$$

$$=\pi\left[\frac{4^5}{5}-2\cdot4^4+5\cdot4^3+4\cdot4^2-16\cdot4\right]-\pi\left[\frac{1^5}{5}-2\cdot1^4+5\cdot1^3+4\cdot1^2-16\cdot1\right]=$$

$$=\pi\left[\frac{4^3}{5}+\frac{44}{5}\right]=\frac{108}{5}\pi\ (\text{куб.ед.}).$$

**4.2.** $y=4x-x^2$, $y=4-x$ вокруг $Oy$.

*1-ый способ*. Построим фигуру вращения – пересечение функций $y=4x-x^2$ и $y=4-x$ вращаем вокруг $Oy$ (рис. 5). В этом случае объём фигуры вращения, ограниченной линией $x=x(y)$ находим по формуле:

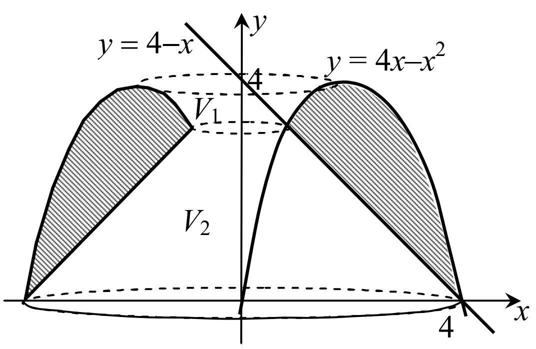


Рис. 5

$$V_{Oy}=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2(y)dx.$$

Найдём ординаты точек пересечения двух линий. Так как абсциссы мы нашли $x_1=4; x_2=1$, то ординаты находим подстановкой $x_1$ и $x_2$ в любое уравнение линий, например, в уравнение прямой: $y_1=4-4=0$, $y_2=4-1=3$. Выразим обратные функции $x=x(y)$:

$$y=4x-x^2 \Rightarrow y=-\left(\underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}-4\right)=-(x-2)^2+4 \Rightarrow$$

$$(x-2)^2=4-y \Rightarrow x-2=\pm\sqrt{4-y} \Rightarrow$$

$x=2\pm\sqrt{4-y}$ – правая и левая ветвь параболы,

$y=4-x \Rightarrow x=4-y$ – уравнение прямой.

Фигура полая, т. е. из объема фигуры, образованной правой ветвью $x=2+\sqrt{4-y}$ надо удалить объём $V_2$ фигуры, образованной прямой $x=4-y$. Тогда:

$$\overline{V_{Oy}}=\pi\int_0^3\left[\left(2+\sqrt{4-y}\right)^2-(4-y)^2\right]dy.$$

Однако, фигура, образующая тело вращения, достигает своего наибольшего значения в вершине параболы $(y_0=4)$. На промежутке от $y=3$ до $y=4$ фигура вращения формируется за счёт правой и левой ветвей параболы. Фигура полая, следовательно, из объёма фигуры, образованной правой ветвью $x=2+\sqrt{4-y}$ надо удалить объём $V_1$ фигуры, образованной левой ветвью $x=2-\sqrt{4-y}$. Тогда:

$$\overline{\overline{V_{Oy}}}=\pi\int_3^4\left[\left(2+\sqrt{4-y}\right)^2-\left(2-\sqrt{4-y}\right)^2\right]dy.$$

Таким образом, фигура вращения вокруг $Oy$ состоит из двух частей $\overline{V_{Oy}}$ и $\overline{\overline{V_{Oy}}}$, и искомый объём есть сумма $\overline{V_{Oy}}+\overline{\overline{V_{Oy}}}$.

$$\overline{V_{Oy}}+\overline{\overline{V_{Oy}}}=\pi\int_0^3\left[\left(2+\sqrt{4-y}\right)^2-(4-y)^2\right]dy+$$

$$+\pi\int_3^4\left[\left(2+\sqrt{4-y}\right)^2-\left(2-\sqrt{4-y}\right)^2\right]dy=\pi\int_0^3\left[4\sqrt{4-y}-8+7y-y^2\right]dy+$$

$$+\pi\int_3^4 8\sqrt{4-y}dy=\pi\left[-\frac{8}{3}(4-y)^{\frac{3}{2}}-8y+\frac{7}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^3-$$

$$-\frac{8\pi\cdot 2}{3}(4-y)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_3^4=\pi\left(\frac{56}{3}-\frac{3}{2}\right)+\frac{16\pi}{3}=22.5\pi\text{ (куб.ед.)}.$$

*2-ой способ*. Чтобы не разбивать фигуру вращения на элементарные (образованные только двумя – внешней и внутренней граничными функциями), для вычисления объема $V_{Oy}$ можно использовать другую формулу:

$$V_{Oy} = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} x\cdot y(x)\,dx\,.$$

При этом необходимо учитывать, что фигура полая, т.е. не забываем вычесть объём полости. Тогда:

$$V_{Oy} = 2\pi\int_1^4 x\cdot\left(4x-x^2\right)dx - 2\pi\int_1^4 x\cdot(4-x)\,dx =$$

$$= 2\pi\int_1^4 x\cdot[\left(4x-x^2\right)-(4-x)]dx = 2\pi\int_1^4 [5x^2-x^3-4x]dx =$$

$$= 2\pi\left[\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_1^4 = 2\pi\left[11+\frac{1}{4}\right] = 22.5\pi \text{ (куб.ед.)}.$$

**Задание 5.** Исследуйте на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2(x+1)}$;  5.2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\left(1+\sin\sqrt[3]{x^4}\right)^5-1}$.

***Решение***

**5.1.** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2(x+1)}$.

Это несобственный интеграл I рода. Для исследования сходимости применим предельный признак сравнения. Функция $g(x)=\dfrac{1}{x\ln^2(x)}$ эквивалентна подынтегральной функции $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2(x+1)}$ при $x\to\infty$, так как:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\ln^2(x)}{x\ln^2(x+1)} = 1.$$

Поэтому, исследуем сходимость интеграла для функции $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x\ln^2\left(x\right)}$, а согласно признаку сходимости, интеграл от функции $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x\ln^2\left(x+1\right)}$ будет вести себя так же. По определению:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{a\to\infty}\int_2^{a}\frac{dx}{x\ln^2 x}=-\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^a=-0+\frac{1}{\ln 2}=\mathrm{const}\Rightarrow$$

интеграл от функции $g(x)$ сходится $\Rightarrow$ по предельному признаку сходимости. Исходный интеграл тоже сходится.

*Замечание.*

- Поскольку мы применили признак сравнения для исходного интеграла и вычислили значение интеграла для эквивалентной функции, нельзя утверждать, что значение исходного интеграла равно $\dfrac{1}{\ln 2}$. Можно лишь утверждать, что исходный интеграл сходится.
- Вместо предельного признака сравнения можно было использовать 1-ый признак сравнения, т. е. подобрать бóльшую функцию $g\left(x\right)\geq f\left(x\right)$, интеграл от которой будет сходиться.

**5.2.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\left(1+\sin\sqrt[3]{x^4}\right)^5-1}$.

Это несобственный интеграл II рода, так как подынтегральная функция имеет на отрезке интегрирования точку разрыва II рода $x_0=0$. Для исследования сходимости применим предельный признак сравнения. Используя эквивалентные бесконечно малые, найдём эквивалент для подынтегральной функции при $x\to 0$:

$$f\left(x\right)=\frac{\operatorname{tg} x}{\left(1+\sin\sqrt[3]{x^4}\right)^5-1}\sim\frac{x}{5\sqrt[3]{x^4}}=\frac{1}{5x^{\frac{1}{3}}}.$$

Исследуем сходимость интеграла для функции $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$. Согласно признаку сходимости, интеграл от функции $f\left(x\right)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\left(1+\sin\sqrt[3]{x^4}\right)^5-1}$ будет вести себя так же. По определению:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{\mu\to 0}\int_{-1}^{0-\mu}\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}+\lim_{\eta\to 0}\int_{0+\eta}^{1}\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Исследуем каждый интеграл отдельно. Если хотя бы один из интегралов расходится, то весь интеграл расходится

$$\lim_{\mu\to 0}\int_{-1}^{0-\mu}\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{\mu\to 0}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{-1}^{0-\mu}=\frac{3}{2}\left(0-\left(-1\right)^{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{3}{2}=\mathrm{const}\Rightarrow$$

интеграл сходится;

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{0+\eta}^{1}\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{\eta\to 0}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{0+\eta}^{1}=\frac{3}{2}(1^{\frac{2}{3}}-0)=\frac{3}{2}=\mathrm{const}\Rightarrow$$

интеграл сходится. Таким образом, оба интеграла сходятся, следовательно, исходный интеграл сходится согласно предельному признаку сравнения.

## 4.7. Индивидуальное задания № 3 «Кратные интегралы»

## 4.8. Методические указания к выполнению индивидуального задания № 3

Индивидуальное задание №3 соответствует теме «Кратные интегралы» теоретического раздела дисциплины.

При вычислении двойных и тройных интегралов наибольшие затруднения вызывают построение областей интегрирования, расстановка пределов интегрирования, выбор порядка интегрирования и выбор наиболее целесообразной системы координат.

При вычислении двойного интеграла в декартовой системе координат необходимо использовать одну из формул:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy,$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

При этом удобно использовать схему вычисления двойного интеграла [3, с. 99–100]. Отметим также, что значение двойного интеграла не зависит от порядка интегрирования.

Если областью интегрирования является окружность или её часть, то в некоторых случаях вычисление двойного интеграла удобнее проводить в полярной системе координат (дисциплина «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»). Схема вычисления двойного интеграла в полярной системе координат приведена в [3, с. 109–111].

Вычисление тройного интеграла, также как и двойного может быть осуществлено посредством ряда последовательных интегрирований [3, с. 140–141, с. 147–148, с. 155–156]. При этом не обязательно строить всю область интегрирования, достаточно построить ее проекцию на одну из координатных плоскостей в декартовой системе координат.

## 4.9. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 3

### Вариант № 0

**Задание 1.** Измените порядок интегрирования в двойном интеграле:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{3-2x} f(x;y)\,dy.$$

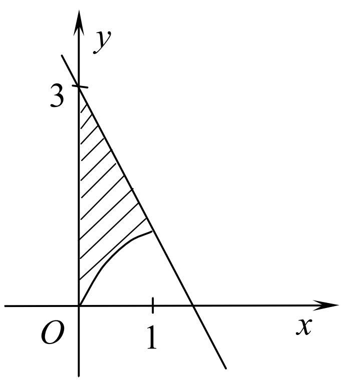


Рис. 6

***Решение***

Область интегрирования $D$ ограничена линиями $x=0$, $x=1$, $y=\sqrt{x}$, $y=3-2x$ (рис. 6).

Для того чтобы расставить пределы интегрирования в другом порядке, проведем через область $D$ прямые, параллельные оси $Ox$. эти прямые пересекают сначала ось $Oy$, затем дугу параболы $y=\sqrt{x}$ или прямую $y=3-2x$. Следовательно, линией входа будет ось $Oy$, т.е. прямая

$x=0 \quad 0 \le y \le 3$, а линиями выхода будут $x = y^2 \left(0 \le y \le 1\right)$ и $x = \dfrac{3-y}{2}$ $\left(1 \le y \le 3\right)$ (см. рис.6). Так как линия выхода задается двумя различными аналитическими выражениями, то область $D$ следует разбить прямой $y=1$ на две области, и в силу свойства аддитивности двойного интеграла двойной интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{3-2x} f(x;y)dy$ будет равен сумме интегралов по каждой из этих областей. Таким образом, получаем:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{3-2x} f(x;y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f(x;y)dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\frac{3-y}{2}} f(x;y)dx.$$

Ответ: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{3-2x} f(x;y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f(x;y)dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\frac{3-y}{2}} f(x;y)dx.$

**Задание 2.** Перейти в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ к двукратному и расставить пределы интегрирования, если область $D$ ограничена линиями $y=x,\ y=\dfrac{1}{x},\ x=2.$

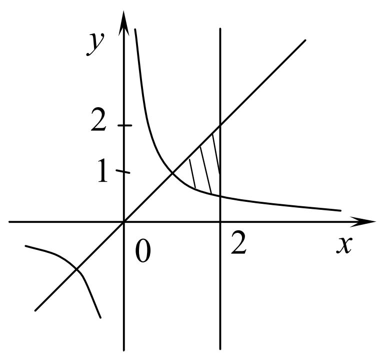

Рис. 7

***Решение***

Область $D$ ограничена линиями: $y=x$ (прямая, биссектриса первого и третьего координатных углов), $y=\dfrac{1}{x}$ (гипербола, расположенная в первой и третьей координатных четвертях) и $x=2$ (прямая параллельная оси $Oy$). Строим область $D$, ограниченную указанными линиями (рис. 7). Область $D$ расположена в первой координатной четверти. Из рисунка видно, что область ограничена сверху прямой $y=x$, снизу гиперболой $y=\dfrac{1}{x}$. Для того, чтобы найти точку пересечения прямой и параболы решим уравнение $x=\dfrac{1}{x} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$ (так как в области $D$ $x>0$). Таким образом, точка пересечения параболы и прямой имеет координаты $(1;1)$. Точка пересечения прямой $x=2$ и гиперболы $y=\dfrac{1}{x}$ имеет координаты $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$, а прямые $x=2$ и $y=x$ пересекаются в точке с координатами $(2;2)$.

Сначала запишем двойной интеграл в виде двукратного, взяв внутренний интеграл по переменной *y*. Для того чтобы расставить пределы интегрирования, проведем через область $D$ прямую параллельную оси *Oy* Линией входа будет гипербола $y=\dfrac{1}{x}$, а линией выхода – прямая $y=x$. В результате получаем:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x;y)\,dy.$$

Запишем теперь двойной интеграл в виде двукратного, взяв внутренний интеграл по переменной *x*. Для того чтобы расставить пределы интегрирования, проведём через область *D* прямую параллельную оси *Ox*. Линией входа будет гипербола $y=\dfrac{1}{x}$ и прямая $y=x$. Линией выхода будет прямая $x=2$. Так как линия входа задаётся двумя различными аналитическими выражениями, то область *D* следует разбить прямой $y=1$ на две области. В силу свойства аддитивности двойного интеграла двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy$ будет равен сумме интегралов по каждой из этих областей. В итоге имеем:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} f(x;y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_y^2 f(x;y)\,dx.$$

Ответ: $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x;y)\,dy;$

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} f(x;y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_y^2 f(x;y)\,dx.$$

**Задание 3.** Вычислите двойной интеграл:

3.1. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D x^3y^2dxdy$, если область $D$ ограничена линиями $x=0,\ \ y=1,\ \ x=1,\ \ y=2;$

3.2. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy$, если область $D$ ограничена линиями $x=1,\ \ y=\sqrt{x},\ \ y=-x^2.$

***Решение***

**3.1.** $\iint\limits_D x^3y^2dxdy$, если область $D$ ограничена линиями $x=0$, $y=1$, $x=1$, $y=2$.

Областью интегрирования является прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=1$, $y=2$, поэтому можно выбрать любой порядок интегрирования:

$$\iint\limits_D x^3y^2dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_1^2 x^3y^2dy=\int\limits_0^1 dx\left(x^3\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{3}\int\limits_0^1\left(8x^3-x^3\right)dx=$$

$$=\frac{7}{3}\int\limits_0^1 x^3dx=\frac{7}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{12}.$$

Ответ: $\iint\limits_D x^3y^2dxdy=\dfrac{7}{12}.$

**3.2.** $\iint\limits_D\left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy$, если область $D$ ограничена линиями $x=1$, $y=\sqrt{x}$, $y=-x^2$.

Область интегрирования ограничена прямой $x=1$(параллельной оси $Oy$), параболой $y=-x^2$ (с вершиной в начале координат, ветви направлены вниз) и веткой параболы $y=\sqrt{x}$. Строим область $D$ (рис. 8).

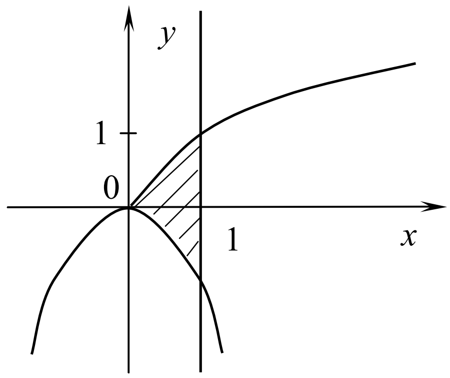


Рис. 8

Из рисунка видно, что для вычисления этого двойного интеграла целесообразней внутренний интеграл взять по переменной $y$ (при другом выборе порядка интегрирования пришлось бы вычислять два интеграла), т.е. применить формулу:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)\,dy.$$

В нашем случае $a=0,\ b=1,\ y_1(x)=-x^2,\ y_2(x)=\sqrt{x}$.

Тогда имеем:

$$\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x^2}^{\sqrt{x}} \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx\left(9x^2\cdot\frac{y^3}{3}+25x^4\cdot\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-x^2}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(3x^2\cdot x^{\frac{3}{2}}+5x^4\cdot x^{\frac{5}{2}}+3x^2\cdot x^6+5x^4\cdot x^{10}\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(3x^{\frac{7}{2}}+5x^{\frac{13}{2}}+3x^8+5x^{14}\right)dx = \left(3\cdot\frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}+5\cdot\frac{x^{\frac{15}{2}}}{\frac{15}{2}}+3\cdot\frac{x^9}{9}+5\cdot\frac{x^{15}}{15}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

Ответ: $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy = 2. = 2.$

**Задание 4.** Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1. $y=2x-x^2,\ y=-4x-16;$

4.2. $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}}.$

***Решение***

Прикладные задачи, при решении которых используется двойной интеграл, определены его геометрическим и физическим смыслом. Вычисление площади плоской фигуры относится к геометрическому приложению двойного интеграла. Площадь плоской фигуры $D$ находится по формуле $S=\iint\limits_D dxdy.$

**4.1.** $y=2x-x^2,\ y=-4x-16.$

Область, площадь которой необходимо найти ограничена сверху параболой $y = 2x - x^2$ и снизу прямой $y = -4x - 16$. Найдём абсциссы точек пересечения параболы и прямой, для этого решим уравнение $2x - x^2 = -4x - 16 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 8$ (рис. 9).

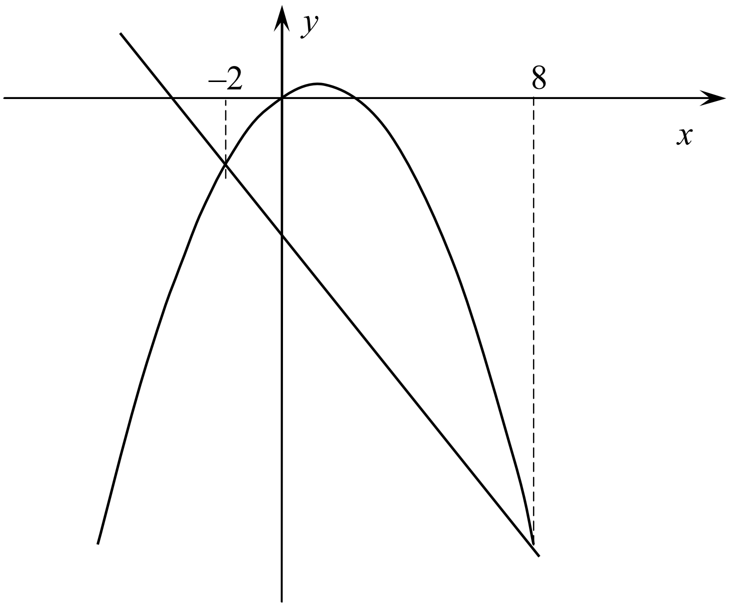


Рис. 9

Таким образом, получаем:

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{8} dx \int_{-4x-16}^{2x-x^2} dy = \int_{-2}^{8} dx \left(y\right)\Big|_{-4x-16}^{2x-x^2} = \int_{-2}^{8} \left(2x - x^2 + 4x + 16\right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{8} \left(6x - x^2 + 16\right) dx = \left(6 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 16x\right)\Bigg|_{-2}^{8} =$$

$$= 192 - \frac{512}{3} + 128 - 12 + \frac{8}{3} + 32 = 152.$$

Ответ: $S = 152$ (кв. ед.).

**4.2.** $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

Напомним, что каноническое уравнение окружности с центром в точке $O(x_0; y_0)$ и радиусом равным $R$ имеет вид:

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2.$$

Область, площадь которой надо найти ограничена двумя окружностями и двумя прямыми (рис. 10).

Первое уравнение $x^2-4y+y^2=0 \Rightarrow x^2+\left(y-2\right)^2=2^2$ определяет окружность с центром в точке $O_1\left(0;2\right)$ и радиусом $R_1=2$. Второе уравнение $x^2-8y+y^2=0 \Rightarrow x^2+\left(y-4\right)^2=4^2$ также определяет окружность, центр которой находится в точке $O_2\left(0;4\right)$, а её радиус $R_2=4$. Уравнение $y=0$ – это уравнение оси $Ox$, а $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ – это прямая, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом:

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \left(\alpha=\frac{\pi}{6}\right).$$

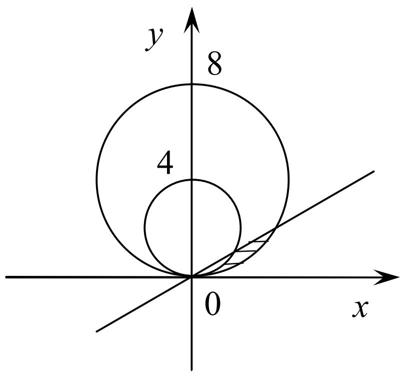

Рис. 10

Так как область, площадь которой необходимо найти ограничена окружностями и прямыми, то для вычисления ее площади удобно перейти к полярной системе координат:

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ \ dxdy=\rho d\rho d\varphi.$$

Запишем уравнение линий, ограничивающих область $D$, в полярных координатах:

1) $x^2-4y+y^2=0 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi-4\rho\sin\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho^2-4\rho\sin\varphi=0 \Rightarrow \rho=4\sin\varphi;$

2) $x^2-8y+y^2=0 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi-8\rho\sin\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho^2-8\rho\sin\varphi=0 \Rightarrow \rho=8\sin\varphi;$

3) $y=0 \Rightarrow \rho\sin\varphi=0 \Rightarrow \sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0;$

4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \rho\sin\varphi=\dfrac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{6}.$

Проведём лучи, проходящие через полюс $\left(O\left(0;0\right)\right)$ и пресекающие область $D$. Тогда линия входа, а $\rho=8\sin\varphi$ – линия выхода.

Формула вычисления двойного интеграла в полярной системе координат имеет вид:

$$\iint\limits_D f\left(x;y\right)dxdy=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}f\left(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi\right)\cdot\rho d\rho.$$

В нашем случае:

$$f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\equiv 1,\ \varphi_1=0,\ \varphi_2=\frac{\pi}{6},\ \rho_1=4\sin\varphi,\ \rho_2=8\sin\varphi.$$

В результате получаем:

$$S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}\rho d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(64\sin^2\varphi-16\sin^2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{48}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\varphi d\varphi=24\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos2\varphi}{2}d\varphi=12\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi-\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos2\varphi\cdot\frac{d(2\varphi)}{2}\right)=$$

$$=12\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{2}\sin2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right)=12\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\pi-3\sqrt{3}.$$

Ответ: $S=2\pi-3\sqrt{3}$.

**Задание 5.** Найдите массу плоской пластинки, заданной ограничивающими её линиями $x=\frac{1}{4}$, $y=0$, $y^2=16x$ $(y\geq 0)$, если плотность её в каждой точке равна $\rho(x,y)=16x+\frac{9y^2}{2}$.

***Решение***

Вычисление массы плоской пластинки относится к физическому смыслу двойного интеграла. Формула для вычисления массы имеет вид:

$$m=\iint\limits_D\rho(x;y)dx\,dy.$$

Пластинка, массу которой надо найти ограничена веткой параболы $y^2=16x\,(y\geq 0)$ и двумя прямыми $x=\frac{1}{4}$, $y=0$ (рис. 11).

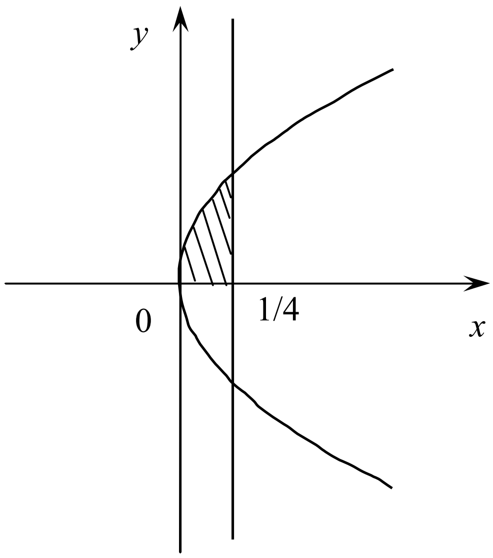

Рис. 11

При вычислении двойного интеграла по такой области порядок интегрирования значения не имеет, поэтому внешний интеграл возьмём по переменной $x$, а внутренний по $y$. Из рисунка 11 видно, что границы изменения переменной $x$ заключены от $0$ до $\frac{1}{4}$. Внутренняя переменная $y$ меняется от $y_1 = 0$ до $y_2 = 4\sqrt{x}$. Тогда:

$$m = \iint_D \left(16x + \frac{9y^2}{2}\right) dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_0^{4\sqrt{x}} \left(16x + \frac{9y^2}{2}\right) dy = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \left(16xy + \frac{9}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{4\sqrt{x}} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} \left(16x \cdot 4\sqrt{x} + \frac{3}{2}\cdot 64x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(64x^{\frac{3}{2}} + 96x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(160x^{\frac{3}{2}}\right) dx =$$

$$= 160\int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{2}} dx = 160 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2.$$

Ответ: $m = 2$.

**Задание 6.** Вычислите тройной интеграл:

6.1. $\int_0^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x - y + z) dz$;

6.2. $\iiint_V x^2 \sin(\pi x y)\, dx\,dy\,dz$, если $V$: $x = 1$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 4\pi$.

***Решение***

**6.1.** $\int_0^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x - y + z) dz$.

Областью интегрирования является прямоугольный параллелепипед, ограниченный плоскостями: $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$ и $z = 0$, $z = 2$.

Вычислим сначала внутренний интеграл, считая переменные $x$, $y$ постоянными:

$$I(x;y) = \int_0^2 (x - y + z) dz = \left(xz - yz + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 2x - 2y + 2.$$

Полученную функцию интегрируем по переменной $y$, считая $x$ постоянной:

$$I(x)=\int_0^1 (2x-2y+2)\,dy=\left(2xy-2\cdot\frac{y^2}{2}+2y\right)\Bigg|_0^1=2x-1+2=2x+1.$$

И наконец, полученную функцию от переменной $x$ интегрируем по $x$:

$$I=\int_0^3 (2x+1)\,dx=\left(2\cdot\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^3=9=3=12.$$

Ответ: $\int_0^3 dx\int_0^1 dy\int_0^2 (x-y+z)\,dz=12.$

**6.2.** $\iiint\limits_V x^2\sin(\pi xy)\,dx\,dy\,dz$, если $V$: $x=1$, $y=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=4\pi$.

Область интегрирования $V$ ограничена плоскостями $x=1$, $y=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=4\pi$, поэтому тройной интеграл будем вычислять в декартовой системе координат. В данном интеграле порядок интегрирования определяется не только областью интегрирования, но подынтегральной функцией. Проекция тела $V$ в плоскость $Oxy$, есть область $D$, ограниченная прямыми $x=1$, $y=2x$, $y=0$ (рис. 12).

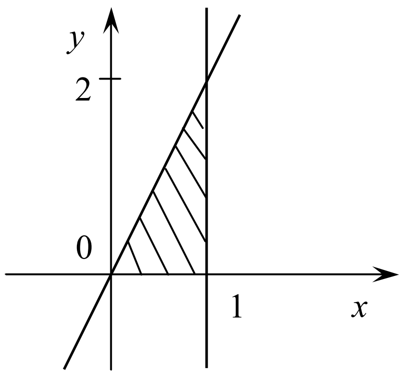


Рис. 12

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

В нашем случае $a=0$, $b=1$, $y_1(x)=0$, $y_2(x)=2x$, $z_1(x,y)=0$, $z_2(x,y)=4\pi$.

В итоге получаем:

$$\iiint\limits_V x^2\sin(\pi xy)\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{2x} dy\int_0^{4\pi} x^2\sin(\pi xy)\,dz.$$

Аналогично п. 6.1 сначала вычисляем внутренний интеграл:

$$I(x;y)=\int_0^{4\pi} x^2\sin(\pi xy)\,dz=\left(x^2\sin(\pi xy)\cdot z\right)\Big|_0^{4\pi}=4\pi x^2\sin(\pi xy).$$

Затем вычисляем интеграл по переменной $y$:

$$I(x)=\int_0^{2x} x^2\sin(\pi xy)\,dy=\left(-x^2\cdot\frac{1}{\pi x}\cos(\pi xy)\right)\Big|_0^{2x}=-\frac{x}{\pi}\cos\left(2\pi x^2\right).$$

И наконец, полученную функцию интегрируем по переменной $x$:

$$I=-\frac{1}{\pi}\int_0^1 x\cos\left(2\pi x^2\right)dx=-\frac{1}{\pi}\int_0^1 x\cos\left(2\pi x^2\right)\cdot\frac{d\left(2\pi x^2\right)}{4\pi x}=$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1\cos\left(2\pi x^2\right)\cdot d\left(2\pi x^2\right)=\left(-\frac{1}{4\pi^2}\sin\left(2\pi x^2\right)\right)\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}\cdot\left(\sin 2\pi-0\right)=0.$$

Ответ: $\iiint\limits_V x^2\sin(\pi xy)\,dx\,dy\,dz=0$.

**Задание 7.** Найдите объём тела, ограниченного поверхностями:

$$x=17\sqrt{2y},\ \ x=2\sqrt{2y},\ \ z=0,\ \ z+y=\frac{1}{2}.$$

***Решение***

Объем тела $V$, ограниченного заданными поверхностями вычисляется по формуле $V=\iiint\limits_V dxdydz.$

В нашем случае тело $V$ ограничено снизу плоскостью $z=0,$ сверху плоскостью $z+y=\frac{1}{2}$ $\left(z=\frac{1}{2}-y\right)$, а с боков параболическими цилиндрами $x=17\sqrt{2y},$ $x=2\sqrt{2y}.$ Проведём лучи, параллельные оси $Oz$ (направление лучей совпадает с направлением оси) и пересекающие данное тело. Тогда $z=0$ – поверхность входа, а $z=\frac{1}{2}-y$ – поверхность выхода. Таким образом, переменная $z$ меняется от $z_1=0$ до $z_2=\frac{1}{2}-y.$ Проекция тела $V$ на плоскость $Oxy$ есть область $D$, ограниченная двумя ветками парабол $x=17\sqrt{2y},$ $x=2\sqrt{2y}$ и прямой $y=\frac{1}{2}$ (эта прямая получена в результате исключения переменной $z$ из уравнения плоскостей

$z=0$ и $z=\frac{1}{2}-y$). Следовательно, переменная $y$ изменяется от $y_1=0$ до $y_2=\frac{1}{2}$, а переменная $x$ от $x_1=17\sqrt{2y}$ до $x_2=2\sqrt{2y}$.

Применяя формулу $V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_{y_1}^{y_2}dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)}dz$ окончательно получаем:

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}dy\int\limits_{17\sqrt{2y}}^{2\sqrt{2y}}dx\int\limits_0^{y-\frac{1}{2}}dz=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}dy\int\limits_{17\sqrt{2y}}^{2\sqrt{2y}}dx\left(z\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}-y}=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}dy\int\limits_{17\sqrt{2y}}^{2\sqrt{2y}}\left(\tfrac{1}{2}-y\right)dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}dy\left(\frac{1}{2}-y\right)x\Big|_{17\sqrt{2y}}^{2\sqrt{2y}}=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-y\right)(17\sqrt{2y}-2\sqrt{2y})dy=$$

$$=15\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(y-\frac{1}{2}\right)\sqrt{y}dy=15\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}\right)dy=15\sqrt{2}\left(\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=6\sqrt{2}\cdot 1-5\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}.$$

Ответ: $V=\sqrt{2}$.

**Задание 8.** Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $4\left(x^2+y^2\right)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $y=0\left(y\ge 0\right)$, $z=0\left(z\ge 0\right)$, если его плотность равна $\mu=10\left(x^2+y^2\right)$.

***Решение***

Масса тела $V$ ограниченного заданными поверхностями и имеющего плотность $\mu=\mu\left(x;y;z\right)$ вычисляется по формуле:

$$m=\iiint\limits_V \mu\left(x;y;z\right)dxdydz.$$

В нашем случае тело $V$ ограничено снизу плоскостью $z=0$, сверху конической поверхностью $z^2=4\left(x^2+y^2\right)$, а с боков – цилиндром $x^2+y^2=1$ и плоскостью $y=0$ ($y\ge 0$). Проведём лучи, параллельные оси $Oz$ (направление лучей совпадает с направлением оси) и пересекающие данное тело. Тогда $z=0$ – поверхность входа, а $z^2=4\left(x^2+y^2\right)$ ($z=+2\sqrt{x^2+y^2}$, так как по условию $z\geq 0$) – поверхность выхода. Таким образом, переменная $z$ меняется от $z_1=0$ до $z_2=2\sqrt{x^2+y^2}$. Проекция тела $V$ на плоскость $Oxy$ есть область $D$, ограниченная верхней частью окружности $x^2+y^2=1$ (так как $y\geq 0$) и осью $Ox\left(y=0\right)$. Поэтому вычисление тройного интеграла $\iiint\limits_V 10\left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz$ удобней проводить в цилиндрической системе координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$ по формуле:

$$\iiint\limits_V f\left(x;y;z\right)dxdydz=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho d\rho\int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)}f\left(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z\right)dz.$$

В нашем случае:

$\varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi;\ \rho_1\left(\varphi\right)=0,\ \rho_2\left(\varphi\right)=1;$

$z_1\left(\rho,\varphi\right)=0, z_2\left(\rho,\varphi\right)=2\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=2\rho;$

$\mu=10\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin\varphi^2\right)=10\rho^2.$

Подставляя эти значения в приведённую выше формулу, окончательно получаем:

$$m=\int\limits_0^\pi d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_0^{2\rho}10\rho^2dz=\int\limits_0^\pi d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\left(10\rho^2\cdot z\right)\Big|_0^{2\rho}=\int\limits_0^\pi d\varphi\int\limits_0^1 40\rho^4 d\rho=$$

$$=\int\limits_0^\pi d\varphi\left(40\cdot\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=8\int\limits_0^\pi d\varphi=8\varphi\Big|_0^\pi=8\pi.$$

Ответ: $m=8\pi.$

## 4.10. Индивидуальное задание № 4 «Элементы векторного анализа»

## 4.11. Методические указания к выполнению индивидуального задания № 4

Индивидуальное задание № 4 соответствует теме «Элементы векторного анализа» теоретического раздела дисциплины. Каждый вариант содержит восемь заданий на вычисление криволинейных и поверхностных интегралов, а также на их приложения.

Вычисление криволинейных интегралов 1-го и 2-го родов сводится к вычислению определённых интегралов по соответствующим формулам. Вычисление поверхностных интегралов 1-го и 2-го родов сводится к вычислению двойных интегралов. Формулы Грина и Остроградского-Гаусса позволяют значительно упростить вычисления.

## 4.12. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 4

### Вариант № 0

**Задание 1.** Для векторного поля $\vec{a} = \left(x^2 - z^2\right)i + 3yzj - yk$ найдите $rot\,\vec{a}$, $div\vec{a}$ и $div\left(rot\,\vec{a}\right)$.

***Решение***

Ротор векторного поля $\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ находится по формуле:

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

В нашем случае $a_x = x^2 - z^2$, $a_y = 3yz$, $a_z = -y$. Подставим координаты векторного поля $a_x$, $a_y$, $a_z$ в формулу и найдём координаты ротора-вектора:

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - z^2 & 3yz & -y \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial(-y)}{\partial y} - \frac{\partial(3yz)}{\partial z}\right) -$$

$$-j\left(\frac{\partial(-y)}{\partial x} - \frac{\partial\left(x^2 - z^2\right)}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial(3yz)}{\partial x} - \frac{\partial\left(x^2 - z^2\right)}{\partial y}\right) =$$

$$= (-1 - 3y)i - (0 + 2z)j + (0 - 0)k = (-1 - 3y)i - 2zj.$$

Дивергенцию векторного поля найдём по формуле:

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Получим $\mathrm{div}\vec{a} = \left(x^2 - z^2\right)'_x + \left(3yz\right)'_y + \left(-y\right)'_z = 2x + 3z + 0 = 2x + 3z.$

Найдём теперь div(rot$\vec{a}$). Координаты вектора-ротора были найдены в первом пункте задачи:

$$rot\,\vec{a} = \left(-1 - 3y\right)i - 2zj + 0k = \left\{-1 - 3y; -2z; 0\right\}.$$

Тогда $div(rot\,\vec{a}) = \left(-1 - 3y\right)'_x + \left(-2z\right)'_y + \left(0\right)'_z = 0 + 0 + 0 = 0.$

Ответ: $rot\,\vec{a} = \left(-1 - 3y\right)i - 2zj;$ $div\,\vec{a} = 2x + 3z;$ $div\left(rot\,\vec{a}\right) = 0.$

**Задание 2.** Найдите работу силы $\vec{F} = yi + \left(y + 2x\right)j$, совершаемую при перемещении материальной точки массой *m* из точки $O\left(-1;0\right)$ в точку $A\left(2;3\right)$ по прямой $y = x + 1$.

***Решение***

Работа силы $F = F_x i + F_y j$ при перемещении материальной точки вдоль линии *L* находится по формуле:

$$A = \int\limits_L F_x dx + F_y dy.$$

Интеграл $\int\limits_L F_x dx + F_y dy$ – это криволинейный интеграл второго рода. Если $L: y = f\left(x\right),\ a \le x \le b$, то криволинейный интеграл второго рода связан с определённым интегралом следующим соотношением:

$$\int\limits_L F_x dx + F_y dy = \int\limits_a^b F_x\left(x; f\left(x\right)\right)dx + \int\limits_a^b F_y\left(x; f\left(x\right)\right)\cdot f'(x)dx.$$

В нашем случае $F_x = y,\ F_y = y + 2x,\ L: y = x + 1$, где *x* изменяется от $\left(-1\right)$ до 2. В итоге получаем:

$$A=\int_L ydx+(y+2x)dy=\int_{-1}^{2}(x+1)dx+\int_{-1}^{2}(x+1+2x)\cdot(x+1)'dx=$$

$$=\int_{-1}^{2}(x+1)dx+\int_{-1}^{2}(3x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{2}+\left(\frac{3x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=(2+2)-(0{,}5-1)+(6+2)-(1{,}5-1)=12.$$

Ответ: $A=12$.

**Задание 3.** Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a}=yzi+2xzj+y^2k$ вдоль контура $L: x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\ \ z=4$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра $t$, $0\le t\le 2\pi$.

***Решение***

Циркуляцию векторного поля $\vec{a}=a_x i+a_y j+a_y k$ , также как и работу можно вычислить с помощью криволинейного интеграла второго рода по формуле:

$$Ц=\int_L a_x dx+a_y dy+a_z dz.$$

В нашем случае $a_x=yz,\ \ a_y=2xz,\ \ a_z=y^2$. Контур интегрирования $L$ задан параметрическими уравнениями $x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\ \ z=4$. В этом случае криволинейный интеграл второго рода связан с определённым следующим соотношением:

$$\int_L a_x dx+a_y dy+a_z dz=\int_{t_1}^{t_2} a_x\big(x(t),\,y(t),\,z(t)\big)\cdot x_t' dt+$$

$$\int_{t_1}^{t_2} a_y\big(x(t),\,y(t),\,z(t)\big)\cdot y_t' dt+\int_{t_1}^{t_2} a_z\big(x(t),\,y(t),\,z(t)\big)\cdot z_t' dt.$$

Учитывая это получаем:

$$\int\limits_L yzdx + xzdy + y^2dz = \int\limits_0^{2\pi} 2\sin t \cdot 4 \cdot (-2\sin t)\,dt + \int\limits_0^{2\pi} 2\cos t \cdot 4 \cdot 2\cos t dt +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} 4\sin^2 t \cdot 0 \cdot dt = -16\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t dt + 16\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t dt =$$

$$= 16\int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)dt = 16\int\limits_0^{2\pi} \cos 2t dt = \frac{16}{2}\int\limits_0^{2\pi} \cos 2t d(2t) =$$

$$= 8\sin 2t\Big|_0^{2\pi} = 8\sin 4\pi - 8\sin 0 = 0.$$

Ответ: $Ц = 0$.

**Задание 4.** Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+2}}$, где $L$ – отрезок прямой $y = 3x - 2$, заключенный между точками $O(0;-2)$ и $A(2;4)$.

***Решение***

Так как линия интегрирования задается уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, то воспользуемся следующей формулой, связывающей криволинейный интеграл первого рода и определённый интеграл:

$$\int\limits_L f(x;y)\,dl = \int\limits_a^b f\left(x; y(x)\right) \cdot \sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2}\,dx.$$

В нашем случае $y = 3x - 2$, $y'_x = 3$, $a = 0$, $b = 2$.

В итоге получаем:

$$\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+2}} = \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{1+3^2}}{\sqrt{x^2+(3x-2)^2+2}}dx = \sqrt{10}\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{10x^2-12x+4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1,2x+0,4}} = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-0,6)^2+0,04}} = \int\limits_0^2 \frac{d(x-0,6)}{\sqrt{(x-0,6)^2+0,04}} =$$

$$= \ln\left|(x-0,6) + \sqrt{(x-0,6)^2+0,04}\right|\Bigg|_0^2 = \ln\left|1,4+\sqrt{2}\right| - \ln\left|-0,6+1\right| = \ln\left|\frac{1,4+\sqrt{2}}{0,4}\right|.$$

Ответ: $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+2}} = \ln\left|\frac{1,4+\sqrt{2}}{0,4}\right|$.

**Задание 5.** Вычислите с помощью формулы Грина интеграл:

$$\int\limits_L y^2dx + (x+y)^2\,dy,$$

где $L$ – контур треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(0;2)$.

***Решение***

Функции $P(x,y)=y^2$, $Q(x,y)=(x+y)^2$ и их частные производные непрерывны не только в области $D$ ограниченной контуром треугольника $ABC$, но и на всей плоскости $Oxy$, поэтому воспользуемся формулой Грина:

$$\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Так как в нашем случае $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y)$, то получаем:

$$\int\limits_L y^2dx + (x+y)^2\,dy = \iint\limits_D \left(2(x+y) - 2y\right)dxdy = \iint\limits_D 2x\,dx\,dy = 2\iint\limits_D x\,dx\,dy.$$

Для вычисления двойного интеграла $\iint\limits_D x\,dx\,dy$ построим $\Delta ABC$ (рис. 13).

Уравнения границ области интегрирования $D$ имеют вид:

$$AB\ \ y=0,\ \ AC\ \ x=0\ \ BC\ \ y=2-x.$$

Для нахождения уравнения прямой, проходящей через точки $A$ и $B$ воспользовались уравнением прямой, проходящей через две точки $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$. В итоге получаем:

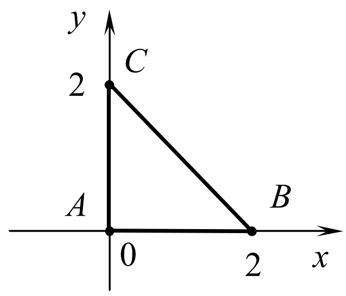


Рис. 13

$$2\iint\limits_D x\,dx\,dy = 2\int\limits_0^2 x\,dx \int\limits_0^{2-x} dy = 2\int\limits_0^2 x\,dx\left(y\Big|_0^{2-x}\right) =$$

$$= 2\int\limits_0^2 x(2-x-0)\,dx = 2\int\limits_0^2 \left(2x-x^2\right)dx =$$

$$= 2\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(4-\frac{64}{3}\right)-2(0-0) = 2\cdot\left(-\frac{52}{3}\right) = -\frac{104}{3}.$$

Ответ: $\int\limits_L y^2dx+(x+y)^2\,dy = -\dfrac{104}{3}.$

**Задание 6.** Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность $S$ (нормаль внешняя), применив формулу Остроградского-Гаусса:

6.1. $\vec{a} = 2\pi x i + 4j - \pi z k,\ S: x+\dfrac{y}{2}+4z = 1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

6.2. $\vec{a} = zi + yxj + z^2k,\ S: z = x^2+y^2,\ z=1.$

***Решение***

**6.1.** Так как поверхность $S$ замкнутая, то для нахождения потока векторного поля $\vec{a}$ через внешнюю сторону этой поверхности можно воспользоваться формулой Остроградского-Гаусса:

$$\Pi = \iiint\limits_V div\vec{a}\cdot dx\,dy\,dz\,.$$

Найдём дивергенцию векторного поля

$$div\vec{a} = \frac{\partial(2\pi x)}{\partial x}+\frac{\partial(4)}{\partial y}+\frac{\partial(-\pi z)}{\partial z} = 2\pi+0-\pi = \pi.$$

Тогда $\Pi = \iiint\limits_V \pi\,dx\,dy\,dz.$ Тело $V$ ограничено снизу плоскостью $z=0$, а сверху плоскостью $x+\dfrac{y}{2}+4z=1$, откуда $z = \dfrac{1}{4}-\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{8}$. Тогда тройной интеграл сводится к двойному следующим образом:

$$\Pi = \iiint\limits_V \pi\, dx\, dy\, dz = \pi \iint\limits_{D_{xy}} dx\, dy \int\limits_0^{0,25-0,25x-0,125y} dz = \pi \iint\limits_{D_{xy}} dx\, dy \left(z\right)\Big|_0^{0,25-0,25x-0,125y} =$$

$$= \pi \iint\limits_{D_{xy}} \left(0,25 - 0,25x - 0,125y\right) dx\, dy = \frac{\pi}{8} \iint\limits_{D_{xy}} \left(2 - 2x - y\right) dx\, dy.$$

Для вычисления двойного интеграла построим проекцию тела $V$ на плоскость $Oxy$ (см. рис. 14).

В итоге получаем:

$$\Pi = \frac{\pi}{8} \iint\limits_{D_{xy}} \left(2 - 2x - y\right) dx\, dy = \frac{\pi}{8} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} \left(2 - 2x - y\right) dy =$$

$$= \frac{\pi}{8} \int\limits_0^1 dx \left(2y - 2xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-2x} == \frac{\pi}{8} \int\limits_0^1 \left(2\left(2-x\right) - 2x\left(2-2x\right) - \frac{\left(2-2x\right)^2}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} \int\limits_0^1 \left(4 - 4x - 4x + 4x^2 - 2 + 4x - 2x^2\right) dx = \frac{\pi}{8} \int\limits_0^1 \left(2 - 4x + 2x^2\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{8} \left(2x - 2x^2 + 2 \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{8}\left(2 - 2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Отметим, что тройной интеграл $\iiint\limits_V dxdydz$ можно было найти, исходя из его геометрического смысла. Если подынтегральная функция в тройном интеграле равна единице, то этот интеграл равен объему тела $V$. В нашем случае тело $V$ – это пирамида, в основании которой лежит прямоугольный треугольник, с катетами, равными 1 и 2. Высота пирамиды равна $\frac{1}{4}$. Тогда:

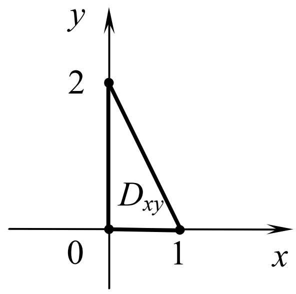


Рис. 14

$$\Pi = \pi \iiint\limits_V dx\, dy\, dz = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot H = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Ответ: $\Pi = \dfrac{\pi}{12}$.

**6.2.** Так как поверхность $S$ замкнутая, то для нахождения потока векторного поля $\vec{a}$ через внешнюю сторону этой поверхности можно воспользоваться формулой Остроградского-Гаусса:

$$\Pi = \iiint\limits_V div\,\vec{a} \cdot dx\,dy\,dz\ .$$

Найдём дивергенцию векторного поля

$$div\vec{a} = \frac{\partial(z)}{\partial x} + \frac{\partial(yx)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} = 0 + x + 2z = x + 2z.$$

Тогда $\Pi = \iiint\limits_V (x+2z)\,dx\,dy\,dz.$ Тело $V$ ограничено снизу эллиптическим параболоидом $z = x^2 + y^2$, сверху – плоскостью $z = 1$. Тогда тройной интеграл сводится к двойному следующим образом:

$$\iiint\limits_V (x+2z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{x^2+y^2}^{1} (x+2z)\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \left(xz + z^2\right)\Big|_{x^2+y^2}^{1} =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left(x + 1 - x\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)^2\right) dx\,dy.$$

Заметим, что проекцией тела $V$ на плоскость $Oxy$ (областью интегрирования $D_{xy}$) является окружность $x^2 + y^2 = 1$. Поэтому перейдём к полярной системе координат:

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi\,.$$

Переменная ρ изменяется от 0 до1, а переменная φ – от 0 до 2π.

В итоге получаем:

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xy}} \left(x + 1 - x\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)^2\right) dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho\cos\varphi + 1 - \rho\cos\varphi\cdot\rho^2 - \rho^4\right) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\cos\varphi\cdot\frac{\rho^2}{2} + \rho - \cos\varphi\cdot\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\cos\varphi + 1 - \frac{1}{4}\cos\varphi - \frac{1}{5}\right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{4}\cos\varphi\right) d\varphi = \left(\frac{4}{5}\varphi + \frac{1}{4}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{5}\cdot 2\pi + 0 = \frac{8\pi}{5} = 1{,}6\pi.$$

Ответ: $\Pi = 1{,}6\pi.$

**Задание 7.** Вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} \left(x^2 - yz\right) dS,$ где $S$ – часть плоскости, $z = -2x - y + 2,$ лежащая в первом октанте.

***Решение***

Интеграл вида $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS$, является поверхностным интегралом первого рода. Если поверхность $S$ задана уравнением $z = z(x;y)$ и однозначно проектируется в область $D_{xy}$ плоскости $Oxy$, то элемент поверхности $dS$ находится по формуле:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy\,.$$

Следовательно, интеграл $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS$ сводится к двойному по формуле:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f\big(x,\ y,\ z(x;y)\big)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

В нашем случае поверхность $S$ представляет собой часть плоскости $z = -2x - y + 2$, лежащую в первом октанте. Проекция этой поверхности на плоскость $Oxy$ представляет собой прямоугольный треугольник (см. рис. 14), ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $2x + y - 2 = 0$.

Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = -2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$, $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}.$

В итоге получаем:

$$\iint\limits_{(S)}\left(x^2-yz\right)dS=\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2-y\left(-2x-y+2\right)\right)\cdot\sqrt{6}\,dx\,dy=$$

$$=\sqrt{6}\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+2xy+y^2-2y\right)dx\,dy=\sqrt{6}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2-2x}\left(x^2+2xy+y^2-2y\right)dy=$$

$$=\sqrt{6}\int\limits_0^1 dx\left(x^2y+xy^2+\frac{y^3}{3}-y^2\right)\Bigg|_0^{2-2x}=$$

$$=\sqrt{6}\int\limits_0^1\left(x^2\left(2-2x\right)+x\left(2-2x\right)^2+\frac{\left(2-2x\right)^3}{3}-\left(2-2x\right)^2\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\int\limits_0^1\left(2-2x\right)\left(3x^2+3x\left(2-2x\right)+\left(2-2x\right)^2-3\left(2-2x\right)\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\int\limits_0^1\left(2-2x\right)\left(x^2+4x-2\right)dx=\frac{\sqrt{6}}{3}\int\limits_0^1\left(2x^2+8x-4-2x^3-8x^2+4x\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\int\limits_0^1\left(12x-4-2x^3-6x^2\right)dx=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(6x^2-4x-\frac{x^4}{2}-2x^3\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(6-4-\frac{1}{2}-2\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(-0,5\right)=-\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $\iint\limits_{(S)}\left(x^2-yz\right)dS=-\frac{\sqrt{6}}{6}.$

# 5. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ

После завершения изучения дисциплины студенты сдают экзамен. К экзамену допускаются только те студенты, у которых зачтены все индивидуальные задания.

Студенты, изучающие дисциплину по классической заочной форме обучения, сдают экзамен во время экзаменационной сессии по билетам (в устной или письменной форме).

Студенты, изучающие дисциплину с применением дистанционных образовательных технологий, сдают экзамен дистанционно (через Интернет, на сайте ИДО).

Итоговая оценка по дисциплине формируется по результатам сдачи индивидуальных домашних заданий и экзамена.

## 5.1. Вопросы для подготовки к экзамену

1. Определение первообразной. Теоремы о существовании и множестве первообразных. Примеры (доказать, что функция является первообразной для заданной функции).
2. Определение неопределённого интеграла. Неберущиеся интегралы. Примеры.
3. Основные свойства неопределённого интеграла.
4. Замена переменной в неопределённом интеграле. Теорема. Пример.
5. Теорема об инвариантности формул интегрирования. Пример.
6. Формула интегрирования по частям в неопределённом интеграле. Пример.
7. Задача, приводящая к понятию определенного интеграла.
8. Понятие определённого интеграла. Определение. Теорема существования.
9. Функция Дирихле. Теорема об интегрируемости функции на отрезке.
10. Основные свойства определённого интеграла. Пример.
11. Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Производная от определённого интеграла по его верхнему пределу.
12. Формула Ньютона-Лейбница. Пример.
13. Замена переменной в определённом интеграле. Пример.
14. Формула интегрирования по частям в определённом интеграле. Пример.
15. Геометрические приложения определённого интеграла. Пример.
16. Несобственный интеграл от данной функции по бесконечному интервалу.

17. Несобственный интеграл от разрывной функции по данному конечному интервалу.

18. Признак сравнения для несобственных интегралов.

19. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла (задача о вычислении объёма цилиндрического тела).

20. Определение двойного интеграла. Теорема о существовании двойного интеграла.

21. Основные свойства двойного интеграла.

22. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.

23. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

24. Приложения двойных интегралов к задачам геометрии.

25. Приложения двойных интегралов к задачам механики.

26. Задача, приводящая к понятию тройного интеграла (задача о вычислении массы неоднородного тела).

27. Определение тройного интеграла. Теорема о существовании тройного интеграла.

28. Вычисление тройных интегралов в декартовой системе координат.

29. Вычисление тройных интегралов в цилиндрической системе координат.

30. Вычисление тройных интегралов в сферической системе координат.

31. Приложения тройных интегралов к задачам геометрии.

32. Приложения тройных интегралов к задачам механики.

33. Задача о работе силового поля.

34. Определение криволинейного интеграла второго рода (по координатам). Теорема о существовании.

35. Основные свойства криволинейного интеграла второго рода.

36. Вычисление криволинейных интегралов второго рода.

37. Формула Грина.

38. Теорема о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

39. Приложения криволинейных интегралов второго рода к задачам механики.

40. Определение криволинейного интеграла первого рода (по длине). Теорема о существовании.

41. Основные свойства криволинейного интеграла первого рода.

42. Вычисление криволинейных интегралов первого рода.

43. Приложения криволинейных интегралов первого рода к задачам геометрии и механики.

44. Определение поверхностного интеграла первого рода (по поверхности). Теорема о существовании.

45. Основные свойства поверхностного интеграла первого рода.

46. Вычисление поверхностных интегралов первого рода.

47. Приложения поверхностных интегралов первого рода к задачам геометрии и механики.

48. Понятие векторного поля. Векторные линии. Ротор и дивергенция векторного поля.

49. Определение поверхностного интеграла второго рода (по координатам). Теорема о существовании .

50. Основные свойства поверхностного интеграла второго рода.

51. Вычисление поверхностных интегралов второго рода.

52. Формула Остроградского-Гаусса.

53. Формула Стокса.

54. Задача о вычислении потока векторного поля.

55. Задача о вычислении циркуляции векторного поля.

56. Оператор Гамильтона векторные дифференциальные операции второго порядка.

57. Свойства простейших векторных полей.

### 5.3. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину по классической заочной форме

Студенты, обучающиеся по КЗФ, сдают экзамен во время экзаменационной сессии в Томске по билетам. Каждый билет содержит два теоретических вопроса и три задачи. Экзамен считается сданным, если выполнено более 55 % заданий.

**Билет № 0**

1. Основные свойства определенного интеграла.

2. Формула Грина (с доказательством).

3. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:

$$\int_0^4 dx \int_x^{-x+4} f(x;y)\,dy.$$

4. Найти неопределённый интеграл:

$$\int \frac{xdx}{x^2 - x - 2}.$$

5. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = yi + 4xzj - 10zk$ через замкнутую поверхность $S$: $z = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$.

### 5.3. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину с применением дистанционных образовательных технологий

В данном разделе приведены примеры вопросов из экзаменационного билета для студентов, сдающих экзамен в онлайн режиме (через Интернет на сайте ИДО).

Экзаменационный билет включает в себя задания следующих типов: задания на выбор единственного ответа; задания на выбор множественных ответов; задания на установление последовательности; задания на установление соответствия; задания для краткого ответа.

1. Задания на выбор единственного ответа

**К какому из интегралов нельзя применить формулу Ньютона – Лейбница:**

1) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3 - 1}$

3) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3 + 1}$

2) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2 + 1}$

4) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^4 + 1}$

2. Задание на выбор множественных ответов

**Укажите интегралы, равные нулю в соответствие со свойствами определенного интеграла по симметричному промежутку**

1) $\int\limits_{-3}^{3} x^3 \cdot \sqrt{1 + x^2} dx$

2) $\int\limits_{-3}^{3} x^2 \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot dx$

3) $\int\limits_{-3}^{3} x^6 (1 + x^2) \cdot dx$

4) $\int\limits_{-3}^{3} x^3 \cdot (1 + x^4) \cdot dx$

3. Задания на установление последовательности

**Нахождение интеграла** $\int x\arcsin x dx$ **с помощью формулы интегрирования по частям** $\int udv = uv - \int vdu$**. Запишите последовательно выражения** $u, du, v, dv$**:**

1) $\arcsin x$
2) $x\,dx$
3) $\frac{1}{2}x^2$
4) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4. Задания на установление соответствия

**Установите соответствие между интегралом и его названием:**

| ИНТЕГРАЛ | НАЗВАНИЕ |
|---|---|
| 1) $\int x\,dx$ | 1) определённый интеграл |
| 2) $\int\limits_L y\,dx$ | 2) несобственный интеграл |
| 3) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x}$ | 3) неопределённый интеграл |
| 4) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x}$ | 4) криволинейный интеграл по координатам |

5. Задания для краткого ответа

Найти поток векторного поля $\vec{a} = \left(\sqrt{z} - 2x\right)i + \left(e^x + 4y\right)j + \left(\sqrt{y} + 3z\right)k$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности $x^2 + y^2 = z^2,\ z = 6.$

# 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ


**Основная литература**

1. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика 3. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Дифференциальные уравнения. Числовые и функциональные ряды: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2008. – 203 с.
2. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика 4. Кратные интегралы. Скалярные и векторные поля. Комплексные числа и функции. Операционный метод: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 192 с.
3. Нагорнова А.И., Некряч Е.Н., Столярова Г.П. Высшая математика. Ч.4. Кратные интегралы"

**Дополнительная литература**

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов (в 2-х томах): учебное пособие для втузов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967, 1978, 1985, 1986 гг. – 432 с.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М. Наука, 1980,1984,1988 гг.
6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. Наука, 1972, 1975, 1977, 1985 гг.
7. Задачи и упражнения по математическому анализу (Под ред. Демидовича Б.П.) – М. Наука, 1972, 1978, 1990 гг.
8. Запорожец Г.Н. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М. Высшая школа, 1966 г.
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М. Высшая школа, 1980, 1986 гг.
10. Терехина Л.И. Высшая математика. Ч.3: учебное пособие / Л.И. Терехина, И.И. Фикс. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 252 с.

**Internet-ресурсы**

11. Сайт ТПУ. – Режим доступа: http://www.tpu.ru, вход свободный.

Учебное издание

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические указания и индивидуальные задания

*Составители*

МОЛДОВАНОВА Евгения Александровна
ХАРЛОВА Александра Николаевна

Рецензент
*доктор физико-математических наук,*
*профессор кафедры*

*К.П. Арефьев*

Компьютерная верстка *В.Д. Пяткова*

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать Xerox. Усл.печ.л. 1,16. Уч.-изд.л. 1,05.
Заказ . Тираж экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru