МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИДО
_______________ С.И. Качин

«____»_____________2012 г.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов ИДО, обучающихся по направлению
080100 «Экономика»

Составитель
Е.А. Молдованова

Семестр	3
Кредиты	4
Лекции, часов	6
Практические занятия, часов	8
Индивидуальные задания	2
Самостоятельная работа, часов	112
Формы контроля	Экзамен

Издательство
Томского политехнического университета
2012

УДК 517

Линейная алгебра: метод. указ. и индивид. задания для студентов ИДО, обучающихся по направлению 080100 «Экономика» / сост. Е.А. Молдованова; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 80 с.

Методические указания и индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром Высшей математики ФТИ «___»_____ 2012 г., протокол № ____

Зав. кафедрой ВМ,
профессор, доктор физико-математических наук ________ К.П. Арефьев

Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Линейная алгебра» предназначены для студентов ИДО, обучающихся по направлению 080100 «Экономика». Данная дисциплина изучается в одном семестре.

Приводится содержание основных тем дисциплины, темы практических занятий, варианты заданий для индивидуальных домашних заданий и список рекомендуемой литературы. Даны методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ 4

2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ 5

Тема 1. Системы линейных уравнений 5

Тема 2. Элементы линейного программирования 7

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ 9

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ 10

4.1. Общие методические указания 10

4.1.1. Требования к оформлению индивидуального задания 10

4.2. Варианты индивидуального задания № 1..11

4.3. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1..................................11

4.4. Варианты индивидуального задания № 2..19

4.5. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 2..................................19

5. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ 31

5.1. Вопросы для подготовки к экзамену 31

5.2. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину по классической заочной форме 32

5.3. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину дистанционно...32

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ 35

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Линейная алгебра» является базовой дисциплиной естественно-научного цикла. Эта дисциплина является необходимой для освоения остальных дисциплин математического и естественнонаучного цикла и дисциплин профессионального цикла ООП.

2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Системы линейных уравнений

Понятие матрицы, операции над матрицами, ранг матрицы, обратная матрица. Понятие определителя, методы вычисления и свойства. Основные понятия теории систем линейных уравнений. Теорема Крамера. Теорема Конекера – Капелли. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Модель Леонтьева.

Собственные числа и собственные векторы матрицы.

Рекомендуемая литература: [1, гл. 1]

Методические указания

Изучение дисциплины и данной темы начните с выбора учебника и пособия по решению задач. Просмотрите видео-лекцию «Линейная алгебра». После этого попробуйте ответить на вопросы для самоконтроля. Если вопросы не вызвали затруднений, можно переходить к разбору задач, решённых в пособии [1]. В противном случае обратитесь к рекомендованной литературе и попробуйте найти ответы на вопросы.

Тему 1 можно разделить на две части: матрицы и системы линейных уравнений. При изучении первой части особое внимание следует уделить нелинейным операциям над матрицами (особенно, операции умножения). При этом обратите внимание на тот факт, что при изменении порядка множителей-матриц произведение меняется. В некоторых случаях произведение двух матриц не определено. Это зависит от размерностей множителей.

Вторая часть этой темы посвящена решению систем линейных уравнений. Вычисление определителей рекомендуется изучать одновременно с методом Крамера. Обратите внимание, что этот метод используется только для решения систем линейных уравнений, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных. После рассмотрения обратной матрицы можно сразу же перейти к матричному методу решения систем линейных уравнений. Особенно тщательно следует разобрать метод Гаусса (метод исключения неизвестных), так как он является универсальным методом решения систем линейных уравнений. Применение метода Гаусса не зависит ни от числа уравнений, ни от числа неизвестных в системе. При освоении метода Гаусса затруднения может вызвать приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Чаще всего именно на этом этапе решения задач допускаются ошибки. При решении неопределённых систем линейных уравнений надо быть внимательным при выборе базисных и свободных неизвестных. Не забывайте делать проверку после того, как решите систему.

Однородные системы линейных уравнений всегда совместны. Поэтому начинать решение однородной системы необходимо с выяснения, имеет ли данная система ненулевые решения или нет.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое определитель квадратной матрицы?
2. При каких преобразованиях величина определителя не меняется?
3. В каких случаях определитель равен нулю?
4. Что следует из равенства определителя нулю?
5. Что такое дополнительный минор элемента определителя?
6. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя?
7. Как осуществляются линейные операции над матрицами?
8. Для каких двух матриц определяется сумма?
9. Для каких двух матриц определяется произведение?
10. Как перемножаются две матрицы?
11. Какими свойствами обладают линейные операции над матрицами?
12. Что такое транспонирование матрицы?
13. Какая матрица называется невырожденной?
14. Какая матрица называется обратной для данной матрицы?
15. Для каких матриц существуют обратные матрицы?
16. Сколько обратных матриц может иметь матрица?
17. Какова схема нахождения обратной матрицы?
18. Какая система уравнений называется линейной?
19. Какая система линейных уравнений называется однородной?
20. Что такое решение системы линейных алгебраических уравнений?
21. Что означают понятия «совместная», «несовместная», «определённая», «неопределённая» системы?
22. Что означает «решить систему линейных уравнений»?
23. Какой вид имеют формулы Крамера?
24. В каком случае применимы формулы Крамера?
25. Какие действия называются элементарными преобразованиями матрицы?
26. Что называется рангом матрицы?
27. Как находится ранг матрицы?
28. Чему равен ранг матрицы ступенчатого вида?
29. При каких условиях система линейных алгебраических уравнений имеет множество решений?
30. При каких условиях система линейных уравнений имеет единственное решение?

31. В каком случае две системы линейных уравнений называются равносильными?

32. При каких условиях система линейных уравнений совместна?

33. При каких условиях система линейных уравнений несовместна?

34. Какие неизвестные называются свободными, а какие базисными?

35. Какими свойствами обладают решения однородных систем линейных алгебраических уравнений?

36. Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной?

37. Какое решение однородной системы линейных уравнений называется нетривиальным?

38. При каких условиях однородная система линейных уравнений имеет нетривиальные решения?

39. Как строится фундаментальная система решений?

40. Что такое общее решение системы линейных уравнений?

41. Что такое частное решение системы линейных уравнений?

42. При каком условии однородная система линейных уравнений имеет фундаментальную систему решений?

43. Сколько частных решений содержит фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений?

Тема 2. Элементы линейного программирования

Векторные пространства. N-мерные векторы и действия с ними. Базис в n-мерном пространстве. Гиперплоскости в n-мерном пространстве. Системы линейных неравенств. Основные понятия. Минимизация и максимизация линейной функции. Основная задача линейного программирования. Теорема двойственности. Геометрическая и алгебраическая интерпретация задач линейного программирования.

Рекомендуемая литература: [1, гл. 2]

Методические указания

Успешное усвоение темы 2 невозможно без знания темы 1. При изучении арифметических векторных пространств затруднения могут вызвать понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов, а также понятие базиса пространства. Это связано с тем, что n-мерные пространства при $n > 3$ не имеют наглядного представления и являются лишь алгебраическим образованием. Поэтому целесообразно сначала разобрать указанные понятия на примере геометрических векторов на плоскости (пространства), а затем уже сделать обобщение.

Системы линейных неравенств допускают геометрический способ решения в случае двух и трёх переменных. При этом необходимо уметь строить прямые на плоскости и плоскости в пространстве в декартовой системе координат.

Ниже сформулированы теоретические вопросы, которые помогут подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. Приступать к решению задач можно только в том случае, если ответы на вопросы не вызвали затруднений. В противном случае необходимо снова обратиться к рекомендованной литературе.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое арифметическое векторное пространство?
2. Что такое n-мерный вектор?
3. Что такое координаты вектора в заданном базисе?
4. Как определяется сумма двух n-мерных векторов?
5. Как определяется произведение n-мерного вектора на число?
6. Что называется линейной комбинацией векторов?
7. Какие векторы называются линейно зависимыми?
8. Какие векторы называются линейно независимыми?
9. Как определить ранг системы векторов?
10. Что называется базисом n-мерного векторного пространства?
11. Какое неравенство называется линейным?
12. Что называется областью решений данного неравенства?
13. Как определить область решений линейного неравенства?
14. Какая система линейных неравенств называется совместной?
15. Какая система линейных неравенств называется противоречивой?
16. В чём заключается задача линейного программирования?
17. Что такое целевая функция?
18. Что такое допустимый план?
19. Каков геометрический метод решения задач линейного программирования?
20. Каков алгоритм Симплекс-метода?

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

В данном разделе приведены темы практических занятий по дисциплине «Линейная алгебра».

1. Действия с матрицами (2 часа).
2. Решение систем линейных уравнений (2 часа).
3. Решение систем линейных неравенств (2 часа).
4. Нахождение собственных векторов и собственных чисел матрицы (2 часа).

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

4.1. Общие методические указания

В соответствии с учебным графиком предусмотрено выполнение четырёх индивидуальных домашних заданий (ИДЗ). Выполнение заданий необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач.

Индивидуальное задание № 1 соответствует теме «Системы линейных уравнений», индивидуальное задание № 2 соответствует теме «Элементы линейного программирования».

Номер варианта индивидуального задания определяется по последним двум цифрам номера зачетной книжки. Например, если номер зачетной книжки Д-3Б12/04, то номер варианта задания равен 4. Если две последние цифры составляют число большее 20, то из этого числа вычитается число 20 столько раз, чтобы остаток стал меньше или равен 20. Например, две последние цифры составляют число 57, тогда 57 – 20 – 20 = 17, и студент выполняет вариант № 17 индивидуального задания.

4.1.1. Требования к оформлению индивидуального задания

При оформлении индивидуального домашнего задания необходимо соблюдать следующие требования.

1. Индивидуальное задание должно иметь титульный лист, оформленный в соответствии со стандартами ТПУ [5]. На титульном листе указываются номер индивидуального задания, номер варианта, название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы, шифр. **Образец оформления и шаблон титульного листа** размещен на сайте ИДО (http://portal.tpu.ru/ido-tpu) в разделе СТУДЕНТУ → ДОКУМЕНТЫ.
2. Каждое индивидуальное задание оформляется отдельно. Студенты, изучающие дисциплину **по классической заочной форме**, оформляют индивидуальные задания в отдельных тетрадях. Студенты, изучающие дисциплину **с применением дистанционных технологий**, оформляют индивидуальные задания в отдельных файлах.
3. Текст индивидуального задания набирается в текстовом процессоре Microsoft Word. Шрифт Times New Roman, размер 12–14 pt, для набора формул рекомендуется использовать редактор формул Microsoft Equation или MathType.
4. Каждая задача должна начинаться с условия задачи, ниже крат-

кая запись задачи, если необходимо – рисунок, с условными обозначениями, которые в дальнейшем будут использованы при решении задач.

5. Решения задач должны быть подробными, со всеми промежуточными расчётами, с указанием использованных формул и т.п.

6. Решения задач следует располагать в той же последовательности, что и задания.

7. Страницы задания должны иметь сквозную нумерацию.

8. В задание включается список использованной литературы.

Работы, оформленные не в соответствии с требованиями, не рецензируются.

Если работа не соответствует требованиям, студент получает оценку «не зачтено». В этом случае работа должна быть исправлена и повторно предоставлена преподавателю. При доработке в текст работы необходимо включить дополнительные вопросы, полученные после проверки работы преподавателем, и ответы на эти вопросы.

Студент, не получивший положительной аттестации по индивидуальному заданию, не допускается к сдаче экзамена по данной дисциплине.

Вы должны быть готовы защитить свои индивидуальные задания у преподавателя во время сессии.

4.2. Варианты индивидуального задания № 1

«Системы линейных уравнений»

4.3. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1

Вариант № 0

Задание 1. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение

Получим нули в четвёртом столбце определителя. Для этого выполним следующие преобразования:

1. из элементов второй строки вычтем соответствующие элементы первой строки;

2. к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы первой строки;

3. из элементов четвёртой строки вычтем соответствующие элементы первой строки, умноженные на два.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по четвёртому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix}.$$

В определителе третьего порядка получим нули в первом столбце. Для этого из элементов второй строки вычтем соответствующие элементы первой строки:

$$-\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix}.$$

Запишем разложение определителя по первому столбцу

$$-\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -2\cdot\left(-1\right)^{1+1}\begin{vmatrix} -9 & 7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -2\cdot\left(-9\cdot\left(-5\right)-7\cdot 7\right) = -2\cdot\left(-4\right) = 8.$$

Ответ: 8.

Задание 2. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

а) $2A - B$;

б) $A \cdot A^T$;

в) $A \cdot \left(B + C\right)$.

***Решени*е**

а) $2A-B=2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&0\\0&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&1\\-1&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&6&0\\0&2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&1\\-1&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}2-0&0-2&2-1\\0+1&6-0&0-1\\0-0&2-0&4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&6&-1\\0&2&2\end{pmatrix}.$

б) $A\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&0\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\1&0&2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1&1\cdot0+0\cdot3+1\cdot0&1\cdot0+0\cdot1+1\cdot2\\0\cdot1+3\cdot0+0\cdot1&0\cdot0+3\cdot3+0\cdot0&0\cdot0+3\cdot1+0\cdot2\\0\cdot1+1\cdot0+2\cdot1&0\cdot0+1\cdot3+2\cdot0&0\cdot0+1\cdot1+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&9&3\\2&3&5\end{pmatrix};$

в) сначала выполним действие в скобках:

$$B+C=\begin{pmatrix}0&2&1\\-1&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&0&2\\-2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1&2-1&1-2\\-1-1&0+0&1+2\\0-2&0+2&2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&0&3\\-2&2&0\end{pmatrix},$$

затем умножение:

$A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&0\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&0&3\\-2&2&0\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot(-2)+1\cdot(-2)&1\cdot1+0\cdot0+1\cdot2&1\cdot(-1)+0\cdot3+1\cdot0\\0\cdot1+3\cdot(-2)+0\cdot(-2)&0\cdot1+3\cdot0+0\cdot2&0\cdot(-1)+3\cdot3+0\cdot0\\0\cdot1+1\cdot(-2)+2\cdot(-2)&0\cdot1+1\cdot0+2\cdot2&0\cdot(-1)+1\cdot3+2\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-6&0&9\\-6&4&3\end{pmatrix}.$

Ответ: ***а)*** $2A-B=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&6&-1\\0&2&2\end{pmatrix}$; ***б)*** $A\cdot A^T=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&9&3\\2&3&5\end{pmatrix}$;

в) $A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-6&0&9\\-6&4&3\end{pmatrix}.$

Задание 3. Найдите обратную матрицу и сделайте проверку:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -7 & 2\\ 6 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение

Найдём обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}4 & -7 & 2\\ 6 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -3 & -18\\ 6 & 4 & -29\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3 & -18\\ 4 & -29\end{vmatrix}=87+72=159\neq 0.$$

Так как $\det A=159\neq 0$, обратная матрица A^{-1} существует.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Получаем:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-10+1=-9;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-(30-1)=-29;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-6+2=-4;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-7 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-(-35+2)=33;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=20-2=18;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4 & -7\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(-4+7)=-3;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-7 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-7+4=-3,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 6 & 1\end{vmatrix}=-(4-12)=8,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}4 & -7\\ 6 & -2\end{vmatrix}=-8+42=34.$$

Записываем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{159}\cdot\begin{pmatrix}-9 & 33 & -3\\ -29 & 18 & 8\\ -4 & -3 & 34\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1}=\frac{1}{159}\cdot\begin{pmatrix}-9 & 33 & -3\\ -29 & 18 & 8\\ -4 & -3 & 34\end{pmatrix}$.

Задание 4. Найдите $P(A)$, если:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\ P(x)=x^2-2x+2.$$

Решение

$$P(A)=A^2-2\cdot A+2\cdot E=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}^2-2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot(-1)+1\cdot 0 & -1\cdot 1+1\cdot 3\\ 0\cdot(-1)+3\cdot 0 & 0\cdot 1+3\cdot 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Ответ: $P(A)=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

Задание 5. Решите матричное уравнение:

5.1. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 0 & -2\\ 5 & 7\end{pmatrix}$;

5.2. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}-2\cdot X=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

Решение

5.1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение матричного уравнения вида $AX = B$ находим по формуле:

$$X = A^{-1}B\,.$$

В нашем случае $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Для матрицы A находим обратную матрицу:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= (8+1) + (4-0) = 9 + 4 = 13 \neq 0,$$

следовательно, обратная матрица существует.

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 = 9$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(4-0) = -4$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-0) = 2$;

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$;

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1-0) = -1$;

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$;

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-0) = 1$;

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6$.

Таким образом, получаем:

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Находим неизвестную матрицу X:

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}9&2&1\\-4&2&1\\2&-1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&4\\0&-2\\5&7\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}9\cdot 0+2\cdot 0+1\cdot 5 & 9\cdot 4+2\cdot(-2)+1\cdot 7\\-4\cdot 0+2\cdot 0+1\cdot 5 & -4\cdot 4+2\cdot(-2)+1\cdot 7\\2\cdot 0+(-1)\cdot 0+6\cdot 5 & 2\cdot 4+(-1)\cdot(-2)+6\cdot 7\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}5&39\\5&-13\\30&52\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}5&39\\5&-13\\30&52\end{pmatrix}$.

5.2. $\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\\3&0\end{pmatrix}-2\cdot X=3\cdot\begin{pmatrix}2&2\\1&-3\\1&-1\end{pmatrix}$

$$-2\cdot X=3\cdot\begin{pmatrix}2&2\\1&-3\\1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\\3&0\end{pmatrix};$$

$$3\cdot\begin{pmatrix}2&2\\1&-3\\1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&6\\3&-9\\3&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-2&6-1\\3-2&-9+1\\3-3&-3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\1&-8\\0&-3\end{pmatrix};$$

$$-2\cdot X=\begin{pmatrix}4&5\\1&-8\\0&-3\end{pmatrix}\Rightarrow X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&5\\1&-8\\0&-3\end{pmatrix}\Rightarrow.$$

Ответ: $X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&5\\1&-8\\0&-3\end{pmatrix}$.

Задание 6. Решите систему по формулам Крамера и сделайте проверку:

6.1. $\begin{cases}4x_1-7x_2+2x_3=-11,\\6x_1-2x_2+x_3=-1,\\x_1-x_2+5x_3=22.\end{cases}$ 6.2. $\begin{cases}x_1-2x_2=1,\\-2x_1+4x_2=-2.\end{cases}$

Решение

6.1. Формулы Крамера имеют вид $x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}$, $i=1;2;3$, $\Delta=\det A$ – основной определитель системы, Δ_i – определитель, полученный из определителя системы Δ заменой столбца из коэффициентов при x_i столбцом из свободных членов.

Сначала находим основной определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 6 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -18 \\ 6 & 4 & -29 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -18 \\ 4 & -29 \end{vmatrix} = 87 + 72 = 159 \neq 0 \Rightarrow$$

Система имеет единственное решение (по теореме Крамера).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -7 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 22 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 27 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 27 & 9 \end{vmatrix} = -(-81 + 81) = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -11 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & 22 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -29 & 27 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -8 & -9 \\ -29 & 27 \end{vmatrix} =$$
$$= -(-216 - 261) = 477,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -7 & -11 \\ 6 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -99 \\ 6 & 4 & -133 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -99 \\ 4 & -133 \end{vmatrix} =$$
$$= 399 + 396 = 795.$$

По формулам Крамера находим значения неизвестных системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{159} = 0,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{477}{159} = 3,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{795}{159} = 5.$$

Проверка

$$\begin{cases} 4 \cdot 0 - 7 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = -11, \\ \qquad\qquad -11 = -11, \\ 6 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 5 = -1, \\ \qquad\qquad -1 = -1, \\ 0 - 3 + 5 \cdot 5 = 22, \\ \qquad\qquad 22 = 22. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

6.2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ -2x_1 + 4x_2 = -2. \end{cases}$

Для данной системы получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4-4=0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2+2=0.$$

Для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными одновременное равенство нулю определителей Δ, Δ_1 и Δ_2 означает, что такая система имеет бесконечное множество решений.

Выпишем одно из уравнений данной системы, например, первое:

$$x_1 - 2x_2 = 1.$$

Теперь одной из переменных системы придадим произвольное значение. Пусть, например, $x_2 = c$, где c – любое число. Тогда $x_1 - 2c = 1$, откуда находим $x_1 = 1 + 2c$.

Таким образом, пара чисел $x_1 = 1 + 2c$, $x_2 = c$ является решением данной системы.

Чтобы выполнить проверку, возьмём числовое значение константы $c = 5$. Тогда $x_1 = 1 + 2 \cdot 5 = 11$, $x_2 = 5$. Значения неизвестных подставляем в уравнения системы:

$$\begin{cases} 11 - 2 \cdot 5 = 1, \\ 1 = 1, \\ -2 \cdot 11 + 4 \cdot 5 = -2, \\ -2 = -2. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1 + 2c$, $x_2 = c$.

4.4. Варианты индивидуального задания № 2 «Элементы линейного программирования»

4.5. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 2

Вариант № 0

Задание 1. Решите системы линейных уравнений методом Гаусса:

1.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 15x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 7x_4 + 9x_5 = 3. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -11, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 22. \end{cases}$

Решение

1.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 15x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 7x_4 + 9x_5 = 3. \end{cases}$

Выписываем расширенную матрицу системы и приводим её к ступенчатому виду:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 15 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -7 & 9 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выполнены следующие преобразования:

1) к элементам второй строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-2); к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-3); к элементам четвёртой строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-2);

2) к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы второй строки, умноженные на (-2); к элементам четвёртой строки прибавили соответствующие элементы второй строки, умноженные на 2.

Определяем

$\left.\begin{array}{l} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 2 \\ n = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$;

Базисные неизвестные x_2, x_3.

Свободные неизвестные x_1, x_4, x_5.

Записываем укороченную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ \qquad\quad -2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

Полагаем $x_1 = C_1$, $x_4 = C_4$, $x_5 = C_5$.

Тогда:

$$\begin{cases} C_1 + x_2 + 3x_3 - 2C_4 + 3C_5 = 1, \\ \qquad -2x_3 + 3C_4 - 3C_5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 3x_3 = 1 - C_1 + 2C_4 - 3C_5, \\ \quad -2x_3 = -1 - 3C_4 + 3C_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - C_1 + 2C_4 - 3C_5 - 3x_3, \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}C_4 - \dfrac{3}{2}C_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - C_1 + 2C_4 - 3C_5 - 3\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}C_4 - \dfrac{3}{2}C_5\right), \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}C_4 - \dfrac{3}{2}C_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{1}{2} - C_1 - \dfrac{5}{2}C_4 + \dfrac{3}{2}C_5, \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}C_4 - \dfrac{3}{2}C_5. \end{cases}$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} - C_1 - \dfrac{5}{2}C_4 + \dfrac{3}{2}C_5, \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}C_4 - \dfrac{3}{2}C_5, \\ x_4 = C_4, \\ x_5 = C_5. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} - C_1 - \dfrac{5}{2}C_4 + \dfrac{3}{2}C_5, \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}C_4 - \dfrac{3}{2}C_5, \\ x_4 = C_4, \\ x_5 = C_5. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -11, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 22. \end{cases}$

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -7 & 2 & -11 \\ 6 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 22 \\ 6 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 2 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 22 \\ 0 & 4 & -29 & -133 \\ 0 & -3 & -18 & -99 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 22 \\ 0 & 4 & -29 & -133 \\ 0 & -1 & -6 & -33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 22 \\ 0 & -1 & -6 & -33 \\ 0 & 4 & -29 & -133 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 22 \\ 0 & -1 & -6 & -33 \\ 0 & 0 & -53 & -265 \end{array}\right).$$

Выполнены следующие преобразования:

1) поменяли местами первую и третью строки;

2) к элементам второй строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-6); к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-4);

3) элементы третьей строки разделили на 3;

4) вторую строку поменяли местами с третьей строкой;

5) к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы второй строки, умноженные на 4.

Запишем укороченную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 22, \\ \quad - x_2 - 6x_3 = -33, \\ \qquad -53x_3 = -265. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = \dfrac{-265}{-53} = 5$.

Подставим $x_3 = 5$ во второе уравнение:

$$-x_2 - 6 \cdot 5 = -33,$$

откуда находим $x_2 = 33 - 30 = 3$.

Подставляем $x_3 = 5$ и $x_2 = 3$ в первое уравнение:

$$x_1 - 3 + 5 \cdot 5 = 22 \Rightarrow x_1 = 22 - 22 = 0.$$

Проверка: $$\begin{cases} 4 \cdot 0 - 7 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = -11, \\ \qquad -11 = -11 \\ 6 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 5 = -1, \\ \qquad -1 = -1 \\ 0 - 3 + 5 \cdot 5 = 22 \\ \qquad 22 = 22. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Задание 2. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение

Выпишем основную матрицу системы и найдём её ранг:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Были выполнены следующие преобразования:

1) к элементам второй строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-4); к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-3);

2) поменяли местами вторую и третью строки;

3) к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы второй строки, умноженные на (-3).

Так как $r(A) = 2 < n = 4$, то система имеет ненулевые решения.

Базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Базисные неизвестные x_1, x_2.

Свободные неизвестные x_3, x_4. $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Записываем укороченную систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ \quad -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = C_3$, $x_4 = C_4$, тогда:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4C_3 + 3C_4, \\ \quad -x_2 = 6C_3 - 5C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4C_3 + 3C_4 - 2x_2, \\ x_2 = -6C_3 + 5C_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -4C_3 + 3C_4 - 2(-6C_3 + 5C_4), \\ x_2 = -6C_3 + 5C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4C_3 - 7C_4, \\ x_2 = -6C_3 + 5C_4. \end{cases}$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 4C_3 - 7C_4, \\ x_2 = -6C_3 + 5C_4, \\ x_3 = C_3, \\ x_4 = C_4. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений $E_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X = C_1E_1 + C_2E_2 = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задание 3. Относительно некоторого базиса заданы векторы:

$$\overline{e}_1 = (1; 4; 1),\ \overline{e}_2 = (-3; -2; 0),\ \overline{e}_3 = (1; -1; 2),\ \overline{x} = (-5; -8; -3).$$

а) Докажите, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

Решение

***а*)** Для того, чтобы доказать, что три вектора образуют базис трёхмерного пространства, нужно показать, что они линейно независимы. Составим из координат векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ определитель и вычислим его

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ -1 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} = 27 - 2 = 25 \neq 0.$$

Так как определитель не равен нулю, векторы линейно независимы.

***б*)** Запишем разложение вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$:

$$\vec{x} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3.$$

Так как

$$\bar{x} = (-5; -8; -3) \text{ и } \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = (\alpha - 3\beta + \gamma; 4\alpha - 2\beta - \gamma; \alpha + 2\gamma),$$

получаем систему уравнений для определения коэффициентов разложения:

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + \gamma = -5, \\ 4\alpha - 2\beta - \gamma = -8, \\ \alpha + 2\gamma = -3. \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0 \Rightarrow \text{Система имеет единственное решение.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -8 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -13 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -13 & -5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -78 + 35 = -43,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & -8 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & -13 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -13 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 13 = 22,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 4 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 10 & 12 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 36 = -16.$$

По формулам Крамера находим значения неизвестных системы:

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-43}{25} = -\frac{43}{25},\ \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{22}{25},\ \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-16}{25} = -\frac{16}{25}.$$

Таким образом,

$$\bar{x} = -\frac{43}{25}\bar{e}_1 + \frac{22}{25}\bar{e}_2 - \frac{16}{25}\bar{e}_3.$$

Ответ: $\bar{x} = -\frac{43}{25}\bar{e}_1 + \frac{22}{25}\bar{e}_2 - \frac{16}{25}\bar{e}_3.$

Задание 4. Определите ранг системы векторов:

$\bar{a}_1 = (2, 3, -1, 2, 5)$, $\bar{a}_2 = (0, 1, 1, -2, 1)$,

$\bar{a}_3 = (2, 5, 1, -2, 7)$, $\bar{a}_4 = (2, -1, -5, 10, 1)$

и укажите какой-нибудь базис этой системы.

Решение

Составим из координат данных векторов матрицу и найдем ее ранг, для этого выполним следующие преобразования:

1) к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-1);

2) к элементам четвертой строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-1);

3) к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на (-4);

4) к элементам четвертой строки прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на 4.

Получаем:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & -5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определяем, ранг матрицы равен двум. Следовательно, ранг системы векторов $\overline{a}_1 = (2, 3, -1, 2, 5)$, $\overline{a}_2 = (0, 1, 1, -2, 1)$, $\overline{a}_3 = (2, 5, 1, -2, 7)$, $\overline{a}_4 = (2, -1, -5, 10, 1)$ равен двум.

В качестве базиса данной системы векторов можно выбрать любые два линейно независимых вектора системы, например $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$.

Ответ: два; $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$.

Задание 5. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы:

5.1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

5.2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Решение

5.1. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

Составляем характеристический многочлен и решаем уравнение $\left|A-\lambda E\right|=0$:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0;$$

$$\left(2-\lambda\right)\left(3-\lambda\right)-2\cdot 1=0;$$

$$6-2\lambda-3\lambda+\lambda^2-2=0;$$

$$\lambda^2-5\lambda+4=0;$$

$$D=25-16=9\,,\ \lambda_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}\Rightarrow\lambda_1=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=4\,;$$

$$\lambda_2=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1\,.$$

Данная матрица имеет два собственных значения $\lambda_1=4$ и $\lambda_2=1$.

Для каждого собственного значения находим соответствующий собственный вектор $\overline{\xi}=\left(\xi_1,\xi_2\right)$. Для этого составляем систему уравнений $\left(A-\lambda E\right)\overline{\xi}=0$:

$\lambda_1=4$

$\begin{pmatrix}2-4 & 1\\ 2 & 3-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ или $\begin{cases}-2\xi_1+\xi_2=0,\\ 2\xi_1-\xi_2=0.\end{cases}$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases}\xi_2=2\xi_1,\\ 0=0.\end{cases}$$

Полагая $\xi_1=c$, находим вектор $\overline{\xi}=\left(c,2c\right)$, который при любом $c\neq 0$ есть собственный вектор матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ с собственным значением $\lambda_1=4$.

$\underline{\lambda_2=1}$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} \xi_1+\xi_2=0, \\ 2\xi_1+2\xi_2=0. \end{cases}$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим

$$\begin{cases} \xi_1=-\xi_2, \\ 0=0. \end{cases}$$

Полагая $\xi_2=c$, находим вектор $\overline{\xi}=(-c,c)$, который при любом $c\neq 0$ есть собственный вектор матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ с собственным значением $\lambda_2=1$.

Ответ: $\lambda_1=4$, $\overline{\xi}=(c,2c)$ и $\lambda_2=1$, $\overline{\xi}=(-c,c)$.

5.2. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдём характеристический многочлен данной матрицы:

$$f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\left((2-\lambda)^2-1\right)=(1-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1)=(1-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Характеристическое уравнение $(1-\lambda)^2(3-\lambda)=0$ имеет корни (собственные значения):

$$\lambda_1=\lambda_2=1 \text{ и } \lambda_3=3.$$

Для каждого собственного значения находим соответствующий собственный вектор $\overline{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$. Для этого составляем систему уравнений $(A-\lambda E)\overline{\xi}=0$:

$\underline{\lambda_1=\lambda_2=1}$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 & 1 \\ -1 & 2-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} \xi_1-\xi_2+\xi_3=0, \\ -\xi_1+\xi_2-\xi_3=0, \\ \xi_3=0. \end{cases}$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_2, \\ \xi_3 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Полагая $\xi_2 = c$, находим вектор $\overline{\xi} = (c, c, 0)$, который при любом $c \neq 0$ есть собственный вектор матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ с собственным значением $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

$\underline{\lambda_3 = 3}$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 & 1 \\ -1 & 2-3 & -1 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0, \\ \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} \xi_1 = -\xi_2, \\ \xi_3 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Полагая $\xi_2 = c$, находим вектор $\overline{\xi} = (-c, c, 0)$, который при любом $c \neq 0$ есть собственный вектор матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ с собственным значением $\lambda_3 = 3$.

Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\overline{\xi} = (c, c, 0)$; $\lambda_3 = 3$ и $\overline{\xi} = (-c, c, 0)$.

Задание 6. Найдите наибольшее и наименьшее значения линейной функции $F = x - y$ при ограничениях:

$$\begin{cases} y \le x+3, \\ y \ge x-3, \\ 3x+y+7 \ge 0, \\ 5x+y-9 \le 0. \end{cases}$$

Решение

Заменяя знаки неравенств в системе ограничений на знаки точных равенств, получим уравнения четырёх прямых:

$$y = x+3,$$
$$y = x-3,$$
$$3x+y+7=0,$$
$$5x+y-9=0.$$

Построим эти прямые в декартовой системе координат (рис. 1)

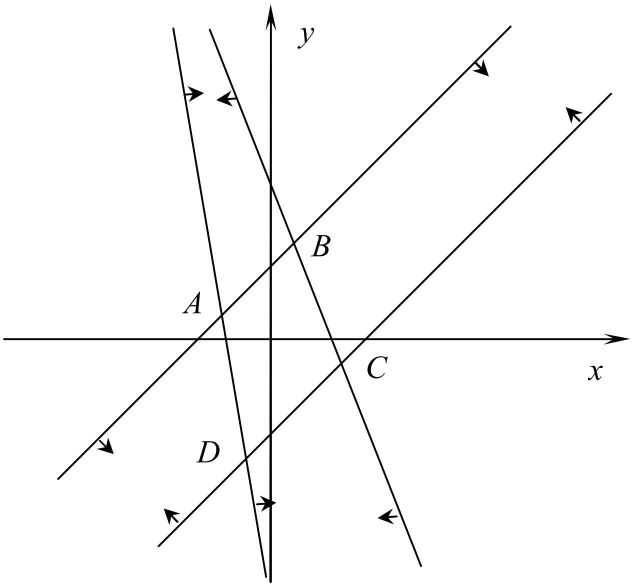

Рис. 1

Стрелки указывают, какие полуплоскости в пересечении дают многоугольник решений (четырехугольник $ABCD$). При этом вершины четырёхугольника находятся в точках:

$A(-2;1)$, $B(1;4)$, $C(2;-1)$, $D(-1;-4)$.

Вычислим значения линейной функции $F(x,y)=x-y$ в указанных точках:

$F(A)=F(-2;1)=-2-1=-3$;

$F(B)=F(1;4)=1-4=-3$;

$F(C)=F(2;-1)=2+1=3$;

$F(D)=F(-1;-4)=-1-4=-5$.

Таким образом, $F_{\max}=F(C)=3$ и $F_{\min}=F(D)=-5$.

Ответ: $F_{\max}=F(C)=3$, $F_{\min}=F(D)=-5$.

5. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ

После завершения изучения дисциплины студенты сдают экзамен.

К экзамену допускаются только те студенты, у которых зачтены индивидуальные задания.

Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину по классической заочной форме, приведен в разделе 5.2.

Образец билета для студентов, изучающих дисциплину с применением дистанционных технологий, приведен в разделе 5.3.

Итоговая оценка по дисциплине формируется по результатам сдачи индивидуальных домашних заданий и экзамена.

5.1. Вопросы для подготовки к экзамену

1. Линейные операции над матрицами. Свойства линейных операций.
2. Нелинейные операции над матрицами: транспонирование, умножение.
3. Определитель квадратной матрицы.
4. Свойства определителей.
5. Ранг матрицы: определение, вычисление методом элементарных преобразований.
6. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.
7. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
8. Обратная матрица.
9. Решение матричных уравнений.
10. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
11. Однородные системы линейных уравнений.
12. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки (столбца).
13. n-мерные векторы и действия с ними. Примеры.
14. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Базис.
15. Свойства собственных векторов матрицы.
16. Вычисление определителей.
17. Системы линейных уравнений. Основные понятия. Условия совместности.
18. Основная задача линейного программирования.
19. Геометрический метод решения систем линейных неравенств.
20. Собственные векторы и собственные числа матрицы.

5.2. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину по классической заочной форме

Студенты, обучающиеся по КЗФ, сдают экзамен во время экзаменационной сессии по билетам. Каждый билет содержит один теоретический вопрос и три задачи. Экзамен считается сданным, если выполнено более 55 % заданий.

Экзаменационный билет № _0_

1. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки (столбца).

2. Решите систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

3. Докажите, что векторы:

$$\overline{e_1} = \{1, -1, -2\},\ \overline{e_2} = \{8, 1, -1\},\ \overline{e_3} = \{-1, 4, 3\}$$

можно принять за новый базис и найдите координаты вектора $\overline{x} = \{4, 7, 9\}$ в этом базисе.

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 4 \\ 14 & 9 & 17 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$. Найдите:

а) матрицу $5A - 2B$, б) матрицу $AB - BA$.

5.3. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину дистанционно

В данном разделе приведены примеры вопросов из экзаменационного билета для студентов, сдающих экзамен в онлайн режиме (через Интернет на сайте ИДО). Экзаменационный билет включает в себя 20 заданий: задания на выбор единственного ответа (8); задания на выбор множественных ответов (4); задания на установление последовательности (4); задания на установление соответствия (2); задания для краткого ответа (2).

1. Задания на выбор единственного ответа

Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -6 \end{vmatrix}$ **равен:**

1) -4
2) -12
3) 108
4) 24

2. Задания на выбор множественных ответов

Путём элементарных преобразований над строками матрица однородной системы линейных уравнений приведена к виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

В качестве базисного выбран минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда фундаментальная система решений состоит из:

1) $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

2) $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$;

3) $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

4) $X_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3. Задания на установление последовательности

Укажите последовательность, в которой возможно выполнить произведение матриц

1) $A_{3\times 1}$
2) $B_{4\times 4}$
3) $C_{1\times 4}$
4) $D_{2\times 3}$

4. Задания на установление соответствия

Установите соответствие между собственными значениями и собственными векторами матрицы $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы	**Собственные значения**
1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	1) -3
2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	2) -5
3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	3) -6

5. Задания для краткого ответа

Найдите наибольшее значение линейной функции $F = 2x - 5y$ **при ограничениях:**

$$\begin{cases} x + y - 1 \le 0, \\ 2x - y \ge 0, \\ x - 2 \le 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Тарбокова Т.В. Линейная алгебра: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2012. – 118 с.

Дополнительная литература

2. Ромакин М.И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Высшая школа, 1963. – 280 с.
3. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В.Математика в экономике: Учебник: В 2-х ч. Ч.1. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 224 с.
4. Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 128 с.

Internet-ресурсы

5. СТО ТПУ 2.5.01-2011. Система образовательных стандартов. Работы выпускные квалификационные, проекты и работы курсовые. Структура и правила оформления/ ТПУ [Электронный ресурс] – Томск, 2011. – Режим доступа http://standard.tpu.ru/standart.html, свободный.

Учебное издание

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания и индивидуальные задания

Составитель

МОЛДОВАНОВА Евгения Александровна

Рецензент

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры ВМ ТПУ

О.Н. Имас

Компьютерная верстка *В.Д. Пяткова*

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать Xerox. Усл.печ.л. 1,16. Уч.-изд.л. 1,05.
Заказ . Тираж экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru