МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИДО
_______________ С.И. Качин

«____»_____________2011 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 1

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов ИДО, обучающихся по направлениям
031600 «Реклама и связь с общественностью»,
100400 «Туризм»,
040100 «Социальная работа»

Составители
Э.М. Кондакова
Г.М. Матвеенко

Семестр	**1**
Кредиты	4
Лекции, часов	8
Практические занятия, часов	8
Индивидуальные задания	2
Самостоятельная работа, часов	128
Формы контроля	экзамен

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 517

Математический анализ 1: метод. указ. и индивид. задания для студентов ИДО, обучающихся по напр. 031600 «Реклама и связь с общественностью», 100400 «Туризм», 040100 «Социальная работа» / сост. Э. М.Кондакова; Томский политехнический университет.– Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011.– с.

Методические указания и индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики ФТИ «____» ______2011 года, протокол № ___.

Зав. кафедрой ВМ,
профессор, доктор физ.-мат. наук _________________К.П. Арефьев

Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Математический анализ 1» предназначены для студентов ИДО, обучающихся по направлениям 031600 «Реклама и связь с общественностью», 100400 «Туризм», 040100 «Социальная работа». Данная дисциплина изучается в одном семестре.

Приводится содержание основных тем дисциплины, темы практических занятий, варианты заданий для индивидуальных домашних заданий и список рекомендуемой литературы. Даны методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий.

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Математический анализ 1»изучается в первом семестре первого курса студентами ИДО, обучающимися по направлениям 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент», 080400 «Управление персоналом», 100700 «Торговое дело».

Дисциплина «Математический анализ 1» является базовой дисциплиной естественно-научного цикла (Б2).

Пререквизиты: базовый школьный курс

Кореквизитами являются _концепция современного естествознания, экономика, информатика____

2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Матрицы и действия над ними. Определители второго и третьего порядков, их основные свойства, вычисление. Обратная матрица. Системы линейных уравнений. Матричная запись и матричная форма решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Системы линейных однородных уравнений. Векторы. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Система декартовых координат. Координаты вектора и точки. Проекция вектора на ось. Скалярное и смешанное произведения. Их свойства и вычисление. Основные задачи векторной алгебры. Прямая на плоскости, общее уравнение, уравнение с угловым коэффициентом, уравнение прямой в отрезках на осях. Взаимные расположения прямых на плоскости.

Рекомендуемая литература: [1, с. 5-23], [2, с. 3-25].

Методические указания

Необходимо усвоить предмет, задачи, основные определения, формулировки теорем, для того чтобы использовать теоретические знания при решении практических задач.

Тема 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

- Множество вещественных чисел. Функции. Область определения функции. Способы задания. Простейшие характеристики функций. Элементарные функции. Последовательности.
- Предел функции. Односторонние пределы. Предел последовательности. Признаки существования предела. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы.
- Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых функций. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые функции и их использование при вычислении пределов.

- Непрерывность функции в точке и на интервале. Теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций непрерывных на отрезке. Точки разрыва и их классификация.
- Понятие производной. Физический и геометрический смысл. Непрерывность дифференцируемой функции. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование основных элементарных функций Дифференциал функции, его геометрический смысл и связь с производной. Производные и дифференциалы высших порядков.
- Понятие функции нескольких переменных. Область определения.
- Частные производные. Полный дифференциал. Производные и дифференциалы высших порядков.
- Экстремум функции нескольких переменных.

.

Рекомендуемая литература: [1, с. 5-23], [2, с. 3-25].

Методические указания

Необходимо усвоить предмет, задачи, основные определения, формулировки теорем, для того чтобы использовать теоретические знания при решении практических задач.

Тема 3. **Интегральное исчисление функции одного аргумента**

- Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Замена переменных. Интегрирование по частям.
- Интегрирование рациональных дробей.
- Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Интегральная сумма. Определенный интеграл и его свойства.
- Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменных. Интегрирование по частям.
- Приложения определенного интеграла: площадь плоской области.
- Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

Тема 3. . **Обыкновенные дифференциальные уравнения**

- Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
- Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения и уравнения Бернулли.

4.2. Варианты домашних заданий и методические указания

4.2.1. Индивидуальное задание №1

Вариант №1

1. Найти значение матричного многочлена $f(\mathrm{A})$, если
$f(x) = -2x^2 + 3x + 8$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Найти произведение матриц AB и BA:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса найти общее решение и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

5. В треугольнике ABC с вершинами $A(2;6)$, $B(-3;2)$, $C(-2;-3)$ написать уравнение медианы AE и высоты BH.
6. Вычислить:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{8x^2 + 2x + 3}{7x^2 - 3x + 5}$, b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 14x + 45}$,

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{6x^2 + 4x - 3}$, d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x - 5}{3x^3 - 2x}$, e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x}}{x}$.

7. Исследовать на непрерывность функции:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0, \\ x, & 0<x<2, \\ x+2, & x\ge 2 \end{cases}$ b) $y=2^{\frac{1}{x+2}}$.

8. Найти производные функций:

а) $y=x^2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, б) $y=\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$,

в) $y=3^x(\sin 3x+\ln x)$,

г) $y=\ln^3\left(x^3-tgx^2\right)$, д) $y=\arcsin\left(\sqrt{x+2}-3\right)$.

9. Провести полное исследование и построить график функции:

$$y=\frac{x^3}{(x+1)^2}.$$

Вариант №2

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если

$f(x)=2x^2-3x+2,\quad A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$

2. Найти произведение матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 4 & -4 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=3, \\ 2x_1+6x_2+4x_3=6, \\ 3x_1+10x_2+8x_3=21. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса найти общее решение и одно частное решение:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$$

5. В треугольнике ABC с вершинами $A(2;6)$, $B(-3;2)$, $C(-2;-3)$ написать уравнение высоты AH, найти косинус угла B.

6. Вычислить:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8x^2-4x+3}{3x^2+5x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-10x+21}{x^2+x-56}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x^2-2x+3}{6x^3-2x+5}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-3}{x^2+3x-7}$, e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

7. Исследовать на непрерывность функции:

a) $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 1, \\ x-2, & 1<x\le 3, \\ 2x-3, & x>3. \end{cases}$ b) $y=5^{\frac{1}{x-2}}$.

8. Найти производные функций:

а) $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{x^2}-\sqrt[3]{x^2}-5$, б) $y=\dfrac{\sin 3x}{1+tg3x}$, в), $y=\left(x^3+1\right)\cdot\cos x$

г) $y=\ln\left(\sin x-\sqrt{1+x^2}\right)$, д) $y=e^{\arcsin 3x}+x^2\log_3 x$.

9. Провести полное исследование и построить график функции:

$$y=\frac{x^3}{x^2-4}.$$

Вариант №3

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x)=x^2-2x-1$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц AB и BA;

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=8, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=19, \\ 7x_1+8x_2 \qquad =1. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса найти общее решение и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

5. В треугольнике ABC с вершинами $A(2;4)$, $B(-3;-2)$, $C(2;-3)$ написать уравнение медианы CE и средней линии, параллельной стороне BC.

6.Вычислить:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2 + 5x - 1}{8x^2 - 4x + 3}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4 + 6x^2 - 2x + 8}{x^4 - 3x^3 + x - 6}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5 + 7x^2 - 12}{x^3 - 2x + 39}$, e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5 - x^2} - 2}{1 - x}$.

7. Исследовать на непрерывность функции:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0, \\ x^2, & 0 \le x < 2, \\ x + 1, & x \ge 2. \end{cases}$ b) $y = 7^{\frac{2}{x+3}}$.

8. Найти производные функций:

a) $y = 5 + 13x^4 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - 9$, b) $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^3 + 4}$

c) $y = 3^{\sin^3 3x + \cos 2x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} y = \sqrt{x} \cdot \ln\left(5x^3 - x\right)$, e) $y = \arcsin x^2 + tg2x$

9. Провести полное исследование и построить график функции:

$$y = \frac{2x + 1}{x^2}.$$

Вариант №4

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти матрицу $C = AB - BA$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4,\\ 2x_1+6x_2+4x_3=-6,\\ 3x_1+10x_2+8x_3=-8.\end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса найти общее решение и одно частное решение:

$$\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4,\\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5,\\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8\end{cases}.$$

5. В треугольнике ABC с вершинами $A(2;4)$, $B(-4;1)$, $C(4;-3)$ написать уравнение высоты CP, прямой, проходящей через вершину B, параллельно стороне AC.

6.Вычислить:

a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{9x^2+3x+5}{8x^2-3x+5}$, b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+14x+13}{x^2+4x+3}$,

c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{9x^2+3x+5}{8x^2-3x+5}$, d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+14x+13}{x^2+4x+3}$, e) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$.

7. Исследовать на непрерывность функции:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\le 1,\\ x^2+1, & 1<x\le 2,\\ 2x-2, & x>2.\end{cases}$ b) $y=3^{\frac{1}{x+1}}$.

8. Найти производные функций:

a) $y=10x^6-\dfrac{4}{x}+3\sqrt[5]{x}-6$, b) $y=\dfrac{\cos x}{1+tgx}$, c) $y=tg3x+\ln\cos^2 3x$

d) $y=\left(x^2-1\right)\cdot\left(\cos^2 2x-\sin 3x\right)$, e) $y=\arcsin e^x-2arctgx$.

9. Провести полное исследование и построить график функции:

$$y=\frac{x^2}{x-1}.$$

Вариант №5

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x)=4x^2+3x-2$,
$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=-8, \\ 2x_1+3x_2+x_3=-3, \\ 2x_1+x_2+3x_3=-1. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса найти общее решение и одно частное решение:

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$$

5. В треугольнике ABC с вершинами $A(2;6)$, $B(-3;2)$, $C(-2;-3)$ написать уравнение средней линии, параллельной стороне AB, найти косинус угла C.

6. Вычислить:

a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+5x-1}{8x^2-4x+3}$, b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$,

c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+5x-1}{8x^2-4x+3}$, d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$, e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

7. Исследовать на непрерывность функции

a) $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<2, \\ x+2, & 2<x\le4, \\ 2x-2, & x>4. \end{cases}$ b) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x+1}}$.

8. Найти производные функций:

a) $y=4x+6\sqrt[3]{x}-\log_3 2x+9$, b) $y=\dfrac{x\ln x}{x-1}$, c) $y=\cos^2 x\cdot\sqrt{4-7x^2}$,

d) $y=\ln^2 tgx-\arccos 3^x$, e) $y=2^{5\sin x}+arctg3x$.

9. Провести полное исследование и построить график функции:

$y=\dfrac{x^2-3}{x+2}$.

Вариант №6

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x)=x^2-3x+2$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти матрицу $C = AB - BA$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 5x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 2. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса найти общее решение и одно частное решение:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

5. В треугольнике ABC с вершинами $A(2;3)$, $B(-3;0)$, $C(3;-2)$ написать уравнение высоты CH и медианы BM .

6. Вычислить:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+6}{x^2+4x-2}$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$,

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^6+x^5+9}{3x^4+7x-1}$, d) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+5x-3}{7x^3-6x+2}$, e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

7. Исследовать на непрерывность функции:

a) $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & x<1, \\ 2, & 1<x\le 2, \\ 3x, & x>2. \end{cases}$ b) $y=9^{\frac{1}{x+2}}$.

8. Найти производные функций:

a) $y=\dfrac{3}{4}x^3-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[3]{x^2}$, b) $\dfrac{2\cos x}{3x+\sin x}$, c) $y=\sqrt{1+x^2}$,

d) $y=3^{x^2}\cdot\left(\sin^2 x+\sqrt{x}\right)$, e) $y=(\ln x-\log_2 x)\cdot\sqrt[5]{x^2}$.

9. Провести полное исследование и построить график функции:

$$y=\frac{x^3+1}{x^2}.$$

Вариант №7

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Найти произведение матриц AB и BA:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 \qquad = -3. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса найти общее решение и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

5. В треугольнике ABC с вершинами $A(2;6)$, $B(-3;2)$, $C(-2;-3)$ написать уравнение высоты ÀÍ , найти косинус угла между стороной AB и медианой BM .

6. Вычислить:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4x - 10}$, b) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 8x + 12}$,

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^5 + x^3 + 6}{5x^5 - x^4 + 7}$, d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x - 1}$, e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2}$.

7. Исследовать на непрерывность функции:

a) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^3, & 0 \le x < 2, \\ 3, & x > 2. \end{cases}$ b) $y = 5^{\frac{1}{x+2}}$.

8. Найти производные функций:

a) $y = 3 - 2x + \dfrac{2}{3}x^4 - \dfrac{1}{x^3}$, b) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \sin x}$, c) $y = \left(1 + 4x^2\right)^3$,

d) $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \left(2\ln x - 3^x\right)$, e) $y = 3x^3 \cdot \log_2 x + \dfrac{x^2}{e^x}$.

9. Провести полное исследование и построить график функции: $y = \dfrac{2x - 1}{(x - 2)^2}$.

Вариант №8

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x)=3x^2-2x+5$, $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу $C = AB - BA$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & -2 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 5 & -1\end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=1,\\ 2x_1-x_2+x_3=6,\\ x_1+5x_2=-3.\end{cases}$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса найти общее решение и одно частное решение: $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1,\\ 3x_1+7x_2-2x_3-x_4=4,\\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=3.\end{cases}$

5. В треугольнике ABC с вершинами $A(3;2)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$ написать уравнение медианы CM и прямой, проходящей через вершину A, параллельно стороне BC.

6. Вычислить:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2}{x^2+2x+1}$, b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}$,

c) $\lim\limits_{\to\infty}\dfrac{x^2+4x+9}{5x^2-6x+8}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+1}{6x^4+8}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

7. Исследовать на непрерывность функции:

a) $f(x)=\begin{cases}x^3, & x<1,\\ x, & 1\le x<3,\\ x-2, & x\ge 3.\end{cases}$ b) $y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

8. Найти производные функций:

a) $y=2x^5-\dfrac{1}{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+7$, b) $y=\dfrac{2x^2-3}{(x-1)}$,

c) $y=e^{x^2}\ln\left(\sqrt{x}+tgx\right)$, d) $y=\left(\sin 3x+ctg^2x\right)^3$.

9. Провести полное исследование и построить график функции

$$y=\frac{3x^4+1}{x^3}.$$

Вариант №9

Найти значение матричного многочлена $f\left(A\right)$, если $f\left(x\right)=x^2-x+2$,

$$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

2.Найти произведение матриц ÀÂ и ÂÀ:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases}3x_1+5x_1+7x_3=1,\\ 2x_1-x_2=2,\\ 4x_1+3x_2+2x_3=-1.\end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса найти общее решение и одно частное решение:

$$\begin{cases}x_1+3x_2-x_3-2x_4=1,\\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3,\\ x_1+4x_2-3x_3-x_4=2.\end{cases}$$

5. В треугольнике ÀÂÑ с вершинами À$\left(0;8\right)$, Â$\left(-3;4\right)$, Ñ$\left(-2;-4\right)$ написать уравнение высоты ÀÍ и средней линии, параллельной стороне ÀÑ

6.Вычислить:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x+2}{x^2+5x-2}$, b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-7x-2}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-x+3}{2x^3-4x^2+7}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-6}{4x^4-3x+5}$, e) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$.

7. Исследовать на непрерывность функции:

a) $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & 0\le x<2,\\ x-2, & x\ge 2\ .\end{cases}$ b) $y=6^{\frac{2}{x+3}}$.

8. Найти производные функций:

a) $y=\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-3x+2$, b) $y=\dfrac{2e^x}{\sin 2x+\cos x}$, c) $y=3^{\arcsin\sqrt{x}}$,

d) $y=\sqrt{x^2-1}\left(ctg^2x+\sin^3 x\right)$, e) $y=\ln^2\left(x^2-arctg2x\right)$.

9. Провести полное исследование и построить график функции:

Вариант №10

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x)=4x^2-2x+1$,

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу $\tilde{N} = \grave{A}\hat{A} - \hat{A}\grave{A}$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:
$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=2, \\ 2x_1+4x_3=1, \\ x_1+2x_2+3x_3=3. \end{cases}$$

Решить систему уравнений методом Гаусса найти общее решение и одно частное решен
$$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_4=1, \\ 3x_1-5x_2+3x_3+7x_4=1. \end{cases}$$

5. В треугольнике $\grave{A}\hat{A}\tilde{N}$ с вершинами $\grave{A}(2;-6)$, $\hat{A}(-3;1)$, $\tilde{N}(2;5)$ написать уравнение прямой, проходящей через вершину $\grave{A}$, параллельно стороне $\hat{A}\tilde{N}$, найти косинус угла $\hat{A}$.

6.Вычислить:

a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2-2x+1}$, b) $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{x^2-6x-7}{x^2-9x+14}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^2-4}{3x^4-x+3}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-7}{5x^4+3x^2-3x+5}$, e) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$.

7. Исследовать на непрерывность функции:

a) $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<0, \\ x^2, & 0\le x<2, \\ x-2, & x\ge3, \end{cases}$ b) $y=7^{\frac{1}{x+4}}$.

8. Найти производные функций:

a) $y=3x^{-2}+\sqrt[7]{x^5}-\dfrac{1}{x^3}+2$, b) $Y=\dfrac{\sin 3x}{ctgx+x^3}$, c) $y=\sqrt{x}\log_3(x-1)$,

d) $y=arctg\sqrt{x^2+1}-2^{tg_2 x}$, e) $y=\ln\left(\cos^2 x-4e^{x^3}\right)$.

9. Провести полное исследование и построить график функции:

$$y=\frac{x^2-2x}{x-1}.$$

4.2.2. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1

1. Найти значение матричного многочлена $f\left(A\right)$, если

$$f\left(x\right)=-2x^2+5x+9,\ A=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$f\left(A\right)\ =\ -2A^2+5A+9E,\ \text{где}\quad E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3&1\cdot2+2\cdot0\\3\cdot1+0\cdot3&3\cdot2+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2\\3&6\end{pmatrix},$$

тогда,

$$f\left(A\right)=-2A^2+5A+9E=-2\cdot\begin{pmatrix}7&2\\3&6\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}+9\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-14&-4\\-6&-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&10\\15&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\9&-3\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C=AB-BA$, если $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\3&4&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&2&4\\3&2&1\end{pmatrix}$.

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\3&4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&2&4\\3&2&1\end{pmatrix}=\left|\begin{array}{c}\text{элементы 1-ой строки}\\\text{матрицы } A \text{ перемножа-}\\\text{ются с соответствующими}\\\text{элементами первого столбца}\\\text{матрицы } B\text{, а произведения}\\\text{складываются}\end{array}\right|=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+3\cdot\left(-1\right)+1\cdot3&1\cdot0+3\cdot2+1\cdot2&1\cdot3+3\cdot4+1\cdot1\\0\cdot1+\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)+2\cdot3&0\cdot0+\left(-1\right)\cdot2+2\cdot2&0\cdot3+\left(-1\right)\cdot4+2\cdot1\\3\cdot1+4\cdot\left(-1\right)+\left(-1\right)\cdot3&3\cdot0+4\cdot2+\left(-1\right)\cdot2&3\cdot3+4\cdot4+\left(-1\right)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8&16\\7&2&-2\\-4&6&24\end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&2&4\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\3&4&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+3\cdot3 & 1\cdot3+0\cdot(-1)+3\cdot4 & 1\cdot1+0\cdot2+3\cdot(-1)\\(-1)\cdot1+2\cdot0+4\cdot3 & (-1)\cdot3+2\cdot(-1)+4\cdot4 & (-1)\cdot1+2\cdot2+4(-1)\\3\cdot1+2\cdot0+1\cdot3 & 3\cdot3+2\cdot(-1)+1\cdot4 & 3\cdot1+2\cdot2+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&15&-2\\11&11&-1\\6&11&6\end{pmatrix}.$$

$$C=A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}1&8&16\\7&2&-2\\-4&6&24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&15&-2\\11&11&-1\\6&11&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-10&8-15&16-(-2)\\7-11&2-11&-2-(-1)\\-4-6&6-11&24-6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-9&-7&18\\-4&-9&-1\\-10&-5&18\end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6,\\4x_1+5x_2+6x_3=9,\\7x_1+8x_2\qquad=-6.\end{cases}$$

Решение.

а) Решим систему по формулам Крамера. Для этого найдем определитель матрицы системы:

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\text{разложим по элементам}\\\text{первой строки}\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5&6\\8&0\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&0\end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=1\cdot(-48)-2\cdot(-42)+3\cdot(-3)=27.$$

Так как $D\neq 0$, то решение системы существует и единственно.

Найдем определители D_1, D_2, D_3 подставляем столбец свободных

членов $\begin{pmatrix}6\\9\\-6\end{pmatrix}$ вместо первого, второго и третьего столбцов определителя

D соответственно:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot(-48) - 2\cdot 36 + 3\cdot(72+30) = -288 - 72 + 306 = -360 + 306 = -54,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot 36 -$$

$$-6\cdot(-42) + 3\cdot(-24-63) = 36 + 252 + 3\cdot(-87) = 288 - 261 = 27,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-30-72) - 2\cdot(-24-63) + 6\cdot(32-35) = -102 - 2\cdot(-87) + 6\cdot(-3) = 54$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-54}{27} = -2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{27}{27} = 1, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{54}{27} = 2.$$

Ответ. $(-2;1;2)$.

б) Решим систему с помощью обратной матрицы. Систему можно записать в матричном виде:

$$\grave{A}\cdot\tilde{O} = \hat{A}, \text{ где } \grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}, \ \tilde{O} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу $\grave{A}^{-1}$, обратную к матрице системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

$\det A = D = 27 \neq 0$, следовательно матрица $\grave{A}$ невырожденная и имеет обратную матрицу $\grave{A}^{-1}$. Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы $\grave{A}$: $\grave{A}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 8 = -48;$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 0 - 6 \cdot 7) = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21; \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Запишем присоединенную матрицу $\tilde{A} = \left(A_{ij}\right)^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$

Найдем матрицу A^{-1}:

$$\grave{A}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем решение системы уравнений:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 \cdot 6 + 24 \cdot 9 + (-3) \cdot (-6) \\ 42 \cdot 6 + (-21) \cdot 9 + 6 \cdot (-6) \\ (-3) \cdot 6 + 6 \cdot 9 + (-3) \cdot (-6) \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -54 \\ 27 \\ 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\tilde{o}_1 = -2,\ \tilde{o}_2 = 1,\ \tilde{o}_3 = 2.$

Сделаем проверку, полученного решения. Для этого в каждое уравнение системы подставим найденные значения неизвестных:

$$-2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \ = \ 6,\ 6 = 6;$$
$$4 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \ = \ 9,\ 9 = 9;$$
$$7 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 \ = -6, -6 = -6.$$

Ответ. $(-2;1;2)$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса найти общее решение и одно

частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение:

Запишем основную матрицу системы А и расширенную матрицу системы В:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Определим ранги матрицы $\grave{A}$ и $\hat{A}$. Произведем необходимые элементарные преобразования над матрицей $\hat{A}$. Умножим все элементы первой строки на (-4) и прибавим к элементам второй строки, умножим все элементы первой строки на (-3) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & 15 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 15 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & 15 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что минор второго порядка матрицы À равен минору второго порядка матрицы Â

$$\grave{I}_{2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $r(B) = r(A) = 2$, т.е. данная система совместна и имеет бесчисленное множество решений, потому что $r = 3$, а число неизвестных $n = 4$. Последняя матрица есть расширенная матрица системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_2 + 10x_3 + 15x_4 = -1. \end{cases}$$

Так как , например, $M_2 = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| = 1 \neq 0$, то в качестве базисных неизвестных можно взять, x_1 и x_2, коэффициенты при которых входят в базисный минор; неизвестные x_3 и x_4 - свободные неизвестные. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3x_3 + 4x_4 + 1 \\ x_2 = -10x_3 - 15x_4 - 1. \end{cases}$$

«Обратным ходом» метода Гаусса из последнего уравнения находим $x_2 = -10x_3 - 15x_4 - 1$, подставив найденное значение x_2

в первое уравнение, находим:

$$x_1 + (-10x_3 - 15x_4 - 1) = 3x_3 + 4x_4 + 1, \quad x_1 = 10x_3 + 15x_4 + 1 + 3x_3 + 4x_4 + 1,$$

$$x_1 = 13x_3 + 19x_4 + 2.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 13x_3 + 19x_4 + 2, \\ x_2 = -10x_3 - 15x_4 - 1. \end{cases}$$

Полагая, например, $x_3 = 1, x_4 = -1,$ получим $x_1 = -4, x_2 = 4$. Это некоторое частное решение системы уравнений.

Ответ:

Общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 13x_3 + 19x_4 + 2, \\ x_2 = -10x_3 - 15x_4 - 1. \end{cases}$$

Частное решение:

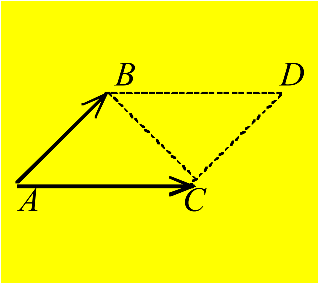
$$x_3 = 1, x_4 = -1, \quad x_1 = -4, x_2 = 4.$$

5. В треугольнике ABC с вершинами A(2;-1), B(-2;2), C(3;5) написать уравнение прямой, проходящей через вершину A, параллельно стороне BC, найти косинус угла B.

Решение:

Уравнение прямой AD , проходящей через вершину A, параллельно прямой BC будем искать в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$



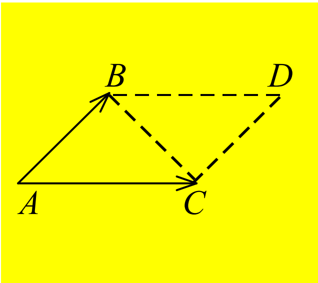
где x_0 и y_0 координаты точки А, а $к$ угловой коэффициент прямой AD. Так как прямая параллельна прямой ВС, следовательно, угловой коэффициент прямой AD равен угловому коэффициенту прямой ВС.

Найдем уравнение прямой ВС как уравнение прямой, проходящей через две точки В и С.

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B},\frac{x+2}{3+2}=\frac{y-2}{5-2},\frac{x+2}{5}=\frac{y-2}{3},3(x+2)=5(y-2),3x+6=5y-10,3x-5y+16=0,$$

$y=\frac{3}{5}x+\frac{16}{5},k_{BC}=\frac{3}{5}=k_{AD}$. Уравнение прямой AD примет вид:

$$y+1=\frac{3}{5}(x-2),\quad y-\frac{3}{5}x+\frac{11}{5}=0.$$



Косинус угла B найдем по формуле

$$\cos\angle B=\frac{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|}.$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ и ,$\overrightarrow{BA}$:

$\overrightarrow{BC}=\{3-(-2);5-2\}=\{5;3\}$, $\quad\overrightarrow{BA}=\{2-(-2);-1-2\}=\{4;-3\}$.

Вычислим скалярное произведение

$$\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=5\cdot4+3\cdot(-3)=20-9=11.$$

Найдем длины векторов $\overrightarrow{BC}$ и ,$\overrightarrow{BA}$:

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34},$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

Тогда

$$\cos\angle B=\frac{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|}=\frac{11}{\sqrt{34}\cdot5}\approx\frac{11}{5.8\cdot5}\approx\frac{11}{29.15}\approx0.377.$$

Ответ:

уравнение стороны $AD: y-\frac{3}{5}x+\frac{11}{5}=0, \quad \cos\angle B\approx 0.377$.

Вычислить:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{7x^2-6x+4}{4x^2+2x-1}$.

Решение.

Подставим значение $x=-2$ в выражение функции.

$$\lim_{x\to -2}\frac{7x^2-6x+4}{4x^2+2x-1}=\lim_{x\to -2}\frac{7(-2)^2-6(-2)+4}{4(-2)^2+2(-2)-1}=\lim_{x\to -2}\frac{28+12+4}{16-4-1}=4.$$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-7x+12}$

Решение.

При $x\to 3$ числитель и знаменатель выражения $\frac{x^2-x-6}{x^2-7x+12}$ стремятся к нулю.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-7x+12}=\lim_{x\to 3}\frac{(3)^2-(3)-6}{(3)^2-7(3)+12}=\frac{0}{0}.$$

Получили неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Для этого решим соответствующие квадратные уравнения

$$x^2-x-6=0,\quad x_1=3,\quad x_2=-2,\quad x^2-x-6=(x-3)(x+2),$$

$$x^2-7x+12=0,\quad x_1=3,\quad x_2=4,\quad x^2-7x+12=(x-3)(x-4).$$

Предел примет вид

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-7x+12}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)}{(x-4)}=\frac{3+2}{3-4}=-5.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5+x^3-2}{5x^5-x^2+1}$

Решение.

Подставив значение $x=\infty$ в выражение функции, придем к неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Разделим числитель и знаменатель на x^5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+x^3-2}{5x^5-x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5/x^5+x^3/x^5-2/x^5}{5x^5/x^5-x^2/x^5+1/x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x^2-2/x^5}{5-1/x^3+1/x^5},$$

Но при $x\to\infty$ $\frac{1}{x^2},\frac{2}{x^5},\frac{1}{x^3},\frac{1}{x^5}$ стремятся к нулю, поэтому получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x^2-2/x^5}{5-1/x^3+1/x^5}=\frac{2+0-0}{5-0+0}=\frac{2}{5}.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-3}{6x^4+2x^3-5}$.

Решение.

Аналогично примеру 3, подставив значение $x=\infty$ в выражение функции, придем к неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Разделим числитель и знаменатель на старшую степень x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-3}{6x^4+2x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2/x^4+x/x^4-3/x^4}{6x^4/x^4+2x^3/x^4-5/x^4}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3/x^2+1/x^3-3/x^4}{6+2/x-5/x^4}=\frac{(3/\infty)+(1/\infty)-(3/\infty)}{6+(2/\infty)-(5/\infty)}=\frac{0+0-0}{6+0-0}=\frac{0}{6}=0.$$

5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

Решение.

Подставив значение $x=2$ в выражение функции, получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\frac{\sqrt{2-1}-1}{2-2}=\frac{0}{0}.$$

Чтобы раскрыть эту неопределенность, умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\left(\sqrt{x-1}+1\right)$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\left(\sqrt{x-1}\right)^2-1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1-1)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{2-1}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Найти производные функций:

1. $y=3x^3-\dfrac{1}{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+2.$

Решение:

Преобразуем функцию к виду

$$y=3x^3-x^{-4}+x^{5/3}+2.$$

Отсюда, используя таблицу производных, получим

$$y'=\left(3x^3-x^{-4}+x^{3/5}+2\right)'=\left(3x^3\right)'-\left(x^{-4}\right)'+\left(x^{3/5}\right)'+(2)'=$$

$$=3\cdot 3\cdot x^{3-1}-(-4)\cdot x^{-4-1}+5/3\cdot x^{\left(3/5\,-1\right)}=9\cdot x^2+4x^{-5}+x^{2/5}.$$

2. $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}.$

Функция является частным от деления двух функций. По правилу дифференцирования частного имеем

$$y'=\frac{\left(1+e^x\right)'\left(1-e^x\right)-\left(1+e^x\right)\left(1-e^x\right)'}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{e^x\left(1-e^x\right)-\left(1+e^x\right)\left(-e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{e^x-e^{2x}+e^x+e^{2x}}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(1-e^x\right)^2}.$$

3. $y=\left(\sqrt{x}+2\right)\cdot\arcsin(x).$

Воспользуемся правилом дифференцирования произведения.

$$y' = \left(\sqrt{x}+2\right)' \cdot \arcsin\left(x\right) + \left(\sqrt{x}+2\right) \cdot \left(\arcsin\left(x\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \arcsin\left(x\right) + \left(\sqrt{x}+2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

4. $y = \ln^3\left(\sin 3x\right)$.

Функция является композицией функций

$u = \ln v,\ \ v = \sin 3x,\ \ f(u) = u^3$.

Так как

$f'(u) = 3u^2$, а $u' = \frac{1}{v}\ln v$,

то по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$y'(x) = 3u^2 \cdot u'_v = 3\ln^2\left(v\right) \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(v\right)' = 3\ln^2\left(\sin 3x\right) \cdot \frac{1}{\sin 3x} \cdot \left(\sin 3x\right)'.$$

Функция $v = \sin 3x$ в свою очередь является композицией двух функций $t = 3x$ и $\varphi(t) = \sin(t)$, поэтому

$$\left(\sin 3x\right)' = \left(\sin t\right)_x' = \cos(t) \cdot t' = \cos(3x) \cdot \left(3x\right)' = \cos(3x) \cdot 3.$$

Окончательно получим

$$y'(x) = 3u^2 \cdot u'_v = 3\ln^2\left(v\right) \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(v\right)' = 3\ln^2\left(\sin 3x\right) \cdot \frac{1}{\sin 3x} \cdot \left(\sin 3x\right)' =$$

$$= 3\ln^2\left(\sin 3x\right) \cdot \frac{1}{\sin 3x}\cos(3x) \cdot 3 = 9\ln^2\left(\sin 3x\right) \cdot \frac{1}{\sin 3x}\cos(3x).$$

5. $y = \sqrt{x - x^2} + \mathrm{arctg}\left(x-2\right)$.

Функция является суммой двух сложных функций:

$\sqrt{x-x^2}$ есть композиция функций $v = x - x^2$, $\varphi(v) = v^{1/2}$,

$\mathrm{arctg}\left(x-2\right)$ есть композиция функций $u = x - 2$ и $\psi(u) = arctg\left(u\right)$.

По правилу дифференцирования суммы и сложной функции получим

$$y'(x)=\left(\sqrt{x-x^2}\right)'+\left(\operatorname{arctg}\left(x-2\right)\right)'=\left(v^{1/2}\right)'\cdot v'+\left(\operatorname{arctg}\left(u\right)\right)'\cdot u'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(v^{1/2-1}\right)\cdot\left(x-x^2\right)'+\frac{1}{1+u^2}\cdot(x-2)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(x-x^2\right)^{-1/2}\right)\cdot\left(1-2x\right)+\frac{1}{1+\left(x-2\right)^2}\cdot 1=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}+\frac{1}{1+\left(x-2\right)^2}.$$

Провести полное исследование и построить график функции.

$$y=\frac{x^3}{3-x^2}.$$

Решение.

Область определения $D(f)$ функции вся числовая ось, за исключением точек $x_1=\sqrt{3},\ x_2=-\sqrt{3},$ то есть,

$$D(f)=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right).$$

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью Oy график пересекается при $x=0,$ откуда $y=f(0)=0.$ Точка $M\left(0,0\right)$ – точка пересечения с осью Oy.

С осью Ox график пересекается если $y=0,$ $f(x)=0,$ то есть $\dfrac{x^3}{3-x^2}=0,$ отсюда $x=0.$

Таким образом, $M\left(0,0\right)$ – единственная точка пересечения с осями координат.

Функция непериодическая. Исследуем ее на четность и нечетность: $f\left(-x\right)=\dfrac{\left(-x\right)^3}{3-\left(-x\right)^2}=\dfrac{-\left(x\right)^3}{3-\left(x\right)^2}=-\dfrac{\left(x\right)^3}{3-\left(x\right)^2}$ – функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому исследуем функцию при $x\geq 0.$

Найдем интервалы знакопостоянства функции, где $f\left(x\right)<0$ и $f\left(x\right)>0$, $\dfrac{x^3}{3-x^2}<0,$

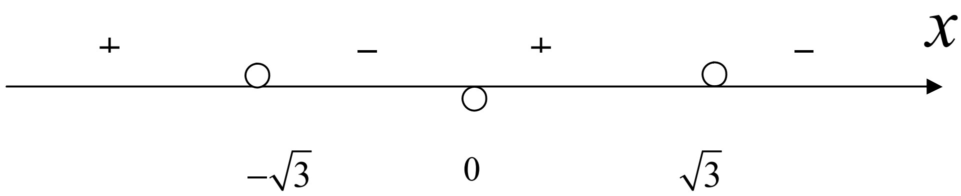


Рис. 1

Так как мы рассматриваем $x \ge 0$, в силу нечетности функции, то получаем, что $f(x) > 0$ при $0 \le x < \sqrt{3}$ и $f(x) < 0$ при $\sqrt{3} \le x < +\infty$.

Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя значения первой производной:

$$y' = \left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)' = \frac{3x^2\left(3-x^2\right) - x^3(-2x)}{\left(3-x^2\right)^2} = \frac{9x^2 - 3x^4 + 2x^4}{\left(3-x^2\right)^2} = \frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}.$$

Найдем критические точки функции, приравняв к нулю производную.

$$\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2} = 0, \quad x^2\left(9-x^2\right) = 0, \quad x_1 = 0, \quad \left(9-x^2\right) = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -3.$$

Рассмотрим точки $x_1 = 0, \quad x_2 = 3$.

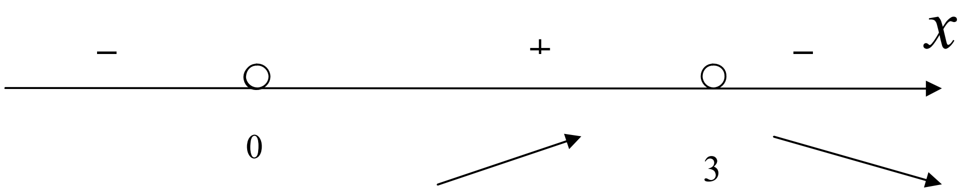


Рис. 2.

В точке $x_2 = 3$ производная сменит знак с «+» на «–». Следовательно, в этой точке функция имеет максимум, $y_{\max} = \dfrac{3^3}{3-3^2} = \dfrac{27}{-6} = -4,5.$

На интервале $[0,3)$ производная – положительна, поэтому на этом интервале функция возрастает, а на интервале $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ производная – отрицательна, , поэтому на этом интервале функция убывает.

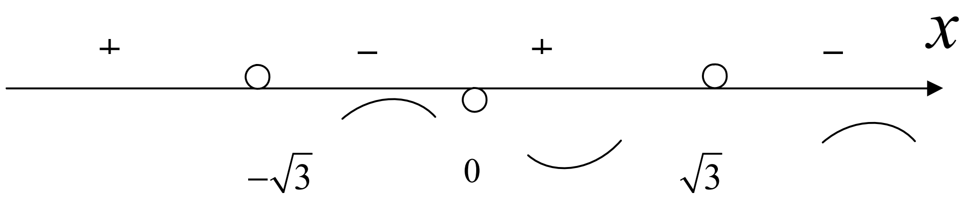
Определим интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции. Для этого найдем вторую производную для функции.

$$y'' = \left(\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{(3-x^2)^2} \right)' = \frac{\left(18x-4x^3\right)(3-x^2)-x^2\left(9-x^2\right)2\left(3-x^2\right)(-2x)}{(x^2+3)^4} =$$

$$= \frac{(3-x^2)\left(\left(18x-4x^3\right)(3-x^2)+4x^3\left(9-x^2\right)\right)}{(x^2+3)^4} =$$

$$= \frac{\left(\left(18x-4x^3\right)(3-x^2)+36x^3-4x^5\right)}{(x^2+3)^3} =$$

$$= \frac{54x-12x^3-18x^3+\left(4x^5\right)+36x^3-\left(4x^5\right)}{(x^2+3)^3} = \frac{6x^3+54x}{(3-x^2)^3} = \frac{6x\left(x^2+9\right)}{(3-x^2)^3}.$$



Отсюда видно, что при $x \in \left[0, \sqrt{3}\right)$, $f''(x) \geq 0$, функция выпукла вниз и выпукла вверх при $x \in \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, так как, $f''(x) < 0$. Точка $x = 0$ – точка перегиба.

Найдем асимптоты графика функции.

Функция не существует в точке $x = \sqrt{3}$, то есть, прямая $x = \sqrt{3}$ – вертикальная асимптота. В силу симметрии прямая $x = -\sqrt{3}$ тоже является вертикальной асимптотой.

Найдем односторонние пределы в точке $x = \sqrt{3}$:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\left(\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\left(\frac{\left(\sqrt{3}-0\right)^3}{\left(\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-0\right)\right)\left(\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-0\right)\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\left(\frac{\left(\sqrt{3}-0\right)^3}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+0\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}-0\right)}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\left(\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\left(\frac{\left(\sqrt{3}+0\right)^3}{\left(\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}+0\right)\right)\left(\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}+0\right)\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\left(\frac{\left(\sqrt{3}+0\right)^3}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}-0\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}+0\right)}\right)=-\infty.$$

Таким образом, точка $x=\sqrt{3}$ – точка разрыва второго рода.

Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b$, где

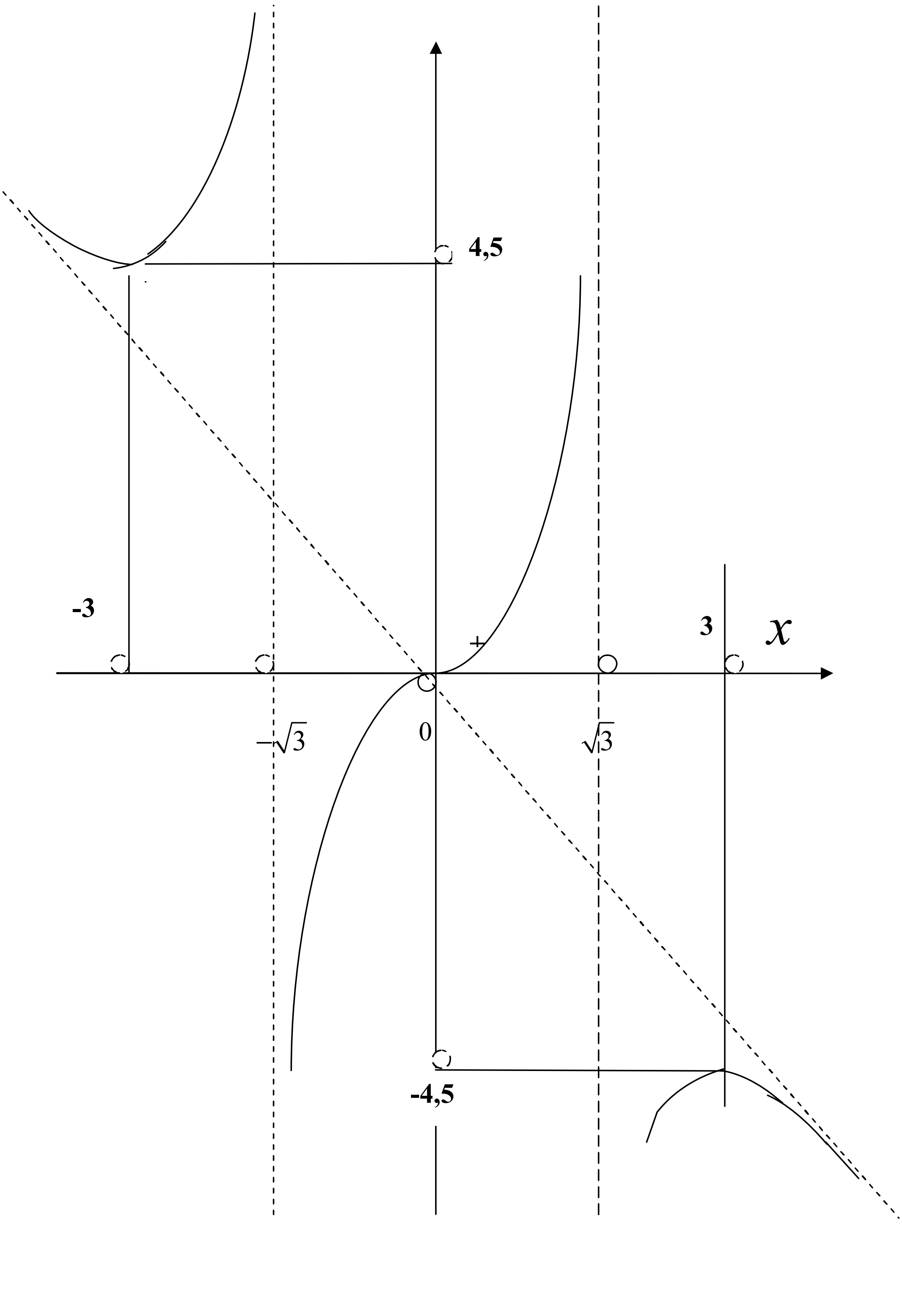
$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3-x^2}\right)=-1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)-(-1)x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{3-x^2}\right)=0.$$

Прямая $y=-x$ – наклонная асимптота графика функции при $x\to+\infty$. Горизонтальных асимптот график функции не имеет.

По результатам исследования построим график. Так как функция нечетная, то можно построить график для $x>0$ и отобразить его симметрично относительно начала координат.



2.3. Индивидуальное задание №2

Вариант №1

a. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = \ln\frac{x^2}{y^8}$, b) $z = \frac{1}{arctg\frac{x}{y}}$.

2. Найти полный дифференциал функции $z = y \cdot x^y$.

3. Найти частные производные второго порядка:

. а) $z = 4y + \frac{4y}{x^2} + \frac{3\sqrt{x}}{y}$, b) $z = x^3 - 4x^2 y + 5y^2$

4.Исследовать функцию на экстремум:

$z = x^2 + xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

5. Вычислить:

1.$\int\left(2x^3 - 3 + \frac{4}{x} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 5\sqrt{x}\right)dx$, 2) $\int x^2\sqrt{x^3 - 4}dx$, 3) $\int x^2 \sin(6x)dx$,

4)$\int \sin(2x+3)dx$ 5) $\int_{-1}^{0}\left(x^2 + 4x + 3\right)\cos x dx$, 6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2 - 5x + 6\right)dx$

7.Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx$ (или установить его расходимость).

4 Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями

$y = x^3 - 3x$ и $y = 4x + 6.$

9. Найти общий интеграл уравнения

а) $yy/ + x = 1,$

b) $\left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy = 0.$

10.Найти решение задачи Коши:

а) $y/ - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 0,$

b) $y^2 dx + \left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0, y(2) = 2,$

c) $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2, y(0) = 1.$

Вариант №2

1. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = \frac{3x+y}{2x-y}$, b) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{3\sqrt{x}}$.

2. Найти полный дифференциал функции $z = arctg\,(xy)$.

3. Найти частные производные второго порядка:

а) $z = 2yx + \frac{4x^2}{y^2} + 3y\sqrt{x}$, b) $z = \frac{x^2}{1-2y}$

4.Исследовать функцию на экстремум:

$z = x^3 + y^3 - 3xy.$

5. Вычислить:

а) $\int (8x^2 + 16x + 17)\cos(4x)dx$, б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}.$

: а) $\int_{-2}^{0} (x^2 + 2)e^{\frac{x}{2}}dx$ б) $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x^2}}.$

2. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$ (или установить его расходимость).

Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^3$.

Задача 2 Найти общий интеграл уравнения:

а) $x(y+1)dx - (x^2+1)ydy = 0,$

b) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$

Задача 3. Найти решение задачи Коши:

а) $y' - \frac{y}{x} = x^2 arctgx, y(1) = 0,$

b) $(y^4 e^y + 2x)y' = y, y(0) = 1,$

c) $yy' + y = xy^2, y(1) = 2.$

Вариант №3

1. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = \sin(4x^3 + 4y^2)$, б) $z = arctg\frac{x}{y}$,

2. Найти полный дифференциал функции

$z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$

3. Найти частные производные второго порядка:

а) $z = 4y^2 + x^2 + 2xy + 4x + 7y + 2$, б) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$

4.Исследовать функцию на экстремум:

$$z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8.$$

5. Вычислить:

1) $\int \left(5x - 1 + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx$**,**

2) $\int x^3 e^{x^4} dx$**,**

3) $\int (4 - 3x) e^{-3x} dx$

: а) $\int_0^{2\pi} (3x^2 + 5)\cos(2x)dx$, б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$.

2. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx$ (или установить его расходимость)

Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = x^2 - 1$ и $y == x - 1$.

Задача 2 Найти общий интеграл уравнения:

1. $ye^{2x}dx - (1 + e^{2x})dy = 0,$
2. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dy, x \geq 0.$

Задача 3. Найти решение задачи Коши:

1. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, y(0) = 0,$
2. $y^2 dx + (xy - 1)dy = 0, y(1) = e,$
3. $2(xy' + y) = xy^2, y(1) = 2.$

Вариант №4

1. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = tg\left(\frac{x^2}{y^5}\right)$, **b)** $z = \frac{2x - y}{2x + y}$,

3. Найти полный дифференциал функции

$$z = \exp(x^2 + y^2)$$

2. Найти частные производные второго порядка:

. а) $z = 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 3x + 3y + 5$, b) $z = arctg\frac{y}{x}$

4.Исследовать функцию на экстремум:

$$z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2).$$

5. Вычислить:

1) $\int \left(\frac{x^3}{2} + 4 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 4\sqrt[3]{x} \right) dx$, 2) $\int x^2 (5x^3 + 34)^6 dx$, 3) $\int (5x-2) e^{3x} dx$,

4) $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx$, 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx.$

2. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$ (или установить его расходимость)

3. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = 2x^2 + 12$ и $y = 18$.

Задача 2. Найти общий интеграл уравнения:

1. $\sin y \sin x dy = \cos y \cos x dx,$
2. $(x^2 + y^2) dx + xy dy = 0.$

Задача 3. Найти решение задачи Коши:

1. $y' + ytgx = (\cos x)^2, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2},$
2. $(4y^2 + 4y - x) y' = 1, y(0) = 0,$
3. $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1) e^{-4x} y^2, y(0) = 1.$

Вариант №5

1. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

. а) $z = \frac{x+y-1}{x-y}$, б) $z = x^3 + 3x^2 y - y^3$,

2. Найти полный дифференциал функции

$$z = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right),$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$z = 3yx^2 + \frac{4x}{y} + 3y^2\sqrt{x}$, б) $z = \frac{xy}{x-y}.$

4. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = 2xy - 4x - 2y .$$

5. Вычислить:

$\int\left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$, 2) $\int x^4\left(x^5+3\right)^8 dx$, 3) $\int(4-3x)e^{-3x}dx$

а) $\int\limits_0^1 \frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx,$ б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}dx$

Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ (или установить его расходимость)

3. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y=x^2-3x-5$ и $y=-x^2+x-5$.

Задача 2 Найти общий интеграл уравнения:

1. $x^2y'+y^2=0,$
2. $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y.$

Задача 3. Найти решение задачи Коши:

1. $y'-\frac{y}{x+2}=x^2+2, y(-1)=\frac{3}{2},$
2. $\left(\cos 2y(\cos y)^2-x\right)y'=\sin y\cos y, y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{4},$
3. $xy'-y=-y^2(\ln x+2)\ln x, y(1)=1.$

Вариант №6

1. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z=\ln(4x+4y),$ b) $z=\frac{2xy}{x-y},$

2. Найти полный дифференциал функции $z=x^2+xy^2+\sin y,$

3. Найти частные производные второго порядка

. а) $z=5x^2-2y^2-4xy+x+2y+12,$ б) $z=arctg\frac{x+y}{1-xy},$

4.Исследовать функцию на экстремум:

. $z = e^x(x + y^2)$

5. Вычислить:

$$\int\left(6x-\frac{1}{3}+\frac{3}{2x}+6\sqrt[3]{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx, \qquad \int x\left(5-3x^2\right)^4 dx, \qquad \int (1-6x)e^{2x}dx,$$

: а) $\int_0^{\pi}\left(1-5x^2\right)\sin x dx$ б) $\int_{2\sqrt{2}}^{4} x\sqrt{x^2-7}dx$

2. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}dx$ (или установить его расходимость)

Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = 9 - x^2, y = x^2 - 2x + 5.$

Задача 2 Найти общий интеграл уравнения:

1. $\left(1+x^2\right)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy,$
2. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0.$

Задача 3. Найти решение задачи Коши:

1. $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), y(0) = 1,$
2. $\left(x(\cos y)^2 - y^2\right)y' = y(\cos y)^2, y(\pi) = \frac{\pi}{4},$
3. $(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2, y(0) = 2.$

Вариант №7

1. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

. а) $z = \frac{3x+3y+3}{x-y}$, b) $z = \frac{2x-y}{x+2y}$,

1. Найти полный дифференциал функции

. $z = arctg\sqrt{x^y}$,

1. Найти частные производные второго порядка:

. а) $z = 2xy + \frac{4x^2}{y} + 3y\sqrt{x}$, b) $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$, .

4. Исследовать функцию на экстремум

$z = x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 8$

Вычислить:

$$\int\left(x^2 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3} - -\sqrt[3]{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx, \quad \int\frac{x^3}{x^8+5}dx, \quad \int e^{-2x}(4x-3)\,dx,$$

$$\text{а)} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2 - 5x + 6\right)\sin 3x\,dx, \quad \text{б)} \int_{-1}^{2}\frac{2x\,dx}{\left(2x^2+1\right)^2},$$

2. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^2 \frac{x^3}{x^2-4}dx$ (или установить

его расходимость)

1. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями
$y = -1.5x^2 - 9x - 7.5$ и $y = -x^2 - 6x - 5$..

Задача 2 Найти общий интеграл уравнения:

1. $e^y\left(1+x^2\right)dy - 2x\left(1+e^y\right)dx = 0,$

2. $\frac{x}{y}2^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = y'.$

Задача 3. Найти решение задачи Коши:

1. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$
2. $(x - 2xy)dx = y\,dy,\ y(0) = 0,$
3. $(xy' + y) = y^2 \ln x,\ y(1) = 3.$

Вариант №8

1. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = \frac{5x+3y+2}{3x-4y-2}$, б) $z = x^2 \sin^2 y.$

2. Найти полный дифференциал функции

$z = arctg\frac{x}{y} + arctg\frac{y}{x},$

Найти частные производные второго порядка

. а) $z = x^2 y + y^2 x - xy - x + 2y + 2,$ **б)** $z = \frac{x^2 y^2}{x + y},$

Исследовать функцию на экстремум

$z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$

5. Вычислить:

$\int \left(4x^3 + 1 - \frac{3}{x^2} + 4\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx,$ **.** $\int \frac{\cos(\ln x) dx}{x},$ $\int (1 - 6x) e^{2x} dx,$

а) $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx,$ б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x}{(1 - x^2)^3} dx$

Вычислить несобственный интеграл $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x}$. (или установить его

Расходимость

3. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями y= $\sqrt{x - 1}, y = 3 - x, y = 0.$

Задача 2 Найти общий интеграл уравнения:

1. $3e^x tgy dx + (1 - e^x) \cos^{-2} y dy = 0,$
2. $y^2 - 4xy + 4x^2 y' = 0.$

Задача 3. Найти решение задачи Коши:

1. $y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi},$
2. $(104y^3 - x)y' = 4y, y(8) = 1,$
3. $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x (1 + \sin x), y(0) = 1.$

Вариант №9

1. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = e^{2x + y^2}$, **б)** $z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$

2. Найти полный дифференциал функции

$z = \arcsin \frac{x}{y},$

2. Найти частные производные второго порядка

. а) $z = 2yx^2 + \frac{4x}{y} + \frac{\sqrt{x}}{y}$, б) $z = y^{\ln x}$

Исследовать функцию на экстремум

$z = x^2 + y^2 - 2x - 2v + 8$

5. Вычислить:

$\int \left(4x^3 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x}\right)dx,$. $\int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1}dx,$. $\int (1 - 6x)e^{2x}dx,$

: а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{arctgx}{1 + x^2}dx$ б) $\int_{-3}^{1} e^{-x}dx.$

2. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$ (или установить его Расходимость)

3. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 1$ и $y = 6x + 2.$

Задача 2 Найти общий интеграл уравнения:

1. $(y^4 + 1)xdx - y(1 + x^2)dy = 0,$
2. $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$

Задача 3. Найти решение задачи Коши:

1. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1,$
2. $dx + (xy - y^3)dy = 0, y(-1) = 0,$
3. $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3), y(0) = -1.$

Вариант №10

1. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = \frac{5x + 3y + 2}{3x - 4y - 2}$, б) $z = x^2 \sin^2 y.$

2. Найти полный дифференциал функции

$z = \ln tg\frac{y}{x},$

2. Найти частные производные второго порядка

. а) $z = 6x^2 + y^2 - 3xy - 2x + y,$ б) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right),$

Исследовать функцию на экстремум

$$z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$$

5. Вычислить:

• $\int\left(\frac{x^3}{3} - 2 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 7\sqrt[3]{x}\right)dx$, • $\int x\sqrt[5]{5 - x^2}\,dx$, $\int(2 - 4x)\sin(2x)dx$,

: а) $\int\limits_0^{\sin 1}\frac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}dx$, б) $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{(1 - 2x)^3}dx$

2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2 + 4}$ (или установить его Расходимость)
3. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = 9 - x^2$ и $3x - y = 1$.

Задача 2 Найти общий интеграл уравнения:

1. $\ln(\cos y)dx + xtgydy = 0$,
2. $x\sin\frac{y}{x}y' + x = y\sin\frac{y}{x}$.

Задача 3. Найти решение задачи Коши:

1. $y' + \frac{2x}{1 + x^2}y = \frac{2x^2}{1 + x^2}, y(0) = \frac{2}{3}$,
2. $(3y\cos 2y - 2y^2\sin 2y - x)y' = y, y(16) = \pi$,
3. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = -1$.

4.1.1. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 2

1. Найти частными производными первого порядка от функции

а) $z = e^{x + y^3}$.

Решение.

Частные производные функции двух переменных определяются по тем же формулам и правилам, что и для функции одной переменной. Следует помнить только одно правило: если по одной из этих переменных дифференцируем, то остальные считаются постоянными.

$z'_x = \left(e^{x+y^3}\right)'_x = e^{y^3} \cdot \left(e^x\right)' = e^{y^3} e^x$, так как e^{y^3} – постоянная величина относительно переменной x ,

$z'_y = \left(e^{x+y^3}\right)'_y = e^x \cdot \left(e^{y^3}\right)' = e^x e^{y^3} \left(y^3\right) = e^x e^{y^3} 3y^2$, так как e^x – постоянная величина относительно переменной y .

б) $z = \ln\sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)$.

Решение.

Данная функция является сложной функцией, по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$z'_x = \left(\ln\sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)\right)'_x = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)} \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)} \cdot cos\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)'_x = \frac{cos\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{cos\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

$$z'_y = \left(\ln\sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)\right)'_y = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)} \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)} \cdot cos\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)'_y = \frac{cos\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)} \cdot \left(\frac{2}{y^2}\right) =$$

$$=\frac{cos\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{y}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{y}\right)}\cdot\left(\frac{2}{y^2}\right).$$

2. Найти полный дифференциал функции

$$z=\frac{1}{3}\ln^3\left(x^2+y^2\right).$$

Решение.

Воспользуемся формулой полного дифференциала

$$dz=z'_x\cdot dx+z'_y\cdot dy.$$

Найдем частные производные функции по x и по y:

$$z'_x=\left(\frac{1}{3}\ln^3\left(x^2+y^2\right)\right)'_x=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\ln^2\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)'_x=$$

$$=\ln^2\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)}\left(x^2+y^2\right)'_x=\ln^2\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)},$$

$$z'_y=\left(\frac{1}{3}\ln^3\left(x^2+y^2\right)\right)'_y=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\ln^2\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)'_y=$$

$$=\ln^2\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)}\left(x^2+y^2\right)'_y=\ln^2\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)}.$$

Тогда

$$dz=\ln^2\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)}\cdot dx+\ln^2\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)}\cdot dy=$$

$$=\frac{2\ln^2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)}\cdot\left(x\cdot dx+y\cdot dy\right).$$

3. Найти частные производные второго порядка функции

а) $z=\left(4x^2+3y^2+6xy-x+y+7\right).$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=8x+6y-1,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=8,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=6y+8x+1,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6.$$

б) $z=\sin^2(xy)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\sin(xy)\cdot\cos(xy)\cdot y = y\sin(2xy),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\sin(xy)\cdot\cos(xy)\cdot x = x\cdot\sin(2xy),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\cdot\cos(2xy)\cdot 2y = 2y^2\cdot\cos(2xy),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y\cdot\cos(2xy)\cdot 2x = 2x^2\cdot\cos(2xy),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(y\right)_y{}'\cdot\sin(2xy) + y\left(\sin(2xy)\right)_y{}' =$$
$$= \sin(2xy) + y\cdot\cos\left(2xy\right)\cdot 2x = \sin(2xy) + 2xy\cdot\cos\left(2xy\right).$$

4. Исследовать на экстремум функцию
$z = x^2 + y^2 + xy + x - y + 1.$

Решение.

В соответствии с необходимым условием экстремума найдем критические точки из системы

$$\begin{cases} z_x{}' = 0, \\ z_y{}' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z_x{}' = 2x + y + 1, \\ z_y{}' = x + 2y - 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ x + 2\left(-2x - 1\right) - 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Критическая точка – $P(-1;1)$.

В соответствии с достаточным условием экстремума, проверим выполнение условие $\Delta = AB - C^2$, $A = z''_{xx}(P)$, $B = z''_{yy}(P)$, $C = z''_{xy}(P)$.

$$A = z''_{xx}(P) = 2, \quad B = z''_{yy}(P) = 2, \quad C = z''_{xy}(P) = 1,$$

$$\Delta = AB - C^2 = 2\cdot 2 - 1 = 3 > 0.$$

Следовательно, точка $P(-1;1)$ является точкой экстремума.

Так как $A = z''_{xx}(P) = 2 > 0,$ то это точка минимума.

5. Вычислить:

а) $\displaystyle\int\left(\frac{x^3}{3} - 2 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 7\sqrt[3]{x}\right)dx$

Решение.

$$\int\left(\frac{x^3}{3}-2+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}+7\sqrt[3]{x}\right)dx=\int\frac{x^3}{3}dx-\int 2dx+\int\frac{3}{x^2}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int 7\sqrt[3]{x}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4}-2x+3\left(-\frac{1}{x}\right)-2\sqrt{x}+7\int x^{1/3}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4}-2x+3\left(-\frac{1}{x}\right)-2\sqrt{x}+7\left(\frac{x^{1/3+1}}{4/3}\right)+C=$$

$$=\frac{x^4}{12}-2x-\frac{3}{x}-2\sqrt{x}+\frac{21}{4}\cdot x^{4/3}+C.$$

b) $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$

Решение.

$$\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}t=5-x^2\\ dt=-2xdx\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int\sqrt[5]{5-x^2}\,(-2x)dx=-\frac{1}{2}\int t^{1/5}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{t^{1/5+1}}{6/5}+C=-\frac{5}{12}t^{6/5}+C=\frac{5}{12}\left(5-x^2\right)^{6/5}+C.\ \int(2-4x)\sin(2x)dx,$$

c) $\int(2-4x)\sin 2xdx$

Решение.

Для нахождения интеграла воспользуемся интегрированием по частям.

$$\int u\cdot dv=uv-\int vdu$$

$$\int(2-4x)\sin 2xdx=\left|\begin{array}{ll}u=(2-4x), & du=-4dx,\\ \sin 2xdx=dv, & v=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{array}\right|=$$

.

$$(2-4x)\cdot\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)-\int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)(-4)dx=(1-2x)\cdot(-\cos 2x)-\sin 2x+C.$$

d) $$\int\limits_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x, \quad dt = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \\ x = 0,\ t = \arcsin 0 = 0, \\ x = \sin 1,\ t = \arcsin(\sin 1) = 1 \end{array} \right| =$$

$$\int\limits_0^1 \left(t^2 + 1\right) dt = \left. \frac{t^3}{3} + t \right|_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

e) $$\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^3}$$

$$\int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{(1-2x)^3} dx = \left| \begin{array}{l} t = (1-2x), \quad dt = -2 \cdot dx \\ x = -2,\ t = (1 - 2 \cdot (-2)) = 5, \\ x = 0,\ t = (1 - 2 \cdot 0) = 1 \end{array} \right| = \frac{-1}{2} \int\limits_{-2}^{0} \frac{-2dx}{(1-2x)^3} =$$

$$= \frac{-1}{2} \int\limits_5^1 \frac{dt}{t^3} = \frac{-1}{2} \int\limits_5^1 t^{-3} dt = \frac{-1}{2} \cdot \left. \frac{t^{-3+1}}{-2} \right|_5^1 = \left. \frac{1}{4t^2} \right|_5^1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{5^2} \right) = \frac{6}{25}.$$

f) Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 4}$ (или установить его расходимость).

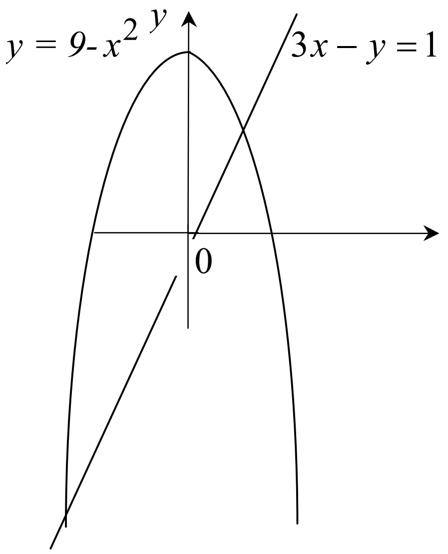
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b \to \infty} \left(\lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x^2+4} \right) = \lim_{b \to \infty} \left(\lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left. \frac{x}{2} \right|_a^b \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} \left(\lim_{a \to -\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{2} - \operatorname{arctg} \frac{a}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{b \to \infty} \operatorname{arctg} \frac{b}{2} - \lim_{a \to -\infty} \operatorname{arctg} \frac{a}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится.

g) Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = 9 - x^2$ и $3x - y = 1$.

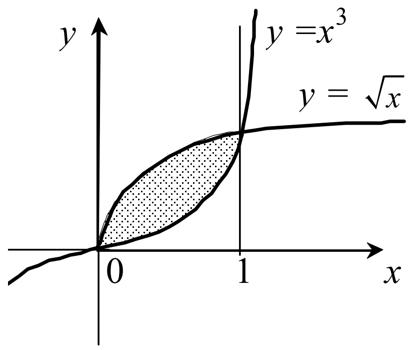


Находим точки пересечения кривых: $y=9-x^2$, $3x-y=1$.

$$\begin{cases}3x-y=1\\ y=9-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-1\\ y=9-x^2\end{cases}\Leftrightarrow 3x-1=9-x^2,\ \begin{cases}x=-5\\ y=34\end{cases},\ \begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}.$$

Следовательно

$$S=\int_{-3}^{2}\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$



Вычислить площадь S фигуры, ограниченной кривыми $y=\sqrt{x}$ и $y=x^3$

Находим точки пересечения кривых: $\sqrt{x}=x^3$, $x=x^6$ и, значит, $x_1=0$, $x_2=1$.

Следовательно

$$S=\int_{0}^{1}\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

6. Найти общий интеграл уравнения:

1. $\left(1+e^x\right)yy'=e^x$.

Решение.

Запишем производную y' через

отношение дифференциалов $y' = \dfrac{dy}{dx}$, тогда уравнение примет вид

$$\left(1+e^x\right)y\frac{dy}{dx} = e^x.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$\left(1+e^x\right)ydy = e^x dx.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим уравнение на $\left(1+e^x\right)$

$$ydy = \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)}dx.$$

Проинтегрируем уравнение

$$\int ydy = \int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)}dx, \frac{y^2}{2} = \int \frac{d\left(e^x+1\right)}{1+e^x}, \frac{y^2}{2} = \ln\left(1+e^x\right) + c_1.$$

Для удобства представим c_1 в логарифмической форме, положив $c_1 = \ln c$.

$$\frac{y^2}{2} = \ln\left(1+e^x\right) + \ln c, \frac{y^2}{2} = \ln c\left(1+e^x\right), y^2 = 2\ln c\left(1+e^x\right).$$

Ответ: $y^2 = 2\ln c\left(1+e^x\right).$

2. $y' = \dfrac{2y^2 - x^2}{xy}.$

Решение.

Преобразуем уравнение к виду:

$$y' = \frac{2y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy}, y' = 2\frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

Это однородное уравнение первого порядка.

Положим $\dfrac{y}{x} = t, y = xt, y' = t + xt'$, тогда получим:

$$t + xt' = 2t - \frac{1}{t}, xt' = t - \frac{1}{t}, x\frac{dt}{dx} = \frac{t^2-1}{t}, \frac{tdt}{t^2-1} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{tdt}{t^2-1} = \int \frac{dx}{x}, \frac{1}{2}\ln\left(t^2-1\right) = \ln x + \ln c, \ln\sqrt{t^2-1} = \ln cx,$$

$$\sqrt{t^2-1} = cx, t^2 - 1 = (cx)^2.$$

Заменим t на $\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{y^2}{x^2} - 1 = (cx)^2$ или $y^2 = x^2 + cx^4.$

Ответ: $y^2 = x^2 + cx^4.$

7. Решить задачу Коши.

а) $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}, y(1) = 1.$

Решение.

Данное уравнение является линейным относительно y. Решим его методом подстановки.

Положим $y = uv, y' = u'v + uv'$ и приведем уравнение к виду

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -2\frac{\ln x}{x}, \left(u'v - \frac{uv}{x}\right) + uv' = -2\frac{\ln x}{x}, v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + uv' = -2\frac{\ln x}{x}.$$

Выберем функцию $u(x)$ так, чтобы скобка $\left(u' - \frac{u}{x}\right)$ обратилась в ноль, т.е.

$$\begin{cases} u' - \frac{u}{x} = 0, \\ uv' = -2\frac{\ln x}{x.} \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы. Это уравнение разделяющимися переменными

$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$, отсюда будем иметь $\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя это уравнение получим $\ln u = \ln x, u = x.$

Подставим найденное u во второе уравнение системы:

$$xv' = -2\frac{\ln x}{x}, v' = -2\frac{\ln x}{x^2}, \frac{dv}{dx} = -2\frac{\ln x}{x^2}, dv = -2\frac{\ln x}{x^2}dx, \int dv = \int\left(-2\frac{\ln x}{x^2}\right)dx,$$

Интеграл в правой части уравнении возьмем по частям.

$$\int\left(-2\frac{\ln x}{x^2}\right)dx = -2\int\frac{\ln x}{x^2}dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x, du = \frac{1}{x}dx, \\ \frac{1}{x^2}dx = dv, v = \frac{-1}{x} \end{matrix}\right| = -2\left(\frac{-1}{x}\ln x + \int\frac{1}{x}\frac{1}{x}dx\right) = -2\left(\frac{-1}{x}\ln x + \int\frac{1}{x^2}x\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}\right) + c.$$

Тогда $v = 2\left(\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}\right) + c$, перемножая найденные функции $u(x)$ и $v(x,c)$, +4получим общее решение уравнения:

$$y = u(x)v(x) = 2x\left(\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}\right) + 2cx = 2\ln x + 2 + 2cx, \ y = 2\ln x + 2 + cx.$$

Полагая в общем решении $x = 1$ и $y = 1$, будем иметь

$1 = 2\ln 1 + 2 + c, c = 1 - 2, c = -1.$

Подставляя в общее решение найденное значение c, получим частное решение

$y = 2\ln x - x + 2.$

Ответ: $y = 2\ln x + 2 + cx$ - общее решение;

$y = 2\ln x - x + 2$ - частное решение.

b) $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2, y(0) = 1.$

Решение.

Это уравнение Бернулли. Решим его методом подстановки. Будем искать общее решение уравнения в виде

$$y = u(x)v(x);$$

имеем $y' = u'v + uv'$. Подставим выражения для y и y' в уравнение, будем иметь

$$4u'v + 4uv' + x^3uv = \left(x^3 + 8\right)e^{-2x}(uv)^2, v\left(4u' + x^3u\right) + 4uv' = \left(x^3 + 8\right)e^{-2x}(uv)^2,$$

$$\begin{cases} 4u' + x^3u = 0, \\ 4uv' = \left(x^3 + 8\right)e^{-2x}(uv)^{2.} \end{cases}$$

Находим функцию $u(x)$ из уравнения

Находим функцию $u(x)$ из уравнения

$$4u' + x^3u = 0, 4u' = -x^3u, 4\frac{du}{dx} = -x^3u, 4\frac{du}{u} = -x_3dx, 4\ln u = -\frac{x^4}{4}, \ln u = -\frac{x^4}{16}, u = e^{-\frac{x^4}{16}}.$$

Найденное выражение функции $u(x)$ подставим во второе уравнение системы

$$4e^{-\frac{x^4}{16}}v' = \left(x^3 + 8\right)e^{-2x}\left(e^{-\frac{x^4}{16}}v\right)^2, \quad 4v' = \left(x^3 + 8\right)e^{-\frac{x^4}{16} - 2x}v^2,$$

$$\frac{4dv}{v^2} = \frac{1}{4}\left(x^3 + 8\right)e^{-\left(\frac{x^4}{16} + 2x\right)}dx, \quad \frac{dv}{v^2} = \left(\frac{x^3}{4} + 2\right)e^{-\left(\frac{x^4}{16} + 2x\right)}dx,$$

$$-\frac{1}{v} = -e^{-\left(\frac{x^4}{16} + 2x\right)} + c, \quad v = \frac{1}{e^{-\left(\frac{x^4}{16} + 2x\right) + c}}, \quad y = u(x)v(x) = \frac{e^{-\frac{x^4}{16}}}{e^{-\left(\frac{x^4}{16} + 2x\right) + c}}.$$

Полагая в общем решении $x = 0$ и $y = 1$ получим частное решение

$$1 = \frac{1}{1 + c}, \quad 1 + c = 1, \quad c = 0,$$

$$y = \frac{\left(e^{-\frac{x^4}{16}}\right)}{e^{-\left(\frac{x^4}{16} + 2x\right)}} = e^{\left(-\frac{x^4}{16} + \frac{x4}{16} + 2x\right)} = e^{2x}.$$

Ответ: $y = \dfrac{e^{-\frac{x^4}{16}}}{e^{-\left(\frac{x^4}{16} + 2x\right) + c}}$ - общее решение;

$y = e^{2x}$ - частное решение.

5. ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

5.1. Требования для сдачи экзамена

5.2. Вопросы для подготовки к экзамену

5.2. Вопросы для подготовки к экзамену

1.Матрицы: определение, основные виды матриц. Привести пример.
2.Линейные операции над матрицами, их свойства. Привести пример.
3.Определтели второго и третьего порядков, их вычисление. Привести Пример.
4. Свойства определителей. Одно доказать.
5. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Привести пример.
6. Обратная матрица. Решение матричных уравнений.Пример.
7. Минор матрицы. Ранг матрицы и его вычисление. Элементарные преобразования над матрицей. Привести пример на вычисление ранга.
8. Системы линейных алгебраических уравнений: основные понятия и определения.
9. Решение систем алгебраических уравнений методом Крамера.
10. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом.
11. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Теорема Кронекера- Капели
12. Векторы: определение, линейные операции над векторами.
13. Линейная зависимость и независимость векторов .Определение базиса.
14. Базис. Разложение вектора по базису..
15. Скалярное произведение векторов и его свойства. Привести примеры применения скалярного произведения.
18. Прямая на плоскости: общее уравнение. Нормальный вектор прямой.
19. Вывести уравнение прямой в отрезках на осях**.**
20. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
21.Уравнение прямой, проходящей через две точки на плоскости.
22. Функция: определение, способы задания.
23. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах.
24. Первый и второй замечательные пределы.
25.. Бесконечно большие и бесконечно малые функции и их свойства..
26.Приращение аргумента и функции в точке.

27. Непрерывность функции в точке. Односторонние пределы.
28. Классификация точек разрыва функции.
30. Производная функции в точке: определение. Правила дифференцирования.
31. Дифференциал функции и его геометрический смысл.
32. Возрастание и убывание функции на интервале.
33. Экстремум функции. Необходимое и достаточные условия существования экстремума.
34. Точки перегиба. Необходимое и достаточные условия существования точки перегиба.. Интервалы выпуклости и вогнутости.
35. Асимптоты графика функции: определение, виды асимптот.
36. Наибольшее и наименьшее значения функции.
37. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к кривой.
38. Основные свойства непрерывных функций.
39.Определение функции нескольких переменных. Область определения, способы задания. Привести примеры.
40.Частные производные , определение, обозначение. Привести пример.
41. Полный дифференциал функции двух переменных, определение и формула.
42. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных второго порядка.
43.Экстремум функции двух переменных.
44. Неопределенный интеграл, определение..
45.Таблица неопределенных интегралов.
46. Непосредственное интегрирование и замена переменной интегрирования.
47. Интегрирование по частям, привести пример.
48. Разложение рациональных дробей на сумму простейших дробей.
49. Метод неопределенных коэффициентов в разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.
50. Интегрирование квадратного трехчлена.
51.Свойства неопределенного интеграла.
52. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.
53. Задача о площади криволинейной трапеции.
54. Определение определенного интеграла.
55. Основные свойства определенного интеграла.
56. Определенный интеграл с переменным верхним пределом.
57. Замена переменной в определенном интеграле
58. Интегрирование по частям определенного интеграла.
59. Вычисление площади плоской фигуры.
60.Несобственный интеграл первого рода.
61. Несобственный интеграл второго рода.
62. Дифференциальные уравнения: общее решение и частное решение. Теорема о единственности частного решения.

63. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
64. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка, метод их решения.
65. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка: метод вариации произвольной постоянной.
66. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка: метод подстановки.
67. Уравнения Бернулли, метод их решения.

5.3. Образцы билетов к экзамену для КЗФ

Экзаменационный билет № _0_

1. Частные производные, определение, обозначение. Привести пример.

2. Вырожденная и невырожденная матрица. Обратная матрица.
3. Исследовать на непрерывность функцию.

$$y = \frac{2x+1}{x-2}.$$

4. Найти косинус угла между векторами $\overline{a} = i + j + 3k$ и $\overline{b} = 2i + j - 2k$.
5. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3 + \sin^2 x} dx$.

5.4. Образцы билетов к экзамену для ДОТ

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Литература обязательная

1. П.Е.Данко. - Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: -Москва: Изд-во «ОНИКС 21 век», 2002.-с.304.
2. П.Е.Данко. - Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2: -Москва: Изд-во «ОНИКС 21 век», 203.-с.416.

6.2. Литература дополнительная

6.3. Учебно-методические пособия

1. Терехина Л.И. Высшая математика. Ч.1: учебное пособие / Л.И. Терехина, И.И. Фикс.– Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – с.224.
2. Терехина Л.И. Высшая математика. Ч.2: учебное пособие / Л.И. Терехина, И.И. Фикс.– Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – с. 192.
3. Терехина Л.И. Высшая математика. Ч.3: учебное пособие / Л.И. Терехина, И.И. Фикс.– Томск: Изд-во ТПУ, 2008.– с.256.
4. Терехина Л.И. Высшая математика. Ч.4: учебное пособие / Л.И. Терехина, И.И. Фикс.– Томск: Изд-во ТПУ, 2008.– с.256.

7.4. Internet-ресурсы

1. Сайт ТПУ.– Режим доступа: http://www.tpu.ru, вход свободный.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 1

Методические указания и индивидуальные задания

Составители

КОНДАКОВА ЭЛЬВИРА МИХАЙЛОВНА
МАТВЕЕНКО ГАЛИНА МИХАЙЛОВНА

Рецензент
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры ВМ ФТИ

Э.Н. Подскребко

Редактор
Компьютерная верстка *Т.И. Тарасенко*

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать Xerox. Усл.печ.л. 1,16. Уч.-изд.л. 1,05.
Заказ . Тираж экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru