МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИДО
_______________ С.И. Качин

«____»_____________2011 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 1

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов ИДО, обучающихся по направлениям
080100 «Экономика»,
080200 «Менеджмент»,
080400 «Управление персоналом»,
100700 «Торговое дело»

Составители
А.Н. Харлова, Е.А. Молдованова

Семестр	**1**
Кредиты	6
Лекции, часов	8
Практические занятия, часов	8
Индивидуальные задания	№ 1, № 2
Самостоятельная работа, часов	162
Формы контроля	экзамен

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 517

Математический анализ 1: метод. указ. и индивид. задания для студентов ИДО, обучающихся по напр. 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент», 080400 «Управление персоналом», 100700 «Торговое дело» / сост. А.Н. Харлова, Е.А. Молдованова; Томский политехнический университет.– Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011.– 81 с.

Методические указания и индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики ФТИ «____» ________ 2011 года, протокол № ___.

Зав. кафедрой ВМ,
профессор, доктор физ.-мат. наук _________________К.П. Арефьев

Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Математический анализ 1» предназначены для студентов ИДО, обучающихся по направлениям 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент», 080400 «Управление персоналом», 100700 «Торговое дело». Данная дисциплина изучается в одном семестре.

Приводится содержание основных тем дисциплины, темы практических занятий, варианты заданий для индивидуальных домашних заданий и список рекомендуемой литературы. Даны основные требования и методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий.

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Математический анализ 1»изучается в первом семестре первого курса студентами ИДО, обучающимися по направлениям 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент», 080400 «Управление персоналом», 100700 «Торговое дело».

Задачами дисциплины являются:

- развитие математической интуиции;
- воспитание математической культуры;
- формирование навыков, необходимых для использования знаний при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности;
- овладение студентами необходимым математическим аппаратом, дающим возможность анализировать, моделировать и решать экономические задачи;
- воспитание у студентов отношения к математике как к инструменту исследования и решения экономических задач, необходимому в их дальнейшей работе.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать основные понятия дифференциального и интегрального исчислений (предел, производная, дифференциал, неопределенный и определенный интегралы и их применение к решению прикладных задач);

уметь применять изученные методы для решения экономических задач, устанавливать границы применимости методов, уметь анализировать найденные решения;

владеть навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач, методиками для построения, анализа и применения математических моделей оценки состояния, прогноза и развития различных экономических процессов;

иметь опыт применения математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов исследования, аналитического и численного решения задач.

Дисциплина «Математический анализ 1» является базовой дисциплиной естественно-научного цикла (Б2).

Для её успешного усвоения необходимы математические знания и умения на уровне среднего образования, а именно, необходимо свободно оперировать с простыми дробями, целыми и дробными степенями, с формулами сокращенного умножения, строить графики основных элементарных функций, находить области определения элементарных функций, оперировать с логарифмами.

Пререквизитов данная дисциплина не имеет, поскольку является первой обязательной дисциплиной образовательной программы.

Кореквизитами являются «Информатика» (Б2, В2), «Концепция современного естествознания» (Б2, В1), «Экология» (Б2, В3).

2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Основные понятия математического анализа

Понятие множества. Операции над множествами и их свойства. Понятие вещественного числа. Числовые множества. Понятие комплексного числа. Понятие функции. Способы задания функции. Основные характеристики поведения функции. Понятия сложной, неявной, обратной функций. Основные элементарные функции и их свойства. Классификация функций.

Рекомендуемая литература: [2, глава 1, глава 7 §1-5], [6, глава 1 §1-4].

Методические указания

Изучение данной темы позволит повторить и систематизировать школьный курс алгебры. Кроме того, содержание темы является основополагающим для успешного изучения последующих тем. Следует обратить особое внимание на свойства и графики основных элементарных функций. Выучите классификацию функций. Разберите примеры на установление области определения функции.

При изучении числовых множеств появляется новое понятие – понятие комплексного числа. Наибольшие трудности вызывают различные формы записи комплексного числа. Чтобы не сделать ошибку при определении аргумента комплексного числа, изображайте число в виде точки на комплексной плоскости.

Ниже сформулированы теоретические вопросы, которые помогут подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. Приступать к решению задач можно только в том случае, если ответы на вопросы не вызвали затруднений. В противном случае необходимо снова обратиться к рекомендованной литературе.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры конечных множеств и бесконечных.
2. Какими способами может быть задано множество?
3. Какое множество называется пустым?
4. Как найти пересечение и объединение двух множеств?
5. Перечислите числовые множества.

6. Что такое числовой промежуток?
7. Какие промежутки различают?
8. Какими способами можно задать функцию?
9. Что называется областью определения функции?
10. Что называется множеством значений функции?
11. Что такое сложная функция? Приведите примеры.
12. Как найти естественную область определения сложной функции?
13. Приведите примеры неявного задания функции.
14. Что называется графиком функции?
15. Какие функции называются основными элементарными?
16. Какие функции называются элементарными?
17. Какая функция называется чётной, нечётной?
18. Приведите примеры чётных функций, нечётных функций?
19. Как по графику функции определить, является ли она чётной или нечётной?
20. Какие особенности имеет график периодической функции?
21. Какая функция называется возрастающей на множестве?
22. Какая функция называется убывающей на множестве?
23. Какая функция называется монотонной?
24. Приведите примеры периодических функций и укажите для каждой её период.
25. Какая функция называется ограниченной?
26. Приведите пример ограниченной и неограниченной функции.
27. Что такое комплексное число?
28. Что называется модулем комплексного числа?
29. Что называется аргументом комплексного числа?
30. Какие формы записи комплексного числа различают?

Тема 2. Предел и непрерывность функции одной переменной

Понятие предела функции. Основные теоремы о пределах. Число *e*. Понятие бесконечно малой величины и бесконечно большой величины. Их взаимосвязь. Понятие односторонних пределов. Непрерывность функции в точке, на множестве. Вычисление пределов функций. Точки разрыва и их классификация. Основные свойства непрерывных функций.

Рекомендуемая литература: [1, глава 1], [2, глава 2], [6, глава 1 §5-10].

Методические указания

Понятие предела является основным понятием математического анализа. Эта тема одна из наиболее важных и трудных в математическом анализе. Для успешного освоения этой темы необходимо выучить определения предела функции и определение непрерывности функции в точке. Обратите внимание на способы раскрытия неопределённостей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty-\infty)$. Чтобы освоить технику вычисления пределов и успешно выполнить индивидуальное домашнее задание №1, разберите примеры, решённые в задачниках [6], [7]. Кроме того, необходимо научиться выявлять точки разрыва функции и проводить их классификацию. Типы точек разрыва рекомендуется иллюстрировать графически.

Ниже сформулированы теоретические вопросы, которые помогут подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. Приступать к решению задач можно только в том случае, если ответы на вопросы не вызвали затруднений. В противном случае необходимо снова обратиться к рекомендованной литературе.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется окрестностью данной точки?
2. Сформулируйте определение предела функции при $x \to a$.
3. Сформулируйте определение предела функции при $x \to \infty$.
4. Какая функция называется непрерывной в данной точке?
5. Какая функция называется непрерывной на заданном отрезке?
6. Что такое односторонние пределы функции в точке?
7. Всегда ли совпадают односторонние пределы функции в данной точке?
8. Следует ли из существования предела функции в данной точке существование односторонних пределов в этой точке?
9. Следует ли из существования односторонних пределов функции в данной точке существование предела в этой точке?
10. Какая функция называется бесконечно малой?
11. Какая функция называется бесконечно большой?
12. Как связаны между собой бесконечно малые и бесконечно большие функции?
13. Что такое неопределённость при вычислении предела?
14. Перечислите виды неопределённостей, которые могут возникать при вычислении пределов.
15. При каких условиях предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций?
16. При каких условиях предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций?
17. При каких условиях предел частного двух функций равен частному пределов этих функций?

18.Является ли разность двух бесконечно малых функций бесконечно малой функцией?

19.Является ли разность двух бесконечно больших функций бесконечно большой функцией?

20.Является ли частное двух бесконечно малых функций бесконечно малой функцией?

21.Является ли частное двух бесконечно больших функций бесконечно большой функцией?

22.Является ли произведение двух бесконечно малых функций бесконечно малой функцией?

23.Является ли произведение двух бесконечно больших функций бесконечно большой функцией?

24.Какими свойствами обладают функции, непрерывные в точке?

25.Что называется точкой разрыва функции?

26.Какая точка разрыва функции называется точкой устранимого разрыва?

27.Какая точка разрыва функции называется точкой разрыва первого рода?

28.Какая точка разрыва функции называется точкой разрыва второго?

29.Каков алгоритм исследования функции на непрерывность?

30.Какими свойствами обладают функции, непрерывные на отрезке?

Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Понятие производной, ее физический и геометрический смысл. Уравнение касательная к кривой. Понятие дифференцируемой функции. Дифференциал. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций. Построение графиков функций.

Рекомендуемая литература: [1, глава 2], [2, главы 3-5], [6, главы 2-3].

Методические указания

При изучении этой темы необходимо выучить наизусть таблицу производных сложных функций и правила дифференцирования. Умение находить производные сложных функций необходимо для успешной сдачи экзамена и изучения последующих тем. Важной составляющей данной темы является применение понятия производной к исследованию функций и построению графиков. Поэтому необходимо выучить все основные теоремы дифференциального исчисления (необходимое и достаточные условия экстремума, достаточные условия монотонности функции, необходимое и достаточные условия перегиба графика функции). Кроме того, при построении графика функции не забывайте находить его асимптоты и исследовать поведение функции на бесконечности.

Чтобы освоить технику дифференцирования функции одной переменной, а также применение производных к исследованию функций, разберите задачи, решённые в задачниках [6] и [7].

Ниже сформулированы теоретические вопросы, которые помогут подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. Приступать к решению задач можно только в том случае, если ответы на вопросы не вызвали затруднений. В противном случае необходимо снова обратиться к рекомендованной литературе.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое производная функции?
2. Как найти производную функции?
3. Чему равна производная постоянной величины?
4. Чему равна производная суммы двух функций?
5. Чему равна производная произведения двух функций?
6. Чему равна производная частного двух функций?
7. Как найти угловой коэффициент касательной к графику функции?
8. Как найти производную сложной функции?
9. Сформулируйте признак постоянства функции.
10. Сформулируйте признак монотонности функции.
11. Сформулируйте необходимое условие экстремума.
12. Сформулируйте достаточное условие экстремума.
13. Совпадают ли необходимое и достаточное условия экстремума? В чём разница между ними?
14. Что такое критическая точка функции?
15. Каков алгоритм нахождения критических точек функции?
16. Каков алгоритм нахождения промежутков монотонности и точек экстремума?
17. Что такое экстремум функции?
18. Чем отличается наибольшее значение функции от её локального максимума?
19. Чем отличается наименьшее значение функции от её локального минимума?

20.Что такое дифференциал функции?

21.Как связаны между собой дифференциал и производная функции в данной точке?

22.В чём заключается свойство инвариантности формы первого дифференциала?

23.Как найти вторую (третью и т.д.) производную функции?

24.Сформулируйте правило Лопиталя?

25.Для раскрытия каких неопределённостей применяется правило Лопиталя?

26.Дайте определение выпуклости и вогнутости кривой на промежутке.

27.Какие точки называются точками перегиба?

28.Каков алгоритм нахождения точек перегиба графика функции?

29.Что называется асимптотой графика функции?

30.Какие асимптоты различают?

Тема 4. Интегральное исчисление функций одной переменной

Понятие первообразной. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: замена переменной, интегрирование по частям. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование простейших тригонометрических выражений. Понятие «неберущихся» интегралов. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла. Понятие определенного интеграла, его свойства и геометрический смысл. Интеграл с переменным верхним пределом и формула Ньютона − Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование «по частям». Численные методы вычислений определенных интегралов (метод прямоугольников, трапеций, парабол). Применение определённых интегралов к вычислению площадей плоских фигур. Несобственные интегралы.

Рекомендуемая литература: [1, глава 3], [2, главы 10-12], [6, главы 4-5].

Методические указания

При изучении этой темы необходимо выучить наизусть таблицу интегралов и основные формулы интегрирования. Внимательно разберите основные методы интегрирования: метод подведения под знак дифференциала, метод подстановки и метод интегрирования по частям. Особую трудность в изучении представляет метод подведения под знак дифференциала. Для успешного овладения этим методом вместе с таблицей интегралов используйте и таблицу производных. Тщательно разберите все решённые примеры в [6] и [7]. При изучении определённых интегралов обратите внимание на их связь с неопределёнными интегралами. Для вычисления определённых интегралов используйте формулу Ньютона – Лейбница, применяя при этом все изученные правила и методы нахождения первообразных. Решение задач о нахождении площади плоских фигур следует начинать с построения соответствующей области в декартовой системе координат.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое первообразная для функции?
2. Для каких функций существуют первообразные?
3. Как связаны между собой две первообразные для одной и той же функции?
4. Что такое неопределённый интеграл от функции?
5. Какими свойствами обладает неопределённый интеграл?
6. Назовите операцию обратную операции интегрирования.
7. Какие интегралы называются «неберущимися»? Приведите пример.
8. В чём состоит свойство инвариантности формул интегрирования?
9. В чём заключается сходство и различие между определённым и неопределённым интегралами?
10. Запишите формулу интегрирования по частям в неопределённом интеграле.
11. Запишите формулу интегрирования по частям в определённом интеграле.
12. Для нахождения каких интегралов используется формула интегрирования по частям?
13. Как изменится определённый интеграл, если пределы интегрирования поменять местами?
14. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.
15. Как сделать замену переменной в неопределённом интеграле?
16. Как сделать замену переменной в определённом интеграле?
17. Назовите основные методы интегрирования.
18. Чему равен определённый интеграл по симметричному интервалу от нечётной функции?
19. Чему равен определённый интеграл по симметричному интервалу от чётной функции?
20. Как с помощью определённого интеграла найти среднее значение функции на отрезке?
21. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью интеграла?

22.Какой геометрический смысл определённого интеграла?

23.Что такое несобственный интеграл?

24.Какой несобственный интеграл называется сходящимся?

25.Какой несобственный интеграл называется расходящимся?

26.Что такое определённый интеграл с переменным верхним пределом?

27.Как определить знак определённого интеграла, не вычисляя его?

28.В каком случае несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования имеет геометрический смысл?

29.Чему равна производная определённого интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу?

30.В чём заключается свойство аддитивности определённого интеграла?

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Тематика практических занятий

1. Вычисление пределов функций (2 часа).
2. Дифференцирование функции одной переменной (2 часа).
3. Неопределённый интеграл (2 часа).
4. Определённый интеграл (2 часа).

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

4.1. Общие методические указания

Основной формой обучения студента ИДО является самостоятельная работа над учебным материалом. Она состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, ответы на вопросы для самопроверки, выполнение домашних индивидуальных заданий (ИДЗ).

В соответствии с учебным графиком для студентов, обучающихся по направлениям 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент», 080400 «Управление персоналом», 100700 «Торговое дело», предусмотрено выполнение двух индивидуальных домашних заданий. Выполнение этих заданий необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач. Индивидуальное задание №1 соответствует темам 1-3 раздела 2 «Содержание теоретического раздела дисциплины». Индивидуальное задание №2 соответствует теме 4 раздела 2.

Студент выполняет вариант индивидуального домашнего задания, номер которого совпадает с двумя последними цифрами шифра его за-чётной книжки. Если две последние цифры превосходят число 20, то следует вычесть число кратное двадцати. Например, если номер зачетной книжки З-3В11/14, но студент выбирает вариант индивидуального домашнего задания под номером 14, если шифр З-3В11/26, то выбирать надо вариант под номером 6, если шифр З-3В11/47, то выбирать надо вариант под номером 7.

Индивидуальные задания выполняются в соответствии с графиком изучения дисциплины и высылаются на проверку преподавателю. Работы следует выполнять в течение семестра, чтобы к началу сессии они уже были прорецензированы.

При оформлении индивидуального домашнего задания необходимо соблюдать следующие требования:

1. Обязательно должен быть титульный лист. На титульном листе указываются номер индивидуального задания, номер варианта, название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы, шифр.
2. Все страницы работы должны иметь сквозную нумерацию.
3. Обязательно прилагается список использованной литературы. В этот список необходимо включить рабочую программу и методические указания, в соответствии с которыми выполнены задания.
4. Решения задач следует располагать в той же последовательности, что и задания. Перед решением следует записать текст условия задачи.
5. Решения всех задач должны быть подробными, со всеми промежуточными расчётами, с указанием использованных формул и т.п.
6. В случае не соответствия работы требованиям к оформлению студент получает оценку «незачтено». В этом случае работа должна быть исправлена и повторно предоставлена на проверку преподавателю.
7. Студент, не получивший положительной аттестации хотя бы по одному индивидуальному заданию, не допускается к сдаче экзамена по данной дисциплине.

Перед выполнением индивидуального домашнего занятия студент должен ознакомиться с литературой, рекомендуемой по каждой теме, включенной в теоретический раздел дисциплины.

Студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения устной или письменной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования ИДЗ. Кроме того, студентам читаются обзорные лекции по наиболее важным и трудным разделам курса, проводятся практические занятия.

Студенты, обучающиеся по классической заочной форме (КЗФ) каждое индивидуальное задание оформляют в отдельной тетради.

Студенты, обучающиеся с использованием дистанционных образовательных технологий (ДОТ) каждое индивидуальное задание оформляют в отдельном файле. Студенты, обучающиеся с использованием ДОТ, в обязательном порядке получают письменную рецензию на каждое индивидуальное задание. Работы студентам не возвращаются.

4.2. Варианты домашних заданий и методические указания

4.2.1. Индивидуальное задание №1

4.2.2. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1

Индивидуальное задание № 1

Вариант 0

1. Найдите пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

1.1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+x-3}$;

1.2. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{4x^2}$;

1.3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-3}{x^2+x-6}$;

1.4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+2x^2-7}{5x^4-3x^3-2x}$;

1.5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^7-x^5+1}{6x^6+x^7-4}$;

1.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6-5x}{3+3x}\right)^{-3x}$;

1.7. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+3x-10}$

1.8. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{1}{x^2-x-6}\right)$.

Решение

1.1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+x-3}=\dfrac{(-2)^2-3(-2)-10}{(-2)^2-2-3}=\dfrac{4+6-10}{4-2-3}=\dfrac{0}{-1}=0$;

1.2. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{4x^2}=\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{\cancel{4}\cdot\frac{\pi^2}{\cancel{4}}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}/2\right)^2}{\pi^2}=\dfrac{1}{2\pi^2}$;

1.3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{-3-3}{(-3)^2-3-6}=\left(\dfrac{-6}{0}\right)=\infty$;

1.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-7}{5x^4-3x^3-2x}=\begin{vmatrix} m=3, \\ n=4, \\ m<n \end{vmatrix}=0$;

1.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-x^5+1}{6x^6+x^7-4}=\begin{vmatrix} m=7, \\ n=7, \\ m=n \end{vmatrix}=\dfrac{1}{1}=1$;

1.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6-5x}{3+3x}\right)^{-3x}=\left(\dfrac{6-5\cdot 0}{3+3\cdot 0}\right)^{-3\cdot 0}=\left(\dfrac{6}{3}\right)^{0}=1$;

1.7. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+3x-10}=\dfrac{(-5)^2+4\cdot(-5)-5}{(-5)^2+3\cdot(-5)-10}=\dfrac{25-20-5}{25-15-10}=$

$=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\begin{vmatrix} x^2+4x-5=(x+5)\cdot(x-1) \\ x^2+3x-10=(x+5)\cdot(x-2) \end{vmatrix}=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\cancel{(x+5)}\cdot(x-1)}{\cancel{(x+5)}\cdot(x-2)}=$

$=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{-5-1}{-5-2}=\dfrac{6}{7}$;

1.8. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{1}{x^2-x-6}\right)=\left(\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0}\right)=(\infty-\infty)=$

$=\begin{vmatrix} x^2-9=(x-3)(x+3) \\ x^2-x-6=(x-3)(x+2) \end{vmatrix}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{(x-3)(x+3)}-\dfrac{1}{(x-3)(x+2)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+2)-(x+3)}{(x-3)(x+3)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-1}{(x-3)(x+3)(x+2)}=\left\{\dfrac{-1}{0}\right\}=\infty$.

2. Исследуйте функцию на непрерывность, постройте её график:

2.1. $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{если} \quad x\le 0, \\ \sqrt{x}-1, & \text{если} \quad 0<x\le 9, \\ x-4, & \text{если} \quad x>9. \end{cases}$

2.2. $y=\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$.

Решение

2.1. $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{если} \quad x\le 0, \\ \sqrt{x}-1, & \text{если} \quad 0<x\le 9, \\ x-4, & \text{если} \quad x>9. \end{cases}$

Область определения данной функции $D(y)=(-\infty;+\infty)$. В точках $x=0$ и $x=9$ функция меняет свой способ задания. В этих точках возможен разрыв.

Исследуем на непрерывность функцию $f(x)$ в точке $x=0$:

$f(0)=-1$

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-1)=-1$;

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x}-1)=-1$.

Так как $f(0-0)=f(0+0)=f(0)=-1$, заключаем, что $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$.

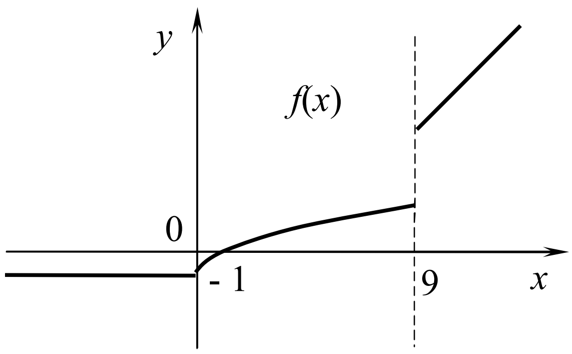
Исследуем на непрерывность функцию $f(x)$ в точке $x=9$:

$f(9)=\sqrt{9}-1=2$

$f(9-0)=\lim\limits_{x\to 9-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x}-1)=2$;

$f(9+0)=\lim\limits_{x\to 9+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 9}(x-4)=5$.

Так как $f(0-0)\neq f(0+0)$, но оба предела конечны, заключаем, что $f(x)$ в точке $x=9$ терпит разрыв 1 рода.



2.2. $y=\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$.

Данная функция определена для всех значений x, для которых $x^2-4x+3\neq 0$, т.е. $x\neq 1$ и $x\neq 3$.

Во всех точках своей области определения $D(y)=\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$ функция непрерывна. Точки $x=1$ и $x=3$ являются точками разрыва, так как в этих точках функция не определена.

Определим тип точки разрыва $x=1$. Для этого находим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{2x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1-0}\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{2\cdot(1-0)}{(1-0-1)(1-0-3)}=\frac{2}{-0\cdot(-2)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{2x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1+0}\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{2\cdot(1+0)}{(1+0-1)(1+0-3)}=\frac{2}{+0\cdot(-2)}=-\infty;$$

Односторонние пределы равны бесконечности, следовательно, в точке $x=1$ разрыв 2-го рода.

Определим тип точки разрыва $x=3$. Для этого находим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to3-0}\frac{2x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to3-0}\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{2\cdot(3-0)}{(3-0-1)(3-0-3)}=\frac{6}{2\cdot(-0)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to3+0}\frac{2x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to3+0}\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{2\cdot(3+0)}{(3+0-1)(3+0-3)}=\frac{6}{2\cdot(+0)}=+\infty;$$

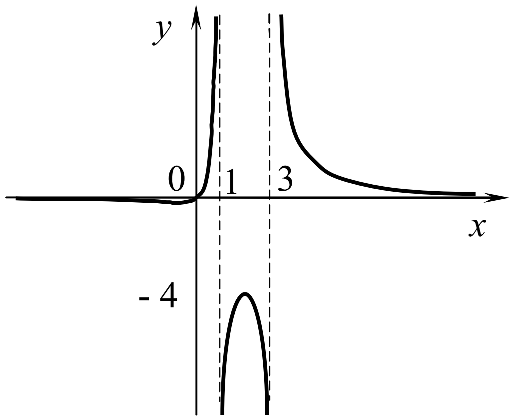
Односторонние пределы равны бесконечности, следовательно, в точке $x=3$ разрыв 2-го рода.

Исследуем поведение функции на бесконечности

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2-4x+3}=\begin{vmatrix}m=1\\n=2\\m<n\end{vmatrix}=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-4x+3}=\begin{vmatrix}m=1\\n=2\\m<n\end{vmatrix}=+\infty.$$

Вычислим значения функции в некоторых точках:

x	-2	-1	0	2	4	5
y	-0,27	-0,25	0	-4	2,67	1,25



3. Найдите производную функции:

3.1. $y=-\dfrac{4}{x^4}+3\sqrt[3]{x}-\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\ln(\cos 3)$;

3.2. $y=\dfrac{\cos 3x+4}{\sin 3x}$;

3.3. $y=e^{3x/4}+\dfrac{4x-5}{3}$;

3.4. $y=\operatorname{tg}x\cdot 5^{-0{,}5\cos^2 x}$;

3.5. $y=\sqrt[4]{\operatorname{arctg}(2x-1)}$;

3.6. $y=\log_4{}^3(3x-x^2)$.

Решение

3.1. $y=-\dfrac{4}{x^4}+3\sqrt[3]{x}-\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\ln(\cos 3)$;

$$y'=\left(-\frac{4}{x^4}+3\sqrt[3]{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}-\ln(\cos 3)\right)'=\left(-\frac{4}{x^4}\right)'+\left(3\sqrt[3]{x}\right)'-\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)'-$$

$$-\left(\ln(\cos 3)\right)'=-4\left(x^{-4}\right)'+3\left(x^{1/3}\right)'-\frac{1}{2}\left(x^{1/2}\right)'-0=16x^{-5}+x^{-2/3}-\frac{1}{4}x^{-1/2};$$

3.2. $y=\dfrac{\cos 3x+4}{\sin 3x}$;

$$y'=\left(y=\frac{\cos 3x+4}{\sin 3x}\right)'=\frac{(\cos 3x+4)'\sin 3x-(\cos 3x+4)(\sin 3x)'}{(\sin 3x)^2}=$$

$$=\frac{-3\sin 3x\sin 3x-(\cos 3x+4)3\cos 3x}{(\sin 3x)^2}=\frac{-3\sin^2 3x-3\cos^2 3x-12\cos 3x}{(\sin 3x)^2}$$

$$=\frac{-3-12\cos 3x}{(\sin 3x)^2};$$

3.3. $y=e^{3x/4}+\dfrac{4x-5}{3}$;

$$y'=\left(e^{3x/4}+\frac{4x-5}{3}\right)'=\left(e^{3x/4}\right)'+\left(\frac{4x-5}{3}\right)'=\frac{3}{4}e^{3x/4}+\frac{4}{3};$$

3.4. $y=\operatorname{tg}x\cdot 5^{-0,5\cos^2 x}$;

$$y'=\left(\operatorname{tg}x\cdot 5^{-0,5\cos^2 x}\right)'=(\operatorname{tg}x)'\,5^{-0,5\cos^2 x}+\operatorname{tg}x\cdot\left(5^{-0,5\cos^2 x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot 5^{-0,5\cos^2 x}+\operatorname{tg}x\cdot 5^{-0.5\cos^2 x}\ln 5\cdot(\cos x\cdot\sin x).$$

3.5. $y=\sqrt[4]{\operatorname{arctg}(2x-1)}$;

$$y'=\left(\sqrt[4]{\operatorname{arctg}(2x-1)}\right)'=\left((\operatorname{arctg}(2x-1))^{\frac{1}{4}}\right)'=\frac{1}{4}(\operatorname{arctg}(2x-1))^{-\frac{3}{4}}\cdot\frac{2}{1+(2x-1)^2};$$

3.6. $y = \log_4{}^3(3x - x^2)$.

$$y' = \left(\log_4{}^3(3x - x^2)\right)' = 3\log_4{}^2(3x - x^2) \cdot \frac{3 - 2x}{(3x - x^2)\ln 4}.$$

4. Найдите пределы, пользуясь правилом Лопиталя:

4.1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 2x - 3}{x + x^2}$;

4.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{\sin^2 2x}$;

4.3. $\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{1}{e^{x+3} - 1} - \dfrac{x}{x^2 - 9} \right)$;

4.4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 5x^3 - x}$.

Решение

4.1.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x - x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3 + 2x - 3)'}{(x - x^2)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2x}{1 - 2x} = \frac{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1}{1 - 2 \cdot 1} = -5;$$

4.2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin^2 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos 5x)'}{(\sin^2 2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \frac{5}{4} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 5x)'}{(\sin 2x \cos 2x)'} = \frac{5}{4} \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x}{2\cos 2x \cdot \cos 2x - 2\sin 2x \cdot \sin 2x} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{8};$$

4.3.

$$\lim_{x\to -3} \left(\frac{1}{e^{x+3} - 1} - \frac{x}{x^2 - 9} \right) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x\to -3} \frac{x^2 - 9 - xe^{x+3} + x}{(e^{x+3} - 1)(x^2 - 9)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x^2 - 9 - xe^{x+3} + x)'}{(e^{x+3} - 1)'(x^2 - 9) + (e^{x+3} - 1)(x^2 - 9)'} = \lim_{x\to -3} \frac{2x - e^{x+3} - xe^{x+3} + 1}{e^{x+3}(x^2 - 9) + (e^{x+3} - 1) \cdot 2x} =$$

$$= \frac{2 \cdot (-3) - 1 + 3 \cdot 1 + 1}{1 \cdot 0 + 0 \cdot (-6)} = \left\{\frac{-3}{0}\right\} = \infty;$$

4.4.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 5x^3 - x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x + 6)'}{(x^2 + 5x^3 - x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 8x - 3}{2x + 15x^2 - 1} =$$

$$=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+8x-3)'}{(2x+15x^2-1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+8}{2+30x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x+8)'}{(2+30x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{30}=$$

$$=\frac{1}{5}.$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке:

5.1. $y=x^3-3x^2+4$, $[1;3]$ 5.2. $y=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$, $[-1;3]$.

Решение

5.1. $y=x^3-3x^2+4$, $[1;3]$.

Найдем производную данной функции

$y'=(x^3-3x^2+4)'=3x^2-6x$.

Решим уравнение $y'=0$

$3x^2-6x=0\Rightarrow 3x(x-2)=0\Rightarrow x=0, x=2$;

$x=0\notin[1;3]$; $x=2\in[1;3]$

Вычислим значение функции в точке $x=2$ и на концах отрезка, т.е. при $x=1$ и $x=3$

$y(1)=1^3-3\cdot1^2+4=2$,

$y(2)=2^3-3\cdot2^2+4=0$,

$y(3)=3^3-3\cdot3^2+4=4$.

Следовательно, $y_{\text{наиб.}}=4$, $y_{\text{наим.}}=0$.

5.2. $y=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$, $[-1;3]$.

Найдем производную данной функции

$$y'=\left(\frac{4x-1}{x^2+3}\right)'=\frac{4(x^2+3)-(4x-1)\cdot2x}{(x^2+3)^2}=\frac{4x^2+12-8x^2+2x}{(x^2+3)^2}=$$

$$=\frac{-4x^2+2x+12}{(x^2+3)^2}.$$

Решим уравнение $y'=0$

$$\frac{-4x^2+2x+12}{(x^2+3)^2}=0 \Rightarrow -4x^2+2x+12=0;$$

$$2x^2-x-6=0,$$
$$D=1+48=49,$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm 7}{4} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=-1,5 \\ x_2=2 \end{array}$$

$x_1=-1,5 \notin [-1;3]$; $\quad x_2=2 \in [-1;3]$.

Вычислим значение функции в точке $x=2$ и на концах отрезка, т.е. при $x=-1$ и $x=3$

$$y(-1)=\frac{4\cdot(-1)-1}{(-1)^2+3}=-\frac{5}{4};$$

$$y(2)=\frac{4\cdot 2-1}{2^2+3}=\frac{7}{7}=1;$$

$$y(3)=\frac{4\cdot 3-1}{3^2+3}=\frac{11}{12}.$$

Следовательно, $y_{\text{наиб.}}=1$, $y_{\text{наим.}}=-\frac{5}{4}$.

6. Найдите интервалы монотонности и экстремумы функции:

6.1. $y=\frac{x^2+4}{2x}$; $\qquad$ 6.2. $y=x\cdot e^{-x^2}$.

Решение

6.1. $y=\frac{x^2+4}{2x}$.

Область определения данной функции $D(y)=(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$. Находим производную

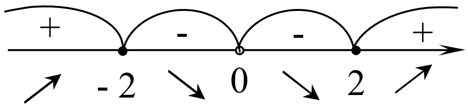
$$y'=\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)'=\frac{(x^2+4)'\cdot 2x-(x^2+4)\cdot(2x)'}{(2x)^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot 2x-(x^2+4)\cdot 2}{4x^2}=\frac{4x^2-2x^2-8}{4x^2}=\frac{2x^2-8}{4x^2}=\frac{2(x^2-4)}{4x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}.$$

Критическими точками функции являются те точки, в которых производная равна нулю или не существует, т.е.

$$\begin{cases} x^2-4=0, \\ 2x^2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2)=0, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Из системы следует, что производная равна нулю в точках $x_1 = -2$, $x_3 = 2$ и не существует в точке $x_2 = 0$.



$$y'(-3) = \left(\frac{x^2 - 4}{2x^2} \right) \Bigg|_{x=-3} = \frac{(-3)^2 - 4}{2(-3)^2} = \frac{5}{18} > 0;$$

$$y'(-1) = \left(\frac{x^2 - 4}{2x^2} \right) \Bigg|_{x=-1} = \frac{(-1)^2 - 4}{2(-1)^2} = \frac{-3}{2} < 0;$$

$$y'(1) = \left(\frac{x^2 - 4}{2x^2} \right) \Bigg|_{x=1} = \frac{1^2 - 4}{2 \cdot 1^2} = \frac{-3}{2} < 0;$$

$$y'(3) = \left(\frac{x^2 - 4}{2x^2} \right) \Bigg|_{x=3} = \frac{3^2 - 4}{2 \cdot 3^2} = \frac{5}{18} > 0.$$

Таким образом, функция возрастает на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$;

функция убывает на интервалах $(-2; 0)$ и $(0; 2)$;

$x_1 = -2$ – точка максимума;

$x_3 = 2$ – точка минимума.

Находим экстремумы:

Максимум $y_{\max} = y(-2) = \left(\frac{x^2 + 4}{2x} \right) \Bigg|_{x=-2} = \frac{(-2)^2 + 4}{2(-2)} = \frac{8}{-4} = -2$;

Минимум $y_{\min} = y(2) = \left(\frac{x^2 + 4}{2x} \right) \Bigg|_{x=2} = \frac{2^2 + 4}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$.

6.2. $y = x \cdot e^{-x^2}$

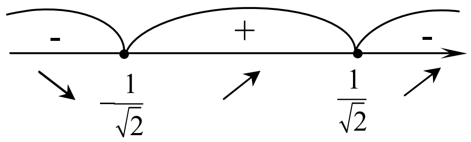
Область определения данной функции $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Находим производную

$$y' = \left(x \cdot e^{-x^2} \right)' = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Критическими точками функции являются те точки, в которых производная равна нулю или не существует. Точек, в которых производная $y' = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ не существует, нет.

$$y' = 0 \Rightarrow e^{-x^2}(1-2x^2) = 0 \;\Rightarrow\; e^{-x^2} \neq 0,\; 1-2x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\; x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Данная функция имеет две критические точки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



$$y'(-1) = \left(e^{-x^2}(1-2x^2)\right)\Big|_{x=-1} = e^{-(-1)^2}(1-\sqrt{2}\cdot(-1))(1+\sqrt{2}\cdot(-1)) < 0;$$

$$y'(0) = \left(e^{-x^2}(1-2x^2)\right)\Big|_{x=0} = e^{-(0)^2}(1-\sqrt{2}\cdot 0)(1+\sqrt{2}\cdot 0) > 0;$$

$$y'(1) = \left(e^{-x^2}(1-2x^2)\right)\Big|_{x=1} = e^{-(1)^2}(1-\sqrt{2}\cdot 1)(1+\sqrt{2}\cdot 1) < 0.$$

Таким образом,

функция возрастает на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

функция убывает на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ $(0; 2)$;

$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ – точка максимума;

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ – точка минимума.

Находим экстремумы:

Максимум $y_{\max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(xe^{-x^2}\right)\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$;

Минимум $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(xe^{-x^2}\right)\Big|_{x=-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$.

4.2.3. Индивидуальное задание №2

4.2.4. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 2

Вариант №0

1. Найдите неопределённые интегралы:

1.1. $\int\left(\frac{x^3}{2}-\frac{4}{x^2}-7-\frac{\sqrt[4]{x}}{3}\right)dx$;

1.2. $\int\sqrt[5]{6-2x}dx$;

1.3. $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$;

1.4. $\int\sin 2x\cdot\sqrt[3]{2-3\cos 2x}dx$;

1.5. $\int\sqrt{x^3}\ln x dx$;

1.6. $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}$;

1.7. $\int\cos^3 3x dx$;

1.8. $\int\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos 3x dx$;

Решение

1.1. $\int\left(\frac{x^3}{2}-\frac{4}{x^2}-7-\frac{\sqrt[4]{x}}{3}\right)dx$

Интеграл вычисляется непосредственным интегрированием. При этом используются свойства линейности неопределённого интеграла.

$$\int\left(\frac{x^3}{2}-\frac{4}{x^2}-7-\frac{\sqrt[4]{x}}{3}\right)dx=\int\frac{x^3}{2}dx-\int\frac{4}{x^2}dx-\int 7dx-\int\frac{\sqrt[4]{x}}{3}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int x^3dx-4\int x^{-2}dx-7\int dx-\frac{1}{3}\int x^{1/4}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}-4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}-7x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{5/4}}{5/4}+C=$$

$$=\frac{x^4}{8}+4x^{-1}-7x-\frac{4}{15}x^{5/4}+C.$$

Интегралы 1.2, 1.3 и 1.4 вычисляются подведением под знак дифференциала.

1.2. $\int\sqrt[5]{6-2x}dx$

$$\int\sqrt[5]{6-2x}dx=\int(6-2x)^{1/5}dx=\int(6-2x)^{1/5}\cdot\frac{d(6-2x)}{-2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(6-2x)^{1/5}d(6-2x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(6-2x)^{6/5}}{6/5}+C=-\frac{5}{12}(6-2x)^{6/5}+C.$$

1.3. $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$

$$\int\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int\frac{(\ln x)^{-2}}{x}\cdot\frac{d(\ln x)}{1/x}=\int(\ln x)^{-2}d(\ln x)=\frac{(\ln x)^{-1}}{-1}+C.$$

1.4. $\int\sin 2x\cdot\sqrt[3]{2-3\cos 2x}dx$

$$\int\sin 2x\cdot\sqrt[3]{2-3\cos 2x}dx=\int\sin 2x\cdot(2-3\cos 2x)^{1/3}dx=$$

$$=\int\sin 2x\cdot(2-3\cos 2x)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{d(2-3\cos 2x)}{6\sin 2x}=\frac{1}{6}\int(2-3\cos 2x)^{\frac{1}{3}}\cdot d(2-3\cos 2x)=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{(2-3\cos 2x)^{4/3}}{4/3}+C=\frac{1}{8}(2-3\cos 2x)^{4/3}+C.$$

1.5. $\int\sqrt{x^3}\ln xdx$

Интеграл вычисляется с помощью формулы интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$.

$$\int\sqrt{x^3}\ln xdx=\int x^{3/2}\cdot\ln xdx=\left|\begin{array}{l}u=\ln x\quad\Rightarrow\ du=\frac{1}{x}dx\\ dv=x^{3/2}dx\Rightarrow v=\int x^{3/2}dx=\frac{x^{5/2}}{5/2}\end{array}\right|=$$

$$=\ln x\cdot\frac{x^{5/2}}{5/2}-\int\frac{x^{5/2}}{5/2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{2}{5}\cdot x^{5/2}\cdot\ln x-\frac{2}{5}\int x^{3/2}dx=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot x^{5/2}\cdot\ln x-\frac{2}{5}\cdot\frac{x^{5/2}}{5/2}+C=\frac{2}{5}\cdot x^{5/2}\cdot\ln x-\frac{4}{25}x^{5/2}+C.$$

1.6. $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}$

Интеграл содержит квадратный трехчлен. Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе подынтегральной дроби

$$x^2-6x+25=x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2+25=(x-3)^2+16.$$

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+4^2}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{4}+C.$$

Интегралы 1.7 и 1.8 содержат тригонометрические функции

1.7. $\int\cos^3 3xdx$

$$\int\cos^3 3xdx=\int\cos^2 3x\cdot\cos 3xdx=\int(1-\sin^2 3x)\cos 3xdx=$$

$$=\int(\cos 3x-\sin^2 3x\cdot\cos 3x)dx=\int\cos 3xdx-\int\sin^2 3x\cdot\cos 3xdx=$$

$$=\int\cos 3x\cdot\frac{d(3x)}{3}-\int\sin^2 3x\cdot\cos 3x\frac{d(\sin 3x)}{3\cos 3x}=\frac{1}{3}\int\cos 3xd(3x)-$$

$$-\frac{1}{3}\int\sin^2 3xd(\sin 3x)=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^3 3x}{3}+C.$$

1.8. $\int\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 3xdx$

Для преобразования подынтегрального выражения воспользуемся формулой тригонометрии $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$.

$$\int\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int\left(\sin\left(3x+\frac{x}{2}\right)+\sin\left(3x-\frac{x}{2}\right)\right)dx=\frac{1}{2}\int\sin\frac{7x}{2}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\sin\frac{5x}{2}dx=\frac{1}{2}\int\sin\frac{7x}{2}\cdot\frac{d(3,5x)}{3,5}+\frac{1}{2}\int\sin\frac{5x}{2}\cdot\frac{d(2,5x)}{2,5}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\int\sin\frac{7x}{2}d\left(\frac{7x}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\int\sin\frac{5x}{2}d\left(\frac{5x}{2}\right)=-\frac{1}{7}\cos\frac{7x}{2}-\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{2}+C.$$

2. Вычислите определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg}^2 xdx}{\cos^2 x}$;

2.2. $\int\limits_1^3\frac{xdx}{2x^2+5}$;

2.3. $\int\limits_0^{\pi/3}(4-3x)\sin 3xdx$;

2.4. $\int\limits_0^7\frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x}}$, замена $x=t^3-1$;

2.5. $\int\limits_0^5\sqrt{25-x^2}dx$, замена $x=5\sin t$;

2.6. $\int\limits_{-3}^4 f(x)dx$, $f(x)=\begin{cases}-3, & \text{если } x\le 0,\\ \sqrt{x}, & \text{если } 0<x\le 1,\\ \frac{2}{3}x-4, & \text{если } x>1.\end{cases}$

Решение

2.1. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{tg}^2\, x dx}{\cos^2 x}$

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{tg}^2\, x dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{tg}^2\, x}{\cos^2 x} \cdot \frac{d(\mathrm{tg}\, x)}{1/\cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^2\, x \cdot d(\mathrm{tg}\, x) = \left.\frac{\mathrm{tg}^3\, x}{3}\right|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\mathrm{tg}^3 \frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}^3\, 0\right) = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$

2.2. $\int\limits_1^3 \frac{xdx}{2x^2+5}$

$$\int\limits_1^3 \frac{xdx}{2x^2+5} = \int\limits_1^3 \frac{x}{2x^2+5} \cdot \frac{d(2x^2+5)}{4x} = \frac{1}{4}\int\limits_1^3 \frac{d(2x^2+5)}{2x^2+5} = \left.\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+5\right|\right|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln(2\cdot 3^2+5) - \ln(2\cdot 1^2+5)\right) = \frac{1}{4}\left(\ln 23 - \ln 7\right).$$

2.3. $\int\limits_0^{\pi/3} (4-3x)\sin 3x dx$

Интеграл вычисляется методом интегрирования по частям $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$.

$$\int\limits_0^{\pi/3} (4-3x)\sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = 4-3x \quad \Rightarrow \; du = -3dx \\ dv = \sin 3x dx \Rightarrow v = \int \sin 3x \cdot \frac{d(3x)}{3} = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| =$$

$$= (4-3x)\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_0^{\pi/3}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot(-3dx) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left((4-\pi)\cdot\cos\pi - 4\cos 0\right) - \int\limits_0^{\pi/3} \cos 3x \cdot \frac{d(3x)}{3} = -\frac{1}{3}(-4+\pi-4) - \left.\frac{1}{3}\sin 3x\right|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}(\sin\pi-\sin 0)=\frac{8-\pi}{3}.$$

2.4. $\int\limits_0^7 \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x}}$, замена $x=t^3-1$

Выполним замену в интеграле по формуле $x=t^3-1$. Тогда

$dx=3t^2dt$;

$t^3=x+1 \Rightarrow t=\sqrt[3]{x+1}$.

Находим новые пределы интегрирования

$t_{\text{нижн}}=\sqrt[3]{0+1}=1,$

$t_{\text{верхн}}=\sqrt[3]{7+1}=2.$

Тогда

$$\int\limits_0^7 \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x}}=\int\limits_1^2 \frac{(t^3-1)\cdot 3t^2dt}{t}=3\int\limits_1^2 (t^3-1)tdt=3\int\limits_1^2 (t^4-t)dt=3\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=3\left(\frac{2^5}{5}-\frac{2^2}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)=3\left(\frac{32-1}{5}+\frac{1-4}{2}\right)=3\cdot\frac{47}{10}=\frac{141}{10}.$$

2.5. $\int\limits_0^5 \sqrt{25-x^2}dx$, замена $x=5\sin t$

Выполняем замену

$$x=5\sin t \Rightarrow dx=5\cos tdt;\ t=\arcsin\frac{x}{5}.$$

Находим новые пределы интегрирования

$t_{\text{нижн}}=\arcsin\frac{0}{5}=0,$

$t_{\text{верхн}}=\arcsin\frac{5}{5}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$

Тогда

$$\int\limits_0^5 \sqrt{25-x^2}dx=\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{25-25\sin^2 t}\cdot 5\cos tdt=\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{25(1-\sin^2 t)}\cdot 5\cos tdt=$$

$$=25\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos tdt=25\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 tdt=25\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{25}{2}\left(\int_0^{\pi/2} dt+\int_0^{\pi/2}\cos 2t\cdot\frac{d(2t)}{2}\right)=\frac{25}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{25}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-0-\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{25\pi}{4}.$$

2.6. $\int\limits_{-3}^{4} f(x)dx$, $f(x)=\begin{cases}-3, & \text{если} \quad x\le 0,\\ \sqrt{x}, & \text{если} \quad 0<x\le 1,\\ \frac{2}{3}x-4, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$

Воспользуемся свойством аддитивности определённого интеграла

$$\int_{-3}^{4} f(x)dx=\int_{-3}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{4} f(x)dx.$$

Тогда

$$\int_{-3}^{4} f(x)dx=\int_{-3}^{0}(-3)dx+\int_{0}^{1}\sqrt{x}dx+\int_{1}^{4}\left(\frac{2x}{3}-4\right)dx=-3\int_{-3}^{0}dx+\int_{0}^{1}x^{1/2}dx+$$

$$+\frac{2}{3}\int_{1}^{4}xdx-4\int_{1}^{4}dx=-3x\Big|_{-3}^{0}+\frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4-4x\Big|_1^4=$$

$$=-3(0+3)+\frac{2}{3}(1-0)+\frac{1}{3}(16-1)-4(4-1)=-9+\frac{2}{3}+\frac{15}{3}-12=-\frac{40}{3}.$$

3. Вычислите несобственные интегралы (или установите их расходимость):

3.1. $\int\limits_{-4}^{\infty}\frac{dx}{(x+5)^4}$; 3.2. $\int\limits_{-\infty}^{1} e^{-2x}dx$.

Решение

3.1. $\int\limits_{-4}^{\infty}\frac{dx}{(x+5)^4}$

$$\int_{-4}^{\infty}\frac{dx}{(x+5)^4}=\lim_{b\to\infty}\int_{-4}^{b}(x+5)^{-4}d(x+5)=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{(x+5)^{-3}}{-3}\Bigg|_{-4}^{b}\right)=$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left.\frac{(x+5)^{-3}}{-3}\right|_{-4}^{b} \right) = -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{(b+5)^3} - 1 \right) = \frac{1}{3}.$$

Так как предел существует и конечен, то несобственный интеграл сходится.

3.2. $\int\limits_{-\infty}^{1} e^{-2x}dx$

$$\int\limits_{-\infty}^{1} e^{-2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1} e^{-2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1} e^{-2x}\cdot\frac{d(-2x)}{-2} = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\left. e^{-2x}\right|_{a}^{1} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(e^{-2} - e^{-2a} \right) = \infty.$$

Так как предел равен бесконечности, то несобственный интеграл расходится.

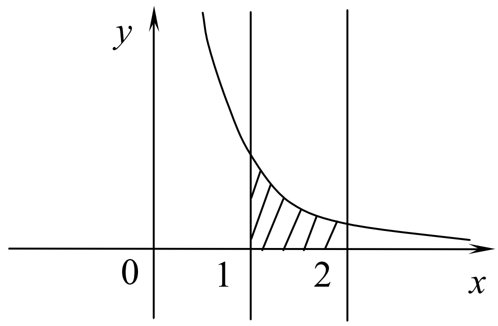
4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

4.1. $\begin{cases} y = 1/x^2, \\ y = 0 \\ x = 1, \\ x = 2. \end{cases}$ 4.2. $\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = 0. \end{cases}$

Решение

4.1. $\begin{cases} y = 1/x^2, \\ y = 0 \\ x = 1, \\ x = 2. \end{cases}$

Построим график функции $y = \frac{1}{x^2}$ и прямые $x = 1, x = 2$.



Так как фигура, площадь которой надо найти, снизу ограничена осью Ox, то формула для вычисления площади имеет вид

$$S=\int_a^b f(x)dx\text{, где } f(x)=\frac{1}{x^2}\text{, } a=1, b=2.$$

Окончательно получаем

$$S=\int_1^2 \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^2=-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\text{ (кв. ед.).}$$

4.2. $\begin{cases} y=2x-x^2, \\ y=0. \end{cases}$

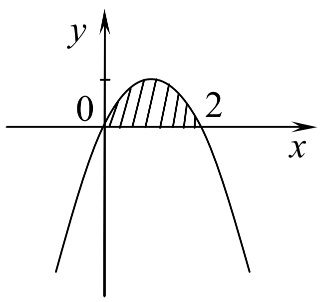
Построим фигуру, ограниченную линиями $y=2x-x^2$ и $y=0$. Графиком функции $y=2x-x^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдём вершину параболы

$$x_{в}=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{-2}=1\text{, } y_{в}=y(x_{в})=2\cdot 1-1^2=1.$$

Находим абсциссы точек пересечения параболы $y=2x-x^2$ с осью Ox, для этого решим уравнение

$$2x-x^2=0 \Rightarrow x(2-x)=0 \Rightarrow x=0, x=2.$$

Графиком функции $y=0$ является ось Ox.



Найдём площадь фигуры по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx\text{, где } f(x)=2x-x^2, a=0, b=2.$$

$$S=\int_0^2 (2x-x^2)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\left(4-\frac{8}{3}\right)-(0-0)=\frac{4}{3}\text{ (кв.ед.).}$$

5. Найдите среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

5.1. $f(x)=3^x, \quad [-1;2]$; 5.2. $f(x)=x^2-2x, \quad [0;4]$.

Решение

Среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ вычисляется по формуле $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

5.1. $f(x) = 3^x, \quad [-1;2]$

$$\mu = \frac{\int_{-1}^{2} 3^x\, dx}{2-(-1)} = \frac{1}{3}\cdot 3^x \cdot \ln 3\Big|_{-1}^{2} = \frac{\ln 3}{3}\cdot(3^2 - 3^{-1}) = \frac{\ln 3}{3}\cdot\frac{26}{3} = \frac{26}{9}\cdot\ln 3.$$

Ответ: $\mu = \dfrac{26}{9}\ln 3$.

5.2. $f(x) = x^2 - 2x, \quad [0;4]$

$$\mu = \frac{\int_0^4 (x^2-2x)dx}{4-0} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_0^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{64}{3} - 16\right) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\mu = \dfrac{4}{3}$.

6. Решите уравнение

$$\int_{-1}^{x} (2t-1)dt = 0.$$

Решение

Для того чтобы решить уравнение $\int_{-1}^{x} (2t-1)dt = 0$, вычислим сначала интеграл, стоящий в правой части равенства.

$$\int_{-1}^{x} (2t-1)dt = (t^2 - t)\Big|_{-1}^{x} = (x^2 - x) - (1+1) = x^2 - x - 2.$$

Следовательно,

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow D = 1 + 8 = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ и } x_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = -1$.

7. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = 1 - i$. Изобразите число на комплексной плоскости.

Решение

Находим модуль комплексного числа $z = a + bi$ по формуле
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

В нашем случае $a = 1$, $b = -1$. Получаем
$|z| = |1 - i| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

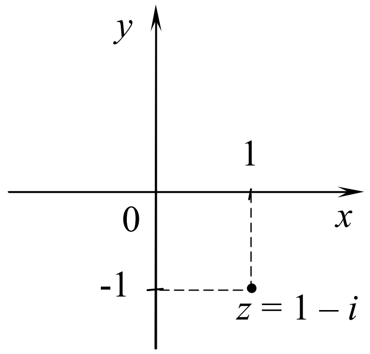
Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ находим по формулам

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & \text{при } a > 0, \quad b - \text{любом}, \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi & \text{при } a < 0, \quad b \geq 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \pi & \text{при } a < 0, \quad b < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } a = 0, \quad b > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } a = 0, \quad b < 0. \end{cases}$$

При $a > 0$ получаем

$$\varphi = \arg(1 - i) = \operatorname{arctg}\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}.$$

На комплексной плоскости комплексное число $z = a + bi$ изображается точкой с координатами $(a; b)$.



5. ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

5.1. Требования для сдачи экзамена

К экзамену допускаются только те студенты, у которых зачтены все индивидуальные задания.

Студенты, обучающиеся по КЗФ, сдают экзамен во время зимней экзаменационной сессии по билетам (в устной или письменной форме). Каждый билет содержит два теоретических вопроса и три задачи. Экзамен считается сданным, если выполнено не менее 60% заданий экзаменационного билета.

Студенты, обучающиеся с использованием ДОТ, сдают экзамен в тестовой форме (on-line режим). Экзаменационный тест содержит 20 тестовых заданий различного уровня сложности. Структура экзаменационного теста представлена в таблице:

Тип задания	**Количество в тесте**	**Уровень сложности**
Задание на выбор единственного ответа	8	1
Задание на выбор множественных ответов	4	2
Задание на установление последовательности	4	2
Задание на установление соответствия	2	3
Задание для краткого ответа	2	3

Оценка за экзамен выставляется по сумме набранных баллов за задания теста.

Итоговая оценка по дисциплине формируется по результатам сдачи индивидуальных домашних заданий и экзамена.

5.2. Вопросы для подготовки к экзамену

1. Понятие множества. Примеры. Способы задания множеств. Подмножество.
2. Операции над множествами и их свойства.
3. Числовые множества N, Z, Q, R.
4. Понятие функции. Область определения и множество значений функции. График функции. Способы задания функции.
5. Основные характеристики поведения функции.
6. Понятия сложной, неявной, обратной функций.
7. Основные элементарные функции. Степенная функция и её свойства.
8. Основные элементарные функции. Показательная функция и её свойства.
9. Основные элементарные функции. Логарифмическая функция и её свойства.
10. Основные элементарные функции. Тригонометрические функции и их свойства.
11. Основные элементарные функции. Обратные тригонометрические функции и их свойства.
12. Классификация функций.
13. Определение предела функции (конечного, бесконечного и на бесконечности). Понятие односторонних пределов.
14. Основные теоремы о пределах.

15. Понятие бесконечно малой величины и бесконечно большой величины. Их взаимосвязь.

16. Непрерывность функции в точке, на множестве.

17. Точки разрыва и их классификация.

18. Основные свойства функций, непрерывных на отрезке.

19. Определение производной функции в точке. Физический и геометрический смысл производной.

20. Уравнение касательной к кривой.

21. Понятие дифференцируемой функции в точке. Дифференциал.

22. Правила дифференцирования.

23. Производные и дифференциалы высших порядков.

24. Основные теоремы дифференциального исчисления (Роля, Лагранжа, Коши).

25. Правило Лопиталя.

26. Формула Тейлора.

27. Исследование функций с помощью производной на монотонность.

28. Исследование функций с помощью производной на экстремум.

29. Исследование функций с помощью производной на выпуклость/вогнутость. Точки перегиба.

30. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

31. Определение первообразной. Неопределенный интеграл и его свойства.

32. Основные методы интегрирования: замена переменной, интегрирование «по частям» в неопределенном интеграле.

33. Интегрирование простейших рациональных дробей.

34. Интегрирование тригонометрических выражений.

35. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции, приводящая к понятию определённого интеграла.

36. Определение определенного интеграла. Теорема существования.

37. Свойства определенного интеграла.

38. Геометрический смысл определенного интеграла.

39. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона − Лейбница.

40. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование «по частям» в определённом интеграле.

41. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

42. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

5.3. Образцы билетов к экзамену для КЗФ

Экзаменационный билет № 0

1. Непрерывность функции в точке.

2. Определение производной. Геометрический смысл.

3. Найдите предел

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}.$$

4. Вычислите определённый интеграл

$$\int_1^3 \frac{(x-1)dx}{x^2+6x+10}.$$

5. Составьте уравнение касательной к кривой

$$y = 4x^2 + 2x - 8$$

в точке с абсциссой $x = 3$.

5.4. Образцы билетов к экзамену для ДОТ

Экзаменационный билет № _0_

Задания на выбор единственного ответа

Задание 1. Найдите производную функции $y = 4e^x + \cos 5x$

1. $y' = 4xe^{x-1} - \sin 5x$; 2. $y' = 4xe^{x-1} - 5\sin 5x$;
3. $y' = 4e^x + \sin 5x$; 4. $y' = 4e^x - 5\sin 5x$.

Ответ:

Задание 2. Уравнение касательной к линии $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ имеет вид

1. $y = 1$; 2. $y = x + 2$; 3. $y = -x$; 4. $y = x$

Ответ:

Задание 3. Длина промежутка возрастания функции $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$ равна

1. 0,5; 2. 2; 3. –1; 4. 1.

Ответ:

Задание 4. Наибольшее значение функции $y = 4xe^{-x}$ на отрезке $[0; 1]$ равно

1. $4e$; 2. $4e^{-1}$; 3. 0; 4. 1

Ответ:

Задание 5. Укажите выражение, которому равен интеграл $\int x\ln^2 x dx$

1. $\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \int x\ln x dx$; 2. $\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x + \int x\ln x dx$;

3. $\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \int x dx$; 4. $\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x + \int x dx$

Ответ:

Задание 6. Укажите замену, которая приводит интеграл $\int\frac{\mathrm{tg}(x-1)}{\cos^2(x-1)}dx$ к табличному

1. $t=\mathrm{tg}(x-1)$; 2. $t=\cos^2(x-1)$; 3. $t=x-1$;

4. $t=\frac{1}{\cos^2(x-1)}$; 5. $t=\frac{\mathrm{tg}(x-1)}{\cos^2(x-1)}$.

Ответ:

Задание 7. Площадь области, ограниченной линиями $y=0{,}5x$, $y=-x$, $x=4$, выражает интеграл

1. $\int_0^4[0{,}5x-(-x)]dx$; 2. $\int_0^4[(-x)-0{,}5x]dx$; 3. $\int_0^4[0{,}5x+(-x)]dx$;

Ответ:

Задание 8. Сделайте замену $t=\ln x$ в интеграле $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$

1. $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-t}}$; 2. $\int_1^e\frac{dt}{\sqrt{1-t}}$; 3. $\int_0^1\frac{dt}{e^t\sqrt{1-t}}$; 4. $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t}}$

Ответ:

Задания на выбор множественных ответов

Задание 9. Найдите все асимптоты графика функции $y=\frac{2x^4+x^3+1}{x^3}$

1. $y=2x$; 2. $x=0$; 3. $y=x+1$; 4. $y=2x+1$

Ответ:

Задание 10. Укажите интегралы, для нахождения которых необходимо применять формулу интегрирования по частям

1. $\int x\sin xdx$; 2. $\int x\sin x^2 dx$; 3. $\int x\sin^2 xdx$;

4. $\int xe^x dx$; 5. $\int xe^{x^2} dx$; 6. $\int (e^x)^2 dx$.

Ответ:

Задание 11. Укажите функции, которые являются первообразными для функции $\frac{1}{\cos^2 3x}$

1. $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x$; 2. $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + 3$; 3. $3\operatorname{tg} 3x$; 4. $3\operatorname{tg} 3x + \frac{1}{3}$

Ответ:

Задание 12. Вычислите неопределённый интеграл $\int \sin x\cos xdx$

1. $\frac{1}{2}\sin^2 x + C$; 2. $-\frac{1}{2}\cos^2 x + C$; 3. $-\frac{1}{4}\cos 2x + C$;

4. $-\frac{1}{2}\sin^2 x + C$; 5. $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$

Ответ:

Задания на установление последовательности

Задание 13.

Расположите данные исследования функции $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ в следующей последовательности: вертикальная асимптота, точка максимума, точка минимума, точка перегиба

1. $x = -1$; 2. $x = 5$; 3. $x = 1$; 4. $x = 5 + 2\sqrt{3}$.

Ответ:

Задание 14.

Расположите пределы в соответствии с их значениями 1,5; 0; 0,4;0,5

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{2x^2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$.

Ответ:

Задание 15. Установите последовательность выполнения действий при исследовании функции на экстремум

1) найти производную y'

2) найти критические точки, принадлежащие области определения функции

3) нанести область определения функции и критические точки на числовую ось

4) определить знак производной на каждом из полученных интервалов

5) выявить точки максимума и минимума

6) вычислить значения функции в точках экстремума

Ответ:

Задание 16. Замена переменного $\operatorname{tg} x = t$ в интеграле $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x + 1}$. Запишите последовательно выражения для $\sin x$, $\cos x$, dx, $f(x)$

1. $\frac{dt}{1+t^2}$; 2. $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; 3. $\frac{t^2}{1+t^2}$; 4. $\frac{1}{1+t^2}$; 5. $\frac{1+t^2}{10+5t^2}$; 6. $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Ответ:

Задания на установление соответствия

Задание 17. Установите соответствие между пределами и их значениями

ПРЕДЕЛ	ЗНАЧЕНИЕ
1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin x}$	а) 3
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$	б) 1
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{2}{x}\right)$	в) 0
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)$	г) 2

Ответ:

Задание 18. Для каждой из указанных функций охарактеризуйте точку $x = 0$.

1. $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0,\\ \sin x, x>0\end{cases}$ — 1. точка непрерывности

2. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ — 2. точка устранимого разрыва

3. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ — 3. точка разрыва первого рода

4. $f(x)=x\sin x$ — 4. точка разрыва второго рода

Ответ:

Задания для краткого ответа

Задание 19. Вычислите $\int\limits_0^2\left(x-\dfrac{1}{\ln 2}\right)2^{-x}dx$. ($\pi=3{,}14$; $e=2{,}72$; $\ln 2=0{,}69$; $\ln 3=1{,}1$. Ответ округлите до трех знаков после запятой).

Ответ:

Задание 20. Вычислите площадь плоской фигуры S, ограниченной линиями $y=-x^2+4,\ y=2x+1$.

Ответ:

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Литература обязательная

1. Самочернова Л.И. Высшая математика. Ч.2: учебное пособие / Л.И. Самочернова – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – 164 с.

6.2. Литература дополнительная

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов (в 2-х томах): учебное пособие для втузов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967; 1978; 1985; 1986. – 432 с.
3. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление/ Я.С. Бугров, С.М. Никольский.– М.: Наука, 1980; 1984; 1988.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа/ Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1972; 1975; 1977; 1985.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу/ под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1972; 1978; 1990.
6. Запорожец Г.Н. Руководство к решению задач по математическому анализу/ Г.Н. Запорожец. – М.: Высшая школа, 1966.

7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980; 1986.

6.3. Учебно-методические пособия

8. Терехина Л.И. Высшая математика. Ч.2: учебное пособие / Л.И. Терехина, И.И. Фикс.– Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 234с.

9. Терехина Л.И. Высшая математика. Ч.3: учебное пособие / Л.И. Терехина, И.И. Фикс.– Томск: Изд-во ТПУ, 2009.– 252 с.

6.4. Internet-ресурсы

10.Сайт ТПУ.– Режим доступа: http://www.tpu.ru, вход свободный.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 1

Методические указания и индивидуальные задания

Составители

ХАРЛОВА Александра Николаевна
МОЛДОВАНОВА Евгения Александровна

Рецензент
кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры ВМ ФТИ

О.Н. Имас

Редактор *С.В. Ульянова*

Компьютерная верстка *Т.И. Тарасенко*

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать Xerox. Усл.печ.л. 4,71. Уч.-изд.л. 4,26.
Заказ . Тираж экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru