Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1

Вариант 0

1. Найдите пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

1.1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+x-3}$;

1.2. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{4x^2}$;

1.3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-3}{x^2+x-6}$;

1.4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+2x^2-7}{5x^4-3x^3-2x}$;

1.5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^7-x^5+1}{6x^6+x^7-4}$;

1.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6-5x}{3+3x}\right)^{-3x}$;

1.7. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+3x-10}$

1.8. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{1}{x^2-x-6}\right)$.

Решение

1.1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+x-3}=\dfrac{(-2)^2-3(-2)-10}{(-2)^2-2-3}=\dfrac{4+6-10}{4-2-3}=\dfrac{0}{-1}=0$;

1.2. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{4x^2}=\dfrac{\sin^2\dfrac{\pi}{4}}{\cancel{4}\cdot\dfrac{\pi^2}{\cancel{4}}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}/2\right)^2}{\pi^2}=\dfrac{1}{2\pi^2}$;

1.3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{-3-3}{(-3)^2-3-6}=\left(\dfrac{-6}{0}\right)=\infty$;

1.4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+2x^2-7}{5x^4-3x^3-2x}=\begin{vmatrix} m=3, \\ n=4, \\ m<n \end{vmatrix}=0$;

1.5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^7-x^5+1}{6x^6+x^7-4}=\begin{vmatrix} m=7, \\ n=7, \\ m=n \end{vmatrix}=\dfrac{1}{1}=1$;

1.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6-5x}{3+3x}\right)^{-3x}=\left(\dfrac{6-5\cdot 0}{3+3\cdot 0}\right)^{-3\cdot 0}=\left(\dfrac{6}{3}\right)^{0}=1$;

1.7. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+3x-10}=\dfrac{(-5)^2+4\cdot(-5)-5}{(-5)^2+3\cdot(-5)-10}=\dfrac{25-20-5}{25-15-10}=$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{vmatrix} x^2+4x-5=(x+5)\cdot(x-1) \\ x^2+3x-10=(x+5)\cdot(x-2) \end{vmatrix}=\lim_{x\to-5}\frac{\cancel{(x+5)}\cdot(x-1)}{\cancel{(x+5)}\cdot(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to-5}\frac{x-1}{x-2}=\frac{-5-1}{-5-2}=\frac{6}{7};$$

1.8. $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-x-6}\right)=\left(\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\right)=(\infty-\infty)=$

$$=\begin{vmatrix} x^2-9=(x-3)(x+3) \\ x^2-x-6=(x-3)(x+2) \end{vmatrix}=\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{(x-3)(x+3)}-\frac{1}{(x-3)(x+2)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+2)-(x+3)}{(x-3)(x+3)(x+2)}=\lim_{x\to3}\frac{-1}{(x-3)(x+3)(x+2)}=\left\{\frac{-1}{0}\right\}=\infty.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность, постройте её график:

2.1. $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{если} \quad x\le 0, \\ \sqrt{x}-1, & \text{если} \quad 0<x\le 9, \\ x-4, & \text{если} \quad x>9. \end{cases}$ 2.2. $y=\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$.

Решение

2.1. $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{если} \quad x\le 0, \\ \sqrt{x}-1, & \text{если} \quad 0<x\le 9, \\ x-4, & \text{если} \quad x>9. \end{cases}$

Область определения данной функции $D(y)=(-\infty;+\infty)$. В точках $x=0$ и $x=9$ функция меняет свой способ задания. В этих точках возможен разрыв.

Исследуем на непрерывность функцию $f(x)$ в точке $x=0$:

$f(0)=-1$

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(-1)=-1$;

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x}-1)=-1$.

Так как $f(0-0)=f(0+0)=f(0)=-1$, заключаем, что $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$.

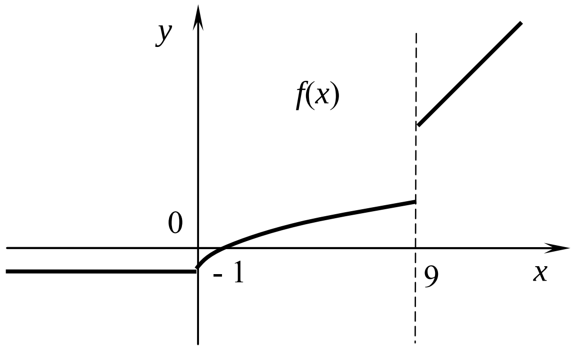
Исследуем на непрерывность функцию $f(x)$ в точке $x=9$:

$f(9)=\sqrt{9}-1=2$

$f(9-0)=\lim\limits_{x\to9-0}f(x)=\lim\limits_{x\to9}(\sqrt{x}-1)=2$;

$f(9+0)=\lim\limits_{x\to9+0}f(x)=\lim\limits_{x\to9}(x-4)=5$.

Так как $f(0-0)\neq f(0+0)$, но оба предела конечны, заключаем, что $f(x)$ в точке $x=9$ терпит разрыв 1 рода.



2.2. $y=\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$.

Данная функция определена для всех значений x, для которых $x^2-4x+3\neq 0$, т.е. $x\neq 1$ и $x\neq 3$.

Во всех точках своей области определения $D(y)=\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$ функция непрерывна. Точки $x=1$ и $x=3$ являются точками разрыва, так как в этих точках функция не определена.

Определим тип точки разрыва $x=1$. Для этого находим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{2x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1-0}\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{2\cdot(1-0)}{(1-0-1)(1-0-3)}=\frac{2}{-0\cdot(-2)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1+0}\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{2\cdot(1+0)}{(1+0-1)(1+0-3)}=\frac{2}{+0\cdot(-2)}=-\infty;$$

Односторонние пределы равны бесконечности, следовательно, в точке $x=1$ разрыв 2-го рода.

Определим тип точки разрыва $x=3$. Для этого находим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{2x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3-0}\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{2\cdot(3-0)}{(3-0-1)(3-0-3)}=\frac{6}{2\cdot(-0)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{2x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3+0}\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{2\cdot(3+0)}{(3+0-1)(3+0-3)}=\frac{6}{2\cdot(+0)}=+\infty;$$

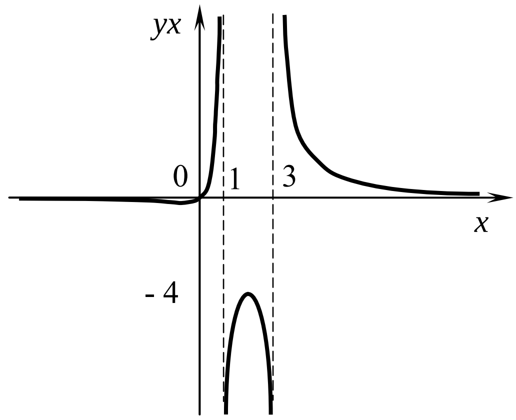
Односторонние пределы равны бесконечности, следовательно, в точке $x=3$ разрыв 2-го рода.

Исследуем поведение функции на бесконечности

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2-4x+3}=\begin{vmatrix}m=1\\ n=2\\ m<n\end{vmatrix}=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-4x+3}=\begin{vmatrix}m=1\\ n=2\\ m<n\end{vmatrix}=+\infty.$$

Вычислим значения функции в некоторых точках:

x	-2	-1	0	2	4	5
y	-0,27	-0,25	0	-4	2,67	1,25



3. Найдите производную функции:

3.1. $y=-\dfrac{4}{x^4}+3\sqrt[3]{x}-\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\ln(\cos 3)$;

3.2. $y=\dfrac{\cos 3x+4}{\sin 3x}$;

3.3. $y=e^{3x/4}+\dfrac{4x-5}{3}$;

3.4. $y=\operatorname{tg} x\cdot 5^{-0,5\cos^2 x}$;

3.5. $y=\sqrt[4]{\operatorname{arctg}(2x-1)}$;

3.6. $y=\log_4{}^3(3x-x^2)$.

Решение

3.1. $y=-\dfrac{4}{x^4}+3\sqrt[3]{x}-\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\ln(\cos 3)$;

$$y'=\left(-\frac{4}{x^4}+3\sqrt[3]{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}-\ln(\cos 3)\right)'=\left(-\frac{4}{x^4}\right)'+\left(3\sqrt[3]{x}\right)'-\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)'-$$

$$-\left(\ln(\cos 3)\right)'=-4\left(x^{-4}\right)'+3\left(x^{1/3}\right)'-\frac{1}{2}\left(x^{1/2}\right)'-0=16x^{-5}+x^{-2/3}-\frac{1}{4}x^{-1/2};$$

3.2. $y=\dfrac{\cos 3x+4}{\sin 3x}$;

$$y'=\left(y=\frac{\cos 3x+4}{\sin 3x}\right)'=\frac{\left(\cos 3x+4\right)'\sin 3x-\left(\cos 3x+4\right)\left(\sin 3x\right)'}{\left(\sin 3x\right)^2}=$$

$$=\frac{-3\sin 3x\sin 3x-\left(\cos 3x+4\right)3\cos 3x}{\left(\sin 3x\right)^2}=\frac{-3\sin^2 3x-3\cos^2 3x-12\cos 3x}{\left(\sin 3x\right)^2}$$

$$=\frac{-3-12\cos 3x}{\left(\sin 3x\right)^2};$$

3.3. $y=e^{3x/4}+\dfrac{4x-5}{3}$;

$$y' = \left(e^{3x/4} + \frac{4x-5}{3} \right)' = \left(e^{3x/4} \right)' + \left(\frac{4x-5}{3} \right)' = \frac{3}{4} e^{3x/4} + \frac{4}{3};$$

3.4. $y = \operatorname{tg} x \cdot 5^{-0,5\cos^2 x}$;

$$y' = \left(\operatorname{tg} x \cdot 5^{-0,5\cos^2 x} \right)' = \left(\operatorname{tg} x \right)' 5^{-0,5\cos^2 x} + \operatorname{tg} x \cdot \left(5^{-0,5\cos^2 x} \right)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 5^{-0,5\cos^2 x} + \operatorname{tg} x \cdot 5^{-0.5\cos^2 x} \ln 5 \cdot \left(\cos x \cdot \sin x \right).$$

3.5. $y = \sqrt[4]{\operatorname{arctg}(2x-1)}$;

$$y' = \left(\sqrt[4]{\operatorname{arctg}(2x-1)} \right)' = \left((\operatorname{arctg}(2x-1))^{\frac{1}{4}} \right)' = \frac{1}{4} (\operatorname{arctg}(2x-1))^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{2}{1+(2x-1)^2};$$

3.6. $y = \log_4{}^3 (3x - x^2)$.

$$y' = \left(\log_4{}^3 (3x - x^2) \right)' = 3\log_4{}^2 (3x - x^2) \cdot \frac{3-2x}{(3x-x^2)\ln 4}.$$

4. Найдите пределы, пользуясь правилом Лопиталя:

4.1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 2x - 3}{x + x^2}$;

4.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{\sin^2 2x}$;

4.3. $\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{1}{e^{x+3} - 1} - \dfrac{x}{x^2 - 9} \right)$;

4.4. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3 + 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 5x^3 - x}$.

Решение

4.1.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x - x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3 + 2x - 3)'}{(x - x^2)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2x}{1 - 2x} = \frac{3\cdot 1^2 + 2\cdot 1}{1 - 2\cdot 1} = -5;$$

4.2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{\sin^2 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 5x)'}{(\sin^2 2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

$$= \frac{5}{4} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 5x)'}{(\sin 2x \cos 2x)'} = \frac{5}{4} \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x}{2\cos 2x \cdot \cos 2x - 2\sin 2x \cdot \sin 2x} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{8};$$

4.3.

$$\lim_{x\to -3} \left(\frac{1}{e^{x+3} - 1} - \frac{x}{x^2 - 9} \right) = \left\{ \infty - \infty \right\} = \lim_{x\to -3} \frac{x^2 - 9 - xe^{x+3} + x}{(e^{x+3} - 1)(x^2 - 9)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x^2 - 9 - xe^{x+3} + x)'}{(e^{x+3} - 1)'(x^2 - 9) + (e^{x+3} - 1)(x^2 - 9)'} = \lim_{x\to -3} \frac{2x - e^{x+3} - xe^{x+3} + 1}{e^{x+3}(x^2 - 9) + (e^{x+3} - 1)\cdot 2x} =$$

$$=\frac{2\cdot(-3)-1+3\cdot 1+1}{1\cdot 0+0\cdot(-6)}=\left\{\frac{-3}{0}\right\}=\infty;$$

4.4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2-3x+6}{x^2+5x^3-x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+4x^2-3x+6)'}{(x^2+5x^3-x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+8x-3}{2x+15x^2-1}=$$

$$=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+8x-3)'}{(2x+15x^2-1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+8}{2+30x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x+8)'}{(2+30x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{30}=$$

$$=\frac{1}{5}.$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке:

5.1. $y=x^3-3x^2+4$, $[1;3]$ $\qquad$ $y=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$, 5.2. $[-1;3]$.

Решение

5.1. $y=x^3-3x^2+4,\quad [1;3]$.

Найдем производную данной функции

$$y'=(x^3-3x^2+4)'=3x^2-6x.$$

Решим уравнение $y'=0$

$$3x^2-6x=0\Rightarrow 3x(x-2)=0\Rightarrow x=0,\ x=2;$$

$$x=0\notin[1;3];\quad x=2\in[1;3]$$

Вычислим значение функции в точке $x=2$ и на концах отрезка, т.е. при $x=1$ и $x=3$

$$y(1)=1^3-3\cdot 1^2+4=2,$$

$$y(2)=2^3-3\cdot 2^2+4=0,$$

$$y(3)=3^3-3\cdot 3^2+4=4.$$

Следовательно, $y_{\text{наиб.}}=4,\ y_{\text{наим.}}=0$.

5.2. $y=\dfrac{4x-1}{x^2+3},\quad [-1;3]$.

Найдем производную данной функции

$$y'=\left(\frac{4x-1}{x^2+3}\right)'=\frac{4(x^2+3)-(4x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{4x^2+12-8x^2+2x}{(x^2+3)^2}=$$

$$=\frac{-4x^2+2x+12}{(x^2+3)^2}.$$

Решим уравнение $y'=0$

$$\frac{-4x^2+2x+12}{(x^2+3)^2}=0\Rightarrow -4x^2+2x+12=0;$$

$2x^2 - x - 6 = 0$,
$D = 1 + 48 = 49$,

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -1,5 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

$x_1 = -1,5 \notin [-1;3]$; $\quad x_2 = 2 \in [-1;3]$.

Вычислим значение функции в точке $x = 2$ и на концах отрезка, т.е. при $x = -1$ и $x = 3$

$$y(-1) = \frac{4 \cdot (-1) - 1}{(-1)^2 + 3} = -\frac{5}{4};$$

$$y(2) = \frac{4 \cdot 2 - 1}{2^2 + 3} = \frac{7}{7} = 1;$$

$$y(3) = \frac{4 \cdot 3 - 1}{3^2 + 3} = \frac{11}{12}.$$

Следовательно, $y_{\text{наиб.}} = 1$, $y_{\text{наим.}} = -\dfrac{5}{4}$.

6. Найдите интервалы монотонности и экстремумы функции:

6.1. $y = \dfrac{x^2 + 4}{2x}$; 6.2. $y = x \cdot e^{-x^2}$.

Решение

6.1. $y = \dfrac{x^2 + 4}{2x}$.

Область определения данной функции $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Находим производную

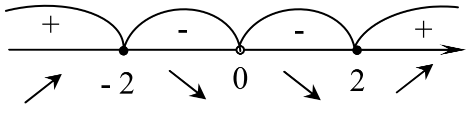
$$y' = \left(\frac{x^2 + 4}{2x} \right)' = \frac{(x^2 + 4)' \cdot 2x - (x^2 + 4) \cdot (2x)'}{(2x)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot 2x - (x^2 + 4) \cdot 2}{4x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 8}{4x^2} = \frac{2x^2 - 8}{4x^2} = \frac{2(x^2 - 4)}{4x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2}.$$

Критическими точками функции являются те точки, в которых производная равна нулю или не существует, т.е.

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ 2x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) = 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Из системы следует, что производная равна нулю в точках $x_1 = -2$, $x_3 = 2$ и не существует в точке $x_2 = 0$.



$$y'(-3)=\left(\frac{x^2-4}{2x^2}\right)\Bigg|_{x=-3}=\frac{(-3)^2-4}{2(-3)^2}=\frac{5}{18}>0\,;$$

$$y'(-1)=\left(\frac{x^2-4}{2x^2}\right)\Bigg|_{x=-1}=\frac{(-1)^2-4}{2(-1)^2}=\frac{-3}{2}<0\,;$$

$$y'(1)=\left(\frac{x^2-4}{2x^2}\right)\Bigg|_{x=1}=\frac{1^2-4}{2\cdot 1^2}=\frac{-3}{2}<0\,;$$

$$y'(3)=\left(\frac{x^2-4}{2x^2}\right)\Bigg|_{x=3}=\frac{3^2-4}{2\cdot 3^2}=\frac{5}{18}>0\,.$$

Таким образом, функция возрастает на интервалах $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$;

функция убывает на интервалах $(-2;\,0)$ и $(0;\,2)$;

$x_1=-2$ – точка максимума;

$x_3=2$ – точка минимума.

Находим экстремумы:

Максимум $y_{\max}=y(-2)=\left(\dfrac{x^2+4}{2x}\right)\Bigg|_{x=-2}=\dfrac{(-2)^2+4}{2(-2)}=\dfrac{8}{-4}=-2$;

Минимум $y_{\min}=y(2)=\left(\dfrac{x^2+4}{2x}\right)\Bigg|_{x=2}=\dfrac{2^2+4}{2\cdot 2}=\dfrac{8}{4}=2$.

6.2. $y=x\cdot e^{-x^2}$

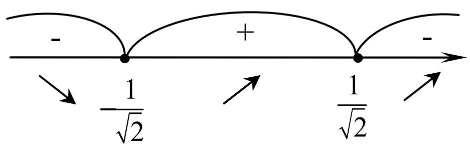
Область определения данной функции $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Находим производную

$$y'=\left(x\cdot e^{-x^2}\right)'=1\cdot e^{-x^2}+x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=e^{-x^2}(1-2x^2)\,.$$

Критическими точками функции являются те точки, в которых производная равна нулю или не существует. Точек, в которых производная $y'=e^{-x^2}(1-2x^2)$ не существует, нет.

$$y'=0\Rightarrow e^{-x^2}(1-2x^2)=0\;\Rightarrow\; e^{-x^2}\neq 0,\ 1-2x^2=0\Rightarrow x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Данная функция имеет две критические точки $x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



$$y'(-1)=\left(e^{-x^2}(1-2x^2)\right)\Big|_{x=-1}=e^{-(-1)^2}(1-\sqrt{2}\cdot(-1))(1+\sqrt{2}\cdot(-1))<0\,;$$

$$y'(0)=\left(e^{-x^2}(1-2x^2)\right)\Big|_{x=0}=e^{-(0)^2}(1-\sqrt{2}\cdot 0)(1+\sqrt{2}\cdot 0)>0;$$

$$y'(1)=\left(e^{-x^2}(1-2x^2)\right)\Big|_{x=1}=e^{-(1)^2}(1-\sqrt{2}\cdot 1)(1+\sqrt{2}\cdot 1)<0.$$

Таким образом,

функция возрастает на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

функция убывает на интервалах $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ $(0;2)$;

$x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ – точка максимума;

$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ – точка минимума.

Находим экстремумы:

Максимум $y_{\max}=y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(xe^{-x^2}\right)\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2e}}$;

Минимум $y_{\min}=y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(xe^{-x^2}\right)\Big|_{x=-\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2e}}$.