Министерство образования Российской Федерации
Томский политехнический университет

В.К.Барышева, Ю.И.Галанов,

Е.Т.Ивлев, Е.Г.Пахомова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Издательство ТПУ
Томск 2004

УДК 519.21(0.75,8)
ББК 22 171 Я73
Т338

Барышева В.К., Галанов Ю.И., Ивлев Е.Т.,
Пахомова Е.Г.
Т338 Теория вероятностей. Учебное пособие. — Томск: Изд–во ТПУ, 2004. — 136 с.

ISBN

Пособие содержит решение типовых задач по основным разделам теории вероятностей, предусмотренных программой подготовки бакалавров и магистров. Каждый раздел содержит краткое теоретическое введение, решение типовых задач и задачи для самостоятельного решения. Приведено 20 вариантов индивидуальных заданий по 11 задач в каждом. Работа предназначена для студентов второго курса, изучающих теорию вероятностей и для преподавателей, ведущих практические занятия по данному курсу.

УДК 519.21(0.75,8)
ББК 22 171 Я73

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Рецензенты

Кандидат физико-математических наук, доцент ТПУ
А.А. Лучинин

Кандидат физико-математических наук, доцент СГТИ
И.Л. Фаустова

Кандидат технических наук, доцент ТГУ
И.Г. Устинова

ISBN

Введение

Теория вероятностей — раздел математики, в котором изучаются общие закономерности случайных явлений массового характера независимо от их конкретной природы. Она разрабатывает методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные явления. Знание этих закономерностей позволяют предвидеть, как эти события будут протекать в реальном опыте.

Исторически первым полем приложения статистических методов анализа явились азартные игры. Схемы азартных игр явились первыми четкими моделями случайных явлений (начало XVII века: Галилей, Паскаль, Ферма, Гюйгенс, Якова Бернулли). В связи с серьезными потребностями естествознания (теория ошибок, теория стрельбы, статистика народонаселения) в XVIII веке создавался развитой математический аппарат и связан с именами Муавра, Лапласа, Гаусса, Пуассона.

Окончательно теория вероятностей как математическая наука оформилась в 30-х годах XX века, когда А. Н. Колмогоровым была предложено *аксиоматическое определение* вероятности.

Во второй половине XX века характерно проникновение статистических методов во все отрасли человеческих знаний. Это теоретическая физика, кибернетика, теория информации, теория массового обслуживания, теория надежности, математическая теория игр, теория операций и др. Теория вероятностей, как прикладная наука, стала одним из надежных, точных и эффективных способов познания реальной действительности.

Структура пособия следующая. В начале каждого параграфа дается сжатое теоретическое введение, содержащее основные определения, формулировки главных теорем и необходимые формулы. Затем приводится полное решение нескольких характерных задач и задачи для самостоятельного решения; большинство из них снабжены ответами.

Работа содержит 20 заданий по 11 задач в каждом.

Задача 1 имеет целью привить навыки решения *комбинаторных* задач.

Задача 2 посвящена теме *«Алгебра событий»*.

Задачи 3-4 — на подсчет вероятностей *по классической схеме.*

Задача 5 предусматривает подсчет вероятностей сложных событий с помощью *формул сложения и умножения вероятностей.*

Задача 6 посвящена *независимым испытаниям*, в каждом из которых вероятность появления события одинакова.

Задача 7 предусматривает подсчет вероятностей сложных событий с помощью *формулы полной вероятности и формулы Байеса.*

Задачи 8-9 по теме *«Дискретные и непрерывные случайные величины».*

Задача 10 посвящена *числовым характеристикам* случайных величин.

Задача 11 — по теме *«Законы распределения случайных величин».*

Цель данного пособия:

- Дать студентам некоторые Методические рекомендации, разъясняющие подход к решению задач.
- Активизировать самостоятельную работу студентов, предложив им индивидуальные задания.

Настоящие пособие рекомендуются в помощь студентам второго курса при изучении темы «Теория вероятностей», а также преподавателям — при подготовке к практическим занятиям.

Глава 1

Случайные события и их вероятности

1.1 Алгебра событий

1.1.1 Классификация событий

Под опытом (*экспериментом, испытанием*) будем понимать воспроизведение некоторого конкретного комплекса условий. Всякое испытание заканчивается одним и только одним из исходов. Опыт называется *случайным*, если его результат точно нельзя предсказать. Всякий исход опыта называется *событием*. Исходы случайного эксперимента называются *случайными событиями*. События будем обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C, D, ...

Примеры событий:

- Появление герба при бросании монетки.
- Попадание в цель при выстреле.
- Обнаружение объекта при одном цикле обзора радиолокационной станции.
- Обрыв нити в течение часа работы ткацкого станка.

Событие называется *достоверным*, если оно в результате опыта обязательно произойдет, и обозначается Ω.

Событие называется *невозможным*, если оно в результате опыта не может произойти, и обозначается $\emptyset$.

Пусть, например, при бросании двух монет наступили события: A — выпадение двух решек, B — выпадение не более двух решек, C — выпадение трех решек. Здесь A — случайное событие, B — достоверное событие, C — невозможное событие.

Два события называются *несовместными*, если их совместное осуществление — событие невозможное при одном испытании. Если события не являются несовместными, то они *совместны*.

Различают *элементарные* и *составные* события. Событие называется *элементарным* в условиях данного опыта, если оно является результатом одного и только одного исхода. Все остальные события называются *составными*.

Множество всех взаимоисключающих (*элементарных*) в условиях данного опыта событий $(\omega_1,\ \omega_2,\ldots,\omega_n)$ называется *пространством элементарных событий* и обозначается Ω, а сами эти события называются точками этого пространства. Это множество составляет, в то же время, достоверное событие.

Говорят, что несколько событий в условиях данного опыта образуют *полную группу событий*, если в результате опыта обязательно произойдет одно и только одно из них.

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A, если они несовместны и образуют полную группу.

1.1.2 Алгебра событий

Алгебра[1] событий строится по аналогии с алгеброй в теории множеств. Будем изображать пространство элементарных событий Ω в виде прямоугольника, а любое событие в виде произвольной геометрической фигуры схема Эйлера — Венна, см. рисунок 1.1.

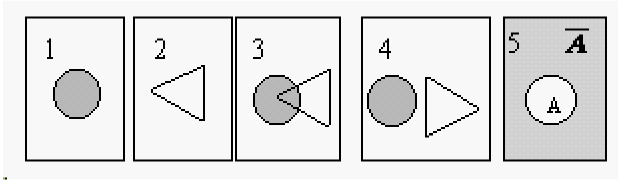


Рис. 1.1. 1–событие A; 2–событие B; 3–A, B совместны;4–A, B несовместны; 5–событие A и ему противоположное

Случайное событие — это некоторая выделенная подгруппа элементарных событий, рассматриваемая как одно

---

[1] Алгебра — это множество элементов с операциями, установленными на данном множестве.

целое. Следовательно, случайное событие, в рамках данного случайного опыта, может иметь различные формы реализации. В математической модели случайное событие A — это подмножество множества Ω: $A \subset \Omega$.

Для того чтобы математически выражать отношения между элементарными и составными (простыми или сложными) событиями достаточно ввести две основные операции: взятие противоположного события и одну из двух операций — сложение или умножение событий. Все другие операции выражаются через основные.

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$ $(C = A \cup B)$, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий, то есть, если наступает **или** одно событие A, **или** одно событие B, **или** оба события вместе.

Произведением событий A и B называется событие $C = AB$, $C = A \cap B)$, состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих одновременно и событию A и событию B, т.е. когда происходят вместе **и** событие A, **и** событие B. Введенные операции удобно изобразить на схеме Эйлера — Венна (1.2, 1.3), где результаты операций изображены в виде заштрихованных областей.

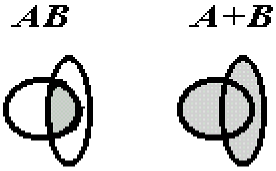


Рис. 1.2. Произведение и сумма совместных событий

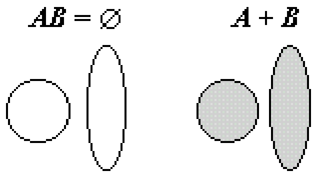


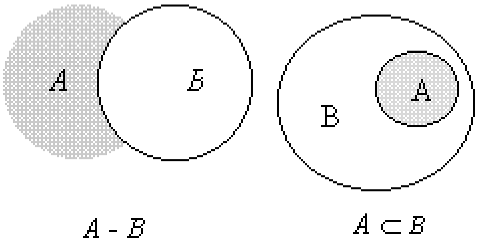
Рис. 1.3. Произведение и сумма несовместных событий

События называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементарных событий (эквивалентные, или равносильные события). Введенные операции над событиями обладают следующими свойствами:

$$\begin{array}{ll}
A+A=A & A\cdot A=A \\
A+B=B+A & (A+B)+C=A+(B+C) \\
A+\Omega=\Omega & A\cdot\Omega=A \\
AB=BA & A\cdot\emptyset=\emptyset \\
A(B+C)=AB+AC & A+(BC)=(A+B)(A+C) \\
A+\overline{A}=\Omega & A+\emptyset=A \\
\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB} & \overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{A+B}
\end{array}$$

Разностью событий A и B называется событие $C = A - B$ или ($C = A\backslash B = A\cdot\overline{B}$), состоящее из элементарных событий, которые принадлежат A, но не принадлежат B, т.е. событие A происходит без события B.

Говорят, что событие A *влечет* событие B ($A \subset B$), если при совершении события A событие B обязательно произойдет (событие A содержится в B). (Рисунок 1.4)



А - В

А ⊂ В

Рис. 1.4. Схема Эйлера–Венна для *разности* и *включения*.

1.1.3 Решение задач

Задача. 1.1.1 *По каналу связи последовательно передано три знака. Описать пространство элементарных событий и события:*

1. *принят только первый знак;*
2. *принят, по крайней мере, один знак;*
3. *приняты два и только два знака;*
4. *принято меньше двух знаков;*
5. *принят один знак*

Решение. Используем цифры 0, 1 для обозначения событий: 0 — знак искажен, 1 — знак принят. Тогда пространство элементарных событий запишется в виде

- Ω ={000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111} и имеет размерность восемь.
- Событие A_1 — принят только первый знак: $A_1 = \{100\}$;
- Событие A_2 — принят по крайней мере один знак:
- $A_2 = \{100 + 010 + 001 + 110 + 101 + 011 + 111\} = \Omega \backslash \{000\}$;
- Событие A_3 — приняты два и только два знака: $A_3 = \{110 + 011 + 101\}$;
- Событие A_4 — принято меньше двух знаков: $A_4 = \{000 + 100 + 010 + 001\}$;
- Событие A_5 — принят один знак: $A_5 = \{100 + 010 + 001\}$.

Из полученных результатов следует, что

1. события A_1 и A_3 — несовместные
2. события A_4, A_3 — несовместные
3. события A_3, A_5 — несовместные
4. A_5 влечет A_4 $(A_5 \subset A_4)$
5. события A_1 и A_2 — совместны,
6. A_2 и A_3, A_1 и A_4, A_1 и A_5, A_2 и A_4 — совместные;
7. $A_1 \subset A_5 \subset A_4$; $A_3 \subset A_2$; $A_1 = A_5 + A_2$.

Изобразим эти события на схеме Эйлера–Венна.(1.5)

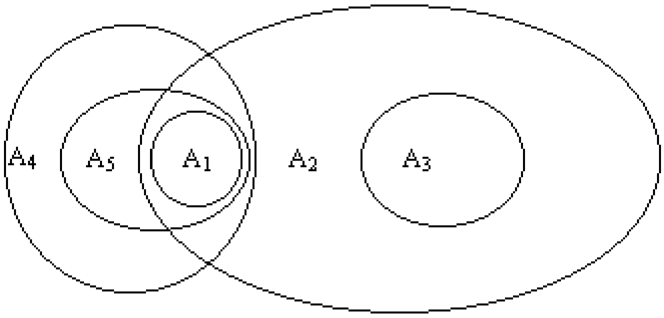


Рис. 1.5. К решению задачи 1.1.1

Задача. 1.1.2 *Игральная кость брошена дважды.*

1. *Описать пространство элементарных событий* Ω.
2. *Описать пространство элементарных событий, если его элементами служат суммы выпавших очков.*
3. *Назвать элементы* Ω*, составляющие события:*
   - A *— сумма очков равна 7;*
   - B *— хотя бы на одной кости выпала 1;*
   - C *— сумма очков делится на 3.*
4. *Описать словами события:*
   - $D = \{(11), (12), (21)\}$;
   - $E = \{(46), (55), (64)\}$.
5. *Изобразить события* A, B, C, D, E *на диаграмме Эйлера–Венна.*

Решение.

1. $\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, ..., 66\}$,
2. $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
3.
   - $A = \{16, 61, 34, 43, 25, 52\}$;
   - $B = \{11, 12, 21, 13, 31, 14, 41, 15, 51, 16, 61\}$
   - $C = \{12, 21, 36, 63, 45, 54, 33, 15, 51, 24, 42, 66\}$.
   - D = {СУММА ОЧКОВ РАВНА 2 ИЛИ 3 };
   - E = {СУММА ОЧКОВ РАВНА 10}.

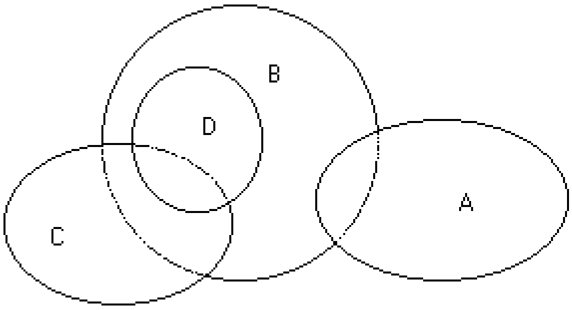


Рис. 1.6. Схема Эйлера — Венна к решению задачи 1.1.2

Задача. 1.1.3 *Даны две электрические схемы:*

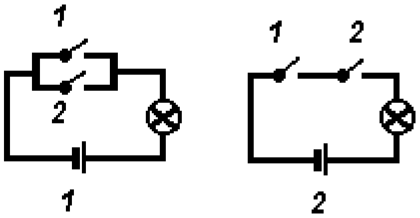


Рис. 1.7. К решению задачи 1.1.3

Описать событие: C = {ЦЕПЬ ЗАМКНУТА} *для каждого случая.*

Решение. Введем обозначения: событие A — контакт 1 замкнут; событие B — контакт 2 замкнут; событие C — цепь замкнута, лампочка горит.

1. Для параллельного соединения цепь замкнута, когда хотя бы один из контактов замкнут, поэтому $C = A + B$;
2. Для последовательного соединения цепь замкнута, когда замкнуты оба контакта, поэтому $C = A \cdot B$.

Задача. 1.1.4 *Составлены две электрические схемы:*

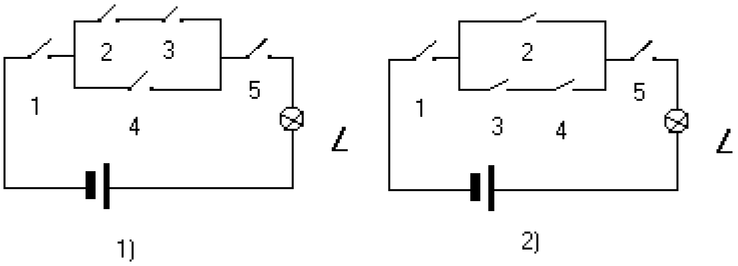


Рис. 1.8. К решению задачи 1.1.4

Событие A *— цепь замкнута, событие* $A\ _i$ *–* i*–й контакт замкнут. Для какой из них справедливо соотношение*

$$A_1 \cdot (A_2 + A_3 \cdot A_4) \cdot A_5 = A?$$

Решение. Для первой схемы $A = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3 + A_4 \cdot A_5)$, так как параллельному соединению соответствует сумма событий, а последовательному соединению — произведение событий. Для второй схемы $A = A_1 \cdot (A_2 + A_3 \cdot A_4 \cdot A_5)$. Следовательно, данное соотношение справедливо для второй схемы.

Задача. 1.1.5 *Упростить выражение* $(A+B)(B+C)(C+A)$.

Решение. Воспользуемся свойствами операций сложения и умножения событий.

$$\begin{aligned}(A+B)(B+C)(A+C) &= \\ (AB+AC+BB+BC)(A+C) &= \\ = (AB+AC+B+BC)(A+C) &= \\ (AB+AC+B)(A+C) = (B+AC)(A+C) &= \\ = BA+BC+ACA+ACC = BA+BC+AC&.\end{aligned}$$

Задача. 1.1.6 *Доказать, что события* $A, \overline{A}B$ *и* $\overline{A+B}$ *образуют полную группу.*

Решение. При решении задачи воспользуемся свойствами операций над событиями. В начале покажем, что эти события попарно несовместны.

$$A \cdot \left(\bar{A}B\right) = \left(A\bar{A}\right) B = \emptyset \cdot B = \emptyset$$

$$A\left(\overline{A+B}\right) = A\left(\bar{A} \cdot \bar{B}\right) = \left(A\bar{A}\right) B = \emptyset B = \emptyset$$

$$\bar{A}B \cdot \left(\overline{A+B}\right) = \bar{A}B \cdot \left(\bar{A}\bar{B}\right) = \bar{A}\bar{A}\left(B\bar{B}\right) = \bar{A}\emptyset = \emptyset$$

А теперь покажем, что сумма этих событий дает пространство элементарных событий.

$$\begin{aligned}A + \overline{A}B + \overline{A+B} = A + \overline{A}B + \overline{A} \cdot \overline{B} &= \\ = A + \overline{A}(B+\overline{B}) = A + \overline{A}\Omega = A + \overline{A} = \Omega&\end{aligned}$$

Задача. 1.1.7 *С помощью схемы Эйлера–Венна проверить правило де-Моргана:*

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

Решение.

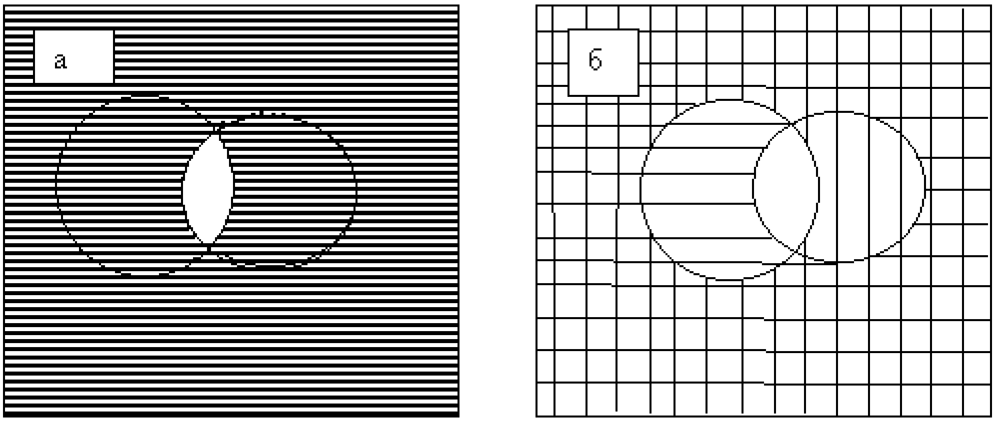


Рис. 1.9. К решению задачи 1.1.7

а) Заштриховано событие $\overline{AB}$.

б) Событие $\overline{A}$ — вертикальная штриховка; событие $\overline{B}$ — горизонтальная штриховка. Событие $\{\overline{A}+\overline{B}\}$ — заштрихованная область.

Из сопоставления рисунков а) и в) следует:

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}.$$

1.1.4 Задачи для самостоятельного решения

Задача. 1.1.1 *По радиоканалу передано 3 сообщения. События A_i — i-е сообщение искажено помехами. Описать события:*

- E_1 — *искажено только одно сообщение;*
- E_2 — *искажено хотя бы одно сообщение;*
- E_3 — *ни одно сообщение не искажено;*
- E_4 — *второе сообщение искажено;*
- E_5 — *первое и второе сообщения искажены.*

Ответ:

- $E_1 = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$;
- $E_2 = \Omega \backslash \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$;
- $E_3 = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$;
- $E_4 = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$;
- $E_5 = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3}$.

Задача. 1.1.2 *При наличии трех патронов производится стрельба по цели до первого попадания. Описать пространство элементарных событий и события:*

- E_1 *— попадание при первых двух выстрелах;*
- E_2 *— произведено не более двух выстрелов;*
- E_3 *— израсходованы все патроны.*

Ответ: $\Omega = \{$П, НП, ННП, ННН$\}$; $E_1 =$ НП; $E_2 =$ П+НП; $E_3 =$ ННН+ННП.

Задача. 1.1.3 *Среди студентов, собравшихся на лекцию, выбирают наудачу одного. Событие A — выбран юноша, B — он не курит, C — он живет в общежитии.*

1. *Описать событие* $AB\overline{C}$*;*
2. *При каком условии имеет место тождество* $ABC = A$*?*
3. *Когда справедливо соотношение* $\overline{C} \subset B$*?*

Ответ:

1. Любой выбранный юноша не курит и не живет в общежитии;
2. Все юноши живут в общежитии и не курят;
3. Не живущие в общежитии юноши не курят.

Задача. 1.1.4 *Упростить выражение* $(\overline{A} + BC)(\overline{B} + AC)(\overline{C} + AB)$.

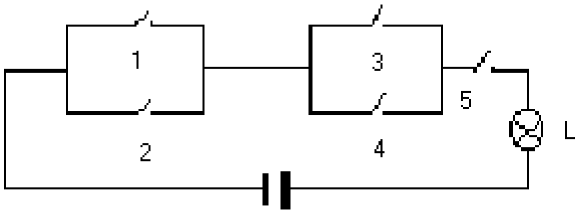
Ответ: $A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

Задача. 1.1.5 *Доказать, что* $A + B = AB + A\overline{B} + B\overline{A}$

Задача. 1.1.6 *Изобразить на схеме Эйлера–Венна событие:*

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

Задача. 1.1.7 *Составлена электрическая схема, где события* A_i *— i-й контакт замкнут.*



Записать событие C *цепь замкнута — лампочка* L *горит.*

Ответ: $C = (A_1 + A_2)(A_3 + A_4) \cdot A_5$.

1.2 Вероятность события

Чтобы сравнивать события по степени возможности их наступления, вводится количественная характеристика, называемая вероятностью события.

Понятие вероятности события является в теории вероятности первичным, не сводимым к другим понятиям. Имеется несколько подходов, поясняющих понятие вероятности.

1.2.1 Статистический подход к понятию вероятности

Пусть при проведении серии из n испытаний событие A наступило m раз $(m \leqslant n)$. Число $\frac{m}{n} = P^*(A)$ называется относительной частотой появления события A в данной серии испытаний. Если провести другую серию из n_1 опытов, то получим другое число $P^*_{n1}(A) = \frac{m_1}{n_1}$.

Если в различных сериях испытаний относительные частоты наступления события A незначительно отличаются друг от друга, то говорят, что частота обладает свойством устойчивости. В качестве вероятности события A принимают число $P_A = P(A)$, вблизи которого колеблется частота события при неограниченном увеличении числа испытания в серии, т.е.

$$P_A = P(A) = \lim_{n_k \to \infty} P^*_{n_k}(A) \tag{1.1}$$

1.2.2 Классическое определение вероятности

Классическое определение вероятности основано на понятии равновозможных событий, образующих полную группу несовместных событий. Об опыте, исходы которого образуют полную группу попарно несовместных, равновозможных событий, говорят, что он укладывается в классическую схему.

Равновозможные события, составляющие полную группу, называют случаями.

По отношению к каждому событию случаи делятся на благоприятные, при которых происходит событие, и неблагоприятные, при которых событие не происходит.

Вероятностью появления некоторого события A называется отношение числа случаев, благоприятствующих появлению этого события, к общему числу равновозможных в данном опыте случаев и обозначается

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.2}$$

где

m — число исходов, благоприятствующих событию A,

n — общее число исходов опыта.

Это определение вероятности называется классическим. Достоинство определения — вероятность события можно определить до опыта. Недостаток — вероятность можно определить только для равновозможных исходов опыта.

1.2.3 Геометрическая вероятность

Классическое определение вероятности непосредственно применимо лишь к опытам, которые имеют конечное число равновозможных исходов.

Однако его можно распространить и на некоторые опыты, которые имеют бесконечное множество равновозможных исходов.

Это можно применять в задачах, сводящихся к случайному бросанию точки на конечный участок прямой, плоскости, пространства.

Если возможность появления точки внутри некоторой области или пространства определяется не положением этой области и ее границами, а только ее мерой, т.е. длиной, площадью, объемом, то вероятность появления случайной точки внутри некоторой области находится как отношение меры этой области к мере всей области, в которой может появиться данная точка:

$$P\left(A\right)=\frac{Mes\left(A\right)}{Mes\left(\Omega\right)} \tag{1.3}$$

или

$$P(A)=\frac{l_1}{l};\quad P(A)=\frac{S_1}{S};\quad P(A)=\frac{V_1}{V}, \tag{1.4}$$

соответственно, для отрезка l прямой, области S на плоскости, области V пространства. Это определение вероятности называется *геометрическим.* [2]

1.2.4 Аксиомы вероятности

В математической модели случайного эксперимента вероятность вводится как числовая функция, заданная на множестве событий, связанных с данным экспериментом. При этом вероятность события обладает всеми свойствами относительной частоты появления события. Эти свойства считаются аксиомами.

---

[2] Определение вероятности (1.3) подходит и для классического случая, так как мерой события является число элементарных событий, составляющих данное.

Аксиома 1 (Аксиома неотрицательности)

$$0 \leqslant P(A)$$

для всех событий, определенных на Ω.

Аксиома 2 (Аксиома нормировки)

$$P(\Omega) = 1$$

Аксиома 3 (Аксиома сложения) *Если* $AB = \emptyset$, *то*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Аксиома сложения распространяется на любое конечное семейство попарно непересекающихся событий:

Аксиома 4 (Расширенная аксиома сложения) *Если события* $A_1, \ldots, A_n$ *попарно несовместны, то*

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Следующие свойства вероятности выводятся как следствия из данных аксиом:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. $P(A) \leqslant P(B)$ если $A \subset B$;
3. Если $\overline{A}$ — событие, противоположное событию A, то

$$P\left(\bar{A}\right) = 1 - P\left(A\right)$$

1.2.5 Элементы комбинаторики

При решении задач на классическую вероятность приходится подсчитывать число способов (*комбинаций*), с помощью которых может осуществиться некоторое событие (действие). Задачи такого рода называют *комбинаторными*. При подсчете числа комбинаций руководствуются принципами сложения и произведения комбинаций.

Принцип сложения комбинаций состоит в том, что если некоторое действие может осуществиться несколькими независимыми способами, то общее число способов осуществления этого действия равно числу таких способов.

Принцип произведения комбинаций заключается в следующем. Если какое-либо действие осуществляется за k последовательных шагов, при этом первый шаг может быть реализован n_1 числом способом, второй шаг n_2 числом способов, k-й шаг — n_k способами, то общее число способов реализации действия равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пусть мы имеем конечное множество элементов. Тогда из элементов данного множества можно составить различные соединения (подмножества), отличающиеся либо своим составом, либо порядком взаимного расположения.

Перестановками из *n* элементов называют всевозможные упорядоченные соединения из данных элементов. Число таких перестановок P_n подсчитывается с помощью принципа произведения комбинаций: первый элемент в перестановке можно выбрать n числом способов, второй — $(n-1)$ числом, третий — $(n-2)$ числом и т.д.

Общее число комбинаций равно:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n! \qquad (1.5)$$

Размещениями из *n* элементов по *m* называются всевозможные упорядоченные соединения (подмножества) m элементов из n данных элементов. Число размещений A_n^m (от французского *arrangement* — размещение) подсчитывается по тому же принципу, что и число перестановок:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (1.6)$$

Сочетанием из *n* элементов по *m* называется любое неупорядоченное подмножество m элементов из n. Число сочетаний C_n^m (от латинского *combinare* - соединить) подсчитывается следующим образом. Если во всех сочетаниях произвести всевозможные перестановки, то мы получим всевозможные размещения. Следовательно, имеет место формула

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}. \qquad (1.7)$$

Основное свойство сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \tag{1.8}$$

1.2.6 Решение задач

Задача. 1.2.1 *Сколькими способами можно рассадить 8 человек:*

1. *В один ряд?*
2. *За круглым столом?*

Решение.

1. Искомое число способов равно числу перестановок из 8, т.е.
   $$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$
2. Так как за круглым столом выбор первого человека не влияет на чередование элементов, то первым можно взять любого, а оставшихся упорядочим относительно выбранного. Это действие можно осуществить $\frac{8!}{8} = 5040$ способами.

Задача. 1.2.2 *На курсе изучается 5 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на субботу, если в этот день должны быть две различные пары?*

Решение. Искомое число способов есть число размещений из 5 по 2, так как нужно учесть порядок пар: $A_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 20$

Задача. 1.2.3 *Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 человек, можно составить из 15 преподавателей?*

Решение. Искомое число комиссий (без учета порядка) — это число сочетаний из 15 по 7:

$$C_{15}^7 = \frac{15!}{7! \cdot 8!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 6435$$

Задача. 1.2.4 *Из корзины, содержащей двадцать пронумерованных шаров выбирают на удачу 5 шаров. Определить число элементов пространства элементарных событий этого опыта, если:*

1. *шары выбираются последовательно один за другим с возвращением после каждого извлечения;*
2. *шары выбирают один за другим, не возвращая;*
3. *выбирают сразу 5 шаров.*

Решение.

1. Число способов извлечь первый шар из корзины равно 20. Так как извлеченный шар вернулся в корзину, то число способов извлечь второй шар также равно 20 и т.д. Тогда число способов извлечь 5 шаров в этом случае равно $20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 3200000$.
2. Число способов извлечь первый шар из корзины равно 20. Так как извлеченный шар после извлечения не вернулся в корзину, то число способов извлечь второй шар стало равно 19 и т.д. Тогда число способов извлечь 5 шаров без возвращения равно $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = A_{20}^5$
3. Число способов извлечь из корзины 5 шаров сразу равно числу сочетаний из 20 по 5:

$$C_{20}^5 = \frac{A_{20}^5}{5!} = 15504.$$

Задача. 1.2.5 *Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события A того, что выпадет хотя бы одна единица.*

Решение. На каждой кости может выпасть любое число очков от 1 до 6. Поэтому пространство элементарных событий содержит 36 равновозможных исходов. Событию A благоприятствуют 11 исходов: (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (1,5), (5,1), (1,6), (6,1), поэтому

$$P(A) = \frac{11}{36} \approx 0,3055.$$

Задача. 1.2.6 *На красных карточках написаны буквы у, и, я, к, ц, ф, н, на синих — буквы а, а, о, т, т, с, ч. После тщательного перемешивания, что вероятнее: с первого раза из букв на красных карточках составить слово «функция» или из букв на синих карточках слово «частота»?*

Решение. Пусть событие A — наудачу составленное из 7 букв слово «функция», событие B — наудачу составленное из 7 букв слово «частота». Так как упорядочиваются два множества из 7 букв, то число всех исходов для событий A и B равно $n = 7!$. Событию A благоприятствует один исход m = 1, так как все буквы на красных карточках различны. Событию B благоприятствуют $m = 2! \cdot 2!$ исходов, так как буквы «а» и «т» встречаются дважды. Тогда $P(A) = \frac{1}{7!}$, $P(B) = \frac{2!2!}{7!}$, $P(B) > P(A)$.

Задача. 1.2.7 *На экзамене студенту предлагается* 30 *билетов; в каждом билете два вопроса. Из* 60 *вопросов, вошедших в билеты, студент знает только* 40. *Найти вероятность того, что взятый студентом билет будет состоять*

1. *из известных ему вопросов;*
2. *из неизвестных ему вопросов;*
3. *из одного известного и одного неизвестного вопроса.*

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что на оба вопроса студент знает ответ; B — не знает ответа на оба вопроса; C — на один вопрос знает ответ, на другой — не знает. Выбор двух вопросов из 60 можно осуществить $n = C_{60}^2 = \frac{60 \cdot 59}{2} = 1770$ способами.

1. Имеется $m = C_{40}^2 = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$ возможностей выбора известных студенту вопросов. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{780}{1770} \cong 0,44$
2. Выбор двух неизвестных вопросов из 20 можно осуществить $m = C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ способами. В таком случае $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{190}{1770} \cong 0,11$
3. Существует $m = C_{40}^1 \cdot C_{20}^1 = 40 \cdot 20 = 800$ способов выбрать билет с одним известным и одним неизвестным вопросом. Тогда $P(C) = \frac{800}{1770} \cong 0,45.$

Задача. 1.2.8 *По трем каналам послана некоторая информация. Каналы работают независимо друг от друга. Найти вероятность того, что информация достигнет цели*

1. *только по одному каналу;*
2. *хотя бы по одному каналу.*

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что информация достигает цели только по одному каналу; B — хотя бы по одному каналу. Опыт — передача информации по трем каналам. Исход опыта — информация достигла цели.

Обозначим A_i — информация достигает цели по i-му каналу. Пространство элементарных событий имеет вид:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} A_1A_2A_3; \overline{A}_1A_2A_3; A_1\overline{A}_2A_3; A_1A_2\overline{A}_3; \\ \overline{A}_1\overline{A}_2A_3; \overline{A}_1A_2\overline{A}_3; A_1\overline{A}_2\overline{A}_3; \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \end{array} \right\}$$

Событию A благоприятствуют 3 исхода:

$$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3; \overline{A}_1A_2\overline{A}_3; A_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

Событию B благоприятствуют 7 исходов: все исходы, кроме $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Тогда n = 8; $m_A = 3$; $m_B = 7$; $P(A) = \frac{3}{8}$; $P(B) = \frac{7}{8}$.

Задача. 1.2.9 *На отрезке единичной длины случайным образом появляется точка. Найти вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка больше 1/8.*

Решение. По условию задачи искомому событию удовлетворяют все точки, появляющиеся на интервале (a; b).

Так как его длина $s = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$, а длина всего отрезка S = 1, то искомая вероятность равна $P = s/S = \frac{3/4}{1} = 0.75$.

Задача. 1.2.10 *В партии из n изделий k изделий являются бракованными. Для контроля выбирается m изделий. Найти вероятность того, что из m изделий l окажутся бракованными (событие A).*

Решение. Выбор m изделий из n можно осуществить C_n^m способами, а выбор l бракованных из k бракованных — C_k^l способами. После выбора l бракованных изделий останется $(m-l$) годных, находящихся среди $(n-k)$ изделий. Тогда число исходов, благоприятствующих событию A, равно $C_k^l \cdot C_{n-k}^{m-l}$ и искомая вероятность $P(A)=\frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$.

1.2.7 Задачи для самостоятельного решения

Задача. 1.2.1 *Решить уравнение:* $A_{x+2}^2=42$

Ответ: $x=5$.

Задача. 1.2.2 *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} C_x^y=C_x^{y+2} \\ C_x^2=66 \end{cases}$$

Ответ: $x=12, y=5$.

Задача. 1.2.3 *На девяти карточках написаны буквы а, а, а, м, м, д, г, р, и. После тщательного перемешивания буквы разложены в ряд. Какова вероятность получения слова «диаграмма».*

Ответ: $P=0,00003$.

Задача. 1.2.4 *В марте 10 солнечных дней. Найти вероятность того, что*

1. *первые два дня солнечные;*
2. *первые два дня — разная погода.*

Ответ: $P_1=\frac{3}{31}$; $P_2=\frac{14}{31}$.

Задача. 1.2.5 *25 экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Студент подготовил только 45 вопросов. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет состоит из*

- *подготовленных им вопросов;*

- *неподготовленных вопросов.*

Ответ: $P_1 = 0,808P_2 = 0,008.$

Задача. 1.2.6 *Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их на удачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.*

Ответ: $P = \frac{1}{720}$.

Задача. 1.2.7 *Телефонная линия, соединяющая два узла связи А и В, отстоящих друг от друга на расстоянии 3 км, оборвалась в неизвестном месте. Найти вероятность того, что обрыв произошел не далее, чем в 500 метрах от пункта А.*

Ответ: $P = 1/6$.

Задача. 1.2.8 *Интервал движения трамвая по заданному маршруту 10 мин. Описать пространство элементарных событий и случайное событие A — пассажир ждет трамвай не менее 2 и не более 5 минут. Найти $P(A)$.*

Ответ: $\Omega = [0, 10], P(A) = 0, 3.$

1.3 Сложение и умножение вероятностей

С вероятностной точки зрения, вероятность события дает полную исчерпывающую характеристику этого события. Если даны два случайных события A и B, то возникает вопрос их взаимосвязи. Если, например, событие B уже наступило, то в некоторых случаях это может дать дополнительную информацию о событии A, а поэтому изменить его вероятность, а в других случаях эта информация не оказывает никакого влияния на вероятность события A. События A и B называются зависимыми, если вероятность появления одного из них зависит от того, произошло другое или нет. В противном случае события называются независимыми. Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется *условной вероятностью* события A и обозначается $P(A \mid B)$.

1.3.1 Условная вероятность.

Если в ходе испытания становится известно, что произошло событие B, то эта дополнительная информация приводят к изменению пространства элементарных событий так, что именно событие B теперь играет роль достоверного события. При этом условии вероятность события A будет определяться вероятностной мерой пересечения A и B.

$$P(A|B) = \frac{Mes(AB)}{Mes(B)} = \frac{Mes(AB)/Mes\,(\Omega)}{Mes\,(B)\,/Mes\,(\Omega)} = \frac{P\,(AB)}{P\,(B)} \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) удобно переписать в форме так, чтобы выразить вероятность произведения двух зависимых событий:

$$P\,(AB) = P\,(A)\,P\,(B|A) = P\,(B)\,P\,(A|B) \tag{1.10}$$

Теорема. 1.1 *Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое произошло.*

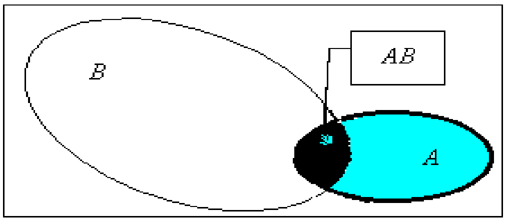


Рис. 1.10. К понятию условной вероятности

Следствие: все события на пространстве элементарных событий Ω для единичного эксперимента являются зависимыми.

Произведение большого числа событий удобно представить в виде упорядоченной последовательности событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Тогда можно рассматривать условные вероятности типа

$$P(A_n \mid A_1),\ P(A_n \mid A_1A_2), P(A_n \mid A_1A_2A_3), \ldots,$$
$$\ldots, P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}),$$

и т. д., смысл которых ясен из определения условной вероятности. Например, для трех событий получим:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)$$

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)P(A_4 \mid A_1A_2A_3)$$

и т. д.

Теорема. 1.2 (Произведения вероятностей) *Если события A и B независимы, то*

$$P(A \mid B) = P(A);\ P(B \mid A) = P(B) \text{ и } P(AB) = P(A)P(B).$$

Обобщение на случай n независимых событий $A_1,\ A_2,\ A_3,\ ...,\ A_n:$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

1.3.2 Теорема сложения вероятностей совместных событий

Теорема. 1.3 (Сложения вероятностей) *Пусть A и B — совместные события. Тогда вероятность появления* ***хотя бы одного из этих событий*** *(т.е. вероятность суммы событий A и B) равна сумме вероятностей этих событий без вероятности произведения этих событий*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.11}$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий

$$\begin{aligned}&P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - P(A_1A_2) - \\ &\cdots - P(A_1A_3) - \cdots - P(A_{n-1}A_n) - P(A_1A_2A_3) - \\ &\qquad - P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \cdots - P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned} \tag{1.12}$$

При вычислении вероятности суммы большого числа событий $A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$ часто бывает проще перейти к вычислению вероятности противоположного события. Для *независимых* событий получим формулу:

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n}) = \\ &= 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n) = \\ &= 1 - P\left(\overline{A}_1\right) \cdot P\left(\overline{A}_2\right) \cdot P\left(\overline{A}_3\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\overline{A}_n\right). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Или

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \cdots q_n, \tag{1.14}$$

где $q_i = 1 - P_i$.

Частный случай: если $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = P,\ 1 - P = q$, то

$$P(A) = 1 - q^n.$$

1.3.3 Решение задач

Задача. 1.3.1 *В урне 30 шаров: 15 красных, 10 синих и 5 белых. Найти вероятность того, что наугад вынутый шар — цветной.*

Решение. Пусть событие A — вынут красный шар, событие B — вынут синий шар. Тогда события $(A + B)$ — вынут цветной шар. Имеем $P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Так как события A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \cong 0.83$.

Задача. 1.3.2 *Вероятность того, что будет снег (событие A), равна* 0.6, *а того, что будет дождь (событие B), равна* 0.45. *Найти вероятность плохой погоды, если вероятность дождя со снегом (событие AB) равна* 0.25.

Решение. События A и B совместны, поэтому $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.6 + 0.45 - 0.25 = 0.8$

Задача. 1.3.3 *В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров, во втором — 3 белых и 9 черных шаров, в третьем — 6 белых и 6 черных шаров. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что все вынутые шары белые.*

Решение. Событие A — вынут белый шар из первого ящика, B — из второго ящика, C – из третьего. Тогда $P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; $P(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Событие ABC — все вынутые шары — белые. События A, B, C — независимые, поэтому $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{48} \cong 0.02$

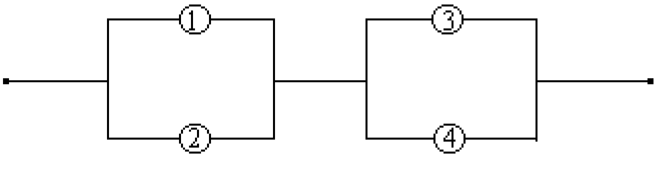
Задача. 1.3.4 *В электрическую цепь последовательно включены* 5 *элементов, работающие независимо друг от друга. Вероятность отказов первого, второго, третьего, четвертого, пятого элементов соответственно равны* 0.1; 0.2; 0.3; 0.2; 0.1. *Найти вероятность того, что тока в цепи не будет (событие* A*).*

Решение. Так как элементы включены последовательно, то тока в цепи не будет, если откажет хотя бы один элемент. Событие $A_i (i = 1 \ldots 5)$ — откажет i -й элемент. События A_i — независимые. Имеем $P(A_1) = 0.1; P(A_2) = 0.2$; $P(A_3) = 0.3; P(A_4) = 0.2$; $P(A_5) = 0.1$. $P(\overline{A}_1) = 0.9$; $P(\overline{A}_2) = 0.8$; $P(\overline{A}_3) = 0.7$; $P(\overline{A}_4) = 0.8$; $P(\overline{A}_5) = 0.9$.

Тогда

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5) = \\ &= 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) \cdot P(\overline{A}_5) = \\ &= 1 - 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.8 \cdot 0.9 = \\ &= 1 - 0.9^2 \cdot 0.8^2 \cdot 0.7 = 1 - 0.36288 = 0.63712. \end{aligned}$$

Задача. 1.3.5 *Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему с одним входом и одним выходом.*



Выход из строя за время T различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности $P_1 = 0.1$; $P_2 = 0.2$; $P_3 = 0.3$; $P_4 = 0.4$. *Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви* *цепи, где находится данный элемент. Найти надежность системы.*

Решение. Если событие A — {СИСТЕМА НАДЕЖНА}, A_i — {i- Й БЛОК РАБОТАЕТ БЕЗОТКАЗНО}, то $A = (A_1 + A_2)(A_3 + A_4)$. События $A_1 + A_2$, $A_3 + A_4$ — независимые, события A_1 и A_2, A_3 и A_4 — совместные. По формулам умножения и сложения вероятностей

$$P(A) = P(A_1 + A_2)(A_3 + A_4) = P(A_1 + A_2)P(A_3 + A_4) =$$
$$= [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) \cdot [P(A_3) + P(A_4) - P(A_3A_4)];$$

Имеем $P(A_i) = 1 - P(\overline{A}_i) = 1 - P_i$, т.е. $P(A_1) = 0.9$; $P(A_2) = 0.8$; $P(A_3) = 0.7$; $P(A_4) = 0.6$; Тогда $P(A) = [0.9 + 0.8 - 0.9 \cdot 0.8]\,[0.7 + 0.6 - 0.7 \cdot 0.8] = 0.8624$ или $P(A) = (1 - P_1P_2)(1 - P_3P_4) = (1 - 0.1 \cdot 0.9)(1 - 0.3 \cdot 0.4) = 0.8624$.

Задача. 1.3.6 *Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0.9, для второго станка — 0.8, для третьего станка — 0.7.*

Найти вероятность того, что в течение некоторого часа

1. *потребует внимания второй станок;*
2. *потребуют внимания два станка;*
3. *потребуют внимания не менее двух станков.*

Решение. Пусть A_i — i-й станок потребует внимания рабочего, $\overline{A}_i$ — i-й станок не потребует внимания рабочего.

Тогда

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.9; \;\; P(A_2) = 0.8; \;\; P(A_3) = 0.7; \\ P(\overline{A}_1) &= 0.1; \;\; P(\overline{A}_2) = 0.2; \;\; P(\overline{A}_3) = 0.3. \end{aligned}$$

Пространство элементарных событий:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} A_1A_2A_3; \overline{A}_1A_2A_3; A_1\overline{A}_2A_3; A_1A_2\overline{A}_3; \\ \overline{A}_1\overline{A}_2A_3; \overline{A}_1A_2\overline{A}_3; A_1\overline{A}_2\overline{A}_3; \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \end{array} \right\}$$

1. Событие A — потребует внимания второй станок: $A = A_1A_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$ + $A_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3$.

   Тогда

$$\begin{aligned}P(A) = P(A_1A_2A_3 + \overline{A}_1A2A3 + A1A2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3) =\\ = P(A_1A_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3) + P(A_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) =\\ = P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)+\\ + P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3).\end{aligned}$$

   Так как события несовместные и независимые. $P(A)$ = 0.9·0.8·0.7 + 0.1·0.8·0.7 + 0.9·0.8·0.3 + 0.1·0.8·0.3 = 0.8

2. Событие B — потребуют внимания два станка:

$$\begin{aligned}B &= \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3.\\ P(B) &= P(\overline{A}_1A_2A_3\ +\ A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3) =\\ &= P(\overline{A}_1A_2A_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(A_1A_2\overline{A}_3) =\\ &= 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.3 =\\ &= 0.398.\end{aligned}$$

3. Событие C — потребуют внимания не менее двух станков:

$$\begin{aligned}C &= \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1A_2A_3.\\ P(C) &= P(\overline{A}_1A_2A_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(A_1A_2\overline{A}_3)+\\ &+ P(A_1A_2A_3) = 0.398 + 0.504 = 0.902.\end{aligned}$$

Задача. 1.3.7 *В машину «Экзаменатор» введено* 50 *вопросов. Студенту предлагается* 5 *вопросов и ставится оценка «отлично», если на все вопросы получен верный ответ. Найти вероятность получить “отлично”, если студент подготовил только* 40 *вопросов.*

Решение. A — {ПОЛУЧЕНА ОЦЕНКА «ОТЛИЧНО»}, A_i — {ОТВЕТИЛ НА i- Й ВОПРОС}. Тогда $A = A_1A_2A_3A_4A_5$, имеем:

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1A_2) \cdot P(A_4 \mid A_1A_2A_3) \cdot\\ &\cdot\ P(A_5 \mid A_1A_2A_3A_4) = \frac{40}{50} \cdot \frac{39}{49}\frac{38}{47}\frac{37}{46}\frac{36}{46} \cong 0.31\end{aligned}$$

Или, другим способом — с помощью формулы классической вероятности (1.2): $n = C_{50}^5, \quad m = C_{40}^5$ и

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{40}^5}{C_{50}^5} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46} \cong 0.31$$

Задача. 1.3.8 *Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в I, II, III, IV ящике, соответственно равны* $0.6;\ 0.7;\ 0.8;\ 0.9$. *Найти вероятность того, что сборщику придется проверить все 4 ящика (событие A).*

Решение. Пусть A_i — {НУЖНАЯ СБОРЩИКУ ДЕТАЛЬ НАХОДИТСЯ В i-М ЯЩИКЕ.}
Тогда

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.6;\ P(\overline{A}_1) = 0.4; \\ P(A_2) &= 0.7;\ P(\overline{A}_2) = 0.3; \\ P(A_3) &= 0.8;\ P(\overline{A}_3) = 0.2; \\ P(A_4) &= 0.1;\ P(\overline{A}_4) = 0.9. \end{aligned}$$

Имеем :

$$A = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4.$$

Так как события несовместны и независимы, то

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = \\ &= P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = \\ &= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4) + \\ &+ P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4) = \\ &= 0.40.30.2(0.9 + 0.1) = 0.024. \end{aligned}$$

1.3.4 Задачи для самостоятельного решения

Задача. 1.3.1 *Оператор обслуживает три прибора, работающих независимо друг от друга. Известны вероятности того, что в течение часа приборы потребуют внимания оператора: первый — 0.1; второй — 0.25; третий — 0.3. Найти вероятность того, что в течение часа не более одного прибора потребуют внимания оператора.*

Ответ: $P = 0.885.$

Задача. 1.3.2 *Известно, что в апреле бывает в среднем 16 солнечных дней. Найти вероятность того, что первого и второго апреля будет различная погода.*

Ответ: $P = 0.515.$

Задача. 1.3.3 *Радист вызывает корреспондента. Вероятность того, что вызов будет принят, равна 0.6. Найти вероятность того, что корреспондент ответит лишь на четвертый вызов.*

Ответ: $P = 0.0384.$

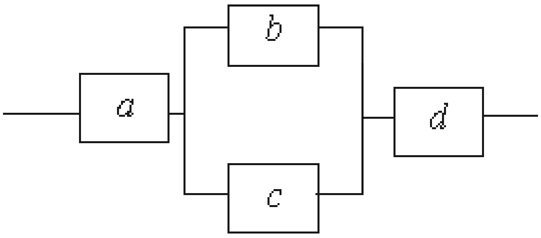
Задача. 1.3.4 *При каждом включении стартера двигатель начинает работать с вероятностью 0.8. Найти вероятность того, что для запуска двигателя нужно не более двух включений.*

Ответ: $P = 0.96.$

Задача. 1.3.5 *В НИИ работают 120 человек, из них 70 знают английский язык, 60 — немецкий, 50 — знают оба языка. Найти вероятность того, что наудачу выбранный сотрудник не знает ни одного иностранного языка.*

Ответ: $P = 1/3.$

Задача. 1.3.6 *Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему*



Зная, что надежность блоков соответственно равна 0.6 для a, 0.7 — для b, 0.8 – для c, 0.9 — для d, найти надежность системы.

Ответ: 0.5076

1.4 Формулы полной вероятности и Байеса

Пусть событие A может произойти совместно с одним из событий H_1, H_2, $\ldots$, H_n , которые попарно несовместны и образуют полную группу событий, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, а $H_i \cap H_i = \emptyset$, $i \neq j$ и $P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1$.

События H_i называются гипотезами. Тогда любое событие можно представить в виде суммы непересекающихся составляющих: $A = \sum A \cdot H_i$. См. рисунок.

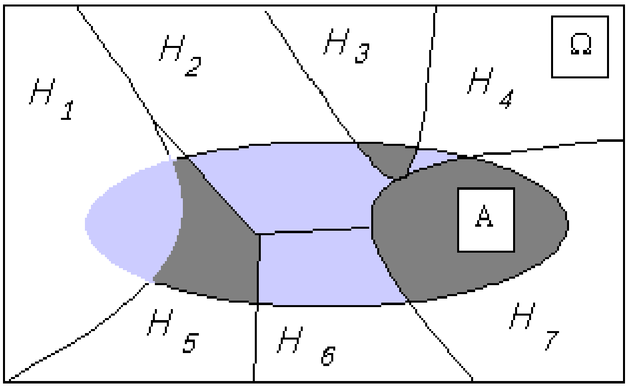


Рис. 1.11. Разложение события на составляющие

Пусть известны вероятности гипотез $P(H_1)$, $P(H_2), \ldots,$ $P(H_n)$ и условные вероятности $P(A \mid H_1)$, $P(A \mid H_2)$, $\ldots$, $P(A \mid H_n)$. Тогда вероятность события A равна сумме вероятностей составляющих его частей:

$$P\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A \cdot H_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) \cdot P\left(A|H_i\right) \qquad (1.15)$$

Формула (1.15) называется формулой *полной вероятности.* Вероятности $P(H_i)$ называются доопытными (априорными) вероятностями гипотез.

Предположим, что произведен эксперимент, в результате которого наступило событие A . В связи с этим возникает вопрос: какова вероятность того, что данное событие произошло в результате реализации той или иной гипотезы? Эта вероятность рассчитывается как условная вероятность интересующей нас гипотезы при условии, что произошло событие A.

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} \tag{1.16}$$

Формула (1.16) называется *формулой Байеса*. Вероятности $P(H_i \mid A)$ называются послеопытными (апостериорными) вероятностями. Заметим, что знаменатель в формулах (1.16) совпадает с правой частью формулы (1.15). Формулы (1.16) называют так же формулами гипотез.

1.4.1 Решение задач

Задача. 1.4.1 *Обследовалась группа из 10000 человек в возрасте свыше 60 лет. Оказалось, что 4000 человек являются постоянно курящими. У 1800 курящих обнаружились серьезные изменения в легких. Среди некурящих изменения в легких имели 1500 человек. Какова вероятность того, что наугад обследованный человек, имеющий изменения в легких, является курящим?*

Решение. Введем гипотезы: H_1 — обследованный является постоянно курящим, H_2 — является некурящим. Тогда по условию задачи

$$P(H_1) = \frac{4000}{10000} = 0,4, \quad P(H_2) = \frac{6000}{10000} = 0,6$$

Обозначим через A событие, состоящее в том, что обследованный имеет изменения в легких. Тогда по условию задачи

$$P(A \mid H_1) = \frac{1800}{4000} = \frac{9}{20}, \; P(A \mid H_2) = \frac{1500}{4000} = \frac{5}{20}$$

По формуле (1.15) находим

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) =$$
$$= 0,4 \cdot \frac{9}{20} + 0,6 \cdot \frac{5}{20} = \frac{1}{20}(3,6+3) = \frac{6,6}{20} = 0,3$$

Искомая вероятность того, что обследованный человек является курящим, по формуле Байеса равна

$$\begin{aligned} P\left(H_1|A\right) &= \frac{P(H_1)P\left(A|H_1\right)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot \frac{9}{20}}{\frac{6.6}{20}} = \\ &= \frac{0.4 \cdot 9}{6.6} = \frac{3.6}{6.6} = \frac{6}{11} = 0.55 \end{aligned}$$

Задача. 1.4.2 *В продажу поступают телевизоры трех заводов: 30% с первого завода, 20% — со второго, 50% — с третьего. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго — 10% , третьего — 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор?*

Решение. Рассмотрим события: A — приобретен исправный телевизор; гипотезы H_1, H_2, H_3 — телевизор поступил в продажу соответственно с первого, второго, третьего завода. По условию задачи

$$P(H_1) = \frac{30}{100} = 0.3; \; P(H_2) = \frac{20}{100} = 0.2; \; P(H_3) = \frac{50}{100} = 0.5.$$

$$P(A \mid H_1) = \frac{80}{100} = 0.8; \; P(A \mid H_2) = \frac{90}{100} = 0.9;$$
$$P(A \mid H_3) = \frac{95}{100} = 0.95.$$

По формуле (1.15) находим

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + \\ &+ P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) = \\ &= 0.3 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.95 = 0.895. \end{aligned}$$

Задача. 1.4.3 *Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом 20 белых шаров, во втором — 10 белых и 10 черных шаров, в третьем — 20 черных шаров. Из наугад выбранного ящика вынут белый шар. Найти вероятность того, что этот шар из второго ящика.*

Решение. Пусть событие A — вынут белый шар, гипотезы H_1, H_2, H_3 — шар вынут соответственно из первого, второго, третьего ящика. Из условия задачи находим

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3};\ P(A \mid H_1) = \frac{20}{20} = 1;$$

$$P(A \mid H_2) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2};\ P(A \mid H_3) = \frac{0}{20}$$

Тогда по формуле (1.15) находим

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3) = \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot (1 + \tfrac{1}{2} + 0) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

По формуле (1.16) находим

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Задача. 1.4.4 *Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем* $2/5$ *сообщений «точка» и* $1/3$ *сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в соотношении* $5 : 3$. *Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если:*

а) принят сигнал «точка»;

б) принят сигнал «тире».

Решение. Пусть событие A — принят сигнал «точка», а событие B — принят сигнал «тире».

Можно сделать две гипотезы: H_1 — передан сигнал «точка», H_2 — передан сигнал «тире». По условию $P(H_1) : P(H_2) =$

$5 : 3$. Кроме того, $P(H_1) + P(H_2) = 1$. Поэтому $P(H_1) = 5/8$, $P(H_2) = 3/8$. Известно, что

$$P(A|H_1) = \frac{3}{5}, \;\; P(A|H_2) = \frac{1}{3},$$

$$P(B|H_1) = \frac{2}{5}, \;\; P(B|H_2) = \frac{2}{3}.$$

Вероятности событий A и B находим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \;\; P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Искомые вероятности будут:

$$\text{а)} \quad P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5}}{1/2} = \frac{3}{4};$$

$$\text{б)} \quad P(H_2|B) = \frac{P(H_2)P(B|H_2)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Задача. 1.4.5 *Из 10 каналов радиосвязи 6 каналов защищены от воздействия помех. Вероятность того, что защищенный канал в течении времени t не выйдет из строя, равна 0.95, для незащищенного канала — 0.8. Найти вероятность того, что случайно выбранные два канала не выйдут из строя в течение времени t, причем оба канала не защищены от воздействия помех.*

Решение. Пусть событие A — оба канала не выйдут из строя в течение времени t, событие A_1 — выбран защищенный канал, A_2 — выбран незащищенный канал.

Запишем пространство элементарных событий для опыта — {ВЫБРАНО ДВА КАНАЛА}:

$$\Omega = \{A_1A_1, \; A_1A_2, \; A_2A_1, \; A_2A_2\}$$

Гипотезы:

H_1 — оба канала защищены от воздействия помех;

H_2 — первый выбранный канал защищен, второй выбранный канал не защищен от воздействия помех;

H_3 — первый выбранный канал не защищен, второй выбранный канал защищен от воздействия помех;

H_4 — оба выбранных канала не защищены от помех. Тогда

$$P(H_1) = P(A_1A_1) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{30}{90}; \; P(A \mid H_1) = 0.95\cdot 0.95 = 0.9025;$$

$$P(H_2) = P(A_1A_2) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{24}{90}; \; P\left(A\right| H_2) = 0.95\cdot 0.8 = 0.760$$

$$P(H_3) = P(A_2A_1) = \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{24}{90}; \quad P\left(A\right| H_3) = 0.8\cdot 0.95 = 0.760;$$

$$P(H_4) = P(A_2A_2) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{12}{90}; \quad P\left(A\right| H_4) = 0.8\cdot 0.8 = 0.64$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P\left(A\right| H_1) + P(H_2)P\left(A\right| H_2) + \\ &+ P(H_3)P\left(A\right| H_3) + P(H_4)P\left(A\right| H_4) = \\ &= \tfrac{30}{90}\cdot 0.9025 + 2\cdot\tfrac{24}{90}\cdot 0.760 + \tfrac{12}{90}\cdot 0.64 = \\ &= \tfrac{1}{90}\left(30\cdot 0.9025 + 48\cdot 0.760 + 12\cdot 0.64\right) = 0.7915 \end{aligned}$$

и

$$P\left(H_4\right| A) = \frac{P(H_4)\cdot P\left(A\right| H_4)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{90}\cdot 12\cdot 0.64}{0.7915} =$$

$$= \frac{\frac{1}{90}\cdot 7.68}{0.7915} = 0.1078.$$

1.4.2 Задачи для самостоятельного решения

Задача. 1.4.1 *В группе из 10 экипажей имеются два отличных, пять хороших и три удовлетворительных. Вероятность выполнения упражнения отличным экипажем 0.9, хорошим — 0.8; удовлетворительным — 0.5. Какова вероятность того, что наудачу выбранный экипаж выполнит упражнение?*

Ответ: $P = 0,73$

Задача. 1.4.2 *Прибор на борту самолета может работать в двух режимах: в условиях нормального полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Нормальный режим осуществляется в 80% всего времени полета, условия перегрузки — в 20%. Вероятность выхода прибора из* *строя во время полета в нормальном режиме равна 0.1, в условиях перегрузки — 0.4. Какова надежность прибора во время полета?*

Ответ: $P = 0.16$

Задача. 1.4.3 *Известно, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин, дальтоники. Случайно выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что он мужчина? Считать равными количество мужчин и женщин.*

Ответ: $P = 0.9524.$

Задача. 1.4.4 *Вероятности того, что во время работы ЭВМ произойдет критический сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности идентифицировать сбои соответственно равны 0.8, 0.9, 0.9. Какова вероятность того, что произошедший сбой был обнаружен в оперативной памяти?*

Ответ: $P = 0.2045$

Задача. 1.4.5 *В партии 120 лампочек, из них 70 изготовлены на первом заводе, 50 — на втором. Продукция первого завода содержит 80% стандартных ламп, второго — 60%. Найти вероятность события* $A = \{$НАУДАЧУ ВЗЯТЫЕ ДВЕ ЛАМПОЧКИ ЯВЛЯЮТСЯ СТАНДАРТНЫМИ$\}$. *Если событие* A *произошло, то какова вероятность, что обе лампочки изготовлены на первом заводе.*

Ответ: $P = 0.513$; $P = 0.42$

1.5 Повторные независимые испытания

Пусть производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний. Такие испытания называются независимыми относительно события A. Будем рассматривать независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A одинакова. Очень большое число теоретических и практических задач сводится к схеме последовательных независимых испытаний, даже если они не последовательны во времени.

Рассмотрим опыт, состоящий в проведении серии n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A может произойти с одной и той же вероятностью $P(A) = p$ и не произойти с вероятностью $q = 1 - p$. Подсчитаем вероятность $P_n(m)$ события: {СОБЫТИЕ A В СЕРИИ ИЗ n ИСПЫТАНИЙ ПРОИЗОШЛО РОВНО m РАЗ}. Тогда вероятность элементарного события ω_i :

{ СОБЫТИЕ A ПРОИЗОШЛО РОВНО m РАЗ И НЕ ПРОИЗОШЛО $n - m$ РАЗ}

будет равна произведению вероятностей соответствующих событий:

$$p \cdot p \cdot \ldots \cdot p \cdot (1-q) \cdot (1-q) \cdot \ldots \cdot (1-q) = p^m \cdot (1-p)^{n-m} = p^m \cdot q^{n-m}.$$

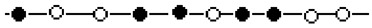


Рис. 1.12. Пример реализации серии независимых испытаний. Светлые точки — событие произошло; темные точки — событие не произошло

Число таких элементарных событий ω_i, составляющих интересующее нас событие, равно числу всевозможных реализаций последовательностей появлений и непоявлений (рис. 1.12) события A, т.е. числу сочетаний из n по m.

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \tag{1.17}$$

Эта формула называется формулой Бернулли или биномиальной формулой. Правая часть формулы Бернулли представляет собой общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^{n-i} p^{n-i} q^i. \tag{1.18}$$

Первый член этой формулы — p^n — дает вероятность наступления события A n раз в n опытах; второй член — вероятность наступления события $(n-1)$ раз и не наступления

1 раз и т.д.; последний член дает вероятность не появления события A ни в одном испытании, т.е.

$$\begin{aligned} P_n(n) &= p^n, & P_n(n-1) &= C_n^{n-1}p^{n-1}q^1, \\ P_n(n-2) &= C_n^{n-2}p^{n-2}q^2, \ \ldots, & P_n(0) &= q^n. \end{aligned}$$

Формула Бернулли (1.17) позволяет определить не только вероятность появления события A ровно m раз при n испытаниях, но и вероятность $P(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ того, что число m появлений события A заключено на некотором отрезке $[m_1, m_2]$, $0 \leqslant m_1 < m_2 \leqslant n$. Искомая вероятность находится как сумма вероятностей несовместных событий:

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = \sum_{i=m_1}^{m_2} P_n(i). \tag{1.19}$$

1.5.1 Наиболее вероятное число появлений события

Формула Бернулли позволяет установить, какое число появлений события A в серии из n испытаний наиболее вероятно.

Число m_0 называется наиболее вероятным, если $P_n(m_0) \geqslant P_n(m)$ при всех m, т.е. при некотором m_0 $P_n(m)$ достигает своего наибольшего значения.

Наиболее вероятное число m_0 определяется из двойного неравенства

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p, \tag{1.20}$$

устанавливающего для m_0 границы, которые отличаются на единицу.[3]

Если левое граничное значение $np-q$ - дробное, то дробным будет и правое граничное значение. Тогда существует одно число m_0; Если $np - q$ - целое, то $np - q + 1$ тоже целое. В этом случае существует два наиболее вероятнейших числа $m_0 = np - q$ и $m_0 + 1 = np + p$.

---

[3] Действительно, левая граница $np - q = np - (1 - p) = np + p - 1$ отличается от правой на единицу.

1.5.2 Приближение Пуассона

При больших n формула Бернулли приводит к громоздким вычислениям. Сформулируем предельное соотношение.

Теорема. 1.4 (Теорема Пуассона) *Если существует*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}} np = \lambda, \tag{1.21}$$

то справедливо приближение Пуассона:

$$P_n(m) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \tag{1.22}$$

где $\lambda = np$ называется параметром Пуассона.

Практическое использование этой формулы допустимо при $\lambda \leqslant 10$. Формула (1.22) табулирована. Из-за малости p формулу Пуассона или распределение Пуассона называют также законом редких явлений.

1.5.3 Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Если условие применимости формулы Пуассона (1.21) нарушается, рассматриваются случаи, когда $p \neq 0$ и $p \neq 1$. При этом для подсчета $P_n(m)$ пользуются локальной предельной теоремой Муавра-Лапласа.

Теорема. 1.5 ***Локальная теорема Муавра — Лапласа.*** *Пусть вероятность события A в n независимых испытаниях равна p (0<p<1). Тогда вероятность того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно m раз, приближенно равна*

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \tag{1.23}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1-p.$$

Функция $\varphi(x)$ называется функцией Гаусса; она является четной, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$; для неё составлены подробные таблицы.

На практике при большом числе испытаний n и не слишком малой вероятности p важно оценить вероятность того, что число появлений события A лежит в некоторых границах. Эту оценку устанавливает

Теорема. 1.6 ***Интегральная теорема Муавра — Лапласа.*** *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, причем 0<p<1, то вероятность того, что событие A появится в испытаниях от* m_1 *до* m_2 *раз, приближенно равна*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{1.24}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p.$

Функция $\Phi(x)$ называется функцией Лапласа и функцией ошибок; она является нечетной, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; при $x \geqslant$0 эта функция табулирована. Оценка погрешности при использовании формулы (1.23) показывает, что эта формула обеспечивает хорошую точность уже при значениях $npq \geqslant 10$.

Таким образом,

$$P_n(m) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \; n \cdot p = const \\ \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2 \cdot npq}}, n \cdot p \cdot q \to \infty \end{cases}$$

1.5.4 Отклонение частоты появления события от его вероятности

Пусть n — число испытаний, p — вероятность появления события A в каждом испытании, $\frac{m}{n}$ - относительная частота появления события A. Тогда вероятность того, что отклонение частоты появления события при n испытаниях от его вероятности по абсолютной величине не превышает заданного числа ε, приближенно равна удвоенной функции Лапласа при $x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$:

$$P\left(|\frac{m}{n} - p| \leqslant \varepsilon\right) \approx \Phi(0) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) + \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi(0) = \\ = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \tag{1.25}$$

1.5.5 Решение задач

Задача. 1.5.1 *По каналу связи передается* 6 *сообщений. Каждое из сообщений может быть искажено помехами с вероятностью* 0.2 *независимо от других. Найти вероятность того, что*

1. *4 сообщения из 6 не искажены;*
2. *не менее 3 из 6 переданы искаженными;*
3. *хотя бы одно сообщение из 6 искажено;*
4. *не более 2 из 6 не искажены;*
5. *все сообщения переданы без искажения.*

Решение. Так как вероятность искажения 0.2, то вероятность передачи сообщения без помех — 0.8.

1. Используя формулу Бернулли (1.17), найдем вероятность передачи 4 сообщений из 6 без помех:

$$P_6^4 = C_6^4 \cdot 0.8^4 \cdot 0.2^2 = \frac{768}{3125} = 0.24576$$
$$(n = 6,\ m = 4, p = 0.8\ 1 - p = 0.2).$$

2. не менее 3 из 6 переданы искаженными:

$$P_6(3 \leqslant m \leqslant 6) = P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = \\ = C_6^3 \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^3 + C_6^4 \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^2 + C_6^5 \cdot 0.2^5 \cdot 0.8^1 + C_6^6 \cdot 0.2^6 \cdot 0.8^0 = \\ = \frac{1}{5^6}(1280 + 240 + 24 + 1) = \frac{1}{15625} \cdot 1545 = 0.09888.$$

3. хотя бы одно сообщение из 6 искажено:

$$P_6(1 \leqslant m \leqslant 6) = P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = \\ = 1 - P_6(0) = 1 - C_6^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^6 = \\ = 1 - \frac{4096}{15625} = \frac{11529}{15625} = 0,737856.$$

4. хотя бы одно сообщение из 6 искажено:

$$P_6(0 \leqslant m \leqslant 2) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = \\ = C_6^0 \cdot 0.2^6 \cdot 0.8^0 + C_6^1 \cdot 0.2^5 \cdot 0.8^1 + C_6^2 \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^2 = \\ = \frac{1}{5^6}(1 + 24 + 240) = \frac{256}{15625} = 0.01696.$$

5. все сообщения переданы без искажения:

$$P_6(6) = C_6^6 \cdot 0.8^6 \cdot 0.2^0 = 1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 = \frac{4096}{15625} = 0.26144.$$

Задача. 1.5.2 *Вероятность того, того, что летом день будет ясным, равна 0.42; вероятность пасмурного дня равна 0.36 и переменной облачности — 0.22. Сколько дней из 59 можно ожидать ясных и пасмурных?*

Решение. Из условия задачи видно, что надо искать наиболее вероятное число ясных и пасмурных дней.

Для ясных дней $p = 0.42$, $n = 59$. Составляем неравенства (1.20):

$$59 \cdot 0.42 + 0.42 - 1 \leq m_0 \leq 59 \cdot 0.42 + 0.42.$$

Отсюда

$$24.2 \leqslant m_o \leqslant 25.2 \Rightarrow m_o = 25.$$

Для пасмурных дней $p = 0.36$, $n = 59$ и

$$0.36 \cdot 59 + 0.36 - 1 \leqslant M_0 \leqslant 0.36 \cdot 59 + 0.36;$$

Следовательно $20.16 \leqslant M_0 \leqslant 21.60; \quad \Rightarrow M_0 = 21.$

Таким образом, наиболее вероятное число ясных дней m_o =25, пасмурных дней — M_0 = 21. Тогда летом можно ожидать m_o + M_0 =46 ясных и пасмурных дней.

Задача. 1.5.3 *На лекции по теории вероятностей присутствует 110 студентов курса. Найти вероятность того, что*

1. *k студентов (k = 0,1,2) из присутствующих родились первого сентября;*
2. *хотя бы один студент курса родился первого сентября.*

Решение. Вероятность родиться 1 сентября любому студенту курса $p = \frac{1}{365}$ очень мала, поэтому используем формулу Пуассона (1.22). Найдем параметр Пуассона. Так как $n = 110$, то $\lambda = np = 110 \cdot \frac{1}{365} = 0.3$.

Тогда по формуле Пуассона $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$:

$$P_{110}(k=0) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-0.3} = 0.740818$$

$$P_{110}(k=1) = \frac{\lambda^1}{1!}e^{-0.3} = 0.3 \cdot e^{-0.3} = 0.222245;$$

$$P_{110}(k=2) = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-0.3} = \frac{0.3^2 \cdot e^{-0,3}}{2} = 0.033337;$$

$$P_{110}(k \geqslant 1) = 1 - P_{110}(0) = 1 - 0.740818 = 0.259182.$$

Задача. 1.5.4 *Вероятность того, что деталь не стандартная, равна* 0.1. *Сколько деталей нужно отобрать, чтобы с вероятностью* $P = 0.964228$ *можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей отклоняется от постоянной вероятности* $p = 0.1$ *по абсолютной величине не более, чем на* 0.01*?*

Решение.

Требуемое число n найдем по формуле (1.25). Имеем: $p = 1.1$; $q = 0.9$; $P = 0.96428$. Подставим данные в формулу:

$$2\Phi\left(0.01\sqrt{\frac{n}{0.1 \cdot 0.9}}\right) = 0.96428.$$

Откуда находим

$$\Phi\left(0.01\sqrt{\frac{n}{0.09}}\right) = 0.48214.$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим, что $0.48214 = \Phi(2.1)$ или $0.01\sqrt{\frac{n}{0.09}} = 2.1 \Rightarrow n = 210^2 \cdot 0.09 = 3969$.

Задача. 1.5.5 *Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0.2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя*

1. *ровно 10 конденсаторов;*
2. *не менее 20 конденсаторов;*
3. *менее 28 конденсаторов;*
4. *от 14 до 26 конденсаторов.*

Решение. Имеем n = 100, p = 0.2, q = 1 — p = 0.8.

1. Ровно 10 конденсаторов.

   Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра — Лапласа: $P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   Вычислим $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{10-100\cdot0{,}2}{\sqrt{100\cdot0{,}8\cdot0{,}2}} = \frac{10-20}{4} = -2,5$, $\sqrt{npq} = 4$. Так как функция $\varphi(x)$ — четная, то $\varphi(-2,5) = \varphi(2,50) = 0,0175$ (находим по таблице значений функции $\varphi(x)$). Искомая вероятность

$$P_{100}(10) = \frac{1}{4} \cdot 0,0175 = 0,004375.$$

2. Не менее 20 конденсаторов;

   Требование, чтобы из 100 конденсаторов из строя вышли не менее 20, означает, что из строя выйдут либо 20, либо 21, ..., либо 100. Таким образом, m_1 = 20, m_2 =100. Тогда

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0.2}{4} = 0,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 20}{4} = 20.$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ найдем $\Phi(x_1) = \Phi(0) = 0$, $\Phi(x_2) = \Phi(20) = 0.5$. Искомая вероятность:

$$P_{100}(20 \leq m \leq 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0.5.$$

3. Менее 28 конденсаторов;

   $0 \leqslant m \leqslant 27$. Тогда $x_1 = \frac{0-20}{4} = -5, \quad x_2 = \frac{27-20}{4} = \frac{7}{4} = 1,75.$ $P_{100}(0 \leqslant m \leqslant 27) \approx \Phi(1.75) - \Phi(-5) = \Phi(1.75) + \Phi(5) = 0.45994 + 0.5 = 0.95994$

   (здесь было учтено, что функция Лапласа Ф(x) — нечетная).

4. От 14 до 26 конденсаторов. По условию m_1= 14, m_2 = 26. Вычислим x$_1$, x$_2$:

$$x_1 = \frac{14 - 20}{4} = -\frac{6}{4} = -1,5; \qquad x_2 = \frac{26 - 20}{4} = \frac{6}{4} = 1.5.$$

   Тогда $P_{100}(14 \leqslant m \leqslant 26) \approx \Phi(1.5) - \Phi(-1,5) = 2\Phi(1.5) = 2 \cdot 0.4319 = 0.86638.$

Задача. 1.5.6 *Вероятность появления некоторого события в одном опыте равна 0.6. Какова вероятность, что это событие появиться в большинстве из 60 опытов?*

Решение. Количество m появлений события в серии испытаний находится в промежутке $[0;\ 60]$. «В большинстве опытов» означает, что $m \in [30,\ 60.]$ По условию n = 60, p = 0.6, q = 0.4, m_1 = 30, m_2 = 60. Вычислим x$_1$ и x$_2$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 60 \cdot 0.6}{\sqrt{60 \cdot 0.6 \cdot 0.4}} = \frac{-6}{\sqrt{14.4}} = -1.581,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60 - 60 \cdot 0.6}{\sqrt{14.4}} = 6.324.$$

Тогда

$$P_{60}(30 \leqslant m \leqslant 60) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \\ = \Phi(6.324) - \Phi(-1.581) = \Phi(6.324) + \Phi(1.581) = \\ = 0.5 + 0.44295 = 0.94295.$$

1.5.6 Задачи для самостоятельного решения

Задача. 1.5.1 *Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартное, равна* 0.9. *На проверку взято* 5 *изделий. Найти вероятность того, что*

1. *ровно два изделия стандартные;*
2. *все изделия нестандартные;*
3. *не менее двух изделий стандартные.*

Ответ: $p_1 = 0.0081$; $p_2 = 0.00001$; $p_3 = 0.99954$.

Задача. 1.5.2 *Станок-автомат штампует детали. Известно, что в среднем на* 1000 *деталей приходится* 4 *бракованных. Найти вероятность того,что среди* 50 *взятых наудачу деталей:*

1. 2 *бракованных;*
2. *нет бракованных деталей.*

Ответ: $p_1 = 0.016375$; $p_2 = 0.818731$.

Задача. 1.5.3 *Имеется* 100 *станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором привод оказывается включенным в течение* 0.8 *всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными*

1. *от* 70 *до* 86 *станков;*
2. *ровно* 80 *станков.*

Ответ: $p_1 = 0.92698$; $p_2 = 0.0997$.

Задача. 1.5.4 *Событие B наступает в том случае, если событие A появится не менее трех раз. Определить вероятность появления события B, если вероятность появления события A при одном испытании равна 0.3 и произведено:*

а) пять независимых испытаний;

б) семь независимых испытаний.

Ответ: а) 0.163; б) 0.353.

Задача. 1.5.5 *Если известно, что на лотерейный билет выпал выигрыш, то вероятность того, что выигрышем будет велосипед или стиральная машина, равны соответственно 0.03 и 0.02. Найти вероятность выигрыша хотя бы одного из этих предметов на 10 выигравших билетов, выбранных из разных серий.*

Ответ: $p = 0.4$

Глава 2

Случайные величины и их распределения

2.1 Случайные величины

На практике результаты случайного эксперимента чаще всего представляются в числовой форме. С другой стороны, результат случайного эксперимента — «СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ». Чтобы связать эти представления вводят новое понятие — «СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА». По сути дела — это числовая функция, заданная на множестве элементарных событий $\{\omega_i \in \Omega\}$ с областью значений в $\Re$ или $\Re_n$.

Полагают, что случайная величина в результате испытания принимает то или иное возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных обстоятельств.

С введением понятия «СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА» расширяется понятие «СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ» — теперь под случайным событием понимается событие состоящее в том, что случайная величина в результате испытания приняла значение, принадлежащее некоторому конечному или бесконечному числовому множеству.[1]

Обычно рассматривают два вида случайных величин: *дискретные* и *непрерывные*.

Определение 2.1 *Случайная величина называется дискретной, если она принимает конечное или счетное множество значений.*

Дискретная случайная величина используется при описании измерений, принимающих целочисленные значения:

---

[1] «СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА» — понятие более емкое, чем прежнее понятие «СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ». Ее введение позволяет обойтись без описания Ω, отвечающего данному эксперименту. Ведь часто пространство элементарных событий описать очень сложно, а перечислить все ω_i не всегда и возможно.

число дефектных изделий, число телефонных вызовов, число неисправностей в приборе и т.д. и может быть записана в виде последовательности x_1, x_2, x_3, ..., x_n.

Для некоторых случайных величин число возможных значений, принимаемых этой величиной, бывает настолько велико, что удобнее представлять их в виде *непрерывных случайных величин*, которые принимают любое значение в некотором интервале, например, продолжительность работы электрической лампы[2], дальность полета снаряда, уровень воды в половодье и т.д. Ниже мы дадим другое, более строгое, определение непрерывной случайной величины.

2.1.1 Закон распределения дискретной случайной величины

Для полного описания дискретной случайной величины необходимо:

- Указать все её возможные значения.
- Задать вероятности, с которыми принимаются эти значения.

Соотношения между возможными значениями дискретных случайных величин и их соответствующими вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины.

Удобен табличный способ задания закона распределения: в первой строке таблицы указывают значения случайной величины, во второй строке — вероятности этих значений.

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	P_1	P_2	$\ldots$	P_i	$\ldots$	P_n	$\ldots$

Таблица 2.1. Ряд распределения дискретной случайной величины

---

[2] Срок службы электрической лампочки — пример смешанной случайной величины: ее значения могут принимать одно дискретное, равное нулю значение, и любые значения из промежутка $(0, \infty)$

Эту таблицу называют рядом распределения дискретной случайной величины. Так как дискретная случайная величина обязательно примет одно из своих значений x_i, то события $\{X = x_i\}$ образуют полную группу событий, поэтому справедливо *условие нормировки*

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \tag{2.1}$$

Полагают, что $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_i < x_{i+1} \cdots$.

2.1.2 Функция распределения случайной величины

Определение 2.2 *Функцией распределения, или интегральной функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина X примет значения, меньшие заданного значения x, где x — любое действительное число:*

$$F(x) = P(X < x) \tag{2.2}$$

Данное определение подходит как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Свойства $F(x)$:

1. Значения $F(x)$ принадлежат отрезку [0, 1], т.е.

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

2. $F(x)$ — неубывающая функция, т.е.

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow F(x_1) \leqslant F(x_2).$$

3. $F(x)$ — непрерывная слева в каждой точке x_0, т.е. существует $F(x_0)$ и существует левосторонний предел:

$$F(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} F(x).$$

4. При любом x_0 существует правосторонний предел, не обязательно совпадающий с левосторонним:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} F(x) = P(x \leqslant x_0).$$

Функция $F(x)$ может иметь разрывы только первого рода, причем в силу монотонности $F(x)$ и неравенства $0\leqslant F(x)\leqslant 1$ таких скачков конечное или счетное множество.

5.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0 \Longleftrightarrow \{\text{ Невозможное событие}\},$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=1 \Longleftrightarrow \{\text{Достоверное событие}\} \qquad (2.3)$$

6. Вероятность того, что случайная величина попадёт на полуинтервал $[a,\ b)$ равна разности значений функции распределения в точках b и a:

$$P(a\leqslant x<b)=F(b)-F(a) \qquad (2.4)$$

Замечание. Если $F(x)$ непрерывна в точке a и $a=b$, то $P(X\in[a,\ b])=P(X=a)=F(b)-F(a)=0$. Следовательно, для непрерывной в точке функции вероятность попадания на отрезок равна вероятности попадания на интервал.

Пусть дана дискретная случайная величина $X=\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$. Используя свойства функции $F(x)$ получаем, что при $x_{i-1}<x\leqslant x_i$

$$F(x)=P_1+P_2+\cdots+P_{i-1}=\sum_{i=1}^{i-1}P_i \qquad (2.5)$$

В точке x_i $F(x)$ имеет скачок $P_i=P(X=x_i)=F(x_i+0)-F(x_i)$. Таким образом, функция распределения дискретной случайной величины является кусочно-непрерывной, в точках разрыва x_i имеет скачки P_i и непрерывна слева в точках разрыва x_i.

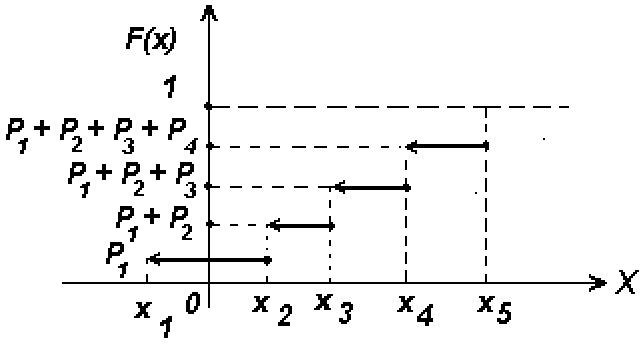


Рис. 2.1. Функция распределения дискретной случайной величины

Определение 2.3 *Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна.*

2.1.3 Плотность распределения случайной величины

Определение 2.4 *Пусть F(x) — дифференцируемая функция. Производная от функции распределения $F(x)$ называется плотностью распределения вероятности или дифференциальной функцией распределения случайной величины*

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = F'(x). \tag{2.6}$$

Укажем вероятностный смысл $dF(x)$:

$$dF\left(x\right) = f(x)dx \approx F\left(x + dx\right) - F\left(x\right) = P\left(x \in \left(x,\ x + dx\right)\right)$$

Таким образом, дифференциал функции распределения есть вероятность попадания случайной величины на бесконечно малый промежуток от x до $x + dx$.

Свойства $f(x)$:

$$f(x) \geqslant 0, \text{ т.е. не отрицательная функция;} \qquad (2.7)$$

$$P(a \leqslant x < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx; \qquad (2.8)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1; \text{ (условие нормировки)} \qquad (2.9)$$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (2.10)$$

2.1.4 Решение задач

Задача. 2.1.1 *Дана таблица, где в верхней строке указаны возможные значения случайной величины X, а в нижней — их вероятности.*

X	1	2	3	4	5
P	1/4	1/8	1/4	1/8	1/4

Может ли эта таблица быть рядом распределения X?

Ответ: Да, так как $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$

Задача. 2.1.2 *Выпущено 500 лотерейных билетов, причем 40 билетов принесут их владельцам выигрыш по 10000 руб., 20 билетов — по 50000 руб., 10 билетов — по 100000 руб., 5 билетов — по 200000 руб., 1 билет — 500000 руб., остальные — без выигрыша. Найти закон распределения выигрыша для владельца одного билета.*

Решение.

Возможные значения X: $x_5 = 10000$, $x_4 = 50000$, $x_3 = 100000$, $x_2 = 200000$, $x_1 = 500000$, $x_6 = 0$. Вероятности этих возможных значений:

$$P(x_1 = 500000) = \tfrac{1}{500} = 0.002; \quad P(x_2 = 200000) = \tfrac{5}{500} = 0.01$$
$$P(x_3 = 100000) = \tfrac{10}{500} = 0.02; \quad P(x_4 = 50000) = \tfrac{20}{500} = 0.04;$$
$$P(x_5 = 10000) = \tfrac{40}{500} = 0.08; \quad P(x_6 = 0) = \tfrac{424}{500} = 0.848$$

Искомый закон распределения:

X	500000	200000	100000	50000	10000	0	$\sum_{i=1}^{6} p_i$
p	0.002	0.01	0.02	0.04	0.08	0.848	1

Задача. 2.1.3 *Стрелок, имея* 5 *патронов, стреляет до первого попадания в цель. Вероятность попадания при каждом выстреле равна* 0.7. *Построить закон распределения числа использованных патронов, найти функцию распределения* $F(x)$ *и построить ее график, найти* $P(2 < x < 5)$.

Решение.

Пространство элементарных событий опыта

$$\Omega = \{1,\ 01,\ 001,\ 0001,\ 00001,\ 11111\},$$

где событие $\{1\}$ — попал в цель, событие $\{0\}$ — не попал в цель. Элементарным исходам соответствуют следующие значения случайной величины числа использованных патронов: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Так как результат каждого следующего выстрела не зависит от предыдущего, то вероятности возможных значений:

$p_1 = P(x_1 = 1) = P(1) = 0.7$; $p_2 = P(x_2 = 2) = P(01) = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$;

$p_3 = P(x_3 = 3) = P(001) = 0.3^2 \cdot 0.7 = 0.063$;

$p_4 = P(x_4 = 4) = P(0001) = 0.3^3 \cdot 0.7 = 0.0189$;

$p_5 = P(x_5 = 5) = P(00001 + 00000) = 0.3^4 \cdot 0.7 + 0.3^5 = 0.0081$.

Искомый закон распределения:

X	1	2	3	4	5	$\sum_{i=1}^{5} P_i$
P	0.7	0.21	0.063	0.0189	0.0081	1

Найдем функцию распределения $F(x)$, пользуясь формулой (2.5)

$$\begin{aligned}
x \leqslant 1,\ F(x) &= P(X < x) = 0 \\
1 < x \leqslant 2,\ F(x) &= P(X < x) = P_1(X_1 = 1) = 0.7 \\
2 < x \leqslant 3,\ F(x) &= P_1(X = 1) + P_2(x = 2) = 0.91 \\
3 < x \leqslant 4,\ F(x) &= P_1(x = 1) + P_2(x = 2) + P_3(x = 3) = \\
&= 0.7 + 0.21 + 0.063 = 0.973 \\
4 < x \leqslant 5,\ F(x) &= P_1(x = 1) + P_2(x = 2) + P_3(x = 3) + \\
+P_4(x = 4) &= 0.973 + 0.0189 = 0.9919 \\
x > 5,\ F(x) &= 1
\end{aligned}$$

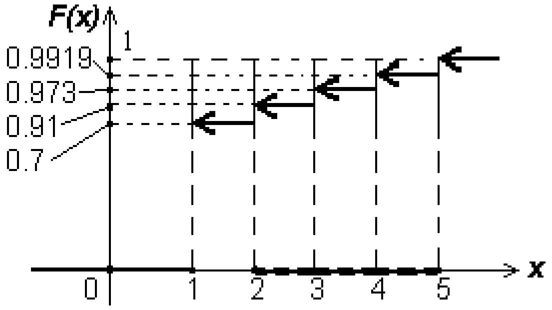


Рис. 2.2. К решению задачи 2.1.3

Найдем $P(2 < x < 5)$. Применим формулу (2.4):

$$P(2 < x < 5) = F(5) - F(2) = 0.9919 - 0.91 = 0.0819$$

Задача. 2.1.4 *Дана $F(x)$ некоторой случайной величины:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 11/25, & 0 < x \leqslant 1 \\ 19/25, & 1 < x \leqslant 2 \\ 22/25, & 2 < x \leqslant 3 \\ 24/25, & 3 < x \leqslant 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Записать ряд распределения для X.

Решение.

Из свойств $F(x)$ следует, что возможные значения случайной величины X — точки разрыва функции $F(x)$, а соответствующие им вероятности — скачки функции $F(x)$.

Находим возможные значения случайной величины $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ряд распределения					
X	0	1	2	3	4
P	11/25	8/25	3/25	2/25	1/25

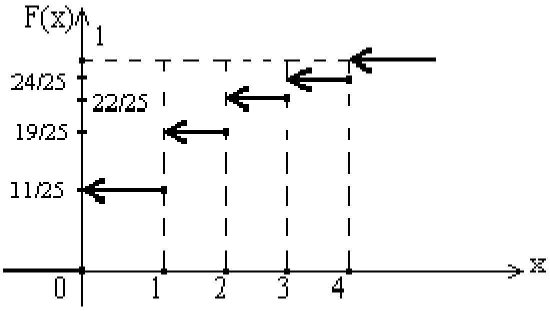


Рис. 2.3. К решению задачи 2.1.4

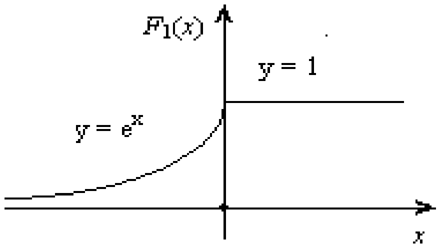
Задача. 2.1.5 *Установить, какая из функций*

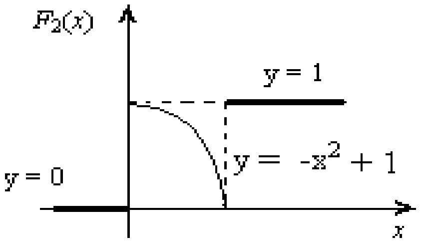
$$F_1(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0 \\ 1\,, & x > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad F_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ -x^2 + 1, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

является функцией распределения некоторой случайной величины.

В случае утвердительного ответа, найти вероятность того, что соответствующая случайная величина принимает значения на $[-3, 2]$.

Решение. Построим графики функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$:





Функция $F_2(x)$ не является функцией распределения, так как не является неубывающей. Функция $F_1(x)$ является функцией распределения некоторой случайной величины, так как является неубывающей и удовлетворяет условию (2.3). Найдем вероятность попадания на промежуток:

$$P(-3 \leqslant X \leqslant 2) = F(2) - F(-3) = 1 - e^{-3} = 1 - \frac{1}{e^3} = 0.95021$$

Задача. 2.1.6 *Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины* X*:*

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2e^{-x}, & \textit{при}\ x \geqslant 0 \\ 0, & \textit{при}\ x < 0 \end{cases}$$

Найти:

1. *коэффициент* C*;*
2. *функцию распределения* $F(x)$*;*
3. *вероятность попадания случайной величины в интервал* $(1, 3)$.

Решение. Из условия нормировки (2.9)находим

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \\ &= 0 + C\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx = C\lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a} x^2e^{-x}dx = \\ &= C\lim_{a\to\infty}\left[2 - \frac{a^2+2a+2}{e^a}\right] = 2C \ \Rightarrow C = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2e^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

По формуле (2.10) находим:

$$\begin{aligned}
x<0:\ F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0, \text{ так как } f(x)=0.\\
x\geqslant 0:\ F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(t)dt =\\
&= 0+\int_{0}^{x} f(t)dt = (1/2)\int_{0}^{x} t^2e^{-t}dt =\\
&= (1/2)\left[-\frac{t^2+2t+2}{e^t}\right]_0^x =\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2+2x+2}{e^x}+2\right] = 1-\frac{x^2+2x+2}{2e^x}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases} 1-\frac{x^2+2x+2}{2e^x}, & \text{при } x\geqslant 0\\ 0, & \text{при } x<0 \end{cases}.$$

По формуле (2.4) находим

$$P\left(1<x<3\right) = F\left(3\right)-F\left(1\right) = 0.9197-0.3983 = 0.5214$$

Задача. 2.1.7 *Случайное время простоя радиоэлектронной аппаратуры в ряде случаев имеет плотность вероятности*

$$f(x) = \frac{M}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(\lg x-\lg x_0)^2}{2\sigma^2}),$$

где $M = lge = 0.4343\ldots$

Найти функцию распределения $F(x)$*.*

Решение. По формуле (2.10) находим

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int\limits_{-\infty}^{x} \tfrac{M}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\tfrac{(\lg x-\lg x_0)^2}{2\sigma^2})dx =\\
&= \tfrac{M}{\sigma}\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\tfrac{(\lg x-\lg x_0)^2}{2\sigma^2})\tfrac{dx}{x} =
\end{aligned}$$

$$= \left|\begin{array}{l} \frac{\lg x-\lg x_0}{\sigma} = t\\ dt = \frac{1}{\sigma}(\lg x)'dx = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{x}\lg e\cdot dx = \frac{M}{\sigma}\cdot\frac{dx}{x};\\ \frac{dx}{x} = \frac{M}{\sigma}dt = d\left(\frac{\lg x-\lg x_0}{\sigma}\right)\cdot\frac{M}{\sigma} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{M \cdot \sigma}{\sigma\sqrt{2\pi} \cdot M} \int\limits_{-\infty}^{t_B} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t_B} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где

$$t_B = \frac{\lg x - \lg x_0}{\sigma}.$$

2.1.5 Задачи для самостоятельного решения

Задача. 2.1.1 *Урна содержит 10 черных и 15 красных мячей. Наудачу вынимаются два мяча. Составить закон распределения числа извлеченных черных мячей; найти функцию распределения F(x) и построить ее график.*

Ответ: $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 0.35, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0.85, & 1 < x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

x	0	1	2
p	0.35	0.5	0.15

Задача. 2.1.2 *Построить график функции $F(x)$ и составить ряд распределения вероятностей дискретной случайной величины.*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \\ 0.2, & -1 < x \leqslant 2 \\ 0.5, & 2 < x \leqslant 3 \\ 0.6, & 3 < x \leqslant 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Ответ:

x	-1	2	3	4
p	0.2	0.3	0.1	0.4

Задача. 2.1.3 *Установить, какая из функций*

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x - \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

или

$$F_2(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0 \\ e^{-x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

является функцией распределения непрерывной случайной величины.

Ответ: первая.

Задача. 2.1.4 *Случайная величина X задана плотностью распределения вида:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{A}{\sqrt{4-x^2}}, & -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}.$$

Найти значение параметра A, функцию распределения $F(x)$; и $P(1 \leqslant x \leqslant 2)$.

Ответ: $A = 1/\pi$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{\pi}\left(\arcsin\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right), & -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$;
$P(1 \leqslant x \leqslant 2) = 1/3$.

Задача. 2.1.5 *Какие из функций*

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 4 \\ 0,8x - 3.2, & 4 < x \leqslant 5.25 \\ 1, & x > 5.25 \end{cases}$$

или

$$F_2(x) = \begin{cases} 0. & x \leqslant 0 \\ 0.5x - 1, & 0 < x \leqslant 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

являются функциями распределения некоторой случайной величины X. В случае утвердительного ответа найти функцию плотности вероятности $f(x)$ и вероятность того, что случайная величина X принимает значения на отрезке $[3, 5]$.

Ответ: $F_1(x)$; P = 0.8; $f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 4 \\ 0.8, & 4 < x \leqslant 5.25 \\ 1, & x > 5.25 \end{cases}$

2.2 Числовые характеристики случайных величин

Числовые характеристики в сжатой форме выражают наиболее существенные особенности распределения случайной величины.

Числовые характеристики широко используются в теории вероятностей и ее многочисленных приложениях на практике. С их помощью в значительной степени облегчается решение вероятностных задач. Рассмотрим лишь важнейшие числовые характеристики, которые характеризуют форму распределения и положение случайной величины на числовой прямой.

2.2.1 Математическое ожидание

Пусть дискретная случайная величина задана своим *рядом распределения*:

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется число

$$m_X = M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \tag{2.11}$$

если числовой ряд сходится абсолютно. Если ряд расходится, то говорят, что дискретная случайная величина X не имеет конечного математического ожидания.

Если число значений случайной величины конечно и равно n, то математическое ожидание равно конечной сумме:

$$m_X = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{2.12}$$

Выясним вероятностный смысл математического ожидания дискретной случайной величины.

Пусть проведено n опытов, в которых случайная величина X приняла m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение $x_2, \ldots,$ m_k раз значение x_k, причем $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. Тогда среднее арифметическое значение $\overline{x}$ всех значений равно

$$\overline{x} = \frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k}{n} = x_1\frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + \ldots + x_k\frac{m_k}{n} = \\ = x_1p_1 * + x_2p_2 * + \ldots + x_kp_k*,$$

где $p_i* = \frac{m_i}{n}$ — относительная частота значения x_i .

Если число опытов достаточно велико, то относительная частота приближенно равна вероятности события. Таким образом, математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Выясним механический смысл математического ожидания дискретной случайной величины.

Пусть возможные значения дискретной случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются координатами материальных точек с массами $p_1, p_2, \ldots, p_n$, расположенных на числовой прямой, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Тогда $M[X] = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ip_i = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_ip_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}$, т.е. математическое ожидание есть абсцисса центра тяжести данной системы материальных точек.

Пусть X — непрерывная случайная величина и $f(x)$ — ее дифференциальная функция распределения или плотность вероятности.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число

$$M[X] = m_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{2.13}$$

если этот несобственный интеграл сходится. Если он расходится, то непрерывная случайная величина X математического ожидания не имеет.

Математическое ожидание функции $\varphi(X)$ от случайной величины рассчитывается по формуле:

$$M[\varphi(X)] = m_\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx. \tag{2.14}$$

Свойства математического ожидания.

1. M[C]=C, т.е. математическое ожидание постоянной равно самой постоянной;
2. $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$ для любой случайной величины X и произвольного числа C;
3. $M[X + Y] = M[X] + M[Y]$ для произвольных случайных величин X, Y;
4. $M[X_1 \cdot X_2 \cdots X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdots M[X_n]$ для n независимых случайных величин $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$.

Размерность математического ожидания равна размерности случайной величины X.

2.2.2 Дисперсия

Дисперсией или рассеянием случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от своего математического ожидания:

$$D[x] = M\left[(X - M[X])^2\right] \tag{2.15}$$

Если случайная величина X дискретна и задана своим рядом распределения, то

$$D[X] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m_X)^2 p_i \tag{2.16}$$

Если случайная величина X непрерывна и задана на $[a, b]$, то

$$D[X] = \int\limits_{a}^{b} (x_i - m_X)^2 f(x) dx \tag{2.17}$$

где $f(x)$ — функция плотности вероятности.

Из свойств математического ожидания и определения дисперсии имеем

$$\begin{aligned} D[X] &= M\big[(X-m_X)^2\big] = M\big[X^2 - 2Xm_X + m_X^2\big] = \\ &= M[X^2] - 2m_X M[X] + m_X^2 = M[X^2] - m_X^2. \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Итак,

$$D[X] = M[X^2] - m_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - m_X^2, \qquad (2.19)$$

то есть дисперсия случайной величины X равна разности математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата математического ожидания.

Формула (2.19) удобна для практического вычисления дисперсии. Размерность дисперсии равна квадрату размерности величины X. Величина $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$ называется средним квадратичным отклонением случайной величины. Её размерность совпадает с размерностью величины X.

Вероятностный смысл дисперсии: дисперсия измеряет меру рассеивания значений случайной величины X относительно своего математического ожидания.

Свойства дисперсии:

1. $D[C] = 0$, где $C = const$;
2. $D[X] \geqslant 0$;
3. $D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X]$ для любой случайной величины X и произвольного числа C ;
4. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$ для независимых случайных величин X и Y.

Свойства среднего квадратического отклонения:

1. $\sigma[C] = 0$, где $C = Const$;
2. $\sigma[C \cdot X] = C \cdot \sigma[X]$;
3. $\sigma[X+Y] = \sqrt{\sigma^2[X] + \sigma^2[Y]}$ для независимых случайных величин X и Y.

2.2.3 Решение задач

Задача. 2.2.1 *Дан ряд распределения дискретной случайной величины X:*

x	10	20	30	40
p	0.2	0.15	0.25	0.4

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, $M[2X+3]$, $D[-3X+2]$.

Решение.

По формуле (2.12) находим математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 &= \\ = 10 \cdot 0.2 + 20 \cdot 0.15 + 30 \cdot 0.25 + 40 \cdot 0.4 &= 28.5 \end{aligned}$$

$$M[2X+5] = 2M[X] + M[5] = 2M[X] + 5 = 2 \cdot 28.5 + 5 = 62.$$

По формуле (2.19) найдем дисперсию:

$$\begin{aligned} &D[X] = M[X^2] - m_X^2 = \\ &\quad = (10^2 \cdot 0.2 + 20^2 \cdot 0.15 + 30^2 \cdot 0.25 + 40^2 \cdot 0.4) - (28.5)^2 = \\ &\quad = 945 - 812.25 = 132.75. \\ &D[-3X+2] = 9D[X] + D[2] = 9D[X] = 9 \cdot \cdot 132.75 = 1194.75 \\ &\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{132.75} = 11.52. \end{aligned}$$

Задача. 2.2.2 *Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение непрерывной случайной величины X, функция распределения которой*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

.

Решение. Найдем плотность вероятности:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Математическое ожидание найдем по формуле (2.13):

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} (x \cdot 0)dx + \int_{0}^{2} x \cdot (\frac{3x}{2} - \frac{3x^2}{4})dx + \int_{2}^{\infty} (x \cdot 0)dx =$$
$$= (x^3/2 - 3x^4/16) \,|_0^2 = 1.$$

Дисперсию найдем по формуле (2.19):

Найдем сначала математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$M[X^2] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_{0}^{2} x^2 \left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{3}{4}x^2\right) dx =$$
$$= \int\limits_{0}^{2} \left(\tfrac{3}{2}x^3 - \tfrac{3}{4}x^4\right) dx = \tfrac{3}{8}x^4 - \tfrac{3}{20}x^5\Big|_0^2 = \tfrac{6}{5}$$

Тогда $D[X] = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5} = 0.2$.

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0.4472.$$

Задача. 2.2.3 *Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения:*

x	-1	0	1	2
p	0.2	0.3	0.4	0.1

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^X$.

Решение. $M[Y] = M[e^X] = e^-1 \cdot 0.2 + e^0 \cdot 0.3 + e^1 \cdot 0.4 + e^2 \cdot 0.1 =$

$$= 0.2 \cdot 0.3679 + 1 \cdot 0.3 + 2.71828 \cdot 0.4 + 7.389 \cdot 0.1 = 2.2.$$
$$D[Y] = D[e^x] = M\left[(e^X)^2\right] - M^2[e^X] =$$
$$= \left[(e^{-1})^2 \cdot 0.2 + (e^0)^2 \cdot 0.3 + (e^1)^2 \cdot 0.4 + (e^2)^2 \cdot 0.1\right] - (2.2)^2 =$$
$$= \left(e^{-2} \cdot 0.2 + 0.3 + e^2 \cdot 0.4 + e^4 \cdot 0.1\right) - 4.84$$
$$= 8.741 - 4.84 = 3.9.$$

Задача. 2.2.4 *Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0.2$ возможного значения x_1, математическое ожидание $M[X] = 3.8$ и дисперсия $D[X] = 0.16$. Найти закон распределения случайной величины.*

Решение. Так как случайная величина X принимает только два значения x_1 и x_2, то вероятность $p_2 = P(X = x_2) = 1 - p_1 = 1 - 0.2 = 0.8$.

По условию задачи имеем:

$M[X] = x_1p_1 + x_2p_2 = 0.2x_1 + 0.8x_2 = 3.8$;

$D[X] = (x_1^2p_1 + x_2^2p_2) - M^2[X] = (0.2x_1^2 + 0.8x_2^2) - (0.38)^2 = 0.16$.

Таким образом получили систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 8x_2 & = & 38 \\ 2x_1^2 & + & 8x_2^2 & = & 146 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 4x_2 & = & 19 \\ x_1^2 & + & 4x_2^2 & = & 73 \end{array}\right. \Rightarrow$$

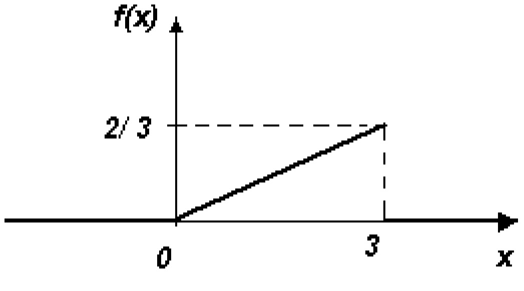
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 19 - 4x_2 \\ (19 - 4x_2)^2 + 4x_2^2 = 73 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 5x_2^2 - 38x_2 + 72 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} x_2' = 4 & x_2'' = 3.6 \\ x_1' = 3 & x_1'' = 4.6 \end{array}.$$

Условию x_1<x_2 удовлетворяет решение x_1 = 3. x_2 = 4. Поэтому искомый закон распределения имеет вид:

x	3	4
p	0.2	0.8

Задача. 2.2.5 *Случайная величина X подчинена закону распределения, график плотности которого имеет вид:*



Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Решение. Найдем дифференциальную функцию распределения $f(x)$. Вне интервала $(0,\ 3)$ $f(x) = 0$. На интервале $(0,\ 3)$ график плотности есть прямая с угловым коэффициентом $k = 2/9$, проходящая через начало координат. Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{2}{9}x, & 0 < x < 3 \\ 0, & x \geqslant 3 \end{cases}.$$

Математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M[X] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int\limits_{0}^{3} x \cdot \tfrac{2}{9}xdx + \int\limits_{3}^{\infty} x \cdot 0dx = \\ &= \tfrac{2}{9}\int\limits_{0}^{3} x^2dx = \tfrac{2}{9\cdot3}\Big|_0^3 = 2. \end{aligned}$$

Найдем дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

$$\begin{aligned} D[X] &= M[X^2] - m_X^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx - 2^2 = \\ &= \tfrac{2}{9}\int\limits_{0}^{3} x^3dx - 4 = \tfrac{2}{9\cdot4}x^4\Big|_0^2 - 4 = \tfrac{9}{2} - 4 = 0.5. \\ \sigma[X] &= \sqrt{D[X]} = \sqrt{0.5} == 0.707. \end{aligned}$$

Задача. 2.2.6 *Найти математическое ожидание и дисперсию суммы очков, выпадающих на четырех игральных кубиках при одном бросании.*

Решение. Обозначим A — число очков на одном кубике при одном бросании, B – число очков на втором кубике, C — на третьем кубике, D — на четвертом кубике.

Для случайных величин A, B, C, D закон распределения один.

$A, \ldots, D$	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Тогда $M[A] = M[B] = M[C] = M[D] = \frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6) = 3.5$

и

$$
\begin{aligned}
&M[A+B+C+D] = M[A]+M[B]+M[C]+M[D] = 14\\
&M[A^2] = M[B^2] = M[C^2] = M[D^2] =\\
&= 1/6 \cdot (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \tfrac{91}{6}\\
&D[A] = D[B] = D[C] = D[D] = \tfrac{91}{6} - (3.5)^2 = \tfrac{91}{6} - \tfrac{49}{4} = \tfrac{35}{12}\\
&D[A+B+C+D] = D[A]+D[B]+D[C]+D[D] =\\
&= 4 \cdot \tfrac{35}{12} = \tfrac{35}{3} = 11.7\\
&\sigma[A+B+C+D] = \sqrt{11.7} = 3.415.
\end{aligned}
$$

2.2.4 Задачи для самостоятельного решения

Задача. 2.2.1 *Прибор состоит из четырех независимо работающих элементов.*
Число работающих элементов — случайная величина, распределенная по закону:

x	0	1	2	3	4
p	0.02	0.15	0.35	0.36	A

Найти: A, математическое ожидание $M[X]$, $M[2X+4]$, дисперсию $D[X]$, $D[5X-6]$, среднее квадратичное отклонение $\sigma[X]$.

Ответ: $A = 0.12$; $M[X] = 2.41$; $M[2X+4] = 8.82$;
D[X] = 0.9; $D[5X-6] = 22.5$; $\sigma[X] = 0.95$.

Задача. 2.2.2 *Дискретная случайная величина имеет ряд распределения*

x	-1	0	1	2
p	0.3	0.1	0.5	0.1

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y= X^3.

Ответ: $M[Y] = 1,\ D[Y] = 6.2.$

Задача. 2.2.3 *Пусть случайные величины имеют плотности распределения:*

$$
f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ (x/18), & 0 < x \leqslant 6 \\ 0, & x > 6 \end{cases}, \quad f_2(x) = (1/2)\exp\{-|x|\}.
$$

Найти математическое ожидание и дисперсию.

Ответ: $M_1[X] = 4,\ D_1[X] = 2,\ \ M_2[X] = 0,\ D_2[X] = 2.$

Задача. 2.2.4 *Пусть случайная величина X имеет плотность распределения.*

$$f(x) = \begin{cases} (1/2)\cdot\cos(x), & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = sin(2x)$.

Ответ: $M[Y] = 0,\ D[Y] = 16/15.$

Задача. 2.2.5 *Найти закон распределения дискретной случайной величины X, которая имеет два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны математическое ожидание $M[X] = 3.5$; дисперсия $D[X] = 0.25$; вероятность значения x_1 : $p_1 = 0.5$.*

Ответ:

x	3	4
p	0.5	0.5

2.3 Законы распределения случайных величин

2.3.1 Биномиальное распределение

Пусть производятся испытания по схеме Бернулли:

1. опыты независимы, т.е. результат каждого опыта не оказывает влияния на другие;
2. вероятность $P(A) = p$ наступления события A в каждом опыте одна и та же.

Через X обозначим число наступлений события A в серии из n опытов.

Определение 2.5 *Случайная величина X называется распределенной по биномиальному закону, если свои возможные значения она принимает с вероятностями*

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.20)$$

Случайная величина X имеет ряд распределения

x	0	1	2	3	$\ldots$	n
p	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2}$	$C_n^3 p^3 (1-p)^{n-3}$	$\ldots$	p^n

Замечание. Биномиальное распределение дискретно.

Числовые характеристики для биномиального распределения:

Математическое ожидание

$$M[X] = n \cdot p \qquad (2.21)$$

Дисперсия

$$D[X] = n \cdot p \cdot (1-p) \qquad (2.22)$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma[X] = \sqrt{np(1-p)} \qquad (2.23)$$

Функция распределения $F(x)$ имеет вид ступенчатой функции с разрывами в точках $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, причем величина скачка в точке $x = m$ равна вероятности $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$.

2.3.2 Распределение Пуассона

Определение 2.6 . *Случайная величина X называется распределенной по закону Пуассона, если свои возможные значения x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ она принимает с вероятностями*

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (2.24)$$

где λ — параметр распределения (однопараметрическое распределение).

Замечания. Пуассоновское распределение является распределением дискретной случайной величины. Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона, если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала и $\lambda = n \cdot p$ — среднее число появлений события в n испытаниях. Случайная величина X имеет ряд распределения:

x	0	1	2	3	$\dots$	m	$\dots$
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	$\dots$

Числовые характеристики распределения Пуассона:

$$M[x] = \lambda;\ D[x] = \lambda;\ \sigma[X] = \sqrt{\lambda}. \tag{2.25}$$

Отсюда следует смысл параметра λ.

2.3.3 Равномерное распределение

Определение 2.7 *Непрерывная случайная величина* X *называется равномерно распределенной на* $[a,\ b]$, *если ее дифференциальная функция распределения имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & x < a,\ x > b \end{cases} \tag{2.26}$$

Интегральная функция распределения равномерно распределенной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leqslant b \\ 1, & x > b \end{cases}. \tag{2.27}$$

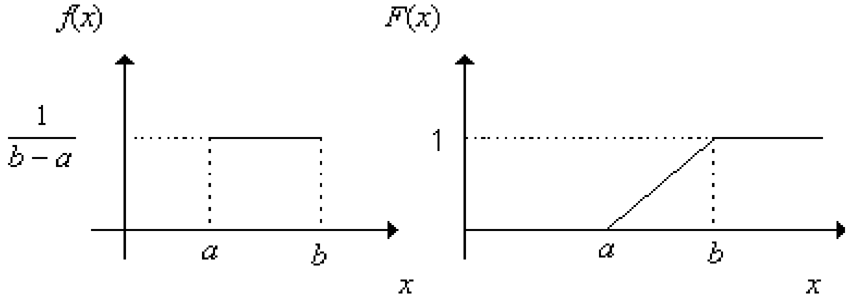


Рис. 2.4. Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ равномерного распределения

Вероятность того, что случайная величина, равномерно распределенная в интервале (α, β), принадлежащем [a, b], выражается формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \tag{2.28}$$

Для равномерного распределения случайной величины X :

$$M[x] = \frac{a+b}{2}, \tag{2.29}$$

т.е. математическое ожидание является серединой промежутка $[a, b]$;

$$D[x] = \frac{(b-a)^2}{12}, \ \sigma[X] = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{2.30}$$

Пример: ошибка отсчета показаний стрелочного прибора распределена равномерно на отрезке, равном цене деления.

2.3.4 Экспоненциальное распределение

Определение 2.8 *Непрерывная случайная величина X называется распределенной по экспоненциальному (показательному) закону, если дифференциальная функция распределения имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases}, \tag{2.31}$$

где λ — параметр распределения. Интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.32}$$

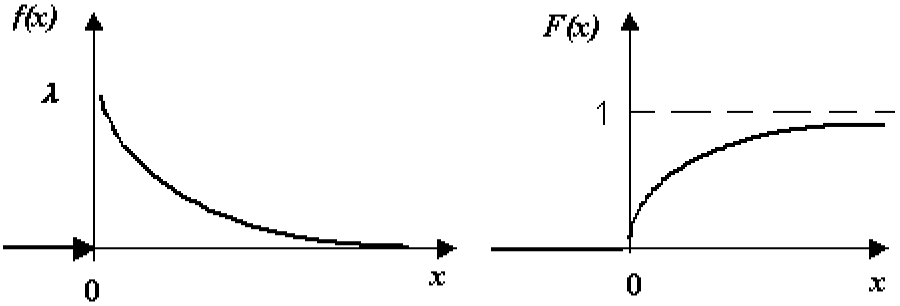


Рис. 2.5. Графики функций $f(x)$ и $F(x)$:

Числовые характеристики распределения:

$$M[x] = \frac{1}{\lambda}, \quad D[x] = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma[x] = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.33}$$

Эти формулы устанавливают вероятностный смысл параметра λ.

Вероятность попадания в интервал $(\alpha,\ \beta)$ дается выражением:

$$P(\alpha \leqslant x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}. \tag{2.34}$$

Примеры непрерывных случайных величин, распределенных по показательному закону:

- продолжительность телефонного разговора;
- срок службы радиоэлектронной аппаратуры;
- время ожидания при техническом обслуживании;
- длина пути молекулы между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами;
- время обнаружения цели локатором.

2.3.5 Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Определение 2.9 *Непрерывная случайная величина X называется распределенной по нормальному закону или имеет гауссовское распределение, если дифференциальная* *функция распределения имеет вид:*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.35}$$

где a, σ *— параметры распределения.*

График функции $f(x)$ называется нормальной кривой. Функция $f(x)$ имеет единственную точку экстремума $x = a$, в которой функция принимает наибольшее значение $f(A) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. В точках $x = a \pm \sigma$ кривая имеет перегиб и $f(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, то ось Ox — горизонтальная асимптота для нормальной кривой. Изменение параметра σ ведет к изменению формы кривой: чем меньше σ, тем кривая круче; при увеличении σ она становится более пологой.

Нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = a$.

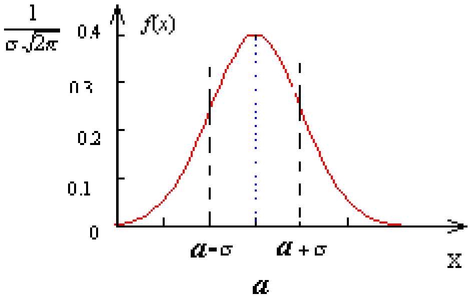


Рис. 2.6. Нормальная кривая

Вероятностный смысл параметров нормального распределения:

$$M[X] = a, \quad D[X] = \sigma^2, \quad \sigma[X] = \sigma \tag{2.36}$$

Функция нормального распределения

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\xi-a)^2}{2\sigma^2}} d\xi. \tag{2.37}$$

Этот «неберущийся» интеграл удобно выразить через табулированную функцию Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi. \tag{2.38}$$

Именно

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{2.39}$$

Функция $\Phi(x)$ — нечетная.

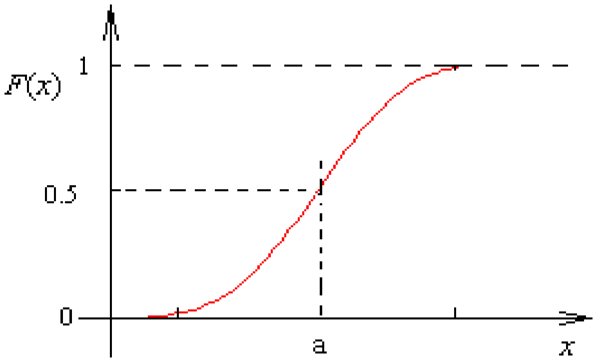


Рис. 2.7. График функции $F(x)$ нормального распределения

При $a = 0$, $\sigma = 1$ получаем стандартное (нормированное) нормальное распределение. Для него

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x) \tag{2.40}$$

Функция $\varphi(x)$ — четная и табулирована.

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \tag{2.41}$$

Функция $F_0(x)$ — табулирована.

Вероятность попадания случайной величины в интервал $[\alpha, \beta)$:

$$P(\alpha \leqslant x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \tag{2.42}$$

Если $\alpha = a - \delta$, $\beta = a + \delta$, где δ — произвольное число, то

$$P(a - \delta \leqslant x < a + \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

При $\delta = 3\sigma$

$$P(a - 3\sigma \leqslant x < a + 3\sigma) = 2\Phi\,(3) = 2 \cdot 0.49865 = 0.9973.$$

Правило трех сигм. *Если случайная величина подчинена нормальному закону, то вероятность ее отклонения от математического ожидания больше трех средних квадратичных ошибок, близка к нулю* $(p = 0.0027)$. *Или практически достоверно, что нормальная случайная величина принимает значения в* $[a-3\sigma,\ a+3\sigma]$, *так как* $p = 0.9973$.

На практике многие случайные величины распределены нормально или почти нормально. Например: ошибки возможных измерений; ошибки стрельбы, наведения; отклонение напряжения в сети от номинала; суммарная выплата страхового общества за большой период; дальность полета снаряда; частота события при большом числе опытов; масса вылавливаемой рыбы одного вида; рост мужчин (женщин) одного возраста и национальности.

2.3.6 Решение задач

Задача. 2.3.1 *Вероятность того, что частица, вылетевшая из радиоактивного источника, будет зарегистрирована счетчиком, равна* 0.0001. *За время наблюдения из источника вылетело* 30000 *частиц. Найти вероятность того, что счетчик зарегистрировал:*

1. *ровно 3 частицы;*
2. *ни одной частицы;*
3. *не менее 10 частиц.*

Решение. По условию $n = 30000$, $p = 0.0001$. События, состоящие в том, что частицы, вылетевшие из радиоактивного источника, зарегистрированы, независимы; число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона: $P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Найдем λ : $\lambda = np = 30000 \cdot 0.0001 = 3 = M[X]$. Искомые вероятности:

1. $P_{30000}(3) = \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = 0.224042,\ k = 3.$

2. $P_{30000}(0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = 0.049787,\ k = 0.$

3. $P_{30000}(x \geqslant 10) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{9} \frac{3^k e^{-3}}{k!} =$

$$= 1 - \left[\frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 e^{-3}}{3!} + \right.$$

$$\left. + \frac{3^4 e^{-3}}{4!} + \frac{3^5 e^{-3}}{5!} + \frac{3^6 e^{-3}}{6!} + \frac{3^7 e^{-3}}{7!} + \frac{3^8 e^{-3}}{8!} + \frac{3^9 e^{-3}}{9!}\right] =$$

$$= 1 - (0.049787 + 0.149361 + 0.224042 +$$

$$+ 0.224042 + 0.168031 + 0.100819 + 0.050409 + 0.021604 +$$

$$+ 0.008102 + 0.002701) = 1 - 0.998898 = 0.001102.$$

Задача. 2.3.2 *В партии 5% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 5 деталей. Написать закон распределения дискретной случайной величины X — числа нестандартных деталей среди пяти отобранных; найти математическое ожидание и дисперсию.*

Решение. Дискретная случайная величина X — число нестандартных деталей — имеет биномиальное распределение и может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$. Вероятность нестандартной детали в партии $p = 5/100 = 0.05$. Найдем вероятности этих возможных значений:

$x_1 = 0$	$P_5(0) \; = \; C_5^0 \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^5 = 0.7737809$
$x_2 = 1$	$P_5(1) \; = \; C_5^1 \cdot 0.05^1 \cdot 0.95^4 = 0.2036267$
$x_3 = 2$	$P_5(2) \; = \; C_5^2 \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^3 = 0.02143433$
$x_4 = 3$	$P_5(3) \; = \; C_5^3 \cdot 0.05^3 \cdot 0.95^2 = 0.0011281$
$x_5 = 4$	$P_5(4) \; = \; C_5^4 \cdot 0.05^4 \cdot 0.95^1 = 0.0000297$
$x_6 = 5$	$P_5(5) \; = \; C_5^5 \cdot 0.05^5 \cdot 0.95^0 = 0.0000003$

Напишем искомый закон распределения:

x	0	1	2	3	4	5
p	0.773780	0.203626	0.021434	0.001128	0.000029	0.0000003

Найдем числовые характеристики:

$$M\left[X\right] = \sum_{i=0}^{5} x_i p_i = 0 \cdot 0.7737809 + 1 \cdot 0.2036267 + 2 \cdot 0.0214343 +$$
$$+ 3 \cdot 0.0011281 + 4 \cdot 0.0000297 + 5 \cdot 0.0000003 = 0.2499999 \approx 0.250$$

или

$$M[X] = n \cdot p = 5 \cdot 0.05 = 0.25.$$

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = 0^2 \cdot 0.7737809 + 1^2 \cdot 0.2036267 +$$
$$+ 2^2 \cdot 0.0214343 + 3^2 \cdot 0.0011281 + 4^2 \cdot 0.0000297 + 5^2 \cdot 0.0000003 -$$
$$- 0.0625 = 0.2999995 - 0.0625 = 0.2374995 \approx 0.2375$$

или

$$D[X] = n \cdot p \cdot (1 - p) = 5 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 0.2375.$$

Задача. 2.3.3 *Время обнаружения цели радиолокатором распределено по показательному закону*

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geqslant 0 \end{array} \right. ,$$

где $\frac{1}{\lambda} = 10$ *сек. — среднее время обнаружения цели. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена за время от* 5 *до* 15 *сек. после начала поиска.*

Решение. Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(5,\ 15)$ найдем по формуле (2.8):

$$P(5 < x < 15) = \int\limits_{5}^{15} f(t)dt =$$
$$= F(15) - F(5) = \left[1 - e^{-15\lambda}\right] - \left[1 - e^{-5\lambda}\right] = e^{-5\lambda} - e^{-15\lambda}$$

При $\lambda = \frac{1}{10} = 0.1$ получаем

$$P(5 \leq x < 15) = e^{-0.5} - e^{-1.5} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - \frac{1}{e}\right) =$$
$$= 0.6065(1 - 0.3679) = 0.6065 \cdot 0.6321 = 0.3834$$

Задача. 2.3.4 *Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону с параметрами* $a = 0$, $\sigma = 20$ *мм. Записать дифференциальную функцию распределения* $f(x)$ *и найти вероятность того, что при измерении допущена ошибка в интервале от* 5 *до* 10 *мм.*

Решение. Подставим значения параметров a и σ в дифференциальную функцию распределения (2.35):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{20\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\cdot(20)^2}} = \frac{1}{20\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{800^2}}$$

По формуле (2.42) найдем вероятность попадания случайной величины X в интервале $[0,\ 5)$:

$$\begin{aligned} P(5 \leqslant x < 10) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \\ = \Phi\left(\frac{10 - 0}{20}\right) - \Phi\left(\frac{5 - 0}{20}\right) \\ = \Phi(0.5) - \Phi(0.25) = 0.19146 - 0.09871 = 0.9275 \end{aligned}$$

Здесь значения функции Лапласа взяты по таблице.

Задача. 2.3.5 *Цена деления шкалы амперметра равна* 0.1 *ампера. Показания амперметра округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая* 0.03 *ампера. Найти математическое ожидание, дисперсию ошибки округления отсчета и функцию* $F(x)$.

Решение. Ошибку округления отсчета можно считать распределенной равномерно на $[0;\ 0.1]$, т.е. $a = 0$, $b = 0.1$. Тогда дифференциальная функция распределения $f(x)$ будет иметь вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{0.1-0} = 10, & 0 \leqslant x \leqslant 0.1 \\ 0, & x > 0.1 \end{cases}$$

Найдем

$$M[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{0+0.1}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05.$$
$$D[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(0.1-0)^2}{12} = \frac{0.01}{12} = 0.0008$$
$$P(0.03 < x < 0.07) = \frac{\beta-\alpha}{b-a} = \frac{0.07-0.03}{0.1-0} = \frac{0.04}{0.1} = 0.004.$$

2.3.7 Задачи для самостоятельного решения

Задача. 2.3.1 *По данным ОТК на сотню металлических брусков, заготовленных для обработки, приходится* 30 *с зазубринами. Записать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X числа брусков с зазубринами среди случайно взятых* 4 *брусков. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.*

Ответ: $M[X] = 1,2$; $D[X] = 0.84$; $\sigma[X] = 0.916$

x	0	1	2	3	4
p	0.2401	0.4116	0.2646	0.0756	0.0081

Задача. 2.3.2 *Магазин получил* 5000 *бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется поврежденной, равна* 0.0001. *Найти вероятность того, что магазин получит поврежденных бутылок:*

1. *ровно 3;*
2. *менее трех;*
3. *хотя бы одну.*

Ответ: $P(x < 3) = 0.985612; P(k > 0) = 0.393469; P(k = 3) = 0.012636.$

Задача. 2.3.3 *Случайная величина X имеет равномерное распределение на* $[3;\ 5]$. *Найти дифференциальную и интегральную функцию распределения, построить их графики, найти математическое ожидание, дисперсию и* $P(2 < x < 4)$.

Ответ: $M[X] = 4$; $D[X] = 1/3$; $P(2 < x < 4) = 1/2$.

Задача. 2.3.4 *Непрерывная случайная величина* X *распределена по показательному закону, заданному интегральной функцией распределения*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0.4x}, & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Найти дифференциальную функцию распределения $f(x)$ *и вероятность того, что случайная величина* X *в результате испытания попадает в интервал* $(5, 10)$.

Ответ: $P = 0.11698.$

Задача. 2.3.5 *Случайная величина* X *распределена нормально с математическим ожиданием* $M[X] = A$ *и дисперсией* $D[X] = \sigma^2$. *Найти вероятность того, что случайная величина* X *отклоняется от своего математического ожидания не больше, чем на* $k(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ *средних квадратичных отклонений.*

Ответ: $P_1 = 0.68278; P_2 = 0.9545; P_3 = 0.99730; P_4 = 0.999994.$

Глава 3

Индивидуальные задания

Вариант 1

Задача 1.1. В вещевой лотерее разыгрывается 8 предметов. Первый, подошедший к урне вынимает из нее 5 билетов. Каким числом способов он может их вынуть, чтобы:

- ровно два из них оказались выигрышными;
- по крайней мере два из них оказались выигрышными.

В урне всего 50 билетов.

Ответ: 326240;377452.

Задача 1.2. При наличии трех патронов производится стрельба по цели до первого попадания. Описать пространство элементарных событий и следующие события:

- попадание при третьем выстреле:
- попадание при первом или третьем выстреле.

Задача 1.3. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся

- все женщины:
- все мужчины.

Ответ: p_1=1/6; p_2=1/30

Задача 1.4. Приемник и передатчик выходят в эфир в течение часа в любой момент времени и дежурят по15 минут. Какова вероятность приема информации?

Ответ: $p = 7/16$.

Задача 1.5. Вычислительный центр, который должен производить непрерывную обработку поступающей информации, располагает тремя вычислительными устройствами. Каждое из этих устройств имеет вероятность отказа за некоторое время, равную 0.2. Найти вероятность того, что откажет только одно устройство.

Ответ: $p = 0.384$

Задача 1.6. Среднее число вызовов, поступающих на станцию скорой помощи за одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 4 минуты поступит:

- пять вызовов;
- менее пяти вызовов;
- не менее пяти вызовов;
- хотя бы один вызов.

Ответ: 0.091604; 0.099632; 0.900368; 0.999665.

Задача 1.7. Положение курса корабля при прохождении пролива равновозможно по ширине пролива, которая равна 3 км. Вероятность подрыва на мине в левой части пролива шириной 1 км. равна 0.8, а в остальной части — 0.4. Корабль прошел пролив. Какова вероятность того, что он проходил через левую часть пролива?

Ответ: $p = 1/\ 7$

Задача 1.8. Орудие, имея 3 снаряда, ведет стрельбу по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле 0.2. Составить ряд распределения случайной величины X — числа израсходованных снарядов. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Задача 1.9. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A \cdot \sin(x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

Найти A, функцию распределения $F(x)$ и $P(0 < x < \pi)$.

Ответ: $a = 1/2;\ P = 0.5$

Задача 1.10. В результате испытаний двух приборов А и В установлены вероятности P наблюдения помех, оцениваемые по четырехбальной системе уровней помех U:

P \ U	0	1	2	3
Прибор А	0.7	0.2	0.06	0.04
Прибор В	0.8	0.06	0.04	0.1

По этим данным надо выбрать лучший прибор, если лучшим считается тот, который в среднем имеет меньший уровень помех.

Задача 1.11. Учебник издали тиражом 900 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно равна 0.00001. Найти вероятность того, что тираж содержит

- пять бракованных книг;
- хотя бы одну бракованную книгу.

Ответ: $p_1 = 0,6;\ p_2 = 0.9999$

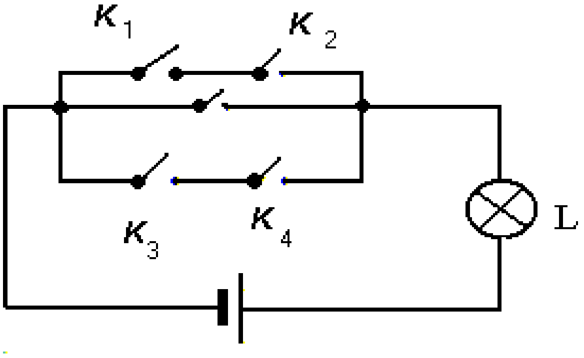
Вариант 2

Задача 2.1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_x^{x-y} = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$$

Ответ: (18, 8)

Задача 2.2. Составлена электрическая схема:



События A_i: {i- й контакт замкнут}. Записать событие C: {Цепь замкнута, лампа L горит.}

Задача 2.3. Из колоды в 52 карты наугад выбираются 4. Найти вероятность того, что среди них окажется

- один туз;
- все тузы.

Ответ: $p_1 = 0.2556,\ p_2 = 0.000003693$

Задача 2.4. В неизвестном месте канала шириной 300 м находится мина. Какова вероятность того, что:

- из идущих по каналу строем фронта трех судов ни одно не подорвется на мине;
- подорвется второе судно при следовании судов друг за другом.

Ширина первого судна 30 м, второго судна 20 м, третьего — 10м.

Ответ: $p_1 = 0.8;\ p_2 = 0.06.$

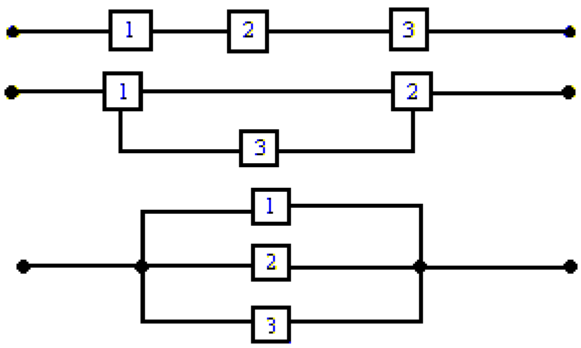
Задача 2.5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0.7. После первого попадания стрельба прекращается. Найти вероятность того, что будет произведено 4 выстрела.

Ответ: $p = 0.0189$

Задача 2.6. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0.7. Для получения зачета по стрельбе необходимо попасть в цель не менее 3 раз из 5 выстрелов. Найти вероятность сдачи стрелком зачета по стрельбе.

Ответ: $p = 0.837$

Задача 2.7. Имеются три схемы с ненадежными элементами:



Вероятность прохождения тока через каждый элемент равна 1/2. Найти вероятность того, что наудачу выбранная схема проводит ток.

Ответ: $p = 0.541$;

Задача 2.8. Мишень состоит из круга №1 и двух колец с номерами №2, №3. Попадание в круг №1 дает 10 очков, в кольца №2, 3— соответственно 5 и (-1) очко. Вероятности попадания в круг и кольца равны соответственно 0.5 , 0.3 и 0.2. Найти закон распределения для случайной величины X— суммы выбитых очков в результате трех попаданий.

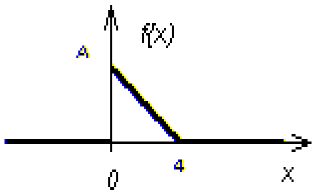
Задача 2.9. Зная функцию распределения случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x - \frac{1}{4} \cdot x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases},$$

найти дифференциальную функцию $f(x)$ и построить ее график.
Определить $P\left(0 \leqslant x \leqslant 1\right)$.

Ответ: $p = 0.75$

Задача 2.10. Случайная величина X распределена по закону, график которой имеет вид, изображенный на рисунке:



Найти A, функцию плотности $f(x)$, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

Ответ: $A = 1/2$; $m_x = 4/3$; $\sigma_x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Задача 2.11. Найти параметр С, математическое ожидание и дисперсию показательного распределения, заданного плотностью распределения

$$f(x) = C \cdot e^{-5x} (x \geq 0).$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X попадет в интервал $(0.1; 0.2)$.

Ответ: $p =$0.2386

Вариант 3

Задача 3.1. Решить уравнение

$$12 \cdot C_{x+3}^{x-1} = 55 \cdot A_{x+1}^{2}$$

Ответ: $x =$8

Задача 3.2. Брошены две игральные кости. Описать пространство элементарных событий и события:

- модуль разности выпавших очков равен двум;
- сумма выпавших очков равна 7;
- число очков на одной грани в 2 раза больше, чем на другой.

Ответ: $2/9$; $1/6$; $1/6$.

Задача 3.3. На стеллаж случайным образом расставлены 15 книг, причем 6 из них в переплете. Определить вероятность того, что из трех взятых наугад книг хотя бы одна будет в переплете.

Ответ: $p =$53/65

Задача 3.4. На отрезке AB длиной l наудачу поставлены 2 точки L и M. Найти вероятность того, что точка L будет ближе к точке M, чем к точке A.

Ответ: $p =$0.75

Задача 3.5. Автомат производит некоторые изделия и наполняет ими ящики. Известно, что в среднем 1 ящик из 100 содержит по крайней мере одно нестандартное изделие. Наличие нестандартных изделий в одном ящике не связано с наличием нестандартных изделий в другом. Найти вероятность того, что в любом из четырех ящиков окажутся только стандартные изделия.

Ответ: $p = 0.961$

Задача 3.6. Вероятность того, что деталь нестандартная, равна 0.1. Сколько деталей нужно отобрать, чтобы с вероятностью 0.9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей отклоняется от вероятности $p = 0.1$ по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

Ответ: $n = 400$

Задача 3.7. Имеются 2 партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

Ответ: $p =$13/132

Задача 3.8. Случайная величина X имеет следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2 \\ 0.2, & -2 < x \leqslant 0 \\ 0.6, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Построить её. Составить таблицу распределения. Найти $P(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

Ответ: $p = 0.4$

Задача 3.9. Дана плотность распределения независимой случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \pi/6 \\ A \cdot \sin(3 \cdot x), & \pi/6 \le x \le \pi/3 \\ 0, & x > \pi/3 \end{cases}$$

Найти:

- параметр A;
- функцию распределения $F(x)$;
- Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Ответ: $A = 3$

Задача 3.10. Случайная величина X задана своей плотностью $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$ на интервале $(0, 2)$, вне этого интервала она равна нулю. Найти дисперсию функции $Y = x^2$ не находя предварительно плотности Y.

Ответ: $D[X]$ = 28/45

Задача 3.11. Вероятность прибытия поезда без опоздания равна 0,9. Найти вероятность того, что среди 5 прибывающих поездов:

- опаздывающих меньше двух;
- хотя бы один поезд опоздает.

Ответ: $p_1 = 0.91854$; $p_2 = 0.40951$

Вариант 4

Задача 4.1. Решить уравнение $30 \cdot A^4_{x-2} = A^5_x$.

Ответ: 6, 25

Задача 4.2. Доказать, что $\bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B} = \overline{AB}$.

Задача 4.3. На 10 карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Две карточки вынимаются и укладываются в порядке появления. Найти вероятность того, что получившееся двузначное число — нечетное.

Ответ: $p=$1/2

Задача 4.4. Авиационная бомба, сброшенная с самолета на узел связи площадью 2 км^2, может упасть в любую точку с равной вероятностью. На данном узле связи группа командно — штабных машин размещена на площади 0.8 км^2, а группа обеспечения — на площади 0.6 км^2. Найти вероятность того, что в результате бомбардировки связь будет нарушена.

Ответ: $p=$0.7

Задача 4.5. Три орудия независимо друг от друга произвели залп по одной цели. Вероятность попадания первым орудием равна 0.6, вторым — 0.7, третьим — 0.8. Найти вероятность разрушения цели, если для этого достаточно хотя бы одного попадания.

Ответ: $p = 0.976$

Задача 4.6. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом испытании равна 0.4. Найти:

- число опытов n, при котором наиболее вероятное число отказов прибора равно 4.
- вероятность наиболее вероятного числа отказов прибора.

Ответ: $p = 0.25$; $n = 10$

Задача 4.7. Деталь, изготовленная на заводе, попадает на проверку к одному из двух контролеров. К первому контролеру попадает 60% всех деталей. Из них 94% первый контролер признал стандартными. Второй контролер признал стандартными 98% деталей. Найти вероятность того, что взятая наугад, оказавшаяся стандартной, деталь — и проверена первым контролером.

Ответ: $p = 0.59$

Задача 4.8. Проводятся последовательные испытания пяти приборов. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайной величины — числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0.9.

Задача 4.9. Задана плотность распределения СВ:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ c \cdot (x^3 + 1), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти коэффициент c и $F(x)$. Построить графики для $f(x)$ и $F(x)$.

Ответ: $c = 4/5$.

Задача 4.10. Даны законы распределения независимых случайных величин X и Y:

X	-2	-1	0
p	0.3	0.2	0.5
Y	0	1	2
p	0.4	0.5	0.1

Найти математические ожидания для функций: $X^2 + Y^2$ и $2X$-$3Y$.

Ответ: 2.3, -3.7.

Задача 4.11. Ведется стрельба из точки вдоль прямой. Предполагается, что дальность полета снаряда — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами: $a = 1200M$, $\sigma = 100M$. Найти, какой процент выпущенных снарядов дает перелет от 80 до 100 метров за отметку 1200 метров.

Ответ: 1.66%

Вариант 5

5

Задача 5.1. Учебный курс охватывает 10 разделов теории вероятностей и 8 разделов других дисциплин. Экзаменационный билет состоит из 5 вопросов: три по теории вероятностей и два — по другим дисциплинам. Сколькими способами можно составить экзаменационные билеты?

Ответ: 3360

Задача 5.2. Абонент забыл последнюю цифру номера и поэтому набирает ее наудачу. Описать событие:{абоненту придется звонить не более, чем в 4 места}.

Задача 5.3. В магазине имеется 14 телевизоров. Из них 10 — импортных. Найти вероятность того, что среди 6 наудачу взятых телевизоров:

- 4 импортных;
- все телевизоры импортные.

Ответ: $p_1 = 60/143$; $p_2 = 10/143$.

Задача 5.4. Два приятеля договорились встретиться в условленном месте в промежутке от 6 до 7 часов. Каждый приходит на место встречи в любой момент времени и ждет другого ровно 10 минут. Какова вероятность того, что приятели встретятся?

Ответ: $p = 11/36$.

Задача 5.5. Из колоды из 52 карты берут наугад 2 карты. Найти вероятность того, что это будут карты одной масти.

Ответ: p= 12/51

Задача 5.6. 20% изготавливаемых на заводе кинескопов не выдерживают гарантийный срок службы. Найти вероятность того, что из партии в 600 кинескопов количество не выдержавших срок службы будет находится между 100 и 125.

Ответ: $p = 0.67$

Задача 5.7. Две из 4 независимо работающих ламп отказали. Найти вероятность того, что отказали 1 и 2-я лампы. Вероятности отказа ламп равны соответственно 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 .

Ответ: $p = 0.0393$

Задача 5.8. При сборке прибора для более точной подгонки основной детали может потребоваться 1, 2 или 3 пробы с вероятностями 0.07, 0.21, 0.55 соответственно. Составить ряд распределения случайной величины X — числа подгонок. Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

Задача 5.9. Случайная величина X задана своей плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - ax^2, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Найти: параметр a, функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Ответ: $a = 3/2$.

Задача 5.10. Имеется 10 радиоламп, среди которых 3 неисправные. Случайно отбирается 4 лампы. Найти математическое ожидание случайной величины X — числа неисправных ламп среди отобранных.

Ответ: $M[X] = 6/5$.

Задача 5.11. Телефонная станция обслуживает 1000 абонентов. Вероятность любому абоненту позвонить на коммутатор в течение часа равна 0.001. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят:

- 4 абонента;
- более 4-х абонентов.

Ответ: $p_1 = 0.015$; $p_2 = 0.004$

Вариант 6

Задача 6.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{A_{5x}^{y-3}}{A_{5x}^{y-2}} = \frac{1}{7}, \\ \frac{C_{5x}^{y-2}}{C_{5x}^{y-3}} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Ответ: (2, 6).

Задача 6.2. Три орудия ведут огонь по цели. Каждое орудие стреляет один раз. Для поражения цели достаточно двух попаданий.

Описать событие: {Цель поражена}.

Задача 6.3. Число дополнительных вопросов, задаваемых на экзамене равно 25. Из них 10 – по теории вероятностей, а остальные — по другим разделам математики. Студенту задано 3 вопроса. Найти вероятность того, что

- два из них по теории вероятностей;
- три вопроса по теории вероятностей.

Ответ: $p_1 = \ 27/92$; $p_2 = 6/115$.

Задача 6.4. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Найти вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождение причала, если время стоянки первого парохода — 1 час, а второго — 2 часа.

Ответ: $p = 139/1152$.

Задача 6.5. По результатам многолетних наблюдений установлено, что в сентябре бывает в среднем 14 солнечных дней. Найти вероятность того, что первого и второго сентября будет одинаковая погода.

Ответ: $p = 0.4851$

Задача 6.6. Коммутатор обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор равна 0.01. Найти вероятность того, что в течение одной минуты позвонят

- ровно 3 абонента;
- менее трех абонентов;
- более трех абонентов;
- хотя бы один абонент.

Ответ: $p_1 = 0.0613,\ p_2 = 0.9177,\ p_3 = 0.019,\ p_4 = 0.6321.$

Задача 6.7. Доля грузовых машин, проезжающих мимо бензоколонки составляет $3/2$. Вероятность того, что грузовая машина будет заправляться равна 0.1, а легковая — 0.2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

Ответ: $p = 0.4286$

Задача 6.8. Производится три удара в футбольные ворота. Вероятность попадания в ворота $p = 0.7$. Случайная величина X — число промахов. Найти ряд распределения и функцию распределения X. Построить их графики.

Задача 6.9. Являются ли плотностями вероятностей некоторых случайных величин следующие функции:

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & -0.5 \leqslant x \leqslant 0.5 \\ 0, & x < -0.5;\ x > 0.5 \end{cases},\quad f_2(x) = \tfrac{1}{\pi} \cdot \tfrac{1}{1+x^2},\quad x \in \Re$$

Построить их графики и найти соответствующие им функции распределения.

Задача 6.10. Дискретная случайная величина имеет следующее распределение:

Найти $M[y]$, $D[y]$, если $y = 2^x$.

Ответ: M[Y]=2.4, D[Y]=1.99.

Задача 6.11. Случайная величина имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 4$. Найти вероятность события $\{1 < X < 1.5\}$.

Ответ: $p = 0.016$

Вариант 7

Задача 7.1. Сколько различных диагоналей можно провести в выпуклом 10-ти угольнике?

Ответ: 35.

Задача 7.2. Фирма получает сырье от трех поставщиков. Возможны сбои в поставках. Рассматриваются события A_i — своевременная поставка сырья i-тым поставщиком. Описать пространство элементарных событий и события:

- получено сырье от второго и третьего поставщиков;
- получено сырье от второго или третьего поставщиков;
- получено сырье только от второго или третьего поставщиков.

Задача 7.3. В конверте среди 100 фотографий находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлекают 19 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется искомая.

Ответ: $p_1 = 0.19$

Задача 7.4. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что их произведение {xy} будет не больше единицы, а частное от деления {y / x} — не больше двух.

Ответ: $p = (1 + ln8)/8$.

Задача 7.5. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает ее наудачу. Найти вероятность того, что ему придется звонить не более чем в 4 места.

Ответ: $p = 0.4$

Задача 7.6. На какое отклонение частоты события от его вероятности следует рассчитывать (с вероятностью около 0.9) при 3600 опытах, если вероятность появления события рана 1/5?

Ответ: $\varepsilon = 0.011.$

Задача 7.7. Последовательно произведено два выстрела по цели. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.2, при втором — 0.6. Вероятность разрушения цели при одном попадании равна 0.3; при двух — 0.9. Найти вероятность того, что

- цель будет разрушена;
- цель разрушена двумя попаданиями.

Ответ: $p_1 = 0.276, p_2 = 0.108.$

Задача 7.8. Дан закон распределения действительной случайной величины:

x	1	2	3	4	5
p	$1.5 \cdot a^2$	a^2	a	a	0.5

Найти:

- a;
- $P\{X \geqslant 3\}$;
- $P\{X < 4\}$
- наибольшее число K, удовлетворяющее условию: $P\{X \geqslant K\} > 0.75$;
- функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Ответ: $a = 0.2; P\{X \geqslant 3\} = 0.9; P\{X < 4\} = 0.3; K = 3.$

Задача 7.9. Даны две функции

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \pi\,/6 \\ \cos(3x), & \pi\,/6 < x \leq \pi\,/3\,, \\ 1, & x > \pi\,/3 \end{cases}$$

$$F_1\,(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \pi/3 \\ -\sin(3x), & \pi/3 < x \leqslant \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$$

Какие из них могут быть функциями распределения некоторой случайной величины X? Ответ обосновать.

Задача 7.10. Дана плотность вероятности случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \\ A \cdot x, & 1 < x < 3 \\ 0, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

Найти: A, дисперсию функции $Y = e^x$, не находя предварительно функцию Y.

Ответ: $A = 1/4,\ D[e^x] = \frac{1}{16} \cdot e^2(e^4 - 1).$

Задача 7.11. Электрические лампочки производятся на автоматической линии. В среднем одна из тысячи оказывается бракованной. Найти вероятность того, что из 8 взятых наугад лампочек будет 25 процентов бракованных.

Ответ: $p = 278 \cdot 10^{-7}$

Вариант 8

Задача 8.1. Имеется 8 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну на правую руку так, чтобы эти перчатки были разных размеров?

Ответ: 56.

Задача 8.2. Упростить выражение:

$$C = (A + B)\left(A + \bar{B}\right)\left(\bar{A} + B\right)$$

Ответ: AB.

Задача 8.3. Какова вероятность получить главный выигрыш в игре «Спортлото — 6 из 48»?

Ответ: $p = 10^{-8}$

Задача 8.4. Два студента условились встретиться в определенном месте между 14 и 15 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 5 минут и уходит. Найти вероятность встречи, если момент прихода каждого студента независим и равно возможен в указанном промежутке времени.

Ответ: $p = 23/144$

Задача 8.5. Кодовая комбинация состоит из 10 импульсов трех форм: A,B,C, причем в каждой кодовой комбинации 3 импульса имеют форму A, 2 импульса имеют форму B, 5 импульсов имеют форму C. Найти вероятность прихода первых трех импульсов в последовательности ABC.

Ответ: $p = 1/24$

Задача 8.6. Известно, что 5 процентов студентов носят очки. Какова вероятность того, что из 200 сидящих в аудитории студентов не менее 10 процентов носят очки?

Ответ: $p = 0.0007$

Задача 8.7. В канцелярии работают 4 секретарши, которые отправляют соответственно 40, 10, 30, 20 процентов исходящих бумаг. Вероятности неверной адресации бумаг секретаршами равны соответственно 0.01, 0.04, 0.06, 0.01. Найти вероятность того, что документ, неверно адресованный, отправлен третьей секретаршей.

Ответ: $p = 0.64$

Задача 8.8. Испытываются 4 лампочки, каждая из которых с вероятностью 0.1 имеет дефект. Испытания проводят до появления первой исправной лампы. Случайная величина X — число проверенных ламп. Найти функцию распределения F(X) и построить ее график.

Задача 8.9. Даны две функции

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ e^x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & \leqslant x \leqslant e \\ 1, & x > e \end{cases}$$

Какие из них могут быть функциями распределения некоторой случайной величины X. Ответ обосновать.

Задача 8.10. Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -3 \\ \frac{A}{\sqrt{9-x^2}}, & -3 < x < 3 \\ 0, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

Найти A, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

Ответ: $A = 1/\pi,\ M[X] = 0,\ \sigma[X] = 3/\sqrt{2}$.

Задача 8.11. Известно, что детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра имеют нормальное распределение с параметрами $M[x] = 5, D[x] = 0.85$. Найти вероятность того, что диаметр взятой наугад детали имеет размеры от 4 до 7 см.

Ответ: $p = 0.84$

Вариант 9

Задача 9.1. В чемпионате по футболу участвует 18 команд, причем каждые 2 команды встречаются дважды.

Сколько сыграно матчей?

Ответ: 306.

Задача 9.2. Упростить выражение

$$C = \left(\bar{A} + \bar{B}\right)\left(A + \bar{B}\right)\left(\bar{A} + B\right)$$

Ответ: $\overline{A} \cdot \overline{B}$

Задача 9.3. Некто забыл номер нужного ему телефона. Помня только, что все 5 цифр номера различные, набрал номер наудачу.

Найти вероятность того, что номер набран правильно.

Ответ: $p = 3 \cdot 10^{-5}$

Задача 9.4. На отрезке длиной L наудачу выбраны две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними будет не меньше $L/4$?

Ответ: $p = 7/16$

Задача 9.5. В коробке 6 одинаковых пронумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера кубиков появятся в возрастающем порядке.

Ответ: $p = 1/720$.

Задача 9.6. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0.002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено изделий

- ровно 3;
- менее 3;
- более 3;
- хотя бы одно.

Ответ: $0.061,\ 0.92,\ 0.019,\ 0.632.$

Задача 9.7. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическими прицелами. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0.95; для винтовки без оптического прицела — 0.8. Стрелок поразил цель из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Задача 9.8. В сборной команде института по стрельбе 18 человек. Из них 8 перворазрядников. Наудачу выбирают трех членов сборной. Найти закон распределения числа перворазрядников среди выбранных, функцию распределения $F(x)$, построить ее график и найти $P(0 < x < 3)$.

Ответ: $p = 0.78$

Задача 9.9. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -kx^2 + \frac{1}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Найти k, $F(x)$, $P\,(2 \leqslant x \leqslant 5)$, построить график $f(x)$.

Ответ: $k = 1/64,\ P = 3/8.$

Задача 9.10. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \\ \frac{1}{8}(x^2 - 1), & 1 < x < 3 \\ 1, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, $M[\mathrm{e}^x]$, $M[x]$.

Ответ: $M[e^x] = 10.045,\ M[X] = 2.17.$

Задача 9.11. Случайная величина X — ошибка отсчета по приборам стрелочного типа - – распределена равномерно в промежутке $[1, 1]$, где за единицу измерения принята цена самого малого деления шкалы. Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию и $P\,\{-0.5 \leqslant x \leqslant 0.5\}$.

Ответ: $M[X] = 0,\ D[X] = 1/3,\ P = 1/2.$

Вариант 10

Задача 10.1. Решить уравнение

$$\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$$

.

Ответ: $x = 2$

Задача 10.2. По радиоканалу передано 3 сообщения. События А$_i$ — i-е сообщение искажено помехами. Описать события:

- не более двух сообщений искажено;
- по крайней мере два сообщения искажено;
- искажено первое и второе сообщения.

Задача 10.3. В группе из 25 студентов, среди которых 10 девушек, разыгрываются 5 билетов. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажется

- две девушки;
- не более двух девушек.

Ответ: $p_1 = 0.385; p_2 = 0.6988.$

Задача 10.4. На плоскости проведены параллельные прямые на расстоянии 8 см друг от друга. Найти вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 3 см не будут накрывать ни одну линию.

Ответ: $p = 1/4.$

Задача 10.5. Вероятность безотказной работы в течение смены блока управления составляет 0.85. Для повышения надежности системы устанавливается такой же резервный блок. Найти вероятность безотказной работы системы с учетом резервного блока.

Ответ: $p = 0.9775.$

Задача 10.6. По данным ОТК радиозавода 0.8 всего объема выпускаемых транзисторов не имеют дефектов. Найти вероятность того, что среди взятых наугад 400 транзисторов дефекты будут иметь

- 80 штук;
- не менее 70 и не более 80 штук.

Ответ: $p_1 = 0.04986; p_2 = 0.44421.$

Задача 10.7. Для сигнализации о нарушении режима работы автоматической линии используют индикаторы, принадлежащие с вероятностями 0.2;0.3;0.5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении режимов равны соответственно 1; 0.75; 0.4. От индикаторов поступил сигнал. К какому типу вероятнее всего принадлежит сработавший индикатор?

Задача 10.8. Два баскетболиста поочередно бросают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Построить ряд распределения числа бросков, производимых каждым баскетболистом, если вероятность попадания для первого равна 0.4, а для второго — 0.6.

Задача 10.9. Случайная величина подчиняется распределению арксинуса с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant a \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & |x| < a \end{cases}.$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Задача 10.10. Известна функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ax^2, & 0 \leqslant x \leqslant 4/5 \\ 1, & x > 4/5 \end{cases}$$

Найти a, математическое ожидание и дисперсию.

Ответ: $a = 25/16,\ M[X] = 8/15,\ D[X] = 8/225.$

Задача 10.11. Автомат изготавливает шарики. Отклонение диаметра шарика от проектного размера имеет нормальное распределение. Фактически отклонение не превышает по абсолютной величине 0.9 мм. Найти вероятность того, что отклонение диаметра наудачу взятого шарика меньше 0.7 мм.

Ответ: $p = 0.4.$

Вариант 11

Задача 11.1. Решить неравенство

$$C_{10}^{x-1} > C_{10}^{x}.$$

Ответ: 6, 7, 8, 9, 10.

Задача 11.2. Студент разыскивает нужную ему книгу. Он может воспользоваться услугами трех библиотек. Описать пространство элементарных событий и события:

- студент посетил три библиотеки;
- книги в библиотеках нет;
- студент посетил две библиотеки.

Задача 11.3. На красных карточках написаны буквы: «аадкнт»; на белых карточках — буквы «еннижр».

Что вероятнее: сложить с первого раза слово из красных «деканат» или из белых — «инженер»?

Задача 11.4. Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел не превзойдет единицы, а их произведение будет не больше 3/16, если каждое из этих чисел не больше единицы.

Ответ: $p = (4 + ln9)/16.$

Задача 11.5. Студент разыскивает нужную ему книгу и может воспользоваться услугами трех библиотек. Вероятность того, что книга есть первой библиотеке равна 0.7; во второй- 0.9; в третьей - 0.6. Найти вероятность того, что студенту придется посетить все библиотеки.

Ответ: $p = 0.03.$

Задача 11.6. Сделано 10 000 подбрасываний монеты. Найти вероятность того, что цифра выпадет не менее 4000 и не более 6000 раз.

Задача 11.7. Из 10 спортсменов 6 первого разряда, 4 — второго. Вероятность выполнить зачетную норму перворазрядником составляет 0.9, а второразрядником - – 0.7. Найти вероятность того, что случайно взятые два спортсмена выполнят зачетную норму.

Ответ: $p = 0.67.$

Задача 11.8. Случайная величина X — число попаданий в корзину при двух бросках. Вероятность попадания при одном броске равна 0.4. Найти функцию распределения F(x) и построить ее график. Составить ряд распределения случайной величины X.

Задача 11.9. Задана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (x^2 - 2x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

Найти параметр c, функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Ответ: $c = 3/4.$

Задача 11.10. Случайная величина X в интервале (0,1) задана плотностью распределения $f(x) = 4/5(x^3 + 1)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание функции $y = x^2$. Что вероятнее: в результате испытания окажется $\{X$ < 1/2$\}$ или $\{X$ > 1/2$\}$?

Ответ: $M[X^2] = 2/5.$

Задача 11.11. Случайная величина X— отклонение емкости конденсатора от номинала - – распределена равномерно на отрезке [-50, 50].

Найти плотность распределения и функцию распределения, найти математическое ожидание и дисперсию, $P\{10 < X < 30\}$.

Ответ: $M[X] = 0,\ D[x] = 2500/3,\ P = 0.2.$

Вариант 12

Задача 12.1. Решить уравнение

$$\frac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42.$$

Ответ: $x = 7.$

Задача 12.2. Дано соотношение $C = (A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6)$ События A_i – i- й контакт замкнут, C— цепь замкнута. Составить эквивалентную электрическую схему.

Задача 12.3. Среди кандидатов в сборную университета по волейболу 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают 5 человек. Какова вероятность того, что в состав команды будут выбраны

- один первокурсник,
- два второкурсника и два третьекурсника.

Ответ: $p_1 = 1/143; p_2 = 70/143.$

Задача 12.4. Интервал движения автобуса - 7 минут. Описать пространство элементарных событий и случайное событие А — пассажир ждет автобус не менее 1 минуты и не более 4 минут. Определить Р(А).

Ответ: $P(A) = 3/7.$

Задача 12.5. В секретном замке на одной оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов, на которых записаны различные цифры. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков получится нужная комбинация.

Ответ: $p = 0.0016.$

Задача 12.6. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий. Вероятность того, что изделие бракованное, равно 0.05. Найти с вероятностью 0.9426 границы, в которых будет заключено число бракованных изделий.

Ответ: $14 \leqslant m \leqslant 32.$

Задача 12.7. Проверяется партия изделий, среди которых 10 процентов дефектных. Контролер с вероятностью 0.95 обнаруживает дефект, если он есть, и с вероятностью 0.02 может признать исправную деталь дефектной. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие будет признано дефектным.

Ответ: $p = 0.133.$

Задача 12.8. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле равна 0.8. Стрельба ведется до первого промаха. Составить закон распределения числа выстрелов. Найти наиболее вероятное число выстрелов.

Задача 12.9. Дана функция распределения случайной величины:

$$F\left(x\right) = a + b \cdot arctg\left(\frac{x}{2}\right), \qquad \left(-\infty < x < +\infty\right)$$

Определить:

- постоянные a и b;
- плотность распределения;
- $P\left(\alpha \leqslant x \leqslant \beta\right).$

Ответ: $a = 1/2,\ b = 1/\pi,\ P = \arctan \frac{1(\alpha-\beta)}{4+\alpha\beta}$.

Задача 12.10. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x) = -(3/4)x^2 + (9/2)x - 6$ на интервале (2,4); вне интервала $f(x) = 0$.
Найти дисперсию функции $Y = X^2$.

Ответ: $D[X^2] = 7.2457$.

Задача 12.11. Две электрические лампочки включены последовательно. Время работы каждой лампы имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0.004$ час$^{-1}$. Найти вероятность того, что в течение 100 часов лампы будут гореть.

Ответ: $P = 0.4493$

Вариант 13

Задача 13.1. Решить уравнение:

$$A_x^3 = \frac{A_x^4}{20}$$

Ответ: $x = 23$.

Задача 13.2. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельбу прекращают. Описать событие: {СДЕЛАНО НЕ БОЛЕЕ ТРЕХ ВЫСТРЕЛОВ}.

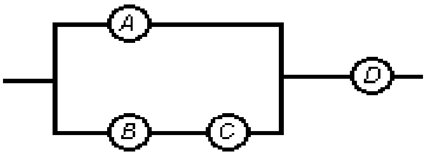
Задача 13.3. На семи карточках написаны буквы:«а, а, н, н, н, т, е». После тщательного перемешивания 7 раз наугад вынимают по одной карточке с последующим их возвращением. Каждая буква на карточке записывается. Найти вероятность того, что в результате будет записано слово «антенна».

Ответ: $p = 0.00238$.

Задача 13.4. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что их сумма не превышает единицы, а произведение — не меньше 0.09.

Ответ: $p = 0.5 - 0.09 \cdot \ln 4$.

Задача 13.5. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему



Надежность блоков равна соответственно 0.2, 0.1, 0.3, 0.1. Какова надежность системы?

Ответ: $p = 0.0236$.

Задача 13.6. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника

- три партии из четырех или пять партий из восьми;
- не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми.

Ничьи не считать.

Ответ: 1: 3 из 4-х; 2: не менее 5 из 8.

Задача 13.7. Имеется 3 крупных, 4 мелких и 13 средних целей. Вероятность попадания в любую из них их орудия соответственно равна 0.7, 0.1, 0.4. Произошло попадание. Определить вероятность того, что поражена средняя цель.

Ответ: $p = 0.6753$.

Задача 13.8. Независимые опыты повторяются до первого положительного исхода с вероятностью 0.5. Найти для случайного числа проведенных опытов

- ряд распределения;
- наиболее вероятное число опытов;
- найти функцию распределения и построить ее график.

Задача 13.9. Случайная величина имеет функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{16}, & 0 \leqslant x < 2 \\ x - \frac{7}{4}, & 2 \leqslant x < \frac{11}{4} \\ 1, & x \geqslant \frac{11}{4} \end{cases}$$

Найти:

- плотность распределения;
- $P(1 \leqslant X \leqslant 5)$.
- построить графики функции $F(x)$ и плотности распределения.

Ответ: $P = 0.9375$.

Задача 13.10. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A\sin(x), & 0 \leqslant x < \pi \\ 0, & x \geqslant \pi \end{cases}$$

Найти A, математическое ожидание и дисперсию.

Ответ: $A = 1/2,\ M[X] = \pi/2,\ D[X] = \pi^2/4 - 2$.

Задача 13.11. На испытательный стенд поставлено 9 конденсаторов. Вероятность пробоя конденсатора до истечения 1000 часов равна 0.01. Найти вероятность того, что в течение испытаний откажут

- ровно 5 конденсаторов;
- по крайней мере один конденсатор.

Ответ: $p_1 = 1.21 \cdot 10^{-10}; p_2 = 0.0956$.

Вариант 14

Задача 14.1. В урне 10 лотерейных билетов, из которых 4 выигрышных. Из урны наугад извлекаются 2 билета. Сколькими способами можно извлечь хотя бы один выигрышный билет?

Ответ: 10.

Задача 14.2. Производят три независимых измерения некоторой физической величины. Описать следующие события:

- {ПРИ ОДНОМ ИЗМЕРЕНИИ БЫЛА ДОПУЩЕНА ОШИБКА, ПРЕВЫШАЮЩАЯ ЗАДАННУЮ ТОЧНОСТЬ}
- {НЕ БОЛЕЕ, ЧЕМ В ОДНОМ ИЗМЕРЕНИИ ДОПУЩЕНА ОШИБКА}

Задача 14.3. Телефонный номер состоит из 6 цифр. Найти вероятность того, что среди них две цифры одинаковые.

Ответ: $p = 0.4536$.

Задача 14.4. В круг вписан правильный треугольник. Зная, что попадание точки в круг достоверно и что вероятность попадания точки в какую-либо часть круга пропорциональна ее площади, найти вероятность попадания точки в треугольник.

Ответ: $p = 3\sqrt{3}/(4\pi)$.

Задача 14.5. На обувной фабрике в отдельных цехах производят подметки, каблуки и верхи башмаков. Дефектными оказываются 0.5% каблуков, 2% подметок и 4% верхов. Изделия случайно комбинируются в пошивочном цехе. Найти вероятность того. что изготовленная пара обуви будет иметь дефект.

Ответ: $p = 0.124$.

Задача 14.6. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при броске равна 0.4. Произведено 10 бросков. Найти наиболее вероятное число попаданий и соответствующую вероятность.

Ответ: $m_0 = 4; p = 0.251.$

Задача 14.7. С первого автомата на сборку поступает 40%, со второго — 35%, с третьего — 25% деталей. Среди деталей первого автомата 0.2% бракованных; второго автомата — 0.3%, третьего — 0.5%. Найти вероятность того, что деталь, оказавшаяся бракованной, изготовлена на втором автомате.

Ответ: $p = 0.3387.$

Задача 14.8. Игра в «Спортлото 6 из 45». Составить закон распределения числа правильно угаданных чисел.

Задача 14.9. Случайная величина X — расстояние от точки попадания до центра мишени распределена по закону Релея, для которого функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \exp(\frac{-x^2}{2\cdot\sigma^2}), & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Найти плотность распределения.

Задача 14.10. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(x), x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

вне этого промежутка $f(x) = 0.$

Найти математическое ожидание и дисперсию функции $Y = sin(X).$

Ответ: $M[Y] = 0,\ D[Y] = 1/3.$

Задача 14.11. Время ожидания у бензоколонки является случайной величиной X, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания 15 минут. Найти вероятность события A = {5 мин <X < 7.5 мин.}. Найти функцию распределения и плотность распределения.

Ответ: $P = 0.11$.

Вариант 15

Задача 15.1. Сколько чисел больше миллиона можно составить из цифр 2, 3, 0, 5, 4, 1, 8?

Ответ: 4320.

Задача 15.2. В поле наблюдения микроскопа находятся три клетки. За время наблюдения каждая из них может как разделиться, так и не разделиться. Пусть событие A — разделилась первая клетка, B— разделилась вторая клетка, C— третья клетка. Описать пространство элементарных событий и события:

- произошло по крайней мере два события;
- произошло меньше двух событий;
- произошло по крайней мере одно событие.

Задача 15.3. В урне находятся 6 шаров, из них 2 белых и 4 черных. Последовательно извлекают 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми, если выбор производят

- с возвращением;
- без возвращения.

Ответ: $p_1 = 1/9$. $p_2 = 1/15$.

Задача 15.4. В точке C, положение которой на телефонной линии AB длины L равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка разрыва удалена от начала линии на расстоянии не меньшем l.

Ответ: $p = (L - l)/L$.

Задача 15.5. Найти вероятность того, что при залпе четырех стрелков, имеющих вероятности попадания соответственно 0.9, 0.8, 0.7, 0.6 будет три попадания.

Ответ: $p = 0.4404$

Задача 15.6. В цехе имеется три резервных мотора, работающих независимо друг от друга. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0.2. Найти вероятность того, что в данный момент включен хотя бы один мотор.

Ответ: $p = 0.488$

Задача 15.7. По воздушной цели производится стрельба из двух различных ракетных установок. Вероятность поражения цели первой установкой — 0.85; второй — 0.9; а вероятность поражения цели двумя установками равна 0.99. Известно, что первая установка срабатывает с вероятностью 0.8, вторая — 0.7. Цель поражена. Найти вероятность того, что цель была поражена обеими установками.

Ответ: $p = 0.6269$

Задача 15.8. Испытываются на надежность два прибора.

Вероятность отказа одного прибора равна 0.3. Составить таблицу распределения случайной величины — числа отказавших приборов. Найти функцию распределения и построить ее график.

Задача 15.9. Даны функции

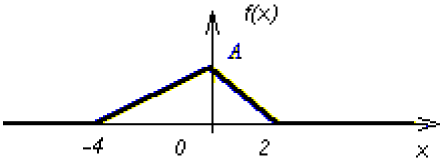
$$F_1 = \begin{cases} 0, \ x \leqslant \frac{7}{3} \\ 0.64x - 1.4, \ \frac{7}{3} < x \leqslant 4 \\ 1, \ x > 4 \end{cases} F_2 = \begin{cases} 0, \ x \leqslant 2 \\ 0.6x - 1, \ 2 < x \leqslant 4 \\ 1, \ x > 4 \end{cases}$$

$$F_3 = \begin{cases} 0, \ x \leqslant 0 \\ x - 0.5, \ 0 < x \leqslant 1.5 \\ 1, \ x > 1.5 \end{cases}$$

Какие из них могут быть функциями распределения некоторой случайной величины. В случае утвердительного ответа найти вероятность того, что соответствующая случайная величина принимает значение на отрезке [0, 3].

Ответ: $p = 0.4$

Задача 15.10. Случайная величина имеет плотность распределения, приведенную на графике:



Найти A, плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию.

Ответ: $A = 1/3$, $M[X] = -2/3$, $D[X] = 14/3$.

Задача 15.11. Найти вероятность того, что среди трехсот изделий окажется более пяти бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1%.

Ответ: $p = 0.084$

Вариант 16

Задача 16.1. Решить уравнение:

$$C_{x+3}^{x+1} = C_{x+1}^{x-1} + C_{x+1}^{x} + C_{x}^{x-2}$$

Ответ: $x = 4$.

Задача 16.2. Производится три удара в футбольные ворота. Описать пространство элементарных событий и события:

- не меньше двух попаданий;
- меньше двух попаданий;
- только два попадания;
- по крайней мере два попадания;

Задача 16.3. Телефонный номер состоит из 6 цифр. Найти вероятность того, что все цифры различные.

Ответ: $p = 0.1512.$

Задача 16.4. Начерчены 5 концентрических окружностей радиуса $k \cdot R$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$.
Круг радиуса R и два кольца с внешними радиусами $3R$ и $5R$ заштрихованы. В круге радиуса $5R$ наудачу выбрана точка. Определить вероятность ее попадания в заштрихованную область.

Ответ: $p = 0.6.$

Задача 16.5. В урне 5 шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что последовательно появятся шары с номерами 1, 4, 5.

Ответ: $p = 1/60.$

Задача 16.6. Прибор состоит из пяти независимо работающих элемента. Вероятность отказа элемента в момент включения равна 0.2.
Найти:

- наиболее вероятное число отказавших элементов;
- вероятность наиболее вероятного числа отказавших элементов;
- вероятность отказа прибора, если для этого достаточно отказа хотя бы четырех элементов.

Ответ: $m_0 = 1; p_1 = 0.4096; p_2 = 0.00672.$

Задача 16.7. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 использованных. Для игры наудачу выбираются два мяча и после игры возвращаются обратно. Для второй игры также наугад берутся два мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры новые.

Ответ: $p = 0.445.$

Задача 16.8. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартное, равна 0.9. Для проверки взято 3 изделия. Найти закон распределения числа стандартных деталей в выборке; функцию распределения и построить ее график.

Задача 16.9. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \frac{A}{x^2+1}, \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Найти:

- параметр A;
- функцию распределения;
- построить графики функции распределения и плотности.
- найти $P\{-1 < x < 1\}$;

Задача 16.10. Производится 4 выстрела по мишени с вероятностью попадания 0.2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение числа попаданий.

Ответ: $M[X] = 0.8, D[X] = 0.64,\ \sigma[X] = 0.8.$

Задача 16.11. Время t телефонного разговора — случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda = 0.4$ мин.$^{-1}$. Найти вероятность того, что разговор будет продолжаться более трех минут. Записать плотность и функцию распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

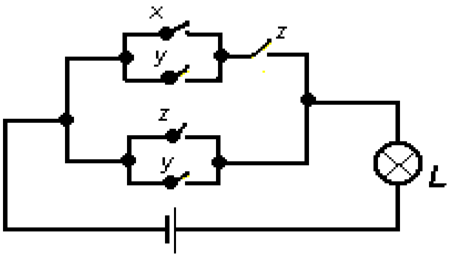
Ответ: $p = 1/e^{(1/1.2)}, M[X] = 0.8, D[X] = 0.64.$

Вариант 17

Задача 17.1. Сколькими способами можно выставить дозор из трех солдат и одного офицера, если есть 80 солдат и 3 офицера?

Ответ: 246480.

Задача 17.2. Упростить схему, где x, y, z — замыкающие контакты.



Задача 17.3. У сборщика 12 деталей, мало отличающихся друг от друга. Из них 5 — одного вида, 4 — второго вида, 3 — третьего вида. Какова вероятность того, что среди шести взятых наугад деталей окажется 3 — первого вида, 2 — второго вида и 1 — третьего вида.

Ответ: $p = 15/77$.

Задача 17.4. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств. Причем поступление каждого из сигналов равновозможно в течение часа. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 20 минут. Найти вероятность того, что сигнализатор сработает в течение часа, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

Ответ: $p = 5/9$.

Задача 17.5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0.7. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не более трех выстрелов.

Ответ: $p = 0.973$

Задача 17.6. Вероятность нарушения работы кинескопа телевизора во время гарантийного срока равна 0.3. Найти вероятность того, что из 20 наблюдаемых телевизоров гарантийный срок выдерживает 15 телевизоров.

Ответ: $p = 0.173$

Задача 17.7. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0.8; 7 — с вероятностью 0.7, 4 — с вероятностью 0.6, 2 — с вероятностью 0.5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. Какова вероятность того, что это был стрелок из второй группы?

Ответ: $p = 7/19$.

Задача 17.8. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0.1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте; найти $P(x \geqslant 2)$; функцию распределения и построить ее график.

Ответ: $p = 0.028$

Задача 17.9. Плотность распределения случайной величины имеет вид:

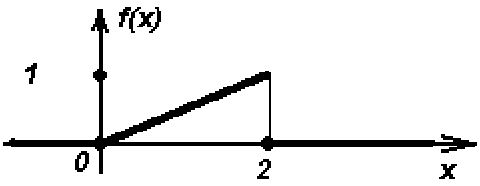
$$f\left(x\right) = \frac{2A}{e^x + e^{-x}}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

Найти:

- коэффициент A;
- функцию распределения;
- $P(0 < x<2)$;
- вероятность того, что случайная величина примет значение не меньше единицы.

Ответ: $A = 1/\pi$.

Задача 17.10. Случайная величина имеет плотность распределения следующего вида :



Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Ответ: $M[X] = 4/3,\ D[X] = 2/9,\ \sigma[X] = \sqrt{2}/3.$

Задача 17.11. При стрельбе по цели, находящейся на расстоянии $a = 3300$ метров, координаты точки попадания представляют собой нормально распределенную случайную величину со средне квадратичным отклонением, равным 24.2 м. Найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что координаты точки попадания окажутся в отрезке [3310, 3500].

Ответ: $p = 0.3409, M[X] = 3300,\ D[X] = 585.64.$

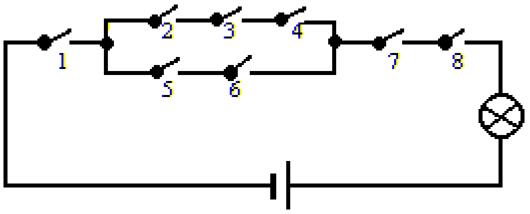
Вариант 18

Задача 18.1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_x^y = 9A_x^{y-1} \\ 2C_x^y = 3C_x^{y-1} \end{cases}$$

Ответ: {14, 6}

Задача 18.2. Составлена схема:



События:A_i ={i–й контакт замкнут}. Записать событие C ={цепь замкнута}.

Задача 18.3. Пять шариков случайным образом разбрасываются по пяти лункам независимо друг от друга. В лунку может попасть любое число шаров. Найти вероятность того, что в каждой лунке будет по одному шарику.

Ответ: $p = 0.0384.$

Задача 18.4. Стержень длиной 200 мм наудачу ломается на три части. Найти вероятность того, что часть стержня между точками излома будет не более 10 мм.

Ответ: $p = 0.0975$

Задача 18.5. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0.8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью более 0.4 можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

Ответ: $n < 5$.

Задача 18.6. Отдел технического контроля проверяет изделия. В среднем 96% изделий отвечает стандарту. Нестандартные подлежат регулировке. Проверяется 500 изделий из партии. Если среди них окажется 25 и более нестандартных, то вся партия возвращается на доработку. Найти вероятность того, что партия будет принята.

Ответ: $p = 0.87$

Задача 18.7. Два из трех независимо работающих элемента ЭВМ отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа элементов равны соответственно 0.2, 0.4 и 0.3.

Ответ: $p = 0.2979$

Задача 18.8. Из 12 изделий, среди которых 4 бракованных, случайным образом выбраны два изделия для проверки. Найти закон распределения числа бракованных изделий в выборке, функцию распределения и построить ее график.

Задача 18.9. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 2 \\ C(4 - x^2) & |x| \leqslant 2 \end{cases}$$

Построить ее график. Найти параметр C, функцию распределения и вероятность попадания случайной величины на отрезок [-1, 1].

Ответ: $C = 3/32,\ P = 11/16.$

Задача 18.10. Случайная величина X принимает два значения, причем $x_1 < x_2$. Найти закон распределения случайной величины, если

$$P\,(X = x_1) = 0.3;\ \ M[X] = 4.7;\ D[X] = 0.21.$$

Задача 18.11. Маршрутное такси ходит строго по расписанию с интервалом 5 минут. К остановке подошел пассажир. Время ожидания такси есть равномерно распределенная случайная величина. Записать ее плотность и функцию распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение и вероятность того, что пассажир будет ожидать такси менее одной минуты.

Ответ: $D[X] = 25/12; M[X] = 2.5, p = 0.2.$

Вариант 19

Задача 19.1. Решить уравнение

$$C_x^{x-2} + 2x = 9$$

Ответ: $x = 3$

Задача 19.2. Орудие, имея 4 снаряда, ведет стрельбу по цели до первого попадания. Описать пространство элементарных событий и события:

- {Попадание при втором или третьем выстреле};
- {Израсходованы все снаряды};
- {Проведено не более трех выстрелов}.

Задача 19.3. Устройство состоит из 5 элементов, из которых 2 элемента изношены. При включении устройства случайным образом включаются 2 элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся:

- Неизношенные элементы;
- Изношенные элементы.

Ответ: $p_1 = 3/10; p_2 = 1/10$.

Задача 19.4. На отрезке длиной 1 наудачу ставят две точки. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

Ответ: $p = 1/4$.

Задача 19.5. В продукции завода брак составляет 5% . Для контроля отобрано 20 деталей. Какова вероятность того, что хотя бы одна деталь из них бракованная?

Ответ: $p = 0.64$.

Задача 19.6. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0.9973 границы, в которых будет заключено число m выпадений шестерки.

Ответ: $3 < m < 23$.

Задача 19.7. В тире имеется 6 ружей, вероятности попаданий из которых равны соответственно $0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.8; 0.9$. Из наугад взятого ружья делается один выстрел. Стреляющий промахнулся. Определить вероятность того, что было взято четвертое ружьё.

Ответ: $p = 0.16$.

Задача 19.8. В урне 6 белых и 20 черных шаров. Вынули 6 шаров. Найти ряд распределения и функцию распределения числа вынутых белых шаров.

Задача 19.9. Плотность вероятности случайной величины равна

$$f(x) = a \cdot x^2 e^{-2x}, \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

Найти параметр a, функцию распределения $F(x)$.

Ответ: $a = 4$.

Задача 19.10. Найти закон распределения случайной величины X , принимающей значения $x_1,\ x_2$ с вероятностями 0.4 и p, если $M[x] = 3.2;\ D[x] = 0.96.\ x_{1<}x_2$.

Задача 19.11. Случайная величина задана интегральной функцией распределения

$$F\left(x\right)=\begin{cases} 0, & x<-1\\ \frac{x}{3}, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию и $P(0 < X < 1)$.

Ответ: $M[X] = 1/2,\ D[X] = 3/4,\ P = 1/3$.

Вариант 20

Задача 20.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{A_x^{y-3}}{A_x^{y-2}} = \frac{1}{8}\\ \frac{C_x^{y-3}}{C_x^{y-2}} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Ответ: $(12; 7)$

Задача 20.2. Бросают две кости. Событие А — сумма выпавших очков нечетная; В — хотя бы на одной из костей выпала единица. Описать события: $AB, A + B, \overline{AB}$. Изобразить их на диаграмме Эйлера–Венна.

Задача 20.3. На тепловой электростанции работает 15 сменных инженеров, из них 4 женщины. В смене занято 4 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену войдут не менее двух мужчин.

Ответ: $p = 0.967$.

Задача 20.4. Палуба корабля и надстройка имеет размеры $(300 \times 15)m^2$ и $(5 \times 5)m^2$. Найти вероятность поражения надстройки авиабомбой, если кроме прямого попадания надстройка поражается и при попадании бомбы на расстоянии 5 метров от нее.

Ответ: $p = 0.05$.

Задача 20.5. Три стрелка поочередно ведут стрельбу по одной и той же мишени до первого попадания. Каждый стрелок имеет 2 патрона. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0.2, для второго — 0.3, для третьего – 0.4. Найти вероятность того, что все три стрелка используют все патроны.

Ответ: $p = 0.18816$.

Задача 20.6. Вероятность попадания по движущейся мишени равна 0.7. Какова вероятность того, что из 20 выстрелов 15 окажется удачными?

Ответ: $p = 0.173$.

Задача 20.7. Три охотника выстрелили по одному лосю, который был убит одной пулей. Найти вероятность того, что лось был убит третьим охотником, если вероятность попадания для охотников равна соответственно 0.2, 0.4, 0.6.

Ответ: $p = 0.6207$.

Задача 20.8. Наладчик в течение смены обслуживает два станка. Вероятность того, что первый станок в течение смены потребует внимания, равна 0.3; второй — 0.4. Найти закон распределения, построить функцию распределения для случайной величины — числа станков, которые потребуют внимания рабочего в течение смены.

Задача 20.9. Дана плотность распределения случайной величины:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot e^{-x}, & x \geqslant 0 \\ A \cdot e^{x}, & x < 0 \end{cases}$$

Найти параметр A, функцию распределения и построить графики $F(x)$, $f(x)$.

Ответ: $A = 1/2$.

Задача 20.10. На каждые 20 приборов в среднем приходится 6 неточных. Составить ряд распределения числа точных приборов среди наудачу выбранных 5 приборов. Определить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Ответ: $M[X] = 3.497,\ D[X] = 0.838$.

Задача 20.11. Аппаратура содержит 3000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа которых равна 0.001. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного элемента?

Ответ: $p = 0.95$.

Список литературы

[1] Бочаров П.П., Печенкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. — М.: Гардарика, 1998. — 328 с.

[2] Магазинников Л.И. Курс лекций по теории вероятностей. — Томск: Издательство ТГУ, 1989. — 212 с.

[3] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1988. — 400 с.

[4] Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1984. — 245 с.

[5] Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные курсы./ Под редакцией А.В. Ефимова. — М.: Наука, 1984. — 250 с.

[6] Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. / Под редакцией А.А. Свешникова. — М.: Наука, 1965. — 656 с.

Содержание

Введение 3

1 События и вероятность **5**

1.1 Алгебра событий 5
  1.1.1 Классификация событий 5
  1.1.2 Алгебра событий 6
  1.1.3 Решение задач 8
  1.1.4 Задачи для самостоятельного решения . 13
1.2 Вероятность события 15
  1.2.1 Статистический подход к понятию вероятности 15
  1.2.2 Классическое определение вероятности 16
  1.2.3 Геометрическая вероятность 17
  1.2.4 Аксиомы вероятности 17
  1.2.5 Элементы комбинаторики 18
  1.2.6 Решение задач 20
  1.2.7 Задачи для самостоятельного решения . 24
1.3 Сложение и умножение вероятностей 25
  1.3.1 Условная вероятность. 26
  1.3.2 Теорема сложения вероятностей совместных событий 27
  1.3.3 Решение задач 28
  1.3.4 Задачи для самостоятельного решения . 32
1.4 Формулы полной вероятности и Байеса 34
  1.4.1 Решение задач 35
  1.4.2 Задачи для самостоятельного решения . 39
1.5 Повторные независимые испытания 40
  1.5.1 Наиболее вероятное число появлений события 42
  1.5.2 Приближение Пуассона 43
  1.5.3 Локальная и интегральная теоремы Лапласа 43
  1.5.4 Отклонение частоты появления события от его вероятности 44

1.5.5 Решение задач 45
1.5.6 Задачи для самостоятельного решения . 50

2 Случайные величины и их распределения 52
2.1 Случайные величины 52
2.1.1 Закон распределения дискретной случайной величины 53
2.1.2 Функция распределения случайной величины 54
2.1.3 Плотность распределения случайной величины 56
2.1.4 Решение задач 57
2.1.5 Задачи для самостоятельного решения . 63
2.2 Числовые характеристики случайных величин 65
2.2.1 Математическое ожидание 65
2.2.2 Дисперсия 67
2.2.3 Решение задач 69
2.2.4 Задачи для самостоятельного решения . 73
2.3 Законы распределения случайных величин . . 74
2.3.1 Биномиальное распределение 74
2.3.2 Распределение Пуассона 75
2.3.3 Равномерное распределение 76
2.3.4 Экспоненциальное распределение 77
2.3.5 Нормальное распределение (распределение Гаусса) 78
2.3.6 Решение задач 81
2.3.7 Задачи для самостоятельного решения . 85

3 Индивидуальные задания 87
Вариант 1 87
Вариант 2 89
Вариант 3 92
Вариант 4 94
Вариант 5 97
Вариант 6 99
Вариант 7 101
Вариант 8 103
Вариант 9 105

Вариант 10 108
Вариант 11 110
Вариант 12 112
Вариант 13 114
Вариант 14 117
Вариант 15 119
Вариант 16 121
Вариант 17 123
Вариант 18 126
Вариант 19 128
Вариант 20 130
Литература 133

Валентина Кирилловна Барышева
Юрий Иванович Галанов
Евгений Тихонович Ивлев
Елена Григорьевна Пахомова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук,
профессор К.П. Арефьев

Редактор

Подписано к печати .01.2004.
Формат $60 \times 84/16$. Бумага офсетная.
Печать RISO. Усл.печ.л. Уч.-изд.л. .
Тираж 200 экз. Заказ . Цена свободная.
Издательство ТПУ. 634050, Томск, пр. Ленина, 30.