6 лекция

ТОЭ Часть №1. Лк. №6.

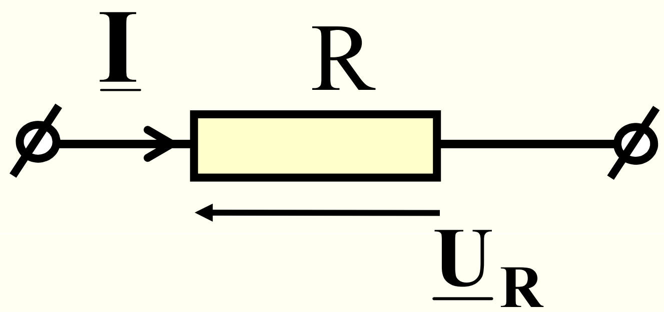
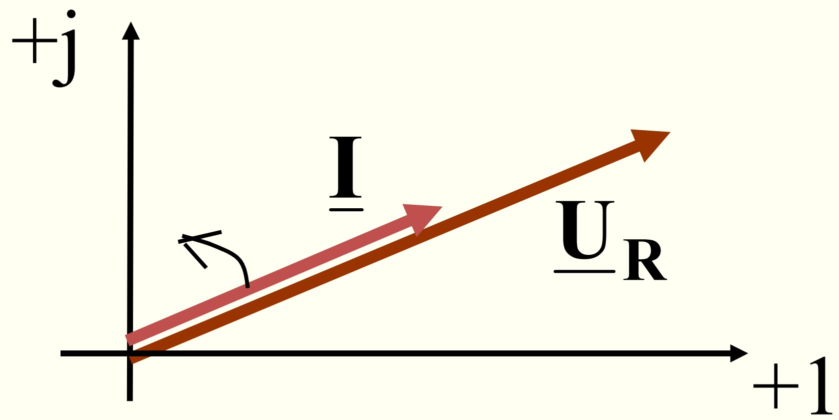
Тема: законы в комплексной форме,

мощность и векторные диаграммы

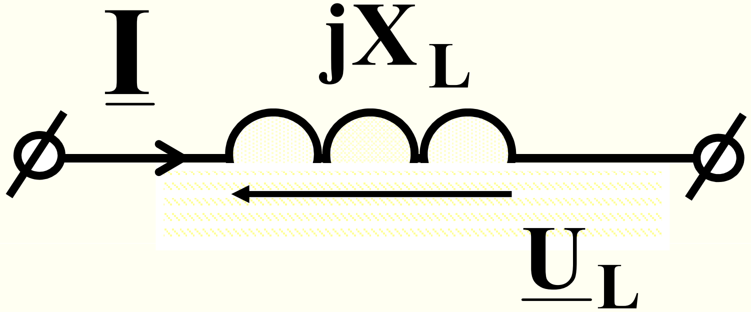
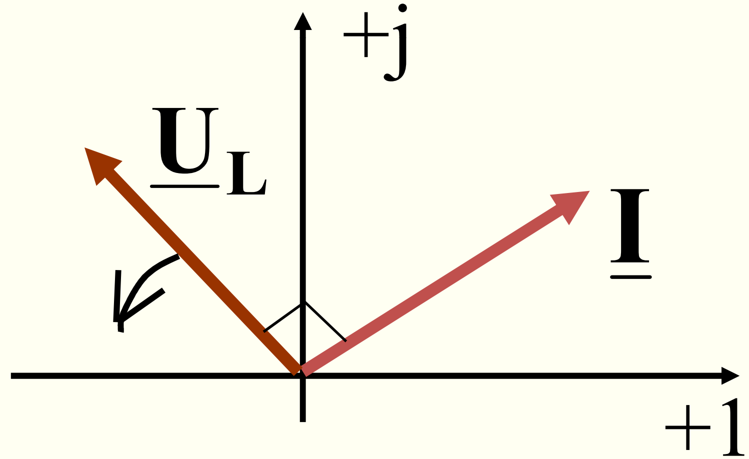
ЗАКОН ОМА
В КОМПЛЕКСНОЙ
ФОРМЕ

Закон Ома в комплексной форме основан на символическом методе и справедлив для линейных цепей с гармоническими напряжениями и токами

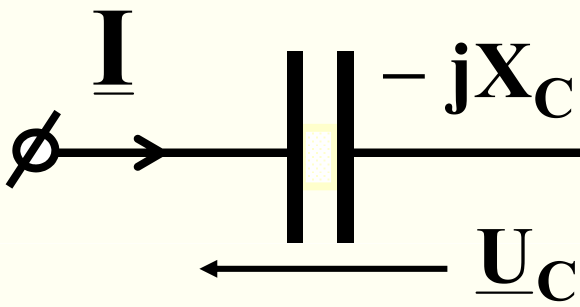
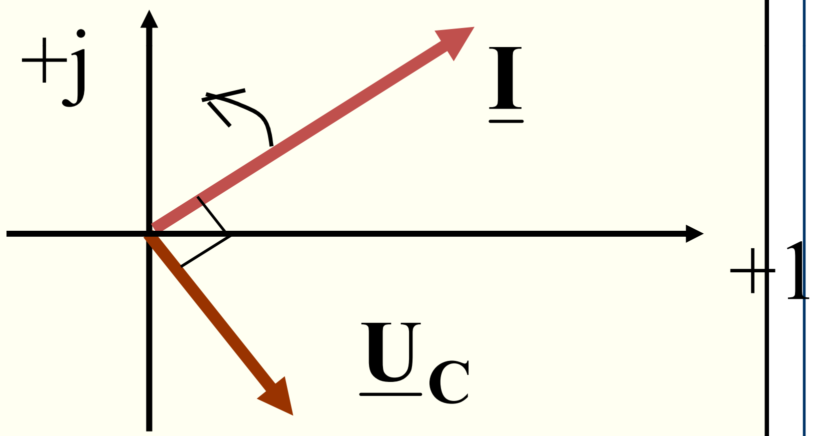
Этот закон следует из физической взаимосвязи между током и напряжением отдельных элементов цепи

Резистивный элемент	
Комплекс напряжения	$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$
Вектора напряжения и тока	

На комплексной плоскости вектор напряжения резистивного элемента совпадает по направлению с вектором своего тока

Индуктивный элемент	
Комплекс напряжения	$\underline{U}_L = j\omega L\underline{I} = jX_L\underline{I}$
Вектора напряжения и тока	

На комплексной плоскости вектор напряжения индуктивного элемента опережает по направлению вектор своего тока на 90 градусов

<table>
<tr>
<td>Емкостный элемент</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Комплекс напряжения</td>
<td>$$\underline{U}_C = -\frac{j}{\omega C}\underline{I} = -jX_C\underline{I}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Вектора напряжения и тока</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

На комплексной плоскости вектор напряжения емкостного элемента отстает по направлению от вектора своего тока на 90 градусов

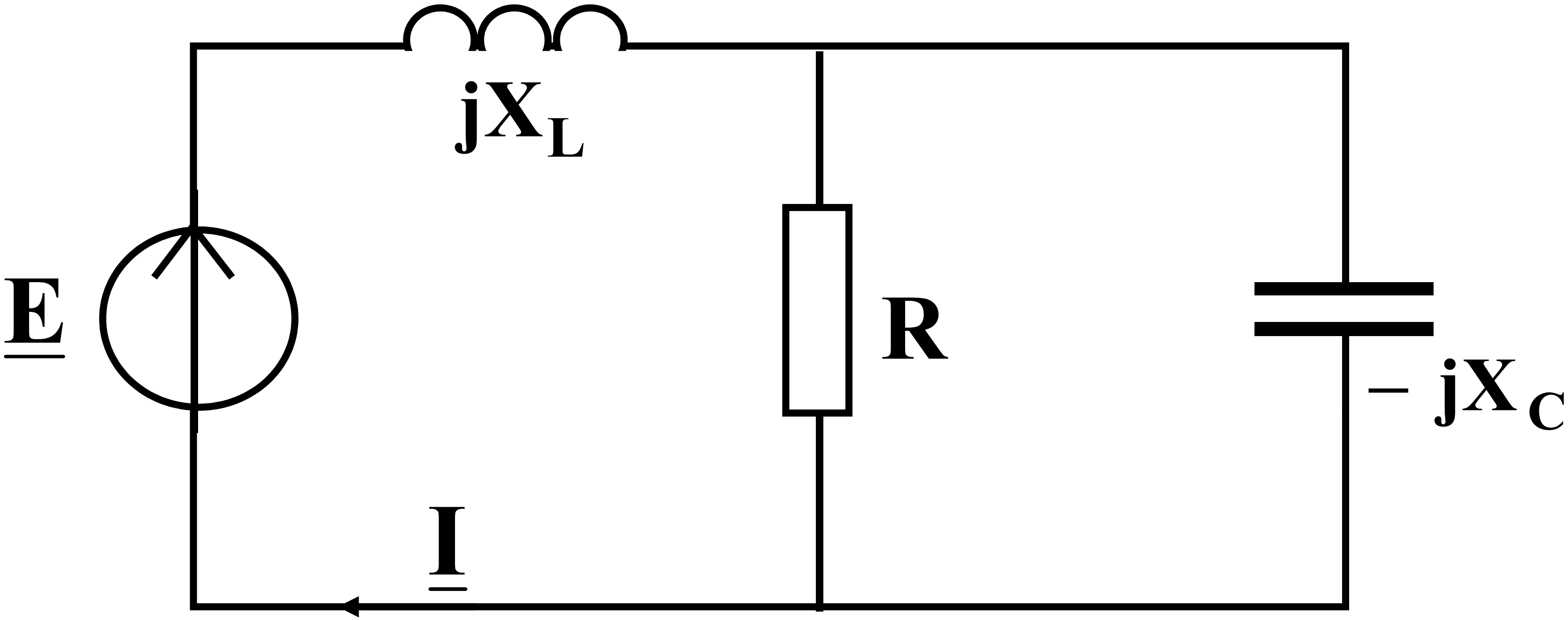
Где:

$X_L = \omega L$ **- индуктивное сопротивление (Ом)**

$X_C = 1/\omega C$ **- емкостное сопротивление (Ом)**

Закон Ома в комплексной форме для отдельных элементов аналогичен закону Ома для резистивного элемента на постоянном токе.
Для символического метода необходимо составить комплексную схему замещения с комплексными сопротивлениями и с комплексами действующих значений токов и напряжений

Например, комплексная схема замещения цепи:



$$\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{jX_L} + \frac{\mathbf{R(-jX_C)}}{\mathbf{R - jX_C}}$$

$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{\underline{\mathbf{E}}}{\underline{\mathbf{Z}}}$$

Где:

$$\underline{Z} = R_Э + jX_Э = Z \cdot e^{j\varphi}$$

– эквивалентное комплексное сопротивление цепи (Ом)

$$Z = \sqrt{{R_Э}^2 + {X_Э}^2}$$

- модуль сопротивления (Ом)

$$\varphi = arctg\,\frac{X_Э}{R_Э}$$

-аргумент (фаза) сопротивления (Град)

ЗАКОНЫ КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

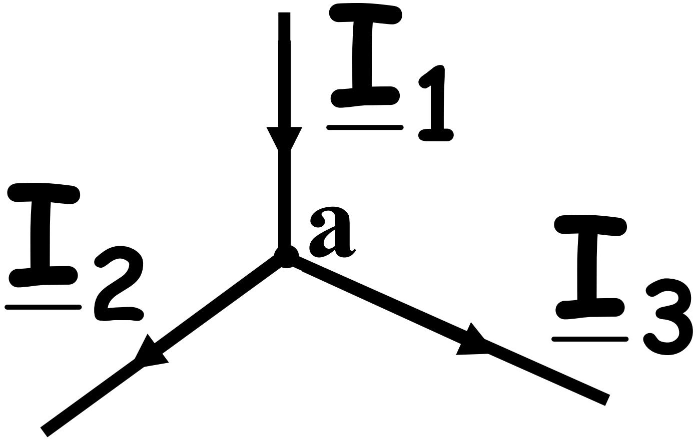
Сложению и вычитанию гармонических токов и напряжений с одинаковой угловой частотой ω в законах Кирхгофа соответствует сложение и вычитание их комплексных величин

1. ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Для любого узла комплексной схемы замещения цепи алгебраическая сумма комплексных значений токов равна нулю

$$\sum \pm \mathbf{\underline{I}_k} = \mathbf{0}$$

Например:



узел **а:**

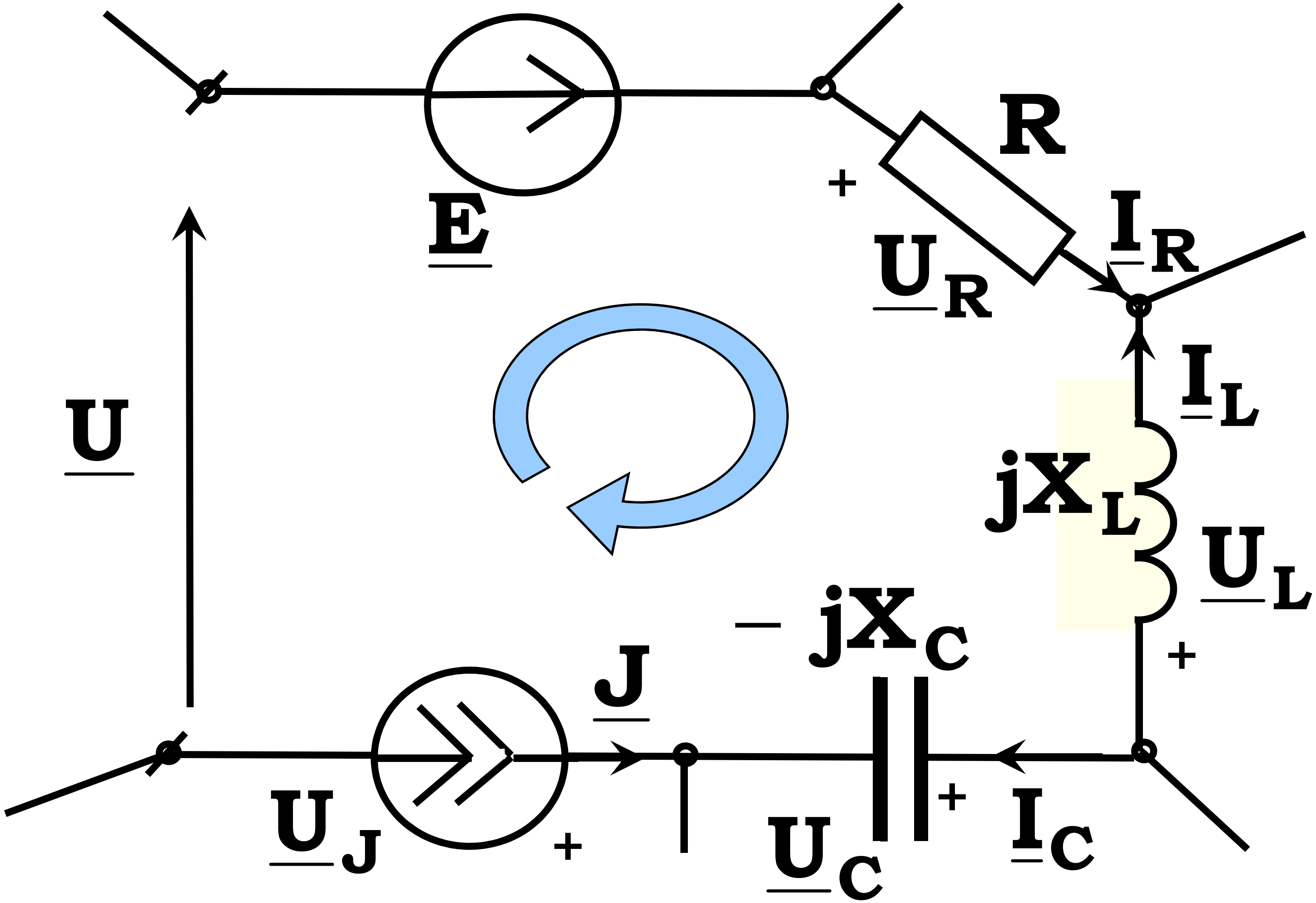
$$-\underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2 + \underline{\mathbf{I}}_3 = \mathbf{0}$$

2. ВТОРОЙ ЗАКОН КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Для любого контура комплексной схемы замещения цепи алгебраическая сумма комплексов напряжений на пассивных элементах равна алгебраической сумме комплексов ЭДС и напряжений на источниках тока

$$\sum \pm \underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} = \sum \pm \underline{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} + \sum \pm \underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{J_q}} + \sum \pm \underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{p}}$$

Например:



$$\underline{\mathbf{U}}_{R} - \underline{\mathbf{U}}_{L} + \underline{\mathbf{U}}_{C} = \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{U}}_{J} + \underline{\mathbf{U}}$$

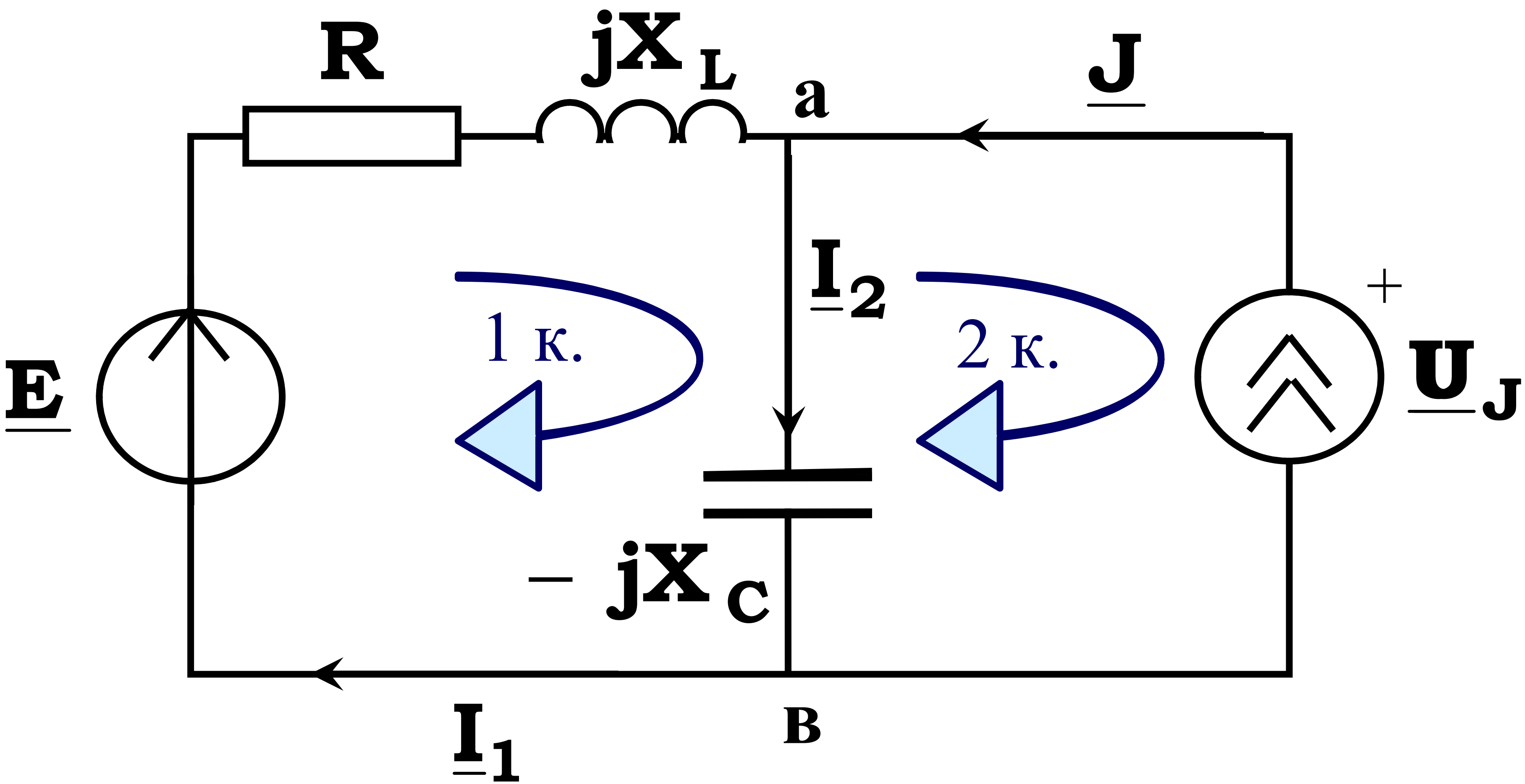
ИЛИ

$$\mathbf{R}\underline{\mathbf{I}}_{R} - \mathbf{j}\mathbf{X}_{L}\underline{\mathbf{I}}_{L} + (-\mathbf{j}\mathbf{X}_{C})\underline{\mathbf{I}}_{C} = \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{U}}_{J} + \underline{\mathbf{U}}$$

3. МЕТОД ЗАКОНОВ КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Решая комплексные алгебраические уравнения, составленные по законам Кирхгофа в комплексной форме, можно определить комплексы токов и напряжений в комплексной схеме замещения цепи

Например:



$\mathbf{n_у = 2}$	$\mathbf{n_в = 3}$

$$\mathbf{n_1 = n_у - 1 = 1}$$

$$\mathbf{n_2 = n_в - n_1 = 2}$$

$$\mathbf{a:}\quad -\underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2 - \underline{\mathbf{J}} = \mathbf{0}$$

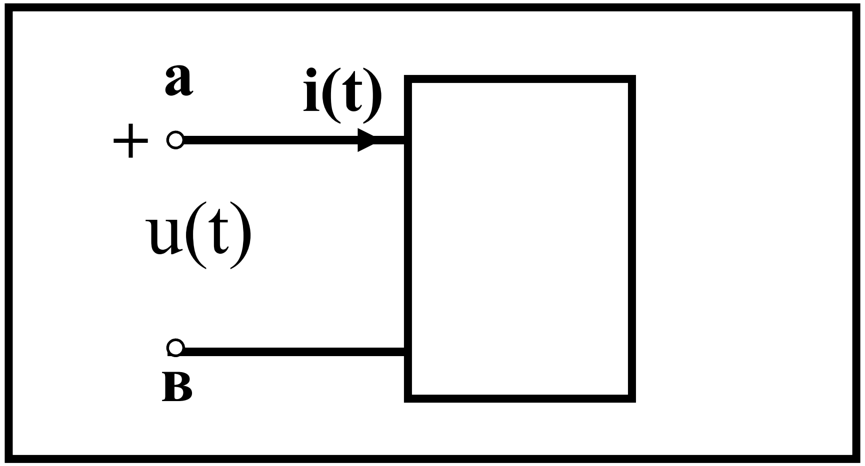
$$\mathbf{1к:}\quad (\mathbf{R} + \mathbf{j}\mathbf{X}_{\mathbf{L}}) \cdot \underline{\mathbf{I}}_1 + (-\mathbf{j}\mathbf{X}_{\mathbf{C}}) \cdot \underline{\mathbf{I}}_2 = \underline{\mathbf{E}}$$

$$\mathbf{2к:}\quad -(-\mathbf{j}\mathbf{X}_{\mathbf{C}}) \cdot \underline{\mathbf{I}}_2 = -\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{J}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ (R + jX_L) & (-jX_C) & 0 \\ 0 & jX_C & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{U}_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{J} \\ \underline{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ЗАКОНЫ ОМА И КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ ИМЕЮТ ТАКОЙ ЖЕ ВИД КАК И ДЛЯ ЦЕПЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ ТОКАМИ, ПОЭТОМУ К КОМПЛЕКСНЫМ СХЕМАМ ПРИМЕНИМЫ ВСЕ ИЗВЕСТНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА, НО В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Мощность при гармонических напряжениях и токах



$$\mathbf{u(t)} = \sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{U}\,\mathbf{sin}(\omega\mathbf{t} + \alpha),\ \mathbf{(B)}$$

$$\mathbf{i(t)} = \sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{I}\,\mathbf{sin}(\omega\mathbf{t} + \beta),\ \mathbf{(A)}$$

Мощность в функции времени

$$P(t) = u(t) \cdot i(t) =$$

$$= \mathbf{P} - \mathbf{S}\,\mathbf{cos}(\mathbf{2}\omega\mathbf{t} + \alpha + \beta),\ (\mathbf{Вт})$$

$$P = UI\cos\varphi, \text{ (Вт)}$$

- средняя или активная мощность

$$S = UI, \text{ (ВА)}$$

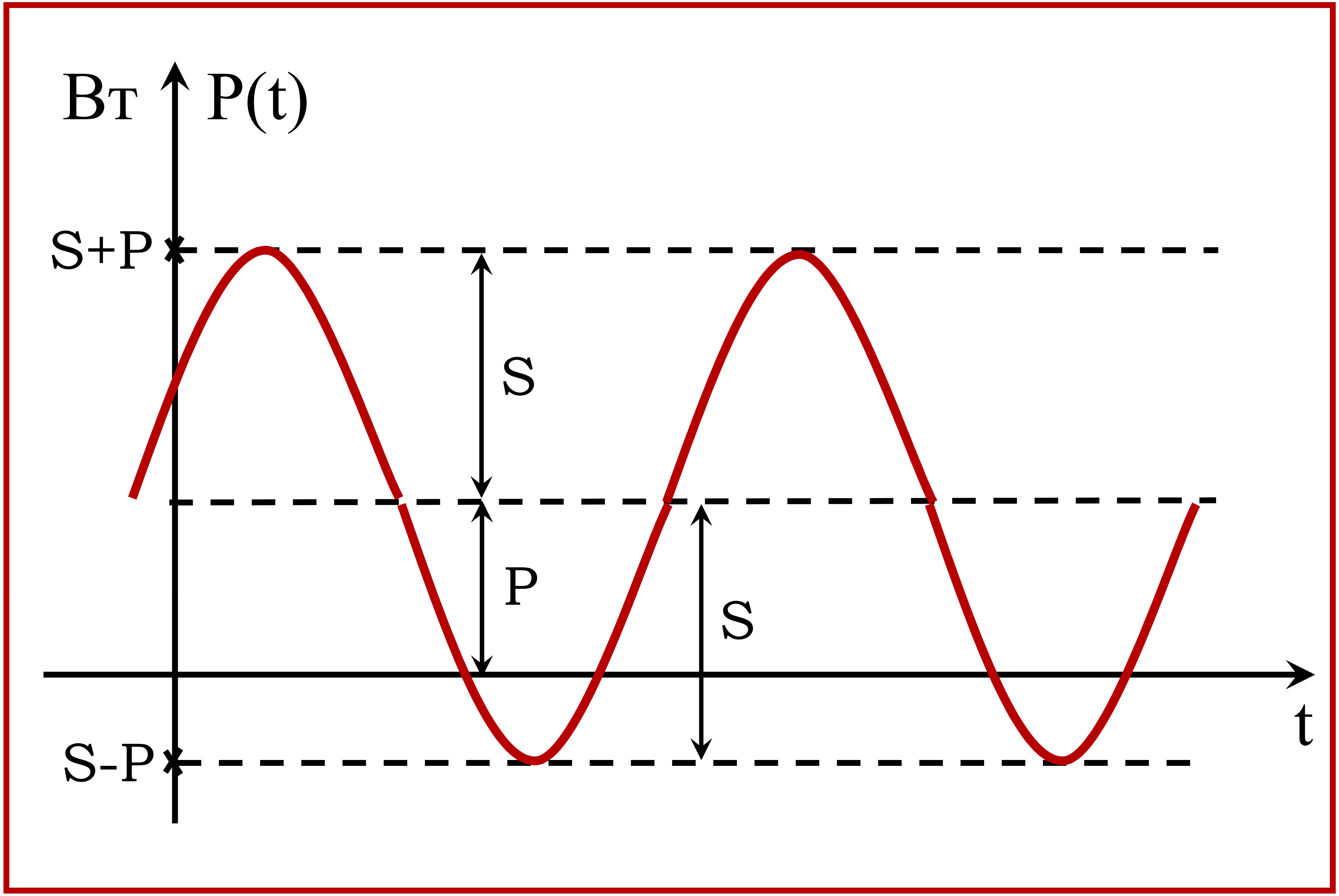
-амплитуда гармонической составляющей мощности или полная мощность

$$\varphi = \alpha - \beta,\ \textbf{(град)}$$

- угол сдвига фаз между напряжением и током

$$\mathbf{cos}\varphi = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{S}} \leq \mathbf{1},\ \textbf{т.е. } \mathbf{S} \geq \mathbf{P}$$

- коэффициент мощности



Вт
P(t)
S+P
S
P
S
S-P
t

Когда

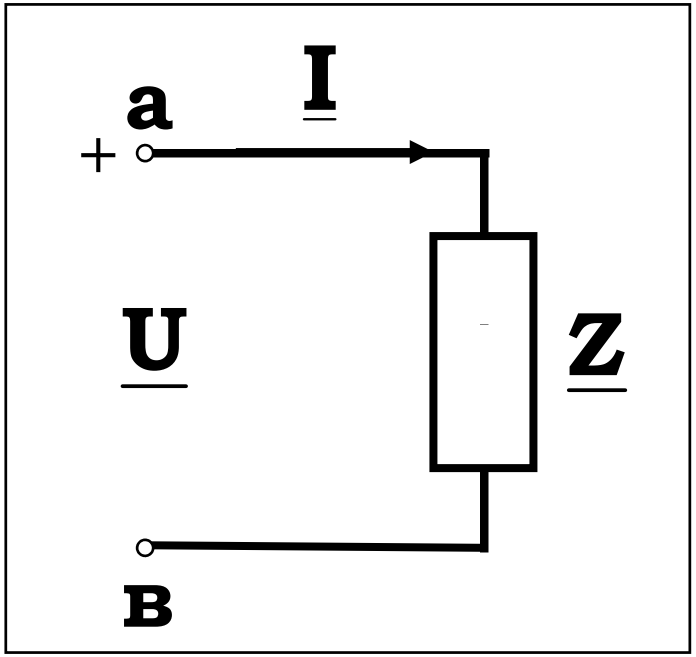
$$\boxed{\mathbf{P(t)} > \mathbf{0}}$$

- энергия поступает в двухполюсник

$$\boxed{\mathbf{P(t)} < \mathbf{0}}$$

- энергия поступает из двухполюсника во внешнюю цепь

Пусть задано:



$$\underline{U} = Ue^{j\alpha}, \text{ (В)}$$

$$\underline{I} = Ie^{j\beta}, \text{ (А)}$$

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jX, \text{ (Ом)}$$

При $$\overset{*}{\underline{I}} = Ie^{-j\beta}$$ **находим**

$$\underline{S} = \underline{U}\,\overset{*}{\underline{I}} = P + jQ, \; (BA)$$

- комплекс полной мощности

где $$\overset{*}{\underline{I}} = Ie^{-j\beta}$$ **-сопряженное значение тока**

$$\boxed{\mathbf{Q = UI\sin\varphi,\ (вар)}}$$

- реактивная мощность

Т.к. $\boxed{\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{I}}}$, то

$$\boxed{\begin{aligned}&\underline{S} = \underline{U}\overset{*}{\underline{I}} = (\underline{Z}\underline{I})\overset{*}{\underline{I}} = \\ &= \underline{Z}I^2 = I^2R + jI^2X, (BA)\end{aligned}}$$

Таким образом активная мощность:

$$\boxed{P = UI\cos\varphi = I^2R, \ (\text{Вт})}$$

- это мощность тепловой энергии

Реактивная мощность:

$$\boxed{Q = UI\sin\varphi = I^2X, (\text{вар})}$$

- пропорциональна максимальной энергии, запасаемой в электромагнитном поле

Полная мощность:

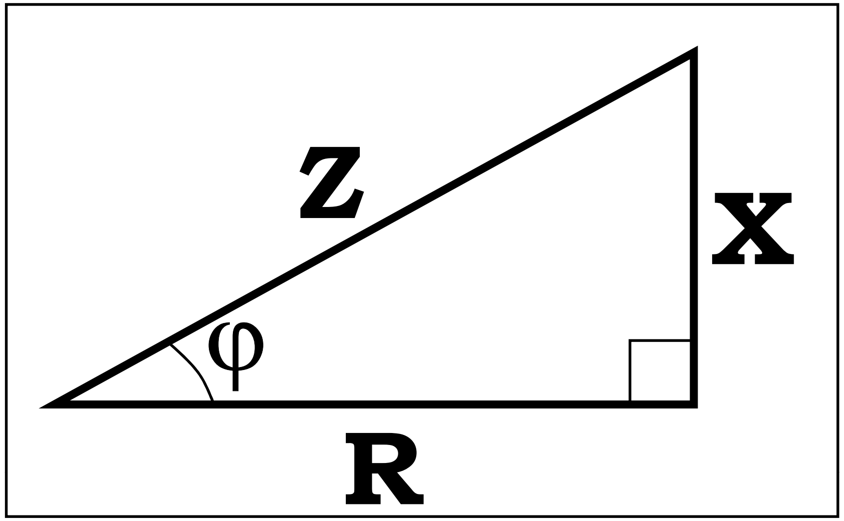
$$\boxed{S = UI = \frac{P}{\cos\varphi}, \text{(ВА)}}$$

-это максимально возможная активная мощность

при $\boxed{\cos\varphi = 1}$

Можно изобразить:

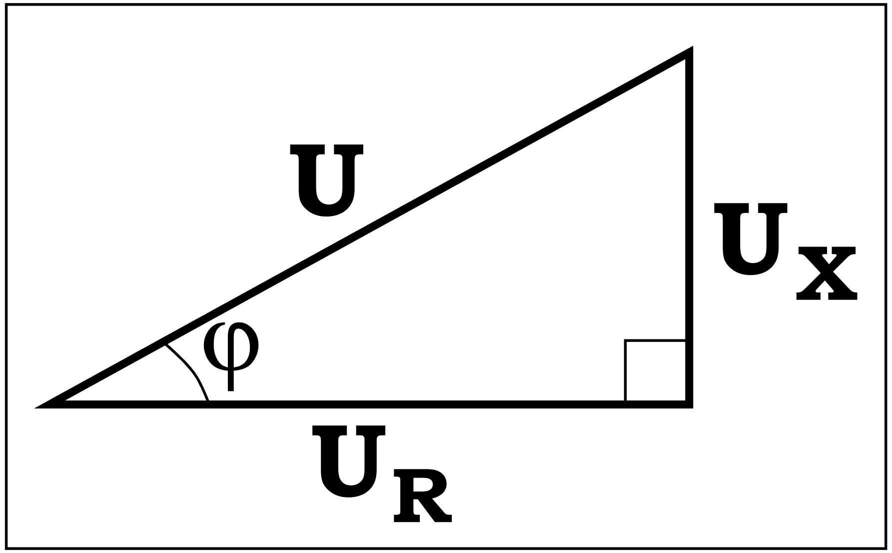
а) треугольник сопротивлений



$$\mathbf{Z} = \sqrt{\mathbf{R}^2 + \mathbf{X}^2}$$

$$\mathbf{cos}\,\varphi = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Z}}$$

б) треугольник напряжений

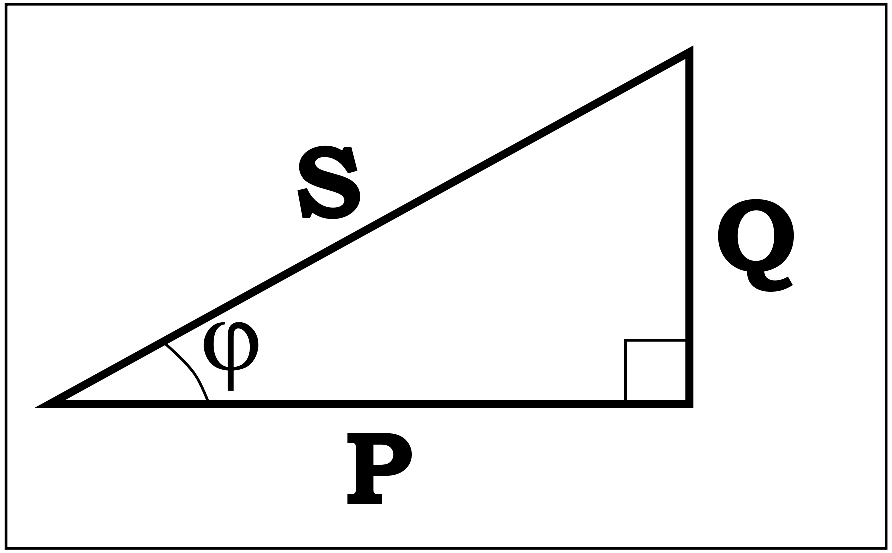


$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{U}_R^2 + \mathbf{U}_x^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{U}_R}{\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{U}_R = \mathbf{IR}; \qquad \mathbf{U}_X = \mathbf{IX}$$

в) треугольник мощностей



$$\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{P}^2 + \mathbf{Q}^2}$$

$$\mathbf{cos}\,\varphi = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{S}}$$

Топографические
и лучевые
векторные диаграммы

Топографические и лучевые векторные диаграммы используются при анализе и расчете цепей с синусоидальными напряжениями и токами

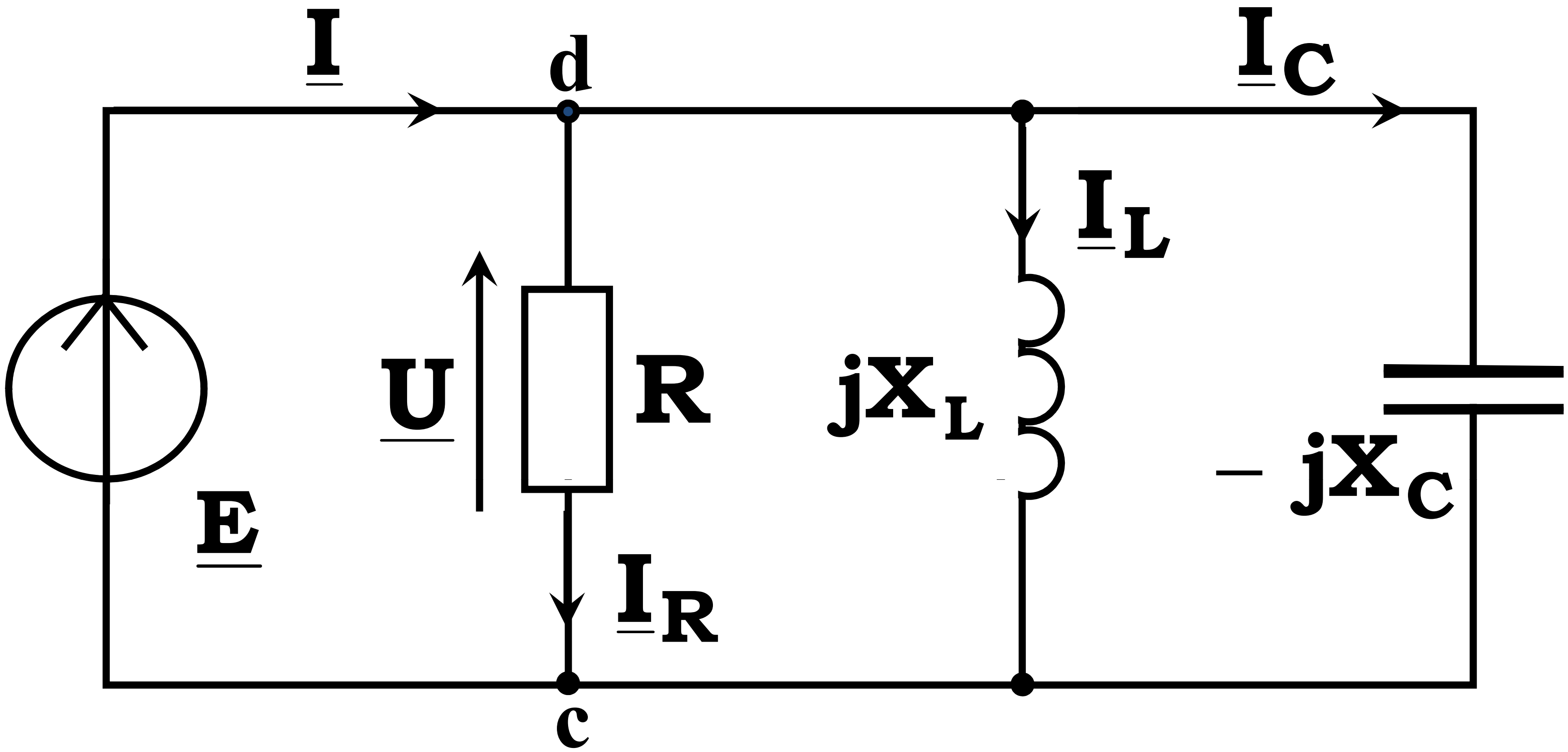
Эти диаграммы строятся совмещенными на комплексной плоскости в масштабах напряжения и тока

Лучевые векторные диаграммы строятся
для комплексов действующих значений токов, когда их вектора выходят из начала координат каждый под своим углом
Эти диаграммы используются для графической проверки первого закона Кирхгофа

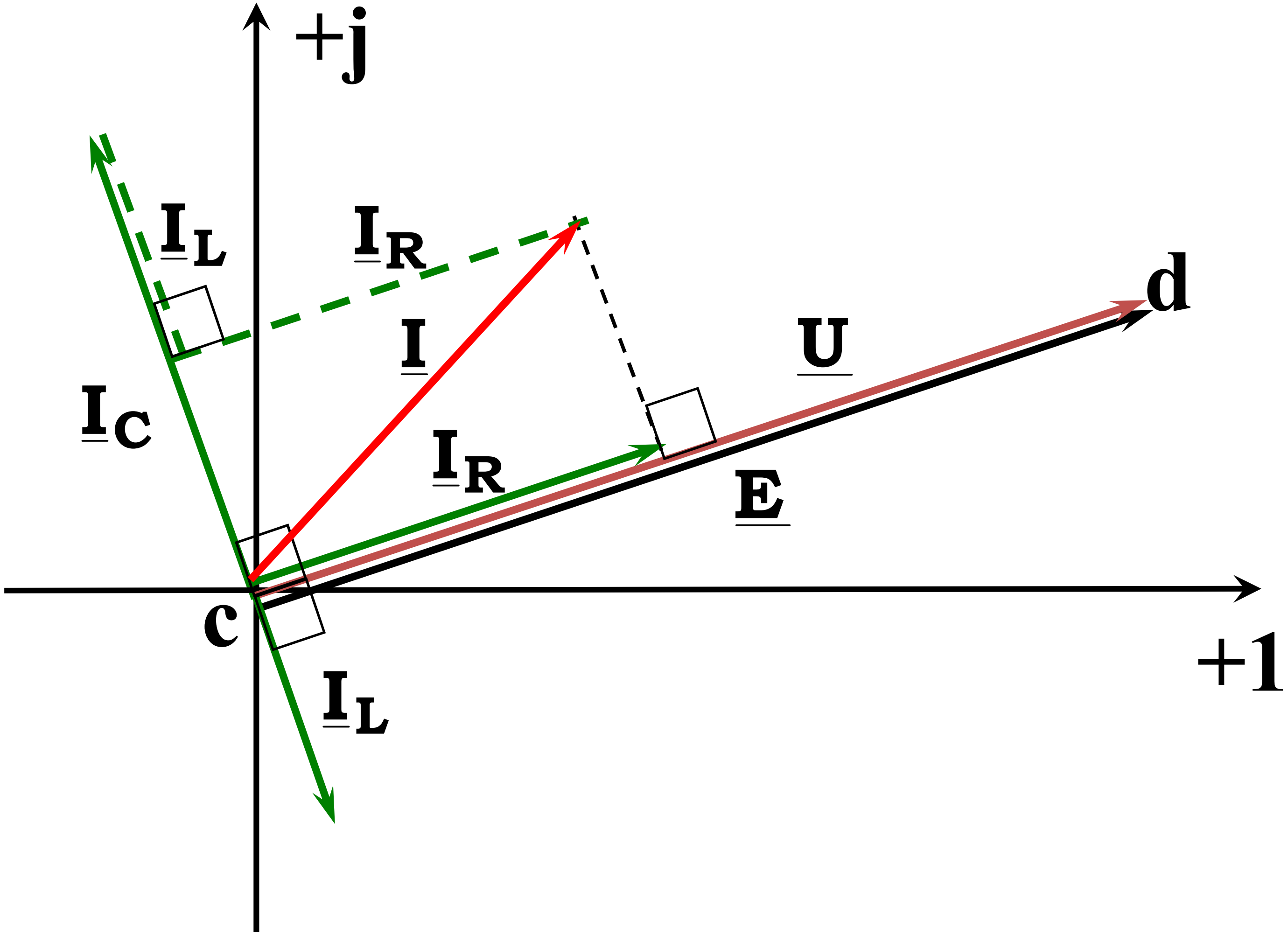
Топографические векторные диаграммы строятся для комплексов действующих значений напряжений, когда их вектора подстраиваются один к другому, образуя замкнутые контуры

Эти диаграммы используются для графической проверки второго закона Кирхгофа

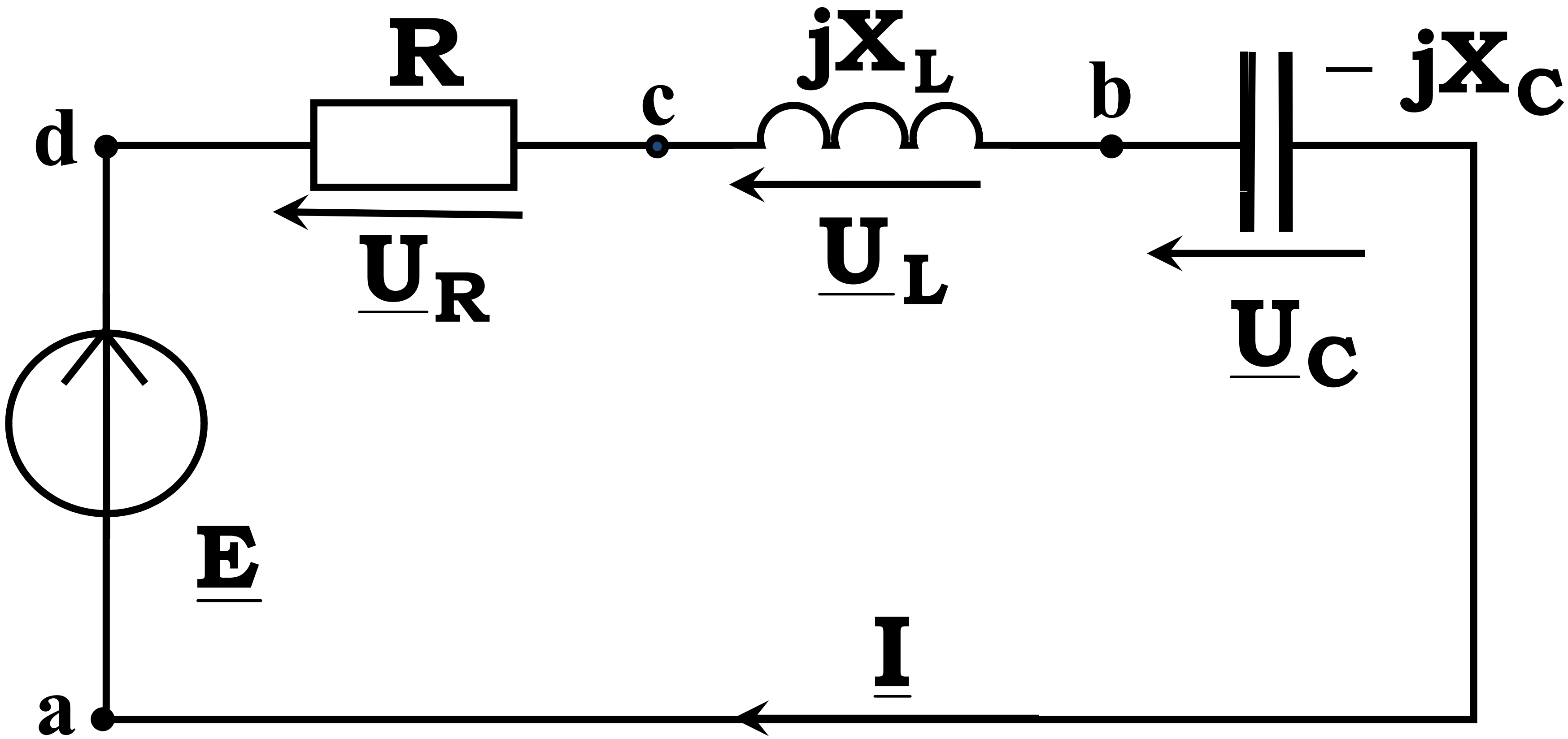
Пример 1

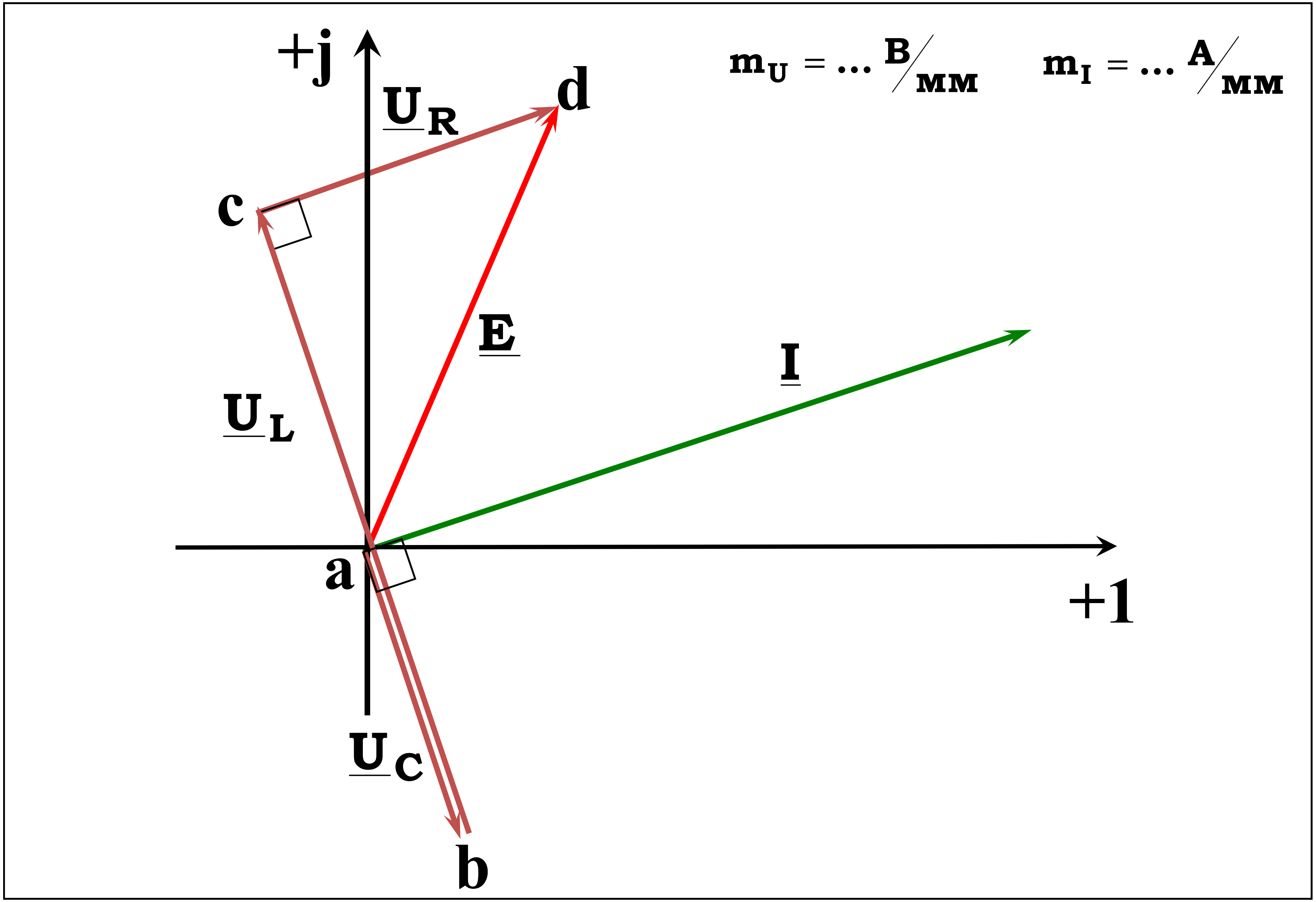


$m_U = \dots$ В/мм $\qquad m_I = \dots$ А/мм

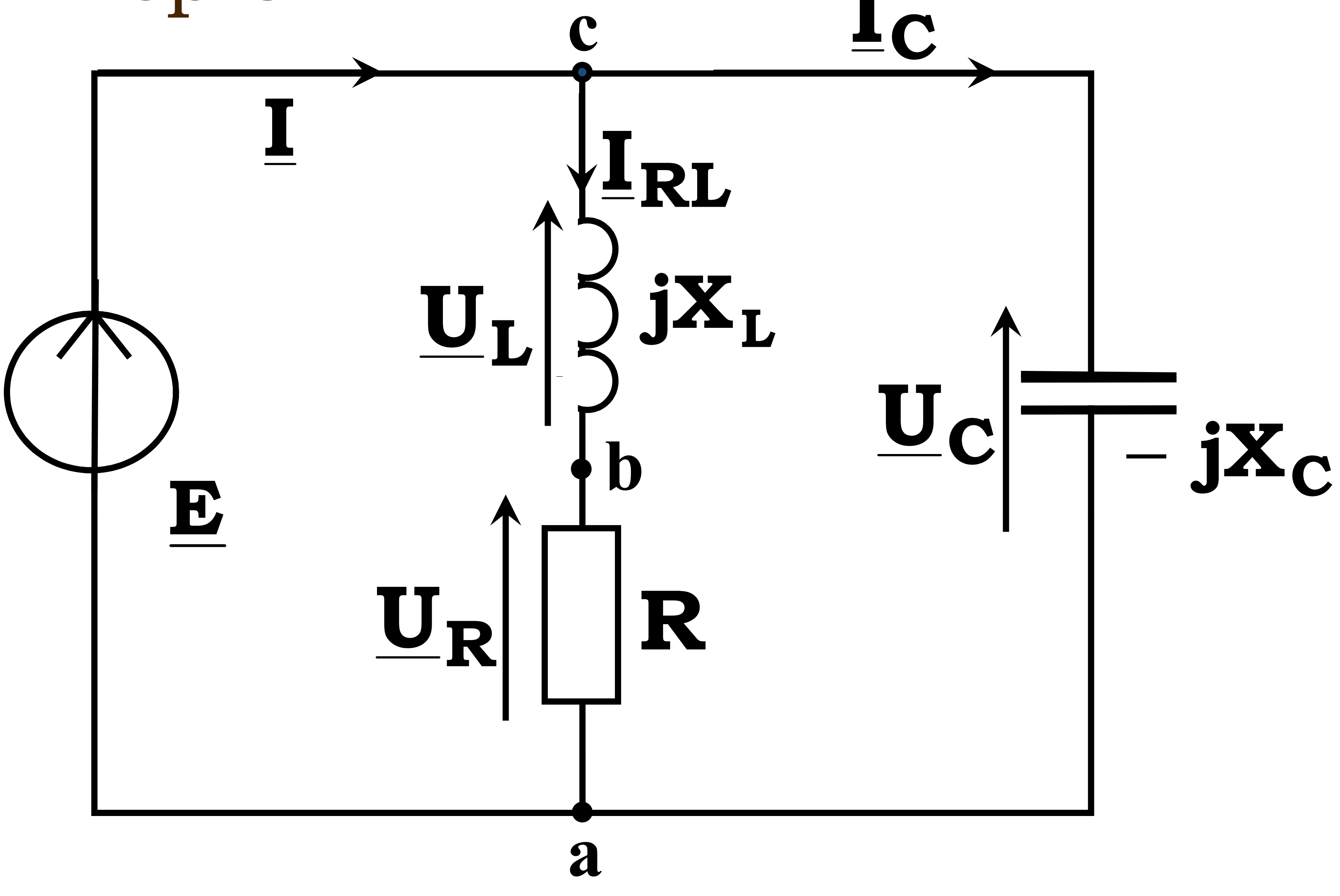


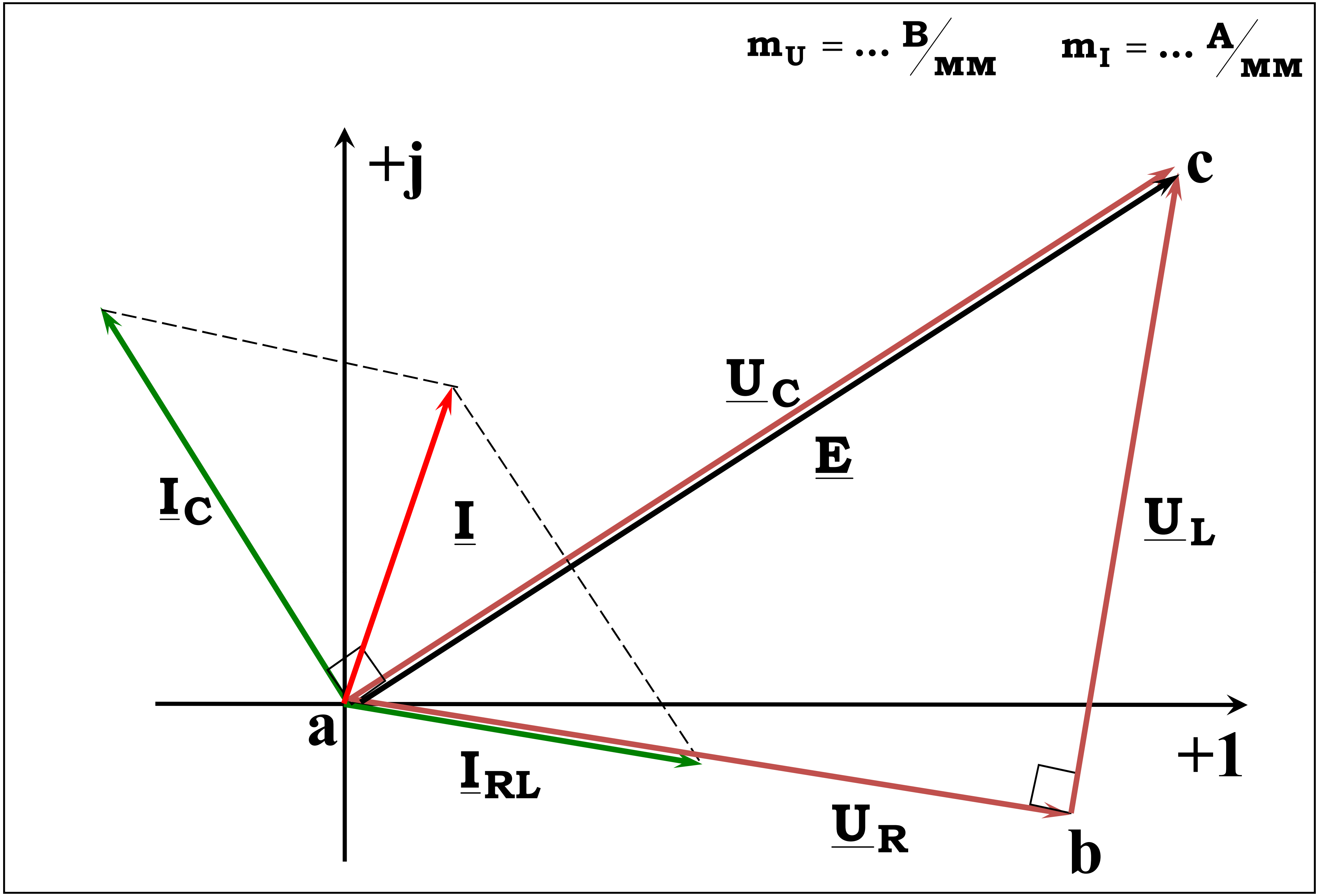
Пример 2


R
c
jX_L
b
$-jX_C$
d
$\underline{U}_R$
$\underline{U}_L$
$\underline{U}_C$
$\underline{E}$
$\underline{I}$
a


+j
$m_U = \ldots$ В/мм
$m_I = \ldots$ А/мм
$\underline{U}_R$
d
c
$\underline{E}$
$\underline{I}$
$\underline{U}_L$
a
+1
$\underline{U}_C$
b

Пример 3





$m_U = \ldots$ В/мм
$m_I = \ldots$ А/мм
+j
+1
a
b
c
$\underline{I}_C$
$\underline{I}$
$\underline{I}_{RL}$
$\underline{U}_C$
$\underline{E}$
$\underline{U}_L$
$\underline{U}_R$