Министерство образования Российской Федерации
Томский политехнический университет
Кафедра теоретической и экспериментальной физики

«Утверждаю»
Декан ЕНМФ
___________ Ю.И.Тюрин
« ____ » _________ 2002г.

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВОЛНЫ

Методическое пособие по решению задач для студентов заочного отделения

Томск 2002

УДК 539
Электромагнитные колебания. Волны. Методическое пособие по решению задач для студентов заочного отделения. Томск. Изд. ТПУ С.М. 2002 – 9 с.

Составитель: ст. преп. Ю.А. Грибов

Рецензент: доцент к.ф.-м.н. А.В. Макиенко

Методическое пособие рассмотрено и рекомендовано методическим семинаром кафедры теоретической и экспериментальной физики.

Зав. кафедрой Ю.Л.Пивоваров

« ____ » ___________ 2002г.

## Краткая теория.

### 1. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления.

Найдем уравнения колебаний в контуре (рис.1) без активного сопротивления. Будем считать положительным ток, заряжающий конденсатор.

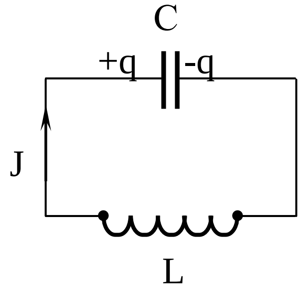



**Рис.1**

L- индуктивность, C -ёмкость конденсатора.

Запишем для нашего контура:

$$JR + \Delta\varphi = E \qquad (1.1)$$

в данном случае: $R = 0$, $\Delta\varphi = \dfrac{q}{C}$, $E = -L\dfrac{dJ}{dt}$

после подстановки: $$\frac{q}{C} = -L\frac{dJ}{dt} \qquad (1.2)$$

Так как $J = \dfrac{dJ}{dt} = \dot{q}$, а $\dfrac{dJ}{dt} = \dfrac{d\dot{q}}{dt} = \ddot{q}$,

тогда $$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (1.3)$$

Если ввести обозначение: $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (1.4)$$

Уравнение (1.3) примет вид: $$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (1.5)$$

Решением этого уравнения будет функция:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad (1.6)$$

Следовательно, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой $\omega_0$. Эта частота называется *собственной частотой контура*.

Для периода колебаний получается так называемая ***формула Томпсона***:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad (1.7)$$

Найдем зависимость от времени напряжения на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad (1.8)$$

Для тока:

$$J = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = J_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) \qquad (1.9)$$

### 2. Свободные затухающие колебания.

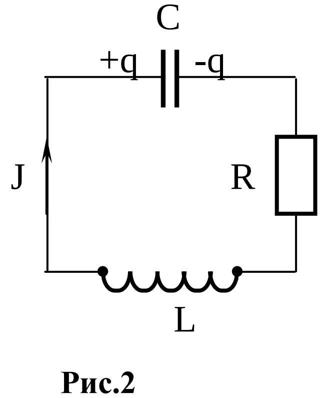



**Рис.2**

Реальный контур обладает активным сопротивлением R. Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом контуре на сопротивлении, поэтому свободные колебания затухают.

Уравнение (1.1) для реального контура имеет вид:

$$JR + \frac{q}{C} + L\frac{dJ}{dt} = 0 \qquad (2.1)$$

Так как: $J = \dot{q}$, а $\dfrac{dJ}{dt} = \ddot{q}$, получим:

$$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0 \qquad (2.2)$$

Вводим обозначение:

$$\beta=\frac{R}{2L} \qquad (2.3)$$

Уравнению (2.2) можно придать вид:

$$\ddot{q}+2\beta q+\omega_0^2 q=0 \qquad (2.4)$$

При условии, что $\beta^2<\omega_0^2$, решение уравнения (2.4) имеет вид:

$$q=q_{mo}e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha) \qquad (2.5)$$

здесь $$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}} \qquad (2.6)$$

Найдем зависимость от времени напряжения на конденсаторе:

$$U=\frac{q}{C}=\frac{q_{mo}}{C}e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha)=U_{mo}\,e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha) \qquad (2.7)$$

Найдем зависимость от времени для силы тока:

$$J=\dot{q}=q_{mo}\,e^{-\beta t}\left[-\beta\cos(\omega t+\alpha)-\omega\sin(\omega t+\alpha)\right] \qquad (2.8)$$

Затухание колебаний характеризуют логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda=\ln\frac{a(t)}{a(t+\tau)}=\beta T \qquad (2.9)$$

здесь $a(t)$ - амплитуда соответствующей величины (q, U или J).

Колебательный контур часто характеризуют добротностью:

$$Q=\frac{\pi}{\lambda} \qquad (2.10)$$

## 3. <u>Вынужденные электрические колебания.</u>

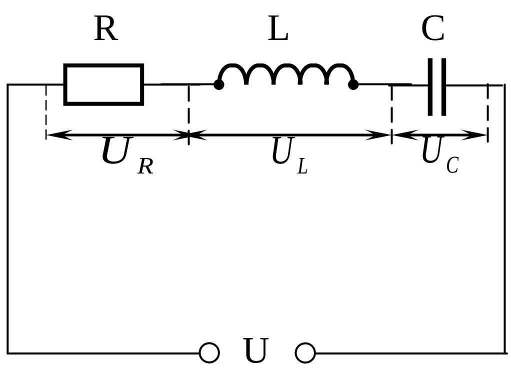



**Рис.3**

Чтобы вызвать вынужденные колебания, нужно оказывать на систему внешнее периодическое воздействие. В случае электрических колебаний это можно осуществить, если разорвав контур, подать на образовавшиеся контакты переменное напряжение:

$$U=U_m\cos\omega t \qquad (3.1)$$

В результате формула (2.1) примет вид:

$$JR+\frac{q}{C}+L\frac{dJ}{dt}=U_m\cos\omega t \qquad (3.2)$$

После преобразований получим: $$\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2 q=\frac{U_m}{L}\cos\omega t \qquad (3.3)$$

Частное решение этого уравнения: $$q=q_m\cos(\omega t-\Psi) \qquad (3.4)$$

здесь:

$$q_m=\frac{U_m/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}} \quad , \qquad tg\Psi=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Подставим значения $\omega_0^2$ и $\beta$:

$$q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad (3.5)$$

$$tg\Psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} \qquad (3.6)$$

Также можем записать для тока: $$J_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad (3.7)$$

## Решение задач

- **Задача № 1**

Колебательный контур состоит из конденсатора- емкостью *C=5 мФ* и катушки индуктивностью *L=2Гн.* Определить максимальную силу тока $J_m$ в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора $U_m = 15B$. Сопротивлением контура пренебречь.

**Дано:**
*C = 5 мФ*
*L = 2 Гн*
$U_m = 15B$

---

$J_m = ?$

**Решение.**

При незатухающих колебаниях полная энергия контура, равная сумме энергий электрического поля конденсатора $\frac{CU^2}{2}$ и магнитного поля катушки $\frac{LJ^2}{2}$, остается постоянной. При этом в те моменты, когда конденсатор максимально заряжен $(U = U_m)$, сила тока равна нулю. Следовательно, полная энергия:

$$E = \frac{CU_m{}^2}{2} \qquad (1)$$

В то время, когда конденсатор разряжен (U=0), сила тока достигает максимального значения $J_m$. Полная энергия контура:

$$E = \frac{LJ_m^2}{2} \qquad (2)$$

Приравнивая правые части формул (1) и (2) :

$$J_m = U_m\sqrt{\frac{C}{L}}; \qquad J_m = 15\sqrt{\frac{5\cdot 10^{-3}}{2}} = 0.75(A)$$

- **Задача № 2**

Добротность колебательного контура $Q = 5$. Определить, на сколько процентов отличается частота $\omega$ свободных колебаний контура от его собственной частоты $\omega_0$.

**Дано:**
Q = 5

---

$$\Delta = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = ?$$

**Решение.**

Требуется найти: $$\Delta = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = 1 - \frac{\omega}{\omega_0} \qquad (1)$$

Зная, что: $\lambda = \beta T$, $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ найдем выражение для добротности контура:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\omega}{2\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad (2)$$

Из (2) следует:

$$Q^2 = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{4\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$ , тогда: $$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2Q}{\sqrt{1 + 4Q^2}}$$

Подставляем последнее в (1):

$$\Delta = 1 - \frac{2Q}{\sqrt{1 + 4Q^2}}; \quad \Delta = 1 - \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{1 + 4 \cdot 5^2}} \approx 5 \cdot 10^{-3} \quad \Delta \approx 0.5\%$$

- **Задача № 3**

В цепи, состоящей из последовательно соединенных – резистора, сопротивлением *R=20 Ом*, катушки, индуктивностью *L=1мГн* и конденсатора, ёмкостью $C = 0{,}1\mu Ф$, действует э.д.с. - $\mathcal{E}$, изменяющаяся по гармоническому закону. Определить частоту $\omega$, э.д.с., при которой в цепи наступит резонанс. Найти эффективные значения движения силы тока J и напряжений $U_R, U_L, U_C$ на всех элементах цепи при резонансе. Считать, что $\varepsilon_{эфф.} = 30B$

**Дано:**

*R = 20 Ом*

$L = 1мГн$

$C = 0{,}1\mu Ф$

$\varepsilon_{эфф.} = 30B$

---

$\omega_p = ?$ $J_p = ?$

$U_R = ?$ $U_L = ?$ $U_C = ?$

**Решение.**

Между двумя эффективными значениями тока и э.д.с. существует то же соотношение, что и между амплитудными:

$$J_{эфф.} = \frac{\varepsilon_{эфф}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \qquad (1)$$

Резонанс наступает, когда: $$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

Отсюда для резонансной частоты: $$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega_p = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6}}} = 10^5\ {}^{рад}/_{с}$$

Сила тока равна: $J_p = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{R^2}} = \dfrac{\varepsilon}{R}$; $J_p = \dfrac{30}{20} = 1.5A$

Найдем соответствующие значения напряжений:

$$U_R = J_p \cdot R = \varepsilon = 30B$$

$$U_L = J_p \cdot L\omega = \frac{\varepsilon L\omega}{R}; \qquad U_L = \frac{30 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{20} = 150B$$

$$U_C = J_p \cdot \frac{1}{C\omega}; \qquad U_C = 1{,}5 \cdot \frac{1}{0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^5} = 150B = U_L$$

$U_C = U_L$ следует из условия резонанса.

- **Задача № 4**

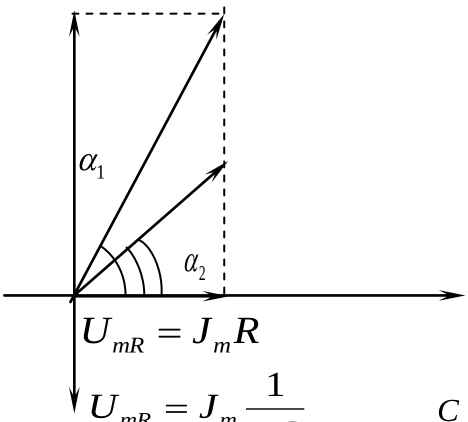
Сопротивление *R=10 Ом* и катушка с индуктивностью *L=0.1 Гн* соединены последовательно. Какую ёмкость необходимо включить последовательно в цепь, чтобы уменьшить сдвиг фазы между э.д.с. и силой тока на $\Delta\alpha = 27^\circ$? Частота изменения гармонической э.д.с. $\nu = 50Гц$.

**Дано:**
*R = 10 Ом*
*L = 0,1 Гн*
$\Delta\alpha = 27^\circ$
$\nu = 50Гц$

---
C -?

**Решение**.

$U_{mL} = J_m \omega L$




$U_{mR} = J_m R$

$U_{mR} = J_m \dfrac{1}{\omega C}$

Из метода векторных диаграмм: $tg\alpha_1 = \dfrac{J_m \omega L}{J_m R} = \dfrac{\omega L}{R}$

Тогда: $\alpha_1 = arctg\dfrac{\omega L}{R} \approx 72^\circ$.

Следовательно: $\alpha_2 = \alpha_1 - \Delta\alpha = 45^\circ$.

Из метода векторных диаграмм: $tg\alpha_2 = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$,

отсюда находим ёмкость, считая $\omega = 2\pi\nu$:

$$C = \frac{1}{2\pi\nu(2\pi\nu L - R)}; \; C = \frac{1}{2\pi \cdot 50(2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}1 - 10)} \approx 1.5 \cdot 10^2 \,\mu Ф$$

**Рис.4**

**Задача № 5**

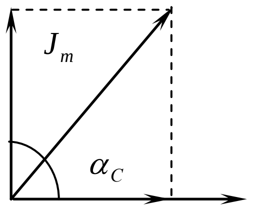
Участок цепи состоит из конденсатора ёмкостью $C = 200\mu Ф$ и сопротивления $R = 10^2 Ом$, соединенных параллельно. Определить полное сопротивление участка. Частота изменения гармонической э.д.с. составляет $\nu = 50Гц$.

**Дано:**
$C = 200\mu Ф$
$R = 10^2 Ом$
$\nu = 50Гц$

---
Z -?

**Решение.**

$J_{mC} = U_m \omega C$




$J_{mR} = \dfrac{U_m}{R}$ U

**Рис.5**

Ток в омическом сопротивлении $J_{mR}$ совпадает по фазе с напряжением, а ток через конденсатор опережает напряжение по фазе на угол $\alpha_C = 90^\circ$.

Амплитуда общего тока:

$$J_m = \sqrt{\left(U_m \omega C\right)^2 + \left(\frac{J_m}{R}\right)^2} = \frac{U_m}{R\left[1 + \left(2\pi \nu CR\right)^2\right]^{-1/2}}$$

Отсюда полное сопротивление:

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \left(2\pi \nu CR\right)^2}}; \quad Z = \frac{10^2}{\sqrt{1 + \left(2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}0002 \cdot 10^2\right)^2}} \approx 15.6\,Ом$$

### Задачи для самостоятельной работы.

- **Задача № 1.**

Колебательный контур состоит из конденсатора ёмкостью *C = 0,2 мФ*, и катушки с индуктивностью *L= 5,07 мГн*. При каком логарифмическом декременте затухания $\lambda$ разность потенциалов на обкладках конденсатора за время *t =1* мс уменьшится в три раза? Каково при этом сопротивление *R* контура?

**Ответ:** $\lambda = 0{,}22$**;** $R = 11.1\,Ом$

- **Задача № 2.**

Найти отношение энергии $\dfrac{W_м}{W_{эл}}$ магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $T/8$.

**Ответ:** $\dfrac{W_м}{W_{эл}} = 1$

- **Задача № 3.**

Колебательный контур имеет ёмкость *C=1,1 мФ* и индуктивность *L=5 мГн.* Логарифмический декремент затухания $\lambda = 0{,}005$. За какое время вследствие затухания потеряется 99% энергии контура?

**Ответ:** $t = 6.8\,мс$**.**

### Контрольные вопросы.

1. Каковы условия возникновения затухающих колебаний в колебательном контуре?
2. Дайте определение добротности колебательного контура.
3. Дайте определение полной энергии колебательного контура.

### Рекомендуемая литература.

1. И.В. Савельев. Курс общей физики. т.2. Москва «Наука» 1982г.

Электромагнитные колебания
Волны

**Методическое пособие по решению задач для студентов заочного отделения**

**Составитель: ст. преп. Юрий Ананьевич Грибов**

Подписано к печати
Формат 60x84/16. Бумага офсетная
Плоская печать. Усл. Печ..л. Уч.-изд.л.
Тираж 100 экз. Заказ Бесплатно.
Типография ИПФ ТПУ. Лицензия ЛТ № 1 от 18.07.94г. 634004. Томск пр. Ленина, 30