

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ
Зав. отделением
экспериментальной физики
ИЯТШ

 А.М. Лидер
« ___ » _____ 2018 г.

ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ КОЛЕБАНИЙ

Методические указания к выполнению лабораторной работы ПК-04
по курсу «Физика 2» по разделу «Колебания и волны»
для студентов всех направлений и специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
2018

УДК 531.381
ББК 22.3

Фазовые портреты колебаний: методические указания к выполнению лабораторной работы ПК-04 по курсу «Физика 2» по разделу «Колебания и волны» для студентов всех направлений и специальностей/В.А. Стародубцев, Т.Н. Мельникова; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2018. – 14 с.

УДК 531.381
ББК 22.3

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром отделения экспериментальной физики
«__»_____2018 г.

Председатель учебно-методической
комиссии

 А.М. Лидер

Рецензент
Доктор педагогических наук,
профессор отделения ЭФ ИЯТШ НИ ТПУ
Г.В. Ерофеева

ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы: Знакомство с понятиями конфигурационных кривых и фазовых траекторий; анализ фазовых портретов гармонических и ангармонических колебаний; определение условий появления элементов хаотического движения ангармонического осциллятора.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ И КОНФИГУРАЦИОННЫЕ КРИВЫЕ

Понятия фазового пространства и конфигурационных кривых используются во многих областях физики – в механике, термодинамике, физике твердого тела, оптике. Обычно понятие фазы вводится в механике для описания колебательного и волнового движений. В случае гармонических колебаний, закон движения которых определяется уравнением (1),

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Фазой называют аргумент функции синуса (или косинуса). В более широком смысле слова, фаза характеризует состояние какого-либо процесса или физической системы. Если процесс зависит от векторной величины, например, от скорости, импульса или волнового вектора, то изменение его состояния можно представить графически в виде линии, проводимой в системе координат (v_x, v_y, v_z) , (p_x, p_y, p_z) или (K_x, K_y, K_z) .

Оси координат в таких случаях задают фазовое пространство, то есть область возможных значений фазы процесса. Размерность координат фазового пространства определяется размерностью той величины, которая на них отображается. По аналогии с механикой, линию изменения состояния в фазовом пространстве называют *фазовой траекторией*. Совокупность реализующихся траекторий называют *фазовым портретом системы* или процесса. В более простых случаях понятия фазового пространства и фазового портрета применяют для отображения процесса движения материальной точки в системе координат (x, v_x) или (x, p_x) . Здесь одна из координат – обычного пространства, другая – определяет состояние движения или фазу. С помощью фазового портрета можно наглядным образом оценить устойчивость динамической системы к внешним возмущающим воздействиям. Например, пусть две фазовые траектории начинаются в различных точках старта, но затем

сливаются в общую линию. Физически, это будет означать устойчивость системы, ее малую зависимость от вариации начальных условий. Если же две фазовые траектории начинаются из близких точек, но с течением времени расходятся в отдаленные области фазового пространства, это свидетельство неустойчивости системы по отношению к малым вариациям начальных условий. В подобных случаях (они часто реализуются в метеорологии) трудно предсказать долговременное поведение процесса [1,2].

Так же широко используется зависимость потенциальной энергии системы U от ее конфигурации, то есть от взаимного расположения частей системы. В случае гармонического осциллятора, эта зависимость представляется параболой в координатах (x, U) . Для более сложных случаев, например, для центров окраски в кристаллах, рассматривают некоторую обобщенную (или конфигурационную) координату, характеризующую отклонение системы от положения устойчивого равновесия. В общем случае, зависимость $U(x)$ называют *конфигурационной кривой*.

1.2. КОНФИГУРАЦИОННЫЕ КРИВЫЕ АНГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Колебания реальных систем при достаточно больших отклонениях от положения равновесия оказываются ангармоничными. Для таких случаев модельными объектами, на которых изучаются закономерности движения, являются ангармонические осцилляторы. Среди них наиболее представительными являются следующие два типа. Первый из них соответствует системе с конечной величиной энергии связи частей в общую систему. Качественная конфигурационная кривая $U(x)$ для осцилляторов первого типа приведена на рис.1. Она может быть представлена зависимостью (2):

$$U(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (2)$$

где коэффициент $a > 0$, n – *нечетное* целое число.

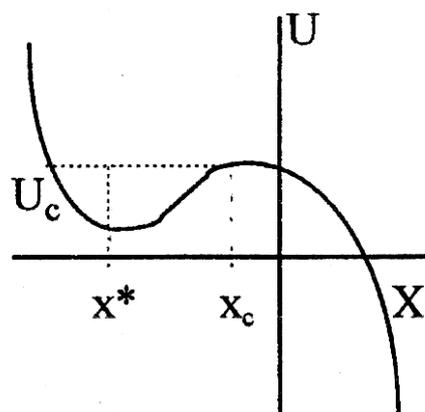


Рис.1. Конфигурационная кривая осциллятора с одним положением устойчивого равновесия.

Колебания осцилляторов данного типа, в сопоставлении колебаниями осциллятора гармонического, исследуются при выполнении работы ПК-03. Положению устойчивого равновесия соответствует координата x^* , неустойчивого – x_c . Если энергия осциллятора превысит (по каким-либо причинам величину энергии связи U_c , то осциллятор разрушается, так его части расходятся на бесконечно большое расстояние. В частном случае, положение устойчивого равновесия может совпадать с $x = 0$. Выбором начала отсчета энергии можно положить $U(x^*) = 0$.

Второй тип ангармонического осциллятора соответствует физической системе, имеющей два положения устойчивого равновесия, разделенных энергетическим барьером U_b (конечной величины). Математическим описанием конфигурационной кривой служит уравнение (2), где $a > 0$. Однако теперь n – **четное** целое число.

Качественно конфигурационная кривая такого осциллятора показана на рис.2.

При выводе системы из одного равновесного положения, она может перейти в альтернативное положение, если величина энергии осциллятора превысит значение U_b . Переход в новое положение устойчивого равновесия может сопровождаться изменением симметрии системы и, как следствие, – изменением физических свойств. В качестве примера можно привести явление самопроизвольной поляризации сегнетоэлектриков, когда изменение симметрии расположения ионов приводит к появлению дипольного электрического момента в каждой элементарной ячейке кристалла.

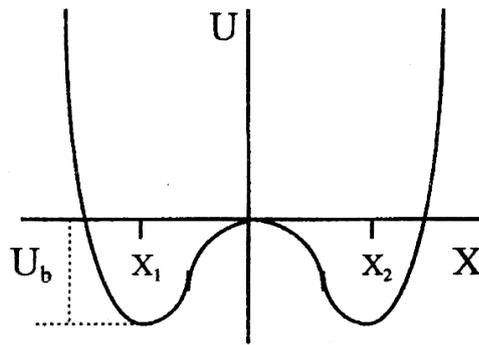


Рис. 2. Конфигурационная кривая осциллятора с двумя положениями равновесия

В обоих положениях x_1 и x_2 периодичность колебаний сохраняется. При наличии сил трения амплитуда колебаний постепенно уменьшается. Вблизи положения устойчивого равновесия конфигурационные кривые обоих типов осцилляторов мало отличаются от параболы. Поэтому, когда происходит постепенное затухание колебаний и амплитуда колебаний уменьшается, колебания все больше будут стремиться в пределе к гармоническим.

1.3. ДЕТЕРМИНИРОВАННОЕ ХАОТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Вывести осциллятор из положения равновесия можно с помощью внешней периодически действующей силы (вынужденные колебания). Рассмотренные выше два типа ангармонических осцилляторов по-разному реагируют на увеличение амплитуды вынуждающей силы. В первом случае при определенном значении амплитуды внешней силы осциллятор аperiodически разрушается. Принципиально новое поведение показывает ангармонический осциллятор второго типа. Здесь, при определенных условиях, может возникнуть аperiodическое колебательное движение, при котором координата $x(t)$ изменяется сложным образом. Процесс движения выглядит так, словно осциллятор колеблется совершенно хаотически, оставаясь в то же время в некоторых пространственных "рамках". В последнем случае переход оси $x = 0$ на фазовом портрете будет совершаться в произвольном последовательности точек $v(0)$.

Для такого состояния системы подходит определение *детерминированный хаос* [1,2]. Оно подчеркивает, с одной стороны, факт однозначной зависимости траектории движения от величины внешней силы и параметром осциллятора (детерминизм движения). С другой стороны, отражает факт потери строгой временной и пространственной периодичности колебаний.

1.4. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Для гармонического осциллятора можно легко определить фазовую траекторию $v(x)$. Используя закон движения (1) и определение скорости как первой производной по времени $v = (\dot{x})'$, запишем уравнение фазовой траектории сначала в параметрическом виде, то есть в виде зависимостей координаты состояния системы от времени, прошедшего от начала колебаний.

$$\begin{aligned}x(t) &= x_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0); \\v(t) &= x_{\max} \omega_0 \cos(\omega t + \varphi_0).\end{aligned}\quad (3)$$

Возводя в квадрат и производя подстановку, получим уравнение эллипса:

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = x_{\max}^2. \quad (4)$$

Таким образом, фазовая траектория гармонического осциллятора в отсутствие сил трения представляет собой замкнутую кривую второго порядка. В частном случае это может быть окружность. В тех обстоятельствах, когда под действием диссипативных сил колебания затухают, фазовая траектория будет представлять собой спираль, сходящуюся к началу координат. Величина коэффициента сил трения определит быстроту затухания и, тем самым, число оборотов спирали. В случае аperiodического движения к положению равновесия фазовая траектория приходит к началу координат не более, чем за полуоборот. Фазовые траектории для собственных и вынужденных колебаний ангармонических осцилляторов двух рассмотренных типов *предлагается исследовать с помощью компьютерного моделирования.*

2. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

2.1. Математическая модель.

Движение ангармонического осциллятора с одним устойчивым положением равновесия будем описывать дифференциальным уравнением (5)

$$m\ddot{x} = -K_y x + K_a x^2 - K_t \dot{x} + F_0 \cos(\omega t), \quad (5)$$

где обозначено:

x – координата центра масс m осциллятора,
 \dot{x} , \ddot{x} – скорость и ускорение центра масс,

K_y – коэффициент упругой силы,
 K_a – коэффициент ангармонизма,
 K_t – коэффициент сил трения,
 F_0 – амплитуда вынуждающей силы,
 $\omega_0 = 2\pi\nu$ – круговая частота вынуждающей силы.

Если положить $F_0 = 0$, $K_t = 0$, то уравнение (5) будет описывать свободные (собственные) колебания ангармонического осциллятора первого типа. Для него можно определить положения экстремумов конфигурационной кривой, для которых величина силы обращается в ноль. Очевидны два положения:

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{K_y}{K_a}. \quad (6)$$

Первое положение соответствует устойчивому равновесию, второе неустойчивому (максимуму кривой потенциальной энергии).

Так как при $x = 0$ величина потенциальной энергии равна нулю, то высоту максимума, то есть – величину энергии связи осциллятора можно определить по формуле (7):

$$U_c = \frac{K_y x_2^2}{2} - \frac{K_a x_2^3}{3} = \frac{K_y^3}{6K_a^2}. \quad (7)$$

Если при толчке из положения равновесия с начальной скоростью v_0 величина кинетической энергии превысит величину энергии связи, то осциллятор разрушается. Критическое значение начальной скорости $v_{кр}$ рассчитывается из равенства:

$$\frac{m_y v_{кр}^2}{2} = \frac{K_y^3}{6K_a^2}.$$

Отсюда следует выражение (8)

$$v_{кр} = \frac{K_y^3}{3mK_a^2} = \frac{\omega_0 K_y}{3K_a}.$$

где ω_0 – круговая частота свободных колебаний гармонического осциллятора. Отметим, что для использования формулы (8) необходимо выполнение начального условия $x = 0$.

Для описания движения ангармонического осциллятора второго типа, с двумя положениями устойчивого равновесия, будем использовать уравнение (9):

$$mx'' = K_y x - K_a x^3 - K_t x' + F_0 \cos(\omega t).$$

При $K_t = 0$ и $F_0 = 0$ равновесные положения определяются из равенства $K_y x = K_a x^3$, откуда следует (10):

$$x_1 = \left(\frac{K_y}{K_a} \right)^{1/2}, \quad x_2 = - \left(\frac{K_y}{K_a} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Значение $x = 0$ отвечает положению неустойчивого равновесия. В данном случае ему соответствует начало отсчета потенциальной энергии $U(x)$. Величину энергетического барьера, разделяющего положения устойчивого равновесия, можно определить по формуле:

$$Ub = \frac{K_y^2}{4K_a}. \quad (11)$$

Критическое значение начальной скорости, при которой возможен перескок из одного положения равновесия в другое, определится по формуле (12). Здесь также подразумевается, что начальный толчок со скоростью $v > v_{кр}$ происходит из положения равновесия $x = x_1$ или $x = x_2$.

$$v_{кр} = \frac{K_y^2}{2mK_a^2} = \frac{\omega_0 K_y^{1/2}}{2K_a^{1/2}}. \quad (12)$$

Как видно из приведенных формул, свойства осцилляторов определяются соотношением коэффициентов K_y и K_a .

2.2. Обращение к программе

При компьютерном моделировании колебаний осцилляторов решается уравнение движения, записанное в виде (13):

$$mx'' = -K_y x + K_a x^n - K_t x' + F_0 \cos(\omega t). \quad (13)$$

Задавая *положительные* значения K_y и K_a при $n = 2$, мы будем описывать колебания осциллятора первого типа. Для перехода ко второму, необходимо задать *отрицательные* значения K_y и K_a при $n = 3$.

Уравнение (13) решается методом Эйлера (метод малых шагов), результаты расчетов выводятся на экран дисплея в графическом режиме. Чем меньше величина шага интегрирования, в данной работе это параметр DT , тем более гладкими получаются конфигурационные кривые и фазовые траектории. Вы можете в этом убедиться, задав заведомо большие значения DT и получив ломаную линию, вместо плавной кривой.

2.3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Часть 1. Конфигурационные кривые осцилляторов.

Задание 1. Ангармонический осциллятор с двумя положениями равновесия.

1. Введите значения параметров:

$$M = 0,025 \text{ кг}; K_y = -10 \text{ Н/м}; K_t = 0; K_a = -10; x_0 = 0;$$

$$v_0 = 20 \text{ м/с}; MF = 0; W = 0; MG = 2; MV = 2; n = 3;$$

$$DT = 0,5 \text{ мс}; T = 0,3 \text{ с}.$$

Параметр, который будет меняться: K_a .

Шаг изменения: -5 . Число кривых: 5.

По делениям вертикальной шкалы или с помощью линейки, определите относительные величины U_b для $K_a = -10$ и -20 .

2. Убедитесь, что величина барьера U_b меняется обратно пропорционально K_a . Для этого измерьте величины высот барьеров и возьмите их отношения. Зарисуйте в отчет конфигурационные кривые для сравниваемых значений коэффициентов ангармонизма. Измеренные значения величин барьеров приведите в отчете.

Задание 2. Ангармонический осциллятор с одним положением равновесия.

1. Введите значения следующих параметров:

$$M = 0,025; K_y = 10; K_t = 0; K_a = 10; x_0 = -1;$$

$$F_0 = 0; W = 0; MG = 2; MV = 1; n = 2.$$

Время счета MT подберите таким, чтобы на графиках были отображены две симметричные ветви, начиная от равновесного положения.

Параметр, который будет изменяться: K_a .

Шаг изменения параметра: 5. Число кривых: 7.

Примечание.

Первая из моделируемых зависимостей будет соответствовать идеальному, то есть – гармоническому осциллятору. Обратите внимание на отличие в ходе конфигурационных кривых гармонического осциллятора и ангармонических осцилляторов: в области $x < 0$ энергия ангармонического осциллятора возрастает быстрее, а в области $x > 0$ медленнее, чем для гармонического.

2. Измерьте высоту максимумов для $K_a = 10$ и $K_a = 20$, сопоставьте отношение высот с $4:1$, которое следует из соотношения (7). Зарисуйте три кривых для гармонического и ангармонических осцилляторов, с соблюдением масштаба по высоте максимумов. Приведите значения высот барьеров (в относительных единицах, например, в миллиметровых делениях обычной линейки, приложенной к экрану).

Часть 2. Фазовые портреты

Задание 1. Свободные колебания осцилляторов.

1. Гармонический осциллятор. Введите значения параметров:

$$M = 0,025; K_y = 10; K_t = 0; K_a = 0; X_0 = 0; v_0 = 20.$$

$$F_0 = 0; W = 0; MG = 1; MV = 1; n = 0; DT = 0,5; MT = 0,3.$$

Физически, такой выбор параметров будет означать, что гармонический осциллятор будет возбуждаться толчком с импульсом mv_0 из положения равновесия.

Параметр, который будет изменяться: K_y .

Шаг изменения параметра: 5. Число траекторий: 5.

Зарисуйте форму трех фазовых траекторий (начальную, конечную, промежуточную) в отчет с указанием значений K_y . Опишите изменения формы сравниваемых траекторий с ростом K_y .

2. Ангармонический осциллятор первого типа. Измените значения следующих параметров:

$$K_a = 10; v_0 = 2; n = 2;$$

$$DT = 0,2; MT = 0,4.$$

Остальные значения можно оставить прежними.

Параметр, который будет изменяться: v_0 .

Шаг изменения параметра: 4. Число кривых: 5.

Зарисуйте в отчет форму наиболее характерных фазовых траекторий, с указанием значений v_0 . Обратите внимание на разницу амплитуд отклонения в разные стороны от равновесного положения. Оцените величины $v_{кр}$ и амплитуды колебаний, при которых осциллятор разрушается. Оценка может быть получена как среднее арифметическое значение скорости, при которой осциллятор уже разрушается и скорости, при которой осциллятор еще не разрушается. Для уточнения можно уменьшить шаг изменения параметра v_0 . Сравните это значение с рассчитанным по формуле (8).

Задание 2. Затухающие колебания осцилляторов

1. Осциллятор с двумя положениями равновесия. Введите следующие значения параметров:

$$K_y = -10; K_t = 0,1; K_a = -10; x_0 = 0; v_0 = 5; F_0 = 0;$$

$$MG = 2; MV = 2; n = 3; DT = 0,2; MT = 0,5.$$

Остальные параметры оставьте неизменными.

Параметр, который будет изменяться: v_0 .

Шаг изменения параметра: 20. Число кривых: 3.

Зарисуйте форму фазовых траекторий в отчет, укажите, при каком значении $\nu_0 = \nu_{кр}$ (для выбранного K_t) осциллятор может переходить в новое положение равновесия.

2. Осциллятор с одним устойчивым положением равновесия. Введите следующие значения параметров:

$$K_y = 10; K_t = 0,1; K_a = 10; \nu_0 = 10;$$

$$MG = MV = 1; n = 2; DT = 0,2; MT = 0,5.$$

Параметр, который будет изменяться: ν_0 .

Шаг изменения параметра: 2. Число кривых: 6.

Зарисуйте характерные фазовые траектории, $\nu_{кр}$ оцените по графикам и приведите в отчете величину $\nu = \nu_{кр}$, при которой осциллятор разрушается. Сравните это значение со случаем свободных колебаний, выводы запишите в отчет.

3. Гармонический осциллятор. Введите следующие значения параметров:

$$K_a = 0; x_0 = -1; \nu_0 = 20; n = 0.$$

Остальные значения можно оставить без изменения.

Параметр, который будет изменяться: K_t .

Шаг изменения параметра: 0,4. Число кривых: 6.

Зарисуйте в отчет форму фазовых траекторий для трех случаев: минимального K_t , максимального K_t и $K_t = K_{кр}$, при котором процесс становится апериодическим и скорость $\nu(x)$ и не принимает отрицательных значений.

4. Сделайте вывод по работе.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое фазовая плоскость?
2. Что такое фазовая траектория?
3. Что такое фазовый портрет колебаний?
4. Какой вид имеет фазовый портрет гармонического осциллятора без потерь?
5. Какой вид имеет фазовый портрет гармонического осциллятора с потерями?
6. Что такое узел на фазовом портрете колебаний?
7. Что такое седло на фазовом портрете колебаний?
8. Что такое сепаратрисса на фазовом портрете колебаний?

9. Как будет выглядеть фазовый портрет с усилением колебаний?
10. Где используются фазовые портреты колебаний?
11. Как влияют параметры линейной системы на вид фазового портрета?
12. Какие типы особых точек существуют в линейных системах?
13. Как определить показатели качества процессов по виду фазовой траектории?
14. Как построить кривую переходного процесса по виду фазовой траектории?
15. Как построить фазовую траекторию аналитическим методом?

ГЛОССАРИЙ

1. **Динамический хаос** — явление в теории динамических систем, при котором поведение нелинейной системы выглядит случайным, несмотря на то, что оно определяется детерминистическими законами. В качестве синонима часто используют название **детерминированный хаос**; оба термина полностью равнозначны и используются для указания на существенное отличие хаоса как предмета научного изучения в синергетике от хаоса в обыденном смысле.
2. **Конфигурационная кривая** — зависимость потенциальной энергии системы от ее конфигурации $U(x)$.
3. **Сепаратриса** — траектория динамической системы с двумерным фазовым пространством, стремящаяся к седловому состоянию равновесия при времени $t \rightarrow \infty$ (устойчивая сепаратриса) или при $t \rightarrow -\infty$ (неустойчивая сепаратриса). Если сепаратриса стремится к седлу при $t \rightarrow \pm\infty$, то её (вместе с седлом) называют петлей сепаратрисы.
4. **Фаза колебаний** — это аргумент периодической функции синуса (или косинуса), описывающей колебательный или волновой процесс.
5. **Фазовая плоскость** — плоскость переменных значениями $x(t)$ и $v(t)$.
6. **Фазовый портрет колебательной системы или процесса** — это совокупность реализующихся фазовых траекторий.

7. **Фазовая траектория** – это линия изменения состояния в фазовом пространстве.