МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ
Проректор-директор ИНК
_______________В.А. Клименов
«___» ____________ 2011г.

Лабораторная работа №1
Применения MATHCAD для решения задач теории вероятности.

Томск - 2011

Цель работы:

1. Закрепить знания об основных законах распределения случайной величины.
2. Закрепить навыки расчета основных числовых характеристик случайных величин.
3. Научить применять MathCad для построения функций распределения и плотности распределения случайной величины.
4. Научить применять MathCad для расчета основных числовых характеристик случайных величин.

1. Функции и инструменты MATHCAD

Прежде чем приступать к решению задач теории вероятностей в Mathcad, познакомимся с инструментами, которые предоставляет пакет для их решения.

Напомним, что дискретная случайная величина x, принимающая значения $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$ с вероятностями *p1, p2, …, pi, …,* может быть задана распределением – таблицей вида

X	x_1	x_2		x_i		x_n
p	p_1	p_2		p_i		p_n

Такие таблицы в среде Mathcad удобно хранить в виде матрицы размерности 2×n. Функция распределения случайной величины, имеющей приведённое выше распределение, имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < x_x \\ p_1 & , x_x < x < x_2 \\ p_1 + p_2 & , x_2 < x < x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} & , x_{n11} < x < x_n \\ 1 & , x_n < x \end{cases}$$

Задание 1.

Постройте с помощью MathCAD график функции распределения для случайной величины:

X	1	0	7	4	-2
P	0.1	0.5	0.1	0.1	0.2

Порядок выполнения задания

1. Задайте случайную величину А.
2. Определите функцию распределения случайной величины F(x).

Указания.

Распределение случайной величины в MathCAD записывается виде матрицы A: $A_{1,i}$ – значения случайной величины; $A_{2,i}$ – соответствующие вероятности; i = 1,2,3,4,5. Значения X в матрицу следует записывать в порядке возрастания.

По умолчанию первый элемент матрицы имеет индекс 0. Используйте системную переменную ORIGIN для задания нижней границы индексации в матрице: ORIGIN := 1.

Функцию распределения, заданную разными выражениями на разных интервалах изменения аргументов, можно определить следующим образом: разверните панель программных элементов (Programming) щелчком по кнопке и панель знаков отношений (Boolean) – щелчком по кнопке и не закрывайте их, пока не закончите определение функции.

Введите имя функции переменной x и знак присваивания, щелкните в панели программных элементов (Programming) по кнопке Add Line, введите в помеченной позиции нуль, щелкните по кнопке if и введите неравенства, определяющие первый интервал изменения аргумента (символ ∞ можно ввести щелчком по соответствующей кнопке в панели (Calculus)); затем перейдите во вторую строку определения функции, введите A2,1 – имя переменной, содержащей значение p1, или число 0.2 – значение p1, выделите, нажимая клавишу <SPACE> (пробел), выражение для функции, щелкните по кнопке if, введите неравенства, определяющие второй интервал изменения аргумента (знак можно ввести щелчком по соответствующей кнопке в панели отношений (Boolean)); выделите, нажимая клавишу <SPACE>, вторую строку определения функции, щелкните по кнопке Add Line и введите, действуя, как описано выше, определение функции на следующем интервале.

В результате у вас должно получиться следующее:

$$F(x) := \left| \begin{array}{ccc} 0 & if & -\infty < x < A_{1,1} \\ A_{2,1} & if & A_{1,1} \le x < A_{1,2} \\ A_{2,1} + A_{2,2} & if & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots. \\ 1 & if & A_{1,5} \le x < \infty \end{array} \right.$$

Рисунок 1 – функция распределения случайной величины

На приведенном рисунке 1 функция распределения определена с использованием имен переменных.

3. Определите функцию распределения G(x) той же случайной величины с использованием конкретных значений переменных.
4. Постройте графики функций распределений F(x) и G(x). Отредактируйте и сравните графики.

Замечание. Следует помнить, что MathCad не совсем корректно строит графики ступенчатых функций, соединяя отрезками прямых значения функции в точке скачка. Более точный график функции распределения представляет собой отрезки**,** параллельные оси абсцисс, с «выколотым» правым концом.

2. Случайные величины. Функции распределения.

Теория вероятностей изучает математические модели случайных явлений окружающего нас мира. Одно из центральных понятий теории вероятностей – понятие случайной величины. Случайной величиной называется числовая функция, заданная на множестве случайных событий.

Для проведения вычислений со случайными величинами (непрерывными и дискретными) в MathCad есть богатая библиотека встроенных функций наиболее распространенных стандартных распределений. Каждое распределение представлено в библиотеке тремя функциями — плотностью вероятностей, функцией распределения и функцией, обратной к функции распределения. Имена всех встроенных функций, определяющих *плотности вероятностей*, начинаются с буквы *d*, определяющих *функции распределения* – с буквы *p*.

Например, для работы с нормальным распределением предназначены функции dnorm(x,h,s), pnorm(x,h,s) и qnorm(x,h,s).

Каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения.

Если X – случайная величина, то функция $F(x) = F_X(x) = P(X < x)$ называется функцией распределения случайной величины X. Здесь $P(X < x)$ – вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее x.

Функция распределения любой случайной величины обладает следующими свойствами:

- F(x) определена на всей числовой прямой R;
- F(x) не убывает, т. е. если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$;
- $F(-\infty) = 0$.
- $F(+\infty) = 1$.

Важно понимать, что функция распределения является «паспортом» случайной величины: она содержит всю информацию об этой случайной величине, и поэтому изучение случайной величины заключается в исследовании ее функции распределения, которую часто называют просто распределением.

2.1. Наиболее распространенные распределения дискретных случайных величин

Познакомимся с дискретными случайными величинами, которые чаще всего используются при решении практических задач. Эти случайные величины имеют биномиальное, геометрическое и пуассоновское распределения.

Биномиальное распределение (схема Бернулли). Пусть проводится серия из n независимых испытаний, каждое из которых заканчивается либо «успехом», либо «неуспехом». Пусть в каждом испытании (опыте) вероятность успеха *p*, а вероятность неудачи – $q = 1 - p$ С таким испытанием можно связать случайную величину *x*, равную числу успехов в серии из *n* испытаний. Эта величина принимает целые значения от 0 до *n*.

Ее распределение называется биномиальным и определяется формулой Бернулли

$$p_k = P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

В Mathcad для вычисления плотности вероятности и функции распределения случайной величины, имеющей биномиальное распределение, предназначены функции *dbinom(k, n, p) и pbinom(k, n, p),* значения которых – соответственно *p(k) и F(k).*

Геометрическое распределение. Со схемой испытаний Бернулли можно связать еще одну случайную величину: *h* – число испытаний до первого успеха. Эта величина принимает бесконечное множество значений от 0 до +∞, и ее распределение определяется формулой

$$p_k = P(\eta = k) = p^k q$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, \ldots, n,$

В Mathcad для вычисления плотности вероятности и функции распределения случайной величины, имеющей геометрическое распределение, предназначены функции *dgeom(k, p) и pgeom(k, p),* значения которых – соответственно *p(k) и F(k).*

Пуассоновское распределение. Пуассоновское распределение имеет случайная величина m, принимающая значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями

$$p_k = P(\mu = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ k= 0, 1, 2, …,}$$

где $\lambda > 0$ – параметр пуассоновского распределения.

В Mathcad для вычисления вероятности и функции распределения случайной величины, имеющей пуассоновское распределение, предназначены функции *dpois(k, λ) и ppois(k, λ),* значения которых – соответственно *p(k) и F(k).*

Задание 2.

1. Задайте случайные величины, имеющие биномиальное распределение. Параметры распределения задайте самостоятельно. Постройте графики распределения и функции распределения случайной величины. (Подберите удобные параметры отображения графиков). Удобно строить графики в одной системе координат.

2. Проверьте для них равенство $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.

3. Вычислите вероятность попадания значений случайной величины в выбранный интервал.

4. Найдите значение k, для которого величина P(ξ = k) максимальна. Исследуйте зависимость этой вероятности от параметров распределения.

Указание. Для того, чтобы определить по графику распределения наиболее вероятное значение случайной величины, щёлкните в меню **Format** (Формат) в пункте **Graph** (График) по строке **Trace** (Следование), установите перекрестье маркера на точке максимума распределения и выведите в рабочий документ вероятность значения, указанного в окне **X-Value** (Величина X).

5. Измените значения параметров распределения и повторите вычисления. Сравните полученные результаты. Выводы привести в отчете.

Повторить п. 1-5 для других распределений (геометрическое и пуассоновское).

В отчете представьте по одному варианту для каждого распределения: параметры распределения, графики вероятности и функции распределения, значение наиболее вероятного значения СВ и значение вероятности попадания СВ в указанный диапазон. В отчет вставлять фрагменты из Mathcad.

2.2. Наиболее распространённые частные распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение. Непрерывная случайная величина ξ, принимающая значение на отрезке *[a,b],* распределена равномерно на *[a,b],* если плотность распределения $p_\xi(x)$ и функция распределения случайной величины ξ имеют соответственно вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \end{cases} \qquad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

В Mathcad значения в точке x плотности распределения и функции распределения случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке [a,b], вычисляются встроенными функциями соответственно *dunif(x,a,b) и punif(x,a,b)*.

Экспоненциальное (показательное) распределение. Непрерывная случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, если плотность распределения имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases} \qquad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

В Mathcad значения в точке *x* плотности распределения и функции распределения случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение с параметром λ, вычисляются встроенными функциями соответственно *dexp(x, l) и pexp(x, l)*.

Нормальное распределение. Это распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей и математической статистике. Случайная величина ξ нормально распределена с параметрами *a и σ, σ > 0*, если её плотность распределения имеет вид

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Если случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, то будем записывать это в виде $\xi \sim N(a,\sigma)$. Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, если $a = 0$ *и* $\sigma = 1$, $\xi \sim N(0,1)$. Плотность стандартного нормального распределения имеет вид

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

а его функция распределения $F_\xi(x) = \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа:

$$\Phi_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\frac{z^2}{2})dz\,.$$

Функция распределения нормальной величины η ~ N(a,σ) также выражается через функцию Лапласа: $F_\eta(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

В MathCad значения в точке *x* плотности распределения и функции распределения нормальной случайной величины с параметрами a, σ вычисляются встроенными функциями соответственно *dnorm(x,a,s) и pnorm(x,a,s)*.

Распределение Стьюдента. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, а случайная величина $\chi_n^2 - \chi^2$ — распределение с n степенями свободы. Если ξ и χ_n^2 независимы, то про случайную величину $\tau_n = \frac{\xi}{\sqrt{\chi_n^2 / n}}$ говорят, что она имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы *n*. Доказано, что плотность вероятности этой величины вычисляется по формуле

$$p_\tau n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in R$$

При больших *n* распределение Стьюдента практически не отличается от N(0,1).

В Mathcad значения в точке x плотности распределения и функции Стьюдента с *n* степенями свободы вычисляются встроенными функциями соответственно *dt(x,n) и pt(x,n)*.

Задание 3.

Порядок выполнения задания

1. Введите параметры равномерного распределения. (Можно использовать любые).
2. Определите плотность вероятности и функцию распределения случайной величины.
3. Постройте графики.
4. Поэкспериментируйте с параметрами различных распределений.
5. Сделайте выводы о зависимости выходных данных от входных параметров.

Повторить п. 1-5 для других распределений (экспоненциального, нормального распределения и распределения Стьюдента.).

В отчете представьте по одному варианту для каждого распределения: параметры распределения, графики вероятности и функции распределения и выводы о зависимости выходных данных от входных параметров. В отчет вставлять фрагменты из Mathcad.

3. Числовые характеристики случайных величин

Каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения. В то же время при решении практических задач достаточно знать несколько числовых параметров, которые позволяют представить основные особенности случайной величины в сжатой форме.

К таким величинам относятся, в первую очередь, математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание случайной величины.

Математическое ожидание – число, вокруг которого сосредоточены значения случайной величины.

Если ξ – дискретная случайная величина с распределением,

ξ	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

то ее математическим ожиданием – оно обозначается M – называется величина

$$M = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины с плотностью вероятностей p (x) вычисляется по формуле

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

Дисперсия случайной величины.

Дисперсия случайной величины характеризует меру разброса значений случайной величины около ее математического ожидания. Если случайная величина ξ имеет математическое ожидание M, то дисперсией случайной величины ξ называется величина $D = M(X-M)^2$. Легко показать, что $D = M^2 - (M)^2$. Эта универсальная формула одинаково хорошо применима как для дискретных случайных величин, так и для непрерывных. Величина M^2 вычисляется по формулам:

$$M^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 \qquad\qquad M^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx,$$

для дискретных и непрерывных случайных величин соответственно.

Еще одним параметром для определения меры разброса значений случайной величины является *среднеквадратическое отклонение* σ, связанное с дисперсией соотношением $\sigma = \sqrt{D}$

Задание 4.

1. Вычислить математические ожидания и дисперсии для случайных величин, имеющих дискретные распределения (биномиальное, геометрическое и пуассоновское распределения). В качестве исходных параметров возьмите:

n = 10 – число испытаний;

p = 0,3*k*0,5 – вероятность наступления события;

λ = 4+k – параметр пуассоновского распределения;

N = 1000 – число испытаний стремится к ∞.

k – порядковый номер компьютера

2. Сверить полученные значения со справочными данными (Приложение 1).

В отчете привести все расчетные формулы и результаты сравнения для каждого распределения в виде фрагментов из Mathcad.

Задание 5.

1. Вычислить математические ожидания и дисперсии для случайных величин, имеющих непрерывные распределения (равномерное, экспоненциальное, нормальное, распределение Стьюдента). В качестве исходных параметров возьмите (при желание можно использовать любые другие):

a = 1*k , b = 3*k, n = 5, λ = 1.5*0,1*k, σ = 0,5 – необходимые параметры распределений

k – порядковый номер компьютера

В отчете привести все расчетные формулы и результаты для каждого распределения в виде фрагментов из Mathcad.ж

Моменты

В теории вероятностей и математической статистике, помимо математического ожидания и дисперсии, используются и другие числовые характеристики случайных величин. В первую очередь это начальные и центральные моменты.

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание *k*-й степени случайной величины X , т. е. $\alpha_k = M\left(x^k\right)$

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется величина μ_k , определяемая формулой $\mu_k = M\left[(x-M)^k\right]$

Заметим, что математическое ожидание случайной величины – начальный момент первого порядка, $\alpha_1 = M$, а дисперсия – центральный момент второго порядка: $\mu_2 = M\left[(x-M)^2\right] = D(x)$

Существуют формулы, позволяющие выразить центральные моменты случайной величины через ее начальные моменты. Одна из таких формул приведена выше: $D = M(x-M)^2 = \mu_2 - \alpha_1^2$.

В дальнейшем будет использована формула $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3$.

В теории вероятностей и математической статистике в качестве меры асимметрии распределения служит коэффициент асимметрии, который определяется формулой:

$$\beta = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

где μ_3 – центральный момент третьего порядка;

$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\mu_2}$ – среднеквадратичное отклонение.

Коэффициент асимметрии – безразмерная величина, а по его знаку можно судить о характере асимметрии.

Указание. Для того чтобы вычислить значение коэффициента асимметрии, выделите выражение для него, щелкните в строке **Floating Point** в меню **Symbolics** и укажите в окне диалога число десятичных знаков в выводе.

Задание 6 (Дополнительное)

Вычислите коэффициент асимметрии случайной величины X с равномерным распределением.

Порядок выполнения задания

1. Определите значения параметров распределения случайной величины.
2. Определите центральный момент третьего порядка как функцию параметров распределения случайной величины.
3. Определите центральный момент второго порядка как функцию параметров распределения случайной величины.
4. Вычислите коэффициент асимметрии.
5. Постройте график плотности вероятности.

7. Эксцесс

Нормальное распределение наиболее часто используется в теории вероятностей и математической статистике, и поэтому график плотности вероятностей нормального распределения стал своего рода эталоном, с которым сравнивают другие распределения. Одним из параметров, определяющих отличие сравниваемого распределения от нормального, является *эксцесс*.

Эксцесс γ случайной величины ξ определяется равенством

$$\gamma = \frac{\mu_4}{(D)^2} - 3$$

По известным нам свойствам математического ожидания и определению центрального момента получим формулу для μ_4

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4$$

У нормального распределения, естественно, $\gamma = 0$. Если $\gamma > 0$, то это означает, что график плотности вероятностей p(x) сильнее «заострен», чем у нормального распределения, если же $\gamma < 0$, то «заостренность» графика p(x) меньше, чем у нормального распределения.

Задание 7. (Дополнительное)

Вычислите эксцесс случайной величины ξ с равномерным распределением.

Порядок выполнения задания

1. Определите значения параметров распределения случайной величины.
2. Определите центральный момент четвертого порядка как функцию параметров распределения случайной величины.
3. Определите центральный момент второго порядка как функцию параметров распределения случайной величины.

4. Вычислите коэффициент асимметрии.
5. Постройте график плотности вероятности.

Указание. Mathcad не справляется с вычислением интегралов функций, заданных разными выражениями на разных промежутках. Поэтому при вычислении моментов используйте свойство интеграла по симметричному промежутку от чётной функции. Для того чтобы определить плотность вероятностей равномерного распределения, щёлкните по кнопке Add Line в панели , введите в первой строке выражение для функции, щёлкните по кнопке if и введите условие; аналогично определите во второй строке функцию на втором промежутке.

Литература.

1. Новикова Н.М. Компьютерный практикум по теории вероятности в среде MATHCAD: учебно-методическое пособие для вузов – Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2008. – 23с.
2. Васильев А.В. Mathcad 13 на примерах – СПб.: БХВ - Петербург, 2006. – 528с.

Приложение 1

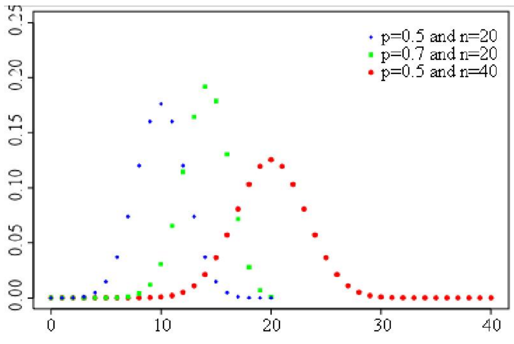
Законы распределения дискретных случайных величин

Биномиальное распределение (схема Бернулли). Пусть проводится серия из n независимых испытаний, каждое из которых заканчивается либо «успехом», либо «неуспехом». Пусть в каждом испытании (опыте) вероятность успеха *p*, а вероятность неудачи – $q = 1 - p$ С таким испытанием можно связать случайную величину *x*, равную числу успехов в серии из *n* испытаний. Эта величина принимает целые значения от 0 до *n*.

Ее распределение называется биномиальным и определяется формулой Бернулли

$$p_k = P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, \dots, n$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$



Функция вероятности

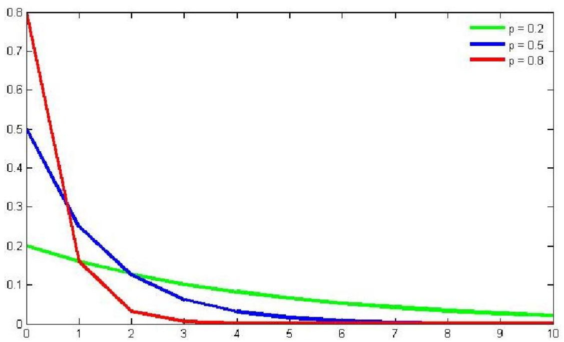
Основные характеристики биноминального распределения примут вид:

$$M(X) = np, \; D(X) = npq, \; A = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}, \; E = \frac{1-6pq}{npq}.$$

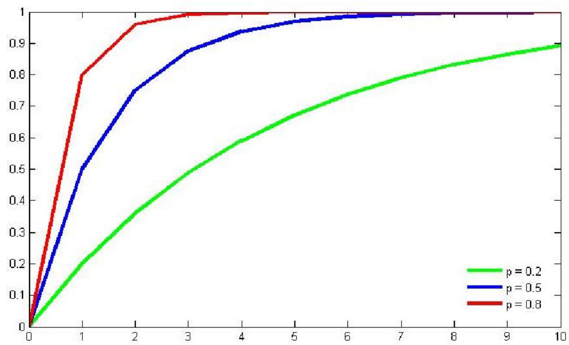
Геометрическое распределение. Со схемой испытаний Бернулли можно связать еще одну случайную величину: *h* – число испытаний до первого успеха. Эта величина принимает бесконечное множество значений от 0 до +∞, и ее распределение определяется формулой

$$p_k = P(\eta = k) = p^k q$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, \dots, n$,



Функция вероятности



Функция распределения

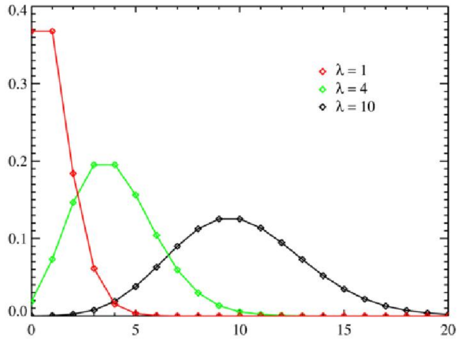
Основные характеристики геометрического распределения примут вид:

$$M(X) = \frac{1-p}{p}, \; D(X) = \frac{q}{p^2}, \; A = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}, \; E = 6 + \frac{p^2}{1-p}.$$

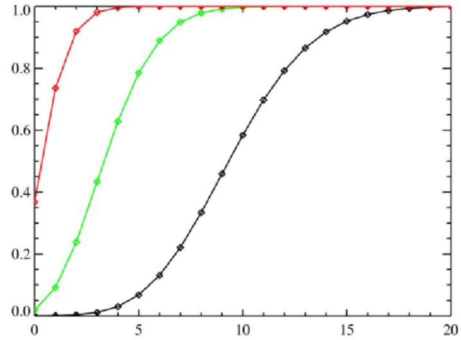
Пуассоновское распределение. Пуассоновское распределение имеет случайная величина *m*, принимающая значения *k = 0, 1, 2,…* с вероятностями

$$p_k = P(\mu = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ k= 0, 1, 2, …,}$$

где $\lambda > 0$ – параметр пуассоновского распределения.



Функция вероятности



Функция распределения

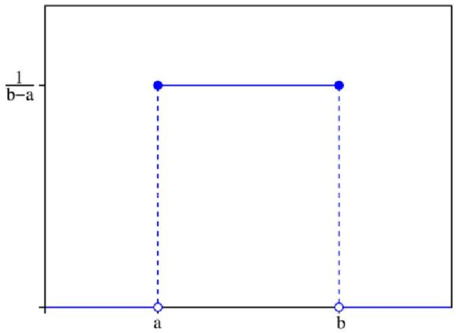
Основные характеристики пуассоновского распределения примут вид:

$$M(X) = \lambda,\ D(X) = \lambda,\ A = \lambda^{-1/2},\ E = \lambda^{-1}.$$

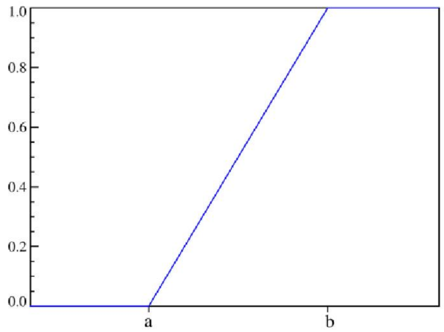
Законы распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение. Непрерывная случайная величина ξ, принимающая значение на отрезке *[a,b],* распределена равномерно на *[a,b],* если плотность распределения $p_\xi(x)$ и функция распределения случайной величины ξ имеют соответственно вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \end{cases} \qquad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



Функция вероятности



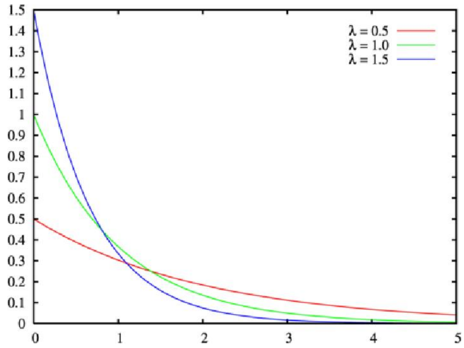
Функция распределения

Основные характеристики равномерного распределения примут вид:

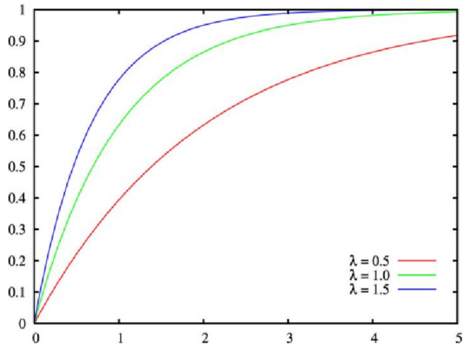
$$M(X) = \frac{a+b}{2},\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12},\ A = 0,\ E = -\frac{6}{5}.$$

Экспоненциальное (показательное) распределение. Непрерывная случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, если плотность распределения имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases} \qquad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$



Функция вероятности



Функция распределения

Основные характеристики экспоненциального распределения примут вид:

$$M(X) = \lambda^{-1},\ D(X) = \lambda^{-2},\ A = 2,\ E = 6.$$

Нормальное распределение. Это распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей и математической статистике. Случайная величина ξ нормально распределена с параметрами *μ и σ, σ > 0*, если её плотность распределения имеет вид

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

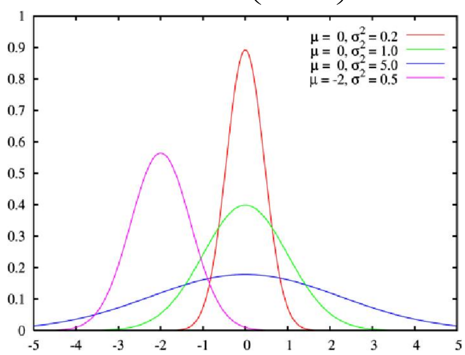
Если случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами а и σ, то будем записывать это в виде *ξ ~N(a,σ)*. Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, если *μ = 0 и σ = 1, ξ ~ N(0,1)*. Плотность стандартного нормального распределения имеет вид

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

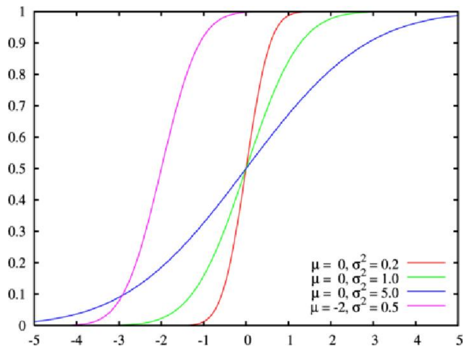
а его функция распределения $F_\xi(x) = \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа:

$$\Phi_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\frac{z^2}{2})dz.$$

Функция распределения нормальной величины η ~ N(μ,σ) также выражается через функцию Лапласа: $F_\eta(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.



Функция вероятности



Функция распределения

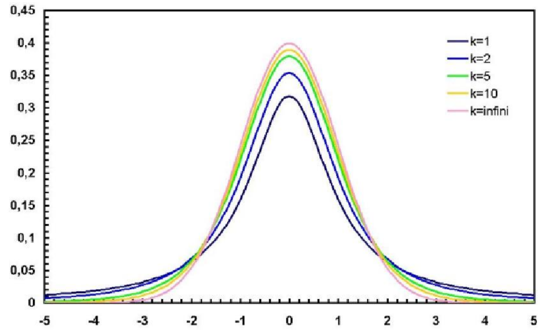
Основные характеристики нормального распределения примут вид:

$$M(X) = \mu,\ D(X) = \sigma^2,\ A = 0,\ E = 0.$$

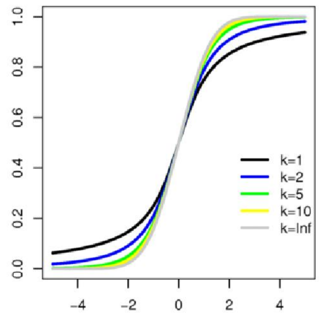
Распределение Стьюдента. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, а случайная величина $\chi_n^2 - \chi^2$ — распределение с n степенями свободы. Если ξ и χ_n^2 независимы, то про случайную величину $\tau_n = \dfrac{\xi}{\sqrt{\chi_n^2 / n}}$ говорят, что она имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы *n*. Доказано, что плотность вероятности этой величины вычисляется по формуле

$$p_\tau n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in R$$

При больших *n* распределение Стьюдента практически не отличается от N(0,1).



Функция вероятности



Функция распределения

Основные характеристики распределения Стьюдента примут вид:

$$M(X) = 0, если \;\; n > 1,\; D(X) = \frac{n}{n-2}, если \;\; n > 2,\; A = 0, если \;\; n > 3,\; E = \frac{6}{n-4}, если \;\; n > 4.$$