Тема 6 АНАЛОГОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Задача фильтрации. – Понятие фильтра. – Базисные фильтры и их идеальные частотные характеристики. – Задача аппроксимации. – Типовые фильтры нижних частот. – Фильтры Баттерворта и их свойства. – Фильтры Чебышева первого рода и их свойства. – Денормирование и трансформация фильтров.

6.1.Задача фильтрации. Базисные фильтры и их идеальные частотные характеристики

Под фильтрацией понимают такое преобразование сигнала, при котором его определенные полезные особенности сохраняются, а нежелательные свойства подавляются. Осуществляется фильтрация при помощи фильтра, представляющего собой динамическую систему с определенными динамическими свойствами.

С помощью фильтрации решают многочисленные задачи, возникающие на практике, в том числе:

1) подавление шумов, маскирующих сигнал;

2) устранение искажения сигнала, вызванного несовершенством канала передачи или погрешностью измерения;

3) разделение двух или более различных сигналов, которые были преднамеренно смешены для того, чтобы в максимальной степени использовать канал;

4) разложение сигналов на частотные составляющие;

5) демодуляция сигналов;

6) преобразование дискретных сигналов в аналоговые;

7) ограничение полосы частот, занимаемой сигналами.

Фильтрацию можно представить как процесс изменения частотного спектра сигнала в некотором желаемом направлении. Этот процесс может привести к усилению или ослаблению частотных составляющих в некотором диапазоне частот, к подавлению или выделению какой-либо конкретной частотной составляющей и т.п.

Разработка практических методов фильтрации процессов зачастую базируется на следующем принципиальном допущении: *спектры полезного сигнала и сигнала помехи не перекрываются*. Например, в случае взаимного расположения спектров, показанного на рис. 6.1, *а* необходимо потребовать, чтобы фильтр пропускал все частотные составляющие в диапазоне $[0, \omega_{гр}]$ и подавлял частотные составляющие в диапазоне $(\omega_{гр}, \infty)$.

Задача фильтрации существенно усложняется, если спектры полезного сигнала и сигнала помехи перекрываются (рис. 6.1, *б*). Здесь нельзя однозначно установить границу между полосой пропускания и полосой задерживания. Смещение границы влево приводит к большему искажению полезного сигнала за счет подавления его высокочастотных составляющих, а смещение вправо – к большему искажению за счет помех. В этом случае ставят и решают задачу поиска оптимального фильтра.

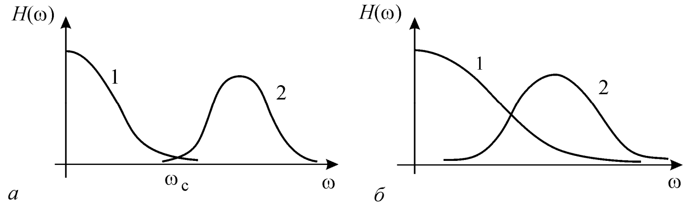

Рис. 6.1 Амплитудные спектры полезного сигнала (1) и помехи (2):
а – с незначительным перекрытием; *б* – со значительным перекрытием

Полоса частот, в которой сигналы пропускаются (усиливаются) фильтром, называется *полосой пропускания*. Полоса частот, где сигналы подавляются (ослабляются) фильтром, называется *полосой задерживания*. Частоты, лежащие на границе полос пропускания и задерживания, называются *граничными частотами*.

В зависимости от взаимного расположения полос пропускания и задерживания различают следующие типы фильтров:

фильтры нижних частот (ФНЧ);

фильтры верхних частот (ФВЧ);

полосовые фильтры (ПФ);

заграждающие (режекторные) фильтры (ЗФ).

Перечисленные выше типы фильтров широко применяются при обработке данных и сигналов. Поэтому их часто называют базисными фильтрами. В идеале базисные фильтры должны иметь амплитудно-частотные характеристики, представленные на рис. 6.2.

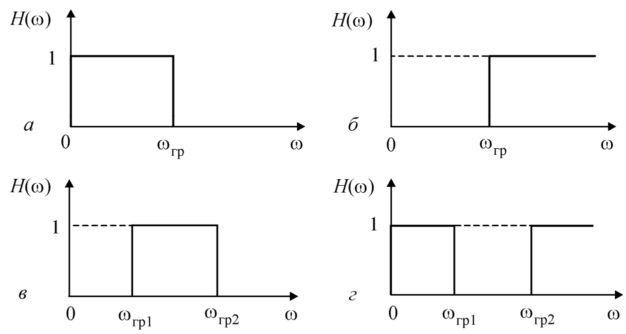

Рис.6.2. Идеальные АЧХ базисных фильтров

1. Идеальный фильтр низких частот должен пропускать все частотные составляющие в диапазоне (0, $\omega_{гр}$) и подавлять частотные составляющие в диапазоне ($\omega_{гр}$,∞) (рис. 6.2, *а*).

2. Идеальный фильтр высоких частот должен иметь обратные характеристики, то есть пропускать частотные составляющие в диапазоне ($\omega_{гр}$,∞) и поглощать их в диапазоне (0, $\omega_{гр}$) (рис. 6.2, *б*).

3. Полосовой фильтр должен пропускать составляющие с частотами, лежащими в диапазоне ($\omega_{гр1}$, $\omega_{гр2}$) и подавлять другие составляющие (рис. 6.2, *в*).

4. Заграждающий фильтр должен подавлять составляющие с частотами из диапазона ($\omega_{гр1}$, $\omega_{гр2}$) и пропускать другие составляющие без изменения (рис. 6.2, *г*).

Покажем, что реализовать фильтры с идеальными характеристиками нельзя. Рассмотрим идеальный ФНЧ, обобщенную частотную характеристику которого можно записать так:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_{гр}, \\ 0, & |\omega| > \omega_{гр}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Частотные характеристики фильтра, построенные по выражению (6.1), показаны на рис. 6.3, *а*. Применив к (6.1) обратное преобразование Фурье, найдем импульсную переходную функцию идеального ФНЧ

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{гр}}^{\omega_{гр}} e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi j t}\left(e^{j\omega_{гр}t} - e^{-j\omega_{гр}t}\right) = \frac{\omega_{гр}}{\pi}\frac{\sin\omega_{гр} t}{\omega_{гр} t}.$$

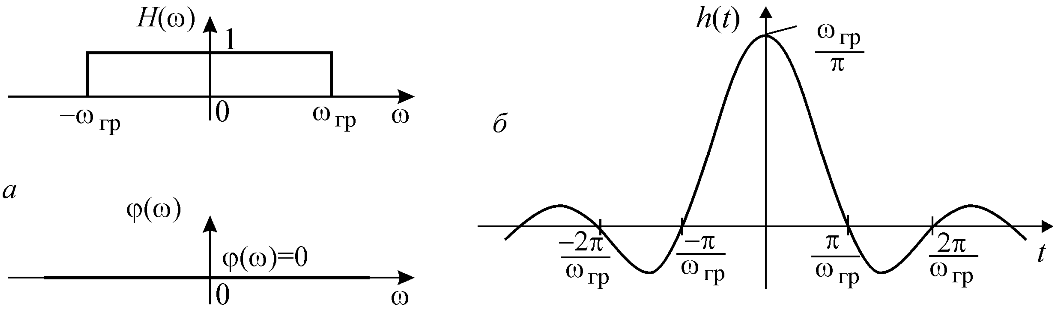

Рис. 6.3. Характеристики идеального ФНЧ:
а – амплитудно-частотная характеристика; *б* – импульсная переходная функция

Импульсная переходная функция $h(t)$ построена на рис. 6.3, *б*. Как видно, $h(t) \neq 0$ при $t < 0$ и тем самым нарушено условие физической реализуемости системы. Идеальный ФНЧ поэтому реализовать нельзя.

6.2. Задача аппроксимации. Типовые ФНЧ

Задача проектирования фильтра по заданным требованиям к частотным характеристикам является достаточно сложной и многоэтапной. На первом этапе решается задача аппроксимации, которая заключается в определении передаточной функции $H(s)$ устойчивого и физически реализуемого фильтра, АЧХ которого наилучшим образом приближается к определенной идеальной характеристике.

Передаточная функция устойчивого и физически реализуемого фильтра должна удовлетворять следующим условиям:

число нулей и полюсов передаточной функции должно быть конечным;

число нулей не должно превышать число полюсов;

полюсы должны располагаться в левой полуплоскости.

Получить идеальные характеристики у фильтров, удовлетворяющих приведенным выше условиям, на практике не удается. Поэтому обычно при проектировании аналоговых фильтров задаются определенные требования к частотным характеристикам, которые определяют степень их отклонения от идеальных.

Во-первых, в полосе пропускания допускается отклонение значения коэффициента передачи фильтра от единицы на величину $\delta H_{п}$, а в полосе задерживания – от нуля на величину $\delta H_{з}$ (рис. 6.4). Величину $\delta H_{п}$ называют неравномерностью АЧХ в полосе пропускания, а величину $\delta H_{з}$ – максимальным отклонением АЧХ в полосе задерживания.

Во-вторых, ввиду того, что реализовать резкое изменение коэффициента передачи фильтра от нуля до единицы и, наоборот, в соответствии с характеристиками, показанными на рис. 6.2, не удается, вводится так называемая переходная полоса между полосой пропускания и полосой задерживания. В пределах этой полосы коэффициент передачи фильтра изменяется произвольным образом от значений, заданных для полосы пропускания, до значений, требуемых в полосе задерживания (рис. 6.4).

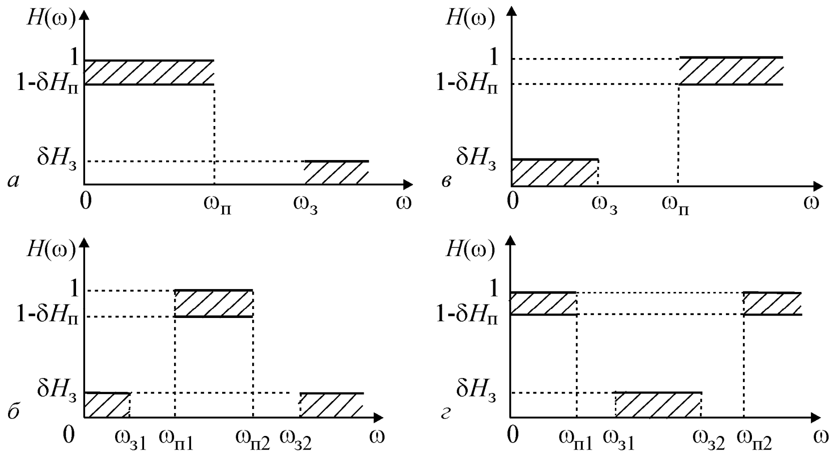

Рис. 6.4. Исходные требования к АЧХ базисных фильтров:
а – ФНЧ, *б* – ФВЧ, *в* – ПФ, *г* – ЗФ

Таким образом, в качестве исходных данных при решении задачи аппроксимации задаются граничные частоты полос пропускания и задерживания, допуски на максимальное значение неравномерности АЧХ в полосе пропускания $\Delta H_{п}$ и максимальное отклонение АЧХ от нуля в полосе задерживания $\delta H_{з}$.

Большинство методов решения задачи аппроксимации не позволяют учесть требования к АЧХ и ФЧХ. Методы построения фильтров с заданными требованиями как к АЧХ, так и к ФЧХ достаточно сложны, базируются, как правило, на использовании дополнительного корректора ФЧХ.

Широкое распространение получили четыре вида фильтров, которые соответствуют различным способам аппроксимации идеальной прямоугольной АЧХ:

1) фильтры Баттерворта, имеющие максимально плоскую АЧХ в полосе пропускания и монотонную характеристику в полосе задерживания (рис. 6.5, *а*);

2) фильтры Чебышева первого рода, имеющие заданную величину пульсаций АЧХ в полосе пропускания и монотонную характеристику в полосе задерживания (рис. 6.5, *б*);

3) фильтры Чебышева второго рода, имеющие максимально плоскую АЧХ в полосе пропускания и фиксированный уровень пульсаций в полосе задерживания (рис. 6.5, *в*);

4) эллиптические фильтры, имеющие равноволновые пульсации АЧХ как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания (рис. 6.5, *г*).

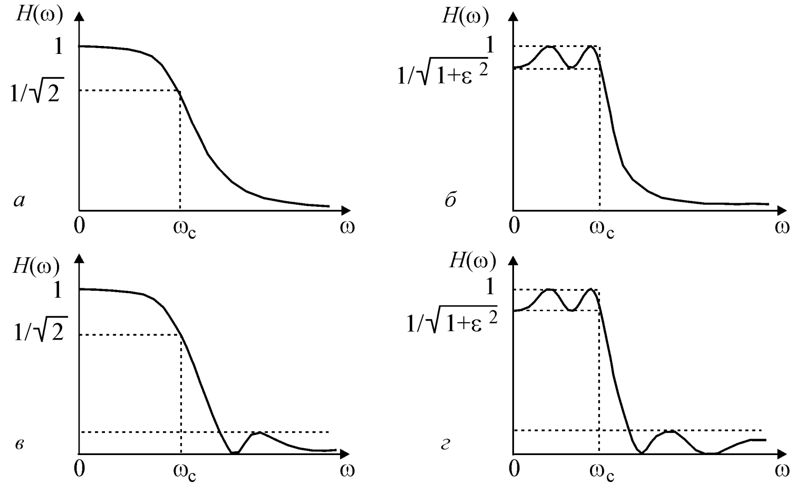

Рис. 6.5. Амплитудно-частотные характеристики типовых ФНЧ:
а – фильтр Баттерворта; *б* – фильтр Чебышева первого рода;
в – фильтр Чебышева второго рода; *г* – эллиптический фильтр

6.3. Фильтры Баттерворта

Фильтры Баттерворта, как отмечалось выше, имеют максимально плоскую АЧХ в полосе пропускания и монотонную характеристику в полосе задерживания. Квадрат АЧХ фильтра Баттерворта описывается выражением

$$H^2(\omega) = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}},$$

где ω_c – граничная частота, n – порядок фильтра.

АЧХ фильтров Баттерворта различных порядков показаны на рис. 6.6.

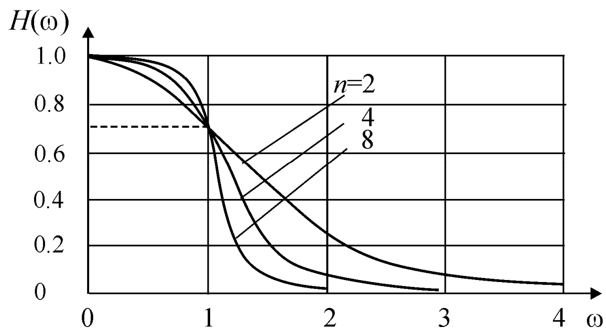

Рис 6.6. АЧХ фильтров Баттерворта различных порядков

По мере возрастания порядка n фильтра Баттерворта коэффициент передачи в полосе пропускания все в большей степени приближается к единице, переходная область все в большей степени сужается, а в полосе задерживания функция передачи все ближе и ближе подходит к нулю. При $n \to \infty$ АЧХ фильтра Баттерворта приближается к идеальной.

Таким образом, n является тем единственным параметром, выбор которого позволяет удовлетворить заданный набор требований к фильтру в полосе пропускания и полосе задерживания.

Приведем основные свойства фильтров Баттерворта.

Свойство 1. При любом n справедливы соотношения:

$$H(0)=1; \qquad H(\omega_c)=1/\sqrt{2}; \qquad \lim_{\omega\to\infty} H(\omega)=0.$$

Свойство 2. Функция $|H(j\omega)|$ фильтров Баттерворта монотонно убывает при $\omega\ge 0$. Следовательно, АЧХ имеет максимальное значение при ω=0.

Свойство 3. Первые $(2n-1)$ производные АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта n-го порядка равны нулю при $\omega=0$.

Свойство 4. Крутизна АЧХ фильтра Баттерворта n-го порядка на высоких частотах составляет 20n дБ/дек.

Фильтр Баттерворта относится к полиномиальным фильтрам, которые характеризуются тем, что их передаточные функции не содержат нулей. Поэтому передаточная функция фильтра Баттерворта имеет вид

$$H(s)=\frac{b_0}{A(s)}=\frac{\omega_c^n}{A(s)},$$

где ω_c^n – число, а $A(s)$ – характеристический полином n-го порядка.

Стандартные полиномы фильтров Баттерворта различных порядков определяются следующими выражениями:

$$A(s)=s+\omega_c;$$

$$A(s)=s^2+1.4\ \omega_c s+\omega_c^2;$$

$$A(s)=s^3+2.0\omega_c s^2+2.0\ \omega_c^2 s+\omega_c^3=(s+\omega_c)(s^2+\omega_c s+\omega_c^2);$$

$$A(s)=s^4+2.6\ \omega_c s^3+3.4\ \omega_c^2 s^2+2.6\ \omega_c^3 s+\omega_c^4=$$
$$=(s^2+0.765\omega_c s+\omega_c^2)(s^2+1.848\omega_c s+\omega_c^2);$$

$$A(s)=s^5+3.24\ \omega_c s^4+5.24\ \omega_c^2 s^3+5.24\ \omega_c^3 s^2+3.24\ \omega_c^4 s+\omega_c^5=$$
$$=(s+\omega_c)(s^2+0.618\omega_c s+\omega_c^2)(s^2+1.618\omega_c s+\omega_c^2).$$

В практике проектирования фильтров широко используется понятие нормированного фильтра, который имеет частоту среза $\omega_c=1$. Нормированный фильтр Баттерворта описывается передаточной функцией

$$H_н(s)=\frac{1}{A_н(s)},$$

где $A_н(s)=A(s)_{\omega_c=1}$.

Полюсы фильтра Баттерворта определяются следующим выражением:

$$s_k=-\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\omega_c+j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\omega_c,\ k=1,2,...,n. \qquad (6.2)$$

Расположение полюсов фильтров Баттерворта различных порядков показано на рис. 6.7.

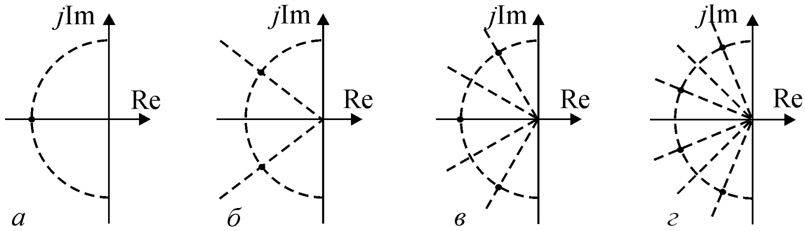

Рис. 6.7. Расположение полюсов фильтра Баттерворта:
а – $n=1$; *б* – $n=2$; *в* – $n=3$; *г* – $n=4$

При проектировании фильтра Баттерворта, как уже отмечалось выше, задаются требования к амплитудно-частотной характеристике $H(\omega)$ (рис. 6.8, *а*). Часто для формулирования требований к свойствам фильтра используется не коэффициент усиления, а обратная величина, называемая коэффициентом затухания. На рис. 6.8, *б* показана логарифмическая характеристика затухания фильтра, где по оси ординат отложена величина

$$R(\omega) = 20\cdot\lg\frac{1}{H(\omega)}.$$

Здесь $R_{\text{макс}} = 20\cdot\lg\dfrac{1}{1-\Delta A_{\text{п}}}$; $R_{\text{мин}} = 20\cdot\lg\dfrac{1}{\Delta A_{\text{з}}}$.

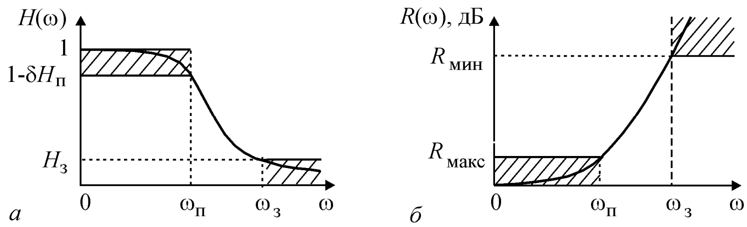

Рис.6.8. Требования к АЧХ (*а*) и к затуханию (*б*) ФНЧ

Для определения порядка фильтра Баттерворта, характеристика затухания которого удовлетворяет требованиям, используется формула:

$$n = \frac{\lg\left[(10^{0.1R_{\text{мин}}}-1)/(10^{0.1R_{\text{макс}}}-1)\right]}{2\lg(\omega_{\text{з}}/\omega_{\text{п}})}. \qquad (6.3)$$

6.4.Фильтры Чебышева первого рода

Квадрат амплитудно-частотной характеристики фильтра Чебышева первого рода определяется выражением:

$$H^2(\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 V_n^2(\omega/\omega_{\text{c}})},$$

где V_n – полином Чебышева порядка n, который может быть образован с помощью рекуррентной формулы

$$V_{n+1}(x) - 2xV_n(x) + V_{n-1}(x) = 0 .$$

Здесь первые два полинома принимаются равными: $V_0(x)=1$; $V_1(x)=x$.

На рис. 6.9 показаны АЧХ фильтра Чебышева первого рода четвертого и пятого порядков.

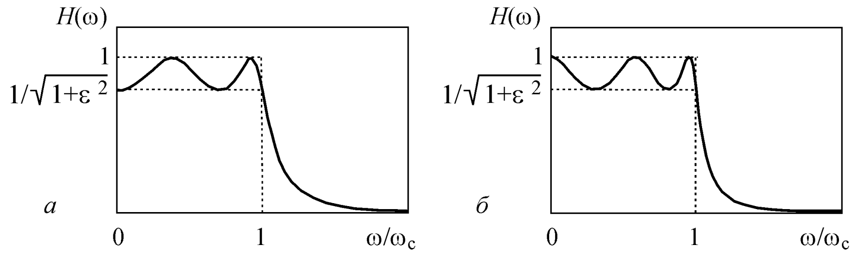

Рис. 6.9. АЧХ фильтров Чебышева первого типа (ε =0.765):
а – *n*=4, *б* – *n*=5

АЧХ имеет пульсации в полосе пропускания и монотонную характеристику в полосе задержания. Размах пульсации АЧХ равен

$$\delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}.$$

Таким образом, ε представляет собой свободный параметр, который устанавливает величину неравномерности передачи в полосе пропускания.

Основные свойства фильтров Чебышева первого рода:

Свойство 1. АЧХ удовлетворяет условиям:

$$H(\omega_c) = 1 \Big/ \sqrt{1+\varepsilon^2}\ ;$$

$$H(0) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 1 \Big/ \sqrt{1+\varepsilon^2}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Свойство 2. Для $|\omega/\omega_c| \le 1$ значения функции $H(\omega)$ колеблются между двумя пределами $1\big/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ и 1. В общей сложности, на интервале $[0, \omega_c]$ имеется n критических точек, в которых функция $H(\omega)$ достигает максимального значения, равного 1, или минимального значения, равного $1\big/\sqrt{1+\varepsilon^2}$.

Свойство 3. При $\omega \ge \omega_c$ функция $H(\omega)$ монотонно убывает и стремится к нулю. Крутизна спада на высоких частотах составляет $20n$ дБ/дек.

Как и в случае фильтра Баттерворта передаточная функция фильтра Чебышева имеет одни только полюсы, числитель ее представляет собой постоянную величину и, следовательно, не содержит нулей при конечных значениях частоты.

Полюсы фильтра Чебышева располагаются на эллипсе (рис. 6.10). Параметры эллипса полностью определяются заданными значениями ε , n , ω_c . Малая ось эллипса, имеющая длину $2a\omega_c$, располагается на вещественной оси, а большая ось этого эллипса проходит по мнимой оси и равна $2b\omega_c$.

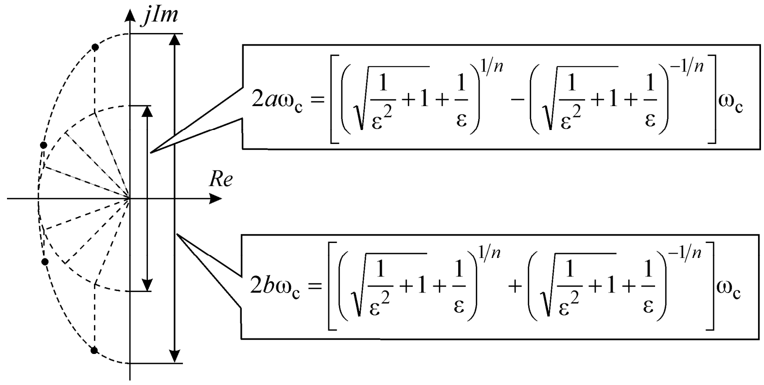

Рис.6.10. Расположение полюсов фильтра Чебышева первого типа ($n = 4$)

Очевидно, что чем уже эллипс, тем ближе располагаются полюсы к мнимой оси и, следовательно, тем более сильное влияние будет оказывать каждый полюс, то есть тем заметнее будут колебания частотной характеристики.

Для определения порядка фильтра Баттерворта, характеристика затухания которого удовлетворяет требованиям, используется формула:

$$n = \frac{\mathrm{Arch}\,[\sqrt{(10^{0.1R_{\text{мин}}}-1)/(10^{0.1R_{\text{макс}}}-1)}]}{\mathrm{Arch}(\omega_з / \omega_п)},$$

где $\mathrm{Arch}x$ – обратный гиперболический косинус (*ареа-косинус*), $R_{\text{мин}}$ и $R_{\text{макс}}$ – затухания в граничных точках $\omega_п$ и $\omega_з$.

6.5.Денормирование и трансформация фильтров.

Проектирование большинства стандартных типов фильтров начинается с определения передаточной функции ФНЧ с нормированной характеристикой. Под нормированным фильтром при этом подразумевается фильтр с частотой среза полосы пропускания $\omega_c = 1$. Далее передаточная функция нормированного фильтра преобразуется в передаточную функцию требуемого фильтра с помощью операций денормирования и трансформации.

Денормирование заключается в переходе от нормированных параметров к истинным. Под *трансформацией* понимают преобразование передаточной функции $H(s)$ нормированного ФНЧ в передаточную функцию фильтра требуемого вида (ФВЧ, ПФ и ЗФ) с заданными значениями граничных частот.

6.6.1.Преобразование ФНЧ – ФНЧ

Преобразование ФНЧ – НЧ осуществляется с помощью операции денормирования. Эту процедуру иначе называют *масштабированием по частоте*. Предположим, что нам необходимо получить ФНЧ с частотой среза ω_c рад/сек. Для этого следует в передаточной функции нормированного ФНЧ заменить оператор s на s/ω_c, то есть

$$H(s) = H_н(s/\omega_с).$$

Пример 1. Передаточная функция нормированного фильтра Баттерворта второго порядка равна:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}\ s + 1}.$$

Найдем передаточную функцию денормированного фильтра, если $\omega_c = 5$ рад/с. Выполнив указанную выше подстановку, будем иметь

$$H(s) = H_н(s/5) = \frac{1}{(s/5)^2 + \sqrt{2}\cdot(s/5) + 1} = \frac{25}{s^2 + 5\sqrt{2}\cdot s + 25}. \qquad (6.4)$$

Амплитудно-частотные характеристики нормированного и денормированного фильтров Баттерворта отличаются только масштабом по оси частот.

6.6.2.Преобразование ФНЧ – ФВЧ

Для того чтобы получить передаточную функцию ФВЧ с заданной частотой среза ω_c, необходимо в передаточной функции нормированного ФНЧ заменить оператор s на ω_c/s:

$$H(s) = H_н(\omega_c/s).$$

Пример 2. Дана передаточная функция нормированного фильтра Баттерворта второго порядка. Требуется определить передаточную функцию ФВЧ, имеющего частоту среза $\omega_c = 5$ рад/с.

Выполнив указанную выше подстановку, получим передаточную функцию ФВЧ:

$$H(s) = H_н(5/s) = \frac{1}{(s/5)^2 + \sqrt{2}\cdot(s/5) + 1} = \frac{s^2}{s^2 + 5\sqrt{2}\cdot s + 25}.$$

Амплитудно-частотные характеристики нормированного ФНЧ и ФВЧ с заданной частотой среза приведены на рис. 6.11.

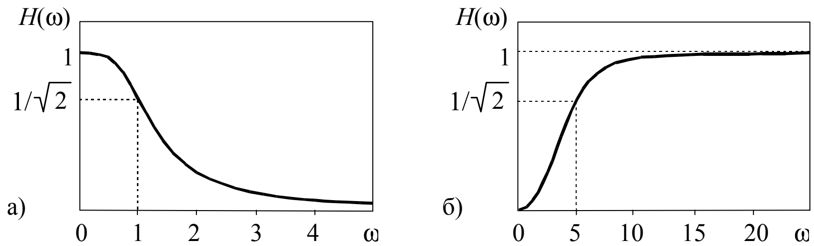

Рис.6.11. АЧХ фильтров Баттерворта:
а – нормированного ФНЧ; *б* – ФВЧ с заданной частотой среза ω_c =5 рад/с

6.6.3.Преобразование ФНЧ – ПФ

Построение полосовых фильтров может осуществляться двумя способами. Первый заключается в составлении их из ФНЧ и ФВЧ, частоты среза которых являются граничными для полосового фильтра. В этом случае благодаря изолированности ФНЧ и ФВЧ возможна независимая перестройка частот среза и изменение полосы пропускания ПФ. Передаточная функция ПФ представляет собой произведение передаточных функций ФНЧ и ФВЧ:

$$H_{пф}(s) = H_{фнч}(s) W_{фвч}(s). \qquad (6.5)$$

Синтез ПФ в данном случае сводится к синтезу ФНЧ и ФВЧ с соответствующими частотами среза и их объединению согласно (6.5).

Второй способ заключается в составлении полосового фильтра из звеньев, имеющих частотные характеристики «резонансного» типа. Передаточная функция ПФ с требуемыми граничными частотами $\omega_{п1}, \omega_{п2}$ находится из передаточной функции нормированного ФНЧ путем замены оператора s оператором $(s^2+\omega_0^2)/Bs$, то есть

$$H(s) = H_н\left(\frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}\right).$$

Здесь $B = \omega_{п2} - \omega_{п1}$ – ширина полосы пропускания;

$\omega_0 = \sqrt{\omega_{п1}\,\omega_{п2}}$ – средняя частота.

На рис. 6.12 показаны АЧХ нормированного ФНЧ Чебышева первого типа и полосового фильтра, полученного при помощи описанного выше преобразования.

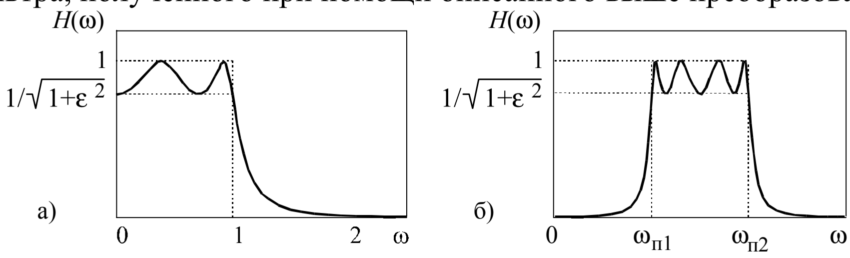

Рис. 6.12. АЧХ фильтров Чебышева первого типа:
а – нормированного ФНЧ; *б* – полосового фильтра с заданными параметрами

6.6.4. Преобразование ФНЧ – ЗФ

Построение заграждающих фильтров может осуществляться двумя способами. Первый заключается в составлении заграждающего фильтра из ФНЧ и ФВЧ, включенных параллельно. Передаточная функция такого заграждающего фильтра представляет собой сумму передаточных функций ФНЧ и ФВЧ:

$$H_{зф}(s) = H_{фнч}(s) + H_{фвч}(s).$$

Синтез ЗФ в данном случае сводится к синтезу ФНЧ и ФВЧ, граничные частоты которых рассчитываются по заданным граничным частотам полосы задерживания.

Второй способ заключается в составлении заграждающего фильтра из звеньев, имеющих частотные характеристики заграждающего типа. Синтез заграждающего фильтра данного типа осуществляется с использованием нормированного ФНЧ. Передаточная функция заграждающего фильтра с требуемыми граничными частотами задерживания $\omega_{з1}, \omega_{з2}$ может быть получена из передаточной функции нормированного ФНЧ путем замены оператора s оператором $Bs/(s^2+\omega_0^2)$, то есть

$$H(s) = W_н\left(\frac{Bs}{s^2+\omega_0^2}\right).$$

Здесь $B = \omega_{з2} - \omega_{з1}$ – ширина полосы пропускания;

$\omega_0 = \sqrt{\omega_{з1}\,\omega_{з2}}$ – средняя частота.

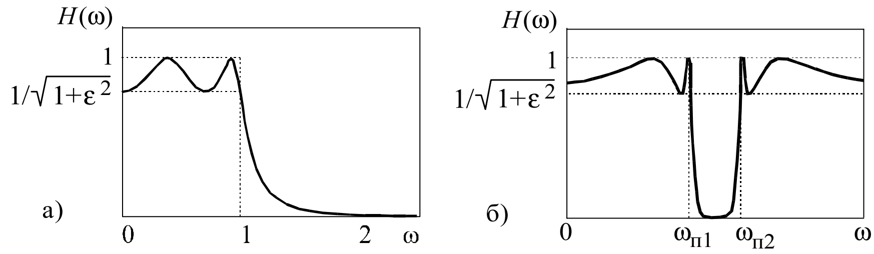

Рис.6.13. АЧХ фильтров Чебышева первого типа: а) нормированного ФНЧ; б) заграждающего фильтра с заданными граничными частотами

6.7. Примеры расчета фильтров

Пример 1.

Исходные данные. Требуется найти передаточную функцию ФНЧ Баттерворта, АЧХ которого удовлетворяет следующим условиям:

$0.8 \le H(\omega) \le 1$ при $0 \le \omega \le \omega_п = 1000$ рад/с;

$H(\omega) \le 0.1$ при $\omega \ge \omega_з = 2000$ рад/с.

Решение. Порядок фильтра может быть рассчитан по формуле (6.3). Имеется и другой вариант расчета. Для определения параметров n, ω_c фильтра Баттерворта составим систему неравенств:

$$\frac{1}{1+(1000/\omega_c)^{2n}} \ge 0.8^2 \ ; \qquad \frac{1}{1+(2000/\omega_c)^{2n}} \le 0.1^2 \ . \tag{6.6}$$

Заменив здесь знаки неравенств на равенства, получим систему из двух нелинейных уравнений:

$$\frac{1}{1+(1000/\omega_c)^{2n}} = 0.64 \ ; \qquad \frac{1}{1+(2000/\omega_c)^{2n}} = 0.01 .$$

Решение системы может быть получено при помощи численных методов. Воспользуемся системой программирования MathCAD. Получим n =3.73, ω_c =1080 рад/с. Очевидно, что порядок фильтра может быть только целым числом. Примем наименьшее его значение, гарантирующее выполнение условий (6.2): n =4. Легко убедиться, что при $n = 4$ условия (6.6) будут выполнены, если значение ω_c лежит в пределах от 1075 до 1133 рад/с. Примем ω_c =1100 рад/с.

Передаточная функция нормированного фильтра Баттерворта при $n = 4$ имеет вид

$$H_н(s) = \frac{1}{(s^2+0.765s+1)(s^2+1.848s+1)} \ . \tag{6.7}$$

Применив к (6.7) операцию денормирования, получим передаточную функцию фильтра:

$$H(s) = H_н\left(\frac{s}{1100}\right) = \frac{1100^4}{(s^2+841.5s+1100^2)(s^2+2032.8s+1100^2)} . \tag{6.8}$$

Значения АЧХ фильтра с передаточной функцией (6.8) на границах интервалов пропускания и задерживания равны: $H(\omega_п) = 0.826$, $H(\omega_з) = 0.091$. Следовательно, в силу монотонности АЧХ удовлетворяет заданным неравенствам.

Пример 2.

Исходные данные. Требуется найти передаточную функцию ФВЧ Баттерворта, АЧХ которого удовлетворяет следующим условиям:

$0 \le H(\omega) \le 0.1$ при $0 \le \omega \le \omega_з = 1000$ рад/с;

$0.8 \le H(\omega) \le 1$ при $\omega \ge \omega_п = 2000$ рад/с.

Решение. Для определения параметров n, ω_c фильтра Баттерворта составим систему неравенств:

$$\frac{1}{1+(\omega_c/1000)^{2n}} \le 0.1^2 \ ; \qquad \frac{1}{1+(\omega_c/2000)^{2n}} \ge 0.8^2 \ . \qquad (6.9)$$

Заменив здесь знаки неравенств на равенства, получим систему из двух нелинейных уравнений:

$$\frac{1}{1+(\omega_c/1000)^{2n}} = 0.01 \ ; \qquad \frac{1}{1+(\omega_c/2000)^{2n}} = 0.64 \, .$$

Решив уравнения с помощью системы программирования MathCAD, получим n =3.73, ω_c =1852 рад/с. Очевидно, что порядок фильтра может быть только целым числом. Примем n =4. Легко убедиться, что при $n = 4$ условия (6.9) будут выполнены, если значение ω_c лежит в пределах от 1756 до 1861 рад/с. Примем ω_c =1800 рад/с.

Передаточная функция нормированного фильтра Баттерворта при $n = 4$ имеет вид

$$H_н(s) = \frac{1}{(s^2+0.765s+1)(s^2+1.848s+1)} \ . \qquad (6.10)$$

Заменив в (6.10) s на $1800/\omega_c$, получим передаточную функцию фильтра:

$$H(s) = H_н\left(\frac{1800}{s}\right) = \frac{s^4}{(s^2+1377s+1800^2)(s^2+3326s+1800^2)} \, . \qquad (6.11)$$

Значения АЧХ фильтра с передаточной функцией (6.11) на границах интервалов задерживания и пропускания равны: $H(\omega_з) = 0.095$; $H(\omega_п) = 0.836$. Следовательно, в силу монотонности АЧХ удовлетворяет заданным неравенствам.

Пример 3.

Исходные данные. Требуется найти передаточную функцию фильтра Чебышева первого рода, АЧХ которого удовлетворяет следующим условиям:

$0.8 \le H(\omega) \le 1$ при $0 \le \omega \le \omega_п = 1000$ рад/с;

$H(\omega) \le 0.1$ при $\omega \ge \omega_з = 2000$ рад/с.

Решение. Находим:

а) неравномерность передачи в полосе пропускания

$$R_{макс} = 20\lg(1/0.8) = 1.938 \ \text{дБ};$$

б) минимальное затухание в полосе задерживания

$$R_{макс} = 20\lg(1/0.1) = 20 \ \text{дБ}.$$

Рассчитаем порядок фильтра по формуле (6.4).

$$n = \frac{\mathrm{Arch}\,[\sqrt{(10^{0.1R_{мин}}-1)/(10^{0.1R_{макс}}-1)}\,]}{\mathrm{Arch}(\omega_з/\omega_п)} = 2.488 \, .$$

Очевидно, что порядок фильтра может быть только целым числом. Поэтому примем n =3.

Нормированные полиномы знаменателя фильтров Чебышева приведены для неравномерности передач в полосе пропускания, равной 0.1; 0.5; 1.0; 2.0 и 3.0 дБ.. Выберем с запасом фильтр, у которого неравномерность равна 1 дБ (меньше 1.938 дБ). При этом $\varepsilon = 0.509$.

Передаточная функция фильтра Чебышева, нормированного относительно частоты $\omega_{п}$ при $n = 3$ и $\varepsilon = 0.509$ имеет вид

$$H_{н}(s) = \frac{0.491}{(s+0.494)(s^2+0.494s+0.994)} \ . \tag{6.12}$$

Применив к (6.12) операцию денормирования, получим передаточную функцию фильтра:

$$H(s) = H_{н}\left(\frac{s}{1000}\right) = \frac{0.491\cdot 1000^3}{(s+494)(s^2+494s+1000^2)} \, . \tag{6.13}$$

Значения АЧХ фильтра с передаточной функцией (6.13) на границах интервалов пропускания и задерживания равны: $H(\omega_{п}) = 0.891$, $H(\omega_{з}) = 0.075$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Приведите пример практической задачи, требующей для своего решения применения частотных фильтров.
2. С какой целью в АЧХ фильтра вводится переходная полоса между полосой пропускания и полосой задерживания?
3. Дайте понятия полосы пропускания, полосы задерживания, граничных частот.
4. В каком виде задаются исходные данные при проектировании базисных фильтров?
5. Какой параметр устанавливает величину неравномерности передачи фильтра Чебышева первого рода в полосе пропускания?
6. Поясните основные отличия АЧХ фильтров Баттерворта и Чебышева первого рода.
7. Поясните отличия в расположении полюсов фильтров Баттерворта и Чебышева первого рода.
8. Как из передаточной функции ФНЧ получить передаточную функцию ФВЧ?
9. Что понимают под денормированием фильтра? Когда и как применяется эта операция?
10. Как осуществляется трансформация ФНЧ в фильтры других типов?