ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. Г. Волков

НАДЕЖНОСТЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОСАБЖЕНИЯ

Учебное пособие

Издательство ТПУ
Томск 2005

УДК 621.311.019.3(075.8)
В 67

Волков Н. Г.
В 67 Надежность функционирования систем электроснабжения. Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – 157 с.

В учебном пособии излагаются основные положения теории надежности систем электроснабжения: математические основы, понятия и определения характеристик надежности, модели описания случайных процессов. Большое внимание уделяется методам расчета надежности схем с использованием средних вероятностей состояний элементов и структурного анализа. Для углубленного изучения теоретического материала во всем разделам приводятся примеры решения задач.

Работа предназначена для студентов специальности 100400 – «Электроснабжение промышленных предприятий».

УДК 621.311.019.3(075.8)

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом Томского политехнического университета.

Рецензенты

Кандидат технических наук, старший научный сотрудник,
ведущий научный сотрудник НИИ АЭМ
В.В. Болотов

Кандидат технических наук, старший научный сотрудник,
начальник ПДБ ТФ ООО «Сибирская геофизическая компания»
Э.С. Астапенко

ВВЕДЕНИЕ

Развитие основных областей науки и техники (автоматика, электроника, телемеханика и связь), определяющих технический прогресс, в настоящее время немыслимо без решения вопросов и расчетов надежности элементов и систем, входящих в комплексные функциональные устройства. Это послужило мощным стимулом развития общей теории надежности, выявлению и определению основных критериев и характеристик надежности, таких как функция надежности и отказа, среднего времени безотказной работы, интенсивности отказа и других.

Развитие теории и инженерных методов расчета надежности в электроэнергетических системах началось позже, чем в указанных областях. Механический перенос положений общей теории надежности на различные звенья электрических систем невозможен. Их необходимо уточнять и адаптировать в силу особенностей систем электроснабжения. К таким особенностям относятся:

а) характер электроснабжения, учитывающий непрерывность и неразрывность процесса производства, передачи и потребления энергии;

б) многоцелевое использование электроэнергии при наличии категорий потребителей с различными требованиями к надежности и качеству электроэнергии;

в) пренебрежимо малая вероятность полного отказа систем, а также полного планового или непланового ремонта их вследствие большого количества источников и потребителей, потенциальной режимной избыточности элементов;

г) сами элементы систем электроснабжения (под ними понимаются виды оборудования, аппараты и части сетей) представляют из себя достаточно сложные системы, состоящие из элементов, характеристики которых по надежности выявлены недостаточно и зависят от конструктивных особенностей, вида и качества материалов, сборки, условий работы и т. п.;

д) трудность получения статистических материалов испытаний, которые практически невозможно воспроизвести в лабораторных и заводских условиях из-за трудностей в создании реальных условий работы и длительности среднего времени безотказной работы исчисляемого годами, в течение которых элементы подвергаются профилактическим ремонтам и испытаниям, учесть влияние которых на характеристики надежности достаточно трудно.

Необходимо также иметь в виду, что взаимодействие между системой электроснабжения и внешней средой носит стохастический (вероятностный) характер и можно говорить лишь о некоторой вероятности достижения цели – передачи энергии потребителю в требуемом количестве в пределах допустимых показателей ее качества (напряжения, частоты и др.).

Надежность системы электроснабжения сама является одним из показателей качества системы. Но этот показатель существенным образом отличается, например, от показателей качества системы по энергии, так как если система не обладает необходимой степенью надежности, то все остальные показатели качества теряют свое практическое значение, поскольку они не могут быть полноценно использованы в эксплуатации.

В качестве количественного показателя эффективности функционирования системы электроснабжения принимают отношение реального выходного эффекта к идеальному, т. е. отношение математического ожидания отпущенной потребителю электроэнергии в реальной системе к математическому ожиданию энергии в идеальной по показателям функционирования системе. Количественная оценка эффективности функционирования является одним из конечных результатов всех расчетов надежности систем электроснабжения. Очевидно, что количественная оценка эффективности системы должна базироваться на количественных показателях ее надежности.

В настоящей работе кратко излагается основополагающий материал по расчету надежности систем электроснабжения с использованием математического аппарата теории вероятности. Пособие не претендует на полноту освещения всех вопросов, возникающих при решении задач надежности. Но структура пособия и материал излагаются в таком порядке и объеме, чтобы читатель мог ознакомиться с основами методов расчета и решения задач надежности без привлечения большого числа известных литературных источников.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В данном разделе приводятся краткие, но достаточные для последующего понимания материала сведения из теории вероятностей, которые более обстоятельно можно изучить по [1, 2].

1.1. Основные понятия

1.1.1. Событие. Вероятность события

Любая наука содержит ряд основных понятий, на которых она базируется. Это в полной мере относится и к теории вероятностей. Рассмотрим их.

Под «***событием***» в теории вероятностей (ТВ) понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Каждое из событий обладает той или иной степенью возможности: одни – большей, другие – меньшей. Чтобы количественно сравнивать между собой события по степени их возможности, очевидно, нужно с каждым событием связать определенное ***число***, которое тем больше, чем более возможно событие. Такое число назовем ***вероятностью события***. Таким образом, вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события. Понятие вероятности события в самой своей основе связано с опытным, практическим понятием ***частоты*** события.

Сравнивая между собой различные события по степени их возможности, необходимо установить какую-то единицу измерения. В качестве такой единицы измерения естественно принять ***вероятность достоверного события***, т. е. такого события, которое в результате опыта непременно должно произойти.

П р и м е р достоверного события – нагрузка (ток) нормально работающей системы электроснабжения обязательно будет больше нуля и это является событием достоверным.

Если приписать достоверному событию вероятность, равную единице, то все другие события – возможные, но не достоверные – будут характеризоваться вероятностями, меньшими единицы, составляющими долю единицы.

Противоположностью по отношению к достоверному событию является ***невозможное событие***, т. е. такое событие, которое в данном опыте не может произойти.

П р и м е р невозможного события – нагрузка нормально работающей системы электроснабжения не может быть больше суммы нагрузок, присоединенных к системе потребителей. Естественно, невозможному событию приписать вероятность, равную нулю.

1.1.2. Вспомогательные понятия

1. Полная группа событий.

Несколько событий в данном опыте образуют ***полную группу событий***, если в результате опыта непременно должно появиться хотя бы одно из них.

2. Несовместные события.

Несколько событий называются ***несовместными*** в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

3. Равновозможные события.

Несколько событий в данном опыте называются ***равновозможными***, если по условиям симметрии есть основания считать, что ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другие.

1.1.3. Частота, или статистическая вероятность, события

Если произведена серия из n опытов, в каждом из которых могло появиться или не появиться некоторое событие A, то ***частотой события A*** в данной серии опытов называется отношение числа опытов, в которых появилось событие A, к общему числу произведенных опытов.

Частоту событий иногда называют его статистической вероятностью. Если обозначить ее знаком $\overset{*}{P}(A)$, то частота события вычисляется на основании результатов опыта по формуле

$$\overset{*}{P}(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число появлений события A; n – общее число произведенных опытов.

Частота события всегда правильная дробь и изменяется в пределах $0 \le \overset{*}{P}(A) \le 1$.

При небольшом числе опытов частота события носит в значительной мере случайный характер и может заметно изменяться от одной группы опытов к другой. При увеличении числа опытов частота события все более теряет свой случайный характер, проявляет тенденцию стабилизироваться, приближаясь с незначительными колебаниями к некоторой средней, постоянной величине – ***его вероятности***.

Это свойство «***устойчивости частот***» есть одна из наиболее характерных закономерностей, наблюдаемых в случайных явлениях. Математическую формулировку этой закономерности впервые дал Я. Бернулли в своей теореме, которая представляет собой простейшую форму закона больших чисел.

Связь между частотой события и его вероятностью – глубокая, органическая. Эти два понятия, по существу, неразделимы. Численная оценка степени возможности события посредством вероятности имеет практический смысл именно потому, что более вероятные события происходят в среднем чаще, чем менее вероятные.

1.1.4. Случайная величина

Одним из важнейших основных понятий теории вероятностей является понятие о случайной величине.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

П р и м е р ы случайных величин:

- количество отказов системы электроснабжения за определенный промежуток времени;
- время отыскания повреждения и ремонта вышедшего из строя кабеля.

Случайные величины, принимающие только отделенные друг от друга значения, которые можно заранее перечислить, называются ***дискретными случайными величинами*** (первый пример).

Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток, называются ***непрерывными случайными величинами*** (второй пример).

Если «классическая» теория вероятностей оперировала по преимуществу с событиями, то современная теория вероятностей предпочитает, где только возможно, оперировать со случайными величинами. Случайная величина в отличие от случайного события несет более полную информацию о явлении. ***Например***, результаты измерения тока на участке электрической сети будут величины случайные, но эти результаты измерений показывают не только наличие события – протекание тока в сети, но и его значения.

1.1.5. Практически невозможные и практически достоверные события

На практике обычно приходится иметь дело не с невозможными и достоверными событиями, а с так называемыми «практически невозможными»
и «практическими достоверными» событиями.

Практически невозможным событием называется событие, вероятность которого не в точности равна нулю, но весьма близка к нулю.

Практически достоверным событием называется событие, вероятность которого не в точности равна единице, но весьма близка к единице.

Вопрос о том, насколько мала должна быть вероятность события, чтобы его можно было считать практически невозможным, выходит за рамки математической теории и в каждом определенном случае решается из практических соображений в соответствии с той важностью, которую имеет для нас желаемый результат опыта.

1.2. Основные теоремы

1.2.1. Назначение основных теорем

На практике обычно требуется определять вероятности событий, непосредственное экспериментальное воспроизведение которых затруднено. Такая оценка производится для того, чтобы выявить наиболее рациональные конструктивные параметры элементов проектируемой, перспективной техники.

Поэтому, как правило, для определения вероятностей событий применяются не непосредственные прямые методы, а косвенные, позволяющие по известным вероятностям одних событий определять вероятности других событий, связанных с ними. Теория вероятностей, в основном, и представляет собой систему таких косвенных методов, пользование которыми позволяет свести необходимый эксперимент к минимуму.

Применяя эти косвенные методы, мы всегда в той или иной форме пользуемся ***основными теоремами*** теории вероятностей. Этих теорем две: ***теорема сложения вероятностей*** и ***теорема умножения вероятностей***.

Перед тем как формулировать основные теоремы, введем вспомогательные понятия о ***сумме событий*** и ***произведении событий***.

Суммой двух событий A и B называется событие C, состоящее в выполнении события A или события B, или обоих вместе.

П р и м е р. К трансформатору подведено два питающих кабеля. На трансформаторе будет напряжение (событие *C*), если включить первый кабель (событие *A*) или включить второй кабель (событие *B*), или оба вместе.

Если события *A* и *B* несовместны, то появление обоих этих событий вместе отпадает, и сумма событий *A* и *B* сводится к появлению или события *A*, или события *B*.

Другими словами, ***суммой двух событий*** *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в появлении хотя бы одного из событий *A* и *B*.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в совместном выполнении события *A* и события *B*.

П р и м е р. Генератор выдает номинальное напряжение $U_н$ (событие *C*), если он вращается с номинальной скоростью $n_н$ (событие *A*) и возбуждается номинальным потоком $Ф_н$ (событие *B*).

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

При пользовании понятиями суммы и произведения событий часто оказывается полезной наглядная геометрическая интерпретация этих понятий, которая приведена на рис. 1.1.

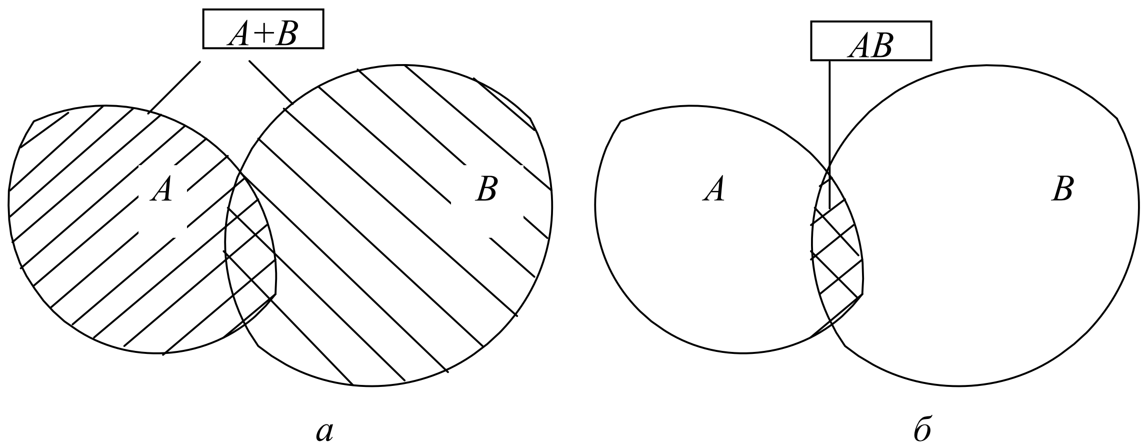


Рис. 1.1. Сумма двух событий (*а*); произведение двух событий (*б*)

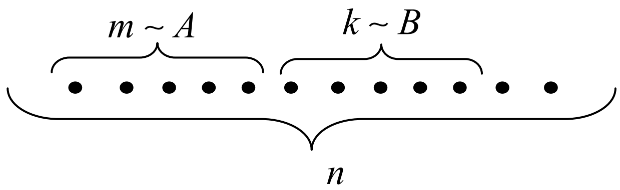
1.2.2. Теорема сложения вероятностей

Теорема сложения вероятностей формулируется следующим образом.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{1.1}$$

Пусть возможные исходы опыта сводятся к совокупности случаев, которые для наглядности изобразим в виде n точек:



Предположим, что из этих случаев m благоприятны событию A, а k – событию B. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n};\ P(B) = \frac{k}{n}.$$

Так как события A и B несовместны, то нет таких случаев, которые благоприятны и A и B вместе. Следовательно, событию $A + B$ благоприятны $m + k$ случаев и

$$P(A + B) = \frac{m + к}{n}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (1.1), получим тождество. Теорема доказана.

Обобщим теорему сложения на случай трех событий. Обозначая событие $A + B$ буквой Д и присоединяя к сумме еще одно событие C, легко доказать, что

$$P(A{+}B{+}C) = P(Д{+}C) = P(Д){+}P(C) = P(A{+}B){+}P(C) = P(A){+}P(B){+}P(C).$$

Методом полной индукции можно обобщить теорему сложения на произвольное число несовместных событий n.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Она в общем виде записывается в виде

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (1.2)$$

Следствия, вытекающие из теоремы сложения вероятностей.

Следствие* 1. *Если события A_1, A_2, … A_n образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Перед тем, как записать второе следствие теоремы сложения, определим понятие о «противоположных событиях».

Противоположными событиями называются два несовместных события, образующих полную группу.

Событие, противоположное событию A, принято обозначать $\overline{A}$.

Следствие* 2. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Это следствие есть частный случай следствия 1. Оно выделено особо ввиду его большой важности в практическом применении теории вероятностей. На практике часто оказывается легче вычислить вероятность противоположного события, чем вероятность прямого события A. В этих случаях вычисляют $P(\overline{A})$ и находят $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Как указывалось выше, теорема сложения вероятностей (формула (1.1)) справедлива только для несовместных событий. В случае, когда события A и B совместны, вероятность суммы этих событий выражается формулой

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1.3)$$

В справедливости этой формулы можно убедиться, рассматривая рис. 1.2.

Аналогично вероятность суммы трех совместных событий вычисляется по формуле

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Справедливость этой формулы также наглядно следует из геометрической интерпретации (рис. 1.3).

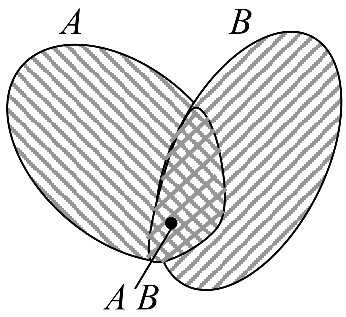


Рис. 1.2. Сумма двух совместных событий

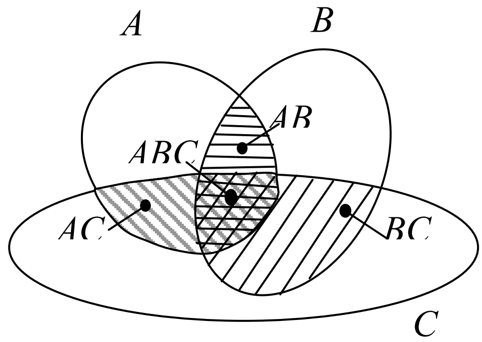


Рис. 1.3. Сумма трех совместных событий

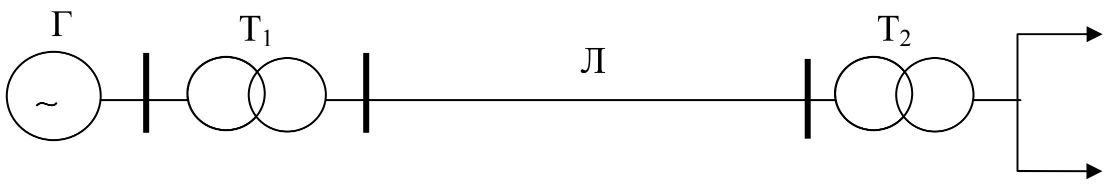
Методом полной индукции доказывается общая формула для вероятности суммы любого числа совместных событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \\ + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_к) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n), \tag{1.4}$$

где суммы распространяются на различные сочетания значения индексов i; i, j; i, j, k и т. д.

Формула (1.4) выражает вероятность суммы любого числа событий через вероятности произведений этих событий, взятых по одному, по два, по три и т. д.

П р и м е р. На рисунке приведена система электроснабжения, состоящая из источника питания Г, повышающего трансформатора $Т_1$, линии электропередач Л и понижающего трансформатора $Т_2$



Обозначим вероятность отказа элементов системы электроснабжения через q с соответствующим индексом.

Определить в общем виде вероятность отказа системы электроснабжения.

Р е ш е н и е. Каждый элемент системы может отказать независимо от другого. Следовательно, события отказов элементов системы электроснабжения – события независимые. Но эти события, в свою очередь, и совместны, так как отказ сразу нескольких элементов может иметь место. Система откажет, если откажет Г или $Т_1$, или Л, или $Т_2$, или Г и $Т_1$, или Г и Л, или $Т_1$,Л и $Т_2$ и т. д.

Используя формулу (1.4), вероятность отказа системы электроснабжения запишется как

$$q_С = q_Г + q_{Т1} + q_Л + q_{Т2} - q_Г\, q_{Т1} - q_Г\, q_Л - q_Г\, q_{Т2} - q_{Т1}\, q_Л - q_{Т1}\, q_{Т2} - q_Л\, q_{Т2} +$$
$$+ q_Г\, q_{Т1}\, q_Л + q_Г\, q_Л\, q_{Т2} + q_{Т1}\, q_Л\, q_{Т2} + q_Г\, q_{Т1}\, q_{Т2} - q_Г\, q_{Т1}\, q_Л\, q_{Т2}.$$

Аналогичные формулы можно написать для произведения событий. Действительно, из рис. 1.2 ясно, что

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A + B). \tag{1.5}$$

Из рис. 1.3 также видно, что

$$P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A+B) -$$
$$- P(A+C) - P(B+C) + P(A+B+C). \tag{1.6}$$

Общая формула, выражающая вероятность произведения произвольного числа событий через вероятности сумм этих событий, взятых по одному, по два, по три и т. д., имеет вид

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i + A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i + A_j + A_к) +$$
$$+ \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n). \tag{1.7}$$

Формулы (1.4) и (1.7) находят практическое применение при преобразовании различных выражений, содержащих вероятности сумм и произведений событий. В зависимости от конкретной задачи иногда бывает удобней пользоваться только суммами, а иногда только произведениями событий. Для преобразования одних в другие и служат приведенные формулы.

П р и м е р. Устройство состоит из трех приборов: двух приборов первого типа – $А_1$ и $А_2$ и одного прибора типа В. Приборы $А_1$ и $А_2$ дублируют друг друга: при отказе одного из них происходит автоматическое переключение на второй. Прибор В не дублирован. Чтобы устройство отказало, нужно, чтобы одновременно отказали оба прибора $А_1$ и $А_2$ или же прибор В. Таким образом, отказ устройства – событие C представляется в виде

$$C = A_1 A_2 + B,$$

где A_1 – отказ прибора А$_1$; A_2 – отказ прибора А$_2$; B – отказ прибора В.

Требуется выразить вероятность события C через вероятности событий, содержащих только суммы, а не произведения элементарных событий A_1, A_2 и B.

Р е ш е н и е. По формуле (1.3) имеем

$$P(C) = P(A_1A_2) + P(B) - P(A_1A_2B). \qquad (1.8)$$

По формуле (1.5) имеем

$$P(A_1A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1+A_2).$$

По формуле (1.6) получим

$$P(A_1A_2B) = P(A_1) + P(A_2) + P(B) - P(A_1+A_2) - P(A_1+B) - P(A_2+B) + P(A_1+A_2+B).$$

Подставляя полученные выражения в (1.8) и производя сокращения, получаем

$$P(C) = P(A_1+B) + P(A_2+B) - P(A_1+A_2+B).$$

1.2.3. Теорема умножения вероятностей

Прежде, чем начать излагать теорему умножения вероятностей, введем еще одно понятие: понятие о независимых и зависимых событиях.

Событие А называется независимым от события В, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие А называется зависимым от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

П р и м е р ы.

1. Опыт состоит в бросании двух монет и рассматриваются события:

A – появление герба на первой монете,

B – появление герба на второй монете.

В данном случае вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Следовательно, событие A независимо от события B.

2. В урне два белых шара и один черный. Два лица вынимают из урны по одному шару. Рассматриваются события:

A – появление белого шара у первого лица,

B – появление белого шара у второго лица.

Вероятность события A, если опыт начинает первое лицо, будет равна $\frac{2}{3}$. Если опыт начинает второе лицо, в результате которого произошло событие B, то вероятность события A становится равной $\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что событие A ***зависит*** от события B.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место другое событие B, называется ***условной вероятностью события*** A и обозначается

$$P(A/B).$$

Для условий последнего примера

$$P(A) = \frac{2}{3}; \quad P(A/B) = \frac{1}{2}.$$

Условия независимости события A от события B можно записать в виде

$$P(A/B) = P(A),$$

а условие зависимости – в виде:

$$P(A) \neq P(A/B).$$

Теперь сформулируем теорему умножения вероятностей.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB) = P(A)P(B/A). \tag{1.9}$$

При применении теоремы умножения безразлично, какое из событий A и B считать первым, а какое вторым, и теорему умножения можно записать и в таком виде

$$P(AB) = P(B)P(A/B).$$

С л е д с т в и е* 1. *Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A.

В самом деле, пусть дано, что событие A не зависит от B, т. е.

$$P(A) = P(A/B). \tag{1.10}$$

Требуется доказать, что и событие B не зависит от A, т. е.

$$P(B) = P(B/A).$$

Напишем теорему умножения вероятностей в двух формах:

$$P(AB) = P(A)P(B/A);$$
$$P(AB) = P(B)P(A/B),$$

откуда

$$P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B),$$

или, согласно условию (1.10)

$$P(A)P(B/A) = P(B)P(A),$$

из последнего выражения следует, что

$$P(B/A) = P(B),$$

что и требовалось доказать.

Из следствия 1 следует, что зависимость или независимость событий всегда ***взаимны***. Поэтому можно дать новое определение независимых событий.

Два события называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Понятие независимости событий может быть распространено на любое число событий. Несколько событий называются независимыми, если любое из них не зависит от любой совокупности остальных.

Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Это следствие вытекает из определения независимых событий.

Теорема умножения вероятностей может быть обобщена на случай произвольного числа событий. В общем виде она формулируется так.

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 A_2) \ldots P(A_n / A_1 A_2 \cdots A_{n-1}). \quad (1.11)$$

Для независимых событий теорема упрощается и принимает вид

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n), \quad (1.12)$$

т. е. вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Применяя знак произведения, теорему можно записать в виде

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \quad (1.13)$$

П р и м е р. Имеем распределительный пункт (РП) с четырьмя отходящими линиями к потребителям (П). Потребители имеют номинальную нагрузку: $П_1$ – 20 кВт; $П_2$ – 30 кВт; $П_3$ – 20 кВт; $П_4$ – 30 кВт. Вероятность включенного состояния потребителей соответственно равна P_1 – 0,3; P_2 – 0,4; P_3 – 0,2; P_4 – 0,8.

Определить вероятность того, что питающий РП кабель будет загружен на 100 %.

Р е ш е н и е. События включения потребителей – события независимые. Поэтому для решения задачи используем формулу (1.13). Обозначим через A событие полной загрузки питающего РП кабеля. Тогда

$$P(A) = P_1P_2P_3P_4 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}192.$$

Из примера видно, что хотя вероятности работы каждого потребителя в отдельности достаточно велики, вероятность же одновременной работы всех четырех потребителей ***на порядок*** ниже. Это обстоятельство следует учитывать при выборе кабелей и электрооборудования.

На практике сравнительно редко встречаются задачи, в которых нужно применять только теорему сложения или только теорему умножения вероятностей. Обычно обе теоремы приходится применять совместно. При этом чаще всего событие, вероятность которого требуется определить, представляется в виде суммы нескольких несовместных событий (вариантов данного события), каждое из которых в свою очередь является произведением событий.

П р и м е р. Экскаватор производит вскрытие кабельной траншеи. При этом он три раза ковшом зацепил кабель. Вероятность повреждения кабеля при первом зацеплении $P_1 = 0{,}4$; при втором – $P_2 = 0{,}5$; при третьем – $P_3 = 0{,}7$.

Найти вероятность того, что в результате этих трех зацеплений кабель будет поврежден:

а) ровно один раз;

б) хотя бы один раз.

Р е ш е н и е. Рассмотрим событие A – ровно одно повреждение. Это событие может осуществиться несколькими способами, т. е. распадается на несколько несовместных вариантов: может быть повреждение при первом зацеплении, а второе и третье зацепление обошлось без повреждений; или может быть повреждение при втором зацеплении, а первое и третье зацепление не привело к повреждению; или, наконец, может быть повреждение при третьем зацеплении, а при первом и втором зацеплениях обошлось без повреждений. Следовательно,

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

где A_1, A_2, A_3 – повреждения при первом, втором и третьем зацеплениях; $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ – противоположные события.

Применяя теоремы сложения и умножения вероятностей и пользуясь свойством противоположных событий, находим:

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36.$$

Рассмотрим событие B – хотя бы одно повреждение кабеля. Пользуясь тем же приемом, который был применен выше, и теми же обозначениями, можно представить событие B в виде суммы несовместных вариантов:

$$B = A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Далее необходимо найти вероятность каждого варианта по теореме умножения и все эти вероятности сложить. Но такой путь решения задачи достаточно трудоемкий. Здесь целесообразно от прямого события B перейти к противоположному:

$\overline{B}$ – ни одного повреждения кабеля.

Очевидно,

$$\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

По теореме умножения

$$P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09,$$

и

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91.$$

На последнем примере проиллюстрирован принцип целесообразности применения противоположных событий в теории вероятностей. Его можно сформулировать следующим образом.

Если противоположное событие распадается на меньшее число вариантов, чем прямое событие, то имеет смысл при вычислении вероятностей переходить к противоположному событию.

1.2.4. Формула полной вероятности

Формула полной вероятности является следствием обеих основных теорем – теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей.

Пусть требуется определить вероятность некоторого события A, которое может произойти вместе с одним из событий:

$$H_1, H_2, \dots, H_n,$$

образующих полную группу несовместных событий. Будем эти события называть ***гипотезами***.

Так как гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу, то событие A может появиться только в комбинации с какой-либо из этих гипотез:

$$A = H_1A + H_2A + \dots + H_nA.$$

Так как гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ несовместны, то и комбинации $H_1A + +H_2A + \dots + H_nA$ также несовместны. Применяя к ним теорему сложения вероятностей, получаем:

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots + P(H_nA) = \sum_{i=1}^{n} P(H_1A).$$

Применяя к событию H_iA теорему умножения, получим:

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + \dots + P(H_n)P(A \mid H_n)$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i). \tag{1.14}$$

Полученная формула (1.14) и есть ***формула полной вероятности***.

Пример. Вдоль линии электропередач (ЛЭП) происходит три грозовых разряда. Вероятность попадания в ЛЭП первого грозового разряда равна 0,4; второго – 0,5; третьего – 0,7. ЛЭП выходит из строя при одном попадании молнии с вероятностью 0,2; при двух попаданиях с вероятностью 0,6 и при трех попаданиях с вероятностью 1,0.

Найти вероятность того, что в результате грозовых разрядов ЛЭП вышла из строя.

Решение. Рассмотрим четыре гипотезы:

H_0 – в ЛЭП не попало ни одного грозового разряда;
H_1 – в ЛЭП попал один разряд молнии;
H_2 – в ЛЭП попало два разряда молнии;
H_3 – в ЛЭП попало три разряда молнии.

Очевидно, что эти гипотезы имеют место при следующих сочетаниях событий, образующих несколько несовместных вариантов:

$$H_0 = \overline{B}_1 \overline{B}_2 \overline{B}_3;$$
$$H_1 = B_1 \overline{B}_2 \overline{B}_3 + \overline{B}_1 B_2 \overline{B}_3 + \overline{B}_1 \overline{B}_2 B_3;$$
$$H_2 = \overline{B}_1 B_2 B_3 + B_1 \overline{B}_2 B_3 + B_1 B_2 \overline{B}_3;$$
$$H_3 = B_1 B_2 B_3,$$

где B_1, B_2, B_3 – попадание молнии в ЛЭП при первом, втором и третьем грозовом разряде, соответственно.

Пользуясь теоремами сложения, умножения и свойством противоположных событий, находим вероятности этих гипотез.

$P(H_0) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09;$

$P(H_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + \ = 0{,}36;$

$P(H_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + \ = 0{,}41;$

$P(H_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14.$

Условные вероятности события A (выход из строя ЛЭП) при этих гипотезах равны:

$$P(A/H_0) = 0; \quad P(A/H_1) = 0{,}2; \quad P(A/H_2) = 0{,}6; \quad P(A/H_3) = 1{,}0.$$

Применяя формулу полной вероятности, получаем:

$$P(A) = P(H_0)P(A/H_0) + P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= 0{,}09 \cdot 0 + 0{,}36 \cdot 0{,}2 + 0{,}41 \cdot 0{,}6 + 0{,}14 \cdot 1{,}0 = 0{,}458.$$

Из результатов расчета видно, что первую гипотезу H_0 можно было бы не рассматривать, так как соответствующий член в формуле полной вероятности обращается в нуль. Так обычно и поступают при применении формулы полной вероятности, рассматривая не полную группу несовместных гипотез, а только те из них, при которых данное событие возможно.

1.2.5. Теорема гипотез (формула Бейеса)

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является так называемая ***теорема гипотез*** или формула Бейеса.

Поставим задачу.

Имеется полная группа несовместных гипотез H_1, H_2, …, H_n. Вероятности этих гипотез до опыта известны и равны, соответственно, $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$. Произведен опыт, в результате которого имело место событие A. Спрашивается, как следует изменить вероятности гипотез в связи с появлением этого события?

Речь идет о том, чтобы найти условную вероятность $P(H_i/A)$ для каждой гипотезы.

Из теоремы умножения имеем

$$P(AH_i) = P(A)P(H_i / A) = P(H_i)P(A/H_i),$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Из последнего уравнения, отбрасывая левую часть, находим

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Выражая $P(A)$ с помощью формулы полной вероятности (1.14), имеем

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}. \qquad (1.15)$$

Формула (1.15) и носит название ***формулы Бейеса*** или ***теоремы гипотез***.

П р и м е р. Кабель, питающий трансформаторную подстанцию, работает в двух режимах:

а) номинальном;

б) с перегрузкой.

Первый режим работы составляет 80 % времени эксплуатации, а второй – 20 %. Вероятность выхода кабеля из строя в течение времени t в номинальном режиме равна 0,1; во втором – 0,7.

Н а й т и:

1. Вероятность выхода кабеля из строя в течение времени t.
2. Кабель вышел из строя. Какова вероятность того, что он вышел из строя, работая в первом режиме?

Р е ш е н и е. Возможны две гипотезы:

H_1 – работа кабеля в номинальном режиме;

H_2 – работа кабеля в режиме перегрузки.

Вероятности этих гипотез до опыта:

$$P(H_1) = 0{,}8; \quad P(H_2) = 0{,}2.$$

Вероятность события A (выход кабеля из строя) при этих гипотезах равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}1; \quad P(A/H_2) = 0{,}7.$$

Используя формулу полной вероятности (1.14), определяем вероятность выхода кабеля из строя в течение времени t :

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}22.$$

Вероятность того, что кабель вышел из строя, работая в первом режиме, определим по формуле Бейеса (1.15):

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} = \frac{0{,}8\cdot 0{,}1}{0{,}22} = 0{,}364.$$

1.3. Случайные величины и законы их распределения

1.3.1. Ряд распределения. Многоугольник распределения

Ранее уже было введено важное понятие ***случайной величины***. Ниже приводится дальнейшее развитие этого понятия и указываются способы, с помощью которых случайные величины могут быть описаны и характеризованы.

Условимся случайные величины обозначать большими буквами X, Y, Z и т. д., а их возможные значения – соответствующими малыми буквами x, y, z и т. д.

Рассмотрим дискретную случайную величину X с возможными значениями x_1, x_2, …, x_n. Каждое из этих значений возможно, но не достоверно, и величина X может принять каждое из них с некоторой вероятностью. В результате опыта величина X примет одно из этих значений полной группы несовместных событий:

$$\left.\begin{aligned} &X = x_1,\\ &X = x_2,\\ &\dots\dots\dots\\ &X = x_n. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Обозначим вероятности этих событий буквами P с соответствующими индексами:

$$P(X = x_1) = P_1; \quad P(X = x_2) = P_2; \quad \dots; \quad P(X = x_n) = P_n.$$

Так как несовместные события (1.16) образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1,$$

т. е. сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице. Эта суммарная вероятность каким-то образом ***распределена*** между отдельными значениями. Случайная величина будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если мы зададим это распределение, т. е. в точности укажем, какой вероятностью обладает каждое из событий (формула (1.16)). Этим мы установим так называемый ***закон распределения*** случайной величины.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Простейшей формой задания закона распределения является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
P_i	P_1	P_2	…	P_n

Такую таблицу принято называть ***рядом распределения*** случайной величины *X*. Для придания ряду распределения более наглядного вида часто прибегают к его графическому изображению. По оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат – вероятности этих значений. Полученные точки соединяются отрезками прямых. Такая фигура называется ***многоугольником распределения*** (рис. 1.4). Многоугольник распределения, так же как и ряд распределения, полностью характеризует случайную величину. Он является одной из ***форм закона распределения***.

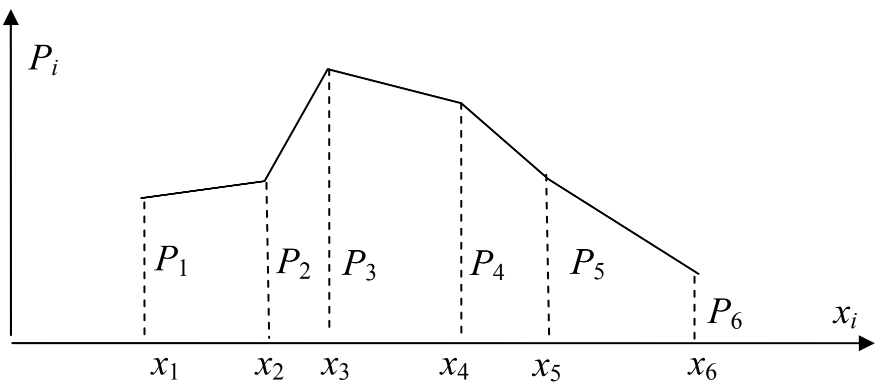


Рис. 1.4. Многоугольник распределения

1.3.2. Функция распределения

Для непрерывной случайной величины не существует ряда распределения в том смысле, в каком он существует для дискретной величины. Однако различные области возможных значений случайной величины все же не являются одинаково вероятными, и для непрерывной величины существует «***распределение вероятностей***», хотя и не в таком смысле, как для дискретной.

Для количественной характеристики этого распределения вероятностей удобно пользоваться не вероятностью события $X = x$, а вероятностью события $X < x$, где x – некоторая текущая переменная. Вероятность этого события, очевидно, зависит от x, ***есть некоторая функция от*** x. Эта функция называется ***функцией распределения*** случайной величины X и обозначается $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x). \tag{1.17}$$

Функцию распределения $F(x)$ иногда называют также ***интегральной функцией распределения*** или ***интегральным законом распределения***.

Функция распределения – самая универсальная характеристика случайной величины. Она существует как для дискретных случайных величин, так и для непрерывных. Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения, т. е. является одной из форм закона распределения.

Свойства функции распределения:

- Функция распределения $F(x)$ есть неубывающая функция своего аргумента, т. е. при $x_2 > x_1$ $F(x_2) \geq F(x_1)$.
- На минус бесконечности функция распределения равна нулю, т. е. $F(-\infty) = 0$.
- На плюс бесконечности функция распределения равна единице, т. е. $F(+\infty) = 1$.

График функции распределения $F(x)$ в общем случае представляет собой график неубывающей функции, значения которой начинаются от 0 и доходят до 1, причем в отдельных точках функция может иметь скачки.

Знаая ряд распределения дискретной случайной величины, легко построить ее функцию распределения. Действительно,

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{xi < x} P(X = x_i),$$

где неравенство $x_i < x$ под знаком суммы, указывает, что суммирование распространяется на все те значения x_i, которые меньше x.

Функция распределения любой дискретной случайной величины всегда есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений (рис. 1.5 *а*). Сумма всех скачков функции $F(x)$ равна единице.

По мере увеличения числа возможных значений случайной величины и уменьшения интервалов между ними число скачков становится больше, а сами скачки – меньше; ступенчатая кривая становится более плавной (рис. 1.5 *б*). Случайная величина постепенно приближается к непрерывной, а ее функция распределения – к непрерывной функции (рис. 1.5 *в*).

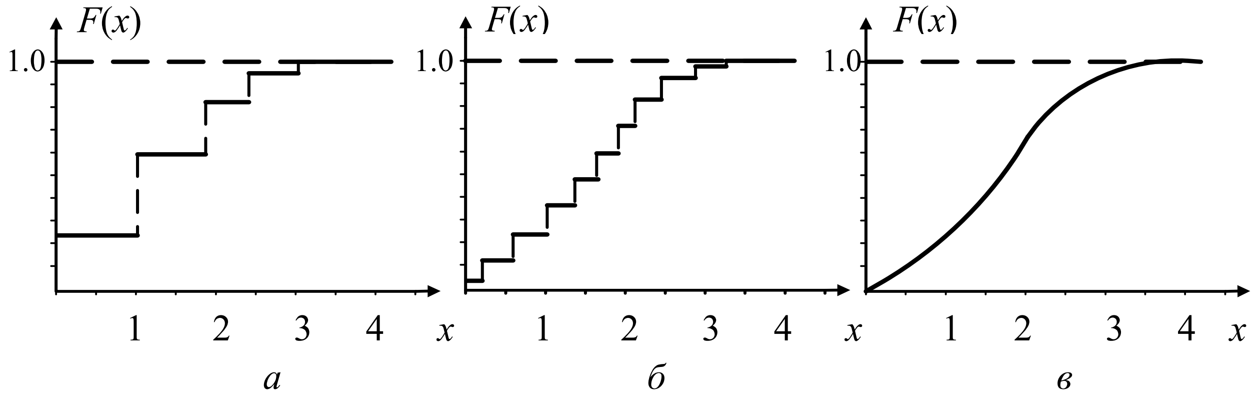


Рис. 1.5. Функции распределения случайных величин

1.3.3. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок

На практике часто оказывается необходимым вычислять вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в некоторых пределах, например от α до β. Это событие будем называть «попаданием случайной величины X на участок от α до β».

Условимся для определенности левый конец α включать в участок (α, β), а правый – не включать. Тогда попадание случайной величины X на участок (α, β) равносильно выполнению неравенства

$$\alpha \le X < \beta.$$

Выразим вероятность этого события через функцию распределения величины X. Для этого рассмотрим три события:

событие A, состоящее в том, что $X < \beta$;

событие B, состоящее в том, что $X < \alpha$;

событие C, состоящее в том, что $\alpha \le X < \beta$.

Учитывая, что $A = B + C$, по теореме сложения вероятностей имеем

$$P(X < \beta) = P(X < \alpha) + P(\alpha \le X < \beta),$$

или

$$F(\beta) = F(\alpha) + P(\alpha \le X < \beta),$$

откуда

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \tag{1.18}$$

т. е. ***вероятность попадания случайной величины на заданный участок равна приращению функции распределения на этом участке***.

Будем неограниченно уменьшать участок (α, β), полагая, что $\beta \to \alpha$. В пределе вместо вероятности попадания на участок получим вероятность того, что величина примет отдельно взятое значение α:

$$P(X = \alpha) = \lim_{\beta \to \alpha} P(\alpha \le X < \beta) = \lim_{\beta \to \alpha} \left[F(\beta) - F(\alpha)\right]. \tag{1.19}$$

Значение этого предела зависит от того, непрерывна ли функция $F(x)$ в точке $x = \alpha$ или же терпит разрыв. Если в точке α функция $F(x)$ имеет разрыв, то предел (1.18) равен значению скачка функции $F(x)$ в точке α. Если же функция $F(x)$ в точке α непрерывна, то этот предел ***равен нулю***. Отсюда можно сформулировать следующее положение:

Вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю. Другими словами, при непрерывном распределении вероятностей вероятность попадания на сколь угодно малый участок может быть отлична от нуля, тогда как вероятность попадания в ***строго определенную точку в точности*** равна нулю.

Из того, что событие $X = \alpha$ имеет вероятность, равную нулю, вовсе не следует, что это событие не будет появляться, т. е. что частота этого события равна нулю. Известно, что частота события при большом числе опытов не равна, а только приближается к вероятности. Из того, что вероятность события $X = \alpha$ равна нулю, следует только, что при неограниченном повторении опыта это событие будет появляться сколь угодно редко.

1.3.4. Плотность распределения

Пусть имеется непрерывная случайная величина X с функцией распределения $F(x)$ (рис. 1.6), которую предположим непрерывной и дифференцируемой.

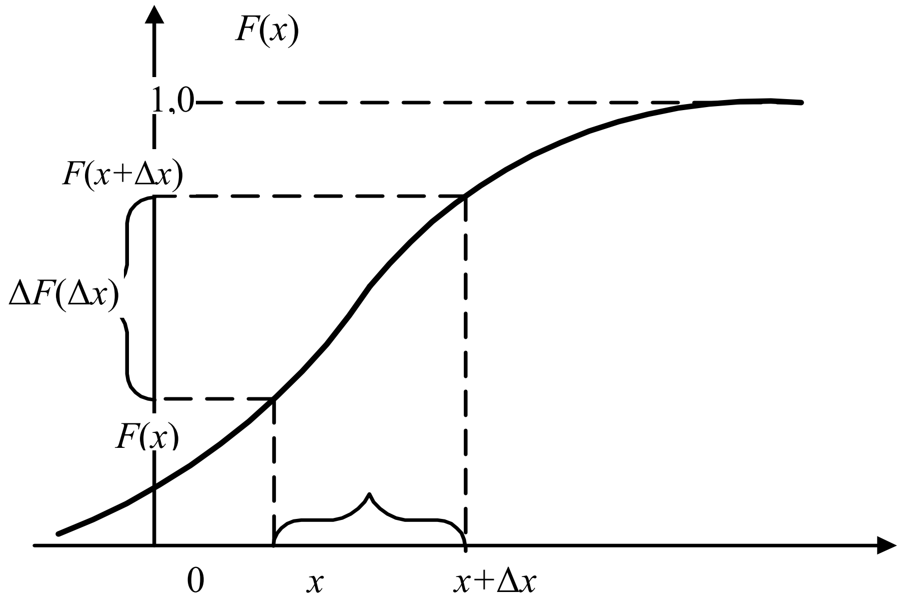


Рис. 1.6. Функция распределения

Вычислим вероятность попадания этой случайной величины на участок от x до $x + \Delta x$:

$$P(x < X < x + \Delta x) = F\,(x + \Delta x) - F(x),$$

т. е. приращение функции распределения на этом участке.

Рассмотрим отношение этой вероятности к длине участка, т. е. ***среднюю вероятность***, приходящуюся на единицу длины на этом участке, и будем приближать Δx к нулю. В пределе получим ***производную*** от функции распределения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \quad (1.20)$$

Обозначим

$$f(x) = F'(x). \quad (1.21)$$

Функция $f(x)$ – производная функции распределения $F(x)$ по своему смыслу характеризует как бы ***плотность***, с которой распределяются значения случайной величины в ***данной точке***. Эта функция называется ***плотностью распределения*** или по другому – ***плотностью веро-***

ятности непрерывной случайной величины X. Иногда функцию $f(x)$ называют также «***дифференциальной функцией распределения***» или «***дифференциальным законом распределения***» величины X.

Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины, называется ***кривой распределения*** (рис. 1.7).

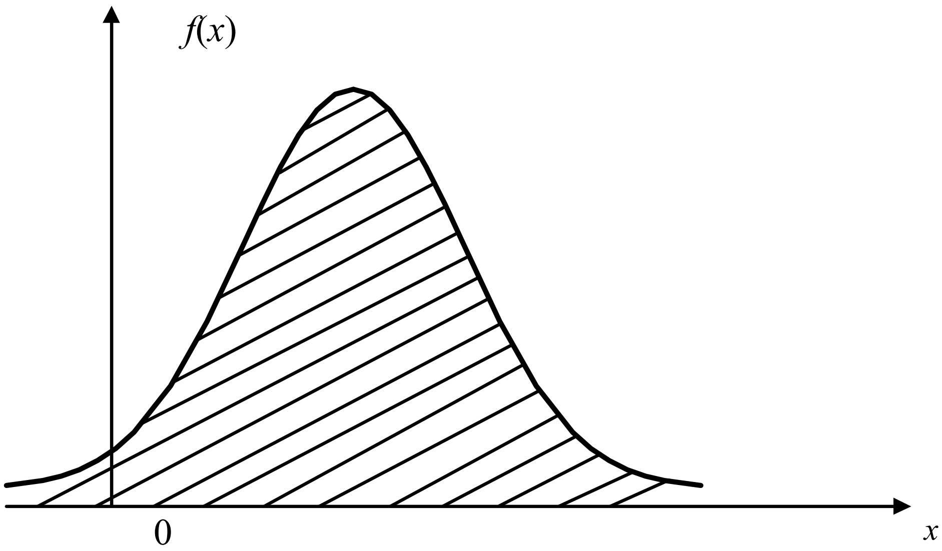


Рис. 1.7. Кривая распределения

Плотность распределения, так же как и функция распределения, есть одна из форм закона распределения. Но в отличие от функции распределения эта форма не является универсальной: она существует только для непрерывных случайных величин.

Рассмотрим непрерывную случайную величину X с плотностью распределения $f(x)$ и элементарный участок dx, примыкающий к точке x (рис. 1.8).

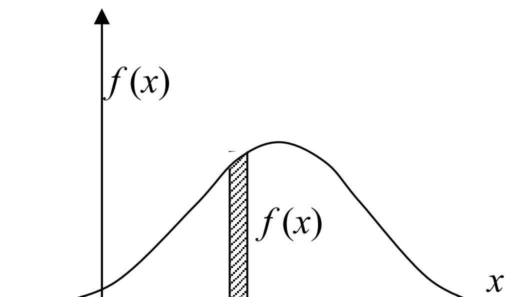


Рис. 1.8. Непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$ на участке dx

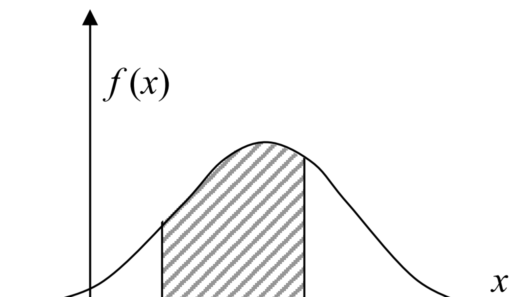


Рис. 1.9. Вероятность попадания случайной величины на отрезок от α до β

Вероятность попадания случайной величины X на этот элементарный участок (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) равна $f(x)dx$. Величина $f(x)dx$ называется ***элементом вероятности***. Геометрически это есть площадь элементарного прямоугольника, опирающегося на отрезок dx (рис. 1.8).

Выразим вероятность попадания величины X на отрезок от α до β (рис. 1.9) через плотность распределения. Очевидно, она равна сумме элементов вероятности на всем этом участке, т. е. интегралу:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \qquad (1.22)$$

Так как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю, то в формуле (1.22) можно рассматривать отрезок (α, β), не включая в него левый конец, т. е. отбрасывая знак равенства в $\alpha \leq X < \beta$.

Геометрически вероятность попадания величины X на участок (α, β) равна площади, ограниченной кривой распределения, опирающейся на этот участок (рис. 1.9).

Выразим функцию распределения через плотность. По определению $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$, откуда по формуле (1.22) имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (1.23)$$

Геометрически $F(x)$ есть не что иное, как площадь, образованная кривой распределения и осью 0х, лежащая левее точки x. Площадь же всей фигуры равна 1. Поэтому, если функция $f(x)$ сложная и интеграл взять трудно, то для практических целей площадь, или что то же самое, вероятность попадания случайной величины на какой-либо участок можно определить графически.

Формулы (1.21) и (1.23) устанавливают связь между дифференциальной и интегральной функциями распределения.

Уточним размерности основных характеристик случайной величины – функции распределения и плотности распределения. Функция распределения $F(x)$, как всякая вероятность, есть величина безразмерная. Размерность плотности распределения $f(x)$, как видно из формулы (1.20), обратна размерности случайной величины.

Таким образом, законами распределения полностью, исчерпывающим образом описывающих случайную величину с вероятностной точки зрения, являются:

- для дискретной случайной величины:

а) функция распределения;

б) ряд распределения;

в) многоугольник распределения;

- для непрерывной величины:

  а) функция распределения;

  б) плотность распределения;

  в) кривая распределения.

П р и м е р. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ ax^2 \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Требуется

а) найти коэффициент a;

б) найти плотность распределения $f(x)$;

в) найти вероятность попадания величины X на участок от 0,25 до 0,5.

Р е ш е н и е.

а) Так как функция распределения величины X непрерывна, то при $x = 1$ $ax^2 = 1$, откуда следует, что $a = 1$;

б) плотность распределения величины X выражается формулой

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ 2x \text{ при } 0<x\le 1,\\ 0 \text{ при } x>1,\end{cases}$$

в) по формуле (1.18) имеем

$$P(0{,}25<X<0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}25) = 0{,}5^2 - 0{,}25^2 = 0{,}1875.$$

1.3.5. Числовые характеристики случайных величин

Каждый закон распределения, указанный выше, представляет собой некоторую функцию, и указание этой функции полностью описывает случайную величину с вероятностной точки зрения. Но такую функцию на практике не всегда легко получить (необходимо произвести большое число опытов, произвести обработку данных и т. д.).

Во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью, исчерпывающим образом. Достаточно бывает указать только отдельные числовые параметры, в некоторой степени характеризующие ***существенные черты распределения*** случайной величины. Такие характеристики, назначение которых – выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения, называются ***числовыми характеристиками*** случайной величины.

С помощью числовых характеристик существенно облегчается решение многих вероятностных задач. Часто удается решить задачу до конца, оставляя в стороне законы распределения и оперируя одними числовыми характеристиками.

В теории вероятностей и математической статистике применяется большое количество различных числовых характеристик, имеющих различное назначение и области применения. Ниже рассмотрим только некоторые из них, наиболее часто применяемые.

1.3.6. Характеристики положения

Прежде всего отметим те характеристики, которые характеризуют ***положение*** случайной величины на числовой оси, т. е. указывают некоторое среднее, ориентировочное значение, около которого группируются всевозможные значения случайной величины.

Среднее значение случайной величины есть некоторое число, являющееся как бы ее «представителем» и заменяющее ее при ориентировочных расчетах. Когда мы говорим: «средняя нагрузка шинопровода равна 200 А», то этим указываем определенную числовую характеристику случайной величины, описывающую ее местоположение на числовой оси, т. е. «характеристику положения».

Из характеристик положения важнейшую роль играет ***математическое ожидание*** случайной величины, которое часто называют просто ***средним значением*** случайной величины.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, имеющую возможные значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ с вероятностями $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Требуется охарактеризовать, каким-то числом положение значений случайной величины на оси абсцисс с учетом того, что эти значения имеют различные вероятности. Для этой цели воспользуемся так называемым «средним взвешенным» из значений x_i, причем каждое значение x_i при осреднении должно учитываться с «весом», пропорциональным вероятности этого значения. Таким образом, мы вычислим среднее значение случайной величины X, которое обозначим $M[X]$:

$$M[X] = \frac{x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i},$$

или, учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$,

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i. \qquad (1.24)$$

Это среднее взвешенное значение и называется математическим ожиданием случайной величины. Другими словами, ***математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений.***

Математическое ожидание случайной величины X связано своеобразной зависимостью ***со средним арифметическим*** статистических значений случайной величины при большом числе опытов. Эта зависимость такого же типа, как зависимость между частотой и вероятностью, а именно: при большом числе опытов среднее арифметическое статистических значений случайной величины приближается (сходится по вероятности) к ее математическому ожиданию.

Формула (1.24) для математического ожидания соответствует случаю дискретной случайной величины. Для непрерывной величины X математическое ожидание, естественно, выражается уже не суммой, а интегралом

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \qquad (1.25)$$

где $f(x)$ – плотность распределения величины X.

Формула (1.25) получается из формулы (1.24), если в ней заменить отдельные значения x_i непрерывно изменяющимся параметром x, соответствующие вероятности P_i – элементом вероятности $f(x)dx$, конечную сумму – интегралом.

Часто величина $M[X]$ входит в формулы как определенное число и ее удобнее обозначать одной буквой. В этих случаях будем обозначать математическое ожидание величины X через m_x:

$$m_x = M[x].$$

Эти обозначения для математического ожидания будут применяться параллельно в зависимости от удобства написания формул.

Отметим ряд теорем о математическом ожидании функций, представляющих практические формулы вычисления этой характеристики:

- ***Математическое ожидание неслучайной величины***

Если c – неслучайная величина, то

$$M[c] = c.$$

- ***Вынесение неслучайной величины за знак математического ожидания***

Если c – неслучайная величина, а X – случайная, то

$$M[cX] = c\,M[X],$$

т. е. неслучайную величину можно выносить за знак математического ожидания.

- ***Математическое ожидание суммы случайных величин***

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right],$$

т. е. математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

- ***Математическое ожидание произведения случайных величин***

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} M\left[X_i\right],$$

т. е. математическое ожидание произведения ***независимых*** случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

- ***Математическое ожидание функции случайной величины***

$$M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) P_i;$$

$$M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx,$$

соответственно для дискретной и непрерывной величин.

Кроме важнейшей из характеристик положения – математического ожидания, – иногда применяются и другие характеристики положения, в частности ***мода*** и ***медиана*** случайной величины.

Модой дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, а для непрерывной величины модой является то значение, в котором плотность вероятности максимальна (рис. 1.10). Моду принято обозначать буквой μ.

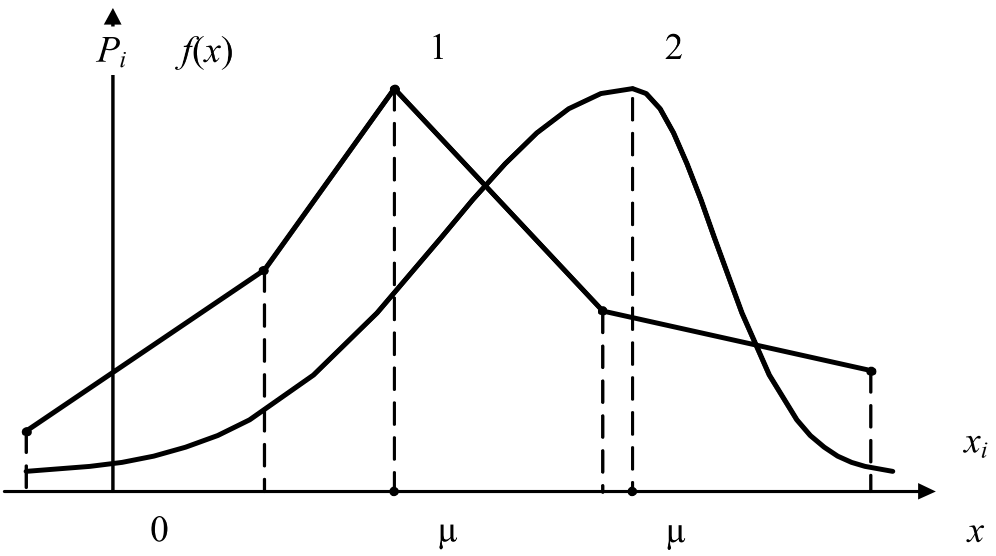


Рис. 1.10. Мода дискретной (кривая 1)
и мода непрерывной (кривая 2) случайных величин

Если многоугольник распределения или кривая распределения имеет более одного максимума, то распределение называется «полимодальным» (рис. 1.11).

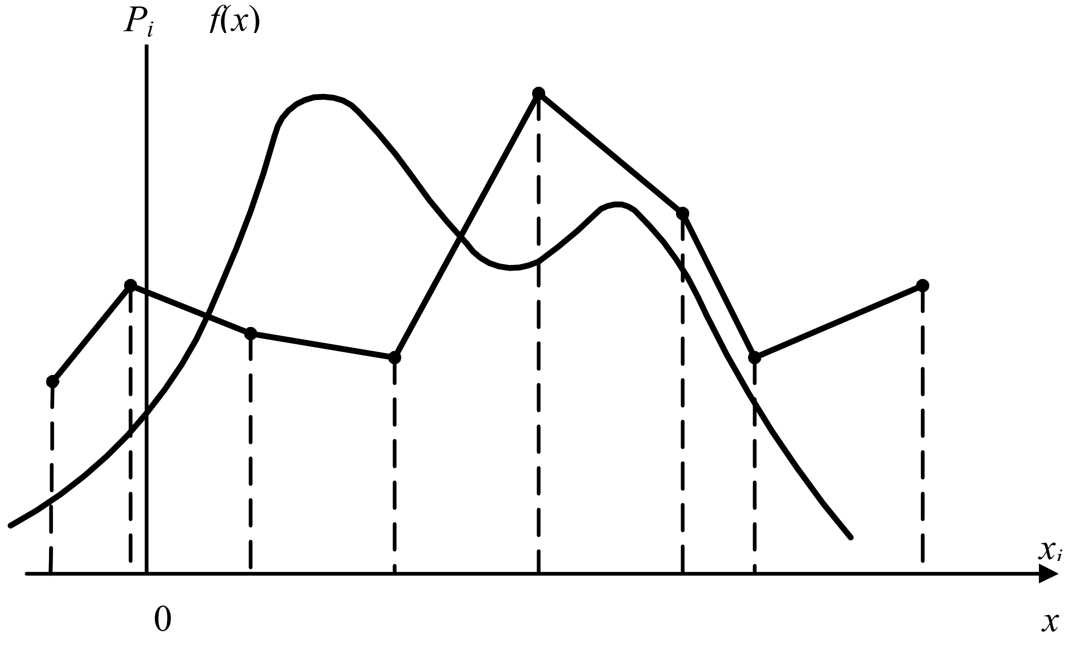


Рис. 1.11. Полимодальные распределения

Встречаются распределения, обладающие посередине не максимумом, а минимумом (рис. 1.12). Такие распределения называются «антимодальными».

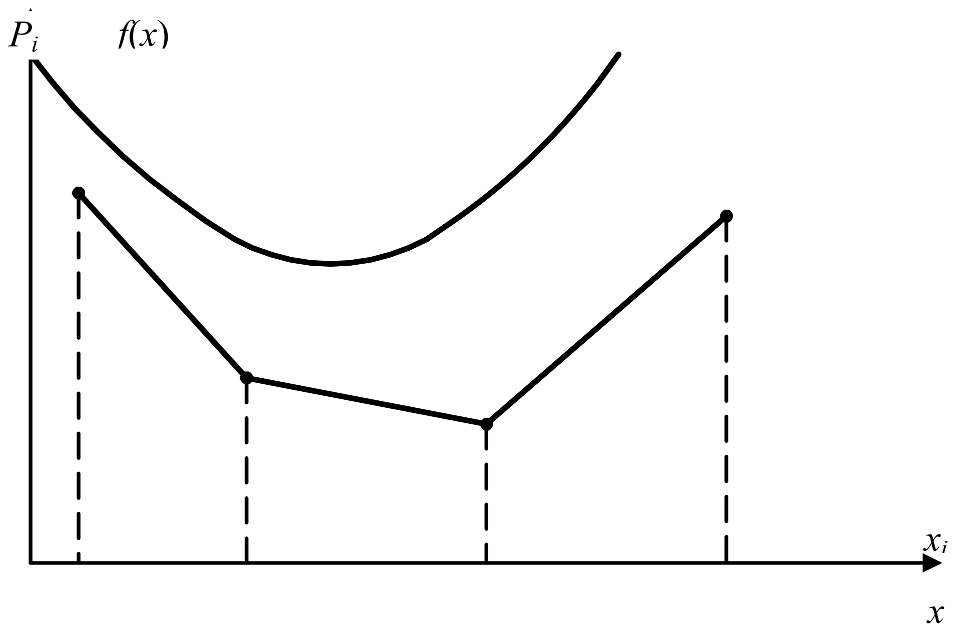


Рис. 1.12. Антимодальные распределения

Медианой случайной величины X называется такое ее значение μe, для которого $P(X < \mu e) = P(X > \mu e)$, т. е. одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше μe. Геометрически медиана – это точка абсциссы, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам (рис. 1.13).

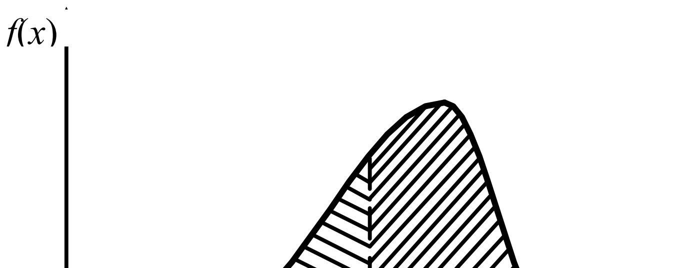


Рис. 1.13. Медиана случайной величины

1.3.7. Моменты. Дисперсия. Среднее квадратическое отклонение

Кроме характеристик положения случайной величины употребляется еще ряд характеристик. В качестве таких характеристик чаще всего применяются так называемые ***моменты***. Наибольшее распространение на практике получили моменты двух видов: ***начальные*** и ***центральные***.

Начальным моментом k-го порядка дискретной случайной величины X называется сумма вида:

$$\alpha_k[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k P_i. \quad (1.26)$$

Для непрерывной случайной величины X начальным моментом k-го порядка называется интеграл

$$\alpha_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx. \quad (1.27)$$

Из формул (1.26) и (1.27) нетрудно убедиться, что введенная ранее основная характеристика положения – математическое ожидание – представляет собой не что иное, как ***первый начальный момент*** случайной величины X.

Пользуясь знаком математического ожидания, можно объединить две последние формулы и написать общее определение начального момента k-го порядка, справедливое как для дискретных, так и для непрерывных величин:

$$\alpha_k[x] = M\left[x^k\right], \quad (1.28)$$

т. е. начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени этой случайной величины.

Перед тем как дать определение центрального момента, введем новое понятие «***центрированной случайной величины***».

Пусть имеется случайная величина X с математическим ожиданием m_x. ***Центрированной случайной величиной***, соответствующей величине X, называется отклонение случайной величины X от ее математического ожидания:

$$\overset{0}{X} = X - m_x. \quad (1.29)$$

Принято обозначать центрированную случайную величину, соответствующую данной случайной величине, той же буквой, но со значком «0» наверху.

Легко убедиться, что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю. Действительно, для дискретной величины

$$M[\overset{0}{X}] = M[X - m_x] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)P_i = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i - m_x \sum_{i=1}^{n} P_i = m_x - m_x = 0,$$

аналогично можно написать и для непрерывной величины.

Центрирование случайной величины, очевидно, равносильно переносу начала координат в среднюю «центральную» точку абсциссы, которая равна математическому ожиданию.

Моменты центрированной случайной величины носят название ***центральных моментов***. Они аналогичны моментам относительно центра тяжести в механике.

Таким образом, ***центральным моментом порядка*** k случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени соответствующей центрированной случайной величины:

$$\mu_k[X] = M\left[\overset{0}{X}{}^k\right] = M\left[(X - m_x)^k\right]. \tag{1.30}$$

Для дискретной случайной величины k-й центральный момент выражается суммой

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^k P_i \ , \tag{1.31}$$

а для непрерывной – интегралом

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^k f(x)dx \ . \tag{1.32}$$

Для краткости в дальнейшем будем вместо $\alpha_k[X]$ и $\mu_k[X]$ писать просто α_k и μ_k.

Очевидно, для любой случайной величины ***центральный момент первого порядка равен нулю***:

$$\mu_1 = M[\overset{0}{X}] = M[X - m_x] = m_x - m_x = 0,$$

так как математическое ожидание центрированной случайной величины всегда равно нулю.

Приведем некоторые наиболее встречающиеся соотношения, связывающие центральные и начальные моменты различных порядков:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 = 0; \\ &\mu_2 = \alpha_2 - m_x^2; \\ &\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2 m_x + 2m_x^3. \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad (1.33)$$

Из всех моментов в качестве характеристик случайной величины чаще всего применяются первый начальный момент (математическое ожидание) $m_x = \alpha_1$ и второй центральный момент μ_2.

Второй центральный момент называется ***дисперсией*** случайной величины. Ввиду особой важности этой характеристики среди других моментов введем для нее специальное обозначение Д[X]:

$$\mu_2 = Д[x] .$$

Согласно определению центрального момента

$$Д[X] = M\left[\overset{0}{X}{}^2\right], \qquad (1.34)$$

т. е. ***дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной величины.***

Заменяя в выражении (1.34) величину $\overset{0}{X}$ ее выражением (1.29), имеем также

$$Д[X] = M\left[(X - m_x)^2\right].$$

Для непосредственного вычисления дисперсии служат формулы:

$$Д[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 P_i; \qquad (1.35)$$

$$Д[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx, \qquad (1.36)$$

соответственно для дискретных и непрерывных величин.

Дисперсия случайной величины есть характеристика ***рассеивания***, ***разбросанности*** значений случайной величины около ее математического ожидания.

Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины. Для наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Для этого из дисперсии извлекают квадратный корень. Полученная величина называется ***средним квадратическим отклонением*** случайной величины X. Среднее квадратическое отклонение принято обозначать $\sigma[X]$:

$$\sigma[x] = \sqrt{Д[x]}. \tag{1.37}$$

Для упрощения записей часто пользуются сокращенными обозначениями среднего квадратического отклонения и дисперсии: σ_x и $Д_x$. В случае, когда не возникает сомнения, к какой случайной величине относятся эти характеристики, просто пишут σ и Д.

На практике часто применяется формула, выражающая дисперсию случайной величины через ее второй начальный момент (вторая из формул (1.33)). В новых обозначениях она будет иметь вид

$$Д_x = \alpha_2 - m_x^2. \tag{1.38}$$

Математическое ожидание m_x и дисперсия $Д_x$ (или среднеквадратическое отклонение σ_x) – наиболее часто применяемые характеристики случайной величины. Они характеризуют наиболее важные черты распределения: его положение и степень разбросанности.

Приведем ряд теорем о дисперсии функций, представляющих весьма простой аппарат вычисления этой характеристики.

- ***Дисперсия неслучайной величины***

Если c – неслучайная величина, то

$$Д[c] = 0.$$

- ***Вынесение неслучайной величины за знак дисперсии***

Если c – неслучайная величина, а X – случайная, то

$$Д[cX] = c^2 Д[X],$$

т. е. неслучайную величину можно выносить за знак дисперсии, возводя ее в квадрат.

- ***Дисперсия суммы случайных величин***

Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс удвоенный корреляционный момент:

$$Д\,[X + Y] = Д\,[X] + Д\,[Y] + 2Kxy.$$

Если все случайные величины ($X_1, X_2, \ldots, X_n$), входящие в систему, некоррелированы (т. е. $K_{ij} = 0$ при $i \neq j$), то вышеприведенная формула принимает вид

$$Д\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Д[X_i] \ ,$$

т. е. дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых. Это положение известно под названием ***теоремы сложения дисперсий***.

- ***Дисперсия произведения независимых случайных величин***

Если случайные величины X и Y независимы, то

$$Д[XY] = [Д[X] + m_x^2][Д[Y] + m_y^2] - m_x^2 m_y^2 \ .$$

Эту формулу после некоторых преобразований можно представить в виде

$$Д[XY] = Д[X]Д[Y] + m_x^2 Д[Y] + m_y^2 Д[X] \ .$$

В зависимости от конкретной задачи иногда удобно использовать первую из приведенных формул, а иногда вторую.

- ***Дисперсия функции случайной величины***

$$Д[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(x) - M[\varphi(x)]\}^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^2 f(x)dx - M^2[\varphi(x)].$$

Для более подробного описания распределения, кроме характеристик положения и степени разбросанности, применяются моменты высших порядков.

Третий центральный момент служит для характеристики ***асимметрии*** (или «скошенности») распределения. Он имеет размерность куба случайной величины. Чтобы получить безразмерную характеристику, третий момент μ_3 делят на куб среднего квадратического отклонения. Полученная величина носит название «коэффициента асимметрии» или просто «асимметрии». Этот коэффициент обозначается как S_k:

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

На рис. 1.14 показано два асимметричных распределения. Одна из них (кривая 1) имеет положительную асимметрию ($S_k > 0$), а другая (кривая 2) – отрицательную ($S_k < 0$).

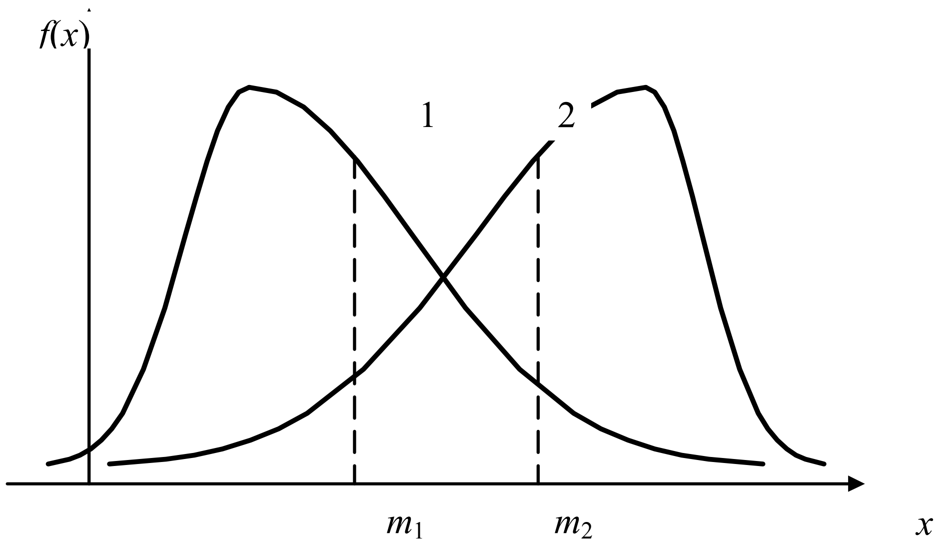


Рис. 1.14. Виды асимметрии

Четвертый центральный момент служит для характеристики так называемой «крутости», т. е. островершинности или плосковершинности распределения. Эти свойства распределения описываются с помощью так называемого ***эксцесса***. Эксцессом случайной величины X называется величина

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Число 3 вычитается из отношения $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ потому, что для очень важного и широко распространенного в природе нормального закона распределения $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$. Таким образом, для нормального распределения (рис. 1.15, кривая 2) эксцесс равен нулю ($E_x = 0$). Кривые, более островершинные (рис. 1.15, кривая 1) по сравнению с нормальной, обладают положительным эксцессом ($E_x > 0$). Кривые более плосковершинные (рис. 1.15, кривая 3) – отрицательным эксцессом.

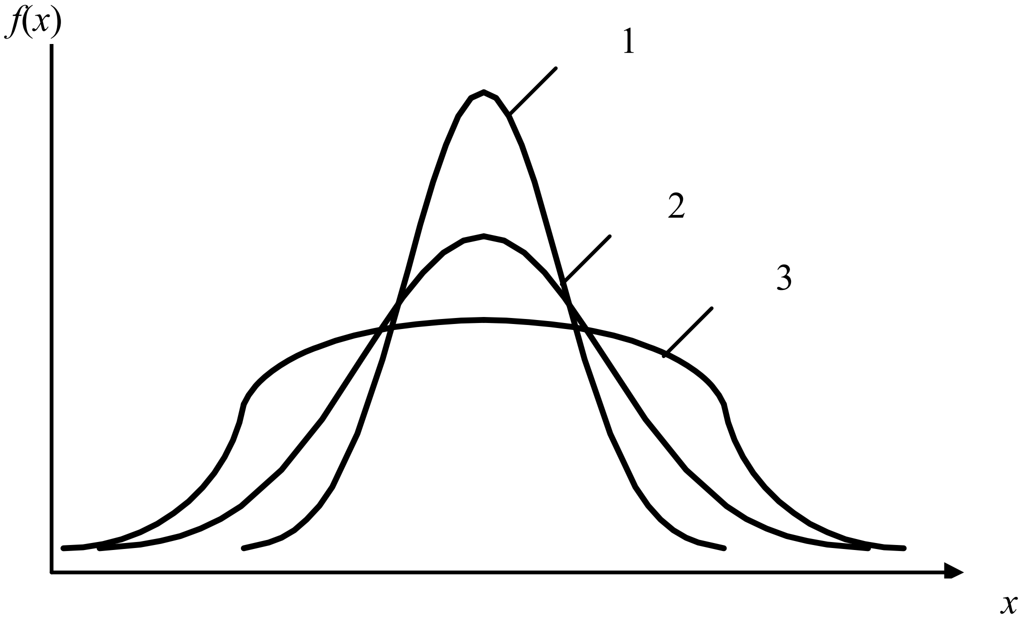


Рис. 1.15. Виды эксцесса

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ НАДЕЖНОСТИ

Основной задачей теории надежности является разработка и изучение методов обеспечения эффективности работы различных объектов в процессе их эксплуатации, а также в определении и изучении количественных характеристик надежности и их связи с показателями экономичности. Существуют два направления повышения надежности: повышение надежности элементов, из которых состоит рассматриваемый объект, и создание объекта с высокой степенью надежности из относительно ненадежных элементов, используя различные виды резервирования. Максимального эффекта в повышении надежности, очевидно, можно добиться рациональным сочетанием этих двух направлений.

Понятие «надежность» широко используется во всех сферах деятельности человека (наука, техника, медицина и т. д.), что и определяет широту его толкования. Практическое решение многих задач, а иногда и выяснение их сути, оказывается совершенно невозможным без четкого установления некоторых понятий и соотношений между ними, выделения определенных свойств и их количественного описания. Поэтому изучение надежности целесообразно начать с рассмотрения понятий и характеристик надежности, которые используются в решении задач, возникающих при создании и эксплуатации искусственных технических систем вообще и электроэнергетических в частности.

Основной материал этой темы излагается по данным литературы [4, 5, 7, 8, 9]. Там же можно ознакомиться с выводами некоторых формул и углубить знания по предмету.

2.1. Основные понятия и определения

Система, ***элемент***, ***объект***. Под ***системой*** понимается совокупность взаимосвязанных устройств, которая предназначена для самостоятельного выполнения заданных функций. К примеру, электроэнергетическая система (ЭЭС) представляет собой совокупность взаимосвязанных электрических станций, электрических сетей, узлов нагрузок, объединенных процессом производства, преобразования, передачи и распределения электроэнергии для снабжения потребителей.

Отдельные части, на которые можно подразделить систему, представляющие собой законченные устройства, способные самостоятельно выполнять некоторые локальные функции в системе принято называть ***элементами*** (например, генераторы, трансформаторы, линии электропередач и т. д.).

Деление системы на элементы – процедура условная и производится на том уровне, на котором удобно ее рассматривать для решения конкретной задачи. Например, можно рассматривать генератор, трансформатор блочных станций как отдельные элементы, но иногда их удобно объединить в один элемент. Условность подразделения системы на элементы состоит еще и в том, что любой элемент, в свою очередь, может рассматриваться как система. Например, воздушная ЛЭП состоит из таких определенным образом связанных элементов, как гирлянды изоляторов, опоры, фундаменты, провода, тросы, заземлители и т. д.

В связи с этим, рассматривая многие свойства и характеристики элементов и систем, в тех случаях, где нет необходимости подчеркивать свойства, присущие только системам или только элементам, будем говорить об ***объектах***. В качестве объекта могут рассматриваться система, подсистема или элемент.

Процессы, происходящие в объекте с позиций надежности. Как отмечалось, система или элемент (объект) выполняет определенные функции. Если происходит полная или частичная утрата способности выполнения этих функций (утрата работоспособности объекта), то такое событие называется ***отказом***.

Такое определение отказа является качественным. Возникает вопрос, что считать потерей работоспособности или что является критерием отказа? Работоспособное состояние объекта определяется перечнем заданных параметров, характеристик и допустимыми пределами их изменения – допусками. ***Нарушением работоспособного состояния*** называется выход хотя бы одного заданного параметра за установленный допуск. Признаки, позволяющие установить факт нарушения работоспособного состояния, и являются ***критериями отказа***. Например, выход параметров напряжения за пределы заданных отклонений ($\Delta f_{доп\pm}$, $\Delta U_{доп\pm}$) означают наступление отказа ЭЭС. Отказы, в свою очередь, классифицируются на:

- полные и частичные (при частичном нарушении работоспособности);
- внезапные и постепенные (характеризующиеся постепенным изменением и выходом за заданную границу одного или нескольких параметров объектов);
- независимые и зависимые (зависящие от отказов других объектов);
- устойчивые и сбои (самоустраняющиеся отказы, приводящие к кратковременному нарушению работоспособности).

По характеру исполнения и функционирования объекты могут быть ***восстанавливаемые*** и ***невосстанавливаемые***. Если при возникновении отказа работоспособность объекта может быть восстановлена путем проведения ремонтов и технического обслуживания, то такой объект называется ***восстанавливаемым.*** Если же при отказе объект либо не подлежит, либо не поддается восстановлению в процессе эксплуатации, то он называется ***невосстанавливаемым***.

Функционирование восстанавливаемого объекта за длительный период времени может быть представлено потоком отказов и восстановлений.

Потоки отказов обладают ***рядом свойств***. Поток называется ***ординарным***, если вероятность совмещения двух или более отказов в один и тот же момент времени настолько мала (близка к нулю), что практически такое совмещение является невозможным. Поток отказов является ***стационарным***, если вероятность появления k отказов на отрезке времени (t, $t + \Delta t$) зависит только от Δt. Поток отказов называется потоком ***без последействия***, если на любых неперекрывающихся интервалах времени число событий, появляющихся в одном из них, не зависит от числа событий, появляющихся в других. Ординарные потоки без последствия называются ***пуассоновскими***. Эти потоки могут быть как стационарными, так и нестационарными. Стационарный пуассоновский поток называется ***простейшим***.

Энергетические объекты в целом следует считать восстанавливаемыми, хотя могут быть случаи, когда отдельные элементы или части объектов на некотором временном интервале необходимо рассматривать как невосстанавливаемые. Реальные потоки отказов энергетических объектов, как правило, обладают свойствами ординарности и отсутствия последствия, т. е. являются пуассоновскими. Более того, для большинства из них потоки отказов оказываются и стационарными, т. е. простейшими.

Надежность как комплексное свойство. Приведенные выше определения позволяют подойти к более сложному комплексному понятию надежности. Под ***надежностью*** понимается свойство объекта выполнять заданные функции в заданном объеме при определенных условиях функционирования. Отсюда следует, что:

1) надежность является внутренним свойством объекта, заложенным при проектировании и изготовлении, которое проявляется при функционировании объекта;

2) надежность проявляется в процессе выполнения заданного объема функций, или во времени. Если нет наблюдения за объектом в процессе его работы, то нельзя сделать и заключений о фактической его надежности;

3) надежность проявляется различно в зависимости от условий эксплуатации. Нельзя оценивать надежность объекта в отрыве от условий его эксплуатации.

Так как надежность является сложным, комплексным свойством, то в зависимости от назначения объекта и условий его эксплуатации оно может включать в себя ряд свойств (в отдельности или в определенном сочетании):

- ***безотказность*** – непрерывное сохранение работоспособности в течение некоторого времени или некоторой наработки;
- ***долговечность*** – сохранение работоспособности до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов;
- ***ремонтопригодность*** – приспособленность к предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов, повреждений объекта и устранению их последствий путем проведения ремонтов и технического обслуживания;
- ***устойчивоспособность*** **–** непрерывное сохранение устойчивости системы в течение некоторого времени;
- ***режимная управляемость*** **–** приспособленность к управлению с целью поддержания нормального режима;

• ***живучесть*** – способность противостоять крупным возмущениям, не допуская их каскадного развития с массовым нарушением питания;

• ***безопасность*** **–** способность не создавать ситуаций, опасных для людей и окружающей среды.

В свою очередь, надежность является элементом еще более общего свойства – ***качества***, под которым понимается совокупность свойств, обусловливающих пригодность системы и ее продукции для удовлетворения определенных потребителей в соответствии с ее назначением.

Причины и характер отказов объектов. Характер проявления всех свойств надежности наиболее полно фокусируется в причинах и характере отказов объектов, которые в значительной степени определяют и средства обеспечения надежности. Поэтому полезно проанализировать причины, обусловливающие отказы. Если рассматривать их с точки зрения источников происхождения, то они могут быть подразделены на два класса:

1) повреждения и неполадки оборудования, устройств, входящих в систему;

2) ошибочные или вынужденные действия обслуживающего персонала.

Надежность, определяемая причинами первого класса, иногда называется ***аппаратной***, а определяемая причинами второго класса – ***эксплуатационной***.

Причины первого класса, в свою очередь, подразделяются на три группы. Первую группу составляют ошибки, допущенные при конструировании, определении условий и режимов эксплуатации, изготовлении, монтаже или ремонтах оборудования. Эти ошибки, скрытые дефекты обычно проявляются в начальный период эксплуатации, который называют периодом ***приработки***. Для него в результате указанных ошибок, а также невозможности учета всех скрытых дефектов из-за их неопределенности или недостаточности информации характерен некоторый пик частоты отказов.

Вторая группа причин вызвана износом и приводит к постепенному утрачиванию объектом ряда функциональных свойств. Этот процесс закономерен в том отношении, что с увеличением времени жизни, т. е. работы или даже хранения, опасность утраты этих свойств возрастает. Но результат, закономерный в указанном смысле постепенных изменений, проявляется внезапно. Таким образом, процесс износа происходит под влиянием постоянно действующих факторов, имеющих и случайный, и детерминированный характер. Естественное завершение процесса износа имеет случайный характер. Этот период называется периодом ***старения***.

Время между периодами приработки и старения называется периодом ***нормальной работы*** объекта. В это время в наибольшей степени проявляются причины третьей группы. К ним относятся непредвиденные и непредсказуемые воздействия, обычно физического характера, не связанные с периодом предшествующей работы. Эти внезапные по своей природе воздействия даже при отсутствии у объекта видимых ухудшений функциональных свойств приводят к отказам, которые обычно имеют мгновенный характер. В качестве примера причин этой группы можно привести такие, как грозы, автокатастрофы, падение деревьев, попадание животных на электроустановки, гололедные явления, порывы ветра и т. д.

Отмеченные три группы причин отказов приводят к необратимым изменениям свойств объекта. Но есть и такие причины, которые не вызывая необратимых изменений в физической структуре элемента, проявляются в большинстве случаев кратковременно и только во время своего появления могут нарушать временно работоспособность элемента или системы. Такие временные или самоустраняющиеся отказы называются ***сбоями***.

Причины ***второго класса*** отказов также могут быть подразделены на две группы. Первую из них составляют причины, обусловленные низкой квалификацией эксплуатационного и ремонтного персонала, недостаточностью опыта. Вторую группу составляют причины, обусловленные масштабностью и сложностью устройств и схем, с которыми приходится работать обслуживающему персоналу. Например, большое число разъединителей и выключателей и другой сложно связанной коммутационной аппаратуры на подстанциях повышает вероятность неправильных переключений, могущих привести к ложным отключениям или включениям на короткозамкнутые цепи и т. п.

Однако какие бы виды отказов и виды причин, их вызвавшие, не рассматривались, их неизменно объединяет общий признак – случайность возникновения даже при постепенном накоплении физических изменений. Он позволяет трактовать отказ элемента или системы как ***случайное событие***. Это положение является определяющим при выборе математического аппарата, который целесообразно применять при изучении различных закономерностей отказов системы.

Средства обеспечения надежности. Необходимая надежность объекта обеспечивается совокупностью различных средств, которые принципиально можно подразделить на: резервирование, техническое обслуживание, ремонт и целенаправленное управление процессами, протекающими в системе.

Резервирование – повышение надежности введением избыточности, которое, в свою очередь, подразделяется на следующие виды: структурное, функциональное, временное и информационное.

Структурное резервирование – использование избыточных элементов структуры объекта, т. е. элементов, которые не являются необходимыми для выполнения возложенных на объект функций, например установки вторых трансформаторов на подстанциях, сооружения вторых цепей, когда пропускная способность первых еще не исчерпана.

Функциональное резервирование – использование способности элементов выполнять дополнительные функции, повышая надежность работы системы за счет перераспределения функций при отказах элементов. При этом происходит более интенсивная работа (загрузка) других элементов, выполняющих до появления отказа более ограниченные функции. Например, межсистемная ЛЭП, предназначенная для реализации каких-то режимных состояний или передачи энергии, в то же время может быть использована и для резервирования отказов генерирующего оборудования.

Временное резервирование – использование избыточного времени. Суть его заключается в том, что системе в процессе функционирования предоставляется возможность израсходовать дополнительное время для выполнения задания. Оно осуществляется либо за счет резерва времени, в течение которого система имеет возможность выполнить задание, либо за счет использования резерва мощности уменьшением времени выполнения задания. Так, если в одной из энергосистем имеются резервные генераторы, которые используются кратковременно в течение, например, года, обладая тем самым резервом по времени, то при объединении ее с другой системой эти генераторы могут резервировать отказы и простои оборудования во второй энергосистеме, компенсируя дефицит энергии в те интервалы времени, в которые они не используются в первой системе.

Информационное резервирование – использование избыточной информации.

Техническое обслуживание – обеспечение надежности путем выполнения комплекса работ для поддержания работоспособности объекта. Этот комплекс включает в себя систематическое диагностирование состояния объекта, поддержание режимов работы, наиболее благоприятных для надежности, обеспечение благоприятных условий содержания оборудования и т. д.

Ремонт – обеспечение надежности путем выполнения комплекса работ для восстановления работоспособности объекта. Система ремонтов включает в себя предупредительные (текущие, капитальные) и аварийные ремонты.

Целенаправленное управление процессами, протекающими в системе – обеспечение надежности путем создания соответствующей системы управления.

Измерение надежности. Так как надежность определяется совокупностью ряда свойств, то для количественной характеристики свойства вводится один или несколько ***показателей***. Таким образом, количественно надежность в общем случае характеризуется совокупностью показателей. Если показатель надежности относится к одному из свойств, определяющих надежность, то такой показатель является ***единичным***, если же он относится к нескольким, – то ***комплексным***.

2.2. Единичные показатели

Так как изученность таких свойств системы, как живучесть, устойчивоспособность и безопасность еще недостаточна для формирования их показателей, то они далее не рассматриваются.

Свойство безотказности. Это свойство присуще как восстанавливаемым, так и невосстанавливаемым объектам. Хотя объекты электроэнергетики являются преимущественно восстанавливаемыми, тем не менее методически целесообразно сначала рассмотреть показатели невосстанавливаемого объекта, как более простого, тем более, что показатели восстанавливаемого объекта в значительной степени формируются из аналогичных показателей невосстанавливаемого. Кроме того, отдельные элементы электрических систем на определенных интервалах времени могут рассматриваться как невосстанавливаемые.

Невосстанавливаемый объект. Наиболее полная характеристика этого свойства – вероятность того, что время работы объекта до отказа $t_о$ будет не меньше заданного времени t, или ***вероятность безотказной работы*** за время t

$$P_о(t) = P(t_о \geq t). \tag{2.1}$$

Статистически этот параметр может оцениваться следующим способом. Пусть под наблюдением находится $N_о$ одинаковых работающих объектов. К некоторому моменту времени t из-за отказа некоторых объектов в работе останется $N(t) \leq N_о$. Тогда статистическая оценка вероятности $P_о(t)$ определится как

$$\overset{*}{P}_{\text{o}}(t)=N(t)/N_{\text{o}}. \qquad (2.2)$$

Величина $Q(t)$, дополняющая $P_{\text{o}}(t)$ до единицы, представляет собой вероятность того, что за время t объект откажет.

$$Q(t) = 1 - P_{\text{o}}(t). \qquad (2.3)$$

На рис. 2.1 представлены типовые зависимости вероятности безотказной работы и вероятности отказа объекта в зависимости от срока эксплуатации.

В практических расчетах используется еще другой показатель свойства безотказности, который по своей информативности эквивалентен $P_{\text{o}}(t)$. Это ***интенсивность отказов*** $\boldsymbol{\lambda(t)}$, определяющая вероятность того, что элемент или объект, проработавший безотказно до момента времени t, откажет в момент $t + \Delta t$ (т. е. в следующий момент). Это есть плотность ***условной вероятности*** отказа в момент t при условии, что до этого момента изделие работало безотказно.

Каждый элемент системы с течением времени становится менее надежным (рис. 2.1). Скорость изменения надежности элемента с течением времени, отнесенная к вероятности безотказной работы элемента в данный момент времени и будет определять интенсивность или опасность отказов:

$$\lambda(t) = \frac{Q'(t)}{P_{\text{o}}(t)} = \frac{1}{P_{\text{o}}(t)}\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{P'(t)}{P(t)}. \qquad (2.4)$$

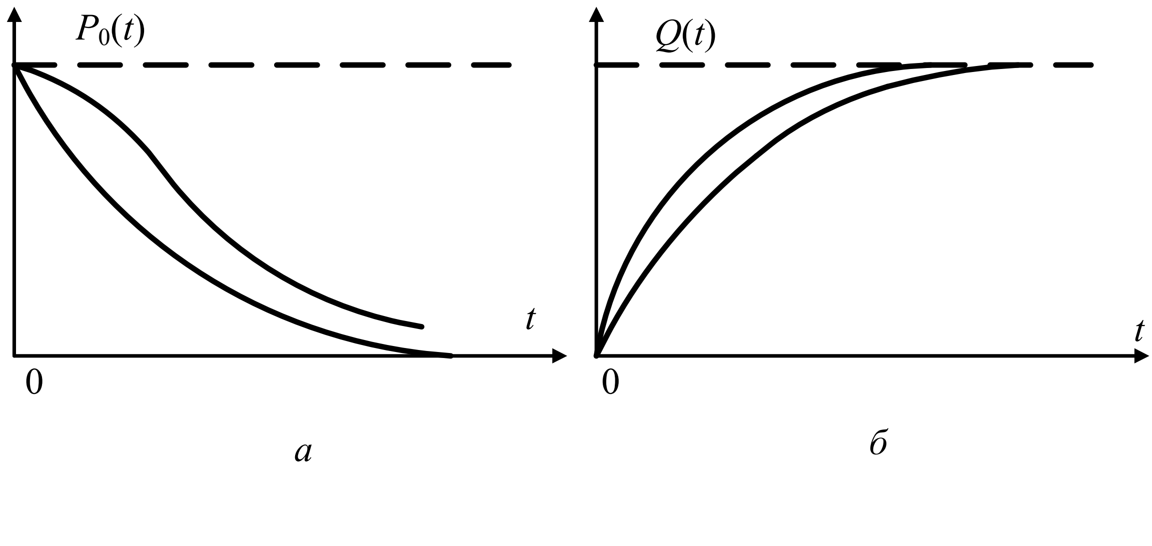


Рис. 2.1. Характерные зависимости P_{o} *(t)* (*а*) и Q (*t*) (*б*)

Статистическая оценка интенсивности отказов определяется как отношение числа элементов, отказавших в интервале времени t, $t + \Delta t$, к числу элементов $N(t)$, исправных к моменту t:

$$\overset{*}{\lambda}(t) = \frac{N(t) - N(t + \Delta t)}{N(t)\Delta t}, \qquad (2.5)$$

где $N(t)$ и $N(t + \Delta t)$ – количество оставшихся в работе элементов в соответствующие моменты времени; Δt – достаточно малый интервал времени.

Временная диаграмма, поясняющая статистическое определение понятия интенсивности отказов, приведена на рис. 2.2. При $N(t) - N(t + \Delta t) = 2$ (элементы 4 и 7) и при $N(t) = 5$ (элементы 1, 3, 4, 6, 7) статистическая оценка $\overset{*}{\lambda}(t) = 2/5\Delta t$.

График зависимости интенсивности отказов λ от времени t называется ***характеристикой жизни объекта*** (рис. 2.3). На характеристике явно выделяется три периода, соответствующие преобладающему действию рассмотренных причин. Период I имеет повышенную интенсивность отказов, обусловленную повышенной аварийностью на начальном периоде эксплуатации оборудования. По мере выявления и устранения дефектов интенсивность отказов λ уменьшается. Отказы периода II обусловливаются в основном только случайными причинами, не находящимися в зависимости от предыдущего срока работы. Они определяют вторую составляющую интенсивность отказов λ, обычно зависящую от внешних условий эксплуатации. Период III имеет повышающуюся интенсивности отказов λ, обусловленную постепенной утерей объектом ряда его функциональных свойств, т. е. износом. График интенсивности отказов на всем промежутке времени эксплуатации получается суммированием рассмотренных трех составляющих и обычно имеет форму корыта, размеры которого зависят от соотношения составляющих (рис. 2.3). Наблюдаемое периодическое изменение λ объясняется сезонными изменениями условий эксплуатации (например, грозы и т. п.).

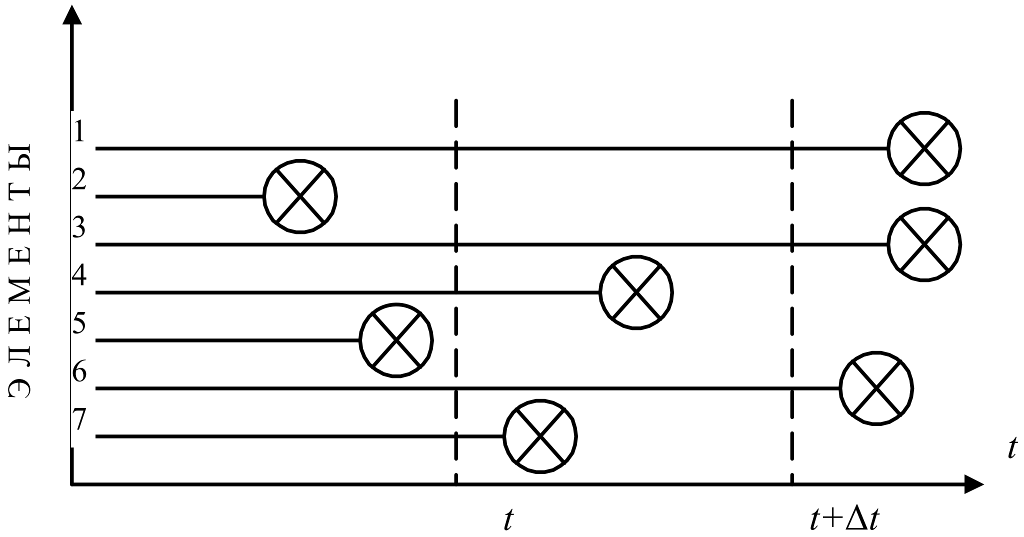


Рис. 2.2. Временная диаграмма отказов элементов

Между показателями $P_о(t)$ и $\lambda(t)$, как видно из (2.4), имеется однозначная связь. Решая уравнение (2.4) относительно $P_о(t)$ [5], получаем

$$P_о(t) = e^{-\int_о^t \lambda(t)dt}. \qquad (2.6)$$

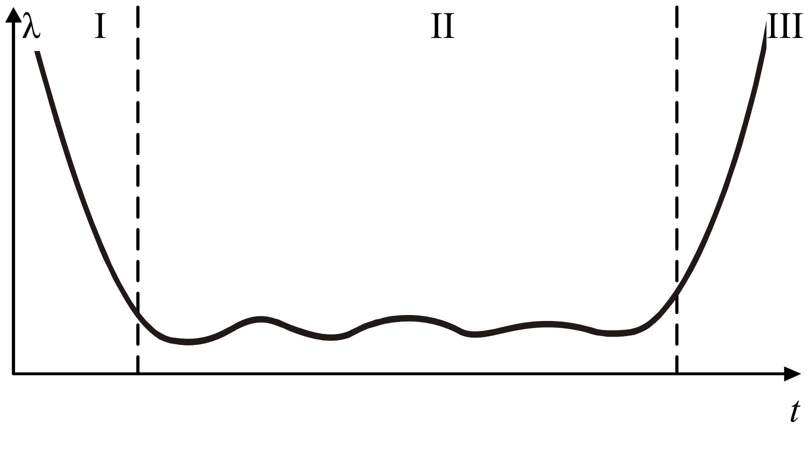


Рис. 2.3. Изменение интенсивности отказов элементов СЭС

Функция $P_0(t)$ определяет вероятность безотказной работы в интервале $[0, t]$. Но если известно, что объект уже проработал исправно до t_1, то можно вычислить вероятность его безотказной работы на последующем промежутке времени $[t_1, t_2]$. Действительно, объект не откажет на интервале $[0, t_2]$ только в том случае, если он не откажет на интервале $[0, t_1]$, а затем и на интервале $[t_1, t_2]$. Другими словами, первое событие есть произведение двух других. Тогда на основании теоремы умножения вероятностей имеем

$$P_0\,(t_2) = P_0(t_1) \cdot P_0(t_2/t_1),$$

где $P_0(t_2/t_1)$ – условная вероятность безотказной работы объекта на интервале времени $[t_1, t_2]$, вычисленная при условии, что данный объект работал безотказно в интервале $[0, t_1]$, откуда

$$P_0(t_2/t_1) = P_0(t_2)/P_0(t_1) = e^{-\int\limits_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt}. \qquad (2.7)$$

Часто для освоенного и отработанного оборудования интенсивность отказов в пределах периода I его работы (рис. 2.3) можно полагать постоянной. Если же ограничиться рассмотрением работы объекта до предельного состояния, то допустимо считать λ вообще постоянной величиной. В этом случае все показатели существенно упрощаются и принимают вид

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}; \quad Q\ (t) = 1 - e^{-\lambda t}. \qquad (2.8)$$

Таким образом, функция распределения времени безотказной работы становится экспоненциальной функцией. Соответственно дифференциальная характеристика, т. е. плотность распределения функции

$$dQ(t)/dt = \lambda e^{-\lambda t}. \qquad (2.9)$$

Существенной особенностью экспоненциального закона является следующее: ***вероятность безотказной работы на данном интервале*** $[t_1, t_2]$ ***не зависит от времени предшествующей работы, а зависит только от длины интервала*** $\Delta t = t_2 - t_1$. Иными словами, если известно, что в данный момент объект исправен, то будущее его поведение не зависит от прошлого. Действительно, из уравнения (2.7) следует, что

$$P_0(t_2/t_1) = e^{-\int\limits_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt} = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} = e^{-\lambda\Delta t} = P_0(\Delta t).$$

Как отмечалось, показатель P_0 (или λ) несет наиболее полную информацию о таком свойстве, как безотказность. Не всегда в практических условиях таковая имеется. Другой, менее информативной, но простой и наиболее доступной для получения характеристикой является ***средняя наработка до отказа***, представляющая собой математическое ожидание наработки объекта до отказа:

$$T_{\text{ср}} = M(t) = \int\limits_0^\infty P_0(t)dt. \qquad (2.10)$$

Таким образом, средняя наработка до отказа графически представляет собой площадь, лежащую под графиком функции $P_0(t)$.

Статистическая оценка средней наработки до отказа при $N(t) \neq 0$ может быть получена как

$$\overset{*}{T}_{\text{ср}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} t_{0i} + tN(t)}{N_0}, \qquad (2.11)$$

где t_{0i} – время до отказа i-го объекта; t – время наблюдения за $N_{\text{о}}$ объектами; N – число отказавших объектов за время t.

Восстанавливаемый объект. Время между предупредительными ремонтами распадается на отдельные циклы: работа и восстановление (ремонт). Каждый цикл состоит из двух интервалов: t_0 – время работы до отказа и $t_{\text{в}}$ – время восстановления. Количественным показателем свойства безотказности на каждом k-м цикле от начала работы до отказа может служить вероятность безотказной работы за время t_k от начала цикла. Этот показатель аналогичен соответствующему показателю невосстанавливаемого объекта. В общем случае после каждого ремонта объект имеет различные зависимости $P_0(t)$. Практически, после некоторого начального периода приработки, можно полагать, что эта зависимость от k не зависит и одинакова для каждого цикла.

Если исключить из рассмотрения время восстановления объекта на каждом цикле, полагая его равным нулю, то моменты отказов формируют поток, называемый ***потоком отказов***. Его важнейшей характеристикой является ***параметр потока отказов***, представляющий собой плотность вероятности отказа восстанавливаемого объекта, определяемую для рассматриваемого момента времени:

$$\tilde{\omega}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - P_0(t, t + \Delta t)}{\Delta t}, \qquad (2.12)$$

где $P(t, t + \Delta t)$ – вероятность безотказной работы на интервале времени Δt после момента t.

Практически для характеристики потока отказов обычно используется ***средний параметр потока отказов (или частота отказов)***:

$$\omega(t) = \int\limits_t^{t+t_0} \omega(x)dx, \qquad (2.13)$$

где t_0 – заданный интервал времени; $\omega(x)$ – функция параметра потока отказов.

Статистически параметр потока отказов определяется отношением числа отказавших объектов N в интервале времени $(t, t + \Delta t)$ к числу элементов N_0, находящихся под наблюдением, при условии, что все объекты, вышедшие из строя, заменяются работоспособными:

$$\overset{*}{\omega}(t) = [N(t, t + \Delta t)] / N_0. \tag{2.14}$$

Средний параметр потока отказов (частота отказов) статистически определяется по выражению (2.14), но продолжительность интервала Δt будет больше, чем для параметра потока отказов (в первом случае Δt – это 1 ч; во втором Δt – год).

Свойство долговечности. Основными характеристиками долговечности являются ***средний срок службы*** и ***средний ресурс***.

Для восстанавливаемого объекта средний срок службы представляет собой среднюю календарную продолжительность эксплуатации объекта от ее начала или возобновления после предупредительного ремонта до наступления предельного состояния.

Средний ресурс представляет собой среднюю наработку объекта от начала эксплуатации или ее возобновления после предупредительного ремонта до наступления предельного состояния. Для невосстанавливаемого объекта эти характеристики совпадают и представляют собой среднюю продолжительность работы до отказа или до наступления предельного состояния. Практически эта величина совпадет со средней наработкой до отказа $T_{ср}$.

2.3. Комплексные показатели

Параметр потока отказов и наработка на отказ, рассмотренные ранее, характеризуют надежность ремонтируемого изделия и не учитывают времени, необходимого на его восстановление. Поэтому они не характеризуют готовность изделия к выполнению своих функций в нужное время. Для этой цели вводятся такие критерии, как коэффициент готовности и коэффициент вынужденного простоя.

Коэффициент готовности. Он представляет собой отношение времени исправной работы к сумме времен исправной работы и вынужденных простоев объекта, взятых за один и тот же календарный срок. Эта характеристика обозначается $K_г$.

Согласно данному определению

$$K_г = t_р/(t_р + t_п), \tag{2.15}$$

где $t_р$ – суммарное время исправной работы объекта; $t_п$ – суммарное время вынужденного простоя.

Времена $t_р$ и $t_п$ вычисляются по формулам

$$t_р = \sum_{i=1}^{п} t_{рi}, \quad t_п = \sum_{i=1}^{п} t_{пi}, \tag{2.16}$$

где $t_{рi}$ – время работы объекта между (i-1)-м и i-м отказом; $t_{пi}$ – время вынужденного простоя после i-го отказа; п – число отказов (ремонтов) объекта.

Выражение (2.15) является статистическим определением коэффициента готовности. Для перехода к вероятностной трактовке величины $t_р$ и $t_п$ заменяются математическими ожиданиями времени между соседними отказами и времени восстановления, соответственно.

Тогда

$$K_г = t_{ср} /(t_{ср} + t_в), \tag{2.17}$$

где $t_{ср}$ – наработка на отказ; $t_в$ – среднее время восстановления.

Коэффициент вынужденного простоя. Он определяется отношением времени вынужденного простоя к сумме времен исправной работы и вынужденных простоев изделия, взятых за один и тот же календарный срок.

Согласно определению

$$K_п = t_п /(t_р + t_п) \tag{2.18}$$

или, переходя к средним значениям величин,

$$K_п = t_в /(t_{ср} + t_в). \tag{2.19}$$

Коэффициент готовности и коэффициент вынужденного простоя связаны между собой зависимостью

$$K_п = 1 – К_г . \tag{2.20}$$

При анализе надежности восстанавливаемых систем коэффициент готовности обычно вычисляют по формуле

$$K_г = T_{ср}/(T_{ср} + t_в). \tag{2.21}$$

Формула (2.21) справедлива только в том случае, если поток отказов простейший, и тогда $t_{ср} = T_{ср}$.

Часто $K_г$, вычисленный по формуле (2.21), отождествляют с вероятностью того, что в любой момент времени восстанавливаемая система исправна. На самом деле указанные характеристики неравноценны и могут быть отождествлены при определенных допущениях.

В самом деле, вероятность возникновения отказа ремонтируемой системы в начале эксплуатации (исключая период приработки) мала. С ростом времени эксплуатации эта вероятность возрастает. Это означает, что вероятность застать систему в исправном состоянии в начале эксплуатации будет выше, чем по истечении некоторого времени. Тогда как на основании формулы (2.21) коэффициент готовности не зависит от времени работы. Практически коэффициент готовности имеет смысл вероятности застать объект в исправном состоянии при установившемся процессе эксплуатации ($t \to \infty$).

Коэффициент технического использования. Этот показатель характеризует те же свойства, что и коэффициент готовности, но учитывает дополнительно предупредительные ремонты и представляет собой отношение математического ожидания времени пребывания объекта в работоспособном состоянии за некоторый период эксплуатации к сумме математических ожиданий времени пребывания объекта в работоспособном состоянии, времени простоев, обусловленных техническим обслуживанием, и времени ремонтов за тот же период эксплуатации, т. е.

$$K_{\text{т.и}} = T_{\text{ср}} / (T_{\text{ср}} + t_{\text{в}} + \tau), \qquad (2.22)$$

где τ – математическое ожидание времени нахождения объекта в отключенном состоянии для производства профилактических работ.

Средний недоотпуск электроэнергии. Этот показатель характеризует не только все основные свойства надежности системы, но и режим ее загрузки, и представляет собой математическое ожидание недоотпуска электроэнергии потребителям за расчетный период времени. ***Его оценка для узлов нагрузки и системы в целом является одной из конечных целей расчетов надежности***.

Рассмотрим суть оценки недоотпуска электроэнергии. Пусть в процессе эксплуатации объекта в момент t наступил отказ, в то время как нагрузка потребителя составляла величину $W_{\text{н}}$. В общем случае отказ системы по отношению к рассматриваемому потребителю может быть не полным, а частичным, когда система способна удовлетворять не всю нагрузку, а только часть ее W_R. Недоотпуск электроэнергии при этом может быть найден как

$$\Delta Э = \int_{t}^{t1} \left[W_{\text{н}}(t) - W_R \right] dt = \int_{t}^{t1} D(t) dt, \qquad (2.23)$$

где интервал времени ($t \div t_1$) – время дефицита энергии и интегрирование осуществляется только в области времени положительных дефицитов, т. е. когда $D(t) > 0$:

$$D(t) = W_н(t) - W_R. \tag{2.24}$$

В практических расчетах интеграл заменяется суммой

$$ΔЭ = \int_t^{t_1} [W_н(t)час - W_R]Δt, \tag{2.25}$$

где $W_н(t)$час – среднечасовая текущая нагрузка потребителя в момент t, определяемая по ожидаемому графику нагрузки в день аварии, $Δt = 1$ ч.

Недоотпуск электроэнергии за время T потребителям узла нагрузки при полном прекращении его электроснабжения можно определить по формуле

$$ΔЭ = W_н \cdot K_п = P_н\, T\, K_п, \tag{2.26}$$

где $P_н, W_н$ – соответственно математическое ожидание мощности и энергии, потребляемой узлом нагрузки за время T; $K_п$ – коэффициент вынужденного простоя системы относительно узла нагрузки (средняя вероятность состояния отказа).

Экономический ущерб от ненадежности. Этот показатель надежности является наиболее полным. Он характеризует интегрально все свойства надежности системы, включая режим ее загрузки и значимость потребителя энергии. Важность каждого потребителя с экономической точки зрения характеризуется ***величиной удельного ущерба*** [$У_о$, р./(кВт · ч)].

Экономический ущерб при каждом отказе k ($k = 1, 2, \dots n$) за некоторый период T

$$У_k = У_о\, ΔЭ_k, \tag{2.27}$$

где ΔЭ определяется по выражению (2.25) или (2.26).

В том случае, когда ущерб зависит еще и от глубины ограничения потребителя по мощности, определение его усложняется из-за необходимости расчетов по ступенчатой зависимости удельных ущербов.

Как видно из изложенного, надежность объекта характеризуется довольно широким спектром показателей. Вместе с тем из всех можно выделить несколько показателей, которыми в значительной степени определяется надежность, и которыми пользуются в инженерной практике. Такими показателями для элементов систем являются вероятность аварийного простоя q (или соответствующий ему коэффициент готовности $K_г$), относительная длительность плановых простоев τ и частота отказов ω и выводов в плановый ремонт $\omega_п$, средний недоотпуск энергии $\Delta Э$ или ущерб У. Эти показатели считаются основными или практическими показателями надежности.

2. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ЗАДАЧАХ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ

Настоящий раздел составлен по материалам литературы [1,2,4,10]. Там же можно ознакомиться с доказательствами основных положений и выводов, а также расширить знания по интересующему вопросу.

Для инженерных методов расчета надежности систем электроснабжения в основном используется аппарат случайных величин, данный в первой главе.

Закономерности случайных величин описываются с помощью интегральной функции распределения вероятностей для дискретных и непрерывных случайных величин. Кроме того, для описания распределения вероятностей непрерывных случайных величин применяется дифференциальная функция распределения вероятностей или дифференциальный закон распределения случайных величин.

При анализе надежности преимущественно находят применение законы распределения, которые определяются с помощью небольшого количества числовых характеристик. Так, например, показательный (экспоненциальный) закон распределения определяется лишь одним параметром – математическим ожиданием случайной величины. Нормальный закон распределения характеризуется двумя параметрами – математическим ожиданием случайной величины и дисперсией.

Ниже рассматриваются законы распределения, получившие наибольшее применение при описании случайных величин, имеющих место при проектировании и эксплуатации систем электроснабжения.

3.1. Биноминальное распределение

В системах электроснабжения для нормального функционирования, повышения надежности эксплуатации и создания оптимального резерва стремятся по возможности использовать ***однотипное оборудо-***

вание (выключатели, трансформаторы, приводы и т. п.). Это оборудование может находиться в исключающем друг друга состояниях (исправно или неисправно, включено или выключено и т. д.).

Произведем n независимых опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться некоторое событие A (например, выключатель включен). Вероятность появления события A в каждом опыте равна p, а вероятность непоявления $q = 1 - p$. Требуется найти вероятность p_n^m того, что событие A в этих n опытах появится ровно m раз.

Рассмотрим сложное событие B_m, состоящее в том, что событие A появится в n опытах ровно m раз. Это событие может осуществиться различными способами. Представим событие B_m как сумму произведений событий, состоящих в появлении или непоявлении события A в отдельном опыте. Будем обозначать A_i появление события A в i-м опыте; $\overline{A}_i$ – непоявление события A в i-м опыте.

Очевидно, каждый вариант появления события B_m (каждый член суммы) должен состоять из m появлений события A и n-m непоявлений, т. е. из m событий A и n-m событий $\overline{A}$ с различными индексами. Тогда

$$\begin{aligned} B_m = {} & A_1 A_2 \cdots A_m \overline{A}_{m+1} \cdots \overline{A}_n + \ldots + A_1 \overline{A}_2 A_3 \cdots \overline{A}_{n-1} A_n + \ldots \\ & + \overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_{n-m} A_{n-m+1} \cdots A_n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

причем в этом выражении в каждое произведение событие A должно входить m раз, а $\overline{A}$ должно входить n-m раз.

Число всех комбинаций такого рода равно C_n^m, т. е. числу способов, какими можно из n опытов выбрать m, в которых произошло событие A. Вероятность каждой такой комбинации, по теореме умножения для независимых событий, равна $\rho^m q^{n-m}$. Так как комбинации между собой несовместны, то, по теореме сложения, вероятность сложного события B_m будет равна

$$P_n^m = p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где C_n^m – число слагаемых вида $p^m q^{n-m}$, равное числу комбинаций.

Таким образом, если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появится с вероятностью p, то вероятность того, что событие A появится ровно m раз, выражается формулой:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}, \tag{3.2}$$

где $q = 1 - p$.

Формула (3.2) является аналитическим выражением искомого закона распределения и носит название формулы Бернулли.

В качестве иллюстрации определения закона распределения вероятностей различных состояний элементов по формуле (3.1) рассмотрим схему на рис. 3.1.

Имеем $n = 4$ одинаковых электродвигателя. По технологическим условиям каждый двигатель может быть включен с вероятностью $P = 0{,}4$ и быть в выключенном состоянии с вероятностью $q = 0{,}6$.

Данная система может находиться в пяти возможных состояниях. Определим эти состояния и соответствующие им вероятности, которые могут быть следующими:

1) ни один двигатель не работает – вероятность такого состояния P_4^0;

2) один двигатель работает – а три нет, вероятность состояния P_4^1;

3) два двигателя работают – два нет, вероятность состояния P_4^2;

4) три двигателя работают – один нет, вероятность состояния P_4^3;

5) все двигатели включены и работают, вероятность состояния P_4^4.

Представим вероятность этих событий в виде суммы вида (3.1). Тогда

$$P_4^0 = q_1 q_2 q_3 q_4 = C_4^0 p^0 q^4 = q^4 = 0{,}6^4 = 0{,}1296,$$

где $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$, т. е. равновероятно для всех двигателей.

$$P_4^1 = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 =$$
$$= p q^3 + p q^3 + p q^3 + p q^3 = 4 p q^3 = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456;$$
$$P_4^2 = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}3456;$$
$$P_4^3 = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}1536;$$
$$P_4^4 = C_4^4 p^4 q^0 = p^4 = 0{,}4^4 = 0{,}0256.$$

Графически распределение вероятностей возможных состояний системы из четырех двигателей будет иметь вид, представленный на рис. 3.2. Так как эти состояния образуют полную группу событий, то их суммарная вероятность равна 1, т. е.

$$1 = q^4 + C_4^1 p^1 q^3 + C_4^2 p^2 q^2 + C_4^3 p^3 q^1 + C_4^4 p^4 q^0 =$$
$$= P_4^0 + P_4^1 + P_4^2 + P_4^3 + P_4^4 = (p+q)^n. \qquad (3.3)$$

В выражении (3.3) коэффициенты $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ есть коэффициенты разложения бинома $(p+q)^n$, члены разложения которого по форме представляют собой вероятности P_n^m. Поэтому распределение вероятностей вида (3.2) называется ***биноминальным распределением***.

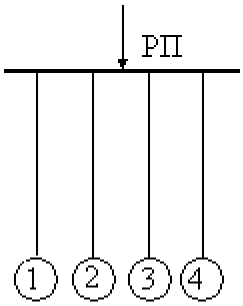


Рис. 3.1. Схема подключения электродвигателей

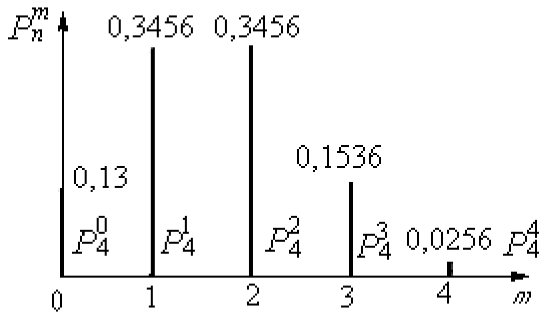


Рис. 3.2. Распределение вероятностей состояний системы

Начальный момент первого порядка (математическое ожидание) биноминального распределения $m_1 = np$.

Центральный момент второго порядка (дисперсия) $\mu_2 = Д = npq$.

Выделим некоторые ***частные вероятности***, облегчающие решение практических задач:

- вероятность того, что все элементы выключены (повреждены)

$$P_n^0 = P_n(m=0) = C_n^0 P^0 q^{n-0} = q^n;$$

- вероятность того, что в рассматриваемой группе работают от m_1 до m_2 элементов

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m=m_2} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Например, для нашего случая определим вероятность того, что включено от одного до трех электродвигателей:

$$P_4(1 \le m \le 3) = P_4^1 + P_4^2 + P_4^3;$$

- вероятность того, что работает (включен) хотя бы один элемент

$$P_n(m \geq 1) = 1 - P_n^0 = 1 - q^n;$$

- вероятность того, что работает не более, например, двух элементов

$$P_n(m \leq 2) = P_n^0 + P_n^1 + P_n^2 = \sum_{m=0}^{m=2} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

П р и м е р. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна p = 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 сут расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Р е ш е н и е. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжении каждых из 6 сут постоянна и равна p = 0,75. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6^4 = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} (0{,}75)^4 (0{,}25)^2 = 0{,}3.$$

3.2. Распределение Пуассона

Это распределение, так же как и биноминальное, описывает характеристики дискретных случайных величин.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, которая может принимать только целые, неотрицательные значения:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

причем последовательность этих значений теоретически не ограничена.

Говорят, что случайная величина X распределена по закону Пуассона, если вероятность того, что она примет определенное значение m, выражается формулой

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \tag{3.4}$$

где a – некоторая положительная величина, называемая параметром закона Пуассона.

Последовательность вероятностей, задаваемая формулой (3.4), представляет собой ряд распределения [1], т. е. сумма всех вероятностей P_m равна единице и имеет вид

X_m	0	1	2	…	m	…
P_m	e^{-a}	$\frac{a}{1!}e^{-a}$	$\frac{a^2}{2!}e^{-a}$	…	$\frac{a^m}{m!}e^{-a}$	…

Зададим параметру a некоторые численные значения и определим вероятности P_m для различных значений m по формуле (3.4) или из приложения [1]. В результате этих действий получим данные рядов распределения, которые сведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Ряды распределения для различных значений a

X_m	0	1	2	3	4	5	6	7
$a = 0{,}5$								
P_m	0,606	0,303	0,076	0,0126	0,0016	0,00002		
$a = 2{,}0$								
P_m	0,135	0,27	0,27	0,18	0,09	0,036	0,012	0,0037
$a = 3{,}5$								
P_m	0,03	0,105	0,185	0,215	0,189	0,132	0,08	0,04

На рис. 3.3 показаны многоугольники распределения случайной величины X, распределенной по закону Пуассона и построенные по данным табл. 3.1.

Из рис. 3.3 видно, что в зависимости от параметра a многоугольники распределения имеют существенные различия и по форме похожи на другие известные законы распределения случайных величин.

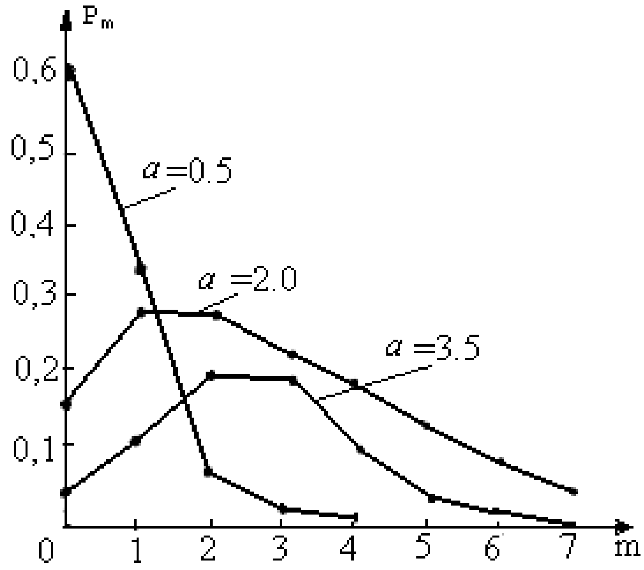


Рис. 3.3. Многоугольники распределения

Определим основные, наиболее часто используемые, числовые характеристики случайной величины X, распределенной по закону Пуассона. По определению математическое ожидание

$$m_x = M[X] = \sum_{m=0}^{\infty} m P_m = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

После некоторых преобразований [1] получим $m_x = a$.

Таким образом, параметр a представляет собой не что иное, как математическое ожидание случайной величины X.

Другая числовая характеристика – дисперсия тоже равна параметру a, т. е. $Д_x = a$.

Таким образом, ***дисперсия случайной величины***, распределенной по закону Пуассона, равна ее математическому ожиданию a:

$$m_x = Д_x = a. \tag{3.5}$$

Это свойство распределения Пуассона часто применяется на практике для решения вопроса, правдоподобна ли гипотеза о том, что случайная величина X распределена по закону Пуассона. Для этого определяют из опыта статистические характеристики – математическое ожидание и дисперсию. Если их значения близки, то это может служить основанием в пользу гипотезы о пуассоновском распределении. Резкое различие этих характеристик, напротив, свидетельствует против такой гипотезы.

Распределение Пуассона очень часто встречается в инженерных задачах, например:

1. Одновременно в течение времени t работают n однотипных невосстанавливаемых элементов. Наработка до отказа каждого элемента распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью отказов λ. В этих условиях число отказов элементов за время t – случайная величина M с распределением Пуассона, причем $a = n\lambda t$.

2. Промежутки времени между последовательными отказами восстанавливаемого изделия имеют экспоненциальное распределение. Наработка изделия на отказ равна T. В этих условиях число отказов за время t – случайная величина M с распределением Пуассона, причем $a = t/T$.

3. Одновременно в течение времени t испытываются n однотипных невосстанавливаемых изделий. Вероятность отказа одного изделия за время t равна q. В этих условиях число изделий, отказавших за время t – случайная величина M с распределением Пуассона, причем $a = nq$.

В задачах энергетики наибольший интерес представляют потоки событий, распределение которых описывается законом Пуассона. Во второй главе мы ввели такие понятия потока событий, как ординарность, стационарность и отсутствие последействия. В силу большой значимости пуассоновского потока событий на практике, рассмотрим эти понятия и свойства потока более подробно.

Под ***потоком событий*** понимается последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то моменты времени. Примерами могут служить: поток вызовов на телефонной станции; поток включений приборов в бытовой электросети; поток сбоев электронной вычислительной машины; потоки отказов энергетических объектов (выключателей, разъединителей, трансформаторов и др.) в достаточно большой системе и т. п. События, образующие поток, в общем случае могут быть различными, но мы будем рассматривать лишь поток ***однородных событий***, различающихся только моментами появления. Такой поток можно изобразить как последовательность точек t_1, t_2, …, t_k на числовой оси (рис. 3.4).

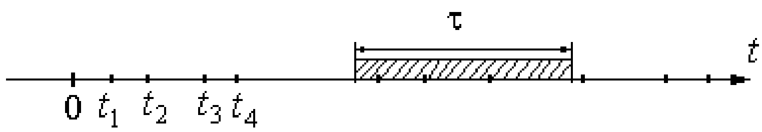


Рис. 3.4. Представление потока событий

Рассмотрим потоки событий, обладающие некоторыми особенно простыми свойствами. Для этого расширим введенные ранее определения.

1. Поток событий называется ***стационарным***, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной τ (рис. 3.4) зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси $0t$ расположен участок. Другими словами, события распределены на оси абсцисс с одинаковой средней плотностью. Обозначим эту плотность (т. е. математическое ожидание числа событий, приходящихся на единицу длины) через λ.

Условию стационарности удовлетворяет поток событий, вероятностные характеристики которого не зависят от времени, т. е. такому потоку характерна ***постоянная плотность***. На практике часто встречаются потоки событий, которые (по крайней мере на ограниченном отрезке времени) могут рассматриваться как стационарные. Например, поток вызовов на телефонной станции на участке времени от 12 до 13 часов может считаться стационарным. Тот же поток в течение целых суток уже не может считаться стационарным. Так обстоит дело и со всеми другими физическими процессами, которые мы называем «стационарными». В действительности же все они стационарны лишь на ограниченном участке времени, а распространение этого участка до бесконечности – лишь удобный прием, применяемый в целях упрощения анализа.

2. Поток событий называется ***потоком без последействия***, если для любых неперекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие. Это условие, наиболее существенное для потока событий, означает, что события происходят в системе независимо друг от друга. Например, потоки отказов элементов больших электрических систем. Условие отсутствия последействия может быть легко нарушено за счет появления такой зависимости и анализ процессов, протекающих в системе, усложняется.

3. Поток событий называется ***ординарным***, если вероятность попадания на элементарный участок Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Это условие означает, что события происходят поодиночке, а не парами, тройками и т. д.

Если поток событий обладает всеми тремя свойствами (т. е. стационарен, ординарен и не имеет последействия), то он называется ***простейшим*** (или стационарным пуассоновским). Реальные потоки отказов энергетических объектов, как правило, обладают свойствами ординарности и отсутствия последействия [5], т. е. являются пуассоновскими. Более того, для большинства из них потоки отказов оказываются и стационарными, т. е. ***простейшими***.

Простейший поток играет среди потоков событий вообще особую роль, в некоторой степени аналогичную роли нормального закона среди других законов распределения. Известно, что при суммировании большого числа независимых случайных величин, подчиненных практически любым законам распределения, получается величина, приближенно распределенная по нормальному закону. Аналогично при суммировании (взаимном наложении) большого числа ординарных, стационарных потоков с практически любым последействием получается поток, сколь угодно близкий к простейшему. Условия, которые должны для этого соблюдаться, аналогичны условиям центральной предельной теоремы, а именно – складываемые потоки должны оказывать на сумму приблизительно равномерно малое влияние. На практике оказывается достаточным сложить 4–5 потоков, чтобы получить поток, с которым можно оперировать как с простейшим.

На практике даже при потоке событий, отличающемся от простейшего, часто можно получить удовлетворительные по точности результаты, заменив поток любой структуры простейшим с той же плотностью. Поэтому в дальнейшем будем оперировать с простейшими потоками.

Рассмотрим на оси $0t$ простейший поток событий как неограниченную последовательность случайных точек (рис. 3.4). Выделим произвольный участок времени длиной τ. Доказано [1], что при условиях стационарности, отсутствия последействия и ординарности потока событий, число точек, попадающих на участок τ, распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием:

$$a = \lambda\tau, \tag{3.6}$$

где λ – плотность потока (среднее число событий, приходящееся на единицу времени).

Вероятность того, что за время τ произойдет ровно m событий, будет равна

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}. \tag{3.7}$$

Вероятность того, что участок окажется пустым (не произойдет ни одного события), будет

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}. \tag{3.8}$$

Вероятность появления хотя бы одного события будет

$$P_{(m\geq 1)}(\tau) = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_\infty = \sum_{m=1}^{\infty} P_m = 1 - P_{(m=0)}. \qquad (3.9)$$

Вероятность того, что в интервале времени τ произойдет не менее $к$ событий, будет

$$P_{(m\geq k)} = P_k + P_{(k+1)} + P_{(k+2)} + ... = \sum_{m=k}^{\infty} P_m = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_m. \qquad (3.10)$$

П р и м е р. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 5 мин поступит: а) 2 вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов. Поток вызовов предполагается простейший.

Р е ш е н и е. По условию $\lambda = 2$, $t = 5$, $m = 2$. Воспользуемся формулой Пуассона (3.7).

а) Искомая вероятность того, что за 5 мин поступит 2 вызова

$$P_2 = 10^2 \cdot e^{-10} / 2! = 100 \cdot 0{,}000045 / 2 = 0{,}00225.$$

Это событие практически невозможно.

б) Вероятность того, что за 5 мин поступит менее двух вызовов равна

$$P_{(m<2)} = P_0(5) + P_1(5) = e^{-10} + (10 \cdot e^{-10})1! = 0{,}000495.$$

Это событие также практически невозможно.

в) События «поступило менее двух вызовов» и «поступило не менее двух вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 5 мин поступит не менее двух вызовов

$$P_{(m\geq 2)} = 1 - P_{(m<2)} = 1 - 0{,}000495 = 0{,}999505.$$

Это событие практически достоверно.

Другим важным свойством закона Пуассона является то, что он является предельным для биноминального распределения:

$$P_n^m = C_n^m P^m (1-P)^{n-m}, \qquad (3.11)$$

если одновременно устремлять число опытов n к бесконечности, а вероятность P – к нулю, причем их произведение np сохраняет постоянное значение:

$$np = a. \qquad (3.12)$$

Это предельное свойство биноминального распределения можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m P^m (1-P)^{n-m} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \tag{3.13}$$

Предельное свойство биноминального закона часто находит применение на практике. Допустим, что производится большое количество независимых опытов n, в каждом из которых событие A имеет очень малую вероятность P. Тогда для вычисления вероятности P_n^m того, что событие A появится равно m раз, можно воспользоваться приближенной формулой:

$$P_n^m \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}, \tag{3.14}$$

где $np = a$ – параметр закона Пуассона, которым приближенно заменяется биноминальное распределение.

От этого свойства закона Пуассона – выражать биноминальное распределение при большом числе опытов и малой вероятности события – происходит его название, часто применяемое в учебниках статистики: ***закон редких явлений***.

Уместно заметить, что если при биноминальном распределении вероятностей $(p + q)^n$, величины p и q не сильно отличаются друг от друга (не более чем на 2 порядка), например, $p = 0{,}1$ и $q = 0{,}9$ или $p = 0{,}5$ и $q = 0{,}5$, то при увеличении числа опытов $n\to\infty$ асимптотой биноминального распределения будет нормальный закон распределения.

Если же p и q резко отличаются, т. е. $p\to 0$ или $q\to 0$, то при $n\to\infty$ асимптотой биноминального распределения будет закон Пуассона (закон редких явлений).

Таким образом, биноминальное распределение сводится в пределе к двум – нормальному и пуассоновскому.

Пример. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно 3; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

Решение. Число $n = 500$, а вероятность $p = 0{,}002$ мала и рассматриваемые события (повреждение изделий) независимы, поэтому можно использовать формулу Пуассона (3.14) для определения вероятностей биноминального распределения.

- Найдем параметр $a = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$.

Вероятность того, что будет повреждено ровно 3 изделия будет

$$P_{500}^{3}=\frac{(np)^{m}}{m!}e^{-np}=\frac{e^{-1}}{3!}=\frac{0{,}36788}{6}=0{,}0613.$$

- Найдем вероятность того, что будет повреждено менее трех изделий:

$$P_{500}^{0}+P_{500}^{1}+P_{500}^{2}=e^{-1}+e^{-1}+\frac{e^{-1}}{2}=\frac{5}{2}e^{-1}=\frac{5}{2}0{,}36788=0{,}9197.$$

- Найдем вероятность того, что будет повреждено более трех изделий. События «повреждено более трех изделий» и «повреждено не более трех изделий» – противоположны, поэтому

$$P_{(m>3)}=1-\left[P_{500}^{0}+P_{500}^{1}+P_{500}^{2}+P_{500}^{3}\right].$$

Используя результаты, полученные выше, имеем

$$P_{(m>3)}=1-[0{,}9197+0{,}0613]=0{,}019.$$

Событие очень маловероятно.

- Найдем вероятность того, что будет повреждено хотя бы одно изделие. События «повреждено хотя бы одно изделие» и «ни одно изделие не повреждено» – противоположные, следовательно,

$$P_{(m\geq 1)}=1-P_{500}^{0}=1-e^{-1}=1-0{,}36788=0{,}632.$$

3.3. Показательное распределение

3.3.1. Определение показательного распределения

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины T, которое описывается плотностью

$$f(t)=\begin{cases}0 \quad \text{при } t<0,\\ \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{при } t\geq 0,\end{cases} \tag{3.15}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Из выражения (3.15) видно, что показательное распределение определяется одним параметром λ. Эта особенность показательного распределения указывает на его преимущество по сравнению с распределениями, зависящими от бóльшего числа параметров. Обычно параметры неизвестны и приходится находить их оценки (приближенные значения). Очевидно, что проще оценить один параметр, чем два или три и т. д. Примером непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону, может служить промежуток времени T

между появлениями двух последовательных событий простейшего потока.

Определим функцию распределения показательного закона:

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\lambda\int_{0}^{t} e^{-\lambda t}dt. \qquad (3.16)$$

Положив в (3.16) $-\lambda t = y$, $dt = dy/\lambda$ и проинтегрировав, получим:

$$F(t)=\lambda\int_{0}^{t} e^{-\lambda t}dt=\frac{\lambda}{\lambda}\int_{0}^{t} e^{y}dy=C_0-e^{y}=C_0-e^{-\lambda t}.$$

При $t=0$, $F(t)=0$ и, следовательно, $C_0-e^{-\lambda t}=0$. Откуда $C_0=1$.

Таким образом,

$$F(t)=\begin{cases}0 \ \text{ при } \ t<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda t} \ \text{ при } \ t\ge 0.\end{cases} \qquad (3.17)$$

Мы определили функцию распределения показательного закона с помощью плотности распределения. Можно, наоборот, получить плотность распределения показательного закона, используя функцию распределения [1].

Графики плотности и функции распределения показательного закона показаны на рис. 3.5.

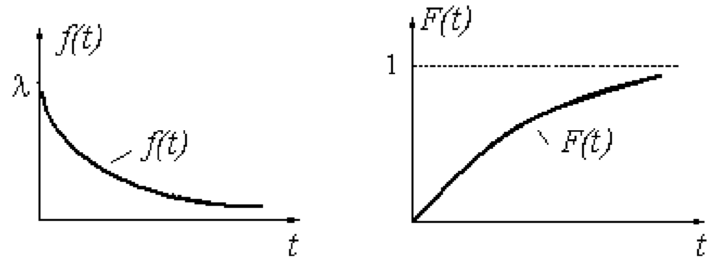


Рис. 3.5. Графики плотности $f(t)$ и функции распределения $F(t)$ показательного закона

3.3.2. Вероятность попадания в заданный интервал показательно распределенной случайной величины

Найдем вероятность попадания в интервал (a, $в$) непрерывной случайной величины T, распределенной по показательному закону и заданной функцией распределения

$$F(t)=1-e^{-\lambda t} \ \text{ при } \ t\ge 0.$$

Очевидно, эта вероятность есть приращение функции распределения непрерывной случайной величины T на заданном интервале. Данное положение иллюстрируется на рис. 3.6.

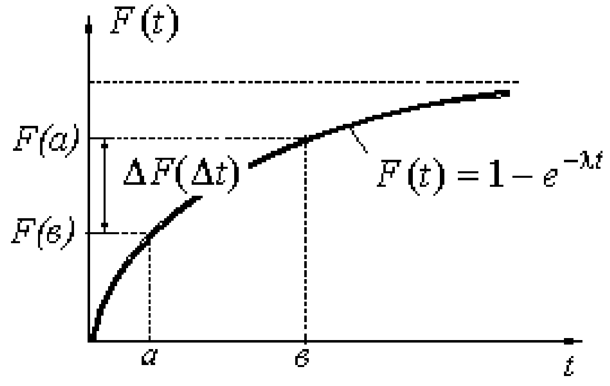


Рис. 3.6. Приращение функции
распределения в интервале (a, $в$)

Воспользуемся формулой (1.18), согласно которой

$$\Delta F(t) = P(a < T < в) = F(в) - F(a).$$

Учитывая, что

$$F(a) = 1 - e^{-\lambda a}, \ a \quad F(в) = 1 - e^{-\lambda в},$$

получаем

$$P(a < T < в) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda в}. \qquad (3.18)$$

П р и м е р. Непрерывная случайная величина T распределена по показательному закону $f(t) = 2e^{-2t}$ при $t \geq 0$; $f(t) = 0$ при $x < 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания T попадет в интервал (0,3; 1).

Р е ш е н и е. По условию $\lambda = 2$. Воспользуемся формулой (3.18)

$$P(0{,}3 < T < 1) = e^{-(2\cdot 0{,}3)} - e^{-(2\cdot 1)} = e^{-0{,}6} - e^{-2} \cong 0{,}41.$$

3.3.3 Числовые характеристики показательного распределения

Пусть непрерывная случайная величина T распределена по показательному закону

$$f(t)=\begin{cases}0 \quad \text{при } t<0,\\ \lambda e^{-\lambda t} \text{ при } t\geq 0.\end{cases}$$

Найдем математическое ожидание (формула (1.25)):

$$m_t=M(T)=\int\limits_0^{\infty} t\cdot f(t)dt \;=\lambda\int\limits_0^{\infty} t \;\; e^{-\lambda t}\,dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$m_t=M(T)=1/\lambda. \tag{3.19}$$

Таким образом, ***математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра*** λ.

Дисперсию величины T определим по формуле (1.36)

$$Д(T)=\int\limits_0^{\infty}(t-m_t)^2 f(t)dt=\int\limits_0^{\infty}t^2 f(t)dt-\int\limits_0^{\infty}2\cdot m_t\cdot t\cdot f(t)dt+$$

$$+\int\limits_0^{\infty}m_t^2\, f(t)dt=\int\limits_0^{\infty}t^2\, f(t)dt-2\,m_t^2+m_t^2=\lambda\int\limits_0^{\infty}t^2 e^{-\lambda t}\cdot dt \;\; -\frac{1}{\lambda^2}.$$

Откуда, интегрируя по частям, получим

$$\lambda\int\limits_0^{\infty}t^2 e^{-\lambda t}\cdot dt=2/\lambda^2.$$

Следовательно,

$$Д(T)=1/\lambda^2, \tag{3.20}$$

откуда среднее квадратическое отклонение

$$\delta_t=\sqrt{Д(T)}=1/\lambda. \tag{3.21}$$

Сравнивая (3.19) и (3.21), заключаем, что

$$m_t=\delta_t=1/\lambda,$$

т. е. ***математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой и представляют среднее время между событиями в потоке***.

Показательное распределение широко применяется на практике, в частности в теории надежности, одним из основных понятий которой являются функция надежности и функция ненадежности.

3.3.4. Функция надежности

Пусть элемент системы электроснабжения начинает работать в момент времени $t_0 = 0$, а по истечении времени длительностью t происходит отказ. Обозначим через T непрерывную случайную величину – длительность времени безотказной работы элемента. Если элемент проработал безотказно время, меньшее t, то следовательно, за время длительностью t наступит отказ.

Таким образом, функция распределения $F(t) = P(T<t)$ определяет ***вероятность отказа*** за время длительностью t и называется ***функцией ненадежности*** $F(t)$. Следовательно, вероятность безотказной работы за то же время длительностью t, т. е. вероятность противоположного события будет равна

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t). \tag{3.22}$$

Функцию $R(t)$, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t, называют ***функцией надежности***.

Функции $F(t)$ и $R(t)$ являются по существу ***интегральными законами распределения*** случайной величины T – времени безотказной работы элемента. При этом необходимо помнить, что понимается под «элементом» в системах электроснабжения.

Другими словами: за основную количественную меру технической ***надежности*** элемента принята вероятность безотказной работы элемента в течение заданного времени в определенных условиях, т. е.

$$R(t) = P(T > t);$$

за количественную меру технической ***ненадежности*** – вероятность отказа (выхода из строя) элемента в течение заданного времени в определенных условиях, т. е.

$$F(t) = P(T < t).$$

В общем случае время T безотказной работы элемента является ***понятием обобщенным***. Часто оно может измеряться числом включений или числом циклов работы (например, испытание реле на усталостную прочность), числом километров пробега (автомобиль, электровоз).

3.3.5. Показательный закон надежности

На практике длительность времени безотказной работы элемента часто имеет показательное распределение с функцией распределения

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Поэтому, согласно выражению (3.22), функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента будет иметь вид

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}, \qquad (3.23)$$

где λ – интенсивность отказов (среднее число событий в единицу времени).

Функцию надежности, определяемую равенством (3.23), называют ***показательным законом надежности***. Эта формула позволяет найти вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительностью t при условии, что $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$. В электроэнергетике при решении практических задач интенсивность отказов принимается постоянной в течение длительного времени, т. е. рассматривается стационарное состояние. Иногда это условие не выполняется из-за процессов приработки и старения. Для описания этих периодов следует пользоваться другими, более сложными законами распределения. Обычно в период приработки надежность стремятся повысить за счет дополнительного контроля при изготовлении, монтаже, наладке, а в период старения – за счет дополнительного обслуживания. Все это в совокупности позволяет принимать $\lambda = \text{const}$ без внесения существенных погрешностей в расчетах.

Пример. Силовой трансформатор в городской электрической сети работает в течение времени T, которое является случайной величиной и распределено по показательному закону с плотностью:

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} \text{ при } t \geq 0, \end{cases}$$

где $\lambda = 0{,}03$ 1/год.

По истечении времени T вследствие роста нагрузки, повреждения его или других причин трансформатор заменяют другим.

Поставим два блока вопросов.

1. Определить

- среднюю продолжительность эксплуатации трансформатора;
- вероятность надежной работы трансформатора в течение первых 10 лет;

- вероятность отказа трансформатора в период между 10 и 20 годами эксплуатации.

2. Определить вероятность того, что за время эксплуатации $t = 30$ годам:

- трансформатор не понадобится заменять ни разу;
- трансформатор потребуется заменить два раза;
- трансформатор потребуется заменить не менее двух раз.

***Р е ш е н и е*.** По условию случайная величина T распределяется по показательному закону с постоянной интенсивностью отказов $\lambda = 0{,}03$. Поэтому ответы на вопросы первого блока получим, используя показательный закон надежности.

- Определим среднюю продолжительность эксплуатации трансформатора, т. е. математическое ожидание случайной величины T по формуле (3.19)

$$M(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}03} \cong 33 \text{ года}.$$

Вероятность надежной работы трансформатора в течение первых 10 лет, т. е. $P(T > t)$ определим по формуле (3.23)

$$R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-0{,}03\cdot 10} \cong 0{,}74.$$

- Вероятность отказа трансформатора в период между 10 и 20 годами эксплуатации, т. е. $P(10 < T < 20)$ найдем по формуле (3.18)

$$P(10 < T < 20) = e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2} = e^{-0{,}03\cdot 10} - e^{-0{,}03\cdot 20} = 0{,}192.$$

Второй блок вопросов необходимо решать исходя из того, что события замены трансформатора в электрической сети образуют простейший (пуассоновский) поток с интенсивностью событий (замены) λ. Вероятность наступления ровно m событий за промежуток времени τ определяется по закону Пуассона (3.7):

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau},$$

где $a = \lambda\tau$ – есть математическое ожидание числа событий (замен) за интервал времени τ.

- Вероятность того, что трансформатор не понадобится менять ни разу (пустой интервал τ)

$$P_{(m=0)} = e^{-\lambda\tau} = e^{-0{,}03\cdot 30} = 0{,}41.$$

- Вероятность замены трансформатора два раза

$$P_{(m=2)} = \frac{(0{,}03 \cdot 30)^2}{2 \cdot 1} e^{-0{,}03 \cdot 30} = 0{,}165.$$

- Вероятность замены трансформатора не менее двух раз

$$P_{(m \geq 2)} = 1 - \left[P_{(m=0)} + P(m=1)\right] = 1 - 0{,}41 - \frac{0{,}03 \cdot 30}{1} e^{-0{,}03 \cdot 30} =$$

$$= 1 - 0{,}41 - 0{,}366 = 0{,}224.$$

3.4. Закон равномерного распределения вероятностей

В задачах практики встречаются непрерывные случайные величины, о которых заранее известно, что их возможные значения лежат в пределах некоторого определенного интервала. Кроме того, известно, что в пределах этого интервала все значения случайной величины одинаково вероятны (точнее обладают одной и той же плотностью вероятности). О таких случайных величинах говорят, что они распределяются по ***закону равной вероятности*** или ***закону равномерной плотности***.

Приведем пример случайной величины, распределенной с равномерной вероятностью.

Поезда метрополитена идут с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в некоторый момент времени. Время T, в течение которого ему придется ждать поезда, представляет собой случайную величину, распределенную с равномерной плотностью на участке 0, 2 мин.

Рассмотрим случайную величину X, подчиненную закону равномерной плотности на участке от a до $в$ (рис. 3.7) и напишем для нее выражение плотности распределения $f(x)$. Плотность $f(x)$ постоянна и равна c на отрезке $(a, в)$; вне этого отрезка она равна нулю:

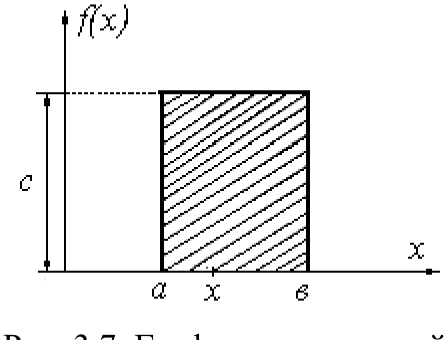


Рис. 3.7. График равномерной плотности распределения

$$f(x) = \begin{cases} c \text{ при } a < x < в, \\ 0 \text{ при } a > x > в. \end{cases}$$

Так как площадь, ограниченная кривой распределения, равна единице:

$$c(в - a) = 1,$$

то $$c = \frac{1}{в - a},$$

и плотность распределения $f(x)$ будет иметь вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} \text{ при } a<x<в,\\ 0 \text{ при } a>x>в.\end{cases} \qquad (3.24)$$

Эта формула и выражает закон равномерного распределения вероятностей (закон равномерной плотности) на участке (a, $в$).

Напишем выражение для функции распределения $F(x)$. Функция распределения выражается площадью, ограниченной кривой распределения и осью абсциссы, лежащей левее точки x (рис. 3.7). Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<a,\\ \dfrac{x-a}{в-a} \text{ при } a<x<в,\\ 1 \text{ при } x>в.\end{cases} \qquad (3.25)$$

График функции распределения $F(x)$ приведен на рис. 3.8. Определим основные числовые характеристики случайной величины X, подчиненной закону равномерной плотности на участке от a до $в$.

Математическое ожидание величины X равно

$$m_x=\int_a^в \frac{x}{в-a}\,dx=\frac{a+в}{2}. \qquad (3.26)$$

Дисперсия величины X

$$Д_x=\mu_2=\frac{1}{в-a}\int_a^в\left(x-\frac{a+в}{2}\right)^2dx=\frac{(в-a)^2}{12}, \qquad (3.27)$$

откуда среднее квадратическое отклонение

$$\delta_x=\sqrt{Д_x}=\frac{в-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (3.28)$$

Найдем вероятность попадания случайной величины X, распределенной по закону равномерной плотности, на участок (x_1, x_2), представляющий собой часть участка (a, $в$) (рис. 3.9).

Геометрически, как это видно из рис. 3.9, вероятность представляет собой заштрихованную площадь. Очевидно, что она равна

$$P(x_1<X<x_2)=\frac{x_2-x_1}{в-a}, \qquad (3.29)$$

т. е. отношению длины отрезка (x_1, x_2) ко всей длине участка $(a, в)$, на котором задано равномерное распределение.

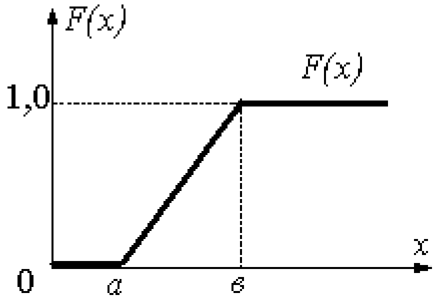


Рис. 3.8. Функция распределения

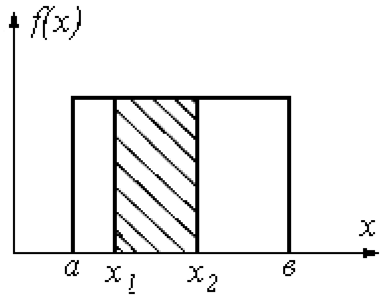


Рис. 3.9. Вероятность попадания величины X на участок (x_1, x_2)

П р и м е р. Нагрузка группы потребителей электроэнергии распределена равномерно в диапазоне от 5 до 155 кВ·А. Определить:

1) вероятность того, что реальная нагрузка будет находиться в диапазоне от 10 до 40 кВА;

2) значение расчетной нагрузки $S_р$, которое может быть превышено реальной нагрузкой с вероятностью $P = 0{,}05$;

3) вероятность того, что реальная нагрузка будет меньше 55 кВ·А.

Р е ш е н и е. При решении этой задачи будем пользоваться формулой (3.29), где $a = 5$кВ·А, $в = 155$ кВ·А, а x_1 и x_2 принимают значения, соответствующие поставленным вопросам.

1. Вероятность того, что реальная нагрузка будет находиться в пределах от 10 до 40 кВ·А

$$P(10 < S < 40) = \frac{40 - 10}{155 - 5} = \frac{30}{150} = 0{,}2.$$

2. Значение расчетной нагрузки $S_р$, которое может быть превышено реальной нагрузкой с вероятностью, равной 0,05, найдем исходя из того, что $x_1 = S_р$, а $x_2 = в = 155$. Тогда

$$P(S > S_р) = 0{,}05 = \frac{155 - S_р}{155 - 5},$$

откуда

$$S_р = 155 - 150 \cdot 0{,}05 = 155 - 7{,}5 = 147{,}5 \text{ кВА}.$$

3. Вероятность того, что реальная нагрузка будет меньше 55 кВ·А:

$$P(S < 55) = \frac{55 - 5}{155 - 5} = \frac{50}{150} = 0{,}33,$$

где $x_1 = a = 5$, а $x_2 = 55$.

3.5. Нормальный закон распределения

3.5.1. Нормальный закон и его параметры

Нормальный закон распределения (закон Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов, состоит в том, что он является ***предельным законом***, к которому приближаются другие законы распределения при достаточно часто встречающихся условиях.

Доказывается [1], что сумма достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения (при соблюдении некоторых нежестких ограничений), приближенно подчиняется нормальному закону, и это выполняется тем точнее, чем большее количество случайных величин суммируется. Основное ограничение, налагаемое на суммируемые случайные величины, состоит в том, чтобы они все равномерно играли в общей сумме относительно малую роль. Если это условие не выполняется и, например, одна из случайных величин окажется по своему влиянию на сумму, резко превалирующую над всеми другими, то закон распределения этой превалирующей случайной величины наложит свое влияние на сумму и определит в основных чертах ее закон распределения.

Говорят, что случайная величина X распределяется по нормальному закону, если плотность вероятности ее имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.30}$$

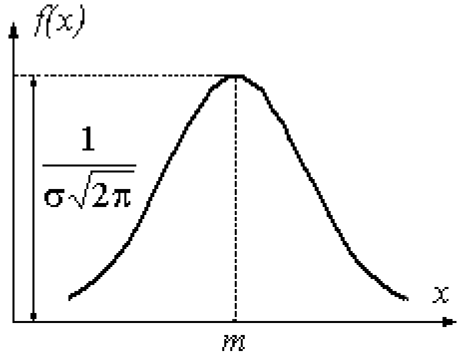


Рис. 3.10. Кривая распределения нормального закона

Кривая распределения по нормальному закону имеет симметричный холмообразный вид (рис. 3.10). Максимальная ордината кривой, равная $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, соответствует точке $x = m$, по мере удаления от точки плотность распределения падает и, при $x \to \pm\infty$, кривая асимптотически приближается к оси абсцисс.

Выясним смысл численных параметров m и σ, входящих в выражение (3.30). Покажем, что величина m есть не что иное, как ***математическое ожидание***, а величина σ – ***среднее квадратическое отклонение*** величины X. Для этого вычислим основные числовые характеристики величины X – математическое ожидание и дисперсию

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Введем новую переменную $t = (x\text{-}m)/\sigma\sqrt{2}$. Отсюда $x = t\sigma\sqrt{2} + m$ и $dx = \sigma\sqrt{2}dt$. Приняв во внимание, что новые пределы интегрирования равны старым, получим

$$M[X] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t\sqrt{2} + m) e^{-t^2} \cdot dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} \cdot dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt. \qquad (3.31)$$

Первое слагаемое в формуле (3.31) равно нулю (под знаком интеграла нечетная функция; пределы интегрирования симметричны относительно начала координат). Второе слагаемое представляет собой известный интеграл Эйлера–Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \qquad (3.32)$$

Следовательно,

$$M[X] = m,$$

т. е. параметр m представляет собой ***математическое ожидание*** величины X. Этот параметр часто называют ***центром рассеивания*** или ***наиболее вероятным*** значением случайной величины X.

Вычислим дисперсию величины X:

$$Д[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Применив снова замену переменной

$$t = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}},$$

получим

$$Д[X] = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

Интегрируя по частям последнее выражение, получим [1]

$$Д[X] = \sigma^2.$$

Следовательно, параметр δ в формуле (3.30) есть не что иное, как ***среднее квадратическое отклонение*** величины X.

Выясним, как влияет на форму и расположение нормальной кривой значения параметров m и σ. Из формулы (3.30) видно, что центром симметрии распределения является центр рассеивания m. Это ясно из того, что при изменении знака разности $(x - m)$ на обратный результат в выражении (3.30) не меняется. Если изменять центр рассеивания m, кривая распределения будет смещаться вдоль оси абсцисс, не изменяя своей формы (рис. 3.11).

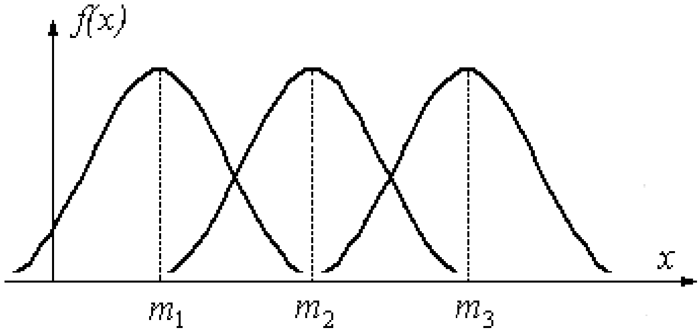


Рис. 3.11. Смещение кривой нормального распределения с изменением m

Размерность центра рассеивания – та же, что и размерность случайной величины X.

Параметр σ (среднее квадратическое отклонение) характеризует не положение, а самую форму кривой распределения. С увеличением σ кривая растягивается и становится более плоской, с уменьшением σ она вытягивается вверх и сжимается. Это объясняется тем, что площадь под кривой распределения всегда остается равной единице, несмотря на изменение максимума плотности вероятности $1/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$. На рис. 3.12 показаны три нормальные кривые при $m = 0$ и различных σ.

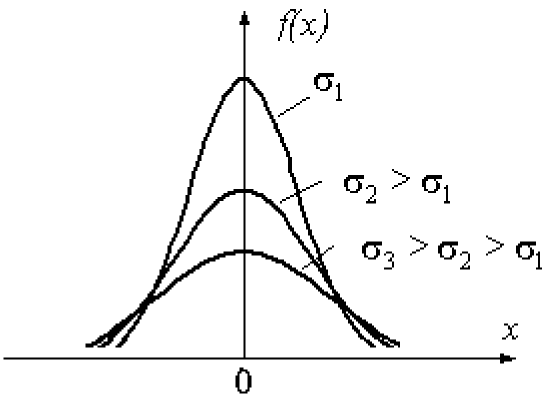


Рис. 3.12. Изменение формы кривой распределения с изменением σ

Размерность параметра σ совпадает с размерностью случайной величины X.

3.5.2. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок

Во многих задачах практики приходится определять вероятность попадания случайной величины X, подчиненной нормальному закону с произвольными параметрами m, σ (который иногда называют ***общим нормальным законом***), на участок от α до β. Для вычисления этой вероятности воспользуемся общей формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \tag{3.33}$$

где $F(x)$ – функция распределения величины X.

Найдем функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, распределенной по общему нормальному закону. Плотность распределения величины X равна

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.34}$$

Тогда функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx. \tag{3.35}$$

Сделаем в интеграле (3.35) замену переменной

$$\frac{x-m}{\sigma} = t.$$

и тогда он примет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\ . \tag{3.36}$$

Интеграл (3.36) не выражается через элементарные функции, но его можно вычислить через специальную функцию, выражающую определенный интеграл от выражения e^{-t^2} или $e^{\frac{-t^2}{2}}$, для которого составлены таблицы. Существует много разновидностей таких функций, например:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt; \qquad \Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

и т. д.

Какой из этих функцией пользоваться определяется желанием пользователя. Для ответа на вопрос, поставленный в заголовке, мы выберем в качестве такой функции

$$\overset{*}{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{3.37}$$

Интеграл $\overset{*}{\Phi}(x)$ называют ***интегралом вероятностей***. Нетрудно видеть, что эта функция представляет собой не что иное, как функцию распределения для нормально распределенной случайной величины (3.35) с параметрами $m = 0$, $\sigma = 1$, т. е. $x = t$.

Принято называть функцию $\overset{*}{\Phi}(x)$ еще ***нормальной (нормированной) функцией распределения*** или ***стандартной функцией распределения***.

В приложении 1 приведены таблицы значений $\overset{*}{\Phi}(x)$.

Выразим функцию распределения (3.35) величины X с параметрами m и σ через нормальную (нормированную) функцию распределения $\overset{*}{\Phi}(x)$.

Очевидно, что

$$F(x) = \overset{*}{\Phi}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \tag{3.38}$$

Теперь несложно найти вероятность попадания случайной величины X на участок от α до β. Согласно формуле (3.33)

$$P(\alpha < x < \beta) = \overset{*}{\Phi}\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \overset{*}{\Phi}\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right). \tag{3.39}$$

Таким образом, мы выразили вероятность попадания на интересующий нас участок случайной величины X, распределенной по нормальному закону с любыми параметрами, через стандартную функцию распределения $\overset{*}{\Phi}(x)$, которая соответствует ***простейшему нормальному закону*** с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$. Заметим, что аргументы функции $\overset{*}{\Phi}(x)$ в формуле (3.39) имеют очень простой смысл: $\frac{\beta-m}{\sigma}$, есть расстояние от правого конца участка до центра рассеивания, выраженное в средних квадратических отклонениях; $\frac{\alpha-m}{\sigma}$ – такое же расстояние до левого конца участка α, причем это расстояние считается положительным, если конец расположен справа от центра рассеивания, и отрицательным, если слева.

Как и всякая функция распределения, функция $\overset{*}{\Phi}(x)$ обладает свойствами:

1. $\overset{*}{\Phi}(-\infty) = 0$. 2. $\overset{*}{\Phi}(+\infty) = 1$. 3. $\overset{*}{\Phi}(x)$ – неубывающая функция своего аргумента.

Кроме того, из симметричности нормального распределения с параметрами $m = 0$, $\sigma = 1$ относительно начала координат следует, что

$$\overset{*}{\Phi}(-x) = 1 - \overset{*}{\Phi}(x). \qquad (3.40)$$

Перечисленные свойства необходимо всегда помнить, так как при решении практических задач они всегда присутствуют в той или иной степени.

Для сокращения таблиц интеграла вероятностей $\overset{*}{\Phi}(x)$ часто применяется функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (3.41)$$

Для функции Лапласа таблицы составлены только для положительных значений x. Для отрицательных значений x используется свойство симметрии, согласно которому (функция Лапласа – нечетная)

$$\Phi(-x) = -\Phi(x). \qquad (3.42)$$

Вероятность попадания случайной величины X в заданный диапазон от α до β равна

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right). \qquad (3.43)$$

Сравнение формул (3.39) и (3.43) показывает, что по форме они одинаковы, но по содержанию отличаются. Поэтому в зависимости от того используется функция $\overset{*}{\Phi}(x)$ или $\Phi(x)$ при решении практических задач, нужно помнить о их свойствах (3.40) и (3.42), соответственно.

3.5.3. Вероятность отклонения случайной величины относительно центра рассеивания

На практике часто встречаются задачи вычисления вероятности попадания нормально распределенной случайной величины на участок, симметричный относительно центра рассеивания m. Рассмотрим такой участок длины 2δ (рис. 3.13). Вычислим вероятность попадания на этот участок по формуле (3.39)

$$P(m-\delta < x < m+\delta) = \overset{*}{\Phi}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \overset{*}{\Phi}\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{3.44}$$

Учитывая свойство (3.40) функции $\overset{*}{\Phi}(x)$, выражение (3.44) можно записать в более компактном виде

$$P(|x-m| < \delta) = \overset{*}{\Phi}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \left[1 - \overset{*}{\Phi}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)\right] = 2\overset{*}{\Phi}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1. \tag{3.45}$$

Для определения вероятности попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, на участок, симметричный относительно центра рассеивания, можно использовать и функцию Лапласа. В этом случае согласно выражению (3.43)

$$P(|x-m| < \delta) = \Phi\left[\frac{(m+\delta)-m}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(m-\delta)-m}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Учитывая свойство (3.42), окончательная формула будет иметь вид

$$P(|x-m| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma). \tag{3.46}$$

В частном случае, когда $m = 0$, т. е. рассматривается отклонение случайной величины от оси ординат:

$$P(|x| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{3.47}$$

На рис. 3.14 наглядно показано, что если две случайные величины нормально распределены и $m = 0$, то вероятность принять значение, принадлежащее интервалу $(-\delta, \delta)$, больше у той величины, которая имеет меньшее значение δ. Этот факт полностью соответствует вероятностному смыслу параметра σ (это среднее квадратическое отклонение, характеризующее рассеяние случайной величины вокруг ее математического ожидания).

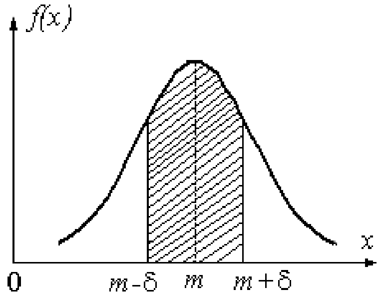


Рис. 3.13. Отклонение от центра рассеивания m

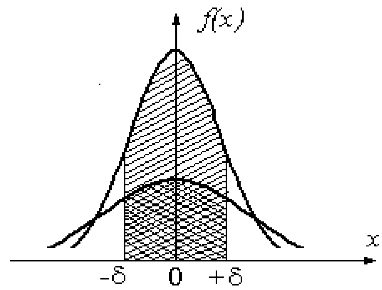


Рис. 3.14. Вероятность попадания случайных величин на участок $(-\delta, +\delta)$

3.5.4. Правило трех сигм

Решим следующую задачу. Отложим от центра рассеивания m последовательные отрезки длиной σ (рис. 3.15). Участки, ограниченные кривой распределения абсцисс длиной σ, есть вероятность попадания случайной величины X на этот участок. Вычислим вероятность попадания случайной величины X в каждый из них. Так как кривая нормального закона симметрична, достаточно отложить такие отрезки только в одну сторону.

По формуле (3.39) находим

$$P(m < X < m+\sigma) = \overset{*}{\Phi}\left(\frac{m+\sigma-m}{\sigma}\right) - \overset{*}{\Phi}\left(\frac{m-m}{\sigma}\right) = \overset{*}{\Phi}(1) - \overset{*}{\Phi}(0) =$$

$$= 0{,}8413 - 0{,}5000 \cong 0{,}341;$$

$$P(m+\sigma < X < m+2\sigma) = \overset{*}{\Phi}(2) - \overset{*}{\Phi}(1) \cong 0{,}136;$$

$$P(m+2\sigma < X < m+3\sigma) = \overset{*}{\Phi}(3) - \overset{*}{\Phi}(2) \cong 0{,}021;$$

$$P(m+3\sigma < X < m+4\sigma) = \overset{*}{\Phi}(4) - \overset{*}{\Phi}(3) \cong 0{,}001.$$

Вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна:

$$P(|X-m| < 3\sigma) = 2\,(0{,}341 + 0{,}136 + 0{,}021) = 2 \cdot 0{,}498 = 0{,}996.$$

Другими словами вероятность того, что абсолютная величина отклонения ***превысит*** утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 1 – 0,996 = 0,004. Это означает, что лишь в 0,4 % случаев так может произойти. Такие события можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: ***если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения, т. е. все рассеивание (с точностью до долей процента) укладывается на участке*** $\boldsymbol{m \pm 3\sigma}$.

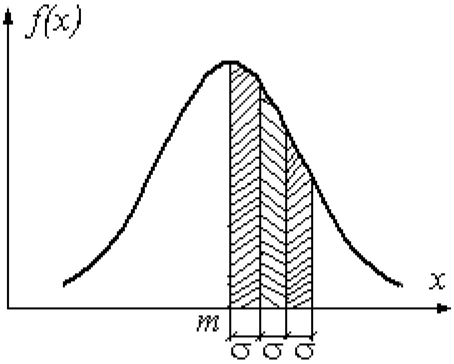


Рис. 3.15. Вероятности случайной величины на участках

Это позволяет, зная среднее квадратическое отклонение и математическое ожидание случайной величины, ориентировочно указать интервал ее практически возможных значений $x_{\max}$ и $x_{\min}$. Из правила трех сигм вытекает также ориентировочный способ определения среднего квадратического отклонения и математического ожидания:

$$\sigma_x = \frac{1}{6}\left(x_{\max} - x_{\min}\right); \quad m_x = \frac{1}{2}\left(x_{\max} + x_{\min}\right).$$

***П р и м е р* 1**. Случайная величина U, распределенная по нормальному закону, представляет собой ошибку измерения напряжения источника питания. При измерении прибором допускается систематическая ошибка в сторону завышения на 1,2 В; среднее квадратическое отклонение ошибки измерения равно 0,8 В. Найти вероятность того, что отклонение измеренного значения от истинного не превзойдет по абсолютной величине 1,6 В.

Р е ш е н и е. Ошибка измерения есть случайная величина U, подчиненная нормальному закону с параметрами $m = 1,2$ В и $\sigma = 0,8$ В. Нужно найти вероятность попадания этой величины на участок $\alpha = -1,6$ В до $\beta = +1,6$ В.

По формуле (3.39) имеем

$$P(-1,6 < U < 1,6) = \overset{*}{\Phi}\left(\frac{1,6-1,2}{0,8}\right) - \overset{*}{\Phi}\left(\frac{-1,6-1,2}{0,8}\right) = \overset{*}{\Phi}(0,5) - \overset{*}{\Phi}(-3,5).$$

Пользуясь таблицами функции $\overset{*}{\Phi}(x)$ [1], находим

$$\overset{*}{\Phi}(0,5) = 0,6915; \ \overset{*}{\Phi}(-3,5) = 0,002.$$

Тогда

$$P(-1{,}6 < U < 1{,}6) = 0{,}6915 - 0{,}002 = 0{,}6913.$$

П р и м е р **2**. Найти ту же вероятность, что в предыдущем примере, но при условии, что систематической ошибки измерения нет.

Решение. По формуле (3.45), полагая $\sigma = 1{,}6$, найдем

$$P(|U| < 1{,}6) = 2\overset{*}{\Phi}\left(\frac{1{,}6}{0{,}8}\right) - 1 \cong 0{,}955.$$

П р и м е р **3**. Случайная величина J – ток нагрузки магистрального шинопровода подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием нагрузки m = 250 А и средним квадратическим отклонением σ = 50 А. Определить вероятность того, что реальная нагрузка шинопровода превысит значение $J_р \geq$ 350 А.

Р е ш е н и е. Использование формулы (3.39) предполагает, что вероятность попадания случайной величины в заданный интервал находится как разность площадей под кривой распределения (рис. 1.9) от $-\infty$ до β и от $-\infty$ до α. У нас стоит противоположная задача, т. е. необходимо определить площадь кривой распределения за точкой α. Очевидно, что эта площадь (вероятность) может быть найдена как $1 - P(J_р > 350)$. Но, в общем случае, кривая Гаусса простирается в область отрицательных значений, а нагрузка отрицательной быть не может. Следовательно, площадь, ограниченная кривой Гаусса в интервале от 0 до $+\infty$, не будет равна 1, а меньше.

Оценим, какова площадь (то же, что и вероятность), ограниченная кривой распределения от $-\infty$ до 0. По формуле (3.43) имеем

$$P(-\infty < J_р < 0) = \Phi\left(\frac{0-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-200}{50}\right) - \Phi(-\infty) =$$
$$= \Phi(-4) - \Phi(-\infty) = \Phi(\infty) - \Phi(4) = 0{,}5 - 0{,}499968 = 0{,}000032.$$

Видим, что вероятность попадания случайной величины на участок $(-\infty, 0)$ ничтожна мала и ею можно пренебречь в дальнейших расчетах. Поэтому

$$P(J_р \geq 350) = 1 - P(J_р < 350) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{350-200}{50}\right) - \Phi\left(\frac{0-200}{50}\right)\right] =$$
$$= 1 - [\Phi(3) - \Phi(-4)] = 1 - [0{,}49865 + 0{,}499968] = 1 - 0{,}9986 = 0{,}0014.$$

Полученная вероятность превышения реальной нагрузкой отклонений больше трех σ (т. е. 150 А) от математического ожидания (200 А) также ничтожно мала. Пусть, к примеру, продолжительность рабочей смены $T_с = 10$ ч. Тогда продолжительность превышения нагрузки $J_р > 350$ за смену будет

$$P(J_р \geq 350) \cdot T_с = 0{,}0014 \cdot 10 = 0{,}014 \text{ ч} = 0{,}8 \text{ мин.}$$

***Пример* 4**. Нагрузка цеха S есть случайная величина с нормальным законом распределения. Найти математическое ожидание m_s, если известно, что среднее квадратическое отклонение нагрузки $\sigma_s = 20$ кВ·А и вероятность превышения реальной нагрузкой величины в 140 кВ·А, т. е. $P(S_p \geq 140) = 0{,}023$.

Решение. По формуле (3.39) получим

$$P(140 \leq S_p \leq +\infty) = \overset{*}{\Phi}\left(\frac{+\infty - m_s}{20}\right) - \overset{*}{\Phi}\left(\frac{140 - m_s}{20}\right) = 1 - \overset{*}{\Phi}\left(\frac{140 - m_s}{20}\right) = 0{,}023$$

или $\overset{*}{\Phi}\left(\dfrac{140 - m_s}{20}\right) = 1 - 0{,}023 = 0{,}977.$

По таблице для функции $\overset{*}{\Phi}(x)$ находим, что этой вероятности соответствует значение $x \cong 2$, т. е. $\dfrac{140 - m_s}{20} = 2$. Отсюда $m_s = 100$ кВ·А.

3.6. Гамма-распределение

Рассмотрение этого вида распределения целесообразно начать с рассмотрения физики процессов формирования внезапных и постепенных отказов элементов систем электроснабжения. Этот вопрос подробно рассмотрен в источниках [8, 9], материалы которых используются в дальнейшем.

3.6.1. Внезапные и постепенные отказы элементов систем электроснабжения

В процессе эксплуатации в материалах элементов электрической сети вследствие термических и механических воздействий, электромагнитных полей, агрессивной среды, снижения показателей качества электрической энергии и др. накапливаются необратимые изменения, снижающие прочность, нарушающие координацию и взаимодействие отдельных частей. Эти изменения в случайные моменты времени могут приводить к отказу элемента.

В современных условиях невозможно решить проблемы прогнозирования уровня надежности, управления уровнем надежности на стадии проектирования электрических систем, основываясь только на статистическом материале. Наиболее перспективным направлением представляется использование статистических методов с анализом физических процессов, происходящих в элементах конструкций и вызывающих старение, износ и отказы элементов.

При рассмотрении показателей надежности любого элемента различают три периода его эксплуатации (см. рис. 2.3): I – период приработки; II – нормальной эксплуатации; III – период интенсивного износа и старения.

Период I характеризуется снижением интенсивности отказов с течением времени (приработочные отказы), что объясняется выявлением скрытых дефектов изготовления и монтажа, отбраковкой элементов. Период II характеризуется примерно постоянной интенсивностью отказов. При этом они имеют внезапный характер (механические повреждения, повреждения вследствие неблагоприятных факторов). Период III характеризуется повышением интенсивности отказов с течением времени и связан с интенсивным износом и старением, необратимыми физико-химическими процессами в материалах, из которых изготовлен элемент и его части (постепенные отказы).

Каждый из типов отказов описывается собственной математической моделью явления и, следовательно, своим подходом к получению интересующих количественных характеристик. В качестве ***одной из основных характеристик отказов является функция распределения времени безотказной работы***. Все остальные показатели надежности, связанные с отказами, определяются достаточно просто по функции распределения. Подразделение отказов на внезапные и постепенные достаточно условно и служит для удобства анализа и количественной оценки протекающих явлений. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть ***упрощенные модели*** формирования случайной величины – времени безотказной работы элементов, в частности, периодов II и III эксплуатации, представляющих наибольший практический интерес в расчетах надежности.

3.6.2. Формирование модели внезапных отказов

Математическое описание модели внезапных отказов рассмотрим на примере кабельной линии среднего напряжения, проложенной в земле, основными причинами отказов которой согласно статистике отказов являются механические повреждения [8, 9]. Исключив другие виды отказов, рассмотрим описание времени безотказной работы кабельной линии ***по причине механических повреждений***.

Как известно, кабельная линия обладает определенной механической прочностью и все ее конструктивные элементы выполнены таким образом, что обеспечивают сохранность линии при воздействии механических нагрузок, не превышающих предел прочности бронированного покрытия, оболочки, изоляции жил кабеля.

Механические нагрузки, воздействующие на кабельную линию при эксплуатации, являются случайными, и связи между значениями таких нагрузок во времени не наблюдаются. Пиковые экстремальные нагрузки, приводящие к повреждению кабельной линии, возникают случайно и невозможно однозначно предсказать момент их появления. Среднее значение воздействующих механических нагрузок на кабельную линию практически при любых условиях прокладки намного меньше предельно допустимого (по механической прочности). Первое же превышение механической прочности кабельной линии приводит к ее отказу.

Конструкции кабельных линий и характерные условия их эксплуатации позволяют отметить два обстоятельства:

- уровень предельно допустимой механической нагрузки остается постоянным в период эксплуатации;
- отказ возникает как следствие не постепенного изменения внутреннего состояния элемента (т. к. предел механической прочности с течением времени изменяется мало), а лишь как следствие внешних случайных воздействий, являющихся независимыми и возникающих в случайные моменты времени, которые однозначно невозможно предсказать.

Разделим рассматриваемый период времени $(0,\ t)$ на интервалы Δt_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, и обозначим вероятность того, что превышение механической прочности кабельной линии произойдет в i–м интервале через α_i. Очевидно, что кабельная линия откажет при первом же таком превышении механической прочности. Так как прочность линии практически неизменная, а случайные пиковые нагрузки воздействия независимы, то, очевидно, случайные события появления пиковой нагрузки на каждом интервале времени также можно считать независимыми. События появления A_i пиковой нагрузки в любом интервале и непоявления B_i являются противоположными. Поэтому вероятность того, что превышение максимальной прочности произошло в произвольном k-м интервале времени, можно определить по правилу для независимых событий:

$$P'(A_k) = P(B_1)P(B_2)...P(B_{k-1})P(A_k) = \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i)\,. \qquad (3.48)$$

Если условия эксплуатации линии неизменны, то приближенно можно считать $\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, n$, тогда вероятность того, что время безотказной работы равное (k – 1) интервалов будет записано как

$$P'(A_k) = (1-\alpha)^{k-1}\alpha. \tag{3.49}$$

Чтобы получить функцию распределения времени безотказной работы, выраженную в числе интервалов, необходимо просуммировать все вероятности появления отказов, начиная с первого интервала:

$$P(t < T = k) = \alpha \sum_{i=0}^{k-1} (1-\alpha)^i = 1 - (1-\alpha)^k. \tag{3.50}$$

Известно, что при достаточно малых значениях α ($k\alpha$ = 0,1-10), погрешность от замены $(1-\alpha)^k$ на $e^{-k\alpha}$ имеет порядок $(k\alpha)^2/2$, а так как вероятность механического повреждения α в каждом интервале мала, то с достаточной для практических расчетов точностью можно осуществить такую замену (реально погрешность не превышает 10 %). Поэтому интегральная функция распределения времени безотказной работы, выраженная в числе интервалов времени, имеет вид

$$P(t < T) = F(t) = Q(t) = 1 - e^{-k\alpha}. \tag{3.51}$$

Переходя к непрерывному аргументу времени, получаем

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{3.52}$$

где λ – параметр распределения – среднее число повреждений (отказов) в единицу времени.

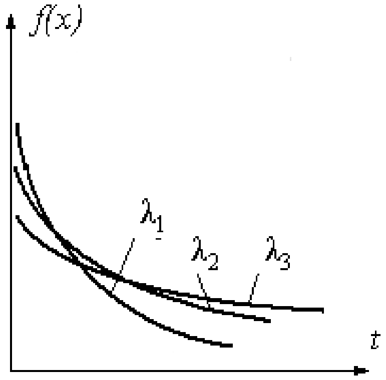


Рис. 3.16. Дифференциальная функция распределения времени безотказной работы при внезапных отказах ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$)

Дифференциальная функция распределения или плотность вероятности случайной величины времени безотказной работы элемента

$$f(t) = Q'(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \tag{3.53}$$

Дифференциальная функция распределения времени безотказной работы для различных значений λ приведена на рис. 3.16.

В системах со своевременными капитальными и профилактическими ремонтами оборудования, заменой износившихся частей, когда другие виды отказов составляют незначительную долю, в качестве основного распределения времени безотказной работы принимается показательное (экспоненциальное) распределение (рис. 3.16).

Это распределение наиболее широко распространено в расчетах надежности не только систем электроснабжения, но и многих других технических систем.

3.6.3. Формирование модели постепенных отказов

Основной причиной, как уже отмечалось ранее, постепенных отказов является старение материалов и износ отдельных частей элементов. Как бы ни совершенна была конструкция элемента и его частей, технология производства и монтажа, со временем материалы, из которых изготовлен объект, претерпевают необратимые изменения. Они возникают вследствие теплового, вибрационного старения изоляции трансформаторов, кабельных линий, генераторов, коррозии металлических частей проводов, оболочек кабельных линий, износа дугогасительных камер коммутационных аппаратов, а также вследствие деформации материалов, диффузии материала и других причин.

По мере эксплуатации электротехнических изделий в изоляции вследствие влияния процессов нагревания, обусловленных протеканием токов нагрузки, изменения условий внешней среды, электродинамических сил, возникающих при резком изменении тока, вибрации, повышения влажности и вредных примесей в среде, окружающей изоляцию, воздействий электрического поля, происходят сложные физико-химические процессы старения. Изоляция становится хрупкой, ломкой, появляются трещины, в результате чего уменьшается ее электрическая прочность и при случайном повышении напряжения сверх допустимого уровня происходит отказ.

Аналогичные ситуации происходят при коррозии и окислении металлических частей элементов, под воздействием механических нагрузок – постепенное снижение прочности и при случайном повышении предела прочности – отказ элемента. Таким образом, постепенный износ отдельных частей элемента представляет собой как бы ***накопление элементарных повреждений*** в различных его частях и снижение общего предела прочности. После достижения некоторого уровня, т. е. накопления определенного числа элементарных повреждений, происходит отказ элемента.

Рассматриваемая ситуация является обобщением предыдущей (внезапных отказов). Но если в предыдущем случае первое же превышение предела прочности приводит к отказу сети, то в данном случае необходимо интегрирование элементарных повреждений в различных его частях, обусловленных влиянием многих факторов, носящих случайный характер и приводящих к постепенному изменению состояний объекта, т. е. необходимо, например, многократное превышение температуры изоляции сверх допустимой, многократное отключение токов коротких замыканий выключателем, многократное воздействие неблагоприятных условий внешней среды и т. д.

Для построения математического описания этих явлений положим некоторые идеализированные условия (простейший поток событий). В случайные моменты времени возникают единичные, элементарные повреждения и при накоплении повреждений объект отказывает. Число элементарных повреждений зависит не от момента времени, а лишь от его продолжительности (стационарность). Элементарное повреждение состоит в том, что износ объекта увеличивается на некоторую величину $\Delta\eta$ за время Δt, вероятность возникновения этого износа равна $\lambda\Delta t$ и не зависит от того, насколько изношен объект за предшествующий период эксплуатации (независимость), т. е. не зависит от его состояния. Выберем интервал времени таким образом, чтобы вероятностью двух и более элементарных повреждений в этом интервале можно было пренебречь (ординарность потока).

При указанных условиях несложно определить вероятность появления k элементарных повреждений на интервале времени $(0, t)$.

Для начала найдем вероятность того, что в произвольно выбранном интервале времени Δt произойдет по крайней мере одно повреждение. Согласно условию ординарности потока элементарных повреждений вероятность появления ***по крайней мере одного*** повреждения и ***только одного*** повреждения в указанных условиях численно совпадает и равна $\lambda\Delta t$, а вероятность отсутствия такого повреждения равна $1–\lambda\Delta t$.

Разделим интервал времени $(0, t)$ на n равных отрезков (частей) $\Delta t = t/n$. Так как вероятности возникновения элементарных повреждений в указанных отрезках независимы, то вероятность появления k элементарных повреждений на интервале времени $(0, t)$ можно определить, используя схему независимых испытаний (биноминальный закон распределения):

$$P_k(t) = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}(\lambda\frac{t}{n})^k(1-\lambda\frac{t}{n})^{n-k}. \quad (3.54)$$

Предел этого выражения при неограниченном увеличении числа интервалов $(n \to \infty)$, а следовательно, при $\Delta t \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P_k(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \frac{(\lambda t)^k}{n^k} \frac{(1-\frac{\lambda t}{n})^n}{(1-\frac{\lambda t}{n})^k} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad (3.55)$$

т. е. вероятность числа элементарных повреждений на интервале (0, t) зависит от длины этого участка и распределена по закону Пуассона с параметром λt.

Очевидно, объект не откажет, если произойдет менее k элементарных повреждений.

Вероятность того, что время безотказной работы будет не менее T (интегральная функция распределения):

$$P(T < t) = Q(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \quad (3.56)$$

где i – число элементарных повреждений.

Дифференциальная функция распределения, или плотность вероятности времени безотказной работы

$$\begin{aligned} f(t) = Q'(t) &= \sum_{i=0}^{k-1} (\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} - \frac{\lambda^i t^{i-1}}{i!} e^{-\lambda t}) = \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^k t^{k-1} \frac{1}{(k-1)!} e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Так как для целых k гамма-функция (k - 1)! = $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx$,

то в общем виде

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\lambda t}, \; t \geq 0, \\ 0, \; t < 0. \end{cases} \quad (3.58)$$

Это распределение называется ***гамма-распределением*** времени безотказной работы. Вид этого распределения для различных значений k показан на рис. 3.17. При $k = 1$ это распределение превращается в показательное, т. е. одно повреждение приводит к отказу элемента.

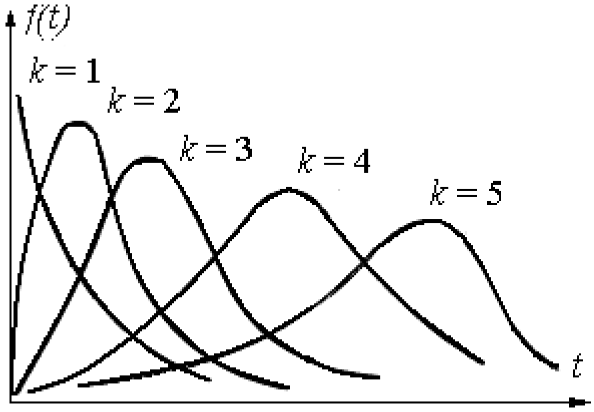


Рис. 3.17. Дифференциальная функция
закона гамма-распределения времени
безотказной работы при постепенных отказах

Интенсивность отказов при распределении времени безотказной работы по закону гамма-распределения

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{i!} \lambda t^i}, \tag{3.59}$$

т. е. интенсивность отказов не постоянна во времени, как при распределении по показательному закону, а увеличивается с течением времени, и тем медленнее, чем больше параметр k, т. е. большей «прочностью» обладает элемент. Эта зависимость иллюстрируется на рис. 3.18. Математическое ожидание или среднее время безотказной работы

$$M(T) = T_{\text{ср}} = k / \lambda. \tag{3.60}$$

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение

$$\text{Д}(T) = k / \lambda^2; \quad \sigma_{\text{т}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{k}. \tag{3.61}$$

С ростом k закон гамма-распределения асимптотически приближается к нормальному. Если вариация времени безотказной работы $\sigma_{\text{т}} / T_{\text{ср}} < 0{,}3$, то с достаточной для практических расчетов точностью закон гамма-распределения можно аппроксимировать нормальным. При этом интенсивность отказов (рис. 3.19)

$$\lambda(t) = \frac{e^{-\frac{(t - T_{\text{ср}})^2}{2\sigma_{\text{т}}^2}}}{\sigma_{\text{т}}\sqrt{2\pi}\, \Phi(\frac{t - T_{\text{ср}}}{\sigma_{\text{т}}})}, \tag{3.62}$$

где $\sigma_т$ – среднеквадратическое время безотказной работы;

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – функция Лапласа.

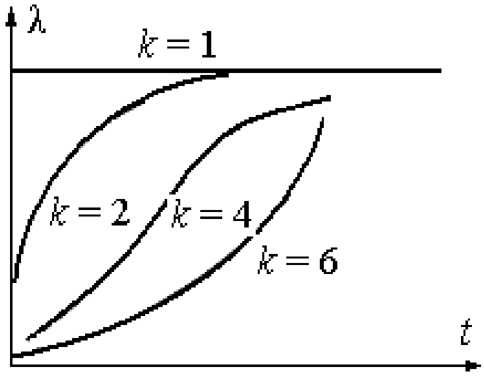


Рис. 3.18. Интенсивность отказов элемента при гамма-распределении времени безотказной работы

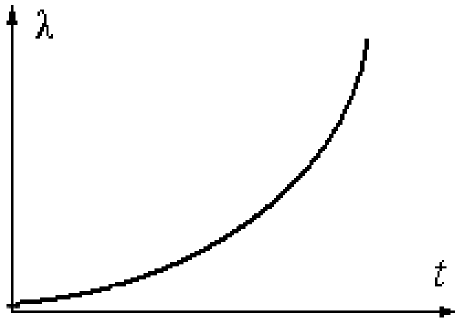


Рис. 3.19. Интенсивность отказов элемента при нормальном законе распределения времени безотказной работы элемента

Переход от гамма-распределения к нормальному распределению обоснован при большом пределе прочности элемента по сравнению с действующими нагрузками, т. е. когда «наложенный» износ мал, например изоляция отличается высокой однородностью, провода – высокой стойкостью к коррозии и т. д. Законы гамма-распределения и нормальный имеют возрастающую интенсивность отказов с течением времени эксплуатации, что хорошо согласуется с физической сущностью протекающих процессов износа.

При рассмотрении модели постепенных отказов число элементарных повреждений принималось целым, в предположении, что износ происходит дискретно. Для теории надежности практический интерес представляет именно случаи когда k – целое число. При $k = 1$, как указывалось выше, гамма-распределение превращается в экспоненциальное. При $k > 1$ гамма- распределение является распределением суммы k независимых случайных величин, каждая из которых имеет экспоненциальное распределение.

В реальных условиях износ элемента происходит практически непрерывно, поэтому параметры закона гамма-распределения в общем случае могут быть и целыми, и дробными. Тогда плотность гамма-распределения записывается в виде:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}e^{-\beta t}, \ t\geq 0,\\ 0, \ t<0\end{cases} \qquad (3.63)$$

где α и β – параметры распределения – любые положительные числа.

Математическое ожидание и дисперсия времени безотказной работы

$$T_{\text{ср}}=(\alpha+1)/\beta; \quad Д(T)=(\alpha+1)/\beta^2. \qquad (3.64)$$

Полученные числовые характеристики времени безотказной работы позволяют по статистическим данным (среднему значению и дисперсии) определить параметры закона гамма-распределения:

$$\beta=T_{\text{ср}}/\sigma_{\text{т}}^2; \quad \alpha=T_{\text{ср}}^2/\sigma_{\text{т}}^2-1. \qquad (3.65)$$

Как следует из изложенного определение алгоритмов формирования времени безотказной работы элемента в значительной степени ***идеализировано***. ***В действительности*** на любой элемент системы электроснабжения воздействуют также и внезапные случайные факторы при износе отдельных частей элемента. Поэтому законы распределения, получаемые в результате обработки статистических данных об отказах, представляют собой композицию рассмотренных выше. Необходимо учесть, что аппроксимацию законов распределения по статистическим данным необходимо производить после тщательного анализа причин отказов с учетом физических состояний элементов.

3.7. Распределение Вейбулла

Это распределение чаще всего используется для исследования интенсивности отказов для периодов приработки и старения. На примере распределения сроков службы изоляции некоторых элементов электрической сети [8, 9] подробно рассмотрены физические процессы, приводящие к старению и отказу изоляции и описываемые распределением Вейбулла.

Надежность наиболее распространенных элементов электрических сетей таких, как силовые трансформаторы, кабельные линии, в значительной степени определяется надежностью работы изоляции, «прочность» которой изменяется в течение эксплуатации. Основной характеристикой изоляции электромеханических изделий является ее электрическая прочность, которая в зависимости от условий эксплуатации и вида изделия определяется механической прочностью, эластичностью, исключающей возможности образования остаточных деформаций, трещин, расслоений под воздействием механических нагрузок, т. е. неоднородностей.

Однородность и монолитность структуры изоляции и ее высокая теплопроводность исключают возникновение повышенных местных нагревов, неизбежно приводящих к увеличению степени неоднородности электрической прочности. Разрушение изоляции при функционировании элемента происходит в основном в результате нагревания токами нагрузок и температурных воздействий внешней среды. Механические нагрузки (вибрации, деформации, удары и др.) также приводят к разрушению изоляции.

Если изоляция находится под воздействием высокого напряжения, то на процессы старения заметно влияет и электрическое поле. В изоляции развиваются ионизационные процессы, частичные разряды, связанные с возникновением окислительных реакций, приводящих к появлению агрессивных реагентов, в еще большей степени разрушающих ее. Образование трещин и расслоений увеличивает интенсивность частичных разрядов, когда пробивается часть слоев изоляции. Значительно снижают электрическую прочность изоляции поверхностные разряды, приводящие к разрушению слоев. Их возникновение в большой степени обусловлено неблагоприятным воздействием среды, в которой находится изоляция.

Среди перечисленных факторов, определяющих срок службы изоляции указанных элементов электрических сетей, одним из основных факторов, наиболее изученных теоретически и проверенных экспериментально, является ***тепловое старение***. На основании экспериментальных исследований было получено известное «восьмиградусное» правило, согласно которому повышение температуры изоляции, выполненной на органической основе, на каждые восемь градусов в среднем вдвое сокращается срок службы изоляции.

В настоящее время в зависимости от класса применяемой изоляции используются шести-, восьми-, десяти- и двенадцатиградусное правила. Срок службы изоляции в зависимости от температуры нагревания

$$T_{\text{и}} = A e^{-\gamma\vartheta}, \tag{3.66}$$

где A – срок службы изоляции при $\vartheta = 0$ – некоторая условная величина; γ – коэффициент, характеризующий степень старения изоляции в зависимости от класса; ϑ – температура перегрева изоляции.

Другим важным фактором, вызывающим интенсивное старение изоляции, является ***механическая нагрузка***, обусловленная электрическими процессами при резких изменениях тока, например при резкопеременной нагрузке силового трансформатора, набросах и сбросах нагрузки, сквозных токах коротких замыканий.

Механические характеристики прочности изоляции также зависят от температуры. Предел механической прочности изоляции быстро снижается по мере ее нагревания, но в то же время она становится более эластичной. Однако значительные деформации сопровождаются появлением необратимых структурных изменений в виде трещин, разрывов, расслоений. Электромеханические силы, воздействующие во время изменений тока, пропорциональны квадрату мгновенного значения тока. Изменение воздействующих сил во времени можно представить как суммарное наложение трех составляющих: апериодической, периодической с частотой питающей сети 50 Гц и циклической с частотой 100 Гц. При резкопеременном режиме электропотребления амплитуды вибраций могут быть значительными вследствие квадратичной зависимости от тока.

Из рассмотренных двух основных факторов, влияющих на срок службы изоляции, которые к тому же тесно связаны между собой, можно предположить, что как усталостные явления в изоляции, так и тепловое ее старение в значительной степени зависят от качества изготовления и материала электротехнического изделия, от однородности материала изоляции, обеспечивающей отсутствие местных нагревов (так как трудно предположить, что откажет вся изоляция, т. е. пробой произойдет по всей площади изоляции).

Микротрещины, расслоения (неоднородность материала) и т. п. случайно распределены в отношении своего положения и своей величины по всему объему (площади) изоляции. При воздействии переменных неблагоприятных условий как теплового, так и электродинамического характера неоднородности материала увеличиваются, например микротрещина распространяется в глубь изоляции и при случайном повышении напряжения может вызвать пробой изоляции. Причиной отказа может быть даже небольшая неоднородность материала.

Естественно предположить, что число неблагоприятных воздействий (тепловых или электромеханических), вызывающих пробой изоляции, есть функция, убывающая в зависимости от размеров неоднородности. Это число минимально для наибольшей по размерам неоднородности (трещины, расслоения и др.)

Следовательно, число неблагоприятных воздействий, или срок службы изоляции, должно подчиняться закону распределения минимального числа из числа независимых случайных величин – чисел неблагоприятных воздействий, соответствующих различным по размерам неоднородностям, т. е. если $T_и$ – время безотказной работы всей изоляции, а $T_{иi}$ – время безотказной работы i участка ($i = 1, 2, \ldots, n$), то

$$T_{\text{и}} = \min(T_{\text{и}1},\ T_{\text{и}2},\ ...,\ T_{\text{и}n}). \qquad (3.67)$$

Таким образом, для определения закона распределения времени безотказной работы такого объекта, как изоляция элемента электрической сети, необходимо найти вероятность распределения минимальных времен безотказной работы совокупности всех участков. Причем наибольший интерес представляет случай, когда законы распределения времени безотказной работы отдельных участков имеют произвольный характер, но вид законов распределения одинаков, т. е. резко выраженных отличающихся участков нет.

В смысле надежности участки такой системы соответствуют последовательному соединению. Поэтому функция распределения времени безотказной работы такой системы

$$q_{\text{с}}(t) = 1 - [1 - q(t)]^n. \qquad (3.68)$$

Рассмотрим общий случай, когда распределение $q(t)$ имеет так называемый «порог чувствительности», т. е. элемент гарантированно не откажет в интервале времени $(0,\ t_0)$ (в частном случае t_0 может быть равна 0). Очевидно, что функция $q(t_0 + \Delta t) > 0$ – всегда не убывающая функция аргумента.

Первоначально для простоты рассуждений предположим, что в окрестности времени t_0 функцию $q(t)$ можно заменить линейной зависимостью (рис. 3.20):

$$q(t_0 + \Delta t) \approx c\Delta t, \qquad (3.69)$$

где $c > 0$ – некоторый постоянный коэффициент.

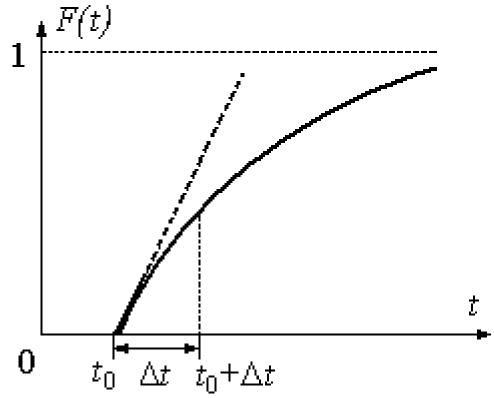


Рис. 3.20. Интегральная функция распределения времени безотказной работы участка изоляции

Для интервала времени ($t_0 + \Delta t$) функция $q(t_0 + \Delta t) > 0$, следовательно, функция распределения системы

$$q_{\text{c}}(t+\Delta t) = 1 - [1 - q(t_0 + \Delta t)]^n \approx 1 - (1 - c\Delta t)^n.$$

Так как

$\lim\limits_{n\to\infty} [1 - c\Delta t]^n = 0$ при $c > 0, \Delta t > 0,$ тт $q_{\text{c}}(t_0 + \Delta t) \to 1$ при $n \to \infty$.

Это соответствует физическому существу рассматриваемых процессов. При бесконечной площади (объеме) изоляции вероятность ее отказа равна 1.

Разделим интервал времени (t, t_0) на n частей $\Delta t = \dfrac{t - t_0}{n}$ и определим предел $q_{\text{c}}(t + \Delta t)$ при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} q_{\text{c}}\left(t + \frac{t - t_0}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \left(1 - c\frac{t - t_0}{n}\right)^n\right]. \tag{3.70}$$

Таким образом, в рассматриваемых условиях функция распределения срока службы изоляции элемента электрической системы запишется как

$$q_c(t) = \begin{cases} 1 - e^{-c(t-t_0)}, & t \geq 0. \\ 0, \ t < 0 \end{cases} \tag{3.71}$$

Форма этого закона определяется видом функций распределения на малых интервалах времени (возможностью линеаризации их). Если зависимость изменения вероятности отказа на каждом интервале нелинейна, то ее с достаточной степенью точности можно аппроксимировать степенной зависимостью:

$$q_c(t_0 + \Delta t) = \text{c}\Delta t^{\alpha}. \tag{3.72}$$

Выполняя аналогичные преобразования для системы, можно получить асимптотический закон распределения времени безотказной работы:

$$q_c(t) = \begin{cases} 1 - e^{-c(t-t_0)^{\alpha}}, & t \geq t_0. \\ 0, \ t < t_0. \end{cases} \tag{3.73}$$

Если распределение не имеет порога чувствительности t_0, то закон распределения:

$$q_c(t) = \begin{cases} 1 - e^{-ct^{\alpha}}, & t \ge 0. \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{3.74}$$

Этот закон называется ***распределением Вейбулла***. Он довольно часто используется при аппроксимации распределения времени безотказной работы систем с конечным числом последовательно (в смысле надежности) соединенных элементов (длинные кабельные линии со значительным числом муфт и др.).

Плотность распределения (без порога чувствительности)

$$f(t) = \begin{cases} \alpha c t^{\alpha-1} e^{-ct^{\alpha}}, & t \ge 0. \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{3.75}$$

При $\alpha = 1$ плотность распределения превращается в обычную показательную функцию (рис. 3.21).

Интенсивность отказов при распределении плотности по закону Вейбулла (рис. 3.22)

$$\lambda(t) = \alpha c t^{\alpha-1}. \tag{3.76}$$

Интенсивность отказов для этого закона в зависимости от параметра распределения может расти, оставаться постоянной (показательный закон) и уменьшаться.

Уменьшению интенсивности отказов с увеличением времени эксплуатации трудно найти физическое объяснение, так как для изоляции в отличие от металлов, которые могут с течением времени под воздействием небольших циклических нагрузок упрочняться за счет выравнивания внутренних напряжений, не существует упрочнения. Подобную зависимость можно объяснить только лишь «выжиганием» – отказами дефектных экземпляров на начальных этапах эксплуатации, при этом оставшиеся элементы в среднем будут обладать большей долговечностью.

При $\alpha = 2$ функция распределения времени безотказной работы совпадет с законом Рэлея, а при $\alpha >> 1$ достаточно хорошо аппроксимируется нормальным законом распределения в окрестности среднего времени безотказной работы.

Как видно из рис. 3.21 и рис. 3.22 экспоненциальный закон распределения является частным случаем закона Вейбулла при $\alpha = 1$ ($\lambda = \text{const}$). При соответствующем подборе параметра α можно с помощью закона Вейбулла описывать надежность стареющих элементов, у которых $\lambda(t)$ возрастает, и надежность элементов, имеющих скрытые дефекты, у которых $\lambda(t)$ убывает с течением времени.

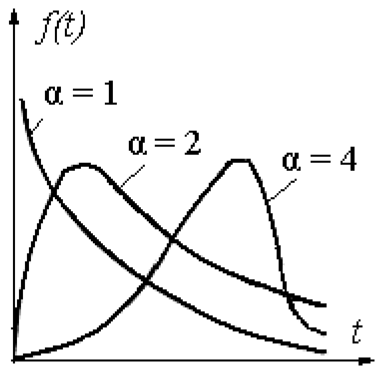


Рис. 3.21. Дифференциальная функция распределения времени безотказной работы изоляции по закону Вейбулла

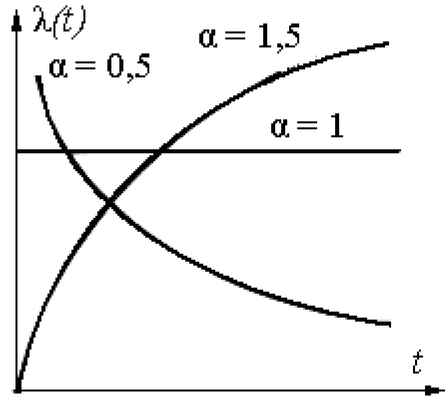


Рис. 3.22. Интенсивность отказов при распределении по закону Вейбулла

Закон Вейбулла очень удобен для вычислений, но связан с эмпирическим подбором параметров λ и α для имеющейся зависимости $\lambda(t)$. Получение такой зависимости статистическим путем в энергетике часто практически невозможно из-за ограниченного объема испытаний или наблюдений.

Математическое ожидание (среднее время) безотказной работы и дисперсия при распределении по закону Вейбулла:

$$T_{\text{и.ср}} = \Gamma(1 + 1/\alpha)c^{-1/\alpha}; \tag{3.77}$$

$$Д(T_{\text{и}}) = c^{-2/\alpha}\left[\Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma^2(1 + 1/\alpha)\right], \tag{3.78}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

4. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ

Конечной целью расчета надежности систем электроснабжения является количественная оценка комплексных показателей надежности относительно конкретных узлов нагрузки и разработка на основе полученных результатов мероприятий целенаправленного их изменения.

Количественные характеристики комплексных показателей надежности зависят от состояний системы в каждый момент времени и спроса мощности и энергии в узлах нагрузки. Число дискретных состояний в сложной схеме исключительно велико. Поэтому на практике невозможно оценить надежность, не разработав эффективного метода сокращения числа рассматриваемых состояний до приемлемого уровня и достижения конкретных целей.

В этом разделе в упрощенном изложении рассматриваются наиболее распространенные и обстоятельно изложенные в [8, 9] методы расчета показателей надежности систем с учетом специфики решаемых задач. Для более углубленного изучения методов расчета читатели могут обратиться к указанным источникам. Для облегчения понимания материала источника в данном изложении приняты те же условные обозначения параметров надежности, что и в указанной литературе.

4.1. Метод расчета показателей надежности с использованием моделей случайных процессов

Процессы смены состояний системы, на которые в основном влияют случайные отказы отдельных элементов, описываются с использованием пуассоновских случайных процессов. При показательном распределении времени между отказами и показательном распределении продолжительностей состояний отказов создаются возможности применения хорошо разработанного аппарата теории массового обслуживания, и в частности аппарата так называемых марковских случайных процессов.

Процесс называется марковским, если для каждого момента времени вероятность любого состояния элемента или системы в будущем зависит только от состояния в настоящий момент и не зависит от того, каким образом элемент пришел в это состояние.

Рассмотрим более подробно условия применения марковских процессов для описания смены состояний системы, состоящей из отдельных элементов.

Появление отказов в элементе на одном интервале времени почти не меняет вероятности появления отказов на другом интервале времени (исключаем каскадное развитие аварии в системе). Поэтому поток отказов такого элемента (подсистемы) можно рассматривать как пуассоновский. Это условие может нарушаться, если в состав элемента (подсистемы) входят отдельные малонадежные части (элементы). Тогда поток отказов в основном будет формироваться ими и условия, которым отвечает модель пуассоновского потока (стационарность, ординарность, отсутствие последействия), не будут выполнены. К тому же события отказов в этом случае нельзя считать редкими.

В период приработки элемента, а также в период интенсивного старения и износа, поток отказов элементов также не обладает марковским свойством. На практике эти периоды стремятся по возможности сократить предварительным (до начала эксплуатации) испытанием отдельных элементов электрических систем и своевременной заменой устаревшего, изношенного оборудования. Поэтому далее будут рассматриваться математические модели, соответствующие условиям нормальной работы элементов (систем), как представляющие наибольший интерес для практики.

Модели случайных процессов отказов и восстановлений систем электроснабжения применяются для оценки комплексных показателей надежности на относительно коротких интервалах времени, соизмеримых с продолжительностью восстановления после отказа с учетом начальных состояний отдельных элементов.

Использование моделей случайных процессов в инженерных расчетах надежности систем электроснабжения позволяет обосновать и выявить области применения более простых алгоритмов. В качестве наиболее характерных примеров рассмотрим принципы составления расчетной модели процессов для простейших схем (нерезервируемых и резервируемых).

4.1.1. Процессы отказов и восстановлений одноэлементной схемы

Положим, что процесс отказов и восстановлений элемента обладает свойствами марковского случайного процесса. Если процесс, протекающий в физической системе со счетным множеством состояний и непрерывным временем, является марковским, то его можно описать обыкновенными дифференциальными уравнениями, в которых неизвестными являются вероятности состояний.

Рассмотрим элемент, который может находиться в двух состояниях: **0** – безотказной работы, **1** – состоянии отказа (восстановления). Определим соответствующие вероятности состояний элемента $P_0(t)$, $P_1(t)$ в произвольный момент времени t при различных начальных условиях. Эту задачу решим при условии, что поток отказов простейший с интенсивностью отказов $\lambda = \text{const}$ и восстановлении $\mu = \text{const}$, закон распределения времени между отказами (частота отказов) $a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, время восстановления описывается также показательным законом распределения с параметром μ, т. е. $a_{\text{в}}(t) = \mu e^{-\mu t}$.

Для любого момента времени сумма вероятностей $P_0(t) + P_1(t) = 1$ – вероятность достоверного события. Зафиксируем момент времени t и найдем вероятность $P_0\,(t + \Delta t)$ того, что в момент $t + \Delta t$ элемент находится в работе. Это событие осуществляется при выполнении двух условий.

1. В момент t элемент находился в состоянии **0** и за время Δt не произошло отказа. Вероятность работы элемента определяется по правилу умножения вероятностей независимых событий. Вероятность того, что в момент t элемент был в состоянии **0**, равна $P_0(t)$. Вероятность того, что за время Δt он не отказал, равна $e^{-\lambda\Delta t}$. С точностью до величины высшего порядка малости можно записать

$$e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + \frac{\lambda^2\Delta t^2}{2} - \ldots \cong 1 - \lambda\Delta t. \qquad (4.1)$$

Поэтому вероятность этой гипотезы будет равна произведению $P_0\,(t)(1\text{-}\lambda\Delta t)$.

2. В момент времени t элемент находился в состоянии **1** (в состоянии восстановления), за время Δt восстановление закончилось и элемент перешел в состояние **0**. Эту вероятность также определим по правилу умножения вероятностей независимых событий. Вероятность того, что в момент времени t элемент находился в состоянии **1**, равна $P_1(t)$. Вероятность того, что восстановление закончилось, определим через вероятность противоположного события, т. е. $1 - e^{-\mu\Delta t} \cong \mu\Delta t$. Следовательно, вероятность второй гипотезы равна $P_1(t)\,\mu\Delta t$.

Вероятность рабочего состояния элемента в момент $(t + \Delta t)$ определяется вероятностью суммы независимых несовместимых событий при выполнении обеих гипотез:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + P_1(t)\mu\Delta t \qquad (4.2)$$

или

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda\,P_0(t)+\mu\,P_1(t);$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=\frac{dP_0(t)}{dt}.$$

Следовательно, первое уравнение состояния

$$d\,P_0(t)/dt=-\lambda\,P_0(t)+\mu\,P_1(t). \qquad (4.3)$$

Проводя аналогичные рассуждения для второго состояния элемента – состояние отказа (восстановления), можно записать второе уравнение состояния

$$d\,P_1(t)/dt=-\mu\,P_1(t)+\lambda\,P_0(t). \qquad (4.4)$$

Таким образом, для описания вероятностей состояния элемента получена система двух дифференциальных уравнений – (4.3.) и (4.4).

Необходимо отметить, что λdt и μdt выполняют роль вероятностей перехода соответственно в отказовое и в рабочее состояние элемента. Процесс изменения состояний рассматриваемого элемента можно проиллюстрировать с помощью графа, представленного на рис. 4.1. Вершинам графа соответствуют состояния элементов (**0**, **1**), а ребрам – возможные переходы из одного состояния в другое.

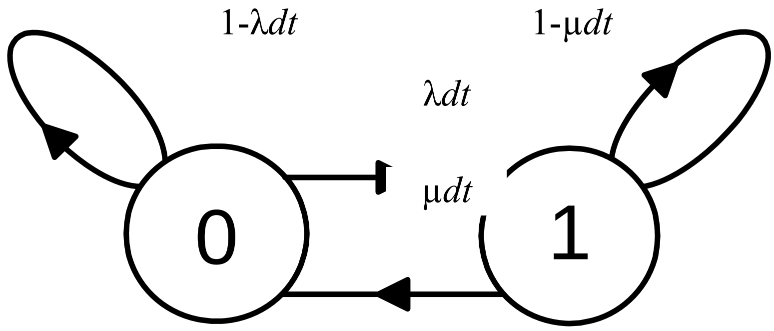


Рис. 4.1. Граф переходов для одноэлементной схемы

Если имеется направленный граф состояний элемента или системы, то систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний P_k (k = 0, 1, 2, …) можно сразу написать, пользуясь следующим простым правилом. ***В левой части каждого уравнения стоит производная $dP_k(t)/dt$, а в правой части – столько членов, сколько ребер связано непосредственно с данным состоянием; если ребро оканчивается в данном состоянии, то член имеет знак плюс, если начина-***

ется из данного состояния – знак минус. Каждый член равен произведению интенсивности потока событий, переводящего элемент или систему по данному ребру в другое состояние, на вероятность того состояния, из которого начинается ребро.

Систему дифференциальных уравнений можно использовать для определения вероятностей безотказной работы системы электроснабжения, функции и коэффициента готовности, вероятности нахождения в ремонте (восстановлении), среднего времени пребывания системы в любом состоянии, интенсивности отказов системы на относительно коротких интервалах времени, когда необходим учет начальных условий (состояний элементов).

Решением системы уравнений, описывающих состояние одного элемента при начальных условиях $[P_0(0) = 1;\ P_1(0) = 0]$, будет:

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{4.5}$$

Вероятность состояния отказа

$$P_1(t) = 1 - P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{4.6}$$

Если в начальный момент времени элемент находился в состоянии отказа (восстановления) т. е. $P_0(0) = 0$, $P_1(0) = 1$, то

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}; \tag{4.7}$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{4.8}$$

Для стационарного состояния $(t \to \infty)$ вероятность работы элемента равна стационарному коэффициенту готовности, а вероятность отказа состояния – коэффициенту вынужденного простоя:

$$\lim_{t\to\infty} P_0(t) = K_{\text{г}} = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{\overline{T}}{\overline{T} + \bar{t}_{\text{в}}}; \tag{4.9}$$

$$\lim_{t\to\infty} P_1(t) = K_{\text{п}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\bar{t}_{\text{в}}}{\overline{T} + \bar{t}_{\text{в}}}, \tag{4.10}$$

где $\overline{T}$ – среднее время безотказной работы; $\bar{t}_{\text{в}}$ – среднее время восстановления.

Продолжительность времени, в течение которого вероятности $P_0(t)$ и $P_1(t)$ достигают своего установившегося значения, зависит от показателя степени, т. е. коэффициента затухания экспоненты.

Если $\overline{T} >> \bar{t}_{\text{в}}$, то коэффициент затухания экспоненты

$$\lambda + \mu = \frac{1}{\overline{T}} + \frac{1}{\bar{t}_{\text{в}}} = \frac{\overline{T} + \bar{t}_{\text{в}}}{\bar{t}_{\text{в}}\overline{T}} \approx \frac{1}{\bar{t}_{\text{в}}}. \tag{4.11}$$

Поэтому формулы (4.5)–(4.8) для практических расчетов можно преобразовать следующим образом:

при $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = 0$ (рис. 4.2, *а*, *в*)

$$P_0(t) = K_{\text{г}} + K_{\text{п}}\exp(-t/\bar{t}_{\text{в}}); \tag{4.12}$$

$$P_1(t) = K_{\text{п}} - K_{\text{п}}\exp(-t/\bar{t}_{\text{в}}); \tag{4.13}$$

при $P_0(0) = 0$, $P_1(0) = 1$ (рис. 4.2, *б*, *г*)

$$P_0(t) = K_{\text{г}} - K_{\text{г}}\exp(-t/\bar{t}_{\text{в}}); \tag{4.14}$$

$$P_1(t) = K_{\text{п}} + K_{\text{г}}\exp(-t/\bar{t}_{\text{в}}). \tag{4.15}$$

Вероятностное состояние системы при $t \to \infty$, т. е. при стационарных условиях, не зависит от ее начального состояния.

Коэффициент готовности и коэффициент вынужденного простоя можно интерпретировать как среднюю вероятность нахождения системы соответственно в рабочем состоянии и в состоянии отказа (рис. 4.2, *а*-*г*).

Из анализа формул (4.12)–(4.15) видно, что чем меньше среднее время восстановления элемента (больше $\mu = \bar{t}_{\text{в}}^{-1}$), тем больше коэффициент затухания ($\lambda + \mu$), а следовательно, тем быстрее процесс стремится к установившемуся значению вероятности (в абсолютных единицах времени) т. е. к стационарным значения $K_{\text{г}}$ и $K_{\text{п}}$.

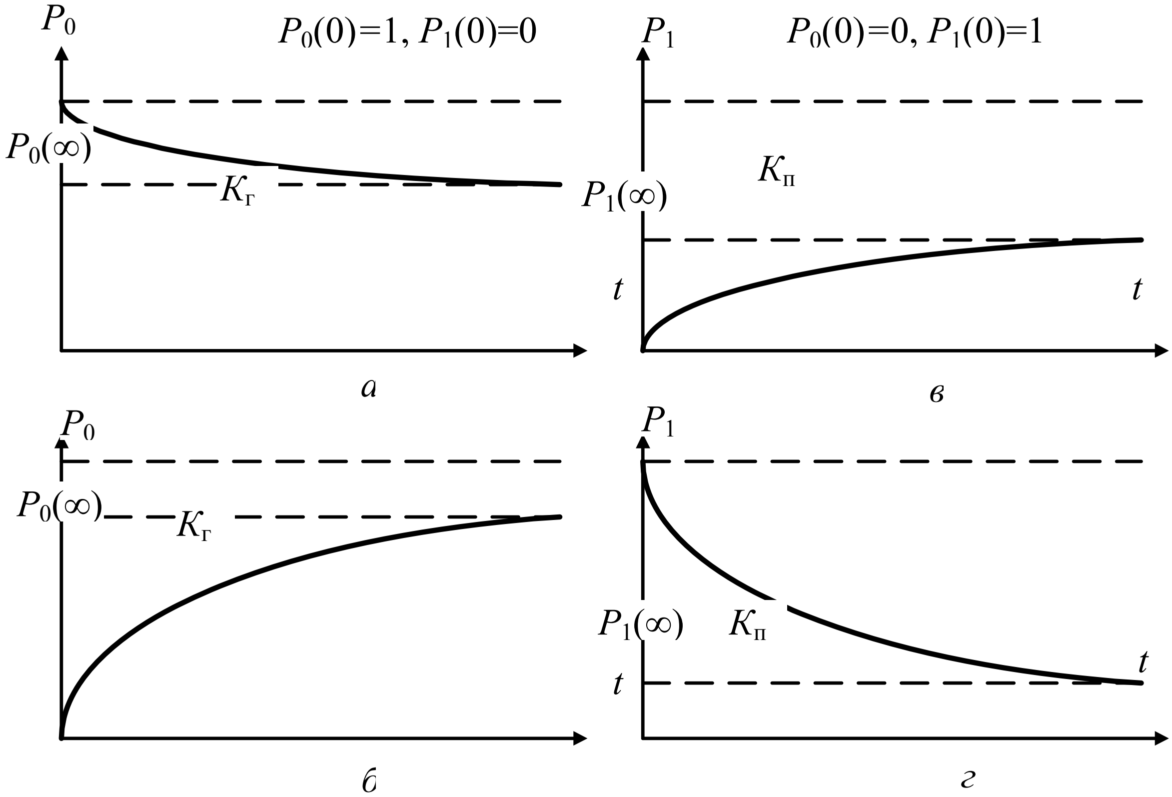


Рис. 4.2. Зависимости изменения вероятности безотказной работы и вероятности отказа одноэлементной схемы при различных начальных условиях

Обычно в расчетах показателей надежности для достаточно длительных интервалах времени ($t \geq (7–8)t_в$) без большой погрешности вероятности состояний системы можно определять по установившимся средним вероятностям $P_0(\infty) = K_г = P_0$ и $P_1(\infty) = K_п = P_1$. Такого рода состояния с точки зрения надежности называются предельными. Вероятности установившихся состояний ($t \to \infty$) находятся достаточно просто решением обычной системы алгебраических уравнений, полученных из системы дифференциальных уравнений приравниванием производных (левых частей) нулю, т. е. $dP_k(t)/dt = 0$, и заменой $P_k(t) = P_k = \text{const}$ и дополнением нормировочным условием $\sum_{k=0}^{n} P_k = 1$.

Система уравнений для элемента с двумя состояниями имеет вид

$$\left.\begin{aligned} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0; \\ P_1 + P_0 = 1, \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

откуда

$$P_0 = K_{\text{г}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\dfrac{1}{\bar{t}_{\text{в}}}}{\dfrac{1}{\overline{T}} + \dfrac{1}{\bar{t}_{\text{в}}}} = \frac{\overline{T}}{\overline{T} + \bar{t}_{\text{в}}}; \tag{4.17}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = K_{\text{п}} = \frac{\bar{t}_{\text{в}}}{\overline{T} + \bar{t}_{\text{в}}}. \tag{4.18}$$

Таким образом, получился тот же результат, что и при анализе предельных состояний с помощью дифференциальных уравнений.

Отметим, что при $\overline{T} >> \bar{t}_{\text{в}}$ коэффициент вынужденного простоя определяется более просто:

$$K_{\text{п}} = \bar{t}_{\text{в}} / (\bar{t}_{\text{в}} + \overline{T}) \approx \bar{t}_{\text{в}} / \overline{T} = \lambda \bar{t}_{\text{в}}. \tag{4.19}$$

В практических расчетах принимают $\omega = \lambda$, поэтому вероятность отказового и рабочего состояний определяются по формулам

$$P_1 = \lambda \bar{t}_{\text{в}} = \omega \bar{t}_{\text{в}}; \tag{4.20}$$

$$P_0 = 1 - \omega \bar{t}_{\text{в}}. \tag{4.21}$$

Следовательно, ***коэффициент вынужденного простоя (или средняя вероятность отказа) равен произведению параметра потока отказов на среднее время восстановления элемента после одного отказа***.

Этот же результат можно получить из общих рассуждений при отсутствии ограничения на виды законов распределения времени безотказной работы и восстановления [7, 8].

4.1.2. Система, состоящая из последовательных восстанавливаемых элементов

Система, состоящая из n последовательных восстанавливаемых элементов, отказывает в тех случаях, когда отказывает любой из элементов (вероятностью отказов нескольких элементов при принятых допущениях о свойстве потоков отказов пренебрегаем). Поэтому суммарный поток отказов всех элементов практически обладает свойством ординарности, которое позволяет пренебречь одновременностью отказов двух и более элементов. Система из n однородных последовательно соединенных элементов имеет два состояния: **0** – все элементы в рабочем состоянии, **1** – один из элементов в отказовом состоянии. Применяя вышеизложенный метод определения вероятностей состояния при различных начальных условиях, получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -n\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} &= -\mu P_1(t) + n\lambda P_0(t). \end{aligned}\right\} \qquad (4.22)$$

Вероятность работы n элементов в течение времени dt определяется с использованием правила умножения вероятностей для совместных событий – работы всех элементов в интервале времени dt:

$$\underbrace{e^{-\lambda dt} e^{-\lambda dt} e^{-\lambda dt} \ldots e^{-\lambda dt}}_{n} = e^{-n\lambda dt} \approx (1 - n\lambda dt). \qquad (4.23)$$

Вероятность восстановления отказавшего элемента μdt за интервал времени dt определяется так же, как и для одноэлементной схемы. Решая систему дифференциальных уравнений при начальных условиях $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = 0$, находим:

$$P_0(t) = \frac{\mu}{n\lambda + \mu} + \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu} e^{-(n\lambda + \mu)t}; \qquad (4.24)$$

$$P_1(t) = \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu} - \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu} e^{-(n\lambda + \mu)t}. \qquad (4.25)$$

При начальных условиях $P_0(0) = 0$, $P_1(0) = 1$ (цепь в состоянии отказа)

$$P_0(t) = \frac{\mu}{n\lambda + \mu} - \frac{\mu}{n\lambda + \mu} e^{-(n\lambda + \mu)t}; \qquad (4.26)$$

$$P_1(t) = \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu} + \frac{\mu}{n\lambda + \mu} e^{-(n\lambda + \mu)t}. \qquad (4.27)$$

Для стационарного состояния $t \to \infty$ коэффициенты готовности и вынужденного простоя системы имеют вид:

$$P_0 = K_{\text{г}} = \frac{\mu}{n\lambda + \mu} = \frac{\bar{T}}{n\bar{t}_{\text{в}} + \bar{T}}; \qquad (4.28)$$

$$P_1 = K_{\text{п}} = \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu} = \frac{n\bar{t}_{\text{в}}}{n\bar{t}_{\text{в}} + \bar{T}}. \qquad (4.29)$$

Если элементы последовательной цепи неоднородные, т. е. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_n$, то

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{t}_{\text{в}i}; \tag{4.30}$$

$$P_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{t}_{\text{в}i}. \tag{4.31}$$

При расчетах простых схем с малым числом элементов и $\mu >> \lambda$ погрешность при использовании этих формул незначительна.

4.1.3. Система, состоящая из параллельно соединенных восстанавливаемых элементов

Параллельное соединение в смысле надежности восстанавливаемых элементов означает, что при отказе одного из элементов система продолжает выполнять свои функции, т. е. предполагается автоматическое резервирование каждого элемента с пропускной способностью, достаточной для полного обеспечения мощности потребителя.

В общем случае, когда система при таком резервировании состоит из n независимых элементов, число возможных состояний системы будет 2^n, если считать, что каждый элемент может быть в двух состояниях – рабочем и отказовом. Отказ системы наступает только тогда, когда все элементы окажутся в отказовом состоянии.

Рассмотрим более подробно самый простой случай, наиболее часто встречающийся в электрических системах, – параллельное соединение двух элементов (две цепи линии электропередач, двухтрансформаторные подстанции и т. д.). Такая система может находиться в четырех состояниях: 1 – оба элемента в рабочем состоянии; 2 – первый элемент в отказовом состоянии, а второй – в рабочем; 3 – второй элемент в отказовом состоянии, а первый – в рабочем; 4 – оба элемента в отказовом состоянии. Соответствующие вероятности этих состояний будут $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, $P_4(t)$.

Методика составления и решения дифференциальных уравнений для этого случая строится по изложенным выше принципам и приведена в [8, 9]. Мы же ограничимся основными выводами из их решения.

Для стационарного состояния (при $t \to \infty$) средние вероятности состояний будут:

$$P_1 = \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} = \frac{\overline{T}_1}{(\overline{T}_1 + \bar{t}_{\text{в}1})} \frac{\overline{T}_2}{(\overline{T}_2 + \bar{t}_{\text{в}2})} = K_{\text{г}1} K_{\text{г}2}; \tag{4.32}$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} = \frac{\bar{t}_{\text{в}1}}{(\bar{T}_1 + \bar{t}_{\text{в}1})} \frac{\bar{T}_2}{(\bar{T}_2 + \bar{t}_{\text{в}2})} = K_{\text{п}1} K_{\text{г}2}; \qquad (4.33)$$

$$P_3 = \frac{\lambda_2 \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} = \frac{\bar{t}_{\text{в}2}}{(\bar{T}_2 + \bar{t}_{\text{в}2})} \frac{\bar{T}_1}{(\bar{T}_1 + \bar{t}_{\text{в}1})} = K_{\text{п}2} K_{\text{г}1}; \qquad (4.34)$$

$$P_4 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} = \frac{\bar{t}_{\text{в}1}}{(\bar{T}_1 + \bar{t}_{\text{в}1})} \frac{\bar{t}_{\text{в}2}}{(\bar{T}_2 + \bar{t}_{\text{в}2})} = K_{\text{п}1} K_{\text{п}2}. \qquad (4.35)$$

Стационарные коэффициенты готовности и вынужденного простоя системы при условии $\bar{T}_i >> \bar{t}_{\text{в}i}$:

$$K_{\text{г}} = P_1 + P_2 + P_3; \qquad (4.36)$$

$$K_{\text{п}} = P_4 = K_{\text{п}1} K_{\text{п}2} \approx \lambda_1 \bar{t}_{\text{в}1} \lambda_2 \bar{t}_{\text{в}2}. \qquad (4.37)$$

Этот результат можно получить также, применяя правила умножения вероятностей независимых событий и не накладывая условий ни на законы распределения времени безотказной работы, ни на законы распределения времени восстановления.

В самом деле, отказ системы из двух независимых взаиморезервируемых элементов произойдет в случае пересечения событий отказа первого и второго, вероятность чего равна произведению средних вероятностей состояний отказа каждого из них – q_1 и q_2. Так как средние вероятности состояний отказа элементов приближенно равны произведениям числа отказов λ_i на среднюю продолжительность восстановления $\bar{t}_{\text{в}i}$, то

$$q_1 \approx K_{\text{п}1} = \lambda_1 \bar{t}_{\text{в}1}, \; q_2 \approx K_{\text{п}2} = \lambda_2 \bar{t}_{\text{в}2}.$$

Следовательно,

$$K_{\text{п}} = q_1 q_2 = K_{\text{п}1} K_{\text{п}2} = \lambda_1 \bar{t}_{\text{в}1} \lambda_2 \bar{t}_{\text{в}2}. \qquad (4.38)$$

При рассмотрении одноэлементной системы было показано, что коэффициент затухания экспоненты обратно пропорционален среднему времени восстановления элемента при $\bar{T} >> \bar{t}_{\text{в}}$: $(\lambda + \mu) \approx \bar{t}_{\text{в}}^{-1}$.

В рассматриваемой схеме вероятности всех состояний описываются суперпозицией экспонент с постоянными составляющими, которые можно приближено заменить одной экспонентой с эквивалентным коэффициентом затухания, обратно пропорциональным эквивалентному времени восстановления системы из состояния отказа в работоспособное, т. е.

$$e^{-(\lambda_i+\mu_i)t} \approx e^{-\frac{t}{\bar{t}_{\text{в}i}}}; \tag{4.39}$$

$$e^{-(\lambda_1+\mu_1+\lambda_2+\mu_2)t} \approx e^{-t\frac{\bar{t}_{\text{в}1}+\bar{t}_{\text{в}2}}{\bar{t}_{\text{в}1}\bar{t}_{\text{в}2}}}, \tag{4.40}$$

где

$$\frac{\bar{t}_{\text{в}1}\bar{t}_{\text{в}2}}{\bar{t}_{\text{в}1}+\bar{t}_{\text{в}2}} = \bar{t}_{\text{вс}} \tag{4.41}$$

имеет смысл эквивалентного времени восстановления двух параллельно соединенных элементов.

Рассматривая резервированную систему как один эквивалентный элемент, можем записать

$$K_{\text{п}} = \lambda_{\text{с}}\bar{t}_{\text{вс}},$$

откуда

$$\lambda_{\text{с}} = \frac{K_{\text{п}}}{\bar{t}_{\text{вс}}} = \frac{\lambda_1\bar{t}_{\text{в}1}\lambda_2\bar{t}_{\text{в}2}(\bar{t}_{\text{в}1}+\bar{t}_{\text{в}2})}{\bar{t}_{\text{в}1}\bar{t}_{\text{в}2}} = \lambda_1 K_{\text{п}2} + \lambda_2 K_{\text{п}1}. \tag{4.42}$$

Таким образом, параметр потока отказов системы, состоящей из двух резервируемых друг друга элементов, равен сумме произведений параметра потока отказов первого элемента на среднюю вероятность отказового состояния второго элемента и параметра потока отказов второго на среднюю вероятность отказа первого.

Полученный алгоритм определения потока отказов резервированной системы имеет важное практическое значение вследствие своей простоты и наглядности.

Параметр потока отказов системы можно приближенно также оценить из общих соображений, не накладывая условий на функции распределения времени безотказной работы и восстановления элементов.

Рассмотрим две независимые гипотезы о возможных отказах системы при анализе ее состояний на достаточно длительном интервале T:

1. Число отказов системы на интервале T в процессе восстановления первого элемента равно произведению числа отказов второго элемента на среднюю вероятность состояния отказа q_1 первого элемента:

$$N_1 = \lambda_2 T q_1 = \lambda_2 T K_{\text{п}1}. \tag{4.43}$$

2. Число отказов системы на интервале T в процессе восстановления второго элемента равно произведению отказов первого на среднюю вероятность состояния отказа q_2 второго элемента:

$$N_2 = \lambda_1 T q_2 = \lambda_1 T K_{\text{п}2}. \tag{4.44}$$

Суммарное число отказов равно сумме отказов при двух гипотезах:

$$N = N_1 + N_2 = (\lambda_2 K_{п1} + \lambda_1 K_{п2})T. \qquad (4.45)$$

Среднее число отказов в единицу времени (параметр потока отказов) системы определится как

$$\lambda_с = N/T = \lambda_1 K_{п2} + \lambda_2 K_{п1}. \qquad (4.46)$$

Иными словами, ***слагаемые*** $\lambda_1 K_{п2}$ **и** $\lambda_2 K_{п1}$ ***имеют смысл среднего числа отказов системы во время состояния отказа соответственно второго и первого элементов***.

Системы, в которых осуществляется резервирование, называются системами с избыточностью по надежности. Два параллельно соединенных элемента, каждый из которых способен выполнять необходимые функции (передавать требуемую мощность), составляют простейшую систему с избыточностью по надежности. Следует отметить важное свойство таких систем. Если поток отказов и восстановлений элементов, входящих в систему с избыточностью по надежности, обладает свойствами простейшего марковского процесса, то и параметр потока отказов и восстановлений такой системы, рассматриваемый как эквивалентный элемент, с достаточной для практических целей точностью можно также считать обладающим этими свойствами, т. е. стационарностью, ординарностью, отсутствием последействия. Этот поток отказов системы с избыточностью по надежности будет также пуассоновским вследствие того, что вероятность отказов системы гораздо меньше вероятности отказов отдельных элементов.

Полученный практический алгоритм определения параметра потока отказов системы с резервированием можно распространить на случай, когда n элементов резервируют друг друга (параллельное соединение в смысле надежности).

Для определения параметра потока отказов такой системы необходимо рассмотреть столько слагаемых, сколько элементов входит в систему, т. е.

$$\lambda_с = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \lambda_j \bar{t}_{вj}; \qquad (4.47)$$

$$\bar{t}_{вс} = \frac{K_п}{\lambda_с} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{t}_{вi} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \lambda_j \bar{t}_{вj} \right)^{-1}. \qquad (4.48)$$

В частном случае, когда элементы имеют одинаковые показатели надежности:

$$\lambda_с = n\lambda^n \bar{t}_в^{n-1} = n\lambda^n / \mu^{n-1}; \tag{4.49}$$

$$\bar{t}_{вс} = \frac{\lambda^n \bar{t}_в^n}{n\lambda^n \bar{t}_в^{n-1}} = \frac{1}{n\mu} = \frac{\bar{t}_в}{n}; \tag{4.50}$$

$$\overline{T}_с \approx \frac{1}{\lambda_с} = \frac{\mu^{n-1}}{n\lambda^n}. \tag{4.51}$$

Для двух взаиморезервируемых одинаковых элементов

$$\lambda_с = 2\bar{t}_в / \overline{T}^2; \quad \bar{t}_{вс} = \bar{t}_в / 2; \quad \overline{T}_с = \overline{T}^2 / 2\bar{t}_в. \tag{4.52}$$

Полученный приближенный алгоритм определения показателей надежности можно распространить на системы любой сложности с произвольным (в смысле надежности) соединением элементов, если для системы определяются показатели полного отказа.

Параметр потока отказов системы, состоящей из n независимых восстанавливаемых элементов, равен сумме произведений параметра потока отказов каждого элемента на среднюю вероятность отказа части системы, оставшейся после исключения этого элемента, причем если отказ рассматриваемого элемента приводит к отказу системы, то вероятность отказа оставшейся части принимается равной единице (например, последовательное в смысле надежности соединение элементов).

При увеличении числа элементов в рассчитываемой системе количество ее возможных состояний быстро растет (например, в системе с n элементами без учета преднамеренных отключений элементов число состояний $N = 2^n$). Поэтому применение теории марковских процессов для оценки надежности с использованием полной системы дифференциальных уравнений, их анализа и решения встречает определенные трудности.

Решение задачи с использованием значений λ_i, μ_i, $P_k(0)$ существенно облегчает получение результата, но не исключает символических преобразований, необходимых при вычислении определителя. Поэтому в том случае, когда необходимо исследовать надежность систем на коротких интервалах времени, ограничивают число состояний N, объединяя группу элементов в один с эквивалентными показателями надежности ($\lambda_э$, $\mu_э$ и т. д.), которые приближенно могут быть оценены изложенными выше способами.

4.1.4. Расчет показателей надежности с учетом ремонтных состояний и преднамеренных отключений элементов

Своевременные и целесообразные по объему профилактические ремонты оборудования позволяют не только повысить технические характеристики эксплуатируемых систем и улучшить показатели их надежности, но и сократить эксплуатационные расходы. Однако проведение профилактических и капитальных ремонтов оборудования связано с отключением элементов, изменением схем коммутаций, что приводит к изменению уровня надежности электроснабжения в этот период времени.

Объем и графики ремонтов электрооборудования устанавливаются ежегодными планами. Как правило, графики профилактических и капитальных ремонтов составляются таким образом, чтобы максимально снизить возможный ущерб от недоотпуска электроэнергии. Кроме того, ремонт оборудования и аппаратов, непосредственно связанных с технологическими аппаратами, по возможности производится одновременно с ремонтом последних.

Преднамеренные отключения элементов производятся не только для проведения профилактических и капитальных ремонтов, но и, в частности, по заявкам других организаций. Частота и продолжительность преднамеренных отключений элементов систем электроснабжения в общем случае зависят от случайных факторов. Поэтому в расчетах надежности преднамеренные отключения целесообразно задавать параметром потока преднамеренных отключений $\lambda_{\text{пр}}$ и их средней продолжительностью $\bar{t}_{\text{пр}}$.

Закон распределения продолжительности преднамеренных отключений элементов в большинстве случаев можно считать нормальным, т. к. в его формировании играют роль иные факторы по сравнению с формированием времени аварийного отключения (восстановления). Средняя продолжительность профилактического и капитального ремонтов в основном определяется правилами технической эксплуатации. Отклонения от средней продолжительности обусловлены влиянием погодных условий, состоянием ремонтной базы, наличием запасных частей и т. д.

Продолжительность преднамеренного отключения элемента обычно соизмерима с продолжительностью аварийного ремонта, поэтому, естественно, расчеты показателей надежности на коротких интервалах времени при учете преднамеренных отключений необходимо выполнять с учетом начальных условий состояния элементов. Исходя из этих положений, теорию марковских процессов для оценки вероятностей состояния можно применять с некоторыми допущениями (т. к. продолжительность преднамеренных отключений распределена не по экспоненциальному закону и параметр потока преднамеренных отключений изменяется во времени). К тому же, если состояния преднамеренных отключений элементов описывать дифференциальными уравнениями, то общее число их для системы из n элементов возрастает до 3^n, что резко затрудняет получение решения.

В практических расчетах надежности на достаточно длительных интервалах времени ($t >> \bar{t}_{\text{в}}$) обычно используются средние вероятности, а учет начальных условий производится упрощенно с использованием условности понятий «элемент» и «система» в расчетах надежности. Если система избыточна по надежности, то при преднамеренном отключении рассматриваемого элемента вся оставшаяся часть системы (в пределах решаемой задачи) рассматривается как один эквивалентный элемент с эквивалентными показателями надежности. При этом показатели надежности его рассчитываются с учетом начальных условий функционирования, т. к. предполагается, что в момент преднамеренного отключения рассматриваемого i-го элемента эквивалентный элемент был в работоспособном состоянии.

Суть метода состоит в том, что вероятность наложения аварийного отключения одного элемента на преднамеренное отключение другого (но не наоборот) определена с учетом начальных условий. Следовательно, вероятность аварии эквивалентного элемента за время преднамеренного отключения рассматриваемого элемента меньше средней вероятности его аварийного отключения. Поэтому, согласно формуле (4.6), вероятность отказа эквивалентного элемента во время преднамеренного отключения i-го элемента системы

$$P_{1\text{э}}(t) = \frac{\lambda_\text{э}}{\lambda_\text{э} + \mu_\text{э}} - \frac{\lambda_\text{э}}{\lambda_\text{э} + \mu_\text{э}} e^{-(\lambda_\text{э}+\mu_\text{э})t} = K_{\text{пэ}} - K_{\text{пэ}} e^{-\frac{t}{t_{\text{вэ}}}}. \tag{4.53}$$

Если продолжительность преднамеренного отключения принять равной $\bar{t}_{\text{пр}i}$, то

$$P_{1\text{э}}(t) = K_{\text{пэ}}(1 - e^{-\frac{\bar{t}_{\text{пр}i}}{\bar{t}_{\text{вэ}}}}) = K_{\text{пэ}} K_{\text{пр}i}, \tag{4.54}$$

где $K_{\text{пр}i}$ – коэффициент, зависящий от соотношения времени восстановления резервирующего эквивалентного элемента и времени преднамеренного отключения i-го элемента (рис. 4.3). Этот коэффициент учитывает фактор уменьшения вероятности совпадения преднамеренного отключения одного элемента и аварийного отключения другого – резервирующего.

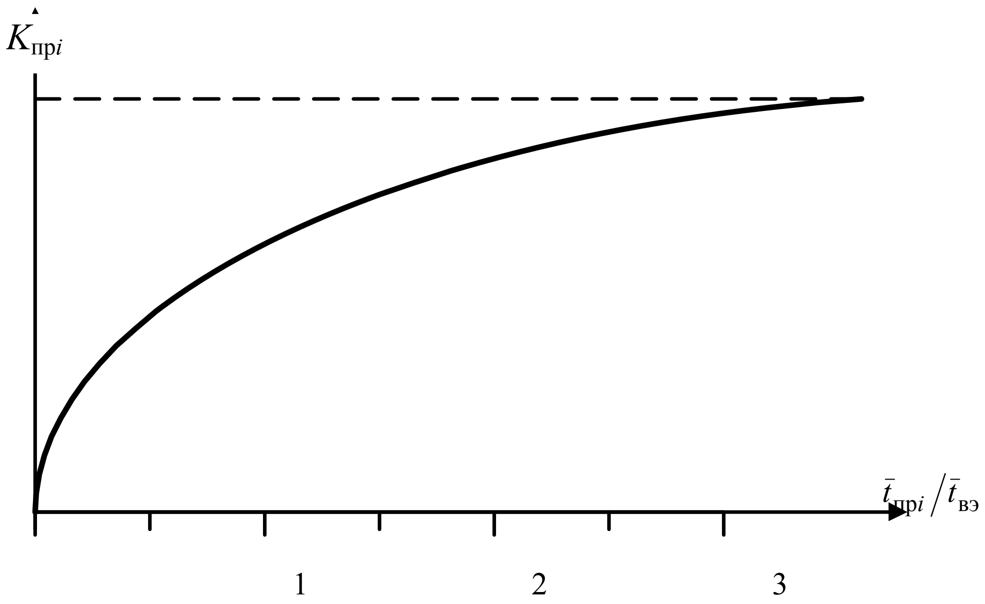


Рис. 4.3. Зависимость $K_{\text{пр}}$ от соотношения времени преднамеренного отключения и восстановления оставшейся части системы $\bar{t}_{\text{пр}i}/\bar{t}_{\text{вэ}}$

Для установившегося значения вероятности ($t \to \infty$) коэффициент, учитывающий возможность наложения отказа резервирующего элемента на преднамеренное отключение i-го элемента, можно принять равным

$$K_{\text{пр}i}=\bar{t}_{\text{пр}i}/(\bar{t}_{\text{пр}i}+\bar{t}_{\text{вэ}}). \tag{4.55}$$

Если система состоит из n элементов с произвольной схемой коммутации, то для расчета показателей надежности необходимо рассмотреть n гипотез, в каждой из них предполагается преднамеренное отключение соответствующего элемента. Результирующие показатели определяются на основе показателей надежности системы при каждой гипотезе.

- ***Система с последовательным соединением элементов***. Для уменьшения вероятности отключенного состояния и числа перерывов электроснабжения в системе с последовательным соединением элементов стремятся совместить преднамеренные отключения элементов для профилактических и капитальных ремонтов. Для приближенных расчетов, в частности проектного характера, коэффициент вынужденного простоя такой системы с учетом преднамеренных отключений определяется по формуле

$$K_{\text{пс}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{t}_{\text{в}i} + (\lambda_{\text{п}i} \bar{t}_{\text{пр}i})_{\text{нб}}, \tag{4.56}$$

где $(\lambda_{\text{п}i} \bar{t}_{\text{пр}i})$ – наибольшая вероятность преднамеренного отключения одного из n элементов системы.

Результирующий параметр потока отказов (отключений) и эквивалентное время восстановления равны:

$$\lambda_{\text{с}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \lambda_{\text{п.нб}}; \tag{4.57}$$

$$\bar{t}_{\text{вс}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{t}_{\text{в}i} + (\lambda_{\text{п}i} t_{\text{пр}i})_{\text{нб}}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \lambda_{\text{п.нб}}} = \frac{K_{\text{пс}}}{\lambda_{\text{с}}}, \tag{4.58}$$

где $\lambda_{\text{п.нб}}$ – наибольшая частота отключения одного из n элементов системы.

Более точный способ учета преднамеренных отключений таких цепей используется в методе анализа вероятностей состояний системы.

• ***Система с параллельным соединением элементов***. Вначале рассмотрим схему с двумя взаимно резервирующими элементами 1 и 2. Коэффициент вынужденного простоя (средняя вероятность отключенного состояния) такой системы согласно изложенным выше принципам

$$K_{\text{пс}} = \lambda_1 \bar{t}_{\text{в}1} \lambda_2 \bar{t}_{\text{в}2} + \lambda_{\text{пр}1} \bar{t}_{\text{пр}1} K_{\text{пр}1} \lambda_2 \bar{t}_{\text{в}2} + \lambda_{\text{пр}2} \bar{t}_{\text{пр}2} K_{\text{пр}2} \lambda_1 \bar{t}_{\text{в}1}, \tag{4.59}$$

где

$$K_{\text{пр}1} = 1 - e^{-\frac{\bar{t}_{\text{пр}1}}{\bar{t}_{\text{в}2}}} \quad \text{или} \quad K_{\text{пр}1} = \frac{\bar{t}_{\text{пр}1}}{\bar{t}_{\text{пр}1} + \bar{t}_{\text{в}2}},$$

$$K_{\text{пр}2} = 1 - e^{-\frac{\bar{t}_{\text{пр}2}}{\bar{t}_{\text{в}1}}} \quad \text{или} \quad K_{\text{пр}2} = \frac{\bar{t}_{\text{пр}2}}{\bar{t}_{\text{пр}2} + \bar{t}_{\text{в}1}}.$$

Параметр потока отказов системы и эквивалентное время восстановления равны:

$$\lambda_{\text{с}} = \lambda_1 (\lambda_2 \bar{t}_{\text{в}2}) + \lambda_2 (\lambda_1 \bar{t}_{\text{в}1}) + \lambda_1 \lambda_{\text{пр}2} \bar{t}_{\text{пр}2} + \lambda_2 \lambda_{\text{пр}1} \bar{t}_{\text{пр}1}; \tag{4.60}$$

$$\bar{t}_{\text{вс}} = \frac{K_{\text{пс}}}{\lambda_{\text{с}}} = \frac{\lambda_1 \bar{t}_{\text{в}1} \lambda_2 \bar{t}_{\text{в}2} + \lambda_{\text{пр}1} \bar{t}_{\text{пр}1} K_{\text{пр}1} \lambda_2 \bar{t}_{\text{в}2} + \lambda_{\text{пр}2} \bar{t}_{\text{пр}2} K_{\text{пр}2} \lambda_1 \bar{t}_{\text{в}1}}{\lambda_1 (\lambda_2 \bar{t}_{\text{в}2}) + \lambda_2 (\lambda_1 \bar{t}_{\text{в}1}) + \lambda_1 \lambda_{\text{пр}2} \bar{t}_{\text{пр}2} + \lambda_2 \lambda_{\text{пр}1} \bar{t}_{\text{пр}1}}. \quad (4.61)$$

Этот прием легко распространяется на систему с n взаимно резервирующими элементами:

$$K_{\text{пс}} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \ \bar{t}_{\text{в}i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\text{пр}i} \bar{t}_{\text{пр}i} K_{\text{пр}i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \ \bar{t}_{\text{в}j}; \quad (4.62)$$

$$\lambda_{\text{с}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\lambda_j \bar{t}_{\text{в}j} + \lambda_{\text{пр}j} \bar{t}_{\text{пр}j}); \quad (4.63)$$

$$\bar{t}_{\text{вс}} = K_{\text{пс}} / \lambda_{\text{с}}. \quad (4.64)$$

П р и м е р. Потребитель (П) получает электроэнергию от двух источников питания – $И_1$ и $И_2$ (рис. 4.4). Каждая цепь может пропустить всю необходимую мощность.

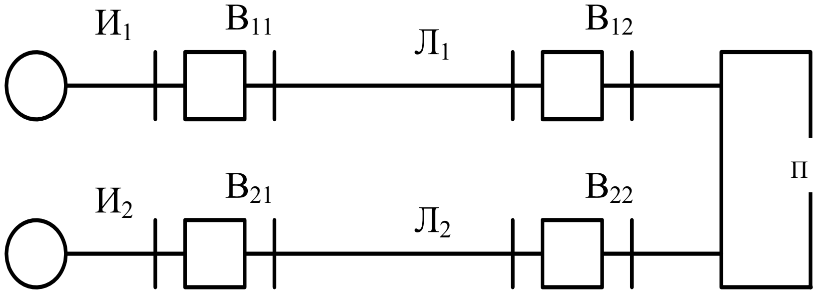


Рис. 4.4. Схема электроснабжения потребителя

Параметры потоков отказов и преднамеренных отключений элементов системы электроснабжения, средние времена восстановления и длительность преднамеренных отключений приведены в табл. 4.1.

Т а б л и ц а 4.1

Параметры надежности элементов

Параметр	Элементы					
	$В_{11}$	$Л_1$	$В_{12}$	$В_{21}$	$Л_2$	$В_{22}$
λ_0, 1/(км·г)	0,099	0,023	0,048	0,137	0,019	0,137
L, км	–	80	–	–	30	–
$\bar{t}_{\text{в}}$, ч	10	30	10	15	30	15
$\lambda_{\text{пр}}$, 1/г	0,4	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4
$t_{\text{пр}}$, ч	60	50	60	80	20	80

Определить параметр потока отказов системы электроснабжения, среднее время безотказной работы, среднюю вероятность отказа, среднее время восстановления, а также недоотпуск электроэнергии за год, считая, что средняя годовая мощность потребителя $\overline{P} = 30$ МВт.

При расчете принять, что преднамеренные отключения последовательно включенных элементов цепей совмещаются по времени. Надежность источников питания не учитывать.

Параметры потоков отказов первой и второй цепей, каждая из которых состоит из трех последовательно соединенных элементов, согласно формуле (4.57), будут:

$$\lambda_{\text{I}} = \lambda_{\text{ол1}} L_1 + \lambda_{\text{В11}} + \lambda_{\text{В12}} + \lambda_{\text{прВ11}} = 0{,}023 \cdot 80 + 0{,}099 + 0{,}048 + 0{,}4 = 2{,}387\ 1/\text{г};$$

$$\lambda_{\text{II}} = \lambda_{\text{ол2}} L_2 + \lambda_{\text{В21}} + \lambda_{\text{В22}} + \lambda_{\text{прВ21}} = 0{,}019 \cdot 30 + 2 \cdot 0{,}137 + 0{,}4 = 1{,}244\ 1/\text{г}.$$

Параметр потока отказов системы определяется как для системы, состоящей из двух параллельно соединенных элементов согласно (4.60) и с учетом того, что возможно лишь наложение аварии оставшейся части схемы на преднамеренное отключение j-го элемента.

$$\lambda_{\text{с}} = \lambda_{\text{I}} q_{\text{II}} + \lambda_{II} q_I + (\lambda_{\text{I}} - \lambda_{\text{прВ11}}) q_{\text{прII}} + (\lambda_{II} - \lambda_{\text{прВ21}}) q_{\text{прI}},$$

где

$$q_{\text{I}} = q_{\text{В11}} + q_{\text{л1}} + q_{\text{В12}} = \lambda_{\text{В11}} \bar{t}_{\text{вВ11}} + \lambda_{\text{л1}} \bar{t}_{\text{вл1}} + \lambda_{\text{В12}} \bar{t}_{\text{вВ12}} =$$
$$= (0{,}099 \cdot 10 + 1{,}84 \cdot 30 + 0{,}048 \cdot 10) / 8760 = 6{,}47 \cdot 10^{-3};$$
$$q_{\text{II}} = q_{\text{В21}} + q_{\text{л2}} + q_{\text{В22}} = (0{,}137 \cdot 15 + 0{,}57 \cdot 30 + 0{,}137 \cdot 15) / 8760 = 2{,}43 \cdot 10^{-3}.$$

Преднамеренные отключения цепей учитываются параметрами элементов В11 и В21 соответственно $q_{\text{прI}}$ и $q_{\text{прII}}$.

$$\lambda_{\text{с}} = 2{,}387 \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-3} + 1{,}244 \cdot 6{,}47 \cdot 10^{-3} + (0{,}844 \cdot 0{,}4 \cdot 60 +$$
$$+ 1{,}987 \cdot 0{,}4 \cdot 80)/8760 = 23{,}41 \cdot 10^{-3}\ 1/\text{г}.$$

Среднее время безотказной работы

$$\overline{T}_{\text{с}} = 1/\lambda_{\text{с}} = 1/23{,}41 \cdot 10^{-3} = 42{,}7 \text{ лет}.$$

При $\alpha = 0{,}1$ [9] расчетное время безотказной работы

$$T_{\text{ср}} = -ln\,(1-\alpha)\,\overline{T}_{\text{с}} = 0{,}105\,\overline{T}_{\text{с}} = 4{,}48 \text{ лет}.$$

Средние времена аварийного восстановления цепей:

$$\bar{t}_{\text{вI}} = \frac{q_{\text{I}}}{\lambda_{\text{I}} - \lambda_{\text{прВ11}}} = \frac{6{,}47 \cdot 10^{-3}}{1{,}987} 8760 = 28{,}5 \text{ ч};$$

$$\bar{t}_{\text{вII}} = \frac{q_{\text{II}}}{\lambda_{\text{II}} - \lambda_{\text{прВ21}}} = \frac{2{,}43 \cdot 10^{-3}}{0{,}844} 8760 = 25{,}2 \text{ ч}.$$

Коэффициенты, учитывающие факторы уменьшения вероятности преднамеренного отключения элементов В11 и В21,

$$K_{\text{п1}} = 1 - e^{-\frac{t_{\text{пВ11}}}{\bar{t}_{\text{в}II}}} = 1 - e^{-\frac{60}{25{,}2}} = 0{,}9075;$$

$$K_{\text{п2}} = 1 - e^{-\frac{t_{\text{пВ21}}}{\bar{t}_{\text{в}I}}} = 1 - e^{-\frac{80}{28{,}5}} = 0{,}939.$$

Средняя вероятность состояния отказа

$$q_{\text{с}} = q_{\text{I}} q_{\text{II}} + K_{\text{п1}} \lambda_{\text{пр}I} \cdot \bar{t}_{\text{прI}} \cdot q_{\text{II}} + K_{\text{п2}} \lambda_{\text{прII}} \cdot \bar{t}_{\text{прII}} \cdot q_{\text{I}} =$$
$$= 6{,}47 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-3} + (0{,}9075 \cdot 0{,}4 \cdot 60 \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-3} +$$
$$+ 0{,}939 \cdot 0{,}4 \cdot 80 \cdot 6{,}47 \cdot 10^{-3}) / 8760 = 15{,}7 \cdot 10^{-6} + 28{,}23 \cdot 10^{-6} = 43{,}93 \cdot 10^{-6}.$$

Среднее время восстановления системы

$$\bar{t}_{\text{вс}} = \frac{q_{\text{с}}}{\lambda_{\text{с}}} = \frac{43{,}93 \cdot 10^{-6}}{23{,}41 \cdot 10^{-3}} 8760 = 16{,}43 \text{ ч}.$$

Математическое ожидание недоотпущенной потребителю энергии

$$\Delta\overline{Э} = \overline{Э} \cdot q_{\text{с}} = \overline{P} T q_{\text{с}} = 30 \cdot 10^{3} \cdot 8760 \cdot 43{,}93 \cdot 10^{-6} = 11542 \text{ кВт} \cdot \text{ч}.$$

Если в приведенном примере не учитывать преднамеренных отключений, то получим

$$\lambda_{\text{с}} = 13{,}85 \cdot 10^{-3} \text{ 1/год}; \quad q_{\text{с}} = 15{,}7 \cdot 10^{-6}.$$

Из сравнения данных расчета параметров надежности с учетом и без учета преднамеренных отключений следует, что преднамеренные отключения существенным образом влияют на параметры надежности схем электроснабжения.

По полученным показателям надежности можно оценить технико-экономические последствия от недоотпуска электроэнергии и перерывов электроснабжения.

Из изложенного выше следует, что функционирование систем электроснабжения достаточно адекватно отражается в модели марковских случайных процессов. На основе анализа решений уравнений этой модели разработаны достаточно простые алгоритмы для расчета показателей надежности типовых с точки зрения надежности схем электроснабжения. При увеличение числа элементов системы количество ее возможных состояний резко возрастает. Поэтому применение марковских процессов для оценки надежности восстанавливаемых систем с использованием полной системы дифференциальных уравнений, их анализа и решения представляет определенные трудности.

Моделирование процессов отказов и восстановлений марковскими процессами оправдано в том случае, если необходим учет начальных состояний отдельных элементов, т. е. показатели надежности рассчитываются на относительно коротких интервалах времени. Для оценки же вероятностей состояния систем в течение достаточно длительного промежутка времени (сезон, год) в подавляющем большинстве случаев можно использовать более простые асимптотические методы, базирующиеся на средних значениях вероятностей состояния элементов.

4.2. Методы расчета показателей надежности схем электроснабжения по средним значениям вероятностей состояния элементов

4.2.1. Средние вероятности состояния элемента

В расчетах надежности систем электроснабжения, так же как в любых других, возникает противоречивая ситуация: с одной стороны – желание иметь точную модель, наиболее адекватно описывающую процессы отказов и восстановлений, с другой – простота расчетов и обеспеченность расчетной модели исходными данными.

Наиболее широкое распространение получили методы расчета надежности, которые исходят из предположения, что система состоит из самостоятельных в смысле надежности элементов. В этих методах отказом элемента считается выход его параметров за пределы допустимых технических норм. Предполагается, что при отказе элемент отключается коммутационными устройствами от остальной части системы. Эти методы расчета не учитывают функциональные зависимости между параметрами режимов отдельных элементов системы электроснабжения, что является их несомненным недостатком. Но принимая во внимание отсутствие необходимых исходных данных, простоту расчетов и возможность получения количественных оценок надежности для современных сложных систем, на данном этапе развития теории надежности применение таких методов вполне оправдано.

Понятие «элемент» и «система» в расчетах надежности относительны. Объект, считающейся системой в одном исследовании, может рассматриваться как элемент, если изучается объект большего масштаба. Например, если исследуется надежность работы электрической станции, то станция представляется как система, а генераторы, выключатели, шины распределительного устройства, турбины представляются отдельными элементами. Если же исследуется надежность одного генератора, то его части – статор, ротор, возбудитель и т. д. – представляются как элементы, а сам генератор – как система.

Деление системы на элементы зависит также от характера рассмотрения (функциональные, конструктивные, схемные, оперативные элементы и т. д.), требуемой точности проводимого исследования, уровня представлений о функционировании устройств, наличия статистического материала, масштабности объекта в целом. Например, при оценке надежности сложной системы относительно узла нагрузки группа конструктивных элементов присоединения (разъединитель, выключатель с комплектом релейной защиты и соответствующим участком шин) представляется как один элемент с единым показателем надежности, включающим отказы этих аппаратов в статическом состоянии и оперативных режимах. Однако при оценке вероятности развития аварии в системе такое укрупнение не позволяет решить задачу. В этом случае следует учитывать раздельно отказы выключателя в статическом и оперативных состояниях и включать в них отказы релейной защиты.

Относительность понятий «элемент» и «система» создает возможность широкого применения поэтапного метода расчета надежности. Суть его состоит в том, что на последующем этапе расчета элемент сложной системы (станция, подстанция, группа линий электропередач) может быть представлен как отдельная система, для которой последовательно уточняются показатели надежности. Тем самым создаются возможности расчета надежности достаточно сложных систем.

Обычно при расчете показателей надежности по средним знаниям вероятностей состояний элементов используются следующие статистические данные:

1. Параметр потока отказов ω, т. е. среднее количество отказов в единицу времени (обычно в год), отнесенное к одному элементу (для простейшего потока отказов $\omega = \lambda$). Для линий электропередачи параметр потока отказов обычно относится к 1 км линии [1/(км·г.)].

2. Среднее время восстановления (замены, аварийного ремонта) $\bar{t}_{\text{в}}$, ч/одно восстановление.

3. Параметр потока преднамеренных отключений элемента λ_n, 1/г.

4. Средняя продолжительность одного преднамеренного отключения элемента (в основном для профилактических и капитальных ремонтов оборудования) $\bar{t}_{\text{пр}}$, ч/одно отключение.

Ненадежность элемента (средняя вероятность отказового состояния) определяется средней вероятностью его суммарного простоя вследствие вынужденного отключения из-за повреждений и преднамеренных отключений для профилактики (раздел 4.1).

Вероятность вынужденного простоя

$$q = \frac{\omega \bar{t}_{\text{в}}}{8760}. \tag{4.65}$$

Вероятность преднамеренного отключения

$$q_{\text{п}} = \frac{\lambda_{\text{п}} \bar{t}_{\text{пр}}}{8760}. \tag{4.66}$$

Средняя вероятность отказового состояния (суммарная)

$$q_{\Sigma} = q + q_{\text{п}}. \tag{4.67}$$

Вероятность рабочего состояния (коэффициент готовности) определяется по формуле

$$P = 1 - q_{\Sigma} = 1 - q - q_{\text{п}} = \bar{t}_{\text{р}} / 8760, \tag{4.68}$$

где $\bar{t}_{\text{р}}$ – время безотказной работы элемента.

Если времена $\bar{t}_{\text{в}}$, $\bar{t}_{\text{пр}}$, $\bar{t}_{\text{р}}$ измеряются в годах, то

$$\left.\begin{array}{l} q = \lambda \bar{t}_{\text{в}}; \\ q_{\text{п}} = \lambda_{\text{п}} \bar{t}_{\text{пр}}; \\ P = \bar{t}_{\text{р}}. \end{array}\right\} \tag{4.69}$$

Приведенные показатели надежности могут характеризовать и систему в целом.

Для большей части задач, связанных с технико-экономической оценкой надежности систем электроснабжения, нет необходимости рассматривать показатели надежности на коротких интервалах времени. Поэтому можно не учитывать начальные состояния элементов. К тому же применение для этих целей методов теории массового обслуживания (марковских процессов) встречает большие затруднения вычислительного характера, если система имеет большое число восстанавливаемых элементов и произвольную схему коммутации. Поэтому при расчетах показателей надежности в интервалах времени, равных сезону, году, можно использовать более простые ***вероятностные модели, основанные на средних значениях вероятностей состояния элементов***. При указанных интервалах времени алгоритмы расчета основных показателей надежности (коэффициента вынужденного простоя, параметра потока отказов и среднего времени восстановления), изложенные в разделе 4.1, обеспечивают достаточную точность, если выполняются следующие условия:

1) отказы элементов системы независимы;
2) времена безотказной работы и времена восстановления описываются экспоненциальными законами распределения;
3) поток отказов элементов системы ординарен;
4) время безотказной работы значительно больше времени восстановления для всех элементов.

Отметим, что для обоснования возможности применения алгоритмов расчетов по средним значениям показателей надежности большее значение имеют последние два условия, которые обычно выполняются практически для всех элементов электрических систем. Даже если законы распределения времени безотказной работы и восстановления значительно отличаются от экспоненциальных, погрешность расчетов по средним значениям незначительна [8].

Рассмотрим некоторые положения применения метода расчета по средним вероятностям состояния элементов с последовательным и параллельным соединением их.

4.2.2. Вероятности отказового и безотказового состояния схем с последовательным соединением элементов

Если расчетная схема по надежности состоит из n последовательно соединенных элементов, то она будет в рабочем состоянии тогда, когда все n элементов будут в рабочем состоянии. Сложное событие – работа всех элементов схемы получается в результате совмещения событий – работы каждого элемента. Применяя теорему умножения вероятностей независимых событий, получаем вероятность рабочего состояния такой схемы:

$$P_{\text{с}} = P_1 P_2 P_3 \cdots P_n = \prod_{i=1}^{n} P_i. \tag{4.70}$$

Вероятность отказового состояния определяется как вероятность события противоположного рабочему состоянию

$$q_{\text{с}} = 1 - P_{\text{с}}. \tag{4.71}$$

В практических расчетах обычно используют другой метод определения вероятностей отказовых состояний элементов. В этом способе вероятность отказа схемы определяется как вероятность отказа хотя бы одного элемента. Вероятность этого события определяется с использованием формулы для вероятностей суммы совместных событий:

$$q_{\text{с}} = \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i,j} q_i q_j + \sum_{i,j,k} q_i q_j q_k - \ldots (-1)^{n-1} q_1 q_2 q_3 \cdots q_n. \tag{4.72}$$

Для элементов электрических систем характерными являются соотношения, при которых $q_i << 1$. Поэтому при определении вероятности отказового состояния системы из n последовательно соединенных элементов вторым, третьим и т. д. слагаемыми правой части последнего равенства можно пренебречь, как числами более высокого порядка малости (формула (4.30)). Поэтому в практических расчетах используют формулу

$$q_{\text{с}} \cong \sum_{i=1}^{n} q_i. \tag{4.73}$$

Погрешность расчета при этом не превосходит величины

$$\left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \right]^2. \tag{4.74}$$

Если схема последовательно соединенных элементов по надежности соответствует принципиальной электрической схеме соединения элементов, то учитывая, что в реальных условиях профилактический ремонт элементов последовательной цепи производится одновременно, вероятность простоя цепи следует определять по формуле (4.56):

$$q_{\text{сп}} \cong \sum_{i=1}^{n} q_i + q_{\text{п нб}} = q_c + q_{\text{п нб}}, \tag{4.75}$$

где $q_{\text{п нб}}$ – наибольшая из вероятностей преднамеренного отключения цепи из n элементов.

4.2.3. Вероятности отказового и безотказового состояния схем с параллельным соединением элементов

Рассмотрим схему, состоящую из n параллельно включенных элементов при условии независимости отказов каждого элемента и пропускной способности каждого, достаточной для обеспечения всей мощности, необходимой потребителю. Такая система будет в рабочем состоянии при условии работы хотя бы одного элемента. Вероятность рабочего состояния схемы определяется с использованием формулы для суммы вероятностей совместных независимых событий – работы каждого элемента:

$$P_{\text{c}} = \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i,j} P_i P_j + \sum_{i,j,k} P_i P_j P_k - ... + (-1)^{n-1} P_1 P_2 \cdots P_n. \qquad (4.76)$$

Определение вероятности работы системы с использованием этой формулы весьма трудоемка, т. к. необходимо вычислить и сложить $(2^n – 1)$ слагаемых. В результате следует учитывать все слагаемые, т. к. их значения близки к единице. Поэтому вероятность надежной работы системы более просто определить по вероятностям отказового состояния элементов. Система будет в отказовом состоянии при условии, если все элементы откажут. Вероятность отказового состояния определяется с использованием формулы для произведения (совмещения) независимых событий – отказов каждого элемента системы:

$$q_{\text{c}} = q_1 q_2 \cdots q_n = \prod_{i=1}^{n} q_i. \qquad (4.77)$$

Вероятность рабочего состояния такой системы определяется как вероятность противоположного события (отказа системы)

$$P_{\text{c}} = 1 - q_{\text{c}} = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i. \qquad (4.78)$$

Рассмотрим методику определения вероятности отказового состояния системы, состоящей из n параллельно соединенных элементов с учетом преднамеренных отключений отдельных элементов. Причем одновременно преднамеренно может быть отключено не более одного элемента и во время аварийного восстановления преднамеренные отключения не производятся. Для определения вероятности отказового состояния такой системы целесообразно рассмотреть, помимо вероятности сложного события – отказов всех элементов, также и вероятность n гипотез, в каждой из которых рассматривается вероятность отказа системы при преднамеренном отключении одного элемента. Так как гипотезы независимы вследствие независимости элементов, то вероятность отказового состояния системы определяется как сумма вероятностей отказовых состояний при каждой гипотезе (формула (4.62).

$$\begin{aligned} q_{\text{сп}} &= \prod_{i=1}^{n} q_i + q_{\text{п}1} K_{\text{п}1} \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq 1}}^{n} q_i + q_{2\text{п}} K_{\text{п}2} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} q_i + \ldots + \\ &+ q_{\text{п}n} K_{\text{п}n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{n-1} q_i = \prod_{i=1}^{n} q_i + \sum_{j=1}^{n} q_{\text{п}j} K_{\text{п}j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} q_i. \end{aligned} \tag{4.79}$$

При определении вероятностей отказовых состояний при каждой гипотезе введен понижающий коэффициент $K_{\text{п}j} < 1$, учитывающий уменьшение вероятности наложения аварии оставшейся части схемы на преднамеренное отключение j-го элемента. Обычно продолжительность преднамеренного отключения элементов электрических систем относительно невелика, поэтому при определении вероятности аварийного отказа оставшейся части схемы за это время необходимо учитывать начальные состояния элементов и моделировать процессы отказов и восстановлений марковским процессом. Оставшуюся часть схемы целесообразно при каждой гипотезе представлять как один эквивалентный элемент со свойствами простейшего потока отказов и восстановлений. Поэтому учет преднамеренных отключений и определение понижающего коэффициента $K_{\text{п}j}$ необходимо проводить согласно положениям, изложенным в пункте 4.1.4.

Анализируя алгоритмы расчетов показателей надежности произвольных систем, в том числе и не сводящихся к последовательно-параллельным схемам по надежности, необходимо отметить, что одной из сложных и трудоемких задач, является многократное определение средних вероятностей отказов оставшихся частей схем после исключения поочередно каждого элемента. В общем случае после исключения одного элемента сложные схемы практически не упрощаются. При расчетах коэффициентов вынужденного простоя относительно разных узлов нагрузки расчеты также весьма трудоемки. Трудоемкость и число расчетов резко увеличивается при учете преднамеренных отключений элементов в сложных системах. Поэтому одной из основных задач анализа надежности электроэнергетических систем относительно узлов нагрузки (или комплекса узлов) является разработка методов определения средних вероятностей отказа и безотказной работы их.

С усложнением взаимосвязей между элементами расчетную схему по надежности без применения особых приемов невозможно свести к схеме с последовательно-параллельным или параллельно-последовательным соединением элементов. Например, для схемы типа «мостик» или схемы с большим числом поперечных связей правила преобразования последовательно-параллельных или параллельно-последовательных схем надежности неприменимы.

Из аналитических вероятностных методов расчета сложных схем по средним вероятностям состояния элементов рассмотрим три основных:

1) метод анализа вероятностей состояний системы с анализом параметров режимов в каждом состоянии (этим методом определяются параметры при частичных отказах системы);

2) метод, использующий формулу полной вероятности, и основанный на ней метод разложения на множители;

3) метод, использующий структурные представления схемы, т. е. замену сложной схемы эквивалентными относительно узловых пунктов последовательно-параллельными или параллельно-последовательными соединениями элементов.

4.2.4. Метод анализа вероятностей состояний системы

С помощью этого метода можно учесть взаимосвязь режимов отдельных элементов и системы с вероятностями состояния системы, т. е. количественно оценить влияние ограничений пропускной способности элементов (по токам нагрева, потери напряжения и т. д.) на показатели надежности системы, в частности, на недоотпуск электроэнергии.

Для определения показателей надежности различных состояний системы выделяются расчетные элементы с учетом логики функционирования сети. Реальные элементы системы объединяются в расчетные группы, отказ которых не локализуется в них самих, а приводит к отключению всех смежных элементов. Это, как правило, группа элементов, не разделенных в схеме автоматическими коммутационными аппаратами. В смысле надежности такие элементы оказываются соединенными последовательно. По показателям надежности реальных элементов определяются показатели надежности расчетных элементов.

Затем анализируются режимы при различных состояниях схемы – с одним и двумя аварийно отключенными элементами – и с наложением на каждый преднамеренно отключенный элемент аварийного состояния другого. Состояния с тремя и более отключенными элементами в практических расчетах не рассматриваются как маловероятные.

Для каждого состояния системы определяется параметр потока отказов и преднамеренных отключений $\lambda_{c,i,j}$ и его вероятность $Q_{i,j}$.

Рассчитываются режимы работы элементов и системы и сравниваются с допускаемыми, затем оценивается значение отключаемой мощности в узлах схемы для обеспечения режима или минимального суммарного ущерба от ограничений по мощности и недоотпуска энергии потребителям. Недоотпущенная энергия определяется как сумма недоотпусков при всех состояниях системы.

В настоящее время метод анализа вероятностей состояния системы является основным для больших энергетических систем. Он позволяет в оценках надежности отразить особенности различных режимов системы. Однако расчеты, выполняемые этим методом, отличаются исключительной трудоемкостью, т. к. практически для каждого состояния (а их может быть очень много) возникает необходимость расчета потокораспределения. Подробно с методикой и математическим аппаратом этого метода исследования можно ознакомиться в [8].

Часто при расчетах надежности систем электроснабжения не надо учитывать ограничения пропускных способностей элементов, а важно лишь оценить структурную надежность схемы относительно каждого узла нагрузки. В этом случае применяется другая группа методов, основанная на использовании структурного анализа сложных схем и формуле полной вероятности.

4.2.5. Метод с использованием формулы полной вероятности

Этот метод позволяет с помощью формулы полной вероятности представить сложную схему в виде эквивалентной последовательно-параллельной. Рассмотрим основную идею этого способа на примере конкретной схемы без учета преднамеренных отключений элементов.

Формула полной вероятности для определения надежной работы схемы интерпретируется следующим образом. Вероятность любого события (в нашем случае работы системы относительно узла) вычисляется как сумма произведений вероятностей несовместимых гипотез (в качестве гипотезы рассматриваются либо работа, либо отказ любого элемента) и вероятности события (т. е. работы оставшейся части цепи) при этой гипотезе.

Применяя формулу полной вероятности к расчету вероятности безотказной работы любой схемы, можно сформулировать так называемую теорему разложения на множители. ***Надежность цепи с избыточностью равна произведению вероятности безотказной работы i-го элемента цепи на вероятность безотказной работы оставшей-***

ся цепи (места подключения i-го элемента замкнуты накоротко) плюс произведение вероятности отказа того же i-го элемента на вероятность безотказной работы оставшейся цепи (места подключения i-го элемента разомкнуты), т. е. для выделенного в схеме элемента рассматриваются две независимые гипотезы.

Рассмотрим на примере мостиковой схемы (рис. 4.5) применение теоремы разложения, а следовательно, и формулы полной вероятности для определения показателей надежности сложных схем. Отказы узловых пунктов не учитываются. Относительно любого элемента схемы можно рассмотреть две несовместимые гипотезы: работа с вероятностью P и отказ его с вероятностью q.

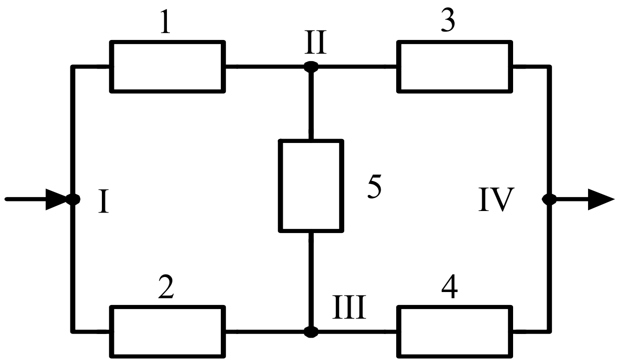


Рис. 4.5. Схема типа «мостик»

В качестве такого элемента выбираем элемент 5. Тогда, применяя теорему разложения, нетрудно свести мостиковую схему (рис. 4.5) к сумме двух цепей: параллельно-последовательной и последовательно-параллельной (рис. 4.6), методы расчета которых хорошо разработаны. Вероятность безотказной работы этой схемы относительно узла нагрузки IV

$$P_c = P_5\left[(1-q_1q_2)(1-q_3q_4)\right] + q_5\left[1-(q_1+q_3-q_1q_3)(q_2+q_4-q_2q_4)\right].$$

В этом выражении $(1-q_1q_2)(1-q_3q_4)$ есть вероятность безотказной работы схемы при первой гипотезе – безотказной работе элемента 5; $1-(q_1+q_3-q_1q_3)(q_2+q_4-q_2q_4)$ есть вероятность безотказной работы схемы при второй гипотезе – отказе элемента 5; P_5 – вероятность первой гипотезы; q_5 – вероятность второй гипотезы.

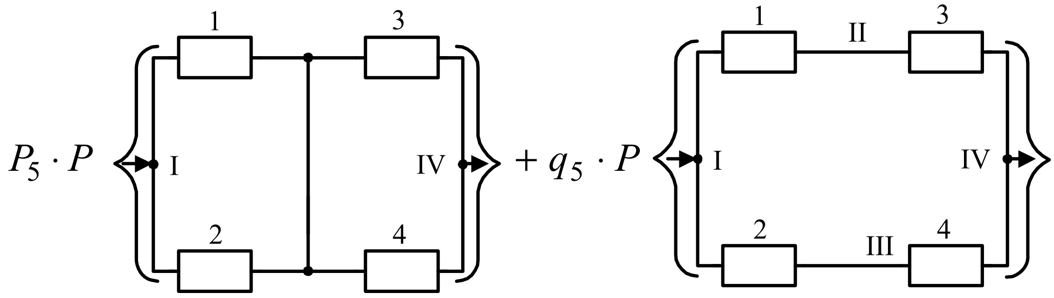


Рис. 4.6. Диаграмма, иллюстрирующая применение теоремы разложения для схемы типа «мостик»

Формула полной вероятности и основанная на ней теорема разложения на множители играют большую роль при анализе надежности сложных схем, поскольку позволяют свести любую сложную схему к совокупности элементарных. Причем в сложной схеме эту теорему приходится применять многократно.

Метод оценки надежности, основанный на формуле полной вероятности, достаточно удобен, прост и нагляден в расчетах даже без применения ЭВМ относительно небольших по объему схем с небольшим числом ветвей и узлов, к которым можно отнести схемы внутризаводского электроснабжения. Для схемы сложной конфигурации реализация этого метода с использованием ЭВМ осложняется выбором элементов, относительно которых производится разложение.

Для наглядного представления многократного применения теоремы разложения рассмотрим схему типа «двойной мостик» (рис. 4.7). Определим вероятность безотказной работы этой схемы относительно узла IV без учета преднамеренных отключений элементов, если известны средние вероятности отказовых состояний элементов $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_8$. Отказы узловых пунктов не учитываем. Предполагается, что все элементы схемы независимы в смысле вероятности отказов. Пропускные способности элементов по мощности не ограничены.

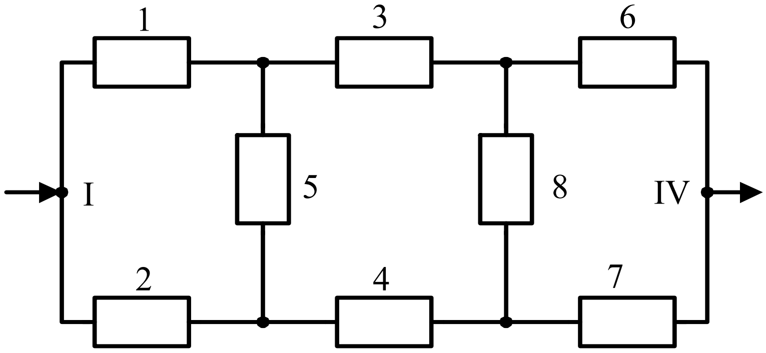


Рис. 4.7. Схема типа «двойной мостик»

Применяем последовательно теорему разложения сначала относительно элемента 5 и определяем вероятность безотказной работы оставшейся части схемы, т. е. содержащей элементы 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8. Для оценки безотказной работы этой оставшейся части схемы в свою очередь применяем теорему разложения относительно элемента 8. Диаграмма, поясняющая последовательность выполнения этих действий, представлена на рис. 4.8. Вероятность надежной работы такой системы запишется в следующем виде:

$$P_{\text{c}} = P_5\{P_8(1-q_1q_2)(1-q_3q_4)(1-q_6q_7)+q_8(1-q_1q_2)[1-(q_3+q_6-$$
$$-q_3q_6)(q_4+q_7-q_4q_7)]\}+q_5\{P_8[1-(q_1+q_3-q_1q_3)(q_2+q_4-$$
$$-q_2q_4)](1-q_6q_7)+q_8[1-(q_1+q_3+q_6-q_1q_3-q_1q_6-q_3q_6+$$
$$+q_1q_3q_6)(q_2+q_4+q_7-q_2q_4-q_2q_7-q_4q_7+q_2q_4q_7)]\}.$$

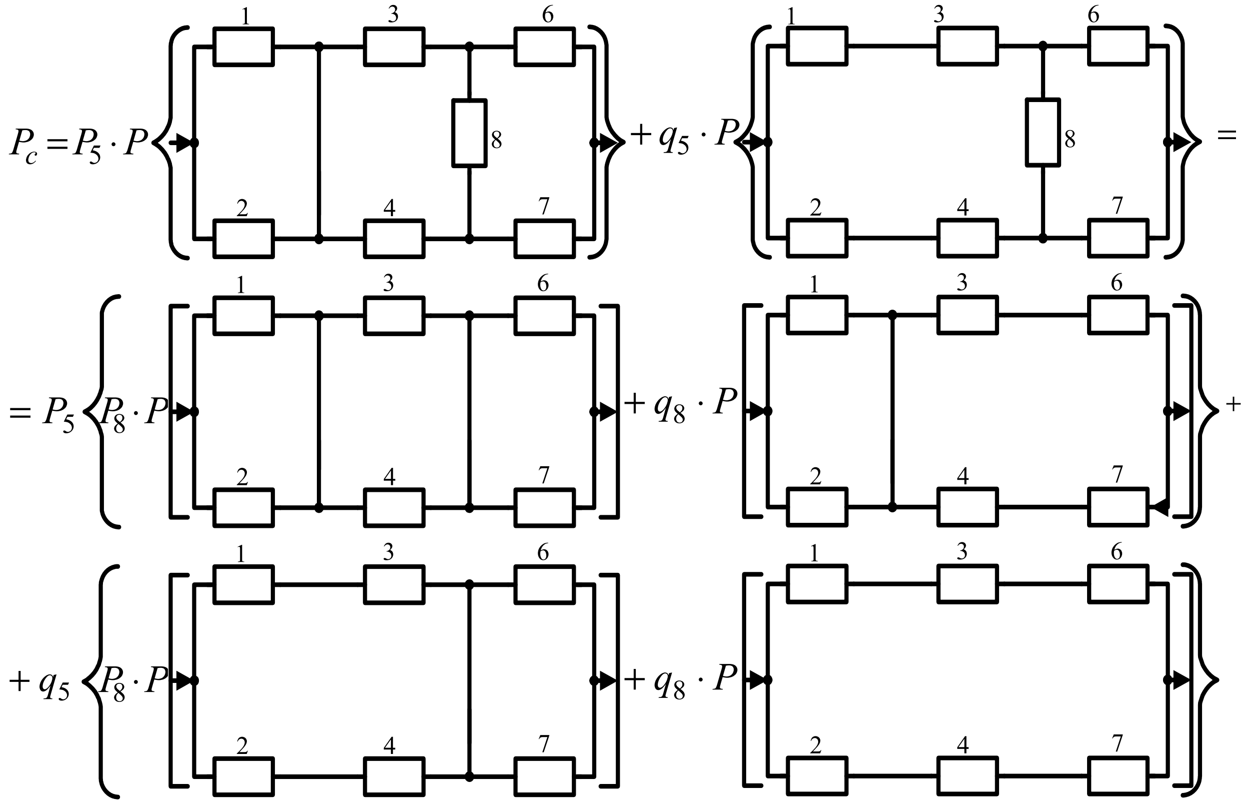


Рис. 4.8. Диаграмма, иллюстрирующая двукратное применение теоремы разложения

4.2.6. Методы структурного анализа сложных схем и использование их для оценки надежности

Применение методов структурного анализа для исследования схем электрических систем электроснабжения позволяет изучать их в общем виде. При расчете показателей надежности с помощью структурных схем анализируются не всевозможные состояния схемы, а только состояния безотказной работы того ***минимального набора элементов, которые обеспечивают нормальное функционирование схемы (передачу энергии) от источника питания до узла нагрузки (минимальные пути) или отказ того минимального набора элементов, отказ которого в любом из наборов приводит к отказу системы относительно рассматриваемого узла (минимальные сечения).***

Из определения минимальных путей и сечений следует, что предполагается неограниченная пропускная способность элементов схемы относительного каждого рассматриваемого узла нагрузки. Например, для схемы, приведенной на рис. 4.5, без учета надежности узловых пунктов минимальными путями относительно узла IV являются {1,3}, {2,4}, {1,5,4}, {2,5,3} (рис. 4.9), а минимальными сечениями – наборы элементов {1,2}, {3,4}, {1,5,4}, {2,5,3} (рис. 4.10).

С помощью минимальных путей или сечений, полученных в результате структурного анализа, можно определить вероятность обесточения узла нагрузки. Рассмотрим основные положения и определения теории графов, используемые в структурном анализе, целью которого является определение минимальных путей или минимальных сечений.

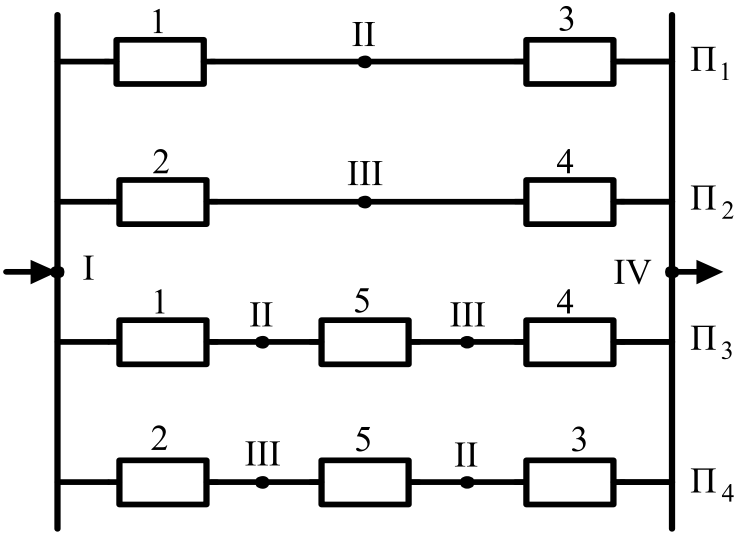


Рис. 4.9. Минимальные пути для схемы типа «мостик»

Графом называются два любых множества A и B**,** в которых каждому элементу из множества A соответствуют два элемента из множества B. Элементы A и B называются соответственно ребрами и вершинами графа. Вершины, соответствующие ребру, называются ***концами ребра.*** Ребро называется ***ориентированным***, если один из его концов рассматривается как начало, а другой как окончание. На схеме ориентированное ребро изображается как отрезок со стрелкой. Граф, в котором отдельные ребра ориентированны, называется ***частично-ориентированным***. Граф, где все ребра ориентированы, называется ***ориентированным***. Граф без ориентации ребер называется ***неориентированным***.

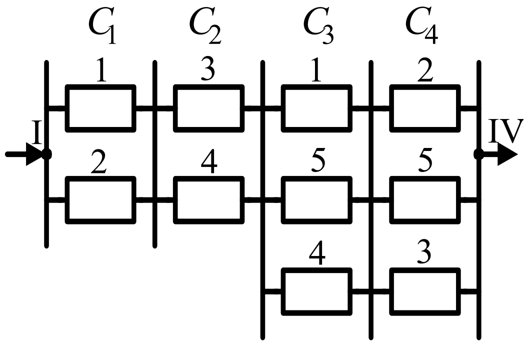


Рис. 4.10. Минимальные сечения для схемы типа «мостик»

Изучение структуры той или иной схемы равносильно изучению структуры графов. Граф называется ***планарным***, если он может быть изображен на плоскости без пересечений ребер в точках, не являющихся вершинами графа, в противном случае граф является ***непланарным***. Для системы электроснабжения свойство планарности, как правило, выполняется, так как переходы линий друг над другом встречаются относительно редко.

Анализ связей при расчетах надежности заключается прежде всего в нахождении и оценке путей между его вершинами, т. е. источником питания и узлами нагрузки. ***Путем графа*** называется такая последовательность ребер, в которой конец каждого предыдущего ребра совпадает с началом последующего. Однореберный путь называется ***непосредственным***, многореберный – ***транзитным***.

Существует много способов определения минимальных путей графа. Эти способы делятся на аналитические и логико-цифровые (последние реализуются обычно только на ЭВМ) и основаны на аналитическом представлении схемы в виде матрицы ***непосредственных*** путей. По путям графа можно также определить и минимальные сечения. Чтобы составить структурную схему (граф сети), необходимо предварительно ***преобразовать схему электрической сети в расчетную схему надежности***, т. е. схему функционирования сети. Последовательно соединенные элементы между двумя узлами целесообразно заменить одним эквивалентным, параметры которого определяются по известным формулам. Аналогичный прием применяется для элементов, параллельно включенных между двумя узлами.

После этого элементам расчетной схемы ставятся в соответствие ребра графа, а пунктам физического соединения (сборным шинам, трехобмоточным трансформаторам, местам подключения ответвлений к магистральным линиям) – вершины графа. Надежность пунктов физического соединения элементов и коммутационной аппаратуры может учитываться введением в расчетную схему элементов соответственно логике функционирования их в электрической системе. Кроме указанных вершин в графе сети будет еще одна особая вершина – вершина источников, иногда называемая вершиной «истока». Источник питания, если вероятность его безотказной работы отличается от 1, вводится расчетным элементом надежности. Все свободные концы ребер элементов таких источников питания объединяются в вершину – «исток».

Обычно граф сети с учетом возможных направлений потоков мощности в элементах является частично-ориентированным. Направленность графа сети относительно разных узлов нагрузки может быть различной. Поэтому для оценки надежности системы относительно различных узлов нагрузки следует каждый раз проверять ориентировку ребер исходного графа. Построение и составление исходной схемы в виде графа дает возможность упростить процесс исследования надежности системы алгебраической методикой вычисления.

В качестве аналитического образа графа используется матрица ***непосредственных*** путей, которая строится следующим образом.

1. Нумеруются вершины исходного графа. Для удобства расчетов нумерацию рекомендуется начинать с вершины источников. Порядок матрицы равен числу вершин в исходном графе.

2. Строки и столбцы матрицы обозначаются номерами вершин графа.

3. Элементу, принадлежащему i-й строке и j-му столбцу матрицы $\boldsymbol{A}$, присваивается некоторое число (единица или значение вероятности надежной работы элемента), если из вершины i к вершине j имеется непосредственный путь; если пути нет – ставится нуль. Если указанному элементу присваивается значение 1, то такую матрицу называют ***матрицей смежности***. В случае расчета надежности схем очень сложной конфигурации для уменьшения порядка матрицы путей целесообразно разделить схему на несколько частей.

Используя матрицу непосредственных путей $\boldsymbol{A}$ в качестве аналитического образа расчетной схемы по надежности, можно определить минимальные пути и минимальные сечения в сложной схеме. Существует несколько методов определения минимальных путей и соответственно минимальных сечений, которые достаточно подробно описаны [8]. Мы же сосредоточим внимание на том, как с помощью минимальных путей и минимальных сечений рассчитать показатели надежности исходной схемы.

После определения минимальных путей и сечений исходная сложная расчетная схема по надежности заменяется эквивалентной относительно узла, последовательно-параллельной – в случае путей или параллельно- последовательной – в случае сечений.

Такая замена дает возможность использовать известные приемы расчета, в частности применить формулы для суммы вероятностей совместных событий – безотказной работы путей или событий отказа сечений. Но следует иметь в виду, что пути и сечения в общем случае являются зависимыми, так как в них могут входить одни и те же элементы. Эту зависимость необходимо учитывать при определении вероятности надежной работы нескольких путей или вероятности отказа нескольких сечений в формуле для суммы вероятности совместимых событий при условии, что каждый путь может пропустить всю необходимую мощность в узел нагрузки.

Применяя формулу для суммы вероятностей совместимых событий (работы путей) к эквивалентной последовательно-параллельной схеме, получаем для вероятности безотказной работы схемы относительно некоторого узла n:

$$P_{\text{с}} = P\left(\sum_{i=1}^{k} \Pi_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(\Pi_i) - \sum_{i,j} P(\Pi_i \Pi_j) + \sum_{i,j,l} P(\Pi_i \Pi_j \Pi_l) - \\ - \ldots + (-1)^{k-1} P(\Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_k), \tag{4.80}$$

где k – число путей; Π_i – событие работы i-го пути; $P(\Pi_i)$ – вероятность безотказной работы i-го пути:

$$P(\Pi_i) = \prod_{j=1}^{m_i} P_{i,j}, \tag{4.81}$$

$P_{i,j}$ – вероятность безотказной работы j-го элемента в i-м пути; m_i – число элементов в i-м пути;

$$P(\Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_k) = P(\Pi_1) P(\Pi_2 / \Pi_1) \ldots P(\Pi_k / \Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_{k-1}) \tag{4.82}$$

есть вероятность безотказной работы k путей; $P(\Pi_2/\Pi_1)$ – условная вероятность безотказной работы второго пути при условии, что первый путь работает безотказно. Эту вероятность можно получить, если в последовательности второго пути места подключения элементов, уже входивших в состав первого пути, будут закорочены, т. е. вероятность из безотказной работы при вычислении условной вероятности принимается равной единице. Например, для схемы, приведенной на рис. 4.9, $P(\Pi_1) = P_1 P_3$; $P(\Pi_3/\Pi_1) = P_4 P_5$.

При определении каждой последующей условной вероятности следует учитывать вероятность безотказной работы только тех элементов, которые еще не входили в предыдущие пути. Вероятность безотказной работы элементов, входивших в предыдущие пути, равна 1. Например вероятность того, что пути Π_1 и Π_3 работают безотказно, равна $P\ (\Pi_1 \Pi_3) = =P\ (\Pi_1)\ P(\Pi_3/\Pi_1) = P_1 P_3 P_4 P_5$. Распространяя это положение на k путей, можно показать, что

$$P = (\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \cdots \Pi_k) = \prod_{i=1}^{r} P_i, \qquad (4.83)$$

где r – число элементов, входящих в k путей, т. е. эта вероятность равна произведению вероятностей безотказной работы всех элементов, входящих в эти пути, причем ***каждый элемент учитывается в произведении только один раз***, хотя он может участвовать в нескольких путях. Для схемы, приведенной на рис. 4.9

$$P\ (\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4) = P_1 P_2 P_3 P_4 P_5.$$

При определении вероятности отказа схемы относительно узла нагрузки, когда она заменяется эквивалентной параллельно-последовательной (минимальные сечения), также используется формула суммы вероятностей совместимых событий – отказов сечений. Вероятность отказа схемы относительно некоторого узла нагрузки

$$\begin{aligned} Q_c = Q\left(\sum_{i=1}^{k} C_i\right) = \sum_{i=1}^{k} Q(C_i) - \sum_{i,j} Q(C_i C_j) + \\ + \sum_{i,j,e} Q(C_i C_j C_e) - \ldots (-1)^{k-1} Q(C_1 C_2 \ldots C_k), \end{aligned} \qquad (4.84)$$

где C_i – событие отказа i-го сечения; k – количество сечений; $Q(C_i)$ – вероятность отказа i-го сечения:

$$Q(C_i) = \prod_{j=1}^{m_i} q_{i,j}; \qquad (4.85)$$

здесь $q_{i,j}$ – вероятность отказа j-го элемента i-го сечения; m_i – число элементов в i-м сечении;

$$Q(C_1C_2...C_k) = Q(C_1)Q(C_2/C_1)...Q(C_k/C_1C_2...C_{k-1}) \quad (4.86)$$

– вероятность отказа k сечений; $Q(C_2/C_1)$ – условная вероятность отказа второго сечения при отказе первого сечения.

Эту вероятность можно получить, если в последовательности второго сечения места подключения элементов, уже входивших в состав первого сечения, будут разорваны, т. е. вероятность их отказа при вычислении условной вероятности принимается равной единице; например для схемы, приведенной на рис. 4.10:

$$Q(C_1) = q_1 q_2; \qquad Q(C_3/C_1) = q_4 q_5.$$

При определении каждой последующей условной вероятности следует учитывать вероятность отказа только тех элементов, которые еще не входили в предыдущие сечения. Вероятность отказа элементов, входивших в предыдущие сечения, равна 1; например вероятность отказа сечений C_1 и C_3 будет равна

$$Q(C_3 C_1) = q_1 q_2 q_4 q_5$$

и соответственно вероятность отказа всех k сечений

$$Q(C_1C_2...C_k) = \prod_{i=1}^{r} q_i, \quad (4.87)$$

где r – число элементов, входящих в k сечений, т. е. эта вероятность равна произведению вероятностей отказов всех элементов, входящих в эти сечения, причем ***каждый элемент учитывается в произведении только один раз***. Для схемы, приведенной на рис. 4.10:

$$Q(C_1 C_2 C_3 C_4) = q_1 q_2 q_3 q_4 q_5.$$

Этим приемом обеспечивается идентичность результатов, полученных при расчете сложных исходных схем и эквивалентных структурных. Пренебрежение этим правилом, в частности, в определении вероятности безотказной работы по путям, приводит к недопустимо большим погрешностям.

Рассмотрим особенности этих способов определения показателей надежности по путям и сечениям. В формуле определения вероятности безотказной работы с использованием путей число слагаемых равно $(2^k - 1)$ и ни одним из слагаемых нельзя пренебречь (формула (4.80), т. к.

все они являются произведениями сомножителей, близких к единице. При незначительном усложнении схемы, в особенности если схема многосвязная с большим числом поперечных связей, число путей резко возрастает и расчеты становятся весьма трудоемкими.

Метод, использующий представление исходной схемы в виде минимальных сечений относительно узлов нагрузки, свободен от этого недостатка, т. к. в большинстве случаев можно ограничиться учетом слагаемых, в которых не более трех сомножителей. Приближенно можно считать, что вероятность отказа сечений равна сумме их вероятностей отказов:

$$Q(\sum_{i=1}^{k} C_i) \approx \sum_{i=1}^{k} Q(C_i), \tag{4.88}$$

и в расчет следует вводить сечения с числом элементов не более двух-трех в зависимости от конкретной задачи и необходимой точности расчетов.

Конечный результат – вычисление вероятности отказа системы относительно интересующего нас узла нагрузки или вероятность безотказной работы при представлении схемы в виде минимальных сечений – достигается быстрее и проще, чем методом минимальных путей, но процесс определения сечений сам по себе более трудоемкий. На существующем этапе развития и применения этих методов в электроэнергетике нецелесообразно противопоставлять один метод другому, т. к. для схем с протяженной структурой и малым числом поперечных связей определенные преимущества будет иметь метод путей, а для схем с концентрированной структурой и большим числом поперечных связей предпочтителен метод сечений.

Методы расчета показателей надежности сложных схем с использованием минимальных путей и сечений достаточно просто позволяют учесть преднамеренное отключение элементов. Так, при представлении исходной схемы в виде минимальных путей вероятность отказа $Q_{\text{с.п}}$ схемы относительно n-го узла нагрузки складывается из суммы вероятностей двух гипотез: отказов всех путей $Q(\sum_{i=1}^{k} \Pi_i)$ и наложения на преднамеренное отключение i-го элемента отказа оставшейся части схемы $Q_{\text{п}}(\sum_{i=1}^{k-r_i} \Pi_i)$. Предполагаем, что преднамеренные отключения отдельных элементов не совмещаются

$$Q_{\text{с.п}} = Q(\sum_{i=1}^{k} \Pi_i) + Q_{\text{п}}(\sum_{i=1}^{k-r_i} \Pi_i), \tag{4.89}$$

где $$Q(\sum_{i=1}^{k} \Pi_i) = 1 - P(\sum_{i=1}^{k} \Pi_i); \tag{4.90}$$

$$Q_{\text{п}}(\sum_{i=1}^{k-r_i} \Pi_i) = \sum_{i=1}^{m} K_{\text{п},i} q_{\text{п},i} Q\ (\sum_{i=1}^{k-r_i} \Pi_i); \tag{4.91}$$

$P = (\sum_{i=1}^{k} \Pi_i)$ – вероятность работы всех путей схемы определяется по формуле для суммы вероятностей совместимых событий (4.80); $q_{\text{п},i}$ – вероятность преднамеренного отключения i-го элемента схемы; r_i – число путей, в которых содержится i-й элемент схемы; $(k - r_i)$ – число путей, оставшихся после исключения i-го элемента из схемы; $K_{\text{п},i} < 1$ – коэффициент, учитывающий уменьшение вероятности отказов вследствие того, что возможно наложение аварии оставшейся части схемы на преднамеренное отключение i-го элемента, а не наоборот; m – число элементов в сложной схеме.

Если схема представлена в виде минимальных сечений, то вероятность отказа относительно n-го узла:

$$\begin{aligned} Q_{\text{с.п}} &= Q(\sum_{i=1}^{k} C_i) + \sum_{i=1}^{m} K_{\text{п},i} q_{\text{п},i} Q\ (\sum_{j=1}^{k-r_i} C_j) \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^{k} Q(C_i) + \sum_{i=1}^{m} K_{\text{п},i} q_{\text{п},i} \sum_{j=1}^{k-r_i} Q(C_j), \end{aligned} \tag{4.92}$$

где $(k - r_i)$ – число сечений, оставшихся в схеме после исключения i-го элемента.

В оставшейся после исключения i-го элемента части схемы минимальные сечения получаются из сечений исходной полной схемы после исключения образовавшихся неминимальных сечений. Аналогичные приемы можно использовать для расчета надежности тех сложных схем, в которых возможны совмещения преднамеренных отключений различных элементов. В этом случае рассматриваются гипотезы наложения аварий на преднамеренные отключения двух и более элементов оставшихся частей схемы и гипотезы отказа схемы без учета преднамеренных отключений элементов.

П р и м е р. Для узла нагрузки II схемы (рис. 4.11) требуется определить вероятность отказа системы с учетом преднамеренных отключений элементов, если заданы вероятности отказов каждого элемента q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, вероятности их преднамеренных отключений $q_{п1}$, $q_{п2}$, $q_{п3}$, $q_{п4}$, $q_{п5}$, а также коэффициенты, учитывающие уменьшение вероятности отказов, вследствие того, что возможно наложение аварии оставшейся части схемы на преднамеренное отключение элемента, а не наоборот $K_{п1}$, $K_{п2}$, $K_{п3}$, $K_{п4}$, $K_{п5}$. Преднамеренные отключения элементов не совмещаются.

Воспользуемся представлением схемы в виде минимальных сечений. Отказы узловых пунктов не учитывать.

Р е ш е н и е. Минимальными сечениями исходной схемы будут $C_1 \approx \{1, 2\}$; $C_2 \approx \{3, 4\}$; $C_3 \approx \{1, 5, 4\}$; $C_4 \approx \{2, 5, 3\}$ (см. рис. 4.11 *б*). Минимальные сечения при отключении **1**-го элемента получаются из минимальных сечений исходной схемы исключением элемента 1, затем исключением из полученных сечений неминимальных (рис. 4.11, *в*). В результате получаются сечения $C_{11} \approx \{2\}$; $C_{12} \approx \{3, 4\}$; $C_{13} \approx \{5, 4\}$. Аналогично определяются сечения при отключении **2**-го элемента $C_{21} \approx \{1\}$; $C_{22} \approx \{3, 4\}$; $C_{23} \approx \{5, 3\}$; **3**-го элемента $C_{31} \approx \{1, 2\}$; $C_{32} \approx \{4\}$; $C_{33} \approx \{2, 5\}$; **4**-го элемента $C_{41} \approx \{1, 2\}$; $C_{42} \approx \{3\}$; $C_{43} \approx \{1, 5\}$; **5**-го элемента $C_{51} \approx \{1, 2\}$; $C_{52} \approx \{3, 4\}$; $C_{53} \approx \{1, 4\}$; $C_{54} \approx \{2, 3\}$ (рис. 4.11, *г*, *д*, *е*, *ж*). Пренебрегая вероятностью отказа более трех элементов в схеме и применяя изложенный выше алгоритм определения вероятности отказа схемы относительно узла нагрузки с учетом преднамеренных отключений элементов, получаем вероятность отказа схемы относительно узла II:

$$Q_{с.п} \cong \sum_{i=1}^{k} q(C_i) + \sum_{i=1}^{m} q_{пi} K_{пi}\, q\left(\sum_{j=1}^{k-r_i} C_j\right) = q(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) +$$

$$+ q_{п1} K_{п1} q(C_{11} + C_{12} + C_{13}) + q_{п2} K_{п2} q(C_{21} + C_{22} + C_{23}) +$$

$$+ q_{п3} K_{п3} q(C_{31} + C_{32} + C_{33}) + q_{п4} K_{п4} q(C_{41} + C_{42} + C_{43}) +$$

$$+ q_{п5} K_{п5} q(C_{51} + C_{52} + C_{53} + C_{54}) = q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_1 q_5 q_4 + q_2 q_3 q_5 +$$

$$+ q_{п1} K_{п1}(q_2 + q_3 q_4 + q_4 q_5 - q_2 q_3 q_4 - q_2 q_4 q_5) +$$

$$+ q_{п2} K_{п2}(q_1 + q_3 q_4 + q_3 q_5 - q_1 q_3 q_4 - q_1 q_3 q_5) +$$

$$+ q_{п3} K_{п3}(q_4 + q_1 q_2 + q_2 q_5 - q_4 q_1 q_2 - q_4 q_2 q_5) +$$

$$+ q_{п4} K_{п4}(q_3 + q_1 q_2 + q_1 q_5 - q_3 q_1 q_2 - q_3 q_1 q_5) +$$

$$+ q_{п5} K_{п5}(q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_3).$$

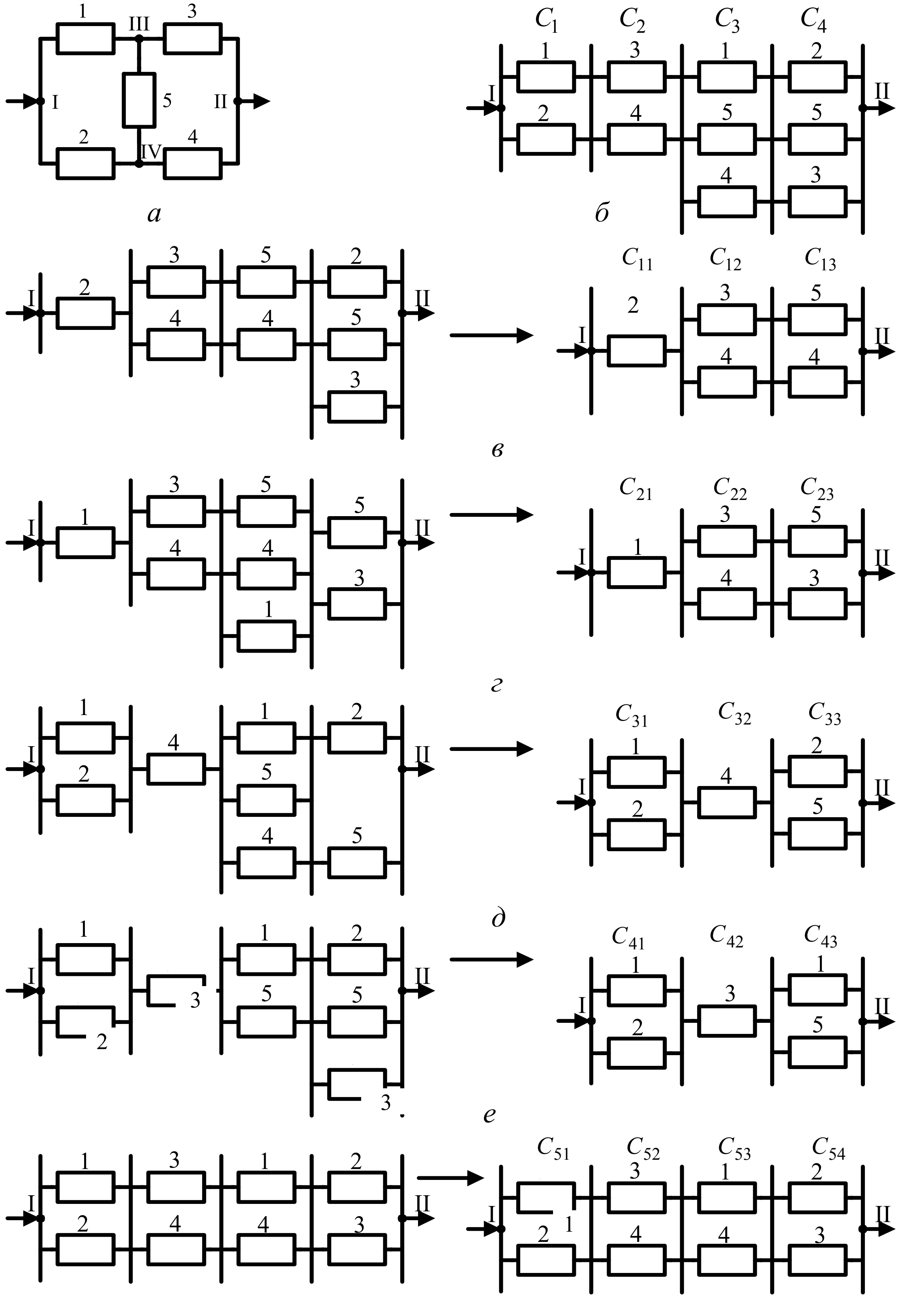


Рис. 4.11. Преобразования схемы по методу минимальных сечений

4.2.7. Составление расчетных схем и особенности расчетов надежности сложных схем электрических соединений

Современные системы электроснабжения относятся к категории сложных систем, причем сложность определяется не столько количеством элементов, сколько сложностью функциональных и логических связей между отдельными частями и элементами системы. К тому же в отличие от многих технических систем эти системы являются системами со многими входами и выходами (т. е. имеют много источников питания и потребителей). Этим определяются высокие требования, предъявляемые к составлению расчетной схемы по надежности той или иной системы. Полный учет всех факторов, влияющих на надежность системы, очевидно, невозможен ввиду их чрезвычайного многообразия. Поэтому в настоящее время получил широкое распространение статистический подход к оценке основных показателей надежности элементов электрических систем.

Перед расчетом надежности системы предварительно составляется логическая схема расчета, которая может отличаться от принципиальной электрической схемы. Например, параллельному включению генераторов на электростанции соответствует их последовательное соединение в расчетной схеме по надежности, если возникает вопрос оценки надежности генерирования всей мощности электростанции.

В последовательные цепи расчетной схемы по надежности, кроме элементов последовательной электрической цепи (линии, выключатель, трансформатор и т. д.), вводятся также смежные выключатели, отказ которых может привести к отказу рассматриваемой цепи (например, выключатели всех присоединений, секционные выключатели шин, к которым подключена анализируемая цепь). Если анализируется магистральная линия с ответвлениями, не оборудованными автоматическими выключателями, то в последовательную цепь включается также показатели надежности ответвлений от этой линии, но вероятность их отказа определяется произведением параметра потока отказов ответвления на среднее время переключения (предполагается, что ответвления оборудованы разъединителями). Это положение справедливо для тех ответвлений, которые электрически включены параллельно относительно анализируемого узла нагрузки. Если определяются показатели надежности узла нагрузки, подключенного к ответвлению от магистрали, то это ответвление вводится в расчет средним временем восстановления.

Расчетная схема по надежности относительно узлов нагрузки должна отражать логику работы исходной электрической схемы. Поэтому разнообразие методов составления расчетных схем обусловливается разнообразием применяемых схем электроснабжения и общих рекомендаций для решения всех возможных задач надежности дать нельзя. Следует только подчеркнуть, что особого внимания требуют схемы электроснабжения, в которых автоматическое отключение отдельных участков сочетается с ручным переключением при вводе резерва (например, петлевые схемы в сетях до 1000 В). В этом случае средние вероятности отказов расчетных элементов определяются не только временем восстановления участков линий, но и средним временем переключения на резервное питание.

Обычно целью расчета является определение основных показателей надежности относительно узлов нагрузки или конкретных потребителей. Поэтому система расчленяется на отдельные элементы, характеристики надежности которых сравнительно легко определяются.

Следующим этапом расчета является формулировка понятий отказа для всей системы и для отдельных элементов. Отказом системы с ограниченной пропускной способностью элементов можно считать, например, то или иное значение ограничения мощности потребителей, а для отдельных потребителей, например, сам факт отсутствия напряжения на шинах даже в течение долей секунды (если резервная цепь включается посредством АВР).

Метод расчета надежности выбирается в зависимости от конкретной постановки задачи и интервала времени, в течение которого определяются характеристики надежности. Расчеты выполняются по средним показателям или с учетом начальных состояний элементов на коротких интервалах времени (в последнем случае используется модель случайных процессов).

Для сложных систем электроснабжения составление расчетных схем по надежности является весьма трудоемкой задачей и по трудозатратам может быть соизмерима с расчетами показателей надежности. Если ставить задачу оценки показателей надежности относительно узлов нагрузки, то этот процесс можно в значительной степени формализовать на ЭВМ, используя методы структурного анализа, в частности метод формирования путей передачи энергии.

Рассмотрим более подробно возможную логику работы схемы. Электрическая схема состоит из узлов и ветвей. Как правило, узлом являются сборные шины, трехобмоточный трансформатор или секция шин. Ветвь может состоять из нескольких элементов: линия, трансформатор, выключатель и др.

Отказ элемента, входящего в ветвь, по разному влияет на работоспособность всей ветви в целом и примыкающих к ней узлов. Ветвь, содержащая отказавший элемент, теряет способность передавать энергию на время восстановления этого элемента $\bar{t}_в$. Узлы, примыкающие к этой ветви, могут терять работоспособность на следующие периоды: *а*) на время автоматического отключения $t_а$ отказавшего элемента от узла, если между узлом и этим элементом находится коммутационный аппарат, на который действует релейная защита (вероятность отказа коммутационного аппарата при этом не учитывается); *б*) на время ручных переключений $\bar{t}_{оп}$, необходимых для отключения отказавшего элемента от узла, если между ними находится разъединитель или коммутационный аппарат, не снабженный релейной защитой; *в*) на время восстановления $\bar{t}_в$ отказавшего элемента, если он непосредственно связан с узлом.

Нетрудно увидеть, что в первом случае узел останется в работе, а во втором и в третьем – будет в отказовом состояния соответствующее время. Поэтому элементы всех примыкающих к узлу ветвей, соответствующие условиям «*б*» и «*в*», должны вводится в расчетную схемы по надежности последовательно с этим узлом. Эти элементы должны входить во все пути, проходящие через этот узел.

Можно предложить следующий порядок расчета. По электрической схеме системы электроснабжения формируются все пути для данного потребителя. Пути следует дополнить элементами, которые приводят к отключению узла на время $\bar{t}_в$ или $\bar{t}_{оп}$. Получаются минимальные пути, построенные по расчетной схеме по надежности. Следует отметить, что один и тот же элемент может входить в расчетную схему с вероятностью $\lambda\bar{t}_в$ и $\lambda\bar{t}_{оп}$, где λ – параметр потока отказов. Более подробно познакомиться с методикой получения расчетных схем по надежности можно в [8].

При оценке показателей надежности в сложных схемах можно выделить два основных подхода с привлечением различных методов.

1. Определение вероятности различных состояний сложной системы и вероятности недоотпуска электроэнергии потребителям или полной потери питания отдельных потребителей. Решение этой задачи связано с анализом режимов работы отдельных элементов в сложной схеме, с нахождением вероятностных характеристик нагрузки в элементах, выделением наиболее загруженных элементов или групп в схеме. Оценка вероятности состояний схемы и показателей надежности при различных комбинациях включенных и отключенных элементов выполняется методом анализа вероятностей основных состояний. Причем состояниями с числом отказавших элементов более двух-трех, как правило, можно пренебречь. При этом необходимо учитывать также наложение аварийных отключений на преднамеренные отключения отдельных цепей.

Этот метод является основным при расчете показателей надежности, ограничения мощности и энергии у потребителей для систем со многими входами (источниками питания) и выходами (узлами нагрузки) и ограничениями по пропускной способности элементов в послеаварийных режимах. Недостатками метода являются громоздкость вычислений, необходимость анализа очень большого количества состояний схемы, трудность алгоритмизации при применении для расчетов ЭВМ. Так, например, если число расчетных элементов в сложной схеме n, то даже без учета наложения аварийных отключений на преднамеренные (пренебрегая вероятностью отказа более трех элементов) необходимо проанализировать и рассчитать режимы для

$$N = \frac{1}{6}(n^3 + 5n) \qquad (4.93)$$

состояний схемы. ***Особенностью этого метода является расчет показателей надежности с системных позиций***.

2. Оценка показателей надежности последовательно относительно каждого узла нагрузки с помощью формулы полной вероятности или с представлением схем в виде структурных последовательно-параллельных (схема путей) или параллельно-последовательных (схема сечений). Наиболее пригодным для алгоритмизации является способ представления исходной сложной схемы в виде эквивалентных структурных. Причем, как отмечалось ранее, более простые алгоритмы расчета вероятностей отказовых и безотказовых состояний схемы относительно узлов нагрузки получаются при представлении схемы в виде эквивалентной параллельно-последовательной (схемы сечения), хотя алгоритмы получения самих сечений несколько сложнее, чем путей.

С увеличением числа элементов в сложной схеме количество путей и сечений относительно каждого узла растет очень быстро. В частности, учет отказов узловых пунктов сети резко увеличивает количество сечений, не увеличивая числа путей схемы относительно узлов. С увеличением числа поперечных связей также увеличивается число путей.

Основной особенностью расчета показателей надежности с использованием структурного анализа относительно узлов является ограниченность возможностей этих методов из-за сложности их реализации при ограничениях по пропускной способности отдельных элементов, т. е. сложность определения частичных ограничений мощности и энергии потребителей.

Реализация всех этих методов, так же как и метода анализа вероятностей состояний схемы, сильно осложняется при увеличении числа расчетных элементов схемы. Поэтому одним из способов сокращения размерности задачи может быть разделение исходной сложной схемы на подсхемы по узловым пунктам сети (узловым подстанциям, системам сборных шин, пунктам трансформации энергии и т. д.). Расчет показателей надежности для первой схемы выполняется относительно пунктов разделения схемы со стороны источников питания. Для другой схемы пункты деления являются источниками питания и вводятся в расчетную по надежности схему расчетными элементами с характеристиками, полученными в расчетах первой подсхемы.

Разделение на подсхемы целесообразно выполнять таким образом, чтобы число расчетных элементов в каждой схеме не превышало 130–450. Далее, если пропускная способность элементов любой части схемы ограничена, показатели надежности относительно пунктов деления целесообразно определять с использованием методов структурного анализа. Расчет же подсхем выполняется в зависимости от конкретных условий: либо методом анализа вероятностей состояний, либо с использованием структурного представления схем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для втузов. Изд. 5-е перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1977. – 479 с.
3. Гук Ю. Б. и др. Теория и расчет надежности систем электроснабжения / Под ред. Р. Я.Федосенко. – М.: Энергия, 1970. – 176 с.
4. Зорин В.В. и др. Надежность систем электроснабжения. – К.: Вища школа, 1984. – 192 с.
5. Китушин В. Г. Надежность энергетических систем: Учеб. пособие для электроэнергетических специальностей вузов. – М.: Высш. школа, 1984. – 256 с.
6. Розанов М. Н. Надежность электроэнергетических систем. – М.: Энергия, 1974. – 176 с.
7. Сборник задач по теории надежности / Под ред. А. М.Половко и И. М. Маликова. – М.: Советское радио, 1972. – 408 с.
8. Фокин Ю. А., Туфанов В. А. Оценка надежности систем электроснабжения. – М.: Энергоиздат, 1981. – 224 с.
9. Фокин Ю. А. Надежность и эффективность сетей электрических систем. – М.: Высш. школа, 1989. – 151 с.
10. Лебедев А. Н. и др. Вероятностные методы в инженерных задачах: Справочник. – СПб.: Энергоатомиздат. Санкт-Петербургское отделение, 2000. – 333 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Николай Георгиевич Волков

НАДЕЖНОСТЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ

Учебное пособие

Научный редактор
доктор физико-математических наук, профессор А.В. Кабышев

Редактор Р.Д. Игнатова

Подписано к печати 26.04.2005.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Печать RISO. Усл.печ.л. 9,13. Уч.-изд.л. 8,26.
Тираж 100 экз. Заказ Цена свободная.
Издательство ТПУ. 634050, Томск, пр. Ленина, 30.