МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Е.В. Иванова

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НА АТОМНЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЯХ

Индивидуальное домашнее задание

Томск
2019

ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ

Дано: Дифференциальное уравнение элементы системы автоматического управления и его коэффициенты.

Требуется:

1. Решить дифференциальное уравнение элемента и найти переходную характеристику. Построить график переходной характеристики.
2. Определить качество переходного процесса по графику.
3. Получить передаточную функцию, найти нули и полюса передаточной функции.
4. Выести частотные характеристики, построить график АФЧХ.
5. Проверить данную систему на устойчивость любым критерием.

Часто свойства систем управления и их отдельных элементов описывают обыкновенными дифференциальными уравнениями.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

В общем виде дифференциальное уравнение для элемента системы управления записывается в виде:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 x'(t) + b_0 x(t) \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) называют уравнением движения элемента. При этом понятие «движение» употребляется в самом обобщенном смысле.

Уравнение движения может принимать линейный или нелинейный вид. Все постоянные величины, входящие в состав такого уравнения называются параметрами.

Под временными характеристиками понимаются импульсные и переходные характеристики. Определение переходных характеристик систем классическим способом – решение дифференциального уравнения системы.

Пусть поведение системы описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) \quad . \qquad (1.2)$$

Решение дифференциального уравнения состоит из двух составляющих:

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{вын}(t) \quad , \qquad (1.3)$$

где $y_{св}(t)$ – свободная составляющая решения; $y_{вын}(t)$ – вынужденная составляющая решения.

Вынужденная составляющая решения ищется в форме правой части уравнения (1.2):

$$y_{вын}(t) = \frac{b_0}{a_0}. \quad (1.4)$$

Свободная составляющая решения определяется видом корней характеристического уравнения системы.

Для получения характеристического уравнения необходимо перейти в уравнении (1.2) от дифференциального уравнения к изображениям Лапласа:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \to P^2, \quad \frac{dy(t)}{dt} \to P, \quad y(t) \to 1.$$

После замены левую часть дифференциального уравнения (1.2) нужно приравнять к нулю, тогда оно примет вид:

$$a_2 P^2 + a_1 P + a_0 = 0. \quad (1.5)$$

Находятся корни решением квадратного уравнения. Вещественным различным корням характеристического уравнения системы соответствует следующая компонента свободной составляющей решения:

$$y_{св}(t) = c_1 \cdot e^{P_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{P_2 \cdot t}, \quad (1.6)$$

в котором P_1, P_2 находятся как корни характеристического уравнения, а c_1, c_2 – определяются из нулевых начальных условий.

В случае если корни уравнения (1.5) мнимые, свободная составляющая примет вид:

$$y_{св} = (c_1 \cdot \sin(\beta \cdot t) + c_2 \cdot \cos(\beta \cdot t)) \cdot e^{\alpha \cdot t}. \quad (1.7)$$

Рассмотрим порядок определения передаточной функции по ее дифференциальному уравнению.

Пусть система описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$

Применим к дифференциальному уравнению преобразование Лапласа. При нулевых начальных условиях справедливы следующие формулы преобразования операций дифференцирования:

$$x'(t) \Rightarrow P \cdot X(P);\ x''(t) \Rightarrow P^2 \cdot X(P); \ldots;\ x^{(m)}(t) \Rightarrow P^m \cdot X(P).$$
$$y'(t) \Rightarrow P \cdot Y(P);\ y''(t) \Rightarrow P^2 \cdot Y(P); \ldots;\ y^{(n)}(t) \Rightarrow P^n \cdot Y(P).$$

При нулевых начальных условиях дифференциальное уравнение, преобразованное по Лапласу, записывается в виде:

$$(a_nP^n + a_{n-1}P^{n-1} + \ldots + a_1P + a_0)\cdot Y(P) = (b_mP^m + b_{m-1}P^{m-1} + \ldots + b_1P + b_0)\cdot X(P).$$

Отношение изображений Y(P) к X(P) при нулевых начальных условиях называется передаточной функцией системы и обозначается:

$$W(P) = \frac{Y(P)}{X(P)} = \frac{b_m \cdot P^m + b_{m-1}\cdot P^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot P + b_0}{a_n \cdot P^n + a_{n-1}\cdot P^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot P + a_0}. \qquad (1.8)$$

Часто при исследовании систем автоматического управления являются полезными теоремы о начальном и конечном значениях оригинала:

$$y(0) = \lim_{P\to\infty} P\cdot Y(P);\ y(\infty) = \lim_{P\to 0} P\cdot Y(P).$$

При воздействии x(t)=1(t) на вход системы, т.е. X(P)=1/P, с учетом указанной теоремы и определения передаточной функции

$$y(0) = \lim_{P\to\infty} W(P);\ y(\infty) = \lim_{P\to 0} W(P).$$

Часто при описании стационарных систем управления пользуются частотными характеристиками. Они нужны, чтобы можно было оценить динамические свойства системы.

Частотную передаточную функцию получают с помощью формальной замены в передаточной функции системы W(P) оператора P на произведение iω. Схема замены следующая:

$$W(P) \to P = i\omega \to W(i\omega).$$

Как комплексное выражение от аргумента ω, W(iω) можно представить двумя способами:

$$W(i\omega) = A(\omega)\cdot e^{i\varphi(\omega)};$$
$$W(i\omega) = \mathrm{Re}(\omega) + i\cdot \mathrm{Im}(\omega),$$

где A(ω) – амплитудно-частотная характеристика системы (АЧХ); φ(ω) – фазочастотная характеристика (ФЧХ); Re(ω) – вещественная частотная характеристика (ВЧХ); Im(ω) – мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Связь между различными видами частотных характеристик:

$$A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)};$$
$$\varphi(\omega) = arctg\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)} \pm k\cdot\pi,\ k = 0,1,2,\ldots;$$
$$\mathrm{Re}(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega);$$
$$\mathrm{Im}(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega).$$

При определении φ(ω) следует учитывать свойство периодичности функции arctg путем выбора значения k и знака перед ним.

Устойчивой считается та система, которая после исчезновения внешних воздействий может вернуться в состояние равновесия (рис. 1.1).

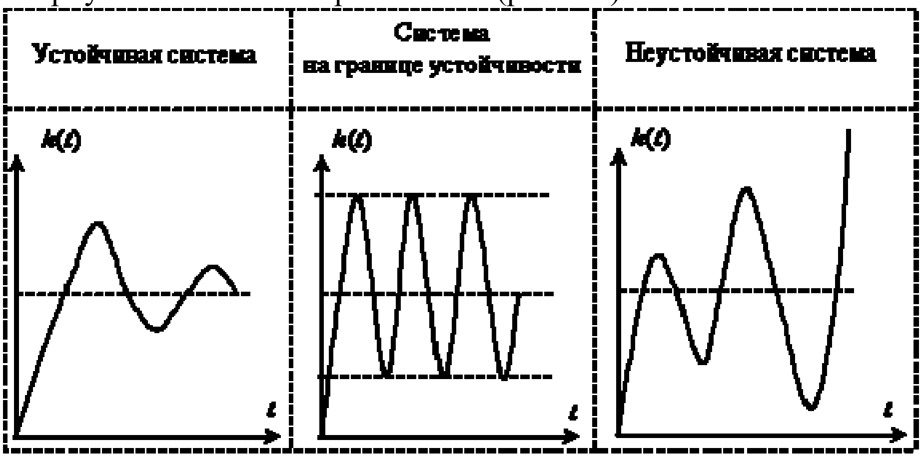


Рис. 1.1. Классификация устойчивости систем автоматического регулирования

Можно сформулировать условие устойчивости автоматических систем: для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми, т.е. корни должны лежать слева от мнимой оси в комплексной плоскости.

Важное значение имеют правила, позволяющие определить устойчива система или нет, не вычисляя при этом корни характеристического уравнения. Такие правила называют критериями устойчивости.

Все критерии устойчивости делят на алгебраические и частотные.

Алгебраические критерии позволяют судить об устойчивости по коэффициентам характеристического уравнения. Наиболее распространенные из них критерии Рауса и Гурвица. Для устойчивой системы положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым условием.

Критерий Рауса наиболее просто поясняет предложенная им таблица (таблица 1.1).

Таблица 1.1

Таблица Рауса

r	Номер строки	Номер столбца				
		1	2	3	…	К
	-	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…	a_1
	-	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…	a_0
$r_1 = \frac{a_n}{a_{n-1}}$	1	$c_{11}= a_{n-2}- r_1 \cdot a_{n-3}$	$c_{12}= a_{n-4}- r_1 \cdot a_{n-5}$	$c_{13}= a_{n-6}- r_1 \cdot a_{n-7}$	…	$c_{1k}= a_{n-2k}- r_1 \cdot a_{n-2k-1}$
$r_2 = \frac{a_{n-1}}{c_{11}}$	2	$c_{21}= a_{n-3}- r_2 \cdot c_{12}$	$c_{22}= a_{n-5}- r_2 \cdot c_{13}$	$c_{23}= a_{n-7}- r_2 \cdot c_{14}$	…	$c_{2k}= a_{n-2k-1}- r_2 \cdot c_{1,k+1}$
$r_3 = \frac{c_{11}}{c_{21}}$	3	$c_{31}= c_{12}- r_3 \cdot c_{22}$	$c_{32}= c_{13}- r_3 \cdot c_{23}$	$c_{33}= c_{14}- r_3 \cdot c_{24}$	…	$c_{3k}= c_{1,k+1}- r_3 \cdot c_{2,k+1}$
…	…	…	…	…	…	…
$r_i = \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}$	i	$c_{i1}= c_{i-2,2}- r_i \cdot c_{i-1,2}$	$c_{i2}= c_{i-2,3}- r_i \cdot c_{i-1,3}$	$c_{i3}= c_{i-2,4}- r_i \cdot c_{i-1,4}$	…	$c_{i,k}= c_{i-2,k+1}- r_i \cdot c_{i-1,k+1}$

Из анализа приведенной таблицы легко просматривается правило составления. Процесс заполнения таблицы продолжается до тех пор, пока при заданном порядке характеристического уравнения не получится строка, содержащая один коэффициент, соответствующий свободному члену характеристического уравнения.

Автоматическая система устойчива тогда, когда все коэффициенты первого столбца таблицы Рауса положительны.

Если есть хотя бы один отрицательный коэффициент в первом столбце, то система неустойчива.

Критерий Гурвица состоит в следующем: устойчивой считается та система, для которой все определители Гурвица положительны.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_0 \end{vmatrix}.$$

Отчеркивая в определителе диагональные миноры, получим определители Гурвица низшего порядка.

Мнемоническое правило образования определителя Гурвица: первой заполняется сверху вниз главная диагональ определителя, начиная с коэффициента a_{n-1} и последовательно заканчивая коэффициентом a_0. Ниже коэффициентов главной диагонали ставятся коэффициенты с последовательно возрастающими индексами, выше – с последовательно убывающими индексами. Взамен недостающих коэффициентов ставятся нули.

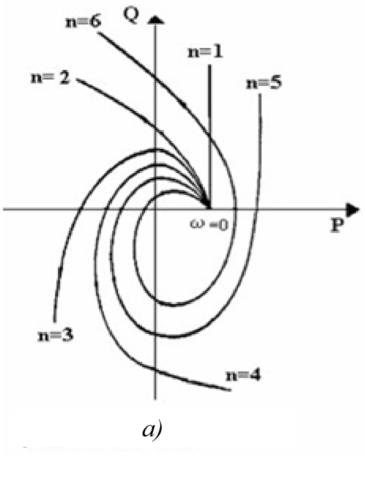
Частотные критерии позволяют судить об устойчивости системы по виду ее частотных характеристик. Такие критерии относятся к графоаналитическим и достаточно широко распространены. К ним относятся критерии Михайлова и Найквиста.

При применении критерия Михайлова рассматривают функцию комплексного переменного *M(iω)*, полученную при подстановке $p=i\omega$ в характеристический полином системы управления:

$$M(i\omega) = a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + ... + a_1 \cdot i\omega + a_0 .$$

Об устойчивости системы судят по виду кривой, описываемой в плоскости комплексного переменного концом вектора $M(i\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ (годограф Михайлова).

Система n-го порядка является устойчивой, если годограф вектора *M(iω),* никогда не обращаясь в нуль, проходит последовательно против часовой стрелки n квадратов, начинаясь с положительной ветви вещественной оси (рис. 1.2).



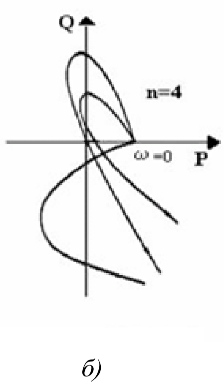


Рис. 1.2. Годографы Михайлова:
а – для устойчивых систем порядка n; б – для неустойчивых систем

По этому критерию можно определить устойчивость замкнутой системы по виду амплитудно-фазочастотной характеристики для разомкнутой системы.

Система, устойчивая или нейтральная в разомкнутом состоянии, будет устойчивой в замкнутом состоянии (обратная связь отрицательна), если АФЧХ разомкнутой системы при изменении ω от 0 до $+\infty$ не охватывает в плоскости комплексного переменного точку с координатами (-1, i0). Охватываемой областью является область, лежащая справа от направления роста частоты.

Система включающая неустойчивые звенья (характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет k корней в правой полуплоскости), будет устойчива в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ охватывает точку (-1, i0) k раз. Охватываемой областью является область, лежащая слева (рис. 1.3).

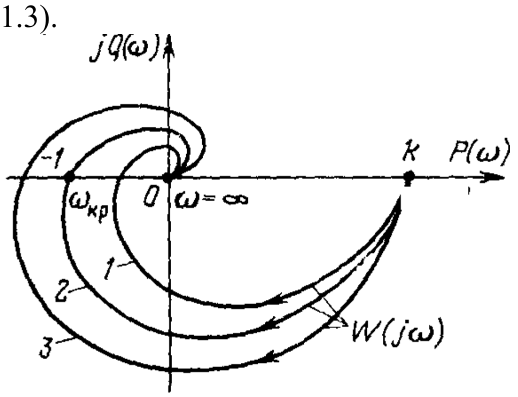


Рис. 1.3. График АФЧХ разомкнутого контура:
1 – устойчивая система, 2 – на границе устойчивости, 3 – неустойчивая

Ко всем автоматически системам регулирования предъявляют определенные требования к быстродействию, колебательности, перерегулированию, точности и плавности протекания процесса.

Качество переходного процесса можно оценить по его свободной и вынужденной составляющим.

По виду кривой переходного процесса, полученной экспериментально или теоретически, можно судить об определенных показателях, называемых прямыми оценками качествами (рис. 1.4).

Прямые оценки качества:

1) время регулирования – то время, когда регулируемая величина последний раз пересечёт пределы зоны, равной диапазону $2\cdot\delta$, где $\delta = 0{,}05\cdot y(\infty)$ – для переходного процесса, полученного по каналу задания или $\delta = 0{,}05\cdot K_{об}$ – для переходного процесса, полученного по каналу возмущения;

2) перерегулирование можно найти из формул:

$$\sigma = \frac{A_1}{y(\infty)}\cdot 100\ \% \text{ или } \sigma = \frac{A_3}{A_1}\cdot 100\ \%;$$

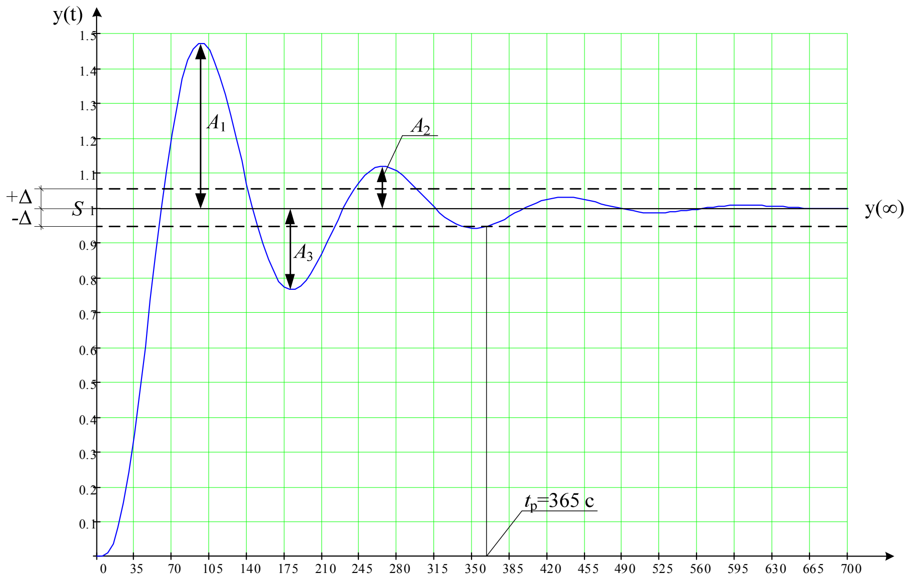


Рис. 1.4. График переходной характеристики

3) статическая ошибка – отклонение регулируемой величины от сигнала задания в установившемся режиме: $\varepsilon_{cm} = S - y(\infty)$;

4) степень затухания – интенсивность изменения регулируемой величины, с которой она приходит к установившемуся состоянию:

$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1};$$

максимальная динамическая ошибка – максимальное отклонение регулируемой величины от установившегося состояния: A_1.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

№ варианта	a_2	a_1	a_0	b_0
1	5000	150	1	1
2	1000	110	1	1
3	1200	120	1	2
4	4000	140	1	1
5	2600	130	1	1
6	4500	160	1	2
7	2464	100	1	1
8	5500	170	1	1
9	7000	180	1	2
10	4650	150	1	1
11	800	110	1	1
12	910	120	1	2
13	3450	140	1	1
14	2120	130	1	1
15	4100	160	1	2
16	2436	100	1	1
17	5125	170	1	1

18	7200	180	1	2
19	4202	150	1	1
20	805	110	1	1
21	100	120	1	2
22	1000	130	1	1
23	5600	140	1	1
24	4200	150	1	2
25	13000	160	1	1
26	8100	170	1	1
27	6900	180	1	2
28	5400	190	1	1
29	3600	100	1	1
30	1800	110	1	2
31	1850	120	1	1
32	6100	130	1	1
33	8100	140	1	2
34	5950	150	1	1
35	1605	160	1	1
36	1700	170	1	2
37	1890	180	1	1
38	2700	190	1	1
39	2190	200	1	2
40	4800	100	1	1