

**Начальные данные:**

$$L_1 := 1 \text{ м} \quad L_2 := 2 \text{ м} \quad L_3 := 1 \text{ м}$$

$$A_1 := 100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

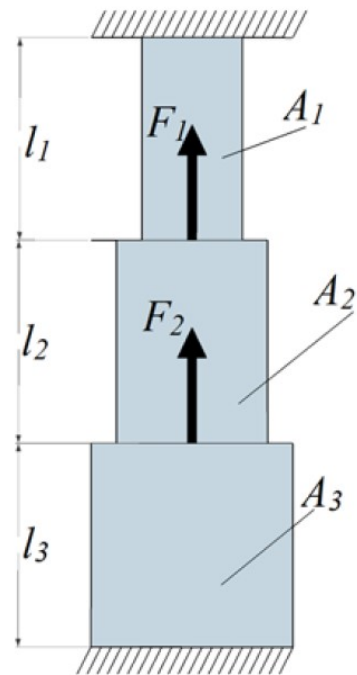
$$A_2 := 200 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$A_3 := 300 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$F_1 := 30000 \text{ Н} \quad F_2 := 20000 \text{ Н}$$

$$E := 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} \quad \rho := 7850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad [\sigma] := 160 \text{ МПа}$$

$$g := 9.81$$



**Статически определимая задача**

**Решение:**

Составляем уравнение равновесия

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-R_A + F_1 + F_2 = 0$$

$$R_A := F_1 + F_2 = 50000 \text{ Н}$$

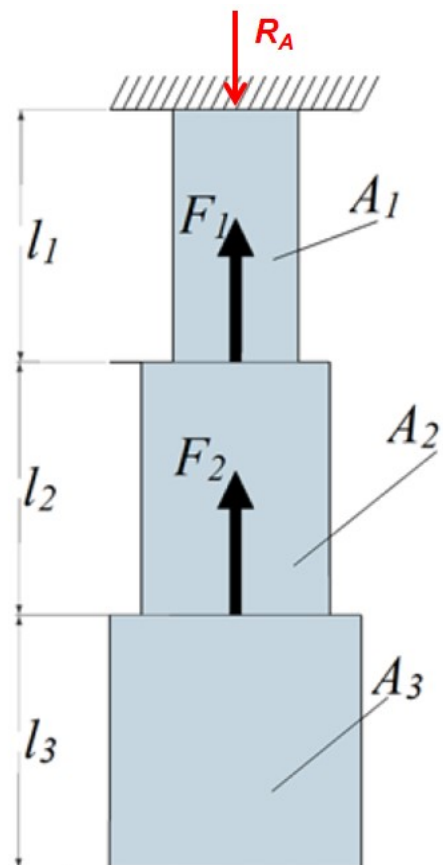
Находим внутренние усилия

$$N_1 := -R_A = -50000 \text{ Н}$$

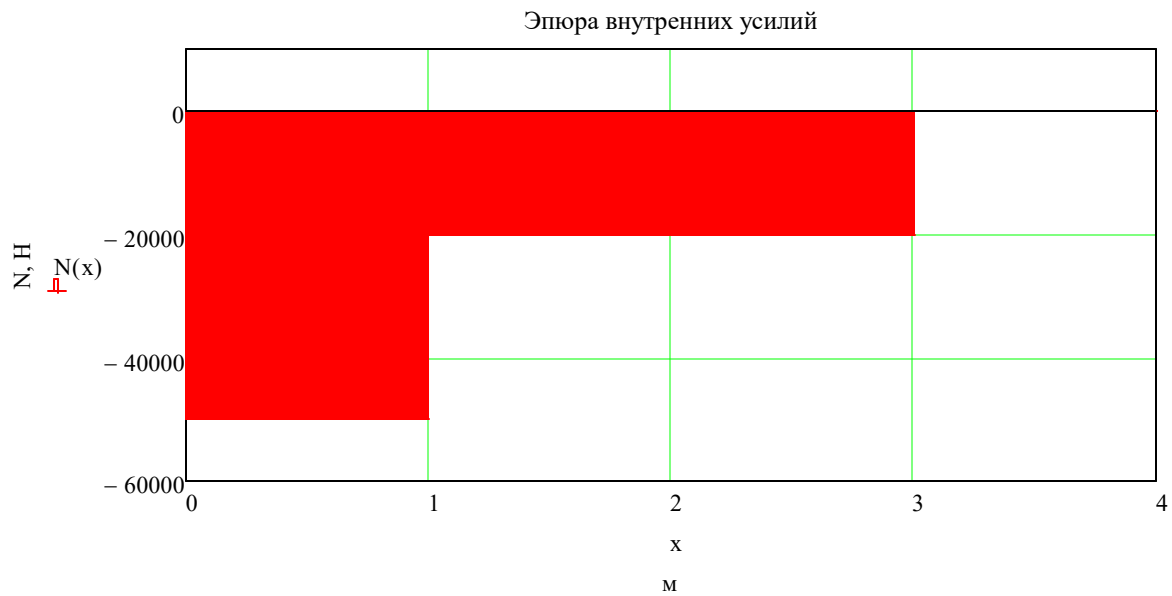
$$N_2 := -R_A + F_1 = -20000 \text{ Н}$$

$$N_3 := -R_A + F_1 + F_2 = 0 \text{ Н}$$

Строим эпюру внутренних усилий



$$N(x) := \begin{cases} N_1 & \text{if } 0 \leq x \leq L_1 \\ N_2 & \text{if } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2 \\ N_3 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Находим нормальные напряжения на участках:

$$\sigma_1 := \frac{N_1}{A_1 \cdot 10^3} = -5000 \text{ кПа}$$

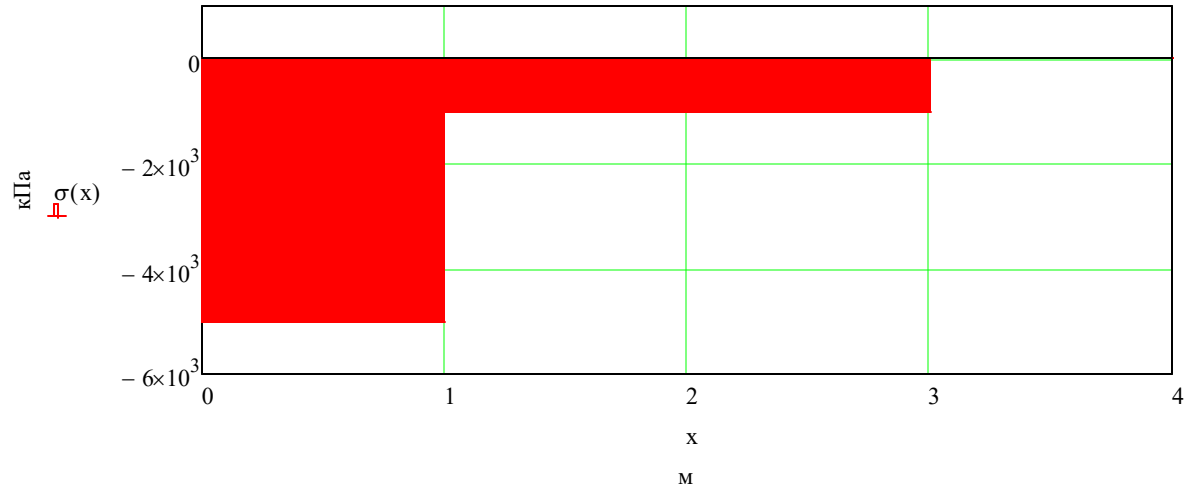
$$\sigma_2 := \frac{N_2}{A_2 \cdot 10^3} = -1000 \text{ кПа}$$

$$\sigma_3 := \frac{N_3}{A_3 \cdot 10^3} = 0 \quad \text{кПа}$$

Строим эпюру нормальных напряжений

$$\sigma(x) := \begin{cases} \sigma_1 & \text{if } 0 \leq x \leq L_1 \\ \sigma_2 & \text{if } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2 \\ \sigma_3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Эпюра нормальных напряжений



Находим удлинения участков:

$$\Delta L_1 := \frac{\sigma_1 \cdot L_1 \cdot 10^6}{E} = -0.025 \quad \text{мм}$$

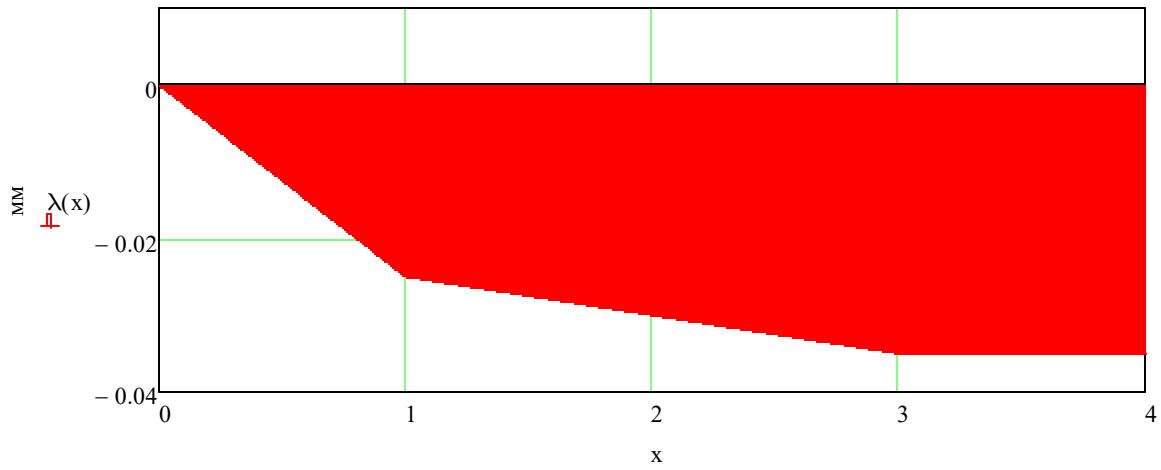
$$\Delta L_2 := \frac{\sigma_2 \cdot L_2 \cdot 10^6}{E} = -0.01 \quad \text{мм}$$

$$\Delta L_3 := \frac{\sigma_3 \cdot L_3 \cdot 10^6}{E} = 0 \quad \text{мм}$$

Строим эпюру удлинений:

$$\lambda(x) := \begin{cases} \frac{\sigma_1 \cdot x \cdot 10^6}{E} & \text{if } 0 \leq x \leq L_1 \\ \Delta L_1 + \frac{\sigma_2 \cdot (x - L_1) \cdot 10^6}{E} & \text{if } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2 \\ \Delta L_1 + \Delta L_2 + \frac{\sigma_3 \cdot (x - L_1 - L_2) \cdot 10^6}{E} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Эпюра удлинений



Статически неопределимая задача

Решение:

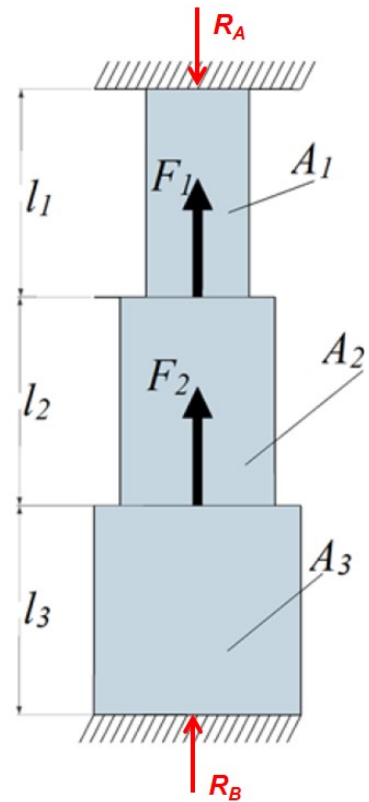
Записываем уравнение равновесия и уравнение совместных деформаций

$$\Sigma F_y = 0$$

Given

$$-R_A + F_1 + F_2 + R_B = 0$$

$$\frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E} - \frac{F_2 \cdot L_1}{A_1 \cdot E} - \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E} - \frac{R_B \cdot L_1}{A_1 \cdot E} - \frac{R_B \cdot L_2}{A_2 \cdot E} - \frac{R_B \cdot L_3}{A_3 \cdot E} = 0$$



$$V := \text{Find}(R_A, R_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 20000 \\ -30000 \end{pmatrix}$$

$$R_A := V_0 = 20000 \quad \text{кН}$$

$$R_B := V_1 = -30000 \text{ кН}$$

Находим внутренние усилия

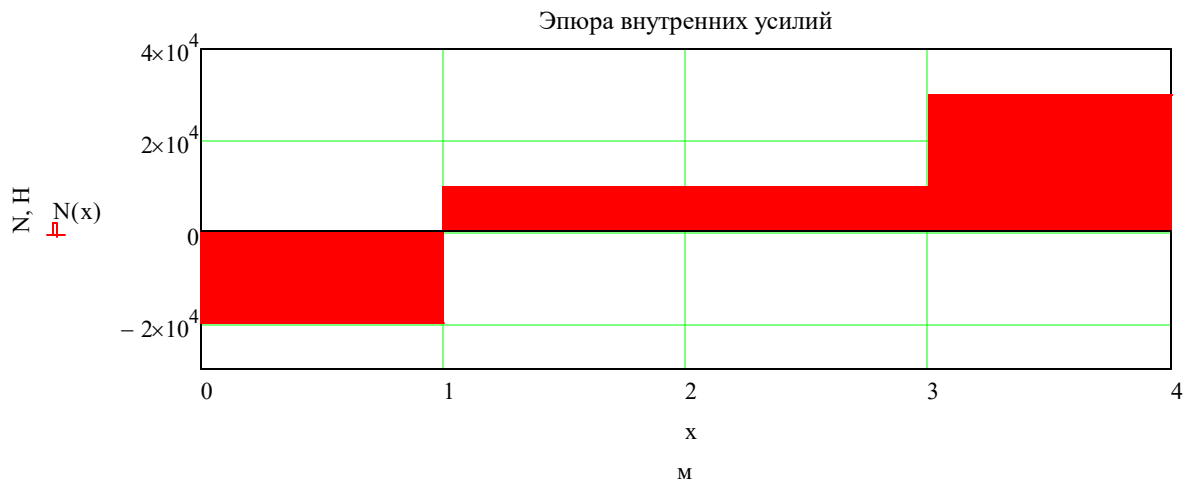
$$N_1 := -R_A = -20000 \text{ Н}$$

$$N_2 := -R_A + F_1 = 10000 \text{ Н}$$

$$N_3 := -R_A + F_1 + F_2 = 30000 \text{ Н}$$

Строим эпюру внутренних усилий

$$N(x) := \begin{cases} (N_1) & \text{if } 0 \leq x \leq L_1 \\ (N_2) & \text{if } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2 \\ (N_3) & \text{otherwise} \end{cases}$$



Находим нормальные напряжения на участках:

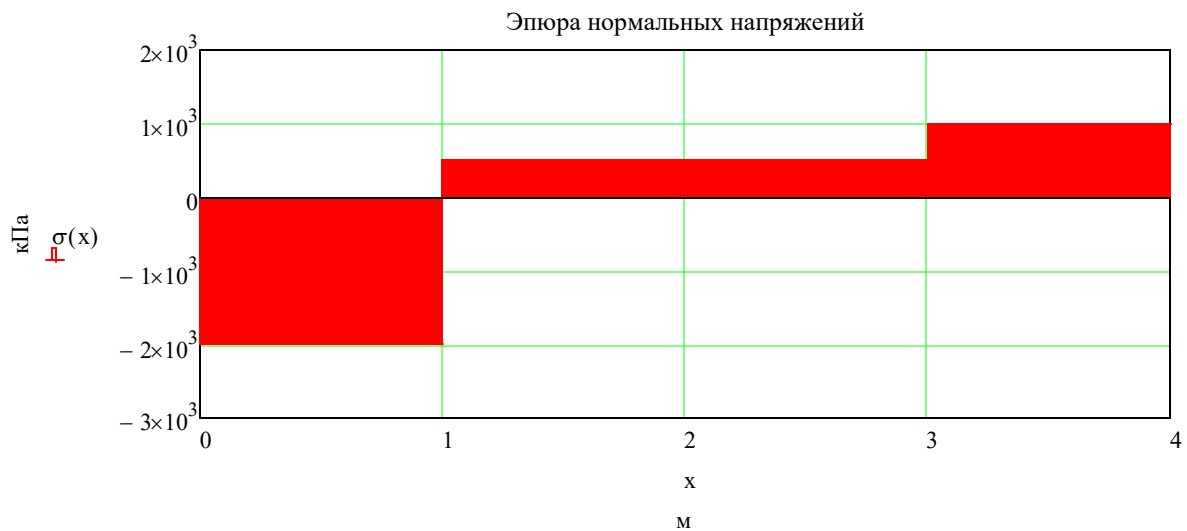
$$\sigma_1 := \frac{N_1}{A_1 \cdot 10^3} = -2000 \text{ кПа}$$

$$\sigma_2 := \frac{N_2}{A_2 \cdot 10^3} = 500 \text{ кПа}$$

$$\sigma_3 := \frac{N_3}{A_3 \cdot 10^3} = 1000 \quad \text{кПа}$$

Строим эпюру нормальных напряжений

$$\sigma(x) := \begin{cases} \sigma_1 & \text{if } 0 \leq x \leq L_1 \\ \sigma_2 & \text{if } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2 \\ \sigma_3 & \text{otherwise} \end{cases}$$



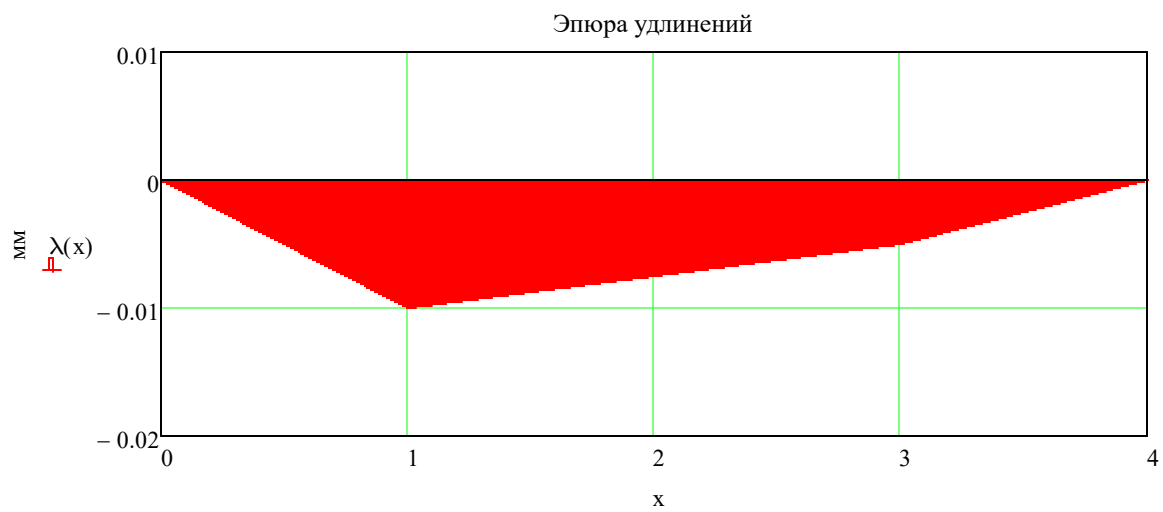
Находим удлинения участков:

$$\Delta L_1 := \frac{\sigma_1 \cdot L_1 \cdot 10^6}{E} = -0.01 \quad \text{мм}$$

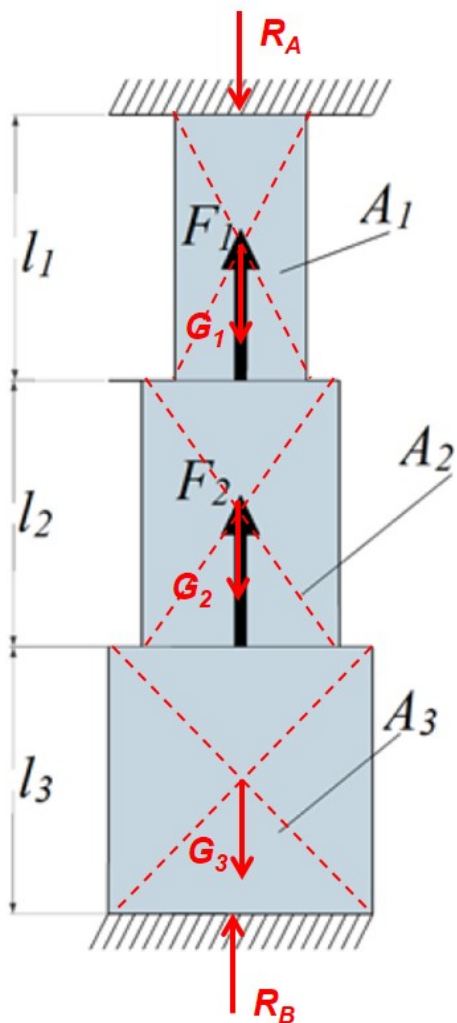
$$\Delta L_2 := \frac{\sigma_2 \cdot L_2 \cdot 10^6}{E} = 0.005 \quad \text{мм}$$

$$\Delta L_3 := \frac{\sigma_3 \cdot L_3 \cdot 10^6}{E} = 0.005 \quad \text{мм}$$

$$\lambda(x) := \begin{cases} \frac{\sigma_1 \cdot x \cdot 10^6}{E} & \text{if } 0 \leq x \leq L_1 \\ \Delta L_1 + \frac{\sigma_2 \cdot (x - L_1) \cdot 10^6}{E} & \text{if } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2 \\ \Delta L_1 + \Delta L_2 + \frac{\sigma_3 \cdot (x - L_1 - L_2) \cdot 10^6}{E} & \text{otherwise} \end{cases}$$



Учет собственного веса



Найдем силы тяжести участков

$$G_1 := L_1 \cdot A_1 \cdot \rho \cdot g = 770.1 \quad \text{Н}$$

$$G_2 := L_2 \cdot A_2 \cdot \rho \cdot g = 3080.3 \quad \text{Н}$$

$$G_3 := L_3 \cdot A_3 \cdot \rho \cdot g = 2310.3 \quad \text{Н}$$

Записываем уравнение равновесия и уравнение совместных деформаций

$$\Sigma F_y = 0$$

Given

$$-R_A + F_1 + F_2 + R_B - G_1 - G_2 - G_3 = 0$$



$$\frac{G_1 \cdot \frac{L_1}{2}}{A_1 \cdot E} - \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E} + \frac{G_2 \cdot L_1}{A_1 \cdot E} + \frac{G_2 \cdot \frac{L_2}{2}}{A_2 \cdot E} - \frac{F_2 \cdot L_1}{A_1 \cdot E} - \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E} + \frac{G_3 \cdot L_1}{A_1 \cdot E} + \frac{G_3 \cdot L_2}{A_2 \cdot E} + \frac{G_3 \cdot \frac{L_3}{2}}{A_3 \cdot E} - \frac{R_B \cdot L_1}{A_1 \cdot E} - \dots$$

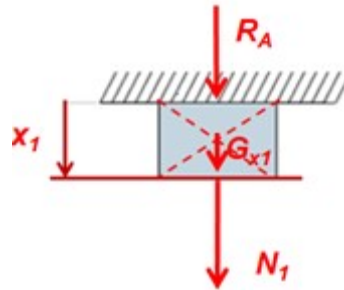
$$V := \text{Find}(R_A, R_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 18129.793571428571386 \\ -25709.526428571428014 \end{pmatrix}$$

$$R_A := V_0 = 18129.8 \quad \text{kH}$$

$$R_B := V_1 = -25709.5 \quad \text{kH}$$

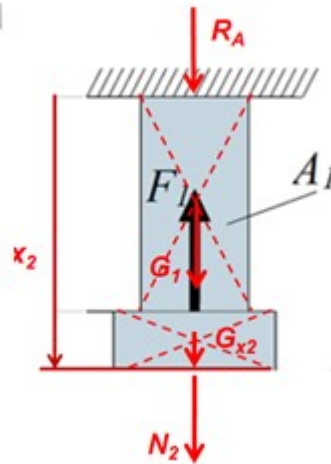
$$G_{x1}(x) := x \cdot [(A_1) \cdot \rho \cdot g]$$

$$N_1(x) := -R_A - G_{x1}(x)$$



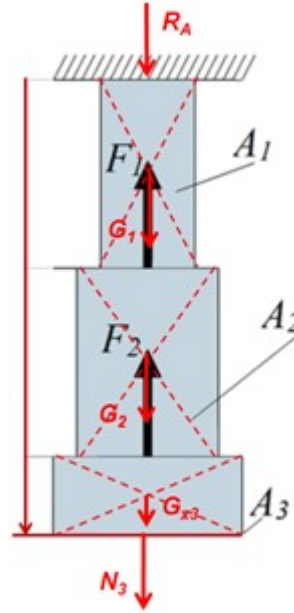
$$G_{x2}(x) := (x - L_1) \cdot [(A_2) \cdot \rho \cdot g]$$

$$N_2(x) := -R_A + F_1 - G_1 - G_{x2}(x)$$

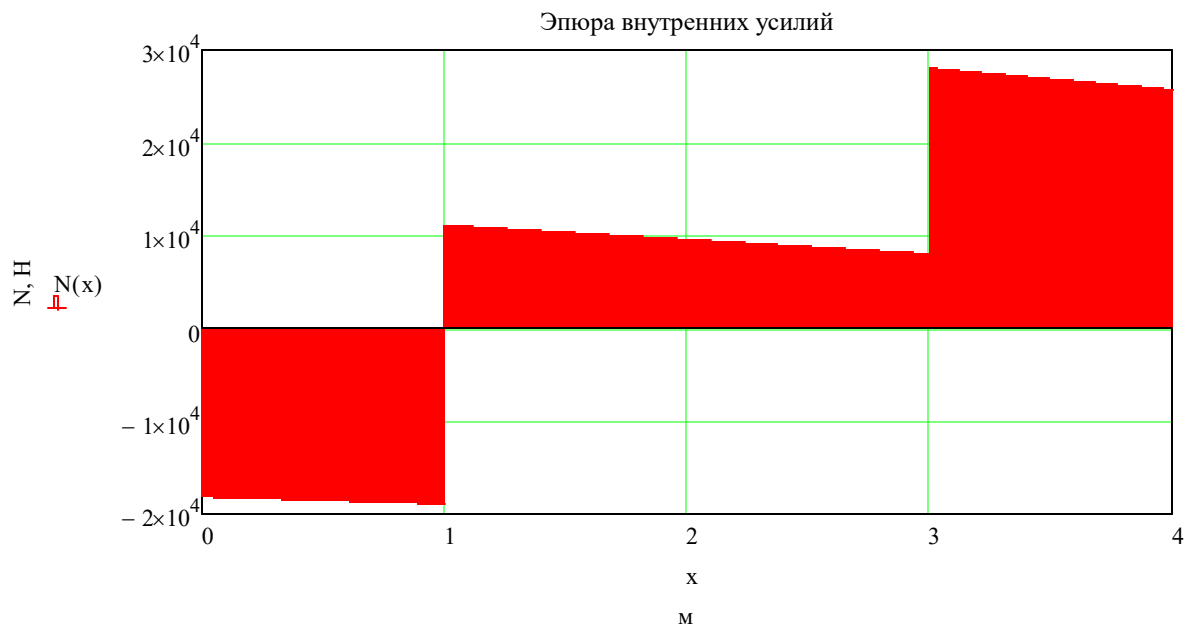


$$G_{x3}(x) := (x - L_1 - L_2) \cdot [(A_3) \cdot \rho \cdot g]$$

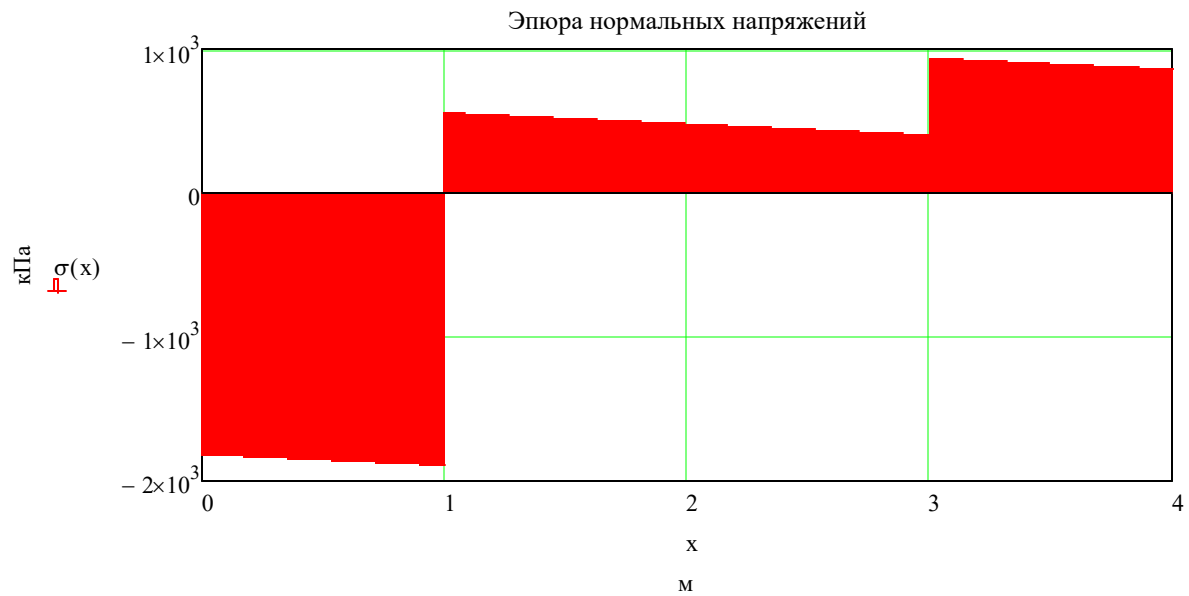
$$N_3(x) := (-R_A + F_1 + F_2 - G_1 - G_2 - G_{x3}(x))$$



$$N(x) := \begin{cases} N_1(x) & \text{if } 0 \leq x \leq L_1 \\ N_2(x) & \text{if } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2 \\ N_3(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\sigma(x) := \begin{cases} \frac{N_1(x)}{A_1 \cdot 10^3} & \text{if } 0 \leq x \leq L_1 \\ \frac{N_2(x)}{A_2 \cdot 10^3} & \text{if } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2 \\ \frac{N_3(x)}{A_3 \cdot 10^3} & \text{otherwise} \end{cases}$$



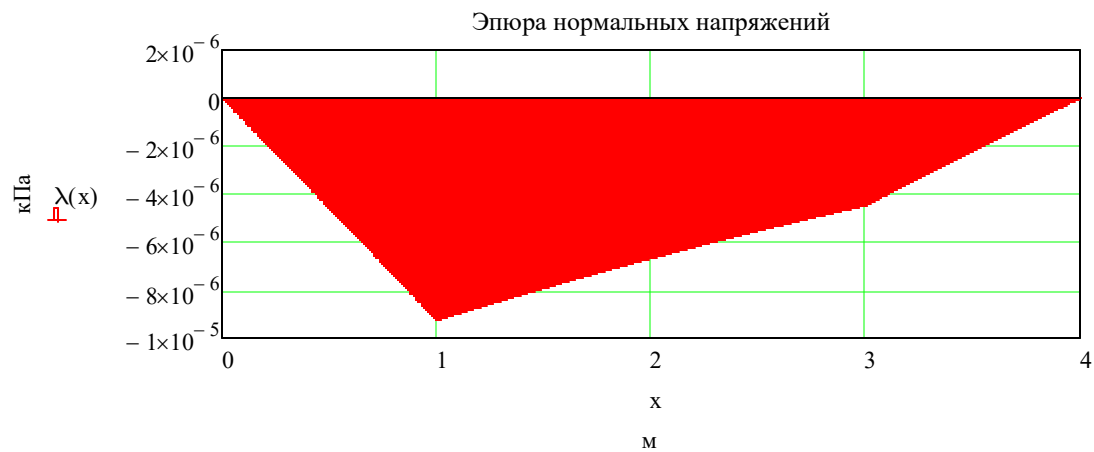
Находим удлинения участков

$$\Delta L_1 := \frac{\int_0^{L_1} (N_1(x)) dx}{E \cdot A_1} = -9.257 \times 10^{-6} \text{ м}$$

$$\Delta L_2 := \frac{\int_{L_1}^{L_1+L_2} (N_2(x)) dx}{(E \cdot A_2)} = 4.78 \times 10^{-6} \text{ м}$$

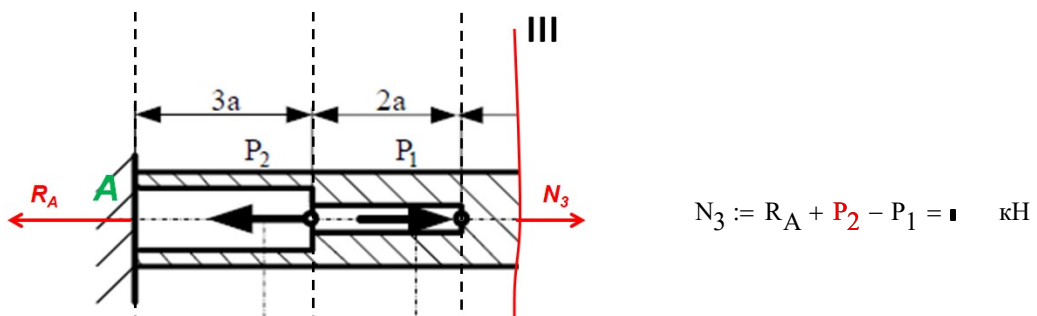
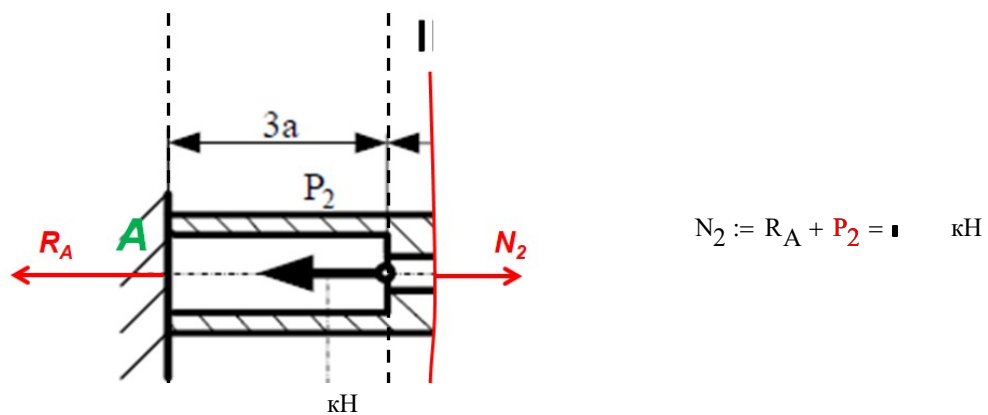
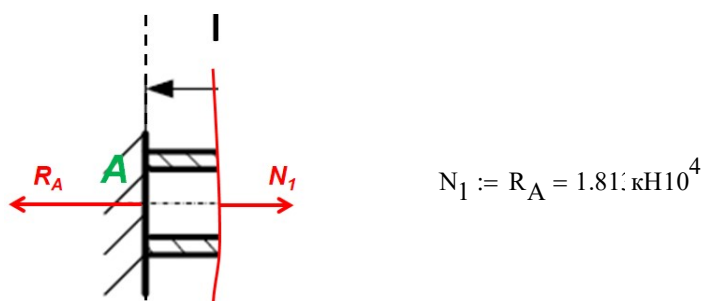
$$\Delta L_3 := \frac{\int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} (N_3(x)) dx}{(E \cdot A_3)} = 4.477 \times 10^{-6} \text{ м}$$

$$\lambda(x) := \begin{cases} \frac{\int_0^x (N_1(x)) dx}{(E \cdot A_1)} & \text{if } 0 \leq x \leq L_1 \\ \Delta L_1 + \frac{\int_{L_1}^x (N_2(x)) dx}{(E \cdot A_2)} & \text{if } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2 \\ \Delta L_1 + \Delta L_2 + \frac{\int_{L_1+L_2}^x ((N_3(x))) dx}{(E \cdot A_3)} & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 = 0$$

Методом сечений находим внутренние усилия, действующие на участки:



Находим нормальные напряжения на участках:

$$\sigma_1 := \frac{N_1 \cdot 10^3}{A} = \blacksquare \quad \text{МПа}$$

$$\sigma_2 := \frac{N_2 \cdot 10^3}{2 \cdot A} = \blacksquare \quad \text{МПа}$$

$$\sigma_3 := \frac{N_3 \cdot 10^3}{3 \cdot A} = \blacksquare \quad \text{МПа}$$

Находим удлинения участков:

$$\Delta L_1 := \frac{\sigma_1 \cdot 3 \cdot a \cdot 10^3}{E} = \blacksquare \quad \text{мм}$$

$$\Delta L_2 := \frac{\sigma_2 \cdot 2 \cdot a \cdot 10^3}{E} = \blacksquare \quad \text{мм}$$

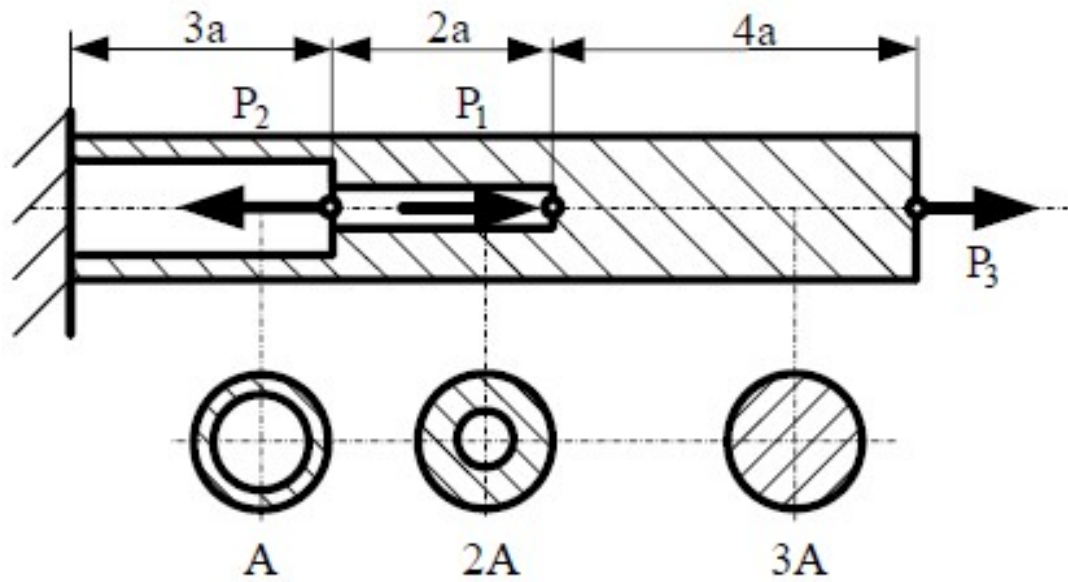
$$\Delta L_3 := \frac{\sigma_3 \cdot 4 \cdot a \cdot 10^3}{E} = \blacksquare \quad \text{мм}$$

**Построение эпюр**

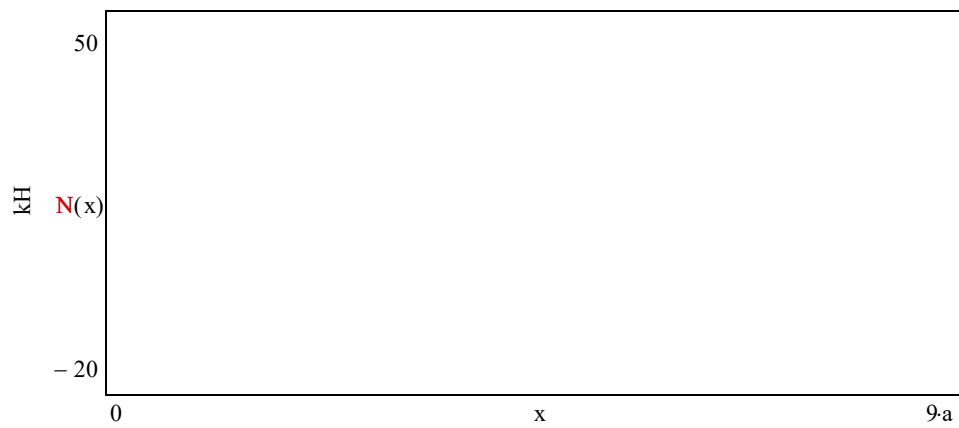
$$N(x) := \begin{cases} N_1 & \text{if } 0 \leq x < 3 \cdot a \\ N_2 & \text{if } (3 \cdot a \leq x < 5 \cdot a) \\ N_3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sigma(x) := \begin{cases} \sigma_1 & \text{if } 0 \leq x < 3 \cdot a \\ \sigma_2 & \text{if } 3 \cdot a \leq x < 5 \cdot a \\ \sigma_3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\lambda(x) := \begin{cases} \frac{\sigma_1 \cdot x \cdot 10^3}{E} & \text{if } 0 \leq x < 3 \cdot a \\ \frac{\sigma_1 \cdot 3 \cdot a \cdot 10^3}{E} + \frac{\sigma_2 \cdot (x - 3 \cdot a) \cdot 10^3}{E} & \text{if } 3 \cdot a \leq x < 5 \cdot a \\ \frac{\sigma_1 \cdot 3 \cdot a \cdot 10^3}{E} + \frac{\sigma_2 \cdot 2 \cdot a \cdot 10^3}{E} + \frac{\sigma_3 \cdot (x - 5 \cdot a) \cdot 10^3}{E} & \text{otherwise} \end{cases}$$

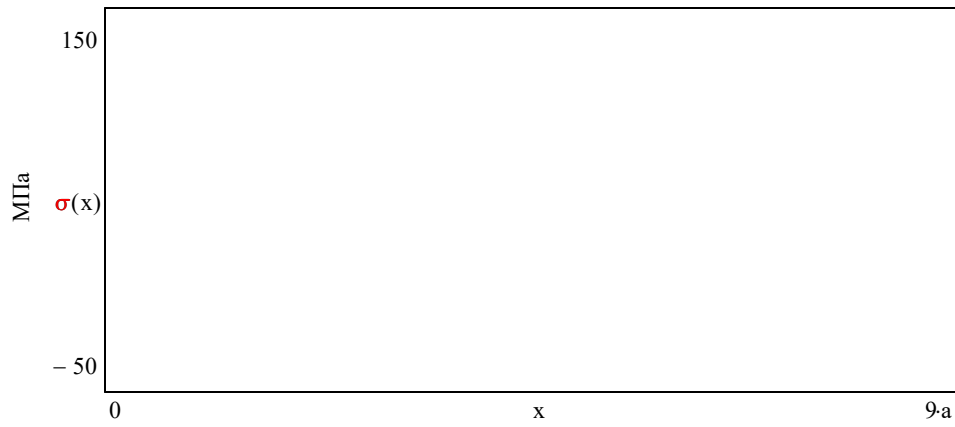


Эпюра внутренних усилий

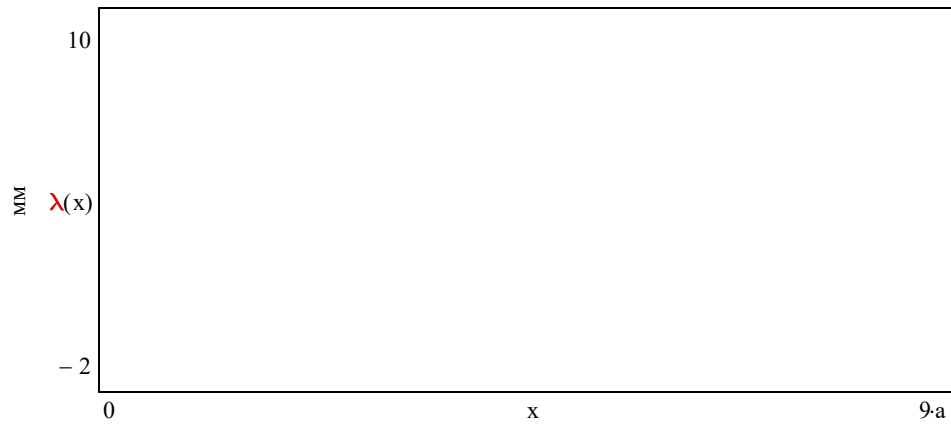




Эпюра нормальных напряжений



Эпюра удлинений



$$\frac{R_B \cdot L_2}{A_2 \cdot E} - \frac{R_B \cdot L_3}{A_3 \cdot E} = 0$$